

СТОХАСТИЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи физических наук»*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.31
З-36
УДК 530.1

ЗАСЛАВСКИЙ Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука.
Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

Книга посвящена систематическому описанию явления стохастичности, или хаоса, которое возникает при определенных условиях в нелинейных динамических системах и появление которого не обусловлено действием каких-либо случайных сил на систему. Книга содержит изложение вопросов теории хаоса общего характера, а также приложения из различных областей физики (механики, оптики, теории плазмы, гидродинамики и др.). Значительное место в книге занимает исследование возможности появления хаоса в квантовых системах.

Рис. 76. Библ. 214 назв.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *М. И. Рабинович*;

А. С. Пиковский.

З $\frac{1704020000-126}{053(02)-84}$ 99-84

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Элементы динамики и эргодической теории	9
§ 1.1. Движение в фазовом пространстве	9
§ 1.2. Переменные действие — угол	12
§ 1.3. Нелинейный резонанс	17
§ 1.4. Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ)	22
§ 1.5. Эргодичность и перемешивание	27
§ 1.6. Энтропия	31
§ 1.7. Исторические замечания	36
Комментарии к гл. 1	40
Глава 2. Критерий стохастичности	42
§ 2.1. Две модели перемешивания	42
§ 2.2. Критерий стохастичности	52
§ 2.3. Столкновение абсолютно твердых шариков	56
§ 2.4. Рассеивающие бильярды (бильярды Синая)	59
Комментарии к гл. 2	60
Глава 3. Стохастическое ускорение частиц (ускорение Ферми)	62
§ 3.1. Механизм стохастического ускорения	62
§ 3.2. Гравитационная машина	67
§ 3.3. Перемешивание скользящих электронов	69
Комментарии к гл. 3	73
Глава 4. Стохастическая неустойчивость колебаний	74
§ 4.1. Универсальное преобразование (отображение) нелинейных колебаний	74
§ 4.2. Критерий перекрытия резонансов (критерий Чирикова)	80
§ 4.3. Синус-преобразование	83
Комментарии к гл. 4	85
Глава 5. Теория образования стохастического слоя	87
§ 5.1. Стохастическое разрушение сепаратрисы	87
§ 5.2. Особенности образования стохастического слоя	90
§ 5.3. Общая картина стохастического разрушения интегралов движения в фазовом пространстве	94
§ 5.4. Гомоклиническая структура в окрестности сепаратрисы	99
Комментарии к гл. 5	101
Глава 6. Перемешивание и кинетическое уравнение	103
§ 6.1. Принципы кинетического описания	103
§ 6.2. Кинетика нелинейного осциллятора	107
§ 6.3. Диффузионное движение частицы в поле волнового пакета	116
Комментарии к гл. 6	121

Глава 7. Нелинейное волновое поле	123
§ 7.1. Проблема Ферми — Паста — Улама (ФПУ)	123
§ 7.2. Стохастизация волнового поля	127
§ 7.3. Кинетическое описание волнового поля	136
§ 7.4. Кинетическое уравнение для фононов	140
Комментарии к гл. 7	141
Глава 8. Стохастичность нелинейных волн	142
§ 8.1. Стационарная динамика нелинейных волн	142
§ 8.2. Возмущение нелинейных волн	145
§ 8.3. Нелинейный резонанс	148
§ 8.4. Стохастическая неустойчивость нелинейной волны	152
Комментарии к гл. 8	155
Глава 9. Стохастичность квантовых систем. Нестационарные задачи	157
§ 9.1. Квантовые K -системы	157
§ 9.2. Квантовые отображения	161
§ 9.3. Проектирование в базисе когерентных состояний	164
§ 9.4. Расплывание волновых пакетов	169
§ 9.5. $\widehat{\mathcal{F}}$ -отображение и условие стохастичности (приближенный анализ)	171
Комментарии к гл. 9	178
Глава 10. Стохастичность квантовых систем. Нестационарные задачи (продолжение)	179
§ 10.1. Квантовое отображение волновых функций	179
§ 10.2. Анализ квантовых отображений	183
§ 10.3. Взаимодействие квантовых резонансов	187
Комментарии к гл. 10	197
Глава 11. Кинетическое описание квантовых K -систем	198
§ 11.1. Уравнение для матрицы плотности	199
§ 11.2. Вывод кинетического уравнения	202
Глава 12. Разрушение интегралов движения в квантовых системах	209
§ 12.1. Исторические замечания	209
§ 12.2. Постановка задачи	215
§ 12.3. Универсальность K -систем и периодические орбиты	218
§ 12.4. Правила квантования	223
§ 12.5. Распределение расстояний между соседними уровнями	225
§ 12.6. Некоторые общие замечания о квантовых K -системах	232
§ 12.7. Стохастическое разрушение связанного состояния атомов с полем излучения	235
§ 12.8. Внутримолекулярный обмен энергии	240
Комментарии к гл. 12	242
Дополнения	244
Д1. Перемешивающие бильярды	244
Д2. Диффузия Арнольда	248
Д3. Стохастичность в диссипативных динамических системах	250
Д4. Нелинейная динамика лучей	260
Литература	264
Предметный указатель	270

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статистическая механика занимает среди других разделов физики особое место. При сравнительно коротком периоде существования она, со времени появления H -теоремы Больцмана, является областью, в которой напряженность и драматизм событий, затухая иногда на короткое время, вспыхивает после этого с новой энергией, оказывая влияние на развитие других областей физики. В этом, может быть, не было бы ничего удивительного, если бы изменение наших представлений не происходило без открытия каких-либо новых частиц или без использования новых фундаментальных физических закономерностей. Все события разыгрываются на одной и той же сцене, на которой действуют любые частицы с любыми законами взаимодействия между собой. Однако основной вопрос статистической механики продолжает, вплоть до настоящего времени, оставаться предметом многочисленных дискуссий, исследований и, как это ни парадоксально, источником многочисленных приложений: откуда в системе берется хаос, позволяющий применить для ее описания различные вероятностные методы? Многочисленные монографии *) содержат различные попытки ответа на различные части этой проблемы. Их разнообразие и многообразие отражают недостатки современной теории, хотя этим недостаткам не всегда можно придать четкую формулировку.

Новый этап в развитии наших представлений о хаосе и его зарождении возник в последние два десятилетия. Его происхождение было подготовлено рядом работ, из которых следует выделить результаты Хопфа и Н. С. Крылова. «Взрыв» произошел после работ Колмогорова, связанных с условиями устойчивости динамических систем (так называемая теория Колмогорова — Арнольда — Мозера), с одной стороны, и с введением динамической энтропии (так называемая K -энтропия, или энтропия Колмогорова) для сильно неустойчивых систем, с другой стороны.

Фундаментальность изменения наших представлений, связанных с новыми результатами, можно проиллюстрировать следующим образом.

Традиционное понятие об области, где действуют законы статистической физики, заключается в том, что взаимодействующих

*) См., например, [1—12].

частиц должно быть достаточно много. Тем не менее сейчас известно, что в сколь угодно большом числе достаточно сложно взаимодействующих частиц хаоса может не быть (цепочка Тода) и, наоборот, хаос существует в системе всего лишь из двух связанных нелинейных осцилляторов.

Та или иная из описанных ситуаций определяется отсутствием или существованием нового физического явления, которое называют стохастичностью и которое заключается в следующем. Динамическая система может испытывать особого типа неустойчивость. Эта неустойчивость приводит к тому, что различные динамические характеристики системы изменяются со временем случайным образом.

Появление стохастичности (хаоса) является внутренним свойством системы и не связано с действием каких-либо априори случайных сил. Теперь мы можем не только указать различные механизмы, порождающие случайные события (т. е. создать идеальную рулетку), но и доказать, что эти механизмы производят именно то, для чего они предназначены (например, что выбрасывание шарика в рулетке при определенных условиях происходит по закону случая).

Однако наиболее важным обстоятельством является не то, что при определенных условиях может рождаться хаос, а то, насколько это типично для систем общего вида. И, по-видимому, именно здесь содержится объяснение того необычайно большого числа работ и результатов, которые появились в последнее время и посвящены явлению стохастичности. Хаос (как внутреннее свойство системы) возникает почти всегда и почти везде! И если мы его не всегда обнаруживаем, то лишь потому, что либо он возникает в очень узкой области параметров, либо проявляется на очень больших временах, либо вуалируется другими, более сильными процессами.

Область приложений явления стохастичности оказалась необычайно широкой. Она охватывает практически все основные разделы современной физики, классической и квантовой. В этом и состоит новый и необычный аспект проблемы обоснования статистической физики, которая ранее представлялась несколько академической.

Цель настоящей монографии познакомить читателя с явлением стохастичности, методами его анализа и рядом приложений к разным задачам физики. После появления первых обзоров по стохастичности [14, 15, 24] прошел большой срок, в течение которого усилиями большого числа исследователей были получены новые важные результаты и существенно расширена область приложений явления стохастичности. Данная книга является обзором, а отбор материала в ней связан с исследованиями автора. Вошедший материал основан на монографии автора [14], вышедшей в 1970 г., обзорах [15, 124, 137, 138] и ряде обзорных лекций, читавшихся автором в различное время. Содержание книги построено следующим образом.

Первая глава является вспомогательной. В ней излагаются некоторые элементы динамики и эргодической теории, которые существенны для использования в дальнейшем.

Вторая глава знакомит с понятием критерия стохастичности и с некоторыми простейшими моделями, в которых можно не только получить такой критерий, но и провести статистический анализ свойств системы.

Третья глава содержит иллюстративный пример (ускорение Ферми), который допускает исследование сравнительно простыми методами анализа и в то же время отражает многие характерные особенности более сложных систем. Не менее важными являются и приложения стохастического механизма ускорения Ферми.

Четвертая глава посвящается анализу возникновения стохастичности в нелинейных колебаниях.

Пятая глава является одной из наиболее важных с принципиальной точки зрения. В ней приводится теория образования стохастического слоя и дается общая картина рождения хаоса в динамических гамильтоновых системах.

Столь же важна и шестая глава. В ней строится кинетическое описание систем, в которых внутренняя динамика порождает стохастичность. Особые свойства таких систем позволяют освободиться от априорных гипотез типа «приближения случайных фаз» при выводе кинетического уравнения.

Ближние вопросы рассматриваются и в седьмой главе, в которой исследуются условия стохастизации слабо нелинейного волнового поля.

В восьмой главе вводится объект исследования нового типа — нелинейная периодическая волна. Здесь же развивается метод анализа неустойчивости и хаоса такой волны под действием возмущения.

Последующие главы (9—12) посвящены исследованию квантовых систем.

Девятая и десятая главы содержат критический анализ проблемы устойчивости для квантовых систем, постановку задачи, понятие о стохастичности квантовых систем и особенности стохастизации в квантовых нестационарных задачах.

Одиннадцатая глава аналогична шестой главе. Она посвящается выводу квантового кинетического уравнения в условиях, когда в квантовой системе внутренняя динамика порождает хаос.

Двенадцатая глава связана с исследованием стохастических свойств энергетического спектра таких квантовых систем, которые в классическом пределе обладают «внутренним» хаосом. В этой главе обсуждаются также различные свойства систем с «разрушенными» квантовыми числами.

Можно также сказать, что главы 9—12 посвящены квантованию систем, стохастических в классическом пределе (им дано в книге название квантовых K -систем).

Понятие стохастичности всюду используется только в одном смысле: это случайная динамика системы, порождаемая только ее внутренними особенностями в отсутствие внешних случайных сил (таким системам в классическом случае дано название *K*-систем).

Все главы снабжены соответствующей информацией об используемом аппарате и физическими и численными примерами.

Книга заканчивается рядом дополнений, которые позволяют расширить представление о методах, системах и приложениях теории стохастичности.

Автор имел счастливую возможность выполнить первые свои работы по исследованию стохастичности совместно с Р. З. Сагдеевым и Б. В. Чириковым. Они определили дальнейший интерес автора к этой проблеме. Практически все первые результаты подробно обсуждались с М. А. Леонтовичем и на руководимом им семинаре в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. Эти беседы существенным образом повлияли на многие последующие работы автора. Я постоянно пользовался возможностью обсуждения интересующих меня вопросов с В. И. Арнольдом, И. М. Лифшицом и Я. Г. Синаем. Часть результатов, касающаяся исследования стохастичности в квантовых системах, была получена совместно с Г. П. Берманом (гл. 9—11). Моими соавторами были также П. И. Белобров, А. М. Иомин, А. Р. Коловский, Х.-Р. Я. Рачко, В. Н. Сынах, Г. Х. Тартаковский и Н. Н. Филоненко. Замечания Я. Г. Синая помогли устранить ряд неточностей. Значительная помощь в подготовке рукописи к печати была оказана мне В. А. Зыковой.

Всем им я хочу выразить искреннюю признательность за неоценимую помощь.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ И ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Новое понимание явлений статистической механики возникло в результате достижений последних лет в области теории динамических систем. Их нелинейные свойства играют существенную роль в характере физических процессов. Поэтому связь между нелинейной динамикой и современной эргодической теорией оказалась значительно более сильной, чем это предполагалось ранее. Сейчас уже невозможно рассматривать вопросы, связанные с появлением стохастического движения, не затрагивая ряда новых фундаментальных результатов в области классической динамики. Современные монографии [16, 17, 33] включают эти результаты. В настоящей главе будут рассмотрены некоторые общие вопросы теории динамических систем, которые необходимы для понимания дальнейшего изложения.

§ 1.1. Движение в фазовом пространстве

Теорема Ляпунова. Теорема Пуанкаре о возвратах. Время возврата. Формула Каца. Уравнение Ляпунова

Состояние частицы (или системы) принято обозначать точкой в фазовом пространстве (q, p) . Система, для которой векторы q и p N -мерны, имеет N степеней свободы. Ее фазовое пространство $2N$ -мерно. Эволюция состояния гамильтоновых систем со временем определяется с помощью функции Гамильтона $H = H(q, p)$. Величины q и p удовлетворяют уравнениям движения

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.1)$$

Можно определить оператор сдвига во времени $\widehat{T}(t)$ на величину t :

$$(q(t), p(t)) = \widehat{T}(t)(q(0), p(0)). \quad (1.2)$$

Оператор $\widehat{T}(t)$ определяется уравнениями (1.1) и называется фазовым потоком [16].

Теорема Лиувилля выражает сохранение произвольного фазового объема Γ под действием оператора $\widehat{T}(t)$, т. е.

$$\Gamma(t) = \widehat{T}(t)\Gamma(0) = \Gamma(0). \quad (1.3)$$

Введем обобщенный вектор тока в фазовом пространстве $J = (\dot{q}, \dot{p})$. Из (1.1) следует, что

$$\operatorname{div} J = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \equiv 0, \quad (1.4)$$

т. е. «фазовая жидкость» несжимаема. Свойства (1.3) и (1.4) эквивалентны [16].

Из теоремы Лиувилля следует теорема Пуанкаре о возврате, состоящая в следующем. Пусть консервативная система (H не зависит явно от времени) совершает финитное (т. е. в ограниченной области фазового пространства) движение. Рассмотрим некоторую область A фазового пространства и выберем в нем точку $z_0 = (q_0, p_0)$ как начальную точку траектории системы. Тогда по истечении некоторого времени система вернется в область A . Исключением может являться множество нулевой меры точек из A , рассматриваемых как начальные.

Обозначим через B множество всех точек из A , которые никогда не возвращаются в A . Пусть через некоторое достаточно большое время t_1 множество точек B переходит в B_1 , т. е.

$$\widehat{T}(t_1)B = B_1.$$

Согласно определению B пересечение B_1 и A равно нулю. Через интервал $t_2 = 2t_1$ имеем

$$\widehat{T}(2t_1)B = \widehat{T}(t_1)B_1 = B_2.$$

Пересечение B_2 и B_1 также равно нулю. Если бы это было не так, то существовали бы точки, которые не выходят из B_1 . Из обратимости уравнений движения (1.1) следует, что эти точки не могли бы и войти в B_1 . Это противоречит их прошлому (при $t=0$ они принадлежали A). Продолжая применять последовательно оператор $\widehat{T}(nt_1)$ к B , получим бесконечную последовательность B_1, B_2, \dots , непересекающихся образов множества B . Согласно теореме Лиувилля

$$\Gamma(B) = \Gamma(B_1) = \Gamma(B_2) = \dots,$$

т. е. в процессе движения точки из B покрывают фазовый объем $\Gamma(B) \cdot \infty$. С другой стороны, из финитности движения следует, что эта область должна быть конечной. Последнее возможно лишь в случае $\Gamma(B) = 0$, что и доказывает теорему (ком.1)*).

Из теоремы Пуанкаре следует, что система будет бесконечное число раз возвращаться в область A (ком. 2). Можно ввести понятие среднего времени возврата, или времени цикла Пуанкаре.

*) Всюду далее так обозначаются ссылки на комментарии к соответствующей главе.

Смолуховский предложил следующую формулу для этого времени:

$$\tau = t \sum_{k=1}^{\infty} k P_k / \sum_{k=1}^{\infty} P_k, \quad (1.5)$$

где P_k — вероятность возврата системы в исходную область A за время kt . Очевидно, что величина P_0 есть просто вероятность нахождения системы в области A . Вычисления, сделанные Кацем [9] для выражения (1.5) в случае эргодического движения системы, приводят к следующему выражению:

$$\tau = t(1 - P_0)/(P_0 - P_1), \quad (1.6)$$

где P_1 — вероятность возврата за время t . Очевидно, что при $t \rightarrow 0$ отличие P_1 от P_0 пропорционально t и τ не зависит от искусственно введенного интервала наблюдения t .

Хорошо известно, что величина цикла Пуанкаре огромна для систем из большого числа частиц и несравненно велика даже по отношению к возрасту Вселенной. Однако стохастическое поведение может возникать и в системе из нескольких степеней свободы (даже двух), и тогда время возврата доступно для наблюдения.

Приведем простой пример, иллюстрирующий действие формулы (1.6). Предположим для простоты, что величину P_1 можно дифференцировать по t . Тогда для малых t справедлива запись $P_1 \approx P_0 + \dot{P}_1 t$ и время цикла Пуанкаре равно

$$\tau = (1 - P_0)/\dot{P}_1.$$

На рис. 1.1 изображены два разных случая эволюции множества A . Очевидно, что в случае (а) точки множества могут собраться в A намного быстрее, чем в случае (б). Это означает, что величины P_0 , P_1 в неустойчивом случае малы по сравнению с устойчивым случаем движения. Отсюда время цикла Пуанкаре

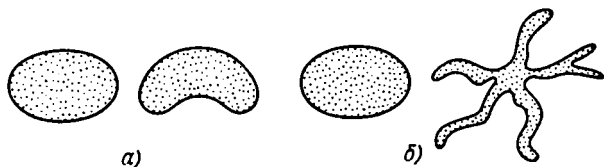


Рис. 1.1. Изменение элемента фазового объема в устойчивом (а) и неустойчивом (б) случаях.

тем больше, чем сильнее неустойчивость системы в фазовом пространстве.

Вернемся снова к способу описания эволюции системы со временем. На примере теоремы Пуанкаре мы видели, что в фазовом пространстве бывает удобно рассматривать движение не отдельной точки, а некоторого множества. Физики обычно

пользуются функцией распределения частиц в фазовом пространстве $f(q, p, t)$, удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{\Gamma} f(q, p, t) d\Gamma = 1, \quad d\Gamma = (dq dp).$$

Дифференциальной формой закона сохранения числа частиц является уравнение непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(Jf) = 0,$$

или, с учетом условия (4),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) называется уравнением Лиувилля. В нем подразумевается, что компоненты тока $J(\dot{q}, \dot{p})$ выражены как функции q, p (и, может быть, t). Следующее замечание существенно: уравнение (1.7) не содержит никакой иной информации, кроме той, которая следует из уравнений движения (1.1). Это вытекает сразу из свойств уравнений в частных производных первого порядка. Решение (1.7) может быть записано в виде

$$f(q, p, t) = f_0(q_0 = q_0(q, p, t), p_0 = p_0(q, p, t)),$$

где связь между (q_0, p_0) и (q, p) определяется из (1.1), а $f_0 = f_0(q_0, p_0) = f(t=0)$ — начальное условие. В частности, для одной частицы имеем

$$f(q, p, t) = \delta(q - q(t))\delta(p - p(t)), \quad (1.8)$$

где $q(t)$ и $p(t)$ определяют траекторию частицы.

Уравнение Лиувилля (1.7) обратимо во времени так же, как и уравнения движения (1.1).

§ 1.2. Переменные действие — угол

Какие переменные «удобны»? Адиабатическая инвариантность. Колебания нелинейного маятника. Плазменные колебания. Спектральные свойства нелинейных колебаний

Выбор переменных, в которых следует решать ту или иную задачу, обычно связан с соображениями удобства, и вопрос о «лучших» переменных на первый взгляд не имеет особого смысла. Однако уже в работах Пуанкаре переменным действие (I) — угол (θ) оказывается определенное предпочтение, особенно при доказательстве общих положений механики. Эта тенденция к использованию переменных (I, θ) в дальнейшем только усиливалась.

Приведем тривиальный пример, выделяющий переменные (I, θ). В замкнутой гамильтоновой системе сохраняется энергия H . Поскольку $I = I(H)$, то I — также интеграл движения. При медленных возмущениях системы существует приближенный интеграл движения. Им оказывается действие I , которое сохра-

няется с экспоненциальной точностью [20]. Можно сказать, что существенные изменения в системе произойдут лишь при достаточно сильных изменениях I .

Введение канонически сопряженных переменных (I, θ) осуществляется для одной степени свободы с помощью соотношений [20]

$$I = -\frac{1}{2\pi} \oint p(q, H) dq = I(H),$$

$$\theta = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}, \quad S(q, I) = S(q, H(I)) = \int p(q, H) dq, \quad (2.1)$$

где $S(q, I)$ — укороченное действие, являющееся для данного случая производящей функцией. Уравнения движения для (I, θ) имеют вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{dH(I)}{dI} \equiv \omega(I). \quad (2.2)$$

Величина $\omega(I)$ является частотой нелинейных колебаний. Свойства величин (I, θ) , вытекающие из (2.2), позволяют представить любое финитное (и, следовательно, периодическое) движение гамильтоновой системы в виде

$$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(I) \exp(in\theta),$$

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(I) \exp(in\theta), \quad (2.3)$$

где коэффициенты разложения a_n, b_n удовлетворяют условию вещественности q и p :

$$a_{-n} = a_n^*, \quad b_{-n} = b_n^*$$

и определяются конкретной задачей. Продемонстрируем использование переменных (I, θ) на двух характерных задачах.

Рассмотрим в качестве первого примера колебания нелинейного маятника:

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad (2.4)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x \quad (2.5)$$

и частотой малых колебаний, равной 1. Особые точки семейства траекторий на фазовой плоскости (x, \dot{x}) находятся путем приравнивания нулю правых частей уравнений движения (1.1):

$$\dot{x} = 0, \quad \sin x = 0.$$

Это дает $\dot{x}_0 = 0, x_0 = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$.

Простое исследование движения в окрестности (x_0, \dot{x}_0) показывает, что точки $x_0 = 2n\pi$ — эллиптические, а точки $x_0 =$

$= (2n + 1)\pi$ — гиперболические. Потенциал $V = -\cos x$ и траектория на фазовой плоскости изображены на рис. 1.2.

Иногда траектории с энергией $H < 1$ называются «захваченными», а траектории с $H > 1$ — «пролетными». Энергии $H_c = 1$

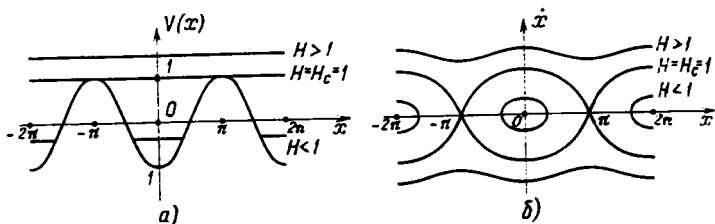


Рис. 1.2. Периодический потенциал (а) и соответствующая ему фазовая плоскость (б).

соответствует особая (самопересекающаяся) траектория, называемая сепаратрисой*).

Решение уравнения (2.4) хорошо известно, и мы его приведем без вывода для $H \leq 1$:

$$\dot{x} = 2\kappa \operatorname{cn}(t; \kappa),$$

$$I = I(H) = \frac{8}{\pi} \left[E\left(\frac{\pi}{2}; \kappa\right) - (1 - \kappa^2) F\left(\frac{\pi}{2}; \kappa\right) \right], \quad (2.6)$$

$$\omega(I) = \frac{\pi}{2F(\pi/2; \kappa)}, \quad \kappa^2 = \frac{1 + H}{2},$$

где cn — эллиптический косинус, F и E — эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода. Приведем также разложение скорости в ряд Фурье:

$$\dot{x} = 8\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1 + a^{2n-1}} \cos[(2n - 1)\omega t], \quad (2.7)$$

$$a = \exp(-\pi F'/F), \quad F \equiv F(\pi/2; \kappa), \quad F' \equiv F(\pi/2; \sqrt{1 - \kappa^2})$$

и асимптотики некоторых полезных величин при $H \rightarrow H_c = 1$ (т. е. $\kappa \rightarrow 1$):

$$F \approx \frac{1}{2} \ln \frac{32}{1 - H}, \quad F' \approx \frac{\pi}{2}, \quad (2.8)$$

$$\omega \approx \pi \left(\ln \frac{32}{1 - H} \right), \quad a \approx \exp(-\pi\omega).$$

Качественный характер зависимости скорости \dot{x} от времени изображен на рис. 1.3. Из общих соображений можно сказать, что на рисунке изображен волновой пакет с эффективным чис-

*) На протяжении всего дальнейшего изложения мы будем свидетелями той выделенной роли, которую играют сепаратрисы в проблемах устойчивости и стохастичности.

лом гармоник N , равным отношению расстояния между горбами к их ширине, т. е.

$$N \sim \frac{1}{\omega(I)} = \frac{1}{2} \ln \frac{32}{1-H} \quad (1-H \ll 1). \quad (2.9)$$

Этот же результат следует непосредственно из (2.7) и (2.8). Разложение в ряд Фурье (2.7) является иллюстрацией общих соотношений (2.3) и дает возможность определить коэффициенты a_n , b_n т. е. спектр системы. В частности, из (2.8), (2.9) следует, что спектр экспонен-

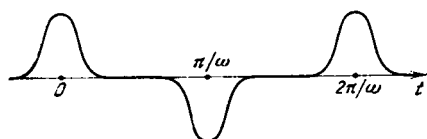


Рис. 1.3. Зависимость скорости от времени в окрестности сепаратрисы.

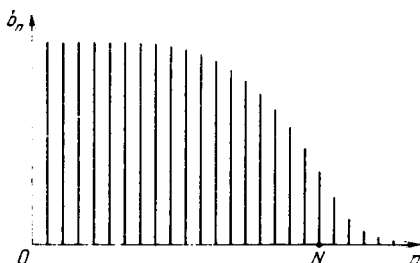


Рис. 1.4. Спектр в окрестности сепаратрисы.

циально обрезается при $n > N$ (рис. 1.4). При $H \rightarrow 1$ период колебаний и число гармоник N стремятся логарифмически к бесконечности.

Описанное свойство движения характерно вблизи сепаратрисы. Частота нелинейных колебаний $\omega(I)$ при изменении H от 0 до 1 меняется от 1 до 0. Наконец, при $H = 1$ $\kappa = 1$ и

$$\dot{x} = 2/\text{cn } t. \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) описывает форму единичного горба на рис. 1.3 (когда все остальные удалены на бесконечность) и носит название солитона*).

Мы достаточно полно описали характер колебаний при наличии сепаратрисы. Их нелинейность выражается в зависимости ω от энергии (или от I), а ангармоничность — в разложении (2.7). Это типичный случай, с которым нам придется в дальнейшем работать. Подчеркнем, что природа им не исчерпывается, и приведем особый пример, в котором есть ангармонизм при отсутствии зависимости частоты от энергии.

Колебания электронной плазмы описываются гамильтонианом [21]

$$H = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - 2\omega_0^2 (2\varphi^{1/2} - \varphi), \quad (2.11)$$

где ω_0 — плазменная частота, $\varphi^{1/2} = 1 - v$, а v — безразмерная скорость электронов. Нетрудно убедиться в том, что решение

*) Читателю предлагается в виде упражнения рассмотреть решение уравнений (2.4) в области «пролетных» траекторий ($H \geq 1$) и выяснить характер сшивки решений при $H \leq 1$ и $H \geq 1$.

уравнений движения, соответствующих (2.11), можно записать в виде

$$\dot{\psi} = -\cos[\pm\omega_0 t - \varepsilon(1 - \psi^2)^{1/2}],$$

где обозначено

$$\psi = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varphi^{1/2}), \quad \varepsilon = \left(1 - \frac{|H|}{2\omega_0^2}\right)^{1/2}.$$

Траектории на фазовой плоскости приведены на рис. 1.5. При $H = -2\omega_0^2$ траектория стягивается в точку. Значению $H = 0$

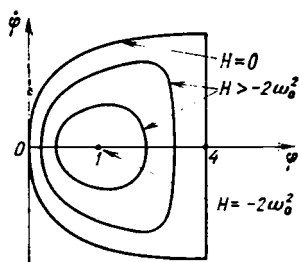


Рис. 1.5. Фазовая плоскость плазменных колебаний.

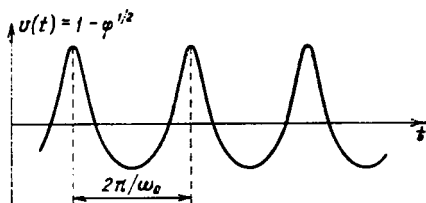


Рис. 1.6. Скорость частиц в окрестности сепаратрисы при плазменных колебаниях.

соответствует сепаратриса, а финитное движение существует при *) $0 > H > -2\omega_0^2$. Зависимость $v(t)$ изображена на рис. 1.6.

Теперь наша задача состоит в выяснении спектральных свойств $\varphi(t)$. Приведем результаты, полученные в [22]. Период колебаний вычисляется по очевидной формуле

$$T = \oint d\varphi / \dot{\varphi} = 2\pi / \omega_0,$$

т. е. частота колебаний $\omega = 2\pi/T = \omega_0$ и не зависит от энергии. Разложение в ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \exp(in\omega_0 t)$$

имеет коэффициенты

$$\varphi_n = \begin{cases} 2(-1)^{n-1} J_{n^2}(en)/n^2 & (n \neq 0), \\ 1 + 3\varepsilon^2/2 & (n = 0), \end{cases}$$

или, асимптотически при $n \gg 1$,

$$\varphi_n \sim \begin{cases} n^{-7/3} & (1 \ll n \ll N), \\ n^{-5/2} \exp(-n/N) & (n \gg N), \end{cases}$$

где $N = (1 - \varepsilon)^{-3/2}$. Таким образом, плазменные колебания ан-

*) Читателю предлагается в виде упражнения построить траектории на фазовой плоскости при $H > 0$.

гармоничны. Их спектр так же, как и раньше, обрезается экспоненциально при $n > N$. По мере приближения к сепаратрисе ($\epsilon \rightarrow 1$) число $N \rightarrow \infty$. На рис. 1.6 период колебаний не меняется при $\epsilon \rightarrow 1$, а горбы заостряются.

Ширина спектра является не только важной, но и удобной характеристикой колебаний. В дальнейшем мы покажем, каким образом она может быть использована.

§ 1.3. Нелинейный резонанс

Резонанс при действии внешней силы. Резонанс связанных колебаний

Теория нелинейного резонанса играет важную роль в общем анализе возникновения стохастичности в гамильтоновых системах. Обычно при действии некоторого возмущения на систему мы отыскиваем новое решение, пользуясь тем или иным приближенным методом. Действие этих методов можно классифицировать, рассматривая различие между исходным поведением системы и ее возмущенным поведением. Иллюстрация сравнений приведена на рис. 1.7: *а*) метод сглаживает все или часть существующих особенностей; *б*) метод сохраняет число и характер особенностей; *в*) метод позволяет обнаружить новые особенности, обусловленные возмущением. К последнему типу относится теория нелинейного резонанса.

Представим себе действие внешней периодической силы на нелинейный осциллятор, и пусть частота осциллятора близка к частоте внешней силы. Возникающий резонанс приводит к нарастанию амплитуды колебаний и, следовательно, к выходу частоты осциллятора из резонанса из-за нелинейности, т. е. из-за зависимости частоты от амплитуды. В гамильтоновых системах отсутствуют асимптотически устойчивые состояния или асимптотически устойчивые предельные циклы [16]. Поэтому через некоторое время система снова вернется к окрестности резонанса.

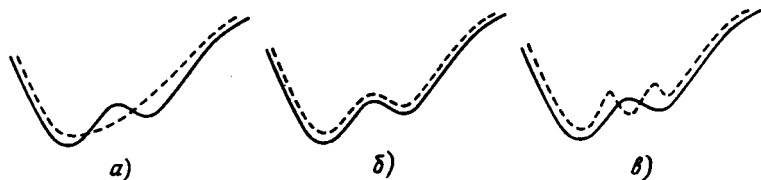


Рис. 1.7. Различные типы возмущения потенциала (сплошная кривая — невозмущенный потенциал, пунктир — возмущенный).

Так возникают колебания, называемые фазовыми (ком. 3). Приведем теорию этих колебаний.

Запишем гамильтониан возмущенной нелинейной системы в виде

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \vartheta, t), \quad (3.1)$$

где ϵ — безразмерный малый параметр ($\epsilon \ll 1$), характеризующий

возмущение, а V удовлетворяет условию периодичности по времени:

$$V(I, \vartheta, t) = V(I, \vartheta, t + T), \quad T = 2\pi/\nu.$$

Это позволяет записать разложение V в ряд Фурье:

$$V(I, \vartheta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl}(I) \exp i(k\vartheta + l\nu t) + \text{к. с.},$$

$$V_{kl} = V_{-k, -l}^* \quad (3.2)$$

где k, l — целые положительные и отрицательные числа и к. с. означает члены, комплексно-сопряженные предыдущим. Уравнения движения для (3.1) имеют вид

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2} i\varepsilon \sum_{k,l} kV_{kl}(I) \exp i(k\vartheta + l\nu t) + \text{к. с.},$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} = \quad (3.3)$$

$$= \omega(I) + \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{k,l} \frac{dV_{kl}(I)}{dI} \exp i(k\vartheta + l\nu t) + \text{к. с.}$$

Если в правой части (3.3) для какого-либо члена возможно равенство

$$k_0\omega + l_0\nu \approx 0, \quad (3.4)$$

то возникает резонанс, при котором I нарастает со временем.

Рассмотрим простейший случай одного резонанса при $k_0 = -l_0 = \pm 1$. Тогда вместо (3.1), (3.3) имеем

$$H = H_0(I) + \varepsilon \bar{V}_0(I) \cos \psi,$$

$$I = \varepsilon \bar{V}_0(I) \sin \psi, \quad (3.5)$$

$$\dot{\psi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{d\bar{V}_0}{dI} \cos \psi,$$

где опущены нерезонансные (быстро осциллирующие) члены и обозначено

$$\psi = \vartheta - \nu t + \varphi, \quad V_{1, -1} = |V_{1, -1}| e^{i\varphi} = \bar{V}_0 e^{i\varphi}.$$

Несмотря на ряд упрощений, система (3.4) все еще остается достаточно сложной для исследования. Далее введем безразмерный параметр нелинейности

$$\alpha = \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \frac{I}{\omega} \quad (3.6)$$

и примем для него неравенство

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon. \quad (3.7)$$

С его помощью будет оправдана та последовательность преобразований и приближений, которую следует проделать с системой

(3.5). Пусть I_0 — значение действия, при котором выполняется точно резонансное условие (3.4), т. е.

$$\nu = \omega(I_0).$$

Тогда 1) разложим $H_0(I)$ в окрестности I_0 до членов второго порядка включительно; 2) заменим $V(I) \rightarrow V(I_0) \equiv V_0$; 3) пренебрежем в уравнении для ψ вторым членом, пропорциональным ε ; 4) разложим $\omega(I)$ в окрестности I_0 до членов первого порядка включительно. Это дает следующее приближенное выражение для гамильтониана:

$$H = H_0(I_0) + \omega(I_0) \Delta I + \frac{1}{2} \frac{d\omega(I_0)}{dI} (\Delta I)^2 + \varepsilon V_0 \cos \psi, \quad (3.8)$$

$$\Delta I \equiv I - I_0,$$

в уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \Delta I = \varepsilon V_0 \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \omega(I_0) + \frac{d\omega(I_0)}{dI} \Delta I. \quad (3.9)$$

Переменные ΔI , ψ являются каноническими для гамильтониана

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \omega' (\Delta I)^2 + \varepsilon V_0 \cos \psi, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega(I_0)}{dI}, \quad (3.10)$$

называемого также универсальным гамильтонианом нелинейного резонанса. Он связан с (3.8) каноническим преобразованием

$$(I, \vartheta) \rightarrow (\Delta I, \vartheta - \nu t), \quad \bar{H} = H - \nu \Delta I, \quad \nu = \omega(I_0), \quad (3.11)$$

с точностью до несущественной константы *) $H_0(I_0)$.

Продоланные упрощения демонстрируют один из популярных в физике приемов: вместо того чтобы решать достаточно сложную задачу, ее сводят к уже решенной. Действительно, гамильтониан (3.10) есть не что иное, как гамильтониан (2.5) нелинейного маятника. Из (3.9) дифференцированием можно получить уравнение фазовых колебаний

$$\ddot{\psi} - \varepsilon V_0 \omega' \sin \psi = 0, \quad (3.12)$$

совпадающее (с точностью до сдвига по фазе) с (3.4). Поэтому дальнейший анализ элементарен. Траектории фазовых колебаний на фазовой плоскости невозмущенного движения при $t = 0$ изображены на рис. 1.8. Вся картина траекторий сохраняется

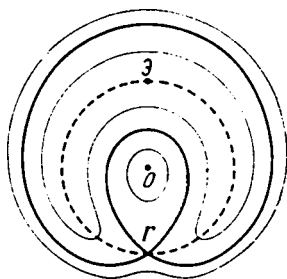


Рис. 1.8. Нелинейный резонанс первого порядка: пунктир — невозмущенная траектория при $I = I_0$, тонкие кривые — фазовые колебания, жирная кривая — сепаратриса фазовых колебаний, Э — эллиптическая, Г — гиперболическая точки фазовых колебаний.

*) Преобразование (3.11) в физике часто называется переходом во вращающуюся систему координат.

во вращающейся системе координат и вращается с частотой $\nu = \omega(I_0)$ в плоскости невозмущенного движения.

Частота малых фазовых колебаний находится из (3.12):

$$\Omega = (\varepsilon V_0 |\omega'|)^{1/2} \sim \omega(I_0) (\varepsilon \alpha)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Ширина сепаратрисы по действию определяется из \dot{H} при $\psi = \pi/2$:

$$\max \Delta I = (2\varepsilon V_0 / |\omega'|)^{1/2} \sim I_0 \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Ширина сепаратрисы по частоте

$$\max \Delta \omega = |\omega'| \cdot \max \Delta I \sim \Omega. \quad (3.15)$$

Обратим внимание на три характерных свойства нелинейного резонанса. Во-первых, изменение основных параметров $\Delta I/I_0$, $\Delta \omega/\omega$ пропорционально $\varepsilon^{1/2}$, а не ε , как в обычной теории возмущений. При $\varepsilon \ll 1$ неравенство $\varepsilon^{1/2} \gg \varepsilon$ показывает, что эти изменения очень велики. По существу, теория возмущений при нелинейном резонансе строится по параметру $\varepsilon^{1/2}$. Во-вторых, в фазовых колебаниях появляется сепаратриса. Это означает, что дополнительно к особенностям невозмущенного движения прибавились по крайней мере еще две: одна гиперболическая точка и одна эллиптическая. Предположим, что резонансное условие (3.4) выполняется при $l_0 = -1$, $k_0 \neq 1$. Тогда все предыдущие рассуждения сохраняются. Однако фаза ψ определена теперь выражением

$$\psi = k_0 \vartheta - \nu t,$$

что приводит к появлению ожерелий из ячеек сепаратрисы на фазовой плоскости (рис. 1.9 для $k_0 = 6$). Число ячеек равно k_0 , и, следовательно, из-за резонанса появляется дополнительно k_0 пар эллиптических и гиперболических точек.

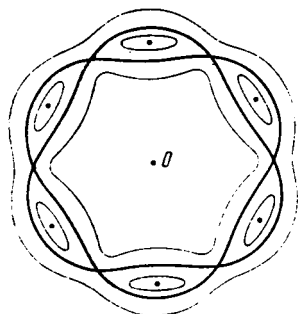


Рис. 1.9. Усложненный вариант нелинейного резонанса.

Нам осталось оправдать сделанные выше приближения. Условие малости второго члена по сравнению с первым в уравнении (3.5) для $\dot{\psi}$ приводит к левому неравенству (3.7). Замена $V(I)$ на $V(I_0)$ эквивалентна условию $\Delta I/I \ll 1$, т. е. согласно (3.14) — тому же неравенству. Отбрасывание нерезонансного члена по сравнению с резонансным справедливо при условии $\Delta \omega/\omega \ll 1$, что согласно (3.13) соответствует правому неравенству в (3.7).

Существенная роль неравенства (3.7) приводит к третьему характерному свойству нелинейного резонанса: он возникает при достаточно больших нелинейностях ($\alpha > \varepsilon$). Не вдаваясь в детали, можно сказать, что при малых ε и α вопрос о движении

системы не решается автоматически (благодаря малости параметров), так как характер движения определяется не столько самими ε и α , сколько их соотношением. Приведенный анализ нелинейного резонанса слишком упрощен. Значительное число деталей, обобщений и строгих результатов можно найти в книге Арнольда [16]. Нам также придется еще неоднократно встречаться с различными усложнениями задачи о нелинейном резонансе. Этот параграф мы закончим одним тривиальным обобщением.

Рассмотрим систему из двух частиц, между которыми может возникнуть резонансное взаимодействие. Гамильтониан такой системы можно записать в виде

$$H = \sum_{i=1,2} H_i^0(I_i) + \varepsilon V(I_1, I_2; \vartheta_1, \vartheta_2), \quad (3.16)$$

и уравнения движения

$$\dot{I}_i = -\partial H / \partial \vartheta_i, \quad \dot{\vartheta}_i = \partial H / \partial I_i \quad (i = 1, 2).$$

Предположение о резонансности взаимодействия означает, что условие

$$n\dot{\vartheta}_1 - m\dot{\vartheta}_2 = n\omega_1(I_{10}) - m\omega_2(I_{20}) = 0 \quad (3.17)$$

выполняются для некоторых целых чисел (n, m) и для действий (I_{10}, I_{20}). Так же, как и ранее, сохраним в (3.16), (3.17) только резонансный член взаимодействия в разложении в ряд Фурье:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{n,m} V_{nm}(I_1, I_2) \exp i(n\vartheta_1 + m\vartheta_2) + \text{к. с.}$$

и разложим H_i^0 и $\omega_i = dH_i^0/dI_i$ в окрестности резонанса (I_{10}, I_{20}). Это дает из (3.16) эффективный гамильтониан, аналогично выводу (3.10):

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \omega_i'(\Delta I_i)^2 + \varepsilon V_0 \cos \psi, \quad (3.18)$$

где

$$\omega_i' = \frac{d\omega_i(I_i)}{dI_i}, \quad \Delta I_i = I_i - I_{i0}, \quad \psi = n\vartheta_1 - m\vartheta_2 + \varphi,$$

$$V_{nm}(I_{10}, I_{20}) = |V_{nm}(I_{10}, I_{20})| e^{i\varphi} = V_0 e^{i\varphi}.$$

Уравнения движения могут быть получены из (3.18) или из (3.16):

$$\dot{I}_1 = \frac{d}{dt} \Delta I_1 = \varepsilon n V_0 \cos \psi,$$

$$\dot{I}_2 = \frac{d}{dt} \Delta I_2 = -\varepsilon m V_0 \cos \psi, \quad (3.19)$$

$$\dot{\psi} = n\omega_1' \Delta I_1 - m\omega_2' \Delta I_2.$$

Уравнение для фазовых колебаний получается дифференциро-

ванием ψ :

$$\ddot{\psi} + \varepsilon V_0 (n^2 \omega_1' + m^2 \omega_2') \sin \psi = 0.$$

Отсюда находим частоту фазовых колебаний

$$\Omega = [\varepsilon V_0 (n^2 \omega_1' + m^2 \omega_2')]^{1/2} \quad (3.20)$$

и видим, что в системе возможно дополнительное вырождение, если ω_1' и ω_2' соизмеримы как n^2/m^2 и имеют противоположные знаки. В дальнейшем такой случай рассматриваться не будет.

Складывая первые два уравнения в (3.19), получаем закон сохранения

$$mI_1 - nI_2 = \text{const.} \quad (3.21)$$

Соотношение (3.21) известно в теории параметрических усилителей как соотношение Мэнли — Роу [23], совместно с (3.18) оно позволяет определить действия как функции времени.

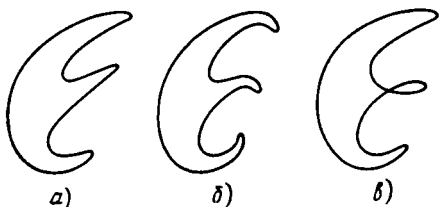


Рис. 1.10. Нельзя «завязать бантик», как на фигуре в, пользуясь обычной теорией возмущения.

С увеличением числа степеней свободы, участвующих в резонансе, число соотношений типа (3.21) также увеличивается.

Мы остановились на наиболее существенных формальных особенностях теории нелинейного резонанса. Есть, однако, одна особенность, которая отличает все, что делалось в этом параграфе, от обычной теории возмущения по малому параметру. Рассмотрим фазовые траектории, изображенные на рис. 1.10. Кривые а и б топологически эквивалентны и могут быть получены одна из другой путем «плавного» изгибания или путем добавления малых возмущений к основной кривой. Однако никаким неособым образом нельзя «завязать бантик» (как на рис. 1.10, в), как бы он ни был мал. Для этого нужны специальные методы, и тот, что излагался выше, относится к их числу.

§ 1.4. Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ)

Многомерное движение. Инвариантные торы. Переменные действие — угол. Неприводимые контуры. Отображения Пуанкаре. Теорема об устойчивости. Роль размерности фазового пространства

Динамическая система, имеющая N степеней свободы, описывается системой уравнений движения порядка $2N$. Сколько должно быть интегралов движения для того, чтобы уравнения движения интегрировались в квадратурах? Для случая гамильтоновых систем ответ на этот вопрос дает теорема Лиувилля (ком. 4).

Пусть гамильтонова система с N степенями свободы совершает финитное движение и имеет N однозначных и функцию-

нально независимых интегралов движения F_1, \dots, F_N . Пусть также эти интегралы движения находятся в инволюции, т. е.

$$[F_i, F_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $[\ , \]$ обозначает скобки Пуассона. Тогда

- 1) траектории системы лежат на N -мерном торе;
- 2) движение является условно-периодическим и характеризуется N частотами

$$\omega_i = \omega_i(F_1, \dots, F_N), \quad i = 1, \dots, N;$$

- 3) угловые переменные ϑ_i , характеризующие координаты на торе, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i(F_1, \dots, F_N), \quad i = 1, \dots, N,$$

т. е.

$$\vartheta_i = \omega_i t + \text{const}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда, в частности, видно, что для интегрируемости гамильтоновой системы достаточно знать не $2N$ интегралов движения, а только N . Если нам известно, например, $N + 1$ однозначных интегралов движения, то один из них может быть выражен как функция остальных N интегралов движения. В случае двух степеней свободы (рис. 1.11) достаточно знать лишь один интеграл движения, так как вторым является энергия.

Следствием теоремы Лиувилля является то, что гамильтониан системы может быть представлен в виде

$$H = H(F_1, \dots, F_N).$$

Однако такое представление не совсем удобно, так как переменные F_i и ϑ_i не являются канонически сопряженными.

Пусть I_1, \dots, I_N — обобщенные импульсы (действия), канонически сопряженные углам $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$. Это означает, что уравнения движения в этих переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_j} = 0, & \dot{\vartheta}_j &= \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j(I_1, \dots, I_N), \\ j &= 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что действия I_j являются независимыми интегралами движения и их ровно N . Таким образом, существует преобразование

$$F_j = F_j(I_1, \dots, I_N), \quad j = 1, \dots, N,$$

и гамильтониан может быть представлен в виде

$$H = H(I_1, \dots, I_N). \tag{4.2}$$

На первый взгляд может показаться, что, вводя переменные

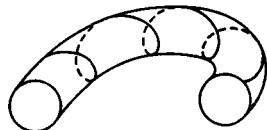


Рис. 1.11. Движение на двумерном торе.

(I_j, θ_j) и получая представление (4.1), (4.2), мы тем самым всегда приходим к интегрируемому случаю. Однако проблема заключается в том, существует ли (хотя бы принципиально) N переменных I_j , удовлетворяющих условиям (4.1), (4.2).

Для построения интегралов движения I_j воспользуемся соотношениями, которые были высказаны Эйнштейном при анализе квазиклассических правил квантования [26]. Положим

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum_{k=1}^N p_k dq_k \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Вид контуров C_j будет указан ниже.

Величина

$$\int dS \equiv \int \sum_{k=1}^N p_k dq_k$$

является первым интегральным инвариантом Пуанкаре. В том и только в том случае, когда число интегралов движения равно точно N , величина dS является также полным дифференциалом. Отсюда интеграл от dS по замкнутому контуру равен нулю, если этот контур может быть стянут в точку. Поэтому рассматривать имеет смысл лишь базисные контуры C_j в формуле (4.3), которые 1) не могут быть стянуты в точку; 2) не могут быть переведены непрерывным образом друг в друга. Будем называть эти контуры неприводимыми. Если движение происходит на N -мерном торе, то число неприводимых контуров равно N (способ их введения для $N=2$ приведен на рис. 1.12). Тем самым определяется N независимых действий I_j формулой (4.3) при числе интегралов движения, равном N . В противном случае, когда число интегралов движения меньше N , часть инвариантных действий разрушается.

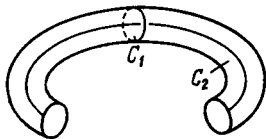


Рис. 1.12. Неприводимые контуры C_1 и C_2 не могут быть стянуты в точку или переведены друг в друга.

Из простых геометрических соображений (см. рис. 1.11) ясно, что при полном наборе интегралов движения тор, на который навивается траектория, является инвариантным (это следует и из теоремы Лиувилля). Поэтому разрушение интегралов движения сопровождается разрушением инвариантных торов и возникают две фундаментальные проблемы:

1) проблема устойчивости инвариантных торов (сохраняются ли инвариантные торы при малых возмущениях?);

2) проблема разрушения (каким является движение системы при разрушении интегралов движения?).

Указанные проблемы можно интерпретировать и с иной точки зрения. Пересечем тор плоскостью, перпендикулярной внутренней оси тора (рис. 1.13). Каждый раз, сделав один оборот, траектория пересекает плоскость в некоторой точке. Можно ска-

зять, что в результате движения (т. е. под действием некоторого оператора эволюции) точка на выбранной площадке переходит в новую точку на этой же площадке. Таким образом, непрерывная эволюция системы

$$(q(t), p(t)) = \hat{T}(q(0), p(0))$$

заменяется дискретным отображением

$$(q_{n+1}, p_{n+1}) = \hat{T}(q_n, p_n), \quad (4.4)$$

называемым отображением Пуанкаре. Если траектория движения располагается на торе, то точки отображения (4.4) покрывают замкнутую кривую. В частном случае соизмеримых частот движения на торе (резонансный тор) множество отображений состоит из конечного числа точек, а траектория частицы на резонансном торе замыкается через конечное число оборотов. Смысл введенных новых понятий состоит в том, что существование инвариантных торов эквивалентно утверждению о том, что множество точек отображения Пуанкаре образует замкнутую кривую (или конечную систему точек, как в резонансном случае). При разрушении инвариантных торов точки отображения Пуанкаре, очевидно, не образуют замкнутой кривой, и вопрос заключается в том, что же именно представляет собой множество точек отображения в этом случае.

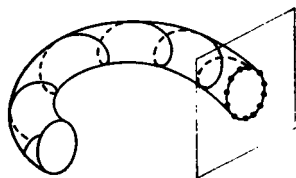


Рис. 1.13. Отображения Пуанкаре.

Сформулируем теперь основной результат проблемы устойчивости, который составляет содержание теоремы Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ). Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \dots, I_N; \vartheta_1, \dots, \vartheta_N), \quad (4.5)$$

где невозмущенный гамильтониан H_0 предполагается невырожденным в следующем смысле:

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0$$

и ε — безразмерный параметр, характеризующий возмущение ($\varepsilon \ll 1$). Тогда при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0$ большинство инвариантных нерезонансных торов сохраняется и отличается от невозмущенных торов слабой деформацией. Фазовые траектории наматываются на эти торы всюду плотно и описывают условно-периодическое движение с N частотами. Малая часть торов разрушается, и их мера стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ (ком. 5).

Отметим два обстоятельства, связанные с теоремой КАМ. Первое из них относится к величине границы ε_0 , для которой доказана устойчивость. В теории КАМ значение ε_0 очень мало

по сравнению с истинной границей устойчивости ϵ_c , и существование границы носит скорее символический характер. Строгое определение реальной границы ϵ_c является очень трудной задачей, и обычно ϵ_c оценивается (как мы увидим далее) из качественных соображений или из численного анализа.

Второе обстоятельство связано с различием в топологии инвариантных торов в зависимости от размерности фазового пространства, т. е. от числа степеней свободы.

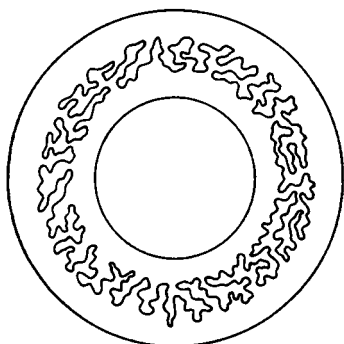


Рис. 1.14. При $N = 2$ разрушенные торы зажаты между устойчивыми торами.

При $N = 2$ торы, соответствующие различным значениям действий (I_1, I_2) , оказываются вложенными друг в друга (рис. 1.14) и, следовательно, не пересекаются. В этом случае говорят, что торы делят пространство. Разрушенные торы оказываются зажатыми между устойчивыми торами, и, следовательно, возмущение фазовой траектории в области разрушения ограничено. Величина этого возмущения стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

При $N > 2$ торы не делят пространство и пересекаются. Поэтому области различных разрушенных резонансных торов образуют сложную сетку каналов в фазовом пространстве, по которым траектория может уходить сколь угодно далеко от области невозмущенного движения.

Это явление называется диффузией Арнольда [35] и будет рассмотрено в Дополнении 2. Таким образом, при $N > 2$ существуют такие области в фазовом пространстве, что если начальные условия попадают в них, то траектория уходит сколь угодно далеко. Мера этих областей стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$ (ком. 6).

Приведем простые соображения [34], показывающие, почему торы делят пространство только при $N = 2$. В $2N$ -мерном фазовом пространстве поверхность постоянной энергии имеет размерность $2N - 1$, а границы, которые ее делят на различные области, имеют размерность $2N - 2$. Если торы делят пространство, то их размерность N должна удовлетворять условию

$$N \geq 2N - 2,$$

откуда следует, что $N \leq 2$.

В заключение этого параграфа полезно отметить особую роль теории КАМ в вопросах, связанных с обоснованием статистической физики. Действительно, статистическое описание исключается в устойчивом случае, и поэтому при конечных N всегда существует конечная (хотя и малая при больших N) область фазового пространства, внутри которой движение системы заведомо не стохастическое (островки устойчивости).

§ 1.5. Эргодичность и перемешивание

Основные определения. Локальная неустойчивость. K -системы. Идея Н. С. Крылова. Перемешивание — условие конечности времени релаксации

Этот и последующие два параграфа будут посвящены изложению основных понятий современной эргодической теории и их связи с теорией динамических систем. Их изложение будет проведено на чисто качественном уровне. Строгое изложение затронутых вопросов содержится в монографиях [36—39], а изложения для физиков — в обзоре [15].

Обозначим через

$$z(t) = (q(t), p(t))$$

точку в фазовом пространстве (q, p) , характеризующую состояние системы в момент времени t . Эволюция системы по-прежнему определяется оператором сдвига во времени

$$z(t+T) = \hat{T}z(t) \quad (5.1)$$

в непрерывном случае и формулой

$$z_{n+1} = \hat{T}z_n \quad (5.2)$$

в случае, когда уравнения движения заданы в конечно-разностном виде (например, в виде отображений Пуанкаре). Эволюцию произвольной функции от z представим в виде

$$f(z, t+T) = \hat{S}_T f(z, t) \equiv f(\hat{T}z, t), \quad (5.3)$$

где оператор \hat{S}_T — аналог квантовой S -матрицы.

Движение называется эргодическим, если справедливо равенство временных и фазовых средних:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' f[z(t')] = \langle f \rangle, \quad (5.4)$$

где $\langle f \rangle \equiv \int f(z) d\Gamma(z)$, и от выбора момента t равенство не зависит. Используя (5.1) и (5.3), условие (5.4) можно переписать в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f[\hat{T}(t)z(0)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \hat{S}_T f[z(0)] = \langle f \rangle. \quad (5.5)$$

В дискретном случае условия (5.4), (5.5) выглядят следующим образом:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\hat{T}_n z(0)) = \langle f \rangle. \quad (5.6)$$

Равенства (5.4) и (5.6) должны выполняться для типичных тра-

екторий, т. е. может существовать множество нулевой меры таких траекторий, для которых условия (5.4) и (5.6) не имеют места.

Перемешивание является более тонким понятием, чем эргодичность, и хотя оно было введено в статистическую физику еще в работах Гиббса, тем не менее многообразие вложенного в него содержания удалось понять сравнительно недавно. Введем понятие корреляционной функции. Пусть f и g — две произвольные интегрируемые функции динамических переменных z . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, g|T) &= \langle \widehat{S}_T f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle, \\ \mathcal{R}_n(f, g) &= \langle \widehat{S}_n f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle \end{aligned} \quad (5.7)$$

соответственно для непрерывного и дискретного времени. Формально свойство перемешивания выражается в следующем условии:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{R}(f, g|T) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(f, g) = 0, \quad (5.8)$$

которое хорошо известно в физике как условие расщепления временных корреляций. Если рассмотреть каплю «фазовой жидкости», то ее движение в фазовом пространстве носит при перемешивании очень сложный характер (рис. 1.15). Граница капли быстро принимает неправильную амебообразную форму. С течением времени форма границы сильно усложняется, а сама капля быстро заполняет различные области фазового пространства. Объем капли при этом сохраняется (в силу теоремы Лиувилля), и заполнение фазового объема происходит за счет вытягивания и утоньшения отростков капли.

Из условия перемешивания (5.8) автоматически следует свойство эргодичности (5.4)—(5.6). Различие между только эргодическим движением и движением с перемешиванием проще всего понять из рис. 1.16. В эргодическом случае без перемешивания траектория последовательно заполняет фазовое пространство с той же методичностью, что и периодически опускающийся и поднимающийся маятник. Совсем иной характер заполнения фазового пространства имеет место при перемешивании. Сначала за

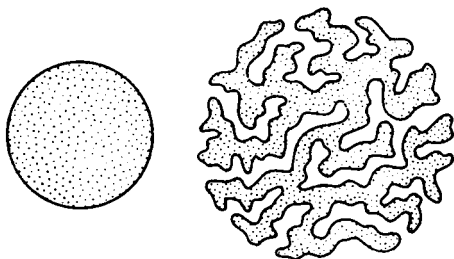


Рис. 1.15. Расплывание капли в фазовом пространстве при перемешивании.

некоторое время T система достаточно равномерно покроем сеткой траекторий все фазовое пространство. Через время $2T$ это явление примерно повторится, причем таким образом, что размеры ячеек сетки окажутся приблизительно в два раза меньше, и т. д.

Формально приведенное различие выражается в характере спектра системы. Для этого введем спектральную плотность $\mathcal{R}(\omega)$:

$$\mathcal{R}(f, f | T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega T} \mathcal{R}(\omega) d\omega.$$

В случае эргодического движения без перемешивания спектр $\mathcal{R}(\omega)$ — дискретный, т. е.

$$\mathcal{R}(\omega) = \sum_k \mathcal{R}_k \delta(\omega - \omega_k),$$

в то время как при перемешивании спектр непрерывный.

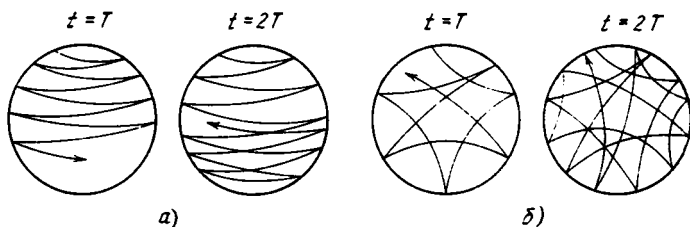


Рис. 1.16. Различие между эргодическим движением (а) и движением с перемешиванием (б).

Даже при беглом взгляде на рис. 1.15, 1.16 мы обнаруживаем, что свойство перемешивания должно быть тесно связано со свойствами неустойчивости динамических систем. Эта особенность перемешивания была отмечена Хопфом [40] при анализе движения в пространстве отрицательной кривизны. Однако четкое и наиболее полное понимание роли неустойчивости в возникновении перемешивания было достигнуто Н. С. Крыловым [42], который применил эти понятия к проблеме обоснования статистической механики и к конкретным физическим моделям (ком. 7).

Рассмотрим сколь угодно малую ячейку фазового пространства. При перемешивании она должна расплываться по всему фазовому пространству. Это означает, что точки, которые в начальный момент были близки между собой, с течением времени удаляются друг от друга и начинают двигаться независимо. Поэтому свойство перемешивания естественно ожидать у таких неустойчивых систем, у которых траектории с течением времени быстро удаляются друг от друга. Иными словами, сколь угодно малые возмущения начальных условий приводят к сколь угодно сильному уходу фазовой траектории системы от своего невозмущенного значения. Если фазовое пространство системы является конечным (хотя бы по одной переменной), то фазовые траектории не могут разойтись из-за неустойчивости более чем на характерный размер пространства и начинают запутываться. Описанный тип неустойчивого движения называется локальной неустойчивостью. Если обозначить через $D(t)$ расстояние между двумя точками в фазовом пространстве, принадлежащими разным

траекториям в момент времени t , то формальное определение локальной неустойчивости выглядит следующим образом: существует направление, в котором

$$D(t) = D(0) e^{h_0 t}, \quad (5.9)$$

где инкремент неустойчивости h_0 является, вообще говоря, функцией точки в фазовом пространстве.

В дальнейшем мы увидим, как из свойства локальной неустойчивости (5.9) следует сразу свойство перемешивания

$$\mathcal{R}(t) \sim \exp(-h_c t), \quad (5.10)$$

где величина

$$h_c = 1/\tau \quad (5.11)$$

имеет смысл обратного времени расщепления корреляций и

$$h_c \sim \langle h_0 \rangle. \quad (5.12)$$

Принципиальное значение соотношения (5.12) в том, что установлена связь между статистическими свойствами системы (h_c) и ее чисто динамической характеристикой h_0 . Иными словами, можно узнать, когда регулярное (например, условно-периодическое) движение системы разрушится и движение станет перемешивающимся. Для этого необходимо выяснить условие, при котором в динамической системе возникает локальная неустойчивость (5.9). Такое условие мы будем в дальнейшем называть условием стохастической неустойчивости или, короче, условием стохастичности. Максимальной неустойчивости соответствует разрушение всех интегралов движения, кроме полной энергии системы. Анализ, проведенный Н. С. Крыловым, показал, что именно стохастическая неустойчивость обеспечивает равномерное перемешивание начальной фазовой ячейки с любой требуемой точностью на поверхности неразрушенных однозначных интегралов движения и приводит к конечному времени релаксации на этой поверхности. Сам характер релаксации именно тот, который типичен в статистической механике (ком. 8).

Системы, обладающие свойствами (5.9)—(5.11), называются K -системами (их более точное определение и анализ будут приведены в следующем параграфе). Подчеркнем, что исключительным свойством K -систем является то, что это динамические системы (т. е. системы, описываемые обратимыми дифференциальными или разностными уравнениями движения), у которых координаты и импульсы являются случайными функциями времени (ком. 9). Практически все дальнейшее изложение будет посвящено анализу различных типов K -систем, встречающихся в физике. Здесь же мы приведем без исследования пример K -системы, движение которой описывается дискретным преобразованием (отображением). Причина, по которой мы выбрали этот пример, не только в его необычайной простоте, но и в том, что в нем используется очень часто встречающийся в математике прием, который оказывается типичным для многих физических ситуаций.

«Преобразование пекаря» заключается в определенном способе отображения точек единичного квадрата на единичный квадрат с сохранением меры. Сожмем квадрат по оси y вдвое, а по оси x растянем его вдвое (рис. 1.17). Разрежем образовавшийся прямоугольник на две равные части вдоль оси y и положим

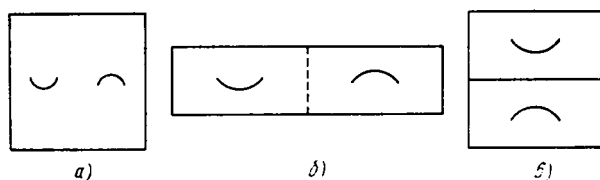


Рис. 1.17. Последовательные этапы «преобразования пекаря».

правую часть под левой. Получится снова квадрат, с которым надо повторить указанные операции, и т. д. Преобразование пекаря обладает свойствами перемешивания и локальной неустойчивости. Если выбрать координаты некоторой точки в квадрате как начальные и рассмотреть «траекторию» этой точки, т. е. последовательность ее отображений, то строгое утверждение заключается в том, что координаты точек, порождаемых преобразованием пекаря, образуют последовательность случайных чисел (исключение, конечно, составляет множество траекторий некоторых точек меры нуль — это типичная оговорка для эргодической теории). Читателю предлагается в виде упражнения рассмотреть, что будет происходить со знаками \smile и \frown на рис. 1.17 при продолжении отображений.

Можно поставить вопрос: как часто среди динамических систем общего типа встречаются системы с перемешиванием? Или иначе: каких систем больше, устойчивых или систем, имеющих локальную неустойчивость? Если к последним отнести системы, у которых область локальной неустойчивости в фазовом пространстве может быть любой (в том числе и очень малой), то именно они составляют основную часть множества всех систем. Типичными оказываются системы, имеющие ненулевую область стохастического движения. Почему это так, станет ясно несколько позже.

§ 1.6. Энтропия

Огрубление функции распределения. Динамическая энтропия Колмогорова. K -системы и энтропия. Изоморфизм K -систем

С именем Больцмана связана знаменитая H -теорема, определяющая направление макроскопической эволюции системы. Больцман ввел также определение энтропии через функцию распределения системы $F(p, q)$:

$$S[F] = - \int F \ln F \, dp \, dq. \quad (6.1)$$

В связи с определением (6.1) нам понадобится одно важное

замечание. Пусть $f(p, q, t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (1.7). Это означает, что информация, заключенная в f , не содержит тех свойств, которые присущи кинетическому описанию. Действительно, как уже отмечалось в § 1.1, решение уравнения Лиувилля (1.7) эквивалентно решению гамильтоновых уравнений движения (1.1). Другой характеристикой этого факта является равенство

$$\frac{dS[f]}{dt} = 0, \quad (6.2)$$

где

$$S[f] = - \int f \ln f dp dq. \quad (6.3)$$

Выражение (6.2) находится из (6.3) дифференцированием:

$$\frac{dS[f]}{dt} = \int (1 - \ln f) \frac{df}{dt} dp dq.$$

Отсюда следует (6.2), так как в силу уравнения Лиувилля $df/dt = 0$. Таким образом, энтропия, определенная по функции распределения f , не изменяется со временем.

Ситуация изменяется, если вместо «точной» функции распределения использовать функцию, каким-либо образом огрубленную, или, как говорят, крупнозернистую. Определим F :

$$F = \frac{1}{\delta\Gamma} \int_{\delta\Gamma} f d\Gamma, \quad (6.4)$$

где $\delta\Gamma$ — область огрубления. Тогда при определенных условиях функция F будет удовлетворять уже необратимому кинетическому уравнению, для которого $dF/dt \neq 0$, и, следовательно, величина $S[F]$ может зависеть от времени.

Больцману также принадлежит еще одно утверждение:

$$S = k \ln W, \quad (6.5)$$

где W — статистический вес состояния, описываемого функцией распределения F , и k — постоянная Больцмана. Подробное обсуждение и доказательство формулы (6.5) были даны Эренфестом [45]*). Дальнейшее развитие различных областей науки (статистической физики, теории информации и др.) подтвердило ту глубину познания природы, которая заложена в формуле Больцмана. С одним из таких проявлений ее мы познакомимся ниже.

Заметим предварительно, что вблизи равновесия состояния системы приблизительно равномерно распределяются в некоторой

*) Спустя много лет в Вене на могиле Больцмана был открыт памятник, на постаменте которого выгравирована формула (6.5). В речи при открытии памятника Тирринг сказал, что эта формула сохранит свою силу даже тогда, когда все памятники будут погребены под мусором тысячелетий.

области фазового пространства размером $\Delta\Gamma$. Поэтому

$$W \approx \Delta\Gamma/\Gamma_0 \quad (6.6)$$

и соотношение (6.5) может быть переписано в виде

$$S = \ln \Delta\Gamma, \quad (6.7)$$

где для простоты положено $k=1$, $\Gamma_0=1$. Нам уже известно из предыдущего параграфа, что при определенных условиях динамическая система ведет себя так, как должна вести себя случайная система. Можно ли определить понятие энтропии таким образом, чтобы оно могло применяться непосредственно к динамическим системам, используя только свойства траекторий этой системы (а не функции распределения)? Эта задача была решена Колмогоровым [43, 46], который, используя некоторые идеи теории информации, ввел понятие динамической энтропии, называемой также K -энтропией и обозначаемой через h^*). Формальное определение типичной для различных физических ситуаций K -системы заключается в следующем: это гамильтонова система (точнее, система с преобразованием, сохраняющим меру), у которой

$$h > 0. \quad (6.8)$$

Наиболее существенный элемент в (6.8) — тот, что $h \neq 0$.

Работа Колмогорова об энтропии положила начало строгому анализу динамических систем в предельном случае, который является обратным условием КАМ, т. е. в случае максимального разрушения инвариантных торов. Развитие этого анализа нашло отражение в работах Аносова, Рохлина и Синая [47—51] (см. также обзоры [37—39, 52, 53]). Связь K -энтропии с различными физическими понятиями и, в том числе, с обычной энтропией рассматривалась Чириковым [24].

Займемся введением понятия K -энтропии. Формальный путь несколько сложен. Поэтому введем энтропию h неформальным образом. Рассмотрим эволюцию некоторого начального элемента фазового объема $\Delta\Gamma_0$. В силу теоремы Лиувилля

$$\Delta\Gamma(t) = \Delta\Gamma_0,$$

однако структура фазовой капли изменилась. В ней появляются пузыри пустоты (рис. 1.18). С ростом времени пузырчатая структура делается все более мелкой. При этом огибающая фазовой капли расширяется и ограничивает все больший объем. Введем теперь величину ε , имеющую размерность Γ , и огрубим структурную сетку фазовой капли на рис. 1.18 с точностью до ε . Это, в частности, означает, что все тонкие фазовые нити толщиной $\ll \varepsilon$ «оденутся». Отсюда сразу следует, что огрубленный фазовый

*) Аналогичная идея введения энтропии динамических систем была предложена несколько раньше студентом Одесского университета Д. З. Аро-вым (см. примечания в [43, 214]).

объем $\overline{\Delta\Gamma}(t)$ растет со временем. Согласно формуле локальной неустойчивости (5.9) легко видеть, что

$$\overline{\Delta\Gamma}(t) = \Delta\Gamma_0 e^{ht}, \quad (6.9)$$

где h — некоторая величина, характеризующая усредненный по объему инкремент неустойчивости h_0 . Воспользуемся теперь формулой (6.7) и подставим в нее (6.9):

$$S = \ln \overline{\Delta\Gamma}(t) = \ln (\Delta\Gamma_0 e^{ht}) = ht + \ln \Delta\Gamma_0. \quad (6.10)$$

При переходе от формулы Больцмана (6.5) к (6.7) мы предполагали, что в выражении (6.6) для статистического веса W состояния системы достаточно равномерно распределены в объеме

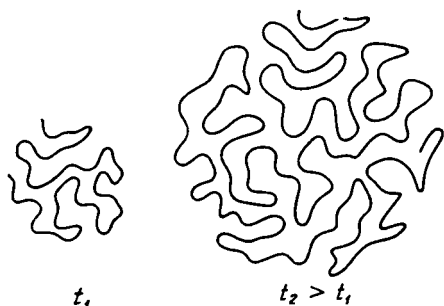


Рис. 1.18. Изменение огрубленного фазового объема со временем.

$\overline{\Delta\Gamma}$. Таким же свойством равномерности обладает и объем $\overline{\Delta\Gamma}(t)$, если t не слишком мало. Это следует из замечания в § 1.5 о равномерности заполнения фазового объема при перемешивании, проиллюстрированной на рис. 1.16, б. Нас интересует определение физических величин (в том числе и энтропии S) с возможно большей точностью. При точности огрубления ε очевидно, что не имеет смысла выбирать $\Delta\Gamma_0$ меньше чем ε . Поэтому в формуле (6.10) можно положить $\Delta\Gamma_0 = \varepsilon$ и в дальнейшем перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим теперь выражение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \overline{\Delta\Gamma}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (ht + \ln \varepsilon) = h. \quad (6.11)$$

Выражение (6.11) и определяет энтропию Колмогорова h . Порядок выполнения пределов в формуле (6.11) существен. Перечислим основные свойства K -энтропии.

1) Энтропия h определяет скорость изменения энтропии S в результате чисто динамического процесса перемешивания траекторий в фазовом пространстве.

2) Энтропия h , инкремент локальной неустойчивости h_0 и обратное время расцепления временных корреляций h_c являются величинами одного порядка:

$$h \sim h_0 \sim h_c. \quad (6.12)$$

Тем самым раскрывается физический смысл K -энтропии.

3) Энтропия h является метрическим инвариантом системы [46], т. е. ее величина не зависит от способа разбиения фазового пространства и огрубления.

4) Системы, имеющие одинаковые значения энтропии h , в определенном смысле изоморфны друг другу [39, 54], т. е.

статистические законы движения у таких систем должны быть одинаковыми.

Остановимся на свойстве изоморфности более подробно [38, 212, 213]. Пусть переменные (x) и преобразование $\widehat{T}^{(1)}$ определяют некоторую динамическую систему. Пусть также в результате перемешивания устанавливается равновесная функция распределения $f^{(1)}(x)$. Аналогично введем динамическую систему в том же пространстве (x) с динамикой, определяемой преобразованием $\widehat{T}^{(2)}$, и с равновесным распределением $f^{(2)}(x)$. Тогда динамические системы $\{\widehat{T}^{(1)}(x); x\}$ и $\{\widehat{T}^{(2)}(x); x\}$ являются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение \widehat{Q} области $\Gamma^{(1)}(x)$ фазового пространства одной системы на область $\Gamma^{(2)}(x)$ фазового пространства другой системы такое, что выполняются равенства

$$f^{(1)}(\widehat{Q}x) = f^{(2)}(x), \quad \widehat{Q}\widehat{T}^{(1)}x = \widehat{T}^{(2)}\widehat{Q}x.$$

Последнее условие означает эквивалентность следующих двух путей перехода:

$$x \rightarrow \widehat{T}^{(1)}x \rightarrow \widehat{Q}\widehat{T}^{(1)}x,$$

$$x \rightarrow \widehat{Q}x \rightarrow \widehat{T}^{(2)}\widehat{Q}x.$$

Кроме того, следует исключить из областей (x) и $\widehat{Q}(x)$ некоторые множества нулевой меры.

Приведенное выше определение изоморфизма динамических систем является не очень удобным, так как отображения \widehat{T} для реальных динамических систем не обладают, как будет видно далее, однозначностью в сторону $t < 0$. Если, однако, в определении изоморфности двух динамических систем снять требование взаимной однозначности отображения \widehat{Q} , то тогда, например, в гамильтоновом случае, как показал Синай [212, 213],

$$h(\widehat{T}^{(1)}) = h(\widehat{T}^{(2)}).$$

Такие системы называются слабо изоморфными. Мы, однако, в дальнейшем будем всюду пользоваться термином «изоморфность» вместо термина «слабая изоморфность». Итак, изоморфные динамические системы имеют одинаковую энтропию. В действительности для реальных динамических систем понятие изоморфности нуждается еще в ряде уточнений, которые мы сделаем позже.

Как энтропия достигает максимума? Ответ на этот вопрос позволяет выяснить еще одну особенность определения K -энтропии. При $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при определении $S(t) = ht$ ($t \rightarrow \infty$) со сколь угодно большой точностью, энтропия S максимума не достигает. Положение меняется, если зафиксировать конечный порядок огрубления ε_0 . Тогда из (6.9) можно найти время t_0 , в течение которого область $\Delta\Gamma_0 = \varepsilon_0$ расширяется до значения

$$\Delta \bar{\Gamma} = 1:$$

$$t_0 = \frac{1}{\hbar} \ln \frac{1}{\varepsilon_0}. \quad (6.13)$$

За время (6.13) фазовая капля ε_0 равномерно растекается по всему фазовому объему, и дальнейший рост энтропии прекращается.

§ 1.7. Исторические замечания

Обоснование статистической физики. Парадоксы Цермело и Лошмидта. Взгляды Больцмана и Эренфеста. Еще раз о перемешивании. Принцип дополненности Крылова

С момента появления H -теоремы Больцмана (1872 г.) прошло более ста лет, но дискуссии вокруг вопросов, которые принято объединять под названием «обоснование статистической физики», не утихают до сих пор. Первоначально эти дискуссии концентрировались главным образом вокруг двух парадоксов, высказанных Цермело и Лошмидтом. Дадим описание этих парадоксов в сжатой форме.

Парадокс возвращаемости (Цермело). Согласно теореме Пуанкаре о возвратах любое состояние системы, рассматриваемое как начальное, должно через некоторое время (время возврата) почти повториться с любой заданной точностью. Энтропия в момент возврата должна почти совпасть с начальной энтропией, что противоречит следствию H -теоремы Больцмана о возрастании энтропии.

Парадокс обратимости (Лошмидт). Уравнения движения механики обратимы во времени. Поэтому можно представить себе последовательность состояний z_1, z_2, \dots, z_n эволюции системы и, в равной мере (в силу обратимости уравнений движения), последовательность состояний z_n, \dots, z_2, z_1 . Состоянию z_i сопоставляется энтропия S_i . Тогда, если в одной из последовательностей состояний энтропия возрастает, то в другой она убывает, что противоречит H -теореме.

Сейчас, знакомясь с ответами Больцмана, можно лишь удивляться тому, насколько глубоко он уже в то время представлял основные принципы созданной им кинетической теории. К сожалению, в силу чисто объективных причин еще не существовала возможность создать достаточно четкую и строгую схему описания статистических явлений. Теория Больцмана подвергалась жестокой критике и постоянным нападкам, что, как иногда считают, послужило одной из причин его трагической гибели. В предисловии ко второму тому своих «Лекций по кинетической теории газов» (1904 г.) Больцман писал (см. *Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики.*— М.: Наука, 1973):

«Я убежден в том, что нападки эти основаны на недопонимании и что значение кинетической теории до сих пор просто не

осознано. По моему мнению науке будет нанесен сильнейший удар, если те, кто стоит в оппозиции к кинетической теории в настоящее время, сумеют предать ее забвению, подобно тому, как это произошло с волновой теорией света благодаря авторитету Исаака Ньютона. Я вполне отдаю себе отчет в бессилии человека перед лицом мнения, разделяемого большинством. Для того, чтобы была уверенность в том, что когда человечество вернется к изучению кинетической теории, ему не придется снова переоткрывать уже известные вещи, я постараюсь изложить наиболее трудные и непонятные разделы теории как можно яснее».

В обоснование статистической механики обычно включаются формальная и фактическая стороны проблемы. Первая из них связана со строго обоснованной схемой получения необратимых кинетических уравнений из обратимых уравнений гамильтоновой механики. Как правило, эта программа реализуется путем введения некоторых четких гипотез и определений. Примерами таких гипотез может служить гипотеза о столкновениях (Stoßzahlansatz) Больцмана или так называемое приближение хаотических фаз (ПХФ). Естественно, что фактическая сторона проблемы связана не только с выяснением природы этих гипотез, но и с объяснением реально наблюдаемой необратимости физических процессов. Например, газ, запертый в левой половине сосуда, после снятия перегородки равномерно заполняет весь сосуд, и вряд ли можно рассчитывать увидеть, как газ снова соберется в левой половине. Конечно, решение парадоксов Цермело и Лосмидта играет здесь важную, хотя и не самую главную (как мы увидим ниже) роль. Остановимся сначала на них.

Два обстоятельства позволяют разобраться в парадоксах возврата и обратимости: статистический характер описания протекающих процессов и их огрубленное описание. Если рассматривать очень большое число частиц (например, 10^{23}), то время возврата (см. § 1.1) чудовищно велико. Или, иначе, вероятность возврата необычайно мала. Операция огрубления, или введения крупнозернистой функции распределения, является определенным приближением, которое содержит пренебрежение маловероятными событиями. К таким событиям относятся и приближенные возвраты системы. Поэтому кинетическое уравнение, получаемое для огрубленной функции распределения, возвратов не содержит. По той же причине микроскопическая обратимость уравнений движения частиц исчезает при переходе к их описанию с помощью огрубленной функции распределения, так как при этом происходит пренебрежение флуктуациями, которые могли бы выровнять вероятности переходов в обе стороны между какими-либо двумя макросостояниями. По существу, в этом и состояла интуитивная позиция Больцмана по отношению к критике со стороны Цермело и Лосмидта. В книге Каца [9] приводятся следующие ответы Больцмана. На возражение Цермело о том, что система должна вернуться в исходное состояние, Больцман сказал: «Долго же вам придется ждать». А на замечание

Лосмидта о том, что все молекулы можно повернуть в обратном направлении движения и получить не возрастание, а убывание энтропии, Больцман сказал: «Попробуйте их повернуть».

Идеи Больцмана по обоснованию кинетической теории были существенно продвинуты благодаря работам Эренфеста, который сумел развить логическую схему, применившую на определенное время физиков с основными законами статистической физики. Большую роль здесь сыграла модель урн Эренфеста. Строгое и изящное решение этой модели и ее упрощенного варианта содержится в книгах Каца [9, 10].

Однако наиболее трудным в проблеме обоснования статистической физики оказался вопрос о том, как возникает близкое к равномерному распределение состояний системы на поверхности постоянной энергии (или, в более общем случае, на поверхности постоянных однозначных интегралов движения). Большие надежды в решении этой проблемы возлагались (начиная с Больцмана) на эргодическую теорему или, короче, на свойство эргодичности системы. Неудачи, связанные с многочисленными попытками в этом направлении, в определенном смысле скомпрометировали проблему обоснования статистической физики, сделав ее в глазах многих физиков «вещью в себе». Сейчас мы уже знаем, почему этот путь оказался неудачным.

Глубокий анализ, проведенный Крыловым [42], показал, что в основе понимания природы появления статистических законов лежит не свойство эргодичности динамической системы, а свойство перемешивания и связанная с ним локальная неустойчивость (из которого эргодичность следует автоматически). Однако анализ Крылова показал также, что в уравнениях динамики системы не содержится какого-либо механизма огрубления, даже если эта динамика является квантовой. Процедура огрубления до сих пор является дополнительным к динамическим уравнениям приемом, который привносится в описание процессов исследователем, а не природой. Вернее, мы не знаем точно, каким именно образом природа «огрубляет систему». Идеи Крылова в преодолении этой трудности остались, к сожалению, незавершенными. Известно лишь [42], что разрешение проблемы Крылов искал на пути получения некоторого свойства своеобразной дополнителности между точностью в определении состояния системы и ее макроскопическими переменными (аналогично принципу дополнителности в квантовой механике). Чем максимальнее полнота опыта над макроскопической системой, тем сильнее изменяются ее макроскопические свойства в результате опыта.

Современные достижения эргодической теории показали, что для появления статистических свойств в системе вовсе не обязательно, чтобы система состояла из большого числа степеней свободы. Эти свойства могут появляться уже в системе из двух частиц. В связи с этим полезно показать, каким образом разрешаются парадоксы Цермело и Лосмидта, используя представления о перемешивании и о локальной неустойчивости.

Прежде всего заметим еще раз, что теорема Пуанкаре в возвратах не имеет никакого отношения к появлению статистических свойств в системе. Возвраты существуют как при условно-периодическом движении, так и при стохастическом движении. В последнем случае времена последовательных возвратов (циклов) являются случайной последовательностью, а величина их для систем из малого числа частиц также мала. Необратимость проявляется не в том, что система не может вернуться близко к исходному состоянию, а совсем в ином ее свойстве. Рассмотрим фазовую каплю правильной формы и будем следить за изменением формы ее границ со временем. В устойчивом случае (в отсутствие перемешивания) поверхность капли изменяется не очень сильно, в то время как в случае локальной неустойчивости поверхность капли очень быстро приобретает необычайно сложную и запутанную форму (см. рис. 1.15). Необратимость связана именно с этой формой. Никто еще не подсчитывал вероятность возврата фазовой капли после перемешивания обратно в «старую оболочку». Однако интуитивно ясно, что эта вероятность должна быть столь же мала, как и вероятность возврата для большого числа частиц. Пренебрежение этой вероятностью, эквивалентное также некоторому огрублению, и приводит к необратимости.

Теперь проследим за тем, почему нельзя, как заметил Больцман в ответе Лошмидту, повернуть все частицы в обратном направлении и тем самым заставить систему перейти из состояния более вероятного в состояние менее вероятное. Рассмотрим выходящий из малой области Δ_0 пучок траекторий. Рассмотрим также через некоторое, не слишком большое время область $\Delta \sim \Delta_0$, и те траектории, которые, выйдя из Δ_0 , попадают в область Δ . Будем считать, что Δ есть масштаб огрубления в фазовом пространстве. Это означает, что индивидуальный характер траекторий внутри Δ для нас потерян. Поэтому внутри области Δ мы не можем отличить те траектории, которые совершили путь $\Delta_0 \rightarrow \Delta$, от траекторий, идущих по другим путям. Следовательно, мы не можем повернуть траектории системы, вышедшие из Δ_0 , в обратную сторону. Точнее, мы не можем повернуть только те траектории, которые вышли из Δ_0 . Мы поворачиваем все траектории, находящиеся в Δ , т. е. огромное число других траекторий. Именно в этом месте и начинает работать свойство перемешивания системы, которое необходимо для последнего утверждения.

При локальной неустойчивости через короткое время (время перемешивания) в области Δ находится много «чужих» траекторий, не вышедших из Δ_0 . Таким образом, огрубление приводит к потере информации об индивидуальных траекториях в области огрубления Δ в момент их достижения этой области (и тем самым в любой последующий момент времени), а перемешивание приводит к заполнению области огрубления за конечное время траекториями, о которых теряется информация. Наконец, важным является то, что перемешивание заполняет область огрубления

траекториями, пришедшими почти из любой области фазового объема. Поэтому в смешении информации участвует доля порядка $\Delta \sim \Delta_0$ траекторий, в которых равномерно представлены состояния почти всего фазового объема, а не малой его части. Такая ситуация, обеспечиваемая перемешиванием, делает механизм потери информации экстремальным и устойчивым.

Комментарии к гл. 1

1. Теореме Пуанкаре суждено было сыграть особую роль в развитии стохастической теории. Эта теорема легла в основу парадокса Цермело (он будет рассмотрен ниже), который явился одной из причин (как будет видно далее — необоснованной) критического отношения к кинетической теории Больцмана.

2. Из теоремы Пуанкаре не следует, как система будет возвращаться в исходную область. Времена последовательных возвратов могут подчиняться любому закону, в том числе и случайному. Тем не менее в ряде работ и книг по статистической механике теорема о возвратах воспринимается как доказательство почти периодического движения системы.

3. Изложение теории нелинейного резонанса следует в основном работе [15]. Более подробное описание можно найти в монографии Чирикова [24] и в обзоре [25]. Анализ строгих методов и результатов содержится в книге Арнольда [16]. Эту книгу мы настоятельно рекомендуем читателю не только для выяснения последних достижений в области классической динамики, но и для уточнения ряда «старых» результатов. Отдельные вопросы динамики включены Арнольдом также в монографию [17].

4. Строгий анализ, доказательство и библиография всех результатов, приведенных в этом параграфе, имеются в книге Арнольда [16].

5. Фундаментальное значение проблемы устойчивости в классической механике отмечалось еще в работах Пуанкаре [27]. Ее приложения ограничивались в основном задачами небесной механики, а трудности в решении были связаны с хорошо известной проблемой малых (резонансных) знаменателей. Значение теории КАМ не только в том, что эти трудности были успешно преодолены, что позволило сформулировать утверждение об устойчивости системы без ограничения по времени. Дело в том, что развитие физики последних десятилетий привело к огромному числу задач, в которых проблема устойчивости оказалась важной и с принципиальной, и с прикладной точек зрения. Кроме известной задачи трех тел и других задач небесной механики, теория КАМ нашла применение в задачах о движении частиц в ускорителях и магнитных ловушках, динамики сплошной среды, колебаний молекул и во многих других задачах.

Теорема об устойчивости и идеи ее доказательства были сформулированы Колмогоровым [28] в 1954 г. Доказательство этой теоремы было проведено Арнольдом [29 — 31]. Независимо, теорема устойчивости (но при нескольких иных исходных предположениях) была доказана Мозером [32, 33]. Различные приложения теории КАМ содержатся в обзорах [14, 15, 24, 25, 34].

6. Вопрос о существовании интегралов движения при включении малого взаимодействия между различными степенями свободы исследовался Пуанкаре для гамильтониана (4.5) и практически при тех же условиях, что и в теореме КАМ. Результатом этих исследований явилась известная теорема Пуанкаре об отсутствии аналитических интегралов движения при сколь угодно малых ϵ . В дальнейшем были попытки в работах Ферми и Пригожина [7] использовать результаты этой теории для обоснования статистической механики. Безуспешность этих попыток стала очевидной только после теоремы КАМ. Действительно, система резонансных торов является всюду плотной в фазовом пространстве. Эти торы разрушаются в результате взаимодействия. Поэтому инвариантным торам «приходится» очень сложным образом обходить области разрушения. Это приводит к тому, что инвариантные торы существуют, но оказываются неаналитическими (!) функциями

своих переменных. Ошибки, связанные с отсутствием понимания этого вопроса, к сожалению, встречаются до сих пор в физической литературе.

7. Николай Сергеевич Крылов (1917 — 1947) — ленинградский физик, ученик В. А. Фока. Его работы по обоснованию статистической физики, поражающие глубиной и тонкостью анализа предмета, остались, к сожалению, незавершенными. Ранняя смерть Крылова не позволила ему завершить намеченную программу по обоснованию статистической механики. Благодаря усилиям В. А. Фока и А. Б. Мигдала основные работы Крылова были изданы посмертно в виде монографии [42]. Эта книга оказала огромное влияние на советских физиков и математиков, занимающихся вопросами перехода от динамического описания систем к статистическому, и сейчас трудно представить себе проведение серьезных исследований в этой области без знакомства с книгой Крылова.

8. При определении условия перемешивания (5.8) закон расщепления корреляций не обязательно должен быть экспоненциальным, как в (5.10), хотя последний типичен для задач статистической механики. В случае, например, степенного закона убывания корреляций локальная неустойчивость (5.9), естественно, отсутствует, и поэтому конечного времени релаксации к равновесию не существует. Интересным, однако, является то, что к такого рода системам относится, например, одномерный газ невзаимодействующих частиц. Действительно, в этом случае расстояние между двумя частицами со скоростями v_1 и v_2 растет линейно:

$$D = |v_1 - v_2|t + D_0,$$

п легко показать, что

$$\mathcal{R}(x, x; t) \sim 1/t.$$

Подробно такая система исследовалась в работе [44]. В ней не существует конечного времени релаксации, и надо заметить, что вообще идеальные системы (т. е. системы невзаимодействующих частиц) до сих пор плохо вписываются в существующую картину обоснования статистической механики.

Еще одно замечание следует сделать о том, что переход от (5.9) к (5.10) следует принимать с определенным количеством оговорок. Свойство локальной неустойчивости (5.9) может быть в значительной степени неоднородным в различных областях фазового пространства. Это приводит к тому, что экспоненциальный закон распада корреляций действует при достаточно больших значениях инкремента h_0 и при не слишком больших временах t . Различные области фазового пространства, в которых локальная неустойчивость развивается очень медленно, будут определять медленно спадающую со временем асимптотику корреляционной функции. Таких областей у корреляционной функции с различными «промежуточными» асимптотиками может быть несколько.

9. На первый взгляд, делается парадоксальное утверждение о существовании обратимых уравнений движения, решения которых являются случайными функциями. Происхождение парадокса связано с часто встречающимся у физиков заблуждением о том, что все случайное должно быть необратимым. В действительности необратимо ведут себя лишь усредненные или каким-либо способом огрубленные величины, в которых уже потеряна часть той полной информации о системе, которая содержится в точном решении уравнений движения. Здесь же следует заметить, что хотя в стохастическом случае и существует принципиальная возможность такого описания, однако она практически невозможна ввиду сложности движения. Поэтому в случае K -систем мы сталкиваемся с необходимостью (можно сказать, также и с приятной возможностью) перейти к сокращенному (и, следовательно, необратимому) описанию системы ценой потери некоторой информации, которая зачастую оказывается и непужной или просто недостижимой.

ГЛАВА 2

КРИТЕРИЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

Понятие критерия стохастичности вошло в физические исследования сравнительно недавно. Его появление означает, что прошло то время, когда переход от регулярного движения системы к случайному разделяла неведомая пропасть. Современные методы позволяют иногда составить из параметров системы такую безразмерную величину K , что если $K < 1$, то движение системы устойчиво, а если

$$K \geq 1,$$

то движение системы становится перемешивающимся. Это неравенство и называется критерием стохастичности (или, иначе, критерием стохастической неустойчивости). Его определение не является достаточно простым делом, и обычно критерий стохастичности находится из полуколичественных, полукачественных, а зачастую из численных исследований. По существу, именно этим вопросам посвящена основная часть книги (гл. 3—12).

Заметим, что когда мы говорим о критерии стохастичности, то речь идет об определении очень непривычного свойства системы — такого значения некоторого параметра, которое разделяет два разных типа движения: регулярное и случайное. Поэтому далеко не праздным является вопрос о существовании моделей, для которых свойство перемешивания устанавливается точно. Некоторые из таких моделей будут рассмотрены в этой главе. Мы отобрали те из них, аналогия с которыми позволит перейти к реальным физическим системам.

§ 2.1. Две модели перемешивания

Неправильные дроби и стохастичность. Преобразование растяжения. Стационарная функция распределения

Рассмотрим один из классических примеров появления случайности — разложение числа $0 < x < 1$ в непрерывную дробь [8]:

$$x = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}}, \quad (1.1)$$

где a_i — положительные целые числа. Нетрудно получить для

a_i следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 a_0(x) &= \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} \right\}, \\
 a_1(x) &= \frac{1}{\left\{ \frac{1}{x} \right\}} - \left\{ \frac{1}{\left\{ \frac{1}{x} \right\}} \right\}, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где скобки $\{ \dots \}$ обозначают дробную часть аргумента. Обозначим

$$\hat{T}(x) = \{1/x\}.
 \tag{1.3}$$

Тогда сравнение (1.2) и (1.3) дает возможность записать

$$\begin{aligned}
 a_1(x) &= a_0(\hat{T}(x)), \\
 a_2(x) &= a_1(\hat{T}(x)) = a_0(\hat{T}^2(x)), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 a_{n+1}(x) &= a_0(x_{n+1}), \\
 x_{n+1} &= \hat{T}(x_n) = \{1/x_n\}, \quad x_0 \equiv x.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.5) следует, что все коэффициенты разложения в непрерывную дробь выражаются через нулевой коэффициент, аргумент в котором составляется по определенному правилу. Это правило выражается уравнением (1.6), которое имеет форму уравнения движения в конечных разностях, а в качестве начального условия выбирается сама дробь x .

Основное утверждение (о доказательстве его см. ниже) состоит в том, что последовательность x_n , определяемая динамическим уравнением (1.6), является случайной. Поэтому можно поставить вопрос, как распределены x_n при $n \rightarrow \infty$. Это есть не что иное, как вопрос о виде стационарной функции распределения $\rho(x)$, причем

$$\int_0^1 \rho(x) dx = 1.
 \tag{1.7}$$

Прием, используемый ниже, состоит в составлении уравнения движения для ρ с использованием уравнения отображения (1.6). Рассмотрим произвольный интервал A с концами в точках (α, β) , $0 < \alpha < \beta < 1$, и

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha.$$

Определим меру на A :

$$\mu(A) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x) dx,
 \tag{1.8}$$

т. е. вероятность того, что значения x попадают в интервал A .

Пусть первый интервал A_{n+1} состоит из точек x_{n+1} в «момент времени» $t = n + 1$. Их мера есть $\mu(A_{n+1})$. Рассмотрим прообраз этих точек, т. е. точки

$$x_n = \hat{T}^{-1}(x_{n+1}). \quad (1.9)$$

Их мера по определению равна

$$\mu(A_n) = \mu(\hat{T}^{-1}A_{n+1}). \quad (1.10)$$

Условие стационарности функции распределения $\rho(x)$ согласно (1.8) и (1.10) означает, что

$$\mu(A_{n+1}) = \mu(\hat{T}^{-1}A_{n+1})$$

или просто

$$\mu(A) = \mu(\hat{T}^{-1}A). \quad (1.11)$$

Задача теперь заключается в том, чтобы записать правую часть уравнения (1.11) в явном виде. Согласно уравнению движения (1.6) границе интервала $x = \alpha$ соответствует прообраз

$$\hat{T}^{-1}\alpha = \frac{1}{m + \alpha},$$

где m может принимать любое целочисленное положительное значение:

$$m = 1, 2, \dots$$

Действительно, полагая $x_n = 1/(m + \alpha)$, из (1.6) находим $x_{n+1} = \alpha$. Аналогично,

$$\hat{T}^{-1}\beta = \frac{1}{m + \beta}.$$

Это означает, что значения x попадают в интервал $A = (\alpha, \beta)$, если прообраз x находился в интервалах

$$\left(\frac{1}{1 + \beta}, \frac{1}{1 + \alpha}\right), \left(\frac{1}{2 + \beta}, \frac{1}{2 + \alpha}\right), \dots \quad (1.12)$$

Поэтому уравнение (1.11) с учетом (1.12) и (1.8) может быть переписано в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{1/(m+\beta)}^{1/(m+\alpha)} \rho(x) dx, \quad (1.13)$$

где использована теорема сложения вероятностей. Несмотря на несколько сложный вид уравнения (1.13), его решение, удовлетворяющее условию нормировки (1.7), известно:

$$\rho(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x}, \quad (1.14)$$

в чем можно убедиться прямой подстановкой (1.14) в (1.13).

Результат (1.14) был известен еще Гауссу. Для физиков, по-видимому, приведенный пример является несколько абстракт-

ным. История, однако, неоднократно демонстрировала вечную ценность простых и изящных моделей. Недавно преобразование (1.6) возникло при анализе решений гравитационных уравнений движения Эйнштейна вблизи особенности [55].

Следующий пример, на котором мы остановимся подробно, является также одним из простейших типов преобразования, приводящим к перемешиванию. Особая ценность этого примера заключается в том, что его различные модификации являются типичными для многих физических задач.

Пусть по-прежнему переменная x изменяется в области $0 < x < 1$. Рассмотрим преобразование

$$x_{n+1} = \{Kx_n\}, \quad (1.15)$$

где K — параметр задачи ($K > 0$), а смысл фигурных скобок тот же, что и в (1.2). При $K < 1$ фигурные скобки в (1.15) можно опустить и

$$x_{n+1} = Kx_n = K^2x_{n-1} = \dots = K^{n+1}x_0.$$

Отсюда следует, что $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ независимо от начального значения x_0 . При $K = 1$

$$x_{n+1} = x_n = \dots = x_0,$$

т. е. система покоится.

Совсем иначе обстоит дело при $K > 1$. В работах [56 — 58] было показано, что в этом случае движение обладает свойством перемешивания. Итак, в наших руках пример системы, в которой может быть как регулярное, так и стохастическое движение в зависимости от значений параметра системы. Займемся подробным исследованием задачи (1.15). Ограничимся случаем $K \gg 1$, что позволит использовать не столь строгие, как в [56 — 58], но весьма наглядные качественные методы.

Вычислим сначала корреляционную функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n = \int_0^1 (x_{m+n} - \langle x_{m+n} \rangle) (x_m - \langle x_m \rangle) dx_m \times \\ \times \left[\int_0^1 (x_m - \langle x_m \rangle)^2 dx_m \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\langle x_m \rangle = \int_0^1 x_m dx_m = \frac{1}{2}, \quad \langle x_{m+n} \rangle = \int_0^1 x_{m+n} dx_m. \quad (1.16)$$

Может возникнуть вопрос: почему в формулах (1.16) в определении $\langle x_{m+n} \rangle$ интегрирование ведется по dx_m и почему не равны средние $\langle x_m \rangle$ и $\langle x_{m+n} \rangle$? Ответ на него связан с тем, что преобразование (1.15) не сохраняет, вообще говоря, меру. Поэтому отсутствует аналог теоремы Лиувилля и средние не являются

стационарными величинами. Если, однако, K — целое, то мера сохраняется и тогда $\langle x_m \rangle = \langle x_{m+n} \rangle$.

Мы убедимся в этом свойстве системы несколько позже, когда займемся анализом функции распределения, а сейчас продолжим вычисление \mathcal{R}_n . Определим сначала \mathcal{R}_1 [59]. Имеем

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\langle (x_{n+1} - \langle x_n \rangle)(x_n - \langle x_n \rangle) \rangle}{\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^2 \rangle} = \frac{\langle x_{n+1} x_n \rangle - \langle x_{n+1} \rangle \langle x_n \rangle}{\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2},$$

или, после использования для x_{n+1} формулы (1.15),

$$\mathcal{R}_1 = 12 \left(\langle x \{Kx\} \rangle - \frac{1}{2} \langle \{Kx\} \rangle \right).$$

Простые преобразования интегралов дают

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \{Kx\} dx &= \frac{1}{K^2} \int_0^K x \{x\} dx = \\ &= \frac{1}{K^2} \sum_{n=0}^{K-(K)-1} \int_n^{n+1} x \{x\} dx + \frac{1}{K^2} \int_{K-(K)}^K x \{x\} dx = \\ &= \frac{1}{K^2} \sum_{n=0}^{K-(K)-1} \int_n^{n+1} x(x-n) dx + \frac{1}{K^2} \int_{K-(K)}^K x(x-K+\{K\}) dx = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1+6(K)\{(K)-1\}}{12K} + O\left(\frac{1}{K^2}\right), \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \{Kx\} dx = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{K}\right).$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_1 \approx C_1/K,$$

где C_1 — константа порядка единицы. С помощью аналогичных выкладок можно получить

$$\mathcal{R}_2 \approx C_2/K^2.$$

Можно ожидать, что вообще

$$\mathcal{R}_n \sim C(n)/K^n = C(n) \exp(-n \ln K), \quad (1.17)$$

где $C(n)$ — медленно меняющаяся предэкспонента (при $K \gg 1$).

Доказать, однако, выражение (1.17) используемыми методами мы можем только для целых K . Действительно,

$$\mathcal{R}_1 \approx \frac{1}{12K}, \quad \mathcal{R}_{n+1} = \frac{1}{K} \mathcal{R}_n,$$

откуда

$$\mathcal{R}_n \approx \frac{1}{12} \exp(-n \ln K). \quad (1.18)$$

В случае нецелых K удобно рассмотреть корреляционную функцию $\overline{\mathcal{R}}_n$ иного типа:

$$\overline{\mathcal{R}}_n = 2\pi \langle \exp [2\pi i (x_{n+m} - x_m)] \rangle. \quad (1.19)$$

Как станет ясно дальше, именно такого типа корреляторы возникают при выводе кинетического уравнения. Оценим $\overline{\mathcal{R}}_n$ при $K \gg \gg 1$ [14]. Для $\overline{\mathcal{R}}_1$ имеем при произвольном K :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}}_1 &= 2\pi \int_0^1 dx \exp [2\pi i (x - \{Kx\})] = \\ &= 2\pi \int_0^1 dx \exp [2\pi i (1 - K)x] = \frac{i}{1-K} (1 - \exp [2\pi i (1 - K)x]) \sim \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Для целых K функция $\overline{\mathcal{R}}$ обращается тождественно в нуль, что связано со специальным выбором вида коррелятора. При $K < 1$ величина $\overline{\mathcal{R}}_1 \sim 1$.

Докажем теперь рекуррентную формулу

$$\overline{\mathcal{R}}_1 \sim \frac{1}{K} \overline{\mathcal{R}}_{n-1} \quad (K \gg 1). \quad (1.20)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}}_n &= 2\pi \int_0^1 dx \exp \left[2\pi i \left(x - \underbrace{\{K \{K \dots \{Kx\} \dots\}}_n \right)} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \int_0^K dx \exp \left[2\pi i \left(\frac{x}{K} - \underbrace{\{K \{K \dots \{x\} \dots\}}_n \right)} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \sum_{m=0}^{K-(K)-1} \int_m^{m+1} dx \exp \left[2\pi i \left(\frac{x}{K} - \underbrace{\{K \{K \dots \{K(x-m)\} \dots\}}_{n-1} \right)} \right] + \\ &+ \frac{2\pi}{K} \int_{K-(K)}^K dx \exp \left[2\pi i \left(\frac{x}{K} - \underbrace{\{K \{K \dots \{K(x-K + \{K\})\} \dots\}}_{n-1} \right)} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \left(\sum_{m=0}^{K-(K)-1} \exp \left(2\pi i \frac{m}{K} \right) \right) \int_0^1 dy \exp \left[2\pi i \left(y - \underbrace{\{K \{K \dots \{Ky\} \dots\}}_{n-1} \right)} \right] + \\ &+ \frac{2\pi}{K} \exp \left(2\pi i \frac{K-(K)}{K} \right) \int_0^{\{K\}} dy \exp \left[2\pi i \left(y - \underbrace{\{K \{K \dots \{Ky\} \dots\}}_{n-1} \right)} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \frac{1 - \exp \left(2\pi i \frac{K-(K)}{K} \right)}{1 - \exp \frac{2\pi i}{K}} \overline{\mathcal{R}}_{n-1} + \frac{2\pi}{K} \exp \left(2\pi i \frac{K-(K)}{K} \right) \overline{C}_{n-1} (\{K\}), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\bar{C}_n(z) = \int_0^z dy \exp \left[2\pi i \left(y - \frac{\{K \{K \dots \{Ky\} \dots\}}{n-1} \right) \right] \quad (z < 1).$$

Аналогично можно показать, что

$$\bar{C}_{n-1}(\{K\}) \sim \frac{\alpha}{K} \bar{C}_{n-2}(\{K \{K\}\}) + \frac{\beta}{K} \bar{\mathcal{R}}_{n-2},$$

где α и β — константы порядка единицы. Упрощая выражение для $\bar{\mathcal{R}}_n$, имеем

$$\bar{\mathcal{R}}_n \sim \frac{\{K\}}{K} \bar{\mathcal{R}}_{n-1} + \frac{2\pi}{K} \bar{C}_{n-1}(\{K\}).$$

Совмещением последних двух выражений заканчивается доказательство рекуррентного соотношения (1.20), поскольку $\bar{C}_1 \sim \sim 1/K$. Из полученных выражений можно извлечь дополнительную информацию: коэффициент $\bar{C}(n)$ в формуле для корреляции $\bar{\mathcal{R}}_n \sim \bar{C}(n) \exp(-n \ln K)$, (1.21)

вытекающий из (1.20), растет не быстрее, чем n .

Формулы (1.17), (1.21) приводят не только к доказательству перемешивания при больших K , но и к определению очень существенной характеристики движения — времени расщепления корреляций:

$$\tau = 1/\ln K. \quad (1.22)$$

Кроме того, (1.22) раскрывает содержание рекуррентной формулы (1.20). Действительно, последнюю можно переписать в виде

$$\bar{\mathcal{R}}_n \sim \bar{\mathcal{R}}_{n-1} \bar{\mathcal{R}}_1 \sim \dots \sim \bar{\mathcal{R}}_1^n \quad (1.23)$$

т. е. корреляторы высших порядков расщепляются на произведения корреляторов второго порядка. Физический смысл выражения (1.23) заключается в статистической независимости значений x_0, x_1, x_2, \dots , получаемых на каждом шаге преобразований через интервал времени, принятый равным единице. С другой стороны, $K \gg 1$ и, следовательно, $\tau \ll 1$, т. е. время расщепления корреляции координаты движения x меньше времени между двумя последовательными изменениями x (между двумя «столкновениями»). Это условие, как известно, автоматически приводит к расщеплению (1.23).

Из (1.23) следует практически важный вывод. Соотношение (1.23) и его физическое содержание показывают, что в подобных случаях ($\tau \ll 1$) нет необходимости оценивать $\bar{\mathcal{R}}_n$. Достаточно найти только $\bar{\mathcal{R}}_1$.

Попробуем теперь взглянуть на отображение (1.15) с точки зрения устойчивости движения. Для этого подействуем отображением \hat{T} на очень малый интервал δx_0 . Из (1.15) видно, что $\delta x_1/\delta x_0 = K$ (1.24)

и, следовательно, при $K > 1$ отображение \hat{T} является отображе-

нием растяжения. Пусть $\delta x_0 \ll 1/K$. Тогда отображение \hat{T} , примененное n раз, дает

$$\delta x_n = K^n \delta x_0 = \exp(n \ln K) \delta x_0. \quad (1.25)$$

Выражение (1.25) описывает развитие локальной неустойчивости в фазовом пространстве с инкрементом

$$h_0 = \ln K. \quad (1.26)$$

В данном примере имеет место точное равенство

$$h_0 = 1/\tau \quad (1.27)$$

в соответствии с утверждением в § 1.6. Если рассмотреть точки на очень малом интервале $\delta x_0 \ll 1$, то можно с помощью формулы (1.25) указать время n_0 , через которое траектории, выходящие из этих точек, разбегутся далеко и равномерно заполнят единичный интервал. Для этого надо в (1.25) положить $\delta x_{n_0} \sim 1$, что дает

$$n_0 = \frac{\ln 1/\delta x_0}{\ln K} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{\delta x_0}. \quad (1.28)$$

Физическое содержание времени n_0 в том, что это время установления стационарного распределения. Из (1.22), (1.26) — (1.28) следует соотношение характерных времен задачи:

$$\tau \ll T \ll \tau_0, \quad (1.29)$$

где переобозначено $\tau_0 = n_0$ и $1 = T$. Неравенства (1.29) являются типичными для кинетической теории (или, точнее, для тех задач, для которых кинетические методы достаточно успешно развиты).

Подчеркнем еще раз последовательность времен в (1.29) в порядке их убывания: время установления стационарного состояния $>$ времени между столкновениями $>$ времени потери памяти о начальных условиях. Мы несколько изменили терминологию относительно времени τ для того, чтобы вложить в него смысл, часто встречающийся в физике. Это соответствует существованию вопроса. Действительно, как уже отмечалось, память о состоянии после какого-либо столкновения забывается к следующему столкновению, что формально выражено формулой (1.23).

Все приведенные выше результаты показывают, сколь богатым с точки зрения физических ситуаций оказывается отображение (1.15), которое мы будем называть отображением растяжения. В действительности исчерпаны еще не все возможности, связанные с его анализом. Прежде чем отправиться дальше, полезно пояснить, почему мы придаем этому отображению столь большое значение. Возникновение локальной неустойчивости должно сопровождаться разбеганием траекторий в фазовом пространстве. Процесс разбегания должен сопровождаться растяжением границ очень малых интервалов. Очевидно, что простейшим

случаем является тот, при котором коэффициент растяжения является постоянным. В данном случае это так, и аналогично (1.24) можно записать

$$\delta x_{n+1} = K \delta x_n.$$

Таким образом, параметр K играет роль коэффициента растяжения. Через коэффициент растяжения выражаются все характерные времена задачи.

Перейдем теперь к анализу равновесной функции распределения $\rho(x)$ для отображения (1.15) при условии перемешивания. Почти все результаты, следующие ниже, были получены Реньи [58]. Мы, однако, снова будем пользоваться приемами, типичными для физики.

Обозначим $x_n = y$, $x_{n+1} = x$. Отображение (1.15) переписывается в этих обозначениях так:

$$x = \hat{T}y = \{Ky\}.$$

Разобьем область изменения $y(0, 1)$ на интервалы

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{K}\right),$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{1}{K}, \frac{2}{K}\right), \dots, \Delta_{[K]} = \left(\frac{[K]-1}{K}, \frac{[K]}{K}\right),$$

$$\Delta_{[K]+1} = \left(\frac{[K]}{K}, 1\right), \text{ где } [K] = K - \{K\}.$$

Тогда точки каждого из интервалов Δ_i ($i = 1, 2, \dots, [K]$) отображаются под действием преобразования \hat{T} на интервал $(0, 1)$. Или, иначе, область $(0, [K]/K)$ переменной y отображается на область $(0, 1)$ переменной x . Если $[K] = K$, т. е. K — целое, то из последнего утверждения следует, что отображение \hat{T} сохраняет меру (фазовый объем).

Рассмотрим теперь некоторую точку $x \in (0, 1)$. Система может прийти в нее из любого из следующих значений y :

$$\begin{aligned} \frac{x}{K} \in \Delta_1, \quad \frac{x+1}{K} \in \Delta_2, \dots, \\ \frac{x+[K]-1}{K} \in \Delta_{[K]}, \quad \frac{x+[K]}{K} \in \Delta_{[K]+1}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Отсюда следует, что в стационарном случае значение вероятности в точке x должно равняться сумме значений вероятности в точках (1.30). Однако возникает усложнение, связанное с тем, что в интервале $\Delta_{[K]+1}$ могут находиться только такие значения y , образом которых являются значения

$$x \in (0, \{K\}). \quad (1.31)$$

Если же

$$x \in (\{K\}, 1), \quad (1.32)$$

то допустимыми интервалами для прообразов являются

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{[K]}.$$

При этом значениям x (см. (1.32)) соответствуют прообразы $y \in \left(\frac{\{K\}}{K}, \frac{[K]}{K}\right)$. Пусть теперь $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ — плотности вероятности, определенные соответственно для областей (1.31), (1.32). Тогда в силу сказанного можно записать

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \frac{1}{K} \left(\rho_1\left(\frac{x}{K}\right) + \rho_1\left(\frac{x+1}{K}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \rho_1\left(\frac{x+[K]-1}{K}\right) + \rho_2\left(\frac{x+[K]}{K}\right) \right), \quad 0 < x < \{K\}, \\ \rho_2(x) &= \frac{1}{K} \left(\rho_1\left(\frac{x}{K}\right) + \rho_1\left(\frac{x+1}{K}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \rho_1\left(\frac{x+[K]-1}{K}\right) \right), \quad \{K\} < x < 1, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где появление множителя $1/K$ связано с якобианом преобразования элементов длины ($dx = K dy$) и предполагается, что K лежит в области

$$K\{K\} \geq [K]. \quad (1.34)$$

Если условие (1.34) не выполняется, то второе уравнение в (1.33) изменится (при этом в определенных местах в правой части функции ρ_1 заменятся на ρ_2).

В том случае, когда $\{K\} = 0$, область (1.31) исчезает, а уравнение для $\rho(x)$, $0 < x < 1$, имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{K} \left(\rho\left(\frac{x}{K}\right) + \rho\left(\frac{x+1}{K}\right) + \dots + \rho\left(\frac{x+K-1}{K}\right) \right) \quad (\{K\} = 0).$$

Это уравнение имеет тривиальное решение

$$\rho = 1.$$

Нетрудно видеть, что система (1.33) имеет приблизительно то же решение при $K \gg 1$:

$$\rho = 1 + O(1/K). \quad (1.35)$$

Структура точного решения очень сложна, и для физических целей нам достаточно будет приближения (1.35), определяющего равномерное распределение по x . Однако для более полного представления о виде $\rho(x)$ приведем частный пример, открытый Реньи [58]. Пусть

$$K = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

В этом случае $1 < K < 2$ и удовлетворяется соотношение

$$K\{K\} = 1. \quad (1.36)$$

Система (1.33) переходит в следующую:

$$\rho_1(x) = \frac{1}{K} \left(\rho_1\left(\frac{x}{K}\right) + \rho_2\left(\frac{x+1}{K}\right) \right),$$

$$\rho_2(x) = \frac{1}{K} \rho_1\left(\frac{x}{K}\right).$$

Исключение ρ_2 дает

$$\rho_1(x) = \frac{1}{K} \rho_1\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{1}{K^2} \rho_1\left(\frac{x+1}{K^2}\right).$$

Легко убедиться с помощью условия (1.36), что решение полученных уравнений имеет вид

$$\rho_1 = C \quad (0 < x \leq (\sqrt{5} - 1)/2),$$

$$\rho_2 = C/K \quad ((\sqrt{5} - 1)/2 < x \leq 1),$$

где C определяется условием нормировки. Рассмотренный пример показывает, что $\rho(x)$ может иметь достаточно сложный (неаналитический) характер. Однако в случае $K > 1$ все подобные особенности согласно (1.35) находятся в членах $\sim 1/K$, и ими можно пренебречь.

Рассмотренные два примера обладают одним важным свойством, на котором желательно остановиться подробнее. Его можно сформулировать следующим образом: движение однозначно «вперед» во времени и неоднозначно «назад». Это свойство появляется вследствие оператора «дробная часть». Далее мы увидим, как это свойство будет проявляться в многочисленных физических задачах. Таким образом, можно сказать, что в реальных задачах имеется определенный тип необратимости, или, лучше сказать, неоднозначности. Его не следует смешивать с обычно употребляемым понятием необратимости. Если изменить направление времени, то мы будем двигаться по той же траектории, но в обратном направлении, т. е. движение обратимо. Однако в случае рассмотренных преобразований мы не можем однозначно сказать, откуда система начала свой путь для того, чтобы в фиксированный момент времени оказаться в заданной точке. Мы не исключаем того, что указанное свойство неоднозначности может оказаться необходимым для появления стохастичности, тем более что неоднозначность возникает лишь при $K > 1$. К сожалению, строгих результатов по этому вопросу пока не существует.

§ 2.2. Критерий стохастичности

Критерий Сняля. Пример двумерного растяжения. «Преобразование пыли». U -системы

В предыдущем разделе для определения условия возникновения перемешивания (стохастичности) мы воспользовались оценкой корреляционной функции. Этот путь, безусловно, всегда дол-

жен приводить к цели, если вычисления осуществимы. Однако при этом, кроме условия стохастичности, используется дополнительная информация, связанная со структурой коррелятора. Поэтому возникает вопрос о прямом нахождении критерия стохастичности по заданным уравнениям движения. Такой критерий был предложен Синаем [48] (ком. 1).

Приведем качественное описание критерия Синая. Пусть $x = (x_1, \dots, x_N)$ обозначает все динамические переменные и уравнения движения заданы в форме отображения

$$\hat{T}x = f(x),$$

т. е.

$$\hat{T}(x_1, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, \dots, x_N)).$$

Для каждой точки x рассмотрим матрицу

$$A(x) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|.$$

Взяв произвольный вектор $a = (a_1, \dots, a_N)$, рассмотрим отношение

$$\sigma(a) = \frac{|A(a)a|^2}{|a|^2},$$

где $|x|^2$ означает квадрат длины вектора x . Если $\sigma(a) > 1$, то вектор a называется растягивающимся; если $\sigma(a) < 1$, то — сжимающимся. Рассмотрим теперь в фазовом пространстве некоторую точку в качестве начала координат и выведем из нее всевозможные векторы состояний. Те векторы, которые растягиваются, находятся внутри некоторого конуса L^+ , а те, которые сжимаются, — внутри конуса L^- .

Критерий стохастичности Синая выглядит следующим образом: если выполняются условия

$$\begin{aligned} A(x)L^+(x) &\subset L^+(\hat{T}x), \\ A^{-1}(x)L^-(x) &\subset L^-(\hat{T}^{-1}x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

то движение системы является перемешивающимся. Геометрическая интерпретация условий (2.1) очень проста. Остановимся на первом из условий (2.1). $L^+(x)$ — конус растягивающихся векторов. $L^+(\hat{T}x)$ — конус растягивающихся образов векторов, т. е. векторов, взятых в более поздний момент времени. Действие $A(x)$ на $L^+(x)$ эквивалентно инфинитезимальному преобразованию конуса L^+ (в том числе и границ конуса), наведенному оператором \hat{T} . Таким образом, первое из условий (2.1) означает, что отображение \hat{T} переводит весь конус растягивающихся векторов L^+ внутрь конуса, в котором лежат растягивающиеся векторы в более поздний момент времени. Второе условие в (2.1) выглядит аналогичным образом для сжимающихся векторов и означает, по

существо, что сжимающиеся векторы не попадают в конус растягивающихся векторов.

Рассмотрим два примера применения критерия Спная.

Пусть x_1, x_2 — циклические переменные, $0 < x_1, x_2 < 1$, а отображение \hat{T} имеет вид

$$\hat{T}(x_1, x_2) = (mx_1 + nx_2, px_1 + qx_2), \quad (2.2)$$

где $m, n, p, q > 0$ и $mq - np = 1$. Это отображение является двумерным обобщением отображения (1.15). В этом случае матрица A имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$$

и не зависит от x . Предположим, что числа m, n, p, q таковы, что собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A действительны и различны. В этом случае $\lambda_1 = \lambda > 1, \lambda_2 = 1/\lambda < 1$. Удобно перейти к представлению, в котором A диагональна:

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{vmatrix}.$$

Положим в этом представлении

$$a = (a_1, a_2).$$

Тогда

$$Aa = (\lambda a_1, \lambda^{-1} a_2)$$

и уравнение для границы между конусами L^+, L^- имеет вид

$$|A\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2,$$

или

$$(\lambda \bar{a}_1)^2 + (\bar{a}_2/\lambda)^2 = \bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2.$$

Решением его является

$$\bar{a}_2/\bar{a}_1 = \pm \lambda.$$

Иными словами, растягивающийся конус состоит из векторов, для которых $|a_2/a_1| < \lambda$, а сжимающийся конус состоит из векторов, для которых $|a_2/a_1| > \lambda$ (рис. 2.1). Граница L^+ определяется вектором (\bar{a}_1, \bar{a}_2) . Образ AL^+ имеет границы $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (\lambda \bar{a}_1, \lambda^{-1} \bar{a}_2)$, т. е. уравнение границы конуса AL^+ имеет вид

$$\lambda^{-1} \bar{a}_2/\lambda \bar{a}_1 = \pm 1/\lambda.$$

Отсюда

$$|\bar{a}_2/\bar{a}_1| < \lambda = |\bar{a}_2/\bar{a}_1|.$$

Таким образом, конус $AL^+(x)$ попадает внутрь конуса $L^+(\hat{T}x)$

(рис. 2.2), и первое условие критерия (2.1) выполняется. Аналогично проверяется и второе условие (2.1)*.

Теперь следует внимательно обсудить ту информацию, которую можно извлечь из описанного критерия стохастичности и примера (2.2). Поскольку матрица A не зависит от координат, то при каждом действии отображения на вектор $x = (x_1, x_2)$ с этим вектором будет происходить растяжение в λ раз по координате x_1 и сжатие в λ раз по x_2 . Таким образом, вдоль одной из координат преобразование (2.2) действует точно таким же образом, как и отображение (1.15), а коэффициент растяжения возникает как следствие неустойчивости (это эквивалентно существованию действительных и различных собственных значений λ_1, λ_2). В связи с тем, что матрица A диагонализуется одним и тем же преобразованием для произвольного момента времени, сжатие вдоль x_2 не влияет на растяжение вдоль x_1 . Иными словами, можно выделить ту степень свободы движения, вдоль которой все время происходит растяжение. Тем самым аналогия с отображением (1.15) углубляется.

Реальная ситуация, конечно, выглядит не совсем так, ибо всегда есть некоторое «смешивание» направлений растяжения и сжатия. Это означает, что матрица A не есть постоянная и ее нельзя диагонализировать единым преобразованием во все моменты времени. В этом месте и вступает в игру определенная смелость физических соображений, которая переносит строго результаты для случая $A = \text{const}$ на случай $A \approx \text{const}$, для которого уже ничего не удастся доказать точно. Нам еще придется достаточно подробно обсуждать подобную ситуацию, а здесь следует зафиксировать определенный вывод: стохастичность появляется, если имеется растяжение вдоль какой-либо из координат вектора состояний.

Теперь мы можем перейти к более сложному примеру — «преобразованию пыли»:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \hat{T}(x_1, x_2), \\ \bar{x}_1 &= \{x_1 + Kf(x_2)\}, \\ \bar{x}_2 &= \{x_2 + \bar{x}_1\} = \{x_2 + x_1 + Kf(x_2)\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

* Читателю предлагается в виде упражнения доказать стохастичность с помощью критерия Синяя для отображений $\hat{T}x = \{1/x\}$ и $\hat{T}x = \{Kx\}$ ($K > 1$), рассмотренных в § 2.1.

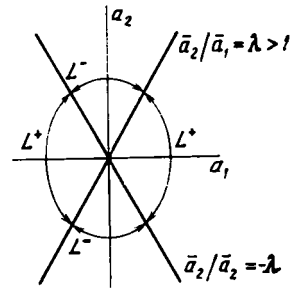


Рис. 2.1. Конусы сжимающихся и растягивающихся векторов для двумерного растягивающего отображения.

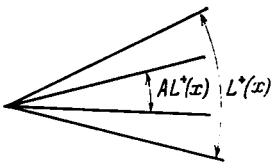


Рис. 2.2. Иллюстрация действия критерия растяжения.

где

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} +1, & 0 < x < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Далее мы увидим (гл. 4), как в нелинейных колебаниях возникает преобразование типа (2.3), однако функция $f(x)$ в них имеет сглаженную аналитическую структуру.

Задача (2.3) исследовалась В. И. Оселедцем. Применим к ней критерий (2.1). Рассмотрим сначала область, где $f'(x_2) = 1$. В этом случае

$$A = \begin{vmatrix} 1 & K \\ 1 & 1 + K \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Все дальнейшее рассмотрение аналогично исследованию отображения (2.2). Единственное различие связано с конкретным определением собственных значений λ_1, λ_2 . Из (2.4) следует уравнение для λ :

$$\lambda^2 - \lambda(2 + K) + 1 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = 1 + 1/2 K \pm (1/4 K^2 + K)^{1/2}$$

и неустойчивость ($\lambda_1 > 1, \lambda_2 = 1/\lambda < 1$) существуют при значениях $K > 0$ либо при $K < -4$. Аналогично рассматривается область, где $f'(x_2) = -1$. В этом случае неустойчивость существует при $K < 0$ либо при $K > 4$. Таким образом, во всей области $0 < x < 1$ неустойчивость, а следовательно, и стохастичность существуют при

$$|K| > 4. \quad (2.5)$$

Этим примером, относящимся к классу так называемых \mathcal{U} -систем, мы заканчиваем рассмотрение «формальных» моделей (ком. 2).

§ 2.3. Столкновение абсолютно твердых шариков

Анализ Крылова. Роль отрицательной кривизны. Трудности в исследовании модели

Мы уже упоминали о том, что Н. С. Крылов провел первое исследование реальной физической системы с точки зрения возможности появления в ней свойств перемешивания и связанной с этим возможности обоснования статистической механики. В качестве такой системы Крыловым [42] была выбрана система из твердых шариков, регулярно сталкивающихся друг с другом через характерное время $\sim t_0$. Все движение происходит в плоскости, а соударения являются абсолютно упругими.

Будем изучать движение луча (материальной точки), рассеивающегося на кругах радиуса R , равного удвоенному радиусу

шариков. Как известно, такая постановка задачи эквивалентна исходной в случае двух сталкивающихся шаров. Систему уравнений, связывающую параметры луча и координаты рассеивающего круга, нетрудно получить, если обратиться к рис. 2.3. Пусть центр сферы, на которой происходит рассеяние, расположен в начале системы координат (x, y) , а координаты точки рассеяния на сфере характеризуются параметрами (R, θ) . Пусть угол падения луча на сферу равен α , и предположим, что исходное положение материальной точки имеет произвольные координаты (x, y) . Запишем связь между координатами материальной точки и координатами точки падения ее (R, θ) :

$$x + \rho \cos \varphi_1 = R \cos \theta, \quad y + \rho \sin \varphi_1 = R \sin \theta, \quad (3.1)$$

где угол φ_1 определен на рис. 2.3. Учитывая, что угол падения α равен углу отражения, имеем

$$2\alpha + \varphi_2 + \pi - \varphi_1 = 2\pi, \quad \alpha + \varphi_2 = \theta,$$

откуда, исключая α , получаем

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \pi = 2\theta.$$

Нашей дальнейшей целью будет найти величину $\partial\varphi_2/\partial\varphi_1$, определяющую характер растяжения траекторий. Поскольку φ_1, φ_2 — соответственно углы (фазы) луча до и после рассеяния, то при выполнении условия растяжения

$$|\partial\varphi_2/\partial\varphi_1| > 1 \quad (3.2)$$

развивается стохастическая неустойчивость, т. е. неустойчивость относительно малых возмущений начальных условий. В этом случае поведение фаз луча является случайным во времени, и к исходной системе можно применить статистические методы описания. Из соотношения, связывающего φ_1, φ_2 и θ , следует

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1} = 2 \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1} - 1.$$

Из (3.1) получаем, считая x, y, φ_1 независимыми переменными:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1} = \frac{\rho \sin \varphi_1 - \frac{\partial\rho}{\partial\varphi_1} \cos \varphi_1}{R \sin \theta}.$$

Определим $\partial\rho/\partial\varphi_1$. Возводим в квадрат каждое из уравнений (3.1) и складываем их:

$$x^2 + y^2 + 2\rho(x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1) + \rho^2 = R^2.$$

Дифференцируя полученное выражение по φ_1 и исключая x, y

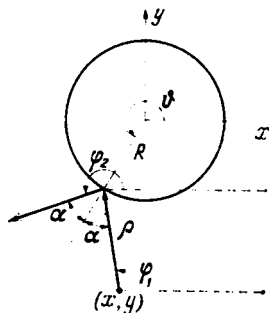


Рис. 2.3. Рассеяние луча на сфере.

с помощью (3.1), находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi_1} = -\rho \operatorname{tg}(\theta - \varphi_1).$$

Используя выражения для $\partial \rho / \partial \varphi_1$, $\partial \theta / \partial \varphi_1$, находим окончательно

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\rho}{R \cos(\theta - \varphi_1)} - 1.$$

Поскольку $\cos(\theta - \varphi_1) \leq 1$, то условие растяжения (3.2) имеет вид

$$K = \rho/R > 1, \quad (3.3)$$

причем очевидно, что в качестве ρ следует взять длину свободного пробега. Выражения (3.2), (3.3) аналогичны формуле (1.24). Это означает, что можно провести аналогию между переменной x в примере преобразования растяжения (1.15) и фазовой переменной φ . Тогда для корреляционной функции можно записать

$$\mathcal{R}_n \sim K^{-n} = \exp(-n \ln K)$$

или, переходя от дискретного времени (n) к непрерывному ($t = nt_0$),

$$\mathcal{R}(t) \sim \exp\left(-\frac{t}{t_0} \ln \frac{\rho}{R}\right). \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что характерное время расцепления корреляций равно

$$\tau = t_0 / \ln \frac{\rho}{R}. \quad (3.5)$$

После проведения выкладок полезно вернуться назад и выяснить, что же явилось физической причиной появления локальной неустойчивости. Рассмотрим две траектории луча, выходящие из близко расположенных точек приблизительно в одном направлении (рис. 2.4). Отражаясь от поверхности сферы, они расходятся. По мере роста числа столкновений это расхождение нарастает до тех пор, пока лучи не разбегаются, «забыв» о том, что они являлись близкими. Основную роль в появлении перемешивания лучей играет то обстоятельство, что поверхности сфер, от которых лучи отражаются, являются рассеивающими поверхностями, т. е. поверхностями отрицательной кривизны. Это приводит нас к мысли о выделенной роли, которую могут играть в физике системы, движущиеся в областях отрицательной кривизны, и мы рассмотрим этот вопрос подробнее в следующем параграфе (ком. 3).

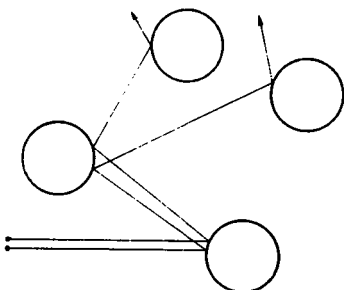


Рис. 2.4. Локальная неустойчивость лучей при рассеянии на сферах.

Нам, однако, необходимо предварительно остановиться на некоторых недостатках проведенного анализа столкновения сфер. Дело в том, что мы, по существу, исключили полную динамику системы, оставив лишь рассеяние луча (сферы) на неподвижных сферах. Действительно, перемещение последних никуда не входит. Это привело к несколько искусственному введению в задачу понятий длины свободного пробега и времени столкновения. И хотя с физической точки зрения рассуждения, проведенные Крыловым, кажутся вполне удовлетворительными, тем не менее возникает вопрос: можно ли в системе газа сфер получить более строгий результат для условий перемешивания, который бы учитывал динамическую эволюцию системы? К сожалению, этот вопрос не является, как может показаться на первый взгляд, обычной (для математиков) и необычной (для физиков) погоней за строгостью. На нескольких примерах далее мы увидим, что введение динамического элемента в систему из нескольких сталкивающихся шариков может привести к качественно новым физическим явлениям.

§ 2.4. Рассеивающие бильярд (бильярд Синая)

Исследования Синая газа твердых дисков. Задача о рассеивающих бильярдах. Об изоморфизме рассеивающих бильярдов

Исследование задачи Крылова о перемешивании в газе упругих шариков было продолжено в работах Синая [61, 62], рассматривавшего также плоскую задачу, т. е. упруго сталкивающиеся диски. Простейший случай представлял собой два диска в плоском ящике, причем один из дисков жестко закреплен. Заменяв закрепленный диск на диск удвоенного радиуса, а движущийся диск — материальной точкой (рис. 2.5), мы приходим к задаче о движении точки в рассеивающем бильярде. В этом случае удается строго показать наличие перемешивания. Далее, Синай распространил результат о перемешивании на тот случай, когда оба диска могут свободно двигаться. Здесь, однако, уже потребовались значительные усилия для решения задачи.

Хотя дальнейшее обобщение решения задачи на случай произвольного числа дисков представляется весьма трудным делом, тем не менее результаты Синая показали, что появился новый и интересный с физической точки зрения объект исследования: различные типы рассеивающих бильярдов. На рис. 2.6, 2.7 приведены примеры бильярдов типа «звезда» и типа «гусеница».

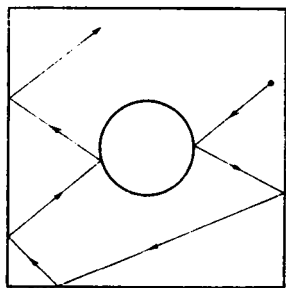


Рис. 2.5. Простейший вид бильярда Синая.

Снова забегая несколько вперед, заметим, что задачи о движении частицы в бильярдах типа изображенных на рис. 2.6, 2.7 могут возникнуть при анализе волнового поля в резонаторах и волноводах соответствующего типа.

Однако наиболее существенной стороной дела является следующее обстоятельство. Как отмечалось ранее, различные виды

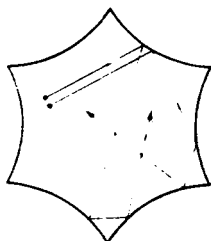


Рис. 2.6. Бильярд типа «звезда».

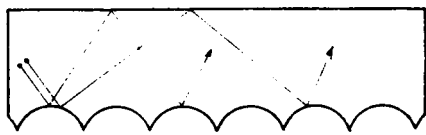


Рис. 2.7. Бильярд типа «гусеница».

K -систем изоморфны друг другу (§ 1.6), если они имеют одинаковую K -энтропию. С некоторыми оговорками, о которых будет сказано позднее, это свойство можно распространить и на реальные физические системы, в которых возникает стохастичность. Свойство изоморфности, из самых общих соображений, должно тем лучше выполняться, чем больше параметр растяжения траекторий K , т. е. чем больше инкремент локальной неустойчивости. В этом случае законы поведения траекторий систем с одинаковыми K приблизительно одинаковы. К таким системам относятся и рассеивающие бильярды. Последнее означает, что исследование ряда физических задач может оказаться эквивалентным исследованию свойств бильярдов, и мы увидим в дальнейшем, как можно эффективно воспользоваться описанным изоморфизмом *).

Комментарии к гл. 2

1. Идеи излагаемого ниже критерия развивались в применении к решению различных задач в ряде работ Аносова и Синая [60, 48 — 50]. Интерес физиков к этому критерию обусловлен следующим обстоятельством. Дело в том, что в реальных физических задачах, как будет видно далее, критерий Синая, как правило, не выполняется строго. Однако существует расширение этого критерия, не доказанное строго, но, скорее всего, верное (это тоже будет видно далее). Необычайная простота критерия и определенная степень «легкости», с которой физики привыкли обращаться с подобного рода инструментами познания, делают критерий Синая в адаптированной форме весьма конструктивным. Упрощенное изложение основной идеи доказательства критерия можно найти в [14].

2. Следует упомянуть еще об одном очень важном классе «формальных» моделей. Это так называемые \mathcal{U} -системы, понятие которых было введено Аносовым [49] (см. также [50, 53]). Неформальное определение \mathcal{U} -систем можно получить, представив себе, что в любой окрестности любой точки в

*) Подробнее о бильярдах, приводящих к стохастичности, см. в Дополнении 1.

фазовом пространстве локальное поведение траекторий должно быть таким же, как в окрестности гиперболической особой точки. Заметим, что примерами \mathcal{U} -систем являются преобразования (2.2) и (2.3) при условии, что матрица A имеет всюду два разных и действительных собственных значения, т. е. при условиях стохастической неустойчивости. С физической точки зрения очевидно, что любая локальная (в фазовом пространстве) неустойчивость гамильтоновой системы может возникнуть только в окрестности гиперболической точки. Поэтому \mathcal{U} -системы, которые всюду ведут себя так же, как и в окрестности точки гиперболического типа, являются максимально неустойчивыми системами. Перечислим некоторые важнейшие свойства \mathcal{U} -систем: а) \mathcal{U} -системы — эргодические, и их движение обладает свойством перемешивания; б) возмущение \mathcal{U} -систем приводит снова к \mathcal{U} -системам, т. е. свойство системы быть \mathcal{U} -системой является грубым; в) понятие \mathcal{U} -систем может быть расширено (хотя и с определенными неудобствами) на случай негамильтоновых систем [53].

3. Первый строгий результат о перемешивании геодезических в пространстве отрицательной кривизны принадлежит Хопфу [40, 41]. Именно этот результат Хопфа явился отправной точкой для анализа Крыловым модели газа твердых шариков. В дальнейшем исследование геодезических в пространстве отрицательной кривизны было развито в работах Аносова и Синая [60, 49, 50].

ГЛАВА 3

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ (УСКОРЕНИЕ ФЕРМИ)

Красивым и сравнительно простым проявлением локальной неустойчивости является стохастический механизм ускорения частиц. Он был предложен Ферми [63] для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах. Идея Ферми заключалась в том, что при столкновении заряженных частиц с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве частица должна в среднем ускоряться. Рассматривая облако как гигантскую частицу большой массы, причину ускорения можно понять следующим образом. При единичных актах столкновения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется ли облако навстречу частице или от нее. Если скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены хаотически, то можно сказать, что число тел, движущихся в одном и том же направлении, примерно равно числу тел, движущихся в обратном направлении. Это означает, что столкновений будет больше с теми телами, скорость которых направлена навстречу частице, так как частица встречает их чаще. Отсюда следует, что частица будет чаще приобретать энергию, чем отдавать ее, и возникнет эффективное ускорение частиц, называемое ускорением Ферми.

В действительности, однако, закон движения макроскопически больших облаков может носить чисто динамический (регулярный) характер, и возникает вопрос о возможности появления ускорений Ферми без априорного введения хаотических скоростей облаков. Ясно, что мы здесь столкнулись с задачей об определении критерия стохастичности, которой и будет посвящена эта глава.

§ 3.1. Механизм стохастического ускорения

Модель Улама. Уравнение отображений. Критерий ускорения. Кинетика ускорения

В связи с описанной выше проблемой о природе появления ускорения Ферми Улам [64] предложил рассмотреть простую модель частицы (шарика), движущейся между двумя стенками, причем одна из них осциллирует по некоторому периодическому

закопу. Численный анализ модели, проведенный Уламом, не привел к положительным результатам, и ускорение не было обнаружено. Однако его работа послужила толчком к более детальному анализу, и решение задачи было получено в работе [59].

Предполагается, что одна из двух горизонтальных стенок колеблется с амплитудой a (рис. 3.1) и минимальное расстояние между стенками равно l . Сила тяжести отсутствует, а столкновение между частицей и стенками абсолютно упругое. Введем «фазу» при n -м столкновении:

$$\xi_n = \{t_n/T\}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (1.1)$$

где t_n — момент времени n -го столкновения, T — период колебаний нижней стенки. Пусть $x(t)$ — координата осциллирующей стенки, отсчитываемая снизу вверх, в момент t . Зададим для $x(t)$ параболический закон

$$x(t) = V_0 T \xi (1 - \xi), \quad (1.2)$$

где V_0 — параметр, имеющий размерность скорости. Поскольку $x(0) = x(T) = 0$, $x(1/2T) = a$,

то из (1.2) следует соотношение

$$T = 4a/V_0 \quad (1.3)$$

и закон изменения скорости нижней стенки

$$V(t) = V_0(1 - 2\xi). \quad (1.4)$$

Итак, формулы (1.1)–(1.4) полностью определяют движение нижней стенки. Пусть теперь $v(t)$ — скорость частицы, а v_n — ее скорость перед n -м столкновением со стенкой в момент t_n . Тогда в предположении $a/l \ll 1$ можно записать следующие уравнения в конечных разностях:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2V(t_n) = v_n + 2V_0(1 - 2\xi_n), \\ \xi_{n+1} &\approx \left\{ \xi_n + \frac{2l}{v_{n+1}T} \right\} = \left\{ \xi_n + \frac{lV_0}{2av_{n+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В (1.5) первое уравнение является точным, а второе написано с точностью до членов $\sim a/l$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial(v_{n+1}, \xi_{n+1})}{\partial(v_n, \xi_n)} = 1.$$

Поэтому преобразование (1.5) сохраняет фазовый объем, а переменные (v, ξ) могут быть выбраны в качестве канонически сопряженной пары. В целях упрощения положим далее

$$V_0 \ll v \quad (1.6)$$

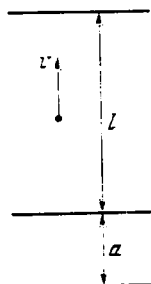


Рис. 3.1. Частица между двумя стенками. Нижняя осциллирует с амплитудой a .

и запишем (1.5) в виде

$$v_{n+1} = v_n + 2V_0(1 - 2\xi_n),$$

$$\xi_{n+1} \approx \left\{ \xi_n + \frac{1V_0}{2av_n} - \frac{1V_0^2}{av_n^2}(1 - 2\xi_n) \right\}. \quad (1.7)$$

В силу неравенства (1.6) переменная v меняется мало при столкновениях, но фаза ξ может изменяться очень сильно. Нетрудно видеть, что мы пришли к уже рассмотренному в гл. 2 преобразованию растяжения. Запишем

$$\left| \frac{\delta \xi_{n+1}}{\delta \xi_n} \right| = \left| 1 + \frac{21V_0^2}{av_n^2} \right|.$$

Отсюда следует, что появление стохастичности определяется условием

$$K = \frac{21V_0^2}{av_n^2} \geq 1 \quad (1.8)$$

и, наоборот, условие $K < 1$ является условием устойчивости или квазипериодического движения. Из (1.8) следует, что для появления стохастичности при неравенстве (1.6) отношение $1/a$ должно быть достаточно большим, т. е. амплитуда осциллирующей стенки должна быть достаточно малой. Из критерия (1.8) вытекает ограничение на скорость ускоряемой частицы

$$v \leq (21V_0^2/a)^{1/2} \equiv v_0. \quad (1.9)$$

Здесь следует сделать ряд существенных оговорок. Их появление связано с определенной нестрогостью нашего анализа. Прежде всего заметим, что граница стохастичности $K \sim 1$, или $v \sim v_0$, является весьма условной. В действительности существует некоторая переходная область (и весьма немалая — она может быть порядка v_0), в которой движение носит весьма сложный характер. Нам еще предстоит в дальнейшем остановиться на переходной области более детально и в более общей ситуации. Поэтому здесь мы ограничимся лишь качественными соображениями, которые хорошо подтверждаются данными численного анализа (ком. 1). Основная информация заключается в том, что хотя частица и проникает в переходную область $v > v_0$, тем не менее вероятность ее пребывания там мала. Если пренебречь этой областью, то граница v_0 должна действовать как отражающая «стенка» для потока частиц в область $v > v_0$.

Введем в области стохастичности функцию распределения частиц $f(v, t)$. Ее нормировка имеет вид

$$\int_0^{v_0} f(v, t) dv \sim 1, \quad (1.10)$$

а граничным условием, выражающим отсутствие потока частиц

$J(v)$ через границу $v = v_0$, является

$$J(v_0) \approx 0. \quad (1.11)$$

Для полноты картины в области стохастичности нам осталось найти функцию распределения $f(v, t)$. Покажем, как это делается непосредственно из уравнений преобразования (1.7). Система (1.7) имеет следующие характерные временные масштабы (аналогично введенным в § 2.1):

$$\tau_s = 2l/v \quad (1.12)$$

— время между двумя столкновениями частицы с движущейся стенкой (с точностью до членов $\sim a/l$),

$$\tau_c = \frac{\tau_s}{\ln K} = \frac{\tau_s}{\ln(2lV^2/av^2)} \quad (1.13)$$

— время расщепления корреляций фаз ξ и, наконец, τ_d — время установления равновесного распределения $f_0(v)$, которое еще подлежит определению. В области сильно развитой стохастичности $K \gg 1$ и согласно (1.13) $\tau_c \ll \tau_s$. Поэтому сначала устанавливается равновесное распределение по фазам $\rho(\xi)$. Учитывая, что изменение скорости на одном столкновении удовлетворяет, согласно (1.6), неравенству

$$\Delta v = 2V_0(1 - 2\xi) \ll v, \quad (1.14)$$

можно для $f(v, t)$ записать уравнение диффузии Фоккера — Планка — Колмогорова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial v} (Af) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (Df), \quad (1.15)$$

где коэффициенты A и D определяются соотношениями

$$A = \left\langle \frac{\Delta v}{\tau_s} \right\rangle, \quad D = \left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\tau_s} \right\rangle \quad (1.16)$$

и скобки $\langle \dots \rangle$ означают здесь усреднение по фазам ξ . Уравнение (1.15) упрощается, если выполняется при столкновениях принцип детального равновесия, или принцип микроскопической обратимости движения. Здесь это так, и поэтому уравнение диффузии приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(D \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (1.17)$$

который является следствием соотношения между коэффициентами

$$\left\langle \frac{\Delta v}{\tau_s} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\tau_s} \right\rangle. \quad (1.18)$$

Вычислим коэффициенты A и D и продемонстрируем, как выполняется соотношение (1.18). Заметим, что в силу (1.14) в течение большого числа столкновений скорость изменяется

незначительно, и, следовательно, параметр растяжения (1.8) при условии $K \gg 1$ можно считать приблизительно постоянным. Тогда второе в (1.7) уравнение для ξ аналогично преобразованию $\hat{T}x = \{Kx\}$ (сдвиг на константу в (1.7) несуществен). Как известно, из (2.1.35) при $K \gg 1$

$$\rho(\xi) \approx 1.$$

Отсюда

$$\langle 1 - 2\xi \rangle = \int_0^1 d\xi (1 - 2\xi) = 0, \quad (1.19)$$

$$\langle (1 - 2\xi)^2 \rangle = \int_0^1 d\xi (1 - 2\xi)^2 = \frac{1}{3}.$$

Нам понадобятся для определения величин (1.16) вычисления с точностью до членов $\sim (V_0/v)^2$. Из преобразований (1.5) видно, что более точное (по порядку $\Delta v/v \sim V_0/v$), чем (1.12), выражение для τ_s имеет вид

$$\tau_s = \frac{2l}{v + 1/2\Delta v}. \quad (1.20)$$

Формула (1.20) получена следующим образом. Рассмотрим интервал времени между двумя последовательными столкновениями частицы с верхней стенкой. Время пролета от верхней стенки до столкновения с нижней стенкой равно l/v . Время пролета от столкновения с нижней стенкой до верхней стенки равно $l/(v + \Delta v)$, так как скорость изменилась на величину Δv . Складывая эти два выражения, приходим к (1.20).

Подстановка (1.14) и (1.20) в (1.16) дает с учетом (1.19) и с точностью до членов $\sim (V_0/v)^2$:

$$A = \frac{1}{3} \frac{V_0^2}{l}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{V_0^2 v}{l}. \quad (1.21)$$

Непосредственно убеждаемся в справедливости (1.18). Таким образом, уравнение диффузии имеет вид (1.17), или, согласно (1.21),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{V_0^2}{3l} \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (1.22)$$

с граничным условием (1.11), т. е.

$$v \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=v_0} \approx 0. \quad (1.23)$$

Стационарное распределение f_0 получается из уравнения (1.22), если положить в нем $\partial f / \partial t = 0$. С учетом (1.23) и условия нормировки (1.10) это дает

$$f_0 = \text{const} = 1/v_0. \quad (1.24)$$

Решение уравнения (1.22) приведено в работе [59]. Однако вре-

мя релаксации произвольного начального распределения к f_0 можно определить непосредственно из (1.22) из соображений размерностей:

$$\frac{1}{\tau_d} \sim \frac{v_0^2}{lv_0^3}$$

или, используя для v_0 выражение (1.9),

$$\tau_d \sim \frac{l}{V_0} \left(\frac{l}{a} \right)^{1/2}. \quad (1.25)$$

Из сравнения (1.25) с (1.12) следует

$$\frac{\tau_d}{\tau_s} = \frac{v}{V_0} \left(\frac{l}{a} \right)^{1/2} \gg 1.$$

Таким образом, соотношение между основными временами задачи то же, что и в (2.1.29), (2.1.30).

Проведенное приближенное решение задачи описывает при условии (1.8) ускорение Ферми до скоростей $\sim v_0$. Однако, как уже отмечалось, численный анализ показывает, что с небольшой вероятностью ($\delta f \ll f_0$) частицы проникают в переходную область и ускоряются до более высоких скоростей [59, 66, 67].

§ 3.2. Гравитационная машина

Как использовать гравитационное поле для неограниченного ускорения тела

Размер исследуемых объектов может повлиять на масштабность возникающих задач и идей. Так появилась в астрофизике идея гравитационной машины, в которой переменное гравитационное поле, например, двойной звезды используется для ускорения летательного аппарата или просто тела. Если не обращать внимания на детали, связанные с временами такого ускорения, возникает интересная задача того же типа, что и модель Улама.

Действительно, модель гравитационной машины можно представить себе следующим образом [14]. Частица (шарик) массы m подпрыгивает вертикально на осциллирующей плите (рис. 3.2) и падает обратно на плиту под действием силы тяжести. Возникает вопрос: может ли за большое число прыжков (столкновений с плитой) частица набрать в среднем достаточно большую энергию и подняться благодаря этому на большую высоту? Ясно, что эта модель аналогична модели Улама и отличается от нее способом возвращения частицы обратно на осциллирующую плиту.

Будем считать, что плита колеблется по тому же закону, что и в предыдущем параграфе. Тогда, аналогично уравнениям (1.5),

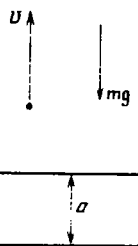


Рис. 3.2. «Гравитационная машина», ускоряющая частицу.

МОЖНО НАПИСАТЬ

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2V_0(1 - 2\xi_n), \\ \xi_{n+1} &= \{\xi_n + t_{n+1}/T\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где v_n , ξ_n , T имеют тот же смысл, что и в (1.5), а t_{n+1} есть время возврата на плиту частицы после n -го столкновения с ней. Кроме того, так же, как в (1.5), мы пренебрегли членами $\sim a/l$, где $l = v^2/2g$ есть высота, на которую поднимается частица. В поле тяжести

$$t_{n+1} = 2v_{n+1}/g. \quad (2.2)$$

После подстановки (1.3) и (2.2) в (2.1) и разложения в ряд по V_0/v находим

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2V_0(1 - 2\xi_n), \\ \xi_{n+1} &= \left\{ \xi_n + \frac{v_{n+1}V_0}{2ga} \right\} \approx \left\{ \xi_n + \frac{v_n V_0}{2ga} - \frac{V_0^2}{ga} (1 - 2\xi_n) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражения (2.3) определяют снова преобразование растяжения, и критерий стохастичности можно записать в виде

$$K = 2V_0^2/ga \geq 1. \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что условие появления стохастического ускорения может быть всегда выполнено при достаточно малой амплитуде и достаточно большой скорости колебаний плиты. Условие (2.4) не зависит от скорости частицы, и поэтому ускорение частицы ничем не ограничено. Однако время возврата частицы на плиту возрастает в соответствии с (2.2).

Аналогично (1.20), для симметризованного времени между столкновениями положим

$$\tau_s = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1}) = (v_n + v_{n+1}) \frac{1}{g} = \frac{2v_n}{g} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta v_n \right),$$

где $\Delta v_n = 2V_0(1 - 2\xi_n)$. Из этих соотношений следует с точностью до членов $\sim (V_0/v)^2$:

$$A = \left\langle \frac{\Delta v}{\tau_s} \right\rangle = -\frac{V_0^2 g}{3v^2}, \quad D = \left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\tau_s} \right\rangle = \frac{2V_0^2 g}{3v}.$$

Нетрудно убедиться в выполнении соотношения (1.18). Таким образом, мы приходим к уравнению типа (1.17):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{3} V_0^2 g \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (2.5)$$

которое легко решается для произвольных начальных условий. Достаточно, однако, ограничиться следующим качественным

результатом. Из (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt} \langle v^3 \rangle = 3gV_0^2, \quad \langle v^3 \rangle = \int_0^\infty v^3 f(v, t) dv.$$

Отсюда $\langle v^3 \rangle = v_0^3 + 3gV_0^2 t$, т. е. скорость растет со временем, грубо говоря, как $t^{1/3}$.

§ 3.3. Перемешивание скользящих электронов

Поверхностные электроны в магнитном поле. Стохастическое ускорение и рассеивающие бильярды. Распределение импульсов поверхностных электронов

Термин «скользящие электроны» возник в связи с анализом движения электронов металла во внешнем магнитном поле. Пусть магнитное поле \mathcal{H} направлено вдоль поверхности металла и электрон движется в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Тогда те электроны, которые находятся вдали от поверхности, совершают ларморовское вращение. Электроны, расположенные вблизи поверхности, совершают дрейф («скользят») вдоль поверхности. Характер дрейфа зависит от ее свойств, т. е. от вида столкновения электрона с поверхностью. На рис. 3.3 взаимодействие скользящих электронов с плоской поверхностью такое же, как и при абсолютно упругом ударе.

В реальной ситуации поверхность не может быть плоской и должна иметь периодическую структуру с периодом решетки. В связи с этим возникает задача об электронах, скользящих

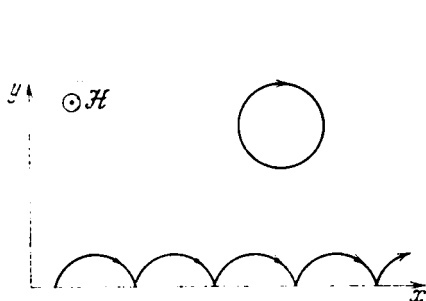


Рис. 3.3. «Скользящие» электроны.

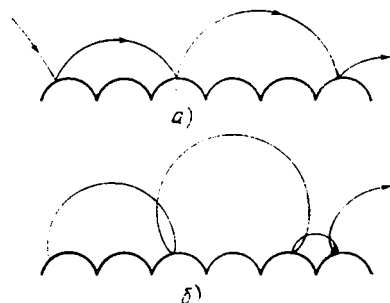


Рис. 3.4. Дрейф электронов вдоль неоднородной поверхности: а) «скользящие»; б) «катящиеся» электроны.

вдоль гофрированной поверхности (рис. 3.4) [73]. Каков характер их движения и каковы их траектории?

На первый взгляд может показаться, что речь идет о весьма специальной задаче. Однако это не так. Чтобы убедиться в этом, определим более конкретно характер поверхности. Будем считать, что она имеет вид арок высотой b и шириной a и «упаковка»

арок плотная (см. рис. 3.4). Тогда электроны скачут по поверхности отрицательной кривизны. Нетрудно увидеть здесь аналогию с бильярдом типа «гусеница» (см. рис. 2.7), в котором возврат частицы на неоднородную поверхность происходит благодаря магнитному полю. Отсюда следует, что при определенных условиях движение электронов будет перемешивающимся.



Рис. 3.5. Выбор переменных для «скользящих» электронов.

Полезно провести еще одно сравнение. Пусть дрейф электронов происходит в направлении оси x . Обратимся к задаче о гравитационной машине. Нетрудно убедиться в том, что в плоско-

сти (y — высота частицы, t) траектории частицы аналогичны траекториям скользящих электронов. Различие снова заключено лишь в характере возврата траектории (в гравитационной машине это дуги параболы, в то время как у скользящих электронов это дуги окружности).

Итак, нам удалось не только связать задачу об ускорении Ферми с задачей о скользящих электронах, но и показать, что они являются некоторыми вариантами задачи о движении в пространстве отрицательной кривизны. В связи с этим следует утверждение о существовании разделения фазового пространства системы на области регулярного и стохастического движения. Определим такую границу для скользящих электронов [73].

Пусть x_n — координата, φ_n — угол с осью x электрона в момент n -го столкновения (рис. 3.5). Будем предполагать для упрощения

$$\varepsilon = b/a \ll 1.$$

Учитывая малость ε , можно приближенно записать

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2R \sin \varphi_{n+1}, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \varepsilon \chi(\{x_n/a\}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где R — циклотронный радиус электрона:

$$R = \left(\frac{2E}{m\Omega^2} \right)^{1/2}, \quad \Omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}, \quad (3.2)$$

E — энергия электрона, Ω — циклотронная частота. Функция $\chi(\{x/a\})$ определена формой границы. Она выбирается таким образом, чтобы $\max \chi = 1$. Вводя обозначение

$$\xi = \{x/a\},$$

перепишем (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \varepsilon \chi(\xi_n), \\ \xi_{n+1} &= \left\{ \xi_n + \frac{2R}{a} \sin \varphi_{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что структура преобразования (3.3) та же, что

и (1.5) или (2.1). Поэтому аналогично исследованию этих систем запишем параметр растяжения

$$\frac{\delta \xi_{n+1}}{\delta \xi_n} \sim 1 + \frac{2R}{a} \cos \varphi_{n+1} \frac{\delta \varphi_{n+1}}{\delta \xi_n} = 1 + \frac{2R}{a} \varepsilon \chi'(\xi_n) \cos \varphi_{n+1}, \quad (3.4)$$

где штрих означает производную по аргументу. Отсюда можно записать критерий стохастичности движения

$$K = \frac{2R}{a} \varepsilon |\chi'| \gg 1, \quad (3.5)$$

а за границу стохастичности принять $K \sim 1$. Используя обозначения (3.2), перепишем (3.5) в виде неравенства для энергии электрона:

$$E \gg \frac{m\Omega^2 a^2}{8(\varepsilon \chi')^2} \equiv E_0, \quad (3.6)$$

где введено граничное значение энергии E_0 .

В действительности положение дел не является столь простым, как мы его представили. Трудность содержится в переходе от (3.4) к (3.5). Наличие множителя $\cos \varphi$ в (3.4) приводит к тому, что растяжение траекторий отсутствует в некоторой малой области углов

$$\Delta \varphi \sim 1/K, \quad (3.7)$$

лежащей в области $(\pi/2 - \Delta \varphi, \pi/2 + \Delta \varphi)$. Будем здесь пренебрегать областью (3.7), считая K достаточно большим (ком. 2). Кроме того, мы не будем рассматривать «катящиеся» траектории (см. рис. 3.4), которые возникают при углах $\varphi > \pi/2$. Так же, как и в модели Улама, будем считать, что границы области углов $(0, \pi/2 - \Delta \varphi)$ аналогичны отражающим стенкам. Эти предположения позволяют описать процесс диффузии электронов и установления равновесного распределения.

Введем переменную импульса

$$p = m\Omega R \cos \varphi,$$

которая канонически сопряжена координате x (и, следовательно, ξ). В результате быстрого перемешивания по переменной ξ устанавливается распределение по ξ , близкое к равномерному. Запишем

$$\langle \chi(\xi) \rangle = 0, \quad \langle \chi^2(\xi) \rangle \equiv \chi_0^2$$

где $\chi_0 \sim 1$. Пусть $f(p, x)$ — функция распределения импульсов, в которой роль переменной t играет координата x . Условие нормировки имеет вид

$$\int_{p_{\min}}^{p_{\max}} f(x, p) dp = 1,$$

где $p_{\max} = p$ ($\varphi = 0$), а $p_{\min} = p$ ($\varphi = \pi/2 - \Delta \varphi$). Уравнение

Фоккера — Планка для f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} D \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (3.8)$$

где

$$D = \left\langle \frac{(\Delta p)^2}{\Delta x} \right\rangle. \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) длина между столкновениями равна

$$\Delta x = 2R \sin \varphi = 2R \left[1 - \left(\frac{p}{m\Omega R} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.10)$$

а изменение импульса может быть найдено следующим образом. Из определения p и (3.3) следует

$$p_{n+1} = m\Omega R \cos \varphi_{n+1} = m\Omega R \cos [\varphi_n + \varepsilon \chi(\xi_n)].$$

Разложение в ряд до членов $\sim \varepsilon^2$ дает

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{n+1} - p_n \approx \\ &\approx -\varepsilon \chi(\xi) m\Omega R \left[1 - \left(\frac{p}{m\Omega R} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \chi^2(\xi) p, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где индекс n в правой части опущен. Подстановка (3.10) и (3.11) в (3.9) дает (с точностью до ε^2)

$$D = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \chi_0^2 m^2 \Omega^2 R \left[1 - \left(\frac{p}{m\Omega R} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.12)$$

Здесь, как и ранее, легко убедиться в существовании соотношения типа (1.18) и, следовательно, в справедливости уравнения диффузии в форме (3.8). Его стационарное ($\partial f / \partial x = 0$) решение f_0 , удовлетворяющее условию отсутствия потока частиц через границу

$$p_{\min} = m\Omega R \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta\varphi \right) \approx m\Omega R \Delta\varphi,$$

имеет вид

$$f_0(p) = \text{const} = \frac{1}{m\Omega R} (1 + \Delta\varphi). \quad (3.13)$$

Это соответствует распределению по углам φ :

$$f_0(\varphi) = f_0(p) \left| \frac{dp}{d\varphi} \right| = (1 + \Delta\varphi) \sin \varphi.$$

Из (3.8) и (3.12) следует, что характерная длина l_d , на которой уступается равновесное распределение (3.13), равна

$$l_d \sim \frac{R}{\varepsilon^2 \chi_0^2} \sim \frac{R}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2E}{m\Omega^2} \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Во избежание недоразумений заметим, что физическое описание рассмотренной задачи не содержит стохастического уско-

рения Ферми. Включение в эту главу обусловлено ее внутренним и формальным единством с задачами предыдущих разделов. Мы обратимся к скользящим электронам еще раз при рассмотрении квантовых систем.

Комментарии к гл. 3

1. После появления работы [59] модель Улама привлекла к себе внимание различных исследователей в связи с различными задачами и приложениями. В [66] были исследованы различные законы движения осциллирующей стенки и движение частицы в переходной области. Основное внимание в работе [66] было сосредоточено на анализе инвариантных кривых в переходной области. В [67] была подробно исследована стохастическая компонента движения в переходной области.

Приложения описанного механизма ускорения Ферми оказались весьма разнообразными. Кроме тех, которые рассмотрены в этой главе и далее, укажем на стохастический механизм циклотронного нагрева частиц в плазме [67—69] и на реализованный экспериментально механизм предварительного нагрева плазмы в стеллараторе [71, 72].

2. Как и ранее, мы откладываем обсуждение вопросов о переходных областях и областях типа (3.7) до гл. 4, где им будет уделено специальное внимание.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ

Мы рассмотрели несколько характерных и сравнительно простых физических моделей, в которых можно установить условия перехода от динамического к стохастическому движению. Эти модели позволяют представить себе в очень слабом приближении, с чем должно быть связано возникновение локальной неустойчивости. Мы выделили особую роль сильного изменения фазы колебаний в процессе перемешивания траекторий.

Цели, которые преследуются в этой и следующей главах, иные. Именно в них будет заложена информация, которая позволяет составить общее представление о картине возникновения стохастичности в гамильтоновых системах. Изучение этого вопроса начинается с анализа локальной неустойчивости нелинейных колебаний. Это естественно для гамильтоновых систем в случае финитного движения.

§ 4.1. Универсальное преобразование (отображение) нелинейных колебаний

Вывод универсального преобразования. Почему «универсальное преобразование» является универсальным? Критерий перемешивания. Островки устойчивости. Почему отсутствует строгая теория? Время расцепления корреляций

Рассмотренные модели стохастического ускорения можно назвать дискретными. Под этим понимается, что уравнения движения для некоторой канонической пары переменных (I, ϑ) могут быть записаны в подходящей дискретной шкале времени t_1, t_2, \dots в виде преобразования

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_{n+1}(I_n, \vartheta_n), \\ \vartheta_{n+1} &= \vartheta_{n+1}(I_n, \vartheta_n). \end{aligned}$$

Удобно в дальнейшем перейти к другим обозначениям, опустив индекс n и представив эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + g_1(I, \vartheta), \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta + g_2(I, \vartheta), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где черта употребляется вместо индекса $n + 1$, g_1 и g_2 — некото-

рые функции, определяемые возмущением. Между g_1 и g_2 существует соотношение, налагаемое условием

$$\frac{\partial(\bar{I}, \bar{\vartheta})}{\partial(I, \vartheta)} = 1 \quad (1.2)$$

вследствие того, что система является гамильтоновой, а переменные (I, ϑ) — канонически сопряженными (теорема Лгувилля). Кроме того, фаза ϑ определяется по mod 2π , что всегда будет подразумеваться.

Уравнения (1.1) соответствуют системе с одной степенью свободы, на которую действует внешняя сила (в таких случаях обычно говорят, что система имеет $3/2$ степени свободы). В общем случае можно было бы записать уравнения отображений более высокого порядка, чем (1.1).

Модели, в которых уравнения движения сразу записывались в форме преобразований типа (1.1), были специально подобраны. Обычная форма уравнений движения — дифференциальная. Поэтому напрашивается вопрос: можно ли от дифференциальной формы перейти к уравнениям отображений? Оказывается, что не только можно (конечно, технически это не всегда просто сделать), но и необходимо! Поясним, почему это так.

Центральную роль в нашем утверждении играет выбор переменных. Будем считать величину g_1 малым возмущением. На инвариантном торе, который в случае одной степени свободы сводится к цилиндрической поверхности, $I = \text{const}$. Поэтому изменение действия $\Delta I = \bar{I} - I$ должно быть связано с определенной степенью неадиабатичности движения. В так называемом адиабатическом случае величина ΔI экспоненциально мала, а ее изменение накапливается на очень малом интервале времени [20]. В неадиабатических случаях изменение действия накапливается в основном в некоторых областях времени Δt , в которых происходит нарушение условий адиабатичности. Все дело в конечности интервала Δt . Это означает, что можно в качестве шага преобразования выбрать время $T > \Delta t$, равное расстоянию между областями существенного изменения действия. Сшивка переменных (I, ϑ) между двумя соседними областями и приводит к уравнениям преобразования. Если мы интересуемся потерей устойчивости, то это автоматически означает, что в неустойчивом случае должны существовать области существенной неадиабатичности. Изменение действия ΔI при прохождении системой этих областей определяет главную часть изменения действия на интервале преобразования T .

Таким образом, нарушение адиабатичности может быть описано системой типа (1.1) и все многообразие различных физических ситуаций заложено в виде функций g_1, g_2 . Однако этот выбор не столь произволен и определяется общей структурой группы движения. Приведенные рассуждения приводят нас не только к утверждению о существовании некоторого универсального вида преобразования переменных (I, ϑ) , но и к возможности рас-

смотреть нарушение адиабатичности произвольного типа. В связи с этим, простейшим случаем (без потери какой-либо общности в структуре функций g_1, g_2) является случай постоянного шага преобразования \hat{T} и области неадиабатичности $\Delta t \rightarrow 0$. Гамильтониан такой системы может быть представлен в виде

$$H = H_0(p, x) + \varepsilon V(x) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (1.3)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный малый параметр, характеризующий возмущение, множитель T введен для удобства, а невозмущенный гамильтониан H_0 описывает нелинейный осциллятор. Выражение (1.3) соответствует действию на осциллятор периодических толчков. Между толчками движение осциллятора является свободным, а при переходе через толчок может быть произведена точная сшивка решений, которая и приведет к уравнениям преобразования типа (1.1).

Перейдем в (1.3) к переменным действие — угол. Получим

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1.4)$$

и уравнения движения

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (1.5)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Пусть толчок происходит при некотором $t = t_0$. Определим отображение \hat{T} следующим образом:

$$\begin{aligned} (\bar{I}, \bar{\vartheta}) &= \hat{T}(I, \vartheta), \\ \bar{I} &= I(t_0 + T - 0), \quad \bar{\vartheta} = \vartheta(t_0 + T - 0), \\ I &= I(t_0 - 0), \quad \vartheta = \vartheta(t_0 - 0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отображение \hat{T} является произведением отображений действия толчка и свободного вращения на торе. Интегрируя (1.5) по малой области в окрестности момента толчка t_0 , находим

$$\begin{aligned} I(t_0 + 0) - I(t_0 - 0) &= \int_{t_0-0}^{t_0+0} \dot{I} dt = -\varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \\ \vartheta(t_0 + 0) - \vartheta(t_0 - 0) &= \int_{t_0-0}^{t_0+0} \dot{\vartheta} dt = \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что потенциал V является функцией только ко-

ординаты x , которая при действии толчка остается непрерывной (разрыв испытывает только импульс p). Поэтому $V(x) = V(\bar{x})$, или $V(I, \vartheta) = V(\bar{I}, \bar{\vartheta})$. При последующем вращении действие сохраняется, а фаза получает приращение, пропорциональное частоте:

$$\begin{aligned} I(t_0 + 0) &= I(t_0 + T + 0) = \bar{I}, \\ \vartheta(t_0 + T + 0) &= \vartheta(t_0 + 0) + \omega(I)T. \end{aligned}$$

Отсюда находим окончательно, согласно (1.6),

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I - \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta + \omega(\bar{I})T + \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что уравнения (1.7) являются точными (ком. 1). Легко убедиться в том, что те преобразования, которые получались в задачах об ускорении Ферми, являются частными случаями (1.7).

Упростим систему (1.7), приняв, что $V = V(\vartheta)$. Как будет видно далее, задача все еще сохраняет свою общность. Имеем

$$\bar{I} = I - \varepsilon I_0 g(\vartheta), \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \omega(\bar{I})T, \quad (1.8)$$

где обозначено

$$T \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial \vartheta} = I_0 g(\vartheta)$$

и введена из соображений размерности некоторая константа I_0 . По смыслу введения параметра ε функция $\max g(\vartheta) \sim 1$, причем g — некоторая периодическая функция ϑ . Пусть, например, возмущение имеет только одну первую гармонику по ϑ . Тогда просто $g(\vartheta) = \sin \vartheta$ и (1.8) переходит в

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I - \varepsilon I_0 \sin \vartheta, \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta + \omega(\bar{I})T \approx \vartheta + \omega(I)T - K \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где совершено разложение по малому ε и введены обозначения

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega} \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right|, \quad (1.10)$$

$$K = \varepsilon \alpha \omega T. \quad (1.11)$$

Рассмотрим преобразование (1.9). Величина действия изменяется мало ($\Delta I/I \sim \varepsilon$), и поэтому так же, как и ранее, основная информация заключена в уравнении для фаз ϑ . Рассмотрим величину

$$\left| \frac{\delta \bar{\vartheta}}{\delta \vartheta} - 1 \right| = K |\cos \vartheta|, \quad (1.12)$$

характеризующую растяжение фаз. При $K \ll 1$ она мала, и в этом случае можно говорить об устойчивости движения в соответствии с теоремой КАМ. При $K \gg 1$ возникает локальная неустойчивость, приводящая к перемешиванию траекторий в фазовом пространстве. Однако, как бы велико ни было значение K , всегда существует область углов

$$\Delta\theta \lesssim 1/K, \quad (4.13)$$

в которой $K|\cos\theta| < 1$ и растяжение отсутствует. Эта область расположена в окрестности $\theta = \pi/2$, и ей должны соответствовать устойчивые траектории. Таким образом, качественное рассмотрение приводит к той картине стохастичности, которая изображена на рис. 4.1: фазовое пространство представляет собой «стохастическое море» разрушенных торов, в которое погружены островки устойчивости с инвариантными торами.

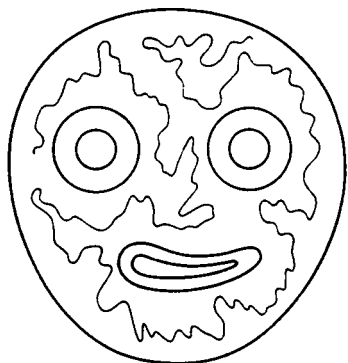


Рис. 4.1. Островки устойчивости в стохастическом море.

В области «островков устойчивости» существуют также некоторые неустойчивые решения при определенных значениях K (см. [70]). Пусть, например, в отображениях (1.8)

$$\begin{aligned} \epsilon I_0 + K, \quad g(\theta) = -\sin\theta, \quad \omega(I) = I, \quad T = 1, \\ I(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{aligned}$$

где $I(0)$ и $\theta(0)$ — начальные действие и фаза. Тогда, если выполнено условие

$$K \sin\theta_0 = 2\pi m,$$

где m — целое, то

$$I_n = 2\pi m n.$$

Действие растет линейно и регулярно со временем. В действительности существуют области конечной меры вблизи значений $K \sin\theta_0 = 2\pi m$, в которых реализуется описанный механизм ускорения.

Сразу же возникает вопрос: действительно ли существует некоторая граница, отделяющая островки устойчивости от области неустойчивости? Из общих соображений можно заключить, что траектория не может быть и устойчивой, и неустойчивой в одно и то же время. Поэтому поставленный вопрос вырождается в следующий: не могут ли малые островки устойчивости сильно повлиять на общую картину движения во всем фазовом пространстве и ликвидировать стохастичность? Строгой теории преобразования (1.9) не существует. Трудности в ее построении как раз и связаны с тем, что островки устойчивости имеют конечную ме-

ру (1.13). Именно это последнее обстоятельство является причиной того, что практически все реальные физические ситуации оказываются пока вне возможностей строгого анализа. Решение поставленных вопросов было получено путем очень тщательного численного анализа Чириковым и Израилевым [76, 77] (см. также [15, 24, 25]). Их результаты полностью подтвердили те качественные соображения, которые приводят к картине стохастичности, изображенной на рис. 4.1. Иными словами, простые соображения о растяжении приводят к критерию стохастичности

$$K = \varepsilon \alpha \omega T \geq 1, \quad (1.14)$$

а область $K \sim 1$ является границей стохастичности. Грубо говоря, стохастичность появляется тогда, когда мера островков устойчивости становится малой. Мы еще вернемся к обсуждению этого вопроса с более общей точки зрения в следующей главе, а сейчас перейдем к более подробному анализу свойств универсальной модели стохастичности (1.7).

Прежде всего заметим, что упрощение, связанное с переходом от преобразования (1.7) к преобразованию (1.8), не является существенным в области стохастичности, т. е. при $K \gg 1$. Действительно, член $\varepsilon T \partial V / \partial I \sim \varepsilon g \sim \varepsilon$ и не влияет на условие (1.14). С ним связано лишь изменение переходной области и числа и структуры островков устойчивости. Поэтому для общего представления достаточно ограничиться изучением преобразования (1.9), которое вытекает из (1.8) при не слишком больших α . Будем также предполагать $\alpha \ll 1$. Тогда критерий стохастичности (1.14) представляет собой произведение малых параметров ε и α на большой параметр ωT . Отсюда следует важное утверждение, что стохастичность возникает при возмущении (ε) и нелинейности (α), больших некоторых критических значений. Оценим корреляционную функцию фаз ϑ и получим время затухания корреляций при $K \gg 1$ [75, 135]. Для этого воспользуемся приближенным итерационным уравнением

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \omega T - K \sin \vartheta_n. \quad (1.15)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r, t_n | s, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \exp \{i(r\vartheta_n - s\vartheta_0)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \exp \{i(r\vartheta_{n-1} + r\omega T - rK \sin \vartheta_{n-1} - s\vartheta_0)\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $t_n = nT$, а r и s — положительные целые числа. Воспользуемся известным разложением

$$\exp(iz \sin \vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \exp(im\vartheta),$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя. Подставляя это выражение в (1.15)

и продолжая итерационный процесс, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r, t_n | s, 0) &= \exp(i r \omega T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(rK) \mathcal{R}(r-m, t_{n-1} | s, 0) = \\ &= \exp(i r n \omega T) \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m_1+m_2+\dots+m_n} \times \\ &\times \exp[-i \omega T (m_1 + m_2 + \dots + m_n)] \cdot J_{m_1}[rK] \cdot J_{m_2}[(r-m_1)K] \dots \\ &\dots J_{m_n}[(r-m_1-m_2-\dots-m_n)K] \cdot \mathcal{R}(r-m_1-m_2-\dots-m_n, 0 | s, 0). \end{aligned}$$

Воспользуемся тривиальным равенством

$$\mathcal{R}(m, 0 | n, 0) = \delta_{mn}$$

и асимптотикой функций Бесселя при $K \gg 1$:

$$J_m(pK) \sim (pK)^{-1/2}.$$

Это дает

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r, t_n | s, 0) &\sim K^{-n/2} \exp(i n r \omega T) = \\ &= \exp(-t_n / \tau_c) \exp(i n r \omega T), \quad \tau_c = 2T / \ln K. \quad (1.17) \end{aligned}$$

Формула (1.17) аналогична коррелятору в случае преобразования растяжения (§ 2.1), однако время расщепления корреляций фаз τ_c отличается в два раза.

Что может измениться в случае более общего преобразования (1.7)? Очевидно, что вместо уравнения (1.15) возникнет уравнение типа

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \omega T + Kg(\vartheta). \quad (1.18)$$

Поскольку $g(\vartheta) \sim 1$, то нетрудно получить разложением в тригонометрический ряд, что

$$\tau_c = \text{const} \cdot T / \ln K, \quad (1.19)$$

где величина $\text{const} \sim 1$ и определяется видом $g(\vartheta)$. Естественно, что приведенный способ оценки справедлив при $K \gg 1$, когда можно пренебречь островками устойчивости.

§ 4.2. Критерий перекрытия резонансов (критерий Чирикова)

Взаимодействие резонансов. Перекрытие резонансов. Связь с условием локальной неустойчивости. Роль числа резонансов

Рассмотрим уравнения (1.5) универсальной модели с иной точки зрения, снова полагая для простоты $V = V(\vartheta) = -(I_0/T) \cos \vartheta$. Используя разложение в ряд Фурье

$$T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(imvt), \quad v \equiv 2\pi/T, \quad (2.1)$$

перепишем уравнения (1.5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{I} &= i\varepsilon I_0 \nu \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ \exp [i(m\nu t + \vartheta)] - \exp [i(m\nu t - \vartheta)] \}, \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I). \end{aligned} \quad (2.2)$$

С такой системой мы уже встречались в § 1.3 при анализе ее частного случая — изолированного нелинейного резонанса.

Все возможные резонансы в уравнениях (2.2) определяются в первом приближении уравнением

$$\dot{\vartheta} - m\nu = 0 \quad (m > 0),$$

или

$$\omega(I_m) = m\nu \quad (m > 0), \quad (2.3)$$

где через I_m обозначен корень уравнения (2.3). Обозначим

$$\psi_m = \vartheta - m\nu t$$

и рассмотрим траектории системы в окрестности каждого из резонансных значений I_m , не обращая внимания на все остальные резонансы. Тогда в окрестности каждого I_m получится фазовая картина, изображенная на рис. 1.8. Представим себе на время, что все значения I_m расположены достаточно далеко друг от друга. Тогда фазовые траектории системы (2.2) можно представить на плоскости (I, ψ) так, как это сделано на рис. 4.2. Величину

$$\delta I_m = I_{m+1} - I_m \quad (2.4)$$

будем называть расстоянием между резонансами по действию. Ей можно сопоставить расстояние между резонансами по частоте:

$$\delta\omega_m = \omega(I_{m+1}) - \omega(I_m). \quad (2.5)$$

Отсюда условие достаточно большого расстояния между резонансами означает, что

$$\delta I_m \gg \Delta I_m, \quad (2.6)$$

где ΔI_m определено в (1.3.14) как ширина сепаратрисы, порождаемая нелинейным резонансом. Итак, условие (2.6) означает, что на рис. 4.2 сепаратрисы не перекрываются. Тогда можно высказать следующие качественные соображения: в зависимости от начальных условий система попадает в область того или иного резонанса или в область между резонансами. В первом случае достаточно ограничиться в первом приближении влиянием только одного основного резонанса, а второй случай может быть

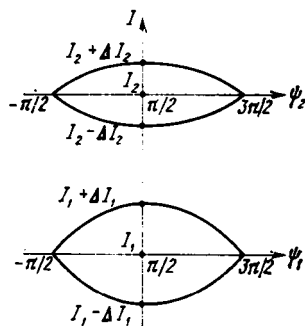


Рис. 4.2. Неперекрывающаяся система резонансов.

рассмотрен в рамках нерезонансного приближения. Обоснование этих соображений можно найти в теории Крылова — Боголюбова — Митропольского [18, 19]. Таким образом, условие (2.6), или эквивалентное ему:

$$\delta\omega_m \gg \Delta\omega_m, \quad (2.7)$$

где $\Delta\omega$ определено в (3.1.15), означает слабое взаимодействие резонансов.

Приведенные определения подводят нас к вопросу о том, что будет происходить с системой, когда резонансы начнут сближаться и соответствующие им сепаратрисы на рис. 4.2 перекроются? В этом случае можно говорить о сильном взаимодействии резонансов.

Введем нетривиальный параметр

$$\bar{K} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim \frac{\Delta I}{\delta I}, \quad (2.8)$$

определяющий степень перекрытия (или степень взаимодействия) резонансов. При

$$\bar{K} \ll 1 \quad (2.9)$$

это взаимодействие мало согласно (2.6), (2.7), а при

$$\bar{K} \gg 1 \quad (2.10)$$

взаимодействие резонансов велико.

Параметр перекрытия резонансов \bar{K} был введен в 1959 г. Чириковым [74], который высказал гипотезу о том, что при условии (2.10) движение системы запутывается сложным образом в резонансах и должно быть похожим на стохастическое. Иначе, при выполнении (2.9) движение должно быть устойчивым в соответствии с теоремой КАМ, а при $\bar{K} \gg 1$ развивается локальная неустойчивость. Впоследствии критерий перекрытия резонансов, как критерий стохастичности, был подтвержден разнообразными численными и непосредственно экспериментальными анализами (ком. 2).

Наша ближайшая цель будет заключаться в том, чтобы найти связь между критерием перекрытия резонансов (2.10) и критерием растяжения (1.14). Для этого раскроем в явной форме выражение для \bar{K} (2.8).

Согласно (1.3.13) и (1.3.15) ширина одного резонанса равна частоте фазовых колебаний:

$$\Delta\omega \sim (\epsilon V_0 |\omega'|)^{1/2},$$

где ϵV_0 — величина правой части в уравнении для I (см. формулу (1.3.5)). В нашем случае из (2.2) следует, что $V_0 \sim I\nu$. Отсюда

$$\Delta\omega \sim (\epsilon I_0 \nu |\omega'|)^{1/2},$$

а в качестве I_0 следует взять резонансное значение действия. Используя обозначение (1.10), перепишем $\Delta\omega$ в виде

$$\Delta\omega \sim (\epsilon \alpha \nu / \omega)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Из (2.3) и (2.5) следует, что расстояние между резонансами равно

$$\delta\omega = \nu \sim 1/T. \quad (2.12)$$

Подстановка (2.11) и (2.12) в (2.8) дает

$$\bar{K} = (\varepsilon\alpha\omega T)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Сравнение (2.13) и (1.11) приводит к окончательному выражению

$$K = \bar{K}^2, \quad (2.14)$$

что доказывает прямую связь между параметром перекрытия резонансов \bar{K} и параметром растяжения K . Более глубокий анализ связи между величинами K и \bar{K} будет дан в следующей главе.

Остановимся на некоторых обобщениях. Особенностью критерия перекрытия резонансов (2.10) является то, что для вычисления \bar{K} достаточно пользоваться исследованием движения системы в окрестности только одного резонанса и в пренебрежении всеми другими. Технически такая задача достаточно просто решается, как было показано в § 1.3, что делает критерий (2.10) практически очень удобным (ком. 3). Продемонстрируем это следующим образом. В правой части универсальной модели (1.5) стоит сумма эквидистантных импульсов. Разложение такой силы в ряд Фурье (2.1) имеет бесконечное число равноотстоящих на величину ν гармоник с одинаковыми амплитудами. Ясно, что число гармоник может быть конечным, а амплитуды и расстояния по частоте между гармониками могут слегка варьироваться, и тем не менее критерий (2.10) сохранится. Конечно, описанная вариация задачи также позволяет построить преобразование и определить параметр растяжения, однако условие перекрытия резонансов в данном случае быстрее приводит к цели.

§ 4.3. Синус-преобразование

Свойства фазовых траекторий в зависимости от параметра растяжения. Чем выделено синус-преобразование? Стационарная функция распределения

В простейших, точно решаемых моделях преобразования растяжения (см. § 2.1) зависимость характера движения от параметра K была очень простой: при $K < 1$ движение устойчивое и при $K > 1$ движение перемешивающееся. В реальных задачах, как уже отмечалось, столь простых ситуаций принципиально не бывает. Это связано с наличием островков устойчивости и некоторой переходной области конечной ширины по параметру K . В связи с этим вопрос о характере смены режимов движения, или, как говорят, вопрос о бифуркациях решений, при изменении K , имеет определенный нетривиальный смысл.

Уже отмечалось, что в некотором приближении (в котором действие не успевает очень сильно измениться) достаточную

информацию о движении системы дает преобразование фаз (1.18), в котором существование и структура островков устойчивости определяются видом функции $g(\theta)$. Рассмотрим упрощенное синус-преобразование [80]

$$\bar{x} = \hat{T}x = \{K \sin(\pi x)\}, \quad (3.1)$$

содержащее все характерные особенности преобразования фаз (1.18). Строгий результат относительно (3.1) заключается в следующем (Я. Г. Синай). В окрестности полуцелых значений $K = N + 1/2$ ($N = 1, 2, \dots$) расположены области конечной меры такие, что при значениях K , попадающих в эти области, существуют устойчивые периодические точки x_1, x_2, \dots , к которым притягиваются траектории. Таких областей бесконечно много, и их размер уменьшается с ростом K . Приведем качественное исследование этого случая [80].

Рассмотрим K , близкие к полуцелым:

$$K = N + 1/2 + \delta, \quad \delta \ll 1,$$

и будем считать, что $K \gg 1$. Рассмотрим также окрестность точки x , полагая начальное $x = 1/2 + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$). Тогда из (3.1) находим

$$\bar{x} = \{(N + 1/2 + \delta) \cos \epsilon\pi\} \approx \{1/2 + \delta - 1/2 N(\epsilon\pi)^2\}. \quad (3.2)$$

Будем искать область устойчивости при $\delta \ll \epsilon$ и $K\epsilon^2 \ll 1$. Тогда из (3.2) следует

$$\bar{x} \approx 1/2 - 1/2 N(\epsilon\pi)^2 = 1/2 - 1/2 K(\epsilon\pi)^2 = 1/2 + \bar{\epsilon}.$$

Условие $|\bar{\epsilon}| < \epsilon$ означает устойчивость, причем в результате итерационного процесса точка $x \rightarrow 1/2$. Используя для $|\bar{\epsilon}|$ выражение $1/2 K(\epsilon\pi)^2$, находим условие устойчивости в виде

$$\epsilon < \epsilon_0 = 2/K\pi^2. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) определяет область значений x при $\delta \ll \epsilon$ такую, что точки этой области притягиваются к точке $x_0 = 1/2$, несмотря на то, что $K \gg 1$. Далее, увеличивая δ , можно найти две точки притяжения:

$$x_1 = \{K \sin \pi x_2\}, \quad x_2 = \{K \sin \pi x_1\}.$$

В окрестности $x = 1/2$ (т. е. K , близких к полуцелым) точки притяжения определяются уравнениями

$$x_1 = \{K\}, \quad x_2 = \{K \sin \pi\{K\}\}$$

и соответствуют периодической траектории, а граничное значение K , при котором возникает бифуркация от одной точки притяжения к двум, равно $K = 8,521$. Численный анализ, иллюстрирующий сказанное, приведен в [80]. На рис. 4.3 изображены гистограммы заполнения ячеек по x (всего их 500) в зависимости от K . Например, при $K = 8,521$ появляются две точки притяже-

ния и т. д. Уменьшение чисел заполнения ячеек с увеличением порядка резонансной траектории (т. е. числа точек притяжения) связано с условием нормировки. Вне описанных выше областей значений K и x движение является перемешивающимся. Функция распределения $\rho(x)$ в этом случае приведена на рис. 4.4. Ее

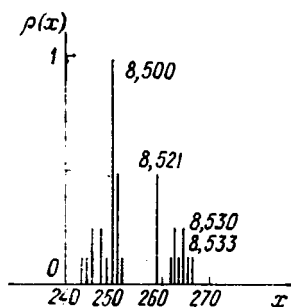


Рис. 4.3. Функция распределения в области устойчивости. Значения K , при которых происходит бифуркация удвоения периода, обозначены цифрами.

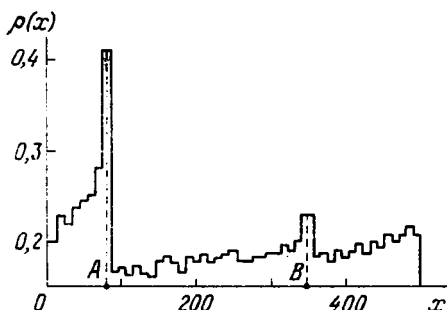


Рис. 4.4. Функция распределения в случае перемешивания ($K = 17,1482$).

существование и наличие в ней особенности $\sim(x-x_i)^{-1/2}$, где x_i — точка резонанса, были показаны Бунимовичем [81]. Резким максимумам A и B на рис. 4.4 как раз и соответствуют точки резонанса x_1, x_2^* .

Следующее соображение окажется в дальнейшем очень важным для конкретных вычислений. Поскольку особенность $\rho(x)$ интегрируемая и достаточно узкая (в ячейке размером $\Delta x = 0,02$ число частиц лишь в четыре раза превышает среднее число частиц по ячейкам), то с хорошей точностью можно считать при вычислении средних, что

$$\rho(x) \approx \text{const} = 1. \quad (3.4)$$

Свойство (3.4) будет в дальнейшем часто использоваться, так как при $K \gg 1$ его можно распространить также и на преобразование (1.7) универсальной модели стохастичности.

Комментарии к гл. 4

1. Уравнения преобразований типа (1.7) появились впервые в работе Чирикова [74] в связи с исследованием проблемы стохастической неустойчивости нелинейных колебаний. Впоследствии анализу различных их модификаций было уделено много внимания [75, 76, 15, 24, 25]. Различные упрощенные варианты системы (1.7) явились удобным инструментом для анализа ряда вопросов, возникающих в теории стохастичности.

*) Читателю предлагается доказать наличие корневой расходимости в функции распределения $\rho(x)$, используя метод, изложенный в § 2.1 для вычисления $\rho(x)$.

2. Во многих исследованиях критерий Чирикова (2.10) используется как очень эффективный способ обнаружения стохастичности в довольно сложных системах. Правильная физическая интуиция, которая привела к этому критерию, не основывалась на каких-либо строгих методах и не была связана с использованием результатов эргодической теории. Численному анализу условия перекрытия резонансов посвящены работы [14, 15, 24, 25]. В частности, в работе [79] было исследовано появление стохастичности при перекрытии всего лишь двух (!) резонансов.

3. В этом месте следует сделать определенные предостережения. Как всякое качественное условие достаточно общего характера, оно имеет определенное число оговорок, которые не столь просто сформулировать. Это связано с тем, что отсутствие строгого вывода критерия перекрытия резонансов не дает возможности точно указать его пределы применимости. Приведем простой пример. Пусть два резонанса столь сильно перекрываются, что почти совпадают друг с другом ($\delta I_m \rightarrow 0$, $\delta \omega_m \rightarrow 0$). Тогда ясно, что мы имеем дело практически с одним резонансом, но удвоенной амплитуды, и никакой стохастичности не будет. Однако очевидно, что если резонансов не два, а N , и $N > K$, т. е. общее число резонансов больше параметра перекрытия резонансов, то описанный эффект вырождения стохастичности отсутствует и критерий (2.10) работает. Различные особенности и уточнения критерия (2.10) содержатся в обзорах Чирикова [24, 25].

ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Вопросы, излагаемые в этой главе, играют исключительную роль в общей теории стохастичности гамильтоновых систем. Если бы мы пользовались терминами квантовой теории, то можно было бы задать вопрос о том, что же является «квантом» стохастичности? Как должна выглядеть та минимальная ячейка фазового пространства, которая несет в себе зародыш стохастичности? Для гамильтоновых систем, совершающих финитное движение, ответы на эти вопросы известны. «Квантом» стохастичности является стохастический слой (рис. 5.1), образующийся в окрестности сепаратрис под действием произвольного (!) сколь угодно малого нетривиального возмущения (ком. 1).

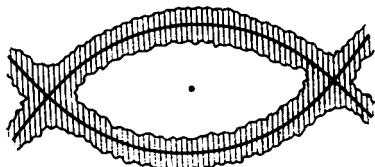


Рис. 5.1. Стохастический слой (заштрихованная область) в окрестности сепаратрисы.

§ 5.1. Стохастическое разрушение сепаратрисы

Особенности движения вблизи сепаратрисы. Построение преобразования. Условие стохастичности. Ширина стохастического слоя

Рассмотрим нелинейную систему, на которую действует периодическое по времени возмущение. Запишем гамильтониан в виде

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta) \cos \nu t, \quad (1.1)$$

где выбрана простейшая зависимость от времени. Относительно невозмущенного гамильтониана H_0 будем предполагать, что он описывает, например, маятник (см. § 1.2 и формулу (1.2.5)):

$$H_0 = 1/2 \dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (1.2)$$

где величина ω_0 имеет смысл частоты малых колебаний, а масса положена равной единице. Траектории на фазовой плоскости, соответствующие системе (1.2), изображены выше на рис. 1.2, б. Для нас существенно лишь то, что система (1.2) имеет сепаратрису.

Как будет видно далее, конкретные свойства невозмущенной системы особого значения не имеют. Потенциал возмущения $V(I, \vartheta)$ в (1.1) получается из функции $V(x)$ заменой переменных $(x, \dot{x}) \rightarrow (\vartheta, I)$.

Запишем точное уравнение для действия следующим образом:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dH_0} \dot{H} = -\frac{\varepsilon}{\omega(I)} \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \cos vt; \quad (1.3)$$

здесь использовано то обстоятельство, что мощность \dot{H} равна произведению силы $\varepsilon(\partial V/\partial x) \cos vt$ на скорость \dot{x} . Уравнение для фазы ϑ имеет вид

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} \cos vt. \quad (1.4)$$

Частота $\omega(I)$ обладает следующим свойством (см. § 1.2):

$$\lim_{I \rightarrow 0} \omega(I) = \omega_0, \quad \lim_{I \rightarrow I_c} \omega(I) = 0, \quad (1.5)$$

где I_c — значение действия на сепаратрисе, соответствующее энергии $H_c = \omega_0^2$.

Будем рассматривать влияние возмущения на траектории, лежащие в окрестности сепаратрисы, т. е. будем считать выполненным условие

$$1/N = \omega(I)/\omega_0 \ll 1, \quad (1.6)$$

где величина N введена в (1.2.9). Для того чтобы перейти от уравнений (1.3), (1.4) к дискретному преобразованию, необходимо вспомнить особенности движения вблизи сепаратрисы, приведенные в § 1.2. Частица пролетает потенциальную яму за время порядка $1/\omega_0$ и очень долго находится в окрестности точек поворота ($1/\omega \gg 1/\omega_0$). График зависимости \dot{x} от времени в окрестности сепаратрисы приведен на рис. 1.3. Отношение расстояния между импульсами к их ширине равно $N \gg 1$. Наличие в уравнении (1.3) величины \dot{x} позволяет построить преобразование от импульса к импульсу точно так же, как это делалось в § 4.1 для уравнений (4.1.5). Между импульсами с экспоненциальной точностью $\dot{x} = 0$. Поэтому легко записать, интегрируя (1.3):

$$\bar{I} = I - \frac{\varepsilon}{\omega(I)} \int_{\Delta t} dt \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \cos vt, \quad (1.7)$$

где интеграл берется по области Δt , включающей в себя ширину импульса скорости. Это одновременно означает, что интервал Δt привязан к определенному моменту времени, когда $\dot{x} \neq 0$. По этой причине удобно ввести новую фазу φ внешней силы:

$$\dot{\varphi} = v. \quad (1.8)$$

Замена аналогична введению фазы колеблющейся стенки в момент столкновения с частицей в модели Улама (§ 3.1). Интегри-

равнение (1.8) приводит к преобразованию

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{\pi\nu}{\omega(\bar{I})}. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.7), (1.9) образуют искомое преобразование, которое есть не что иное, как несколько усложненный вариант универсальной модели. Поскольку ε малó, то так же, как и ранее, можно произвести разложение в (1.9):

$$\bar{\varphi} \approx \varphi + \frac{\pi\nu}{\omega(I)} - \frac{\pi\nu\omega'}{\omega^3(I)} (\bar{I} - I) = \varphi + \frac{\pi\nu}{\omega(I)} + \frac{\pi\nu\varepsilon\omega'}{\omega^3(I)} \int_{\Delta t} dt \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \cos \varphi.$$

Отсюда для параметра растяжения имеем

$$K = \left| \frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi} - 1 \right| = \frac{\pi\nu\varepsilon|\omega'|}{\omega^3} C, \quad (1.10)$$

где обозначено

$$C = \left| \int_{\Delta t} dt \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \sin \nu t \right|. \quad (1.11)$$

Для оценки C рассмотрим разные случаи соотношения между ν и ω_0 . Пусть сначала

$$\nu/\omega_0 \ll 1. \quad (1.12)$$

Заметим, что характерное время изменения величин x и \dot{x} на интервале Δt равно π/ω_0 . Отсюда

$$C \sim V\omega_0\Delta t \sim V \sim H_c. \quad (1.13)$$

Подстановка (1.13) в (1.10) дает

$$K \sim \frac{\pi\nu\varepsilon\omega_0^2|\omega'|}{\omega^3}.$$

Из формулы (1.2.8) легко получить

$$|\omega'| = \left| \frac{d\omega}{dI} \right| = \left| \frac{d\omega}{dH} \right| \frac{dH}{dI} = \omega \left| \frac{d\omega}{dH} \right| \sim \frac{\omega^3}{\omega_0^2} \exp\left(\frac{\pi\omega_0}{\omega}\right). \quad (1.14)$$

Отсюда следует для K :

$$K \sim \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \exp\left(\pi \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \frac{H_c}{|H_c - H|}. \quad (1.15)$$

Таким образом, область стохастичности $K \geq 1$ имеет вид, согласно (1.15),

$$\frac{|H_c - H|}{H_c} \leq \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \quad (\nu \lesssim \omega_0). \quad (1.16)$$

Рассмотрим теперь еще одну (последнюю) возможность очень больших частот возмущения:

$$\nu \gg \omega_0. \quad (1.17)$$

Под интегралом в (1.11) стоит произведение быстро осциллирующей функции $\sin vt$ на медленно меняющуюся $\dot{x} \partial V / \partial x$. Учитывая это, получаем [85] *)

$$C \sim H_c \exp\left(-\pi \frac{\nu}{\omega_0}\right).$$

Аналогично (1.16) получаем для области стохастичности:

$$\left| \frac{H_c - H}{H_c} \right| \lesssim \varepsilon \exp\left(-\pi \frac{\nu}{\omega_0}\right) \quad (\nu \gg \omega_0). \quad (1.18)$$

Итак, всегда, т. е. при любых ε и ν , в окрестности сепаратрисы образуется область перемешивающихся траекторий — стохастический слой. Безразмерная ширина стохастического слоя имеет степенную малость $\varepsilon\nu/\omega_0$ при условии (1.12) не слишком больших частот внешней силы и экспоненциальную малость при условии (1.17) высокочастотного возмущения.

§ 5.2. Особенности образования стохастического слоя

Качественный анализ области разрушения сепаратрисы. Разрушение нелинейного резонанса. Разрушение магнитных поверхностей

Весь ход приведенных выше вычислений показывает, что усложнение зависимости возмущения от времени может лишь увеличивать ширину стохастического слоя. Особая роль в разрушении принадлежит наличию точек гиперболического типа на фазовой плоскости, через которые проходит сепаратриса. Именно в окрестности этих точек происходит очень длительная «остановка» частицы. Поэтому период колебаний становится столь большим (частота стремится к нулю), что даже малые возмущения могут сильно возмутить траекторию. Рассмотрим, как приведенные соображения реализуются формально. Для разнообразия оценим область разрушения сепаратрисы из условия перекрытия резонансов [83, 14].

Запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \dot{H} = \varepsilon F(x, t) = \varepsilon \omega_0 \sum_n \{ V_n \exp[i(n\vartheta - \nu t)] + \\ + V_n \exp[i(n\vartheta + \nu t)] + \text{к. с.} \}, \\ \dot{\vartheta} = \omega(H) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условие резонанса имеет вид

$$n\omega(H_n) = \nu. \quad (2.2)$$

Отсюда находим расстояние между резонансами

$$\delta\omega = |\omega(H_{n+1}) - \omega(H_n)| = \frac{\nu}{n} - \frac{\nu}{n+1} \sim \frac{\nu}{n^2} = \frac{\omega^2}{\nu}. \quad (2.3)$$

*) Более точное вычисление C см. в [84, 24].

Ширину резонанса получим с помощью следующей простой оценки. Выделим в правой части (2.1) только резонансный член:

$$\dot{H} \sim \varepsilon \omega_0 V_n \exp [i(n\theta - \nu t)] + \text{к. с.} \quad (2.4)$$

Интегрируем (2.4) по времени, учитывая, что величина

$$\frac{d}{dt} (n\theta - \nu t) = n\dot{\theta} - \nu \approx 0$$

в силу условия (2.2). Имеем

$$\Delta H \sim \frac{\varepsilon \omega_0 V_n}{\Delta (n\omega - \nu)} = \frac{\varepsilon \omega_0 V_n}{n \Delta \omega} = \frac{\varepsilon \omega_0 \omega V_n}{\nu \Delta \omega}, \quad (2.5)$$

где в знаменателе стоит, как обычно, расстройка частот вследствие того, что резонанс имеет ширину $\Delta \omega$. Учитывая, что

$$\Delta \omega = |d\omega/dH| \Delta H,$$

имеем из (2.5)

$$\Delta \omega \sim \left(\frac{\varepsilon \omega_0 \omega}{\nu} V_n \left| \frac{d\omega}{dH} \right| \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

(сравните это выражение с (1.3.13)). Из (2.3) и (2.6) находим условие перекрытия резонансов

$$K = \bar{K}^2 = \left(\frac{\Delta \omega}{\delta \omega} \right)^2 \sim \frac{\varepsilon \omega_0 \nu}{\omega^3} V_n \left| \frac{d\omega}{dH} \right| \gg 1. \quad (2.7)$$

До сих пор мы нигде не пользовались близостью к сепаратрисе. Если это так, то в разложении $F(x, t)$ в ряд Фурье по θ в (2.1) имеется порядка N гармоник с приблизительно одинаковыми амплитудами (см. § 1.2 и рис. 1.4), где N то же, что в (1.6). Откуда

$$V_n \sim \frac{H}{N} \sim \frac{H_c}{N} \sim H_c \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.8)$$

Ограничение $n < N$ соответствует согласно (2.2) условию $\nu \leq \omega_0$. Подстановка (2.8) в (2.7) дает окончательно

$$K = \frac{\varepsilon V}{\omega^3} H_c \left| \frac{d\omega}{dH} \right| \gg 1. \quad (2.9)$$

Все индивидуальные свойства системы заключены только в зависимости $\omega(H)$. Однако в окрестности сепаратрисы эта зависимость также может быть выражена в некоторой универсальной форме. Остановимся подробнее на анализе функции $\omega(H)$ вблизи сепаратрисы.

Как известно [20], частота определяется выражением

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dx}{|2H - V(x)|^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Обозначим

$$\Delta = |H - H_c| \ll H_c. \quad (2.11)$$

Рассмотрим траектории вблизи сепаратрисы, т. е. при условии (2.11). Представим знаменатель в (2.10) в виде

$$[2H - V(x)]^{1/2} \sim [(x - x_a)(x - x_b)(x - x_1) \dots (x - x_n)]^{1/2} \chi(x), \quad (2.12)$$

где x_a и x_b — точки поворота, между которыми совершается реальное финитное движение, x_1, \dots, x_n — все другие точки поворота, которые расположены вблизи, скажем, x_a , $\chi(x)$ — функция, не имеющая нулей в области движения. Основную вклад в (2.10) дают полюсные зависимости, так как вблизи сепаратрисы имеется по крайней мере двукратное вырождение корней (2.12): $n \geq 1$. Учитывая сделанное замечание, нетрудно получить из (2.10), (2.12) при условии (2.11):

$$\frac{1}{\omega} \sim \frac{1}{\omega_0} \begin{cases} \ln H_c/\Delta, & n = 1, \\ (\Delta/H_c)^{-(n-1)/2}, & n > 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Отсюда следует

$$\left| \frac{d\omega}{dH} \right| \sim \begin{cases} \omega^2/\omega_0\Delta, & n = 1, \\ \omega/\Delta, & n > 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Подстановка (2.13), (2.14) в (2.9) дает для ширины стохастического слоя по энергии:

$$\Delta/H_c \lesssim (\epsilon v/\omega_0)^{2/n+1}, \quad n \geq 1. \quad (2.15)$$

При $n = 1$ эта формула совпадает с (1.16). При $n \rightarrow \infty$ ширина области стохастичности стремится к единице *).

Стохастическое разрушение сепаратрисы и образование в ее окрестности стохастического слоя приводят к одному важному следствию. При исследовании нелинейного резонанса (§ 1.3) было показано, что под действием возмущения образуется сепаратриса (см. рис. 1.8, 1.9). Если учесть отброшенные нерезонансные члены, то они должны разрушить сепаратрису нелинейного резонанса. Поскольку частота нерезонансных членов велика по сравнению с частотой фазовых колебаний, то ширина стохастического слоя будет экспоненциально мала. Таким образом, нелинейный резонанс всегда «одет» узким стохастическим слоем.

В заключение этого параграфа остановимся кратко на проблеме разрушения магнитных поверхностей, которая непосредственно связана с анализом появления стохастичности в окрестности сепаратрисы. Задача возникла в связи с исследованием возможности создания замкнутых магнитных ловушек для удержания плазмы и в дальнейшем переросла то узкопрактическое содержание, которое первоначально вкладывалось в задачу (ком. 2).

Физическая сторона проблемы заключается кратко в следующем. В определенном приближении движение заряженных ча-

*) Читателю предлагается в виде упражнения рассмотреть возмущение $v \gg \omega_0$ методом перекрытия резонансов. В этом случае резонанс происходит при $n \gg N_0$ и пользоваться оценкой (2.8) нельзя.

стиц плазмы, помещенной в магнитное поле, происходит по спиралевидным траекториям, ось которых совпадает с некоторой силовой линией магнитного поля. При искажении магнитного поля спираль траектории следует за силовой линией так, как будто она прикреплена к ней. Поэтому для удержания частиц плазмы следует создать по крайней мере такую конфигурацию магнитного поля, чтобы его силовые линии занимали ограниченный объем. При определенных идеальных геометриях магнитного поля силовые линии наматываются на некоторую поверхность, называемую магнитной поверхностью. Эти поверхности соответствуют инвариантным тороам динамических систем. Однако реальные конфигурации всегда отличаются от идеальных построений, и возникает задача об условиях устойчивости и разрушения магнитных поверхностей, которая полностью идентична задаче об устойчивости и разрушении инвариантных торов гамильтоновых систем.

Формальная сторона вопроса выглядит следующим образом. Пусть задано магнитное поле \mathbf{B} (B_x , B_y , B_z), удовлетворяющее уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Уравнение силовых линий магнитного поля определяется из системы

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z},$$

которую перепишем в виде

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x(x, y, z)}{B_z(x, y, z)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B_y(x, y, z)}{B_z(x, y, z)}. \quad (2.16)$$

Предположим, что задача обладает некоторой симметрией и существует точный интеграл

$$H = H(x, y, z). \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) определяет семейство поверхностей $z = z(x, y, H)$, называемых магнитными, на которые наматываются магнитные силовые линии. Введя переменную «время» t с помощью замены $dz/dt = B_z(x, y, z)$, перепишем (2.16) в виде

$$\frac{dx}{dt} = B_x(x, y, z(x, y, t)), \quad \frac{dy}{dt} = B_y(x, y, z(x, y, t)). \quad (2.18)$$

Можно показать, что при наличии интеграла (2.17) (обычно это магнитный поток) система (2.18) приводится к гамильтоновой форме [83], если считать, что $z = z(H, x, y)$. Таким образом, мы получили обычную динамическую систему, которую необходимо исследовать при добавлении к (2.17) некоторого возмущения.

Результаты проведенного выше анализа позволяют сразу сделать утверждение о разрушении сепаратрисы магнитных поверх-

ностей и произвести оценку области этого разрушения. Приведем конкретный пример такого анализа [83]. Невозмущенная геометрия магнитного поля создается n парами проводников с током, симметрично навивающихся на цилиндр. В цилиндрических

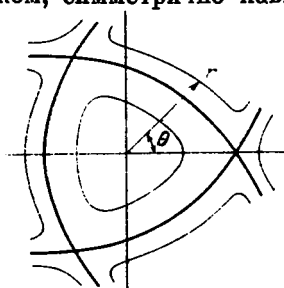


Рис. 5.2. Магнитные поверхности винтового поля при $n = 3$.

координатах скалярный потенциал винтового магнитного поля имеет вид

$$\Phi = B_0 z + b I_n(nr) \sin n(\varphi - z), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi,$$

где B_0 и b — константы, I_n — функция Бесселя мнимого аргумента и шаг винта положен равным единице. Введем величину

$$H = 1/2 r^2 - b r I_n'(nr) \cos n\theta \quad (2.20)$$

и переменные

$$\rho = 1/2 r^2, \quad \theta = \varphi - z.$$

Тогда непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости уравнений

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \rho},$$

т. е. $H = H(\rho, \theta)$ — гамильтониан системы. Фазовые траектории, например, для $n = 3$ изображены на рис. 5.2. Они и определяют магнитные поверхности в сечении плоскостью $t = \text{const}$. В реальных условиях проводники, создающие магнитное поле, наматываются на тор. В результате этого возникает возмущение порядка

$$\epsilon \approx r_0/R$$

(где r_0 и R — соответственно малый и большой радиусы тора). Оно и определяет область разрушенных магнитных поверхностей.

§ 5.3. Общая картина стохастического разрушения интегралов движения в фазовом пространстве

Резонансы и области стохастичности. «Квант стохастичности» в фазовом пространстве. Происхождение островков устойчивости. Разрушение интегралов движения. Замечание о теореме Пуанкаре. Два примера: движение частицы в поле двух плоских волн и в поле волнового пакета

Сейчас мы располагаем достаточной информацией, чтобы создать картину появления стохастичности в фазовом пространстве гамильтоновых систем. Действительно, в произвольном возмущении можно выделить в первом порядке резонансные и нерезонансные члены. Резонансные члены порождают сепаратрисы нелинейного резонанса и связанную с ней систему эллиптических и гиперболических особых точек. В окрестности каждой из сепаратрис образуется стохастический слой некоторой ширины. Стохастические слои

различных резонансов могут объединяться, если сепаратрисы резонансов перекрываются, и образовывать более широкие области стохастичности. Таким образом, каждая ячейка сепаратрисы «одевается» стохастическим слоем, который является минимальной областью стохастичности. Поэтому его можно назвать «квантом стохастичности». «Стохастическое море» в фазовом пространстве образуется в результате слияния «квантов стохастичности». Однако каждый такой «квант» устроен сложно. В центре его (т. е. в центре одной ячейки разрушенной сепаратрисы) лежит всегда островок устойчивости, порожденный эллиптической точкой. Действительно, всегда существует такая окрестность эллиптической точки, внутри которой нелинейность меньше того критического значения, при котором происходит разрушение инвариантных торов. Поэтому внутри островка устойчивости справедлива теория КАМ. Это означает, что в «стохастическом слое» разрушенных торов находятся островки инвариантных торов.

Все, что говорилось выше, было основано на анализе в первом порядке по возмущению. В следующем порядке, очевидно, внутри каждого островка устойчивости возникнут новые сепаратрисы, порожденные нелинейными резонансами следующего порядка по возмущению. Эти сепаратрисы снова «оденутся» стохастическими слоями, сохранив внутри островки устойчивости более высокого порядка малости, и т. д.

На рис. 5.3 изображена схематически описанная выше картина. Она различается для случаев числа степеней свободы $N = 2$ и $N > 2$. Как уже отмечалось в § 1.4, торы делят пространство только в случае $N = 2$. Поэтому области устойчивости хорошо

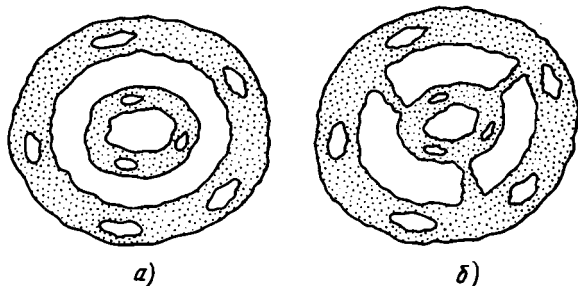


Рис. 5.3. Структура областей стохастического разрушения интегралов движения в зависимости от числа степеней свободы: а) $N = 2$; б) $N \geq 3$.

отделены друг от друга. В этом случае можно говорить о вечной устойчивости системы, если ее начальные условия находятся в области устойчивости. При $N \geq 3$ это не так. Торы пересекаются в фазовом пространстве. Следовательно, пересекаются и резонансные торы. Поскольку все резонансные торы имеют сепаратрисы, «одетые» по крайней мере экспоненциально узким стохастическим слоем, то возникает стохастическая паутина, пронизывающая все фазовое пространство. К этому следует добавить, что

если рассмотреть все возможные резонансы во всех порядках теории возмущений, то они образуют всюду плотную систему. Таким образом, в фазовом пространстве существует очень тонкая сеть стохастических каналов, по которым система может уходить достаточно далеко от начального состояния, что и составляет содержание диффузии Арнольда, понятие о которой вводилось в § 1.4.

Остановимся на следствиях, непосредственно вытекающих из сказанного.

1. Перекрытие резонансов означает объединение их стохастических слоев и разъясняет причину, по которой критерий перекрытия резонансов соответствует критерию стохастичности.

2. Границы стохастических слоев должны иметь очень сложную нерегулярную структуру. Эта структура влияет на форму инвариантных торов в окрестности границы. Поскольку разрушенные торы расположены в фазовом пространстве всюду плотно (как множество рациональных чисел), то инвариантные торы всегда будут испытывать на себе влияние близко лежащих к ним стохастических слоев. Это должно привести к тому, что, вообще, разрушенные инвариантные торы должны иметь столь сложную форму, что она не может быть представлена в виде аналитических добавок к невозмущенной форме тора. В этом и раскрывается смысл теоремы Пуанкаре об отсутствии аналитических интегралов движения при сколь угодно малых возмущениях. Те аналитические интегралы движения, которые находятся в первом порядке теории возмущений, например, при нелинейном резонансе, являются всего лишь грубым (но практически вполне удовлетворительным) приближением.

3. Разрушение инвариантных торов эквивалентно разрушению соответствующих интегралов движения. Поэтому можно говорить о стохастическом механизме разрушения интегралов движения. Приведем пример такого разрушения, полученный численно Хеноном и Хейлесом [88]. Ими был рассмотрен гамильтониан, описывающий два связанных осциллятора:

$$H = 1/2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 1/2 (x^2 + y^2) + x^2y - 1/3y^3.$$

Численный анализ движения, определяемого этим гамильтонианом, был проведен с помощью отображений Пуанкаре следующим образом. На плоскости (y, \dot{y}) при $x=0$ отмечались точки траектории при определенном значении энергии $H=E$. При достаточно малых E эти точки группировались в семейство замкнутых кривых (рис. 5.4, а), что соответствует существованию дополнительного (к энергии) интеграла движения. При $E > 1/12$ часть замкнутых кривых начинает распадаться. На рис. 5.4, б приведены отображения траекторий при $E=0,125$. Часть траекторий становится стохастической, а область островков устойчивости еще достаточно велика. С дальнейшим увеличением E

островки тают, и при $E = 0,1667$ почти весь фазовый объем становится областью стохастического движения (ком. 3).

В заключение этого параграфа приведем два примера, являющиеся хорошей иллюстрацией образования большой области стохастичности при слиянии различных стохастических слоев в результате перекрытия резонансов.

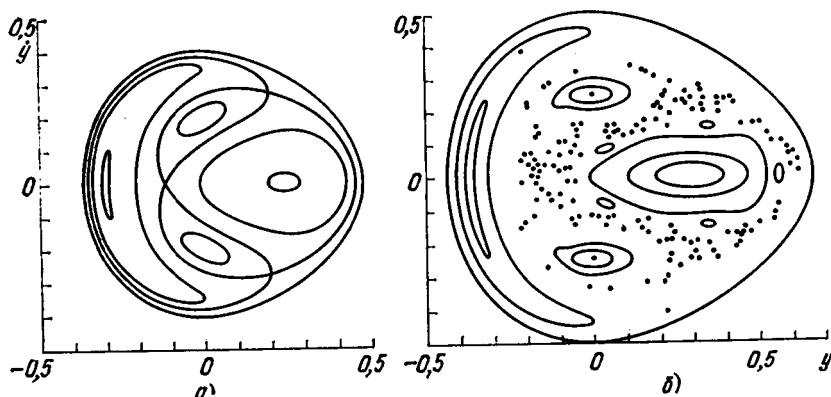


Рис. 5.4. Фазовые траектории в модели Хенона — Хейлеса: а) $E = 0,0833$; б) $E = 0,125$.

Рассмотрим сначала движение частицы в поле двух плоских волн [84]:

$$m\ddot{x} = -eE_0 \sin k_0 x - eE_1 \sin(k_1 x - vt), \quad (3.1)$$

где поле E_0 соответствует невозмущенному движению, а поле E_1 — возмущению. Уравнение (3.1) записано в системе отсчета, движущейся с основной волной. Задача (3.1) возникает в связи с различными приложениями в физике плазмы. Обозначая

$$\xi = k_0 x, \quad \omega_0^2 = \frac{e}{m} E_0 k_0, \quad \frac{E_1}{E_0} = \varepsilon \ll 1,$$

перепишем (2.1) в виде

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \sin \xi = -\varepsilon \omega_0^2 \sin\left(\frac{k_1}{k_0} \xi - vt\right). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) аналогично тому, что получается из гамильтониана (1.1). Отличие связано с фазовым слагаемым $k_1 \xi / k_0$ в возмущении, которое, однако, никакой существенной роли не играет [84]. Поэтому в зависимости от величины v/ω_0 мы получаем различные по ширине стохастические слои в окрестности сепаратрисы. Если устремить

$$\varepsilon \rightarrow 1, \quad v/\omega_0 \rightarrow 1, \quad (3.3)$$

то можно ожидать, что произойдет полное разрушение всех ячеек сепаратрисы, т. е. толщина стохастического слоя станет порядка

ширины самой сепаратрисы ω_0 . В этом случае происходит перекрытие двух резонансов, причем движение в каждой из плоских волн в отдельности можно рассматривать как нелинейный резонанс.

Пусть теперь частица движется в поле волнового пакета [84]:

$$\ddot{x} = e/m \sum_k E_k \cos(kx - \omega_k t). \quad (3.4)$$

Обозначим

$$\dot{x} = v, \quad \frac{e}{m} E_k = V_k, \quad \vartheta_k = kx - \omega_k t, \quad \omega_k(v) = kv - \omega_k.$$

Тогда уравнение (3.4) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sum_k V_k \cos \vartheta_k, \\ \dot{\vartheta}_k &= \omega_k(v), \end{aligned} \quad (3.5)$$

которая совпадает (с точностью до обозначений) с (2.1). Переменные (v, ϑ) являются канонически сопряженными, а v играет роль действия. Обратим внимание на то, что система (3.5) является

простейшей точной системой, описывающей движение в поле произвольного числа резонансов. Фазовая структура отдельного резонанса соответствует маятнику и описывает движение в поле одной выделенной волны и в пренебрежении влиянием всех остальных волн (рис. 5.5).

Запишем условие перекрытия резонансов. Найдем аналогично (2.6) ширину резонанса. Имеем для максимального изменения действия в окрестности одного резонанса:

$$\Delta v_k \sim \int dt V_k \cos \vartheta_k \sim \frac{V_k}{\Delta \omega_k(v)}.$$

Рис. 5.5. Фазовые траектории частиц в поле волнового пакета из N волн аналогичны траектории частиц при N резонансах.

Учитывая, что $\Delta \omega = |d\omega/dv| \Delta v$, находим

$$\Delta \omega_k(v) \sim \left(V_k \left| \frac{d\omega_k}{dv} \right| \right)^{1/2} = (kV_k)^{1/2} = \left(\frac{e}{m} kE_k \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

Именно этот результат и должен был получиться, так как ширина резонанса по частоте должна совпадать с частотой фазовых колебаний, которая в данном случае равна частоте малых колебаний в поле одной плоской волны (то же имело место и в (3.2)).

Расстояние между соседними резонансами определяется значениями волновых чисел k , входящих в волновой пакет. Пусть Δk — характерное расстояние между ближайшими значениями k . Тогда расстояние между резонансами равно

$$\delta\omega_k = \omega_{k+\Delta k}(v) - \omega_k(v) = \Delta k(v - d\omega_k/dk)$$

и критерий стохастичности принимает вид

$$K = \left| \frac{\Delta\omega_k}{\delta\omega_k} \right|^2 = \frac{(e/m)kE_k}{(\Delta k)^2 |v - d\omega_k/dk|^2} \gtrsim 1. \quad (3.7)$$

Пусть критерий (3.7) выполняется для всех волн в пакете, имеющих фазовые скорости $d\omega_k/dk$, от некоторого значения v_{\min} до v_{\max} . Тогда фазы θ_k будут случайны именно в этом интервале скоростей, а движение частицы аналогично броуновскому движению.

Мы уже замечали (см. ком. 3 к гл. 4), что при очень сильном перекрытии ($K \gg 1$) область стохастичности может резко сузиться, так как в этом случае происходит сильное вырождение резонансов и они, по существу, все сливаются в один резонанс. Чтобы этого не произошло, необходимо выполнение условия

$$K \lesssim N, \quad (3.8)$$

где N — число волн в пакете. Условия (3.7), (3.8) обычно использовались как условия применимости так называемого квазипериодического приближения в нелинейной теории плазмы [91] (см. § 6.3).

§ 5.4. Гомоклиническая структура в окрестности сепаратрисы

Расщепление сепаратрисы. Гомоклинические точки. Еще раз об изоморфизме стохастичности. Еще раз о K -системах

В этом параграфе мы коснемся лишь в самом грубом и качественном виде еще одной особенности поведения траекторий в окрестности разрушенной сепаратрисы.

Рассмотрим петлю сепаратрисы, имеющую одну гиперболическую точку O (рис. 5.6, *a*). Она возникает, например, при движении частицы в кубическом потенциале. Рассмотрим также два «уса» сепаратрисы: выходящий (S^+) из точки O и входящий (S^-) в точку O . При действии малого периодического возмущения на систему гиперболическая точка O оказывается устойчивой [98]. Это можно понять из следующих качественных соображений. Траектории в окрестности гиперболической точки неустойчивы, поэтому очень малое возмущение не может привести к более сильной неустойчивости траекторий. Свойство устойчивости гиперболической точки распространяется на некоторую малую окрестность ее «усов» (в противном случае разрушение «усов» привело бы и к исчезновению гиперболической точки). Следова-

тельно, малые окрестности «усов» вблизи O являются частями инвариантных кривых S^+ , S^- при действии возмущения. Мы, однако, ничего не знаем о том, как ведут себя инвариантные кривые S^+ , S^- вдали от точки O при действии возмущения (в отсутствие возмущения они замыкаются в петлю).

Возможна следующая ситуация, при которой «усы» S^+ и S^- не замыкаются и которую можно назвать расщеплением сепаратрисы. Поскольку возмущение периодическое, то «ус» S^+ начинает осциллировать. По мере удаления от точки O в направлении S^+ и по мере приближения к O в направлении S^- эти



Рис. 5.6. Образование гомоклинической структуры в окрестности сепаратрисы.

осцилляции нарастают по амплитуде и одновременно уменьшается их шаг (рис. 5.6, б). Нарастание по амплитуде связано с удалением от устойчивой точки O , а уменьшение шага связано с замедлением движения в окрестности O . Аналогичную картину можно представить себе, если двинуться из точки O по «усу» S^- в противоположном к движению направлении (рис. 5.6, в). Такое поведение «усов» S^+ , S^- должно привести к их пересечению в некоторой точке, скажем, в M_1 , не совпадающей с O . Точка M_1 называется гомоклинической, и основное утверждение заключается в том, что если существует хотя бы одна гомоклиническая точка (т. е. точка пересечения «усов» S^+ и S^- , не совпадающая с O), то гомоклинических точек бесконечно много.

Доказательство сделанного утверждения следует непосредственно из свойства инвариантности «усов» S^+ , S^- . Действительно, подействуем на точку M_1 преобразованием \hat{T} сдвига по времени на некоторую величину T . Обозначим

$$M_2 = \hat{T}M_1,$$

т. е. через время T точка M_1 переходит в точку M_2 . Инвариантность кривой означает, что при подходящем выборе шага преобразования (например, через период возмущения) все точки отображений располагаются на этой кривой. Поэтому точка M_2 принадлежит «усу» S^+ и, по той же причине, «усу» S^- . Следовательно, M_2 есть точка пересечения S^+ и S^- и является также гомоклинической. Продолжение этих рассуждений приводит к существованию бесконечного числа гомоклинических точек. Очень слабое представление о возникающей при этом картине дает рис. 5.6, г.

Следующее утверждение заключается в том, что при действии возмущений на сепаратрису гомоклинические точки действительно существуют. Они были обнаружены впервые Пуанкаре [27] в связи с исследованием задачи трех тел. Пуанкаре писал: «Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить». Рис. 5.6, *г*, конечно, не отражает полную картину на фазовой плоскости, а только ее «пулевое приближение», так как в окрестности каждой изображенной на рисунке гомоклинической точки не изображены осцилляции следующего порядка. Сейчас стало ясно, что в некотором точно определенном смысле структура гомоклинических точек является случайной. Эти результаты способствовали развитию метода исследования динамических систем, называемого символической динамикой (ком. 4). К сожалению, сложность метода делает его пока труднодоступным для физического анализа. Тем не менее можно использовать следующие качественные рассуждения.

Все множество гомоклинических точек назовем гомоклинической «структурой». Различные системы имеют топологически эквивалентные гомоклинические «структуры», если совпадают их системы гиперболических точек. В этом случае можно говорить, что законы стохастического поведения фазовых траекторий также эквивалентны, или, иначе, такие системы изоморфны. При перекрытии большого числа резонансов возникает гомоклиническая «структура», порожденная очень большим числом гиперболических точек, и можно ожидать, что точное знание числа гиперболических точек несущественно, если это число велико. Отсюда мы приходим к выводу, что все гамильтоновы системы с одинаковой размерностью и с большим числом сильно перекрытых ($K \gg 1$) резонансов являются изоморфными, если они имеют приблизительно равные значения K . Напомним, что при $K \gg 1$ мера островков устойчивости, которые могли бы внести некоторое разнообразие в стохастическую динамику, очень мала ($\sim 1/K$). Поэтому остается сделать еще один шаг, заключающийся в утверждении, что все физические системы с одинаковым числом степеней свободы в той области фазового пространства, в которой $K \gg 1$ и реализуется тем самым быстрое перемешивание, являются изоморфными K -системами (ком. 5).

Комментарий к гл. 5

1. Тот факт, что возмущение приводит к очень сложной картине разрушения сепаратрисы (к так называемой гомоклинической структуре, которая рассмотрена в этой главе), был отмечен еще Пуанкаре. Исследование этой структуры было связано с определенными трудностями, и первая оценка ширины области разрушения была получена Мельниковым [82]. Соображения о том, что разрушение в окрестности сепаратрисы носит стохастический характер, были высказаны впервые в работе [83]. В ней же было показано, что имеется локальная неустойчивость внутри слоя, называемого стохастическим, что движение частицы внутри слоя носит диффузионный характер и что для оценки ширины слоя может быть использован критерий стохастичности. Этот подход, подтвержденный численным анализом [83], позволил оце-

нить ширину области разрушения сепаратрисы для различных соотношений между параметрами возмущения и параметрами системы [84, 14, 15, 24].

2. Подробное изложение необходимых сведений по проблеме существования магнитных поверхностей имеется в обзоре Морозова и Соловьева [86]. Связь с общими задачами устойчивости интегралов движения динамических систем обсуждалась Арнольдом [31] и Мозером [33]. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей было получено в работах [87, 83] (см. также [14]).

3. Аналогичная картина разрушения так называемого третьего интеграла в задачах небесной механики была получена численно Контопулосом [89]. Другой красивый пример разрушения интегралов движения был также найден численно Казати и Фордом [90] в модели двух неравных масс, взаимодействующих с экспоненциально зависящим от разности координат потенциалом.

4. Развитие методов символической динамики было стимулировано фундаментальной работой Смейла [93]. Это направление сейчас активно развивается (см. монографию Нитецкого [95]). Изложение основных понятий, связанных с гомоклиническими точками, можно найти в [94, 95]. Исследованию стохастических свойств динамических систем методами символической динамики посвящены работы Алексеева [96, 97].

5. В этом месте необходимо напомнить об отсутствии строгого (в математическом смысле) содержания в используемых нами понятиях изоморфизма и K -систем. Свойства реальных динамических систем создают определенные трудности на этом пути. Поэтому в слова «изоморфизм» и « K -системы» вкладывается скорее физическое содержание, которое позволяет пользоваться этими терминами, не интересуясь рядом тонких деталей. Оправданием этому может служить тот обширный экспериментальный (реальный и численный) материал, который подтверждает правильный взгляд на сущность явления стохастичности. Еще раз обращаем внимание на то, что обсуждаются пока только гамильтоновы системы.

ГЛАВА 6

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ И КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Впервые понятие кинетического уравнения было введено Больцманом в 1872 г. Обычно в это понятие вкладывается такой способ описания поведения системы, который бы явно отражал необратимые процессы эволюции. Свойство необратимости было выражено Больцманом в виде знаменитой H -теоремы, или, иначе, теоремы о неубывании энтропии. Структуры уравнений, удовлетворяющих условиям H -теоремы, как выяснилось спустя много лет, допускают не очень большое разнообразие и сейчас известны достаточно хорошо (см., например, [1—13]). Тем не менее огромное число монографий и работ, посвященных кинетическому описанию вещества, связаны не только с различными конкретными приложениями, но и с изучением принципиальных вопросов такого описания, внимание к которым со стороны физиков не ослабевает со временем. Причиной этого является особое состояние проблемы кинетического уравнения. В то время как Больцману пришлось в трудных условиях отстаивать свою теорию, сейчас ни у кого нет сомнений в справедливости кинетического описания движения и в справедливости известных кинетических уравнений. Проблема состоит в том, чтобы выяснить, когда и при каких условиях (не формального характера) этими уравнениями можно пользоваться.

Результаты современной эргодической теории в значительной степени способствовали прояснению проблемы. Изложению этих и близких к ним вопросов посвящены эта и следующая главы.

§ 6.1. Принципы кинетического описания

Сокращение описания. Два способа сокращения. Основное кинетическое уравнение. Уравнение Больцмановского типа. Идеи Боголюбова. Приближение хаотических фаз и принцип ослабления корреляций

Исходной точкой для получения кинетического уравнения является уравнение Лиувилля, которое запишем в виде

$$i \frac{\partial f(p_1, q_1; \dots; p_N, q_N)}{\partial t} = \hat{L} f(p_1, q_1; \dots; p_N, q_N), \quad (1.1)$$

где оператор \hat{L} называется оператором Лиувилля и определяется

через скобки Пуассона:

$$\hat{L} = -i \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = -i \sum_{i=1}^N \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (1.2)$$

Оператор Лиувилля \hat{L} является линейным и эрмитовым и легко обобщается на квантовый случай заменой скобок Пуассона на коммутатор:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] = \hat{L}\rho, \quad (1.3)$$

где ρ — матрица плотности. Функция распределения $f(p_1, q_1; \dots; p_N, q_N)$, зависящая от переменных N частиц, называется N -частичной.

Статистический подход заключается в том, что мы отказываемся пользоваться полной информацией о движении системы, содержащейся в уравнениях (1.1) или (1.3), и хотим упростить эти уравнения ценой потери части информации о системе. Соответствующую процедуру обычно называют сокращением описания. Можно указать два способа сокращения описания и огрубления функции распределения. Первый из них связан с уменьшением числа переменных, относящихся к каждой частице. Например, вместо функции $f(p_1, q_1; \dots; p_N, q_N)$ вводится описание системы с помощью функции

$$F(p_1, \dots, p_N) = \langle\langle f(p_1, q_1; \dots; p_N, q_N) \rangle\rangle, \quad (1.4)$$

где скобки $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ обозначают формальный оператор огрубления. Новая функция распределения F является также N -частичной. Кинетическое уравнение для F (оно будет приведено далее) является линейным относительно F и называется основным кинетическим уравнением (master equation). Его линейность является следствием линейности исходного уравнения (1.1) и линейности оператора огрубления (1.4). Другой способ сокращения описания связан с представлением всех n -частичных функций распределения через m -частичные ($m < n$) функции распределения. Потеря информации в данном случае связана с исключением из рассмотрения корреляций между частицами, образующими на какое-то конечное время кластер из группы в $m < n$ частиц. Примером такого огрубления является использованное Больцманом представление двухчастичной функции распределения через одночастичные:

$$f(p_1, q_1; p_2, q_2) = F(p_1, q_1)F(p_2, q_2). \quad (1.5)$$

Операция огрубления типа (1.5) называется расцеплением и является нелинейной. Поэтому получающееся кинетическое уравнение (его обычно называют уравнением Больцмановского типа) имеет вид

$$\partial F / \partial t = \text{St} \{F, F\}, \quad (1.6)$$

где правая часть называется столкновительным членом, а оператор St является нелинейным функционалом от F (ком. 1).

Как правило, вывод кинетического уравнения сопровождается априорной гипотезой весьма специфического типа. Дело заключается в том, что уже давно приблизительно ясно, какую структуру должно иметь кинетическое уравнение (например: диффузионного типа, типа уравнения баланса или больцмановского типа и др.). Эта структура навязана в значительной степени вероятностным характером процессов, которые мы желаем описать с помощью кинетического уравнения. Поэтому, в определенном смысле, задача может быть сформулирована «от ответа». Исходя из уравнения Лиувилля, мы можем прийти к кинетическому уравнению, избавившись от некоторых членов, благодаря которым динамический характер движения существенно отличается от случайного. Поэтому вывод кинетического уравнения обычно сопровождается формулировкой в той или иной форме некоторого принципа или априорной гипотезы, формальная цель которой удалить «лишние» члены. Фактическое содержание подобных гипотез связано с введением в рассматриваемую систему необходимой доли случайности, или хаоса.

Фундаментальные достижения на пути получения кинетических уравнений как больцмановского типа, так и типа основного уравнения были получены Боголюбовым [99—102]. Им были разработаны совершенные формальные схемы получения кинетических уравнений и сформулированы в строгой форме те предположения, которыми следует дополнить метод. К последним относятся условия на спектральные свойства возмущения [99, 100] при выводе основного кинетического уравнения и принцип ослабления корреляций при выводе уравнения больцмановского типа [101] (ком. 2). Условие, необходимое для получения основного кинетического уравнения, после ряда модификаций приобрело форму, которую сейчас принято называть приближением хаотических фаз (ПХФ). Мы остановимся на нем подробнее в следующем параграфе (ком. 3).

Наиболее полное развитие получил метод Боголюбова, основанный на построении иерархической цепочки зацепляющихся уравнений для функции распределения, следующий из уравнения Лиувилля [101, 102, 2, 3, 6, 11]. Этот метод, известный под названием метода Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона (ББГКИ), заканчивается выводом кинетического уравнения больцмановского типа. Используемый в нем принцип ослабления корреляций заключается, грубо говоря, в том, что частицы, находящиеся достаточно далеко друг от друга, должны совершать нескоррелированные движения. Этот метод не будет рассматриваться далее, однако на одном из вопросов полезно остановиться.

Предположим, что нам тем или иным способом удалось установить, что движение частиц системы является движением с перемешиванием в фазовом пространстве. Тогда можно, исходя непосредственно из уравнений движения, получить ослабление корреляций. Действительно, пусть, например, частица очень

малых размеров движется в плоской среде, состоящей из частиц большой массы и большого размера, имеющих форму круглых дисков радиуса R . Рассеяние точечных частиц на практически неподвижных дисках с границей отрицательной кривизны

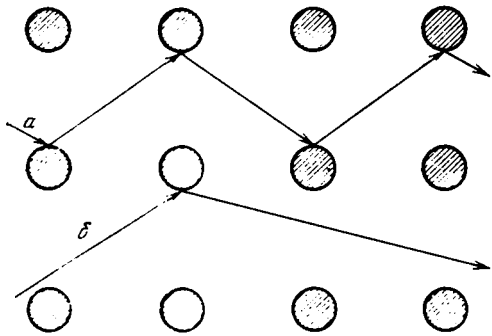


Рис. 6.1. Различные типы траекторий в бильярде с неподвижными рассеивающими областями.

(рис. 6.1) соответствует движению с перемешиванием (бильярд Синая). Опишем сначала качественно некоторые характерные особенности динамики рассеивающихся частиц.

Будем считать для простоты, что рассеивающие области образуют решетку с периодом $l \gg R$. Это означает, что большинство частиц испытывает рассеяние, пройдя путь длиной

$$r_0 \sim l \cdot l/R = l^2/R$$

(длина пробега). Соответственно, время между столкновениями равно

$$t_0 = r_0/v = l^2/Rv. \quad (1.7)$$

Такие частицы рассеиваются в основном на малые углы $\sim R/l$, и характерный параметр растяжения угла траектории ϑ с некоторой осью можно записать в виде

$$K \sim 1 + R/l \quad (1.8)$$

(траектория b на рис. 6.1). Соотношение (1.8) означает в данном случае следующее. Пусть две траектории с близкими начальными условиями после рассеяния имели угол $\Delta\vartheta_0$ между траекториями. Тогда после следующего рассеяния угол между этими траекториями имеет порядок

$$\Delta\vartheta_1 \sim K\Delta\vartheta_0. \quad (1.9)$$

После n -го рассеяния из (1.9) получаем

$$\Delta\vartheta_n \sim K^n \Delta\vartheta_0 \sim \Delta\vartheta_0 e^{n \ln K}.$$

Отсюда и из (1.8) следует, что инкремент неустойчивости равен

$$\frac{1}{\tau_c} \sim \frac{1}{t_0} \ln K,$$

или, с учетом (1.7), (1.8),

$$\tau_c \sim \frac{l^2/Rv}{R/l} = \frac{l}{v} \cdot \frac{l^2}{R^2}. \quad (1.10)$$

Время τ_c имеет также смысл времени расцепления корреляций фаз траекторий типа b на рис. 6.1, которые будем называть

нормальными. Нетрудно видеть из выражений (1.7), (1.10), что время расщепления корреляций и время между столкновениями связаны соотношением

$$t_0/\tau_c = R/l \ll 1. \quad (1.11)$$

Аналогично можно записать соотношение и для расстояний между частицами. Из (1.10) следует, что длина траектории r_c , на которой происходит расщепление корреляций фаз, имеет порядок

$$r_c = v\tau_c = l^3/R^2 = r_0 \cdot l/R \gg r_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, ослабление корреляций между частицами с нормальными траекториями происходит на длинах r_c .

Приведенные рассуждения показывают, что анализ перемешивания приводит к принципиальной возможности освободиться от гипотезы об ослаблении корреляций при выводе цепочки уравнений ББГКИ. Однако эта возможность до сих пор не реализована. Положение несколько осложняется существованием еще двух групп частиц с динамикой, отличной от описанной. Первая из них включает частицы, испытывающие сильное рассеяние. Их доля мала и имеет порядок R^2/l^2 . Для таких частиц $\tau_c \sim t_0$. Вторая группа частиц имеет траектории, близкие к периодическим (траектория a на рис. 6.1). Эти частицы будем называть захваченными. В течение достаточно длительного времени траектории захваченных частиц не перемешиваются. Доля захваченных частиц имеет порядок R/l , и их кинетическое описание должно иметь совершенно иной характер, чем описание нормальных частиц.

Значительно проще обстоит дело с выводом основного кинетического уравнения. Анализ свойств перемешивания динамической системы можно непосредственно включить в схему вывода кинетического уравнения. При этом мы сможем не только выяснить условия, при которых кинетическое описание системы становится возможным, но и получить это описание при произвольных начальных условиях, не используя никаких априорных гипотез типа приближения хаотических фаз (ПХФ). Такая программа была реализована в работах [83, 106, 14], и мы переходим к ее изложению.

§ 6.2. Кинетика нелинейного осциллятора

Теория возмущений для уравнения Лиувилля. Память о начальных условиях. Формальное содержание ПХФ. Способ округления функции распределения. Влияние перемешивания. Шкала времен

Для анализа того, как возникает кинетическое описание системы в области стохастичности ее движения, т. е. в области перемешивания траекторий в фазовом пространстве, удобно рассмотреть сначала пример какой-либо простой системы (ком. 4). Выберем в качестве такой системы нелинейный осциллятор, воз-

мущаемый внешней силой, зависящей от времени. Гамильтониан системы в переменных действие — угол имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t), \quad (2.1)$$

а уравнения движения

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \quad \dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}. \quad (2.2)$$

Согласно определению (1.2) оператора Лиувилля имеем из (2.2)

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{L}_0 + \varepsilon \hat{L}_1, \\ \hat{L}_0 &= -i\omega \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \hat{L}_1 = -i \left(\frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial I} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функция распределения $f = f(I, \vartheta, t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (1.1):

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = (\hat{L}_0 + \varepsilon \hat{L}_1) f. \quad (2.4)$$

Учитывая, что зависимость f от фазы ϑ должна быть периодической, запишем разложение в ряд Фурье:

$$f(I, \vartheta, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \bar{f}_n(I, t) \exp(in\vartheta), \quad \bar{f}_{-n} = \bar{f}_n^*.$$

По соображениям, которые станут очевидны ниже, удобно представить \bar{f}_n в виде

$$\bar{f}_n(I, t) = f_n(I, t) \exp \left[-in \int^t \omega(t') dt' \right],$$

где $\omega(t) = \omega(I(t))$. Таким образом, разложение $f(I, \vartheta, t)$ принимает вид

$$f(I, \vartheta, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_n f_n(I, t) \exp \left[in \left(\vartheta - \int^t \omega(t') dt' \right) \right]. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в (2.4) дает

$$\begin{aligned} i \frac{\partial f_n}{\partial t} &= \varepsilon \sum_m \exp \left[in \int^t \omega(t') dt' \right] \langle n | \hat{L}_1 | m \rangle \times \\ &\times \exp \left[-im \int^t \omega(t') dt' \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где введен матричный элемент возмущения

$$\langle n | \hat{L}_1 | m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \exp(-in\vartheta) \hat{L}_1 \exp(im\vartheta). \quad (2.7)$$

Запишем формальное решение уравнения (2.6):

$$f_n(I, t) = f_n(I, 0) - ie \sum_m \int_0^t dt_1 \exp \left[i(n-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt' \right] \times \\ \times \langle n | \hat{L}_1 | m \rangle f_m(I, t_1).$$

Итерация этого уравнения до членов второго порядка по ε включительно дает

$$f_n(I, t) = f_n(I, 0) - ie \sum_m \int_0^t dt_1 \times \\ \times \exp \left[i(n-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt' \right] \langle n | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle f_m(I, 0) + \\ + (-ie)^2 \sum_m \sum_k \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp \left[i(n-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt' \right] \times \\ \times \langle n | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle \exp \left[i(m-k) \int_0^{t_2} \omega(t') dt' \right] \times \\ \times \langle m | \hat{L}_1(t_2) | k \rangle f_k(I, 0) + \dots \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, в частности, для нулевой компоненты фурье-разложения (2.5):

$$f_0(I, t) = f_0(I, 0) - ie \sum_m \int_0^t dt_1 \times \\ \times \exp \left[-im \int_0^{t_1} \omega(t') dt' \right] \langle 0 | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle f_m(I, 0) + \\ + (-ie)^2 \sum_m \sum_k \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp \left[-im \int_0^{t_1} \omega(t') dt' \right] \times \\ \times \exp \left[i(m-k) \int_0^{t_2} \omega(t') dt' \right] \langle 0 | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle \times \\ \times \langle m | \hat{L}_1(t_2) | k \rangle f_k(I, 0) + \dots \quad (2.9)$$

Мы пришли к выражению, которое позволяет обсудить некоторые принципиальные вопросы вывода кинетического уравнения. Из разложения (2.5) следует, что $f_0(I, t)$ есть та часть функции распределения $f(I, \vartheta, t)$, которая не содержит зависимости от фаз ϑ . Пусть при $t=0$ начальные условия были таковы, что $f_k(I, 0) \neq 0$ для некоторых $k \neq 0$. Тогда из (2.9) следует, что для $f_0(I, t)$ нельзя получить уравнение в замкнутой форме.

Можно сказать, что решение $f_0(I, t)$ (если бы мы его умели найти) содержит память о начальных условиях благодаря зависимости от $f_k(I, 0)$.

Предположим теперь, что при $t=0$ начальные условия имеют вид

$$f_k(I, 0) = f_0(I, 0)\delta_{k,0}, \quad (2.10)$$

где $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера. Тогда выражение (2.9) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f_0(I, t) = & \\ = f_0(I, 0) - \varepsilon^2 \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp \left[im \int_{t_1}^{t_2} \omega(t') dt' \right] \times & \\ \times \langle 0 | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle \langle m | \hat{L}_1(t_2) | 0 \rangle f_0(I, 0) + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Будем также считать, что $\hat{L}_1(t)$ является периодической функцией t с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Тогда можно записать

$$\hat{L}_1(t) = \sum_p L_{1,p} \exp(ip\Omega t), \quad L_{1,-p} = L_{1,p}^* \quad (2.12)$$

Подстановка (2.12) в (2.11) дает

$$\begin{aligned} f_0(I, t) = f_0(I, 0) - \varepsilon^2 \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp \left[im \int_{t_1}^{t_2} \omega(t') dt' \right] \times & \\ \times \left\{ \sum_p \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle \exp[ip\Omega(t_2 - t_1)] + \right. & \\ + \left. \sum_{\substack{p,q \\ p+q \neq 0}} \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,q} | 0 \rangle \exp[i(pt_1 + qt_2)\Omega] \right\} \times & \\ \times f_0(I, 0) + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выражение в фигурных скобках представлено в виде суммы двух членов: диагонального и недиагонального. Их асимптотическое выражение при $t \rightarrow \infty$ дает разного порядка вклады в $f_0(I, t)$. Для анализа этих вкладов рассмотрим выражение

$$\psi(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t') dt'. \quad (2.14)$$

В первом приближении можно записать

$$\psi(t_2, t_1) \approx \omega(I)(t_2 - t_1). \quad (2.15)$$

Из уравнений движения следует, что поправки к (2.15) при

$$\alpha = I/\omega |d\omega/dI| \ll 1, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.16)$$

имеют порядок $\alpha\varepsilon$ с точностью до временного множителя. При $\alpha \ll \varepsilon$ ими можно пренебречь. О более сложных случаях будет сказано позже.

Таким образом, с учетом (2.15) выражение (2.13) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned}
 f_0(I, t) = & f_0(I, 0) - \varepsilon^2 \sum_m \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \exp[-i(m\omega - p\Omega)\tau] \times \\
 & \times \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle f_0(I, 0) - \\
 & - \varepsilon^2 \sum_{\substack{p,q \\ p+q \neq 0}} \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp[im\omega(t_2 - t_1) + (pt_1 + qt_2)\Omega] \times \\
 & \times \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,q} | 0 \rangle f_0(I, 0) + \dots, \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

где в первом члене $\sim \varepsilon^2$ сделана замена переменных $\tau = t_2 - t_1$. Сравним два члена $\sim \varepsilon^2$, стоящие в (2.17). Простой анализ показывает, что при $t \rightarrow \infty$ первый из них ведет себя как $\varepsilon^2 t$, в то время как второй является всегда осциллирующим (если $p \neq -q$) и имеет порядок $\varepsilon^2 \cdot 1$. Это позволяет пренебречь последним членом в (2.17). Дифференцирование оставшегося выражения по t дает при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_0}{\partial t} = & - \varepsilon^2 \sum_m \sum_p \int_0^\infty d\tau \exp[-i(m\omega - p\Omega)\tau] \times \\
 & \times \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle f_0, \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

где сокращенно принято $f_0 = f_0(I, t)$ и в правой части с той же точностью до ε^2 сделана замена $f_0(I, 0)$ на $f_0(I, t)$.

Для дальнейшего упрощения выражения (2.18) воспользуемся формулой

$$\int_0^\infty d\tau \exp(-i\nu\tau) = \pi \delta_-(\nu) = \pi \delta(\nu) - i\mathcal{P} \frac{1}{\nu},$$

в которой \mathcal{P} обозначает символ главного значения. Из определенных (2.7) и (2.12) следует, что $\langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle$ есть четная функция от m и p . Поэтому

$$\sum_m \sum_p \mathcal{P} \frac{1}{m\omega - p\Omega} \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle = 0$$

и, следовательно, уравнение (2.18) принимает следующую окончательную форму:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_0}{\partial t} = & - \pi \varepsilon^2 \sum_m \sum_p \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle \times \\
 & \times \delta(m\omega - p\Omega) f_0, \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

которая и является основным кинетическим уравнением для нелинейного осциллятора (ком. 5). Стоящая в (2.19) δ -функция

отбирает резонансные взаимодействия между осциллятором и внешним полем.

Если отвлечься от неравенств типа (2.16), которые играют не столько принципиальную роль, сколько техническую, то нетрудно видеть, что основным условием, использованным при выводе основного кинетического уравнения, является предположение о начальных условиях (2.10). Оно называется приближением хаотических фаз (ПХФ). Смысл этих слов может быть понят из разложения (2.5) при $t=0$. Действительно, если считать, что фазы при $t=0$ случайны, то усреднение по ним в выражении (2.5) приводит к равенству (2.10).

Рассмотрим (2.19) в более конкретной форме. Для этого обратимся к примеру из § 4.1, в котором зависимость возмущения от времени имела вид периодической последовательности δ -функционных импульсов. Согласно (4.1.4)

$$V(I, \vartheta, t) = V_0(I, \vartheta) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad T = 2\pi/\Omega. \quad (2.20)$$

Введем разложение

$$V(I, \vartheta) = \sum_n V_n(I) \exp(in\vartheta), \quad V_{-n} = V_n^*. \quad (2.21)$$

Из определений (2.3), (2.7), (2.12), (2.20) и (2.21) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle &= \\ &= -m^2 \left(\frac{\partial V_m}{\partial I} + V_m \frac{\partial}{\partial I} \right) V_{-m} \frac{\partial}{\partial I} = -m^2 \frac{\partial}{\partial I} |V_m|^2 \frac{\partial}{\partial I}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.19) теперь принимает вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial f_0}{\partial I}, \quad (2.22)$$

где величина $D(I)$, называемая коэффициентом диффузии, равна

$$D(I) = \pi e^2 \sum_m \sum_p m^2 |V_m|^2 \delta(m\omega - p\Omega). \quad (2.23)$$

Мы получили кинетическое уравнение (2.22) типа уравнения Фоккера — Планка. Если считать, что частоты Ω очень малы ($\Omega \ll \omega$), то суммирование по p можно заменить интегрированием:

$$\sum_p \delta(m\omega - p\Omega) \rightarrow \frac{1}{\Omega} \int d(p\Omega) \delta(m\omega - p\Omega)$$

и выражение (2.23) переходит в следующее:

$$D(I) = \pi e^2 \sum_m m^2 |V_m|^2 / \Omega, \quad (2.24)$$

пропорциональное спектральной плотности энергии возмущения $|V_m|^2 / \Omega$.

Полезно также отметить, что выражение (2.24) совпадает с тем, которое получается из стандартного вывода уравнения Фоккера — Планка. Действительно, как известно,

$$D(I) = \overline{(\Delta I)^2}/T, \quad (2.25)$$

где ΔI — изменение действия на интервале T , а черта означает усреднение по фазам. Из уравнений движения (2.2) и вида возмущения (2.20) следует

$$\dot{I} = -\varepsilon \partial V / \partial \theta = -\varepsilon [\partial V_0(I, \theta) / \partial \theta] T \sum_k \delta(t - kT).$$

Отсюда интегрированием по интервалу времени величиной T находится

$$\Delta I = -\varepsilon [\partial V_0(I, \theta) / \partial \theta] T.$$

После подстановки этого выражения в (2.25) и усреднения по фазам легко получаем выражение (2.24). В приведенных рассуждениях мы вместо условия (2.10) воспользовались более расплывчатым приемом усреднения по фазе на каждом толчке внешней силы.

Теперь покажем, что если осциллятор совершает движение с перемешиванием, то надобность в использовании каких-либо априорных предположений типа ПХФ отпадает. Рассмотрим ту же систему (2.2) с возмущением в форме (2.20) и воспользуемся анализом, проведенным в § 4.1. Согласно (4.1.14) движение осциллятора является стохастическим, если выполнено условие

$$K = \varepsilon \alpha \omega T \gg 1. \quad (2.26)$$

При условии (2.26) корреляционная функция фаз осциллятора (4.1.15) расцепляется экспоненциально со временем по закону (4.1.17):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(m, t | n, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta(0) \exp \{ i [m\theta(t) - n\theta(0)] \} \sim \\ &\sim \exp(-t/\tau_c) \exp(im\omega t), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где время расцепления корреляции равно

$$\tau_c = 2T/\ln K. \quad (2.28)$$

Обратимся теперь снова к уравнению (2.9) и подставим в него разложение (2.12). Это дает

$$\begin{aligned} f_0(I, t) &= f_0(I, 0) - i\varepsilon \sum_m \int_0^t dt_1 \exp \left[-im \int_0^{t_1} \omega(t') dt' \right] \times \\ &\times \langle 0 | L_1(t_1) | m \rangle f_m(I, 0) - \varepsilon^2 \sum_m \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \times \\ &\times \exp \left[im \int_{t_1}^{t_2} \omega(t') dt' \right] \exp[ip\Omega(t_2 - t_1)] \times \\ &\times \langle 0 | L_{1,p}(t_2) | m \rangle \langle m | L_{1,-p}(t_1) | 0 \rangle f_0(I, 0) - \varepsilon^2 \Sigma', \end{aligned} \quad (2.29)$$

где через $\varepsilon^2 \Sigma'$ обозначены все остальные члены порядка ε^2 . Выше уже отмечалось, что при анализе асимптотического поведения $f_0(I, t)$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо отобрать старшие по t члены, т. е. такие, которые обеспечивают резонансное взаимодействие осциллятора с внешним полем. Анализ, аналогичный тому, который уже проводился выше, показывает, что именно такие члены выписаны в (2.29). В сумму Σ' входят только нерезонансные быстро осциллирующие члены. Поэтому ими можно пренебречь при $t \rightarrow \infty$. Принципиальное отличие выражения (2.29) от того, которое может быть получено в условиях ПХФ, связано с наличием члена первого порядка по ε . Именно в нем сейчас сохраняется память о начальных условиях.

Введем операцию огрубления по фазам:

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (0), \quad (2.30)$$

выражающуюся в интегрировании по начальным фазам. Обозначим

$$F(I, t) = \langle f_0(I, t) \rangle. \quad (2.31)$$

Применим оператор (2.30) к выражению (2.29) и отбросим нерезонансные члены, содержащиеся в Σ' :

$$\begin{aligned} F(I, t) = & f_0(I_0, 0) - ie \sum_m \int_0^t dt_1 \times \\ & \times \langle \exp[-im\psi(t_1, 0)] \rangle \langle 0 | L_1(t_1) | m \rangle f_m(I_1, 0) - \\ & - \varepsilon^2 \sum_m \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \exp[-im\psi(t_1, t_2)] \rangle \times \\ & \times \exp[ip\Omega(t_2 - t_1)] \langle 0 | L_{1,p}(t_2) | m \rangle \langle m | L_{1,-p}(t_1) | 0 \rangle f_0(I, 0), \quad (2.32) \end{aligned}$$

где использовано обозначение (2.14). При анализе уравнений движения в § 4.1 мы видели, что в случае перемешивания достаточно ограничиться приближенным уравнением движения фазы

$$\dot{\theta} \approx \omega(I).$$

Поэтому согласно (2.14) можно записать

$$\psi(t_1, t_2) = \theta(t_1) - \theta(t_2).$$

Отсюда следует, что выражения, стоящие в (2.32) под знаком огрубления $\langle \dots \rangle$, совпадают с соответствующими корреляторами типа (2.27). Используя (2.27), имеем

$$\begin{aligned} \langle \exp[-im\psi(t, 0)] \rangle &= \langle \exp\{-im[\theta(t) - \theta(0)]\} \rangle \sim \\ &\sim \exp(-t/\tau_c) \exp(-im\omega t). \quad (2.33) \end{aligned}$$

Аналогично выводу (2.27) можно показать, что

$$\begin{aligned} \langle \exp[-im\psi(t_2, t_1)] \rangle &= \langle \exp\{-im[\theta(t_1) - \theta(t_2)]\} \rangle \sim \\ &\sim \exp[-(t_1 - t_2)/\tau_c] \exp[-im\omega(t_1 - t_2)]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Подстановка (2.33), (2.34) в (2.32) и дифференцирование по t дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -i\varepsilon \exp(-t/\tau_c) \exp(-im\omega t) \langle 0 | L_1(t) | m \rangle f_m(I, 0) - \\ &- \varepsilon^2 \sum_m \sum_p \int_0^t d\tau \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_c} - i(m\omega - p\Omega)\tau\right] \times \\ &\quad \times \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle F, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где так же, как и ранее, с точностью до членов более высокого порядка по ε сделана замена $f_0(I, 0)$ на F в члене порядка ε^2 . Из (2.35) теперь видно, что при $t \gg \tau_c$ первый член экспоненциально убывает и память о начальных условиях исчезает. Во втором члене заметим, что условие возможности резонанса

$$m\omega - p\Omega \approx 0$$

означает, что в суммах отбираются члены, в которых знаки m и p одинаковы. Учитывая это, а также свойства симметрии матричных элементов \hat{L}_1 при изменении знаков m и p , и переходя к пределу $t \rightarrow \infty$, имеем из (2.35) окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -2\varepsilon^2 \sum_{m>0} \sum_{p>0} \frac{1/\tau_c}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2} \times \\ &\quad \times \langle 0 | L_{1,p} | m \rangle \langle m | L_{1,-p} | 0 \rangle F. \end{aligned} \quad (2.36)$$

При условии

$$1/\tau_c \Omega \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

выражение

$$\Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, m\omega - p\Omega\right) \equiv \frac{1/\tau_c \pi}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2} \rightarrow \delta(m\omega - p\Omega) \quad (2.38)$$

п уравнение (2.36) переходит в основное кинетическое уравнение (2.19) или (2.22). Если воспользоваться явными выражениями для матричных элементов возмущения, то (2.36) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_m \sum_p m^2 |V_m|^2 \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, m\omega - p\Omega\right) \frac{\partial F}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial F}{\partial I}, \quad (2.39)$$

где

$$D = \pi\varepsilon^2 \sum_m \sum_p m^2 |V_m|^2 \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, m\omega - p\Omega\right). \quad (2.40)$$

Происшедшая замена δ -функции на Δ -функцию связана с учетом конечного времени потери памяти о начальных условиях.

Итак, мы получили кинетическое описание системы при произвольных начальных условиях, если только движение системы обладает свойством перемешивания. Сама схема вывода уравне-

ния (2.39) определяет также и функцию F , для которой кинетическое описание может быть получено. В определении F (2.31) входит конкретный способ огрубления. В связи с этим полезно выяснить, к чему привела бы операция огрубления (2.30), если бы условие перемешивания (2.26) не выполнялось. В этом случае коррелятор фаз имел бы порядок

$$\mathcal{R}(m, t|m, 0) \sim \exp(im\omega t).$$

Поэтому

$$\langle \exp[-im\psi(t, 0)] \rangle \sim \exp(-im\omega t)$$

и члены $\sim \varepsilon$ в (2.32) не затухали бы. Таким образом, операция огрубления по фазам ничего не меняет в отсутствие перемешивания (ком. 6).

Остановимся теперь на соотношениях между характерными временами, определяющими кинетическое описание системы. Действие возмущения на осциллятор выражается в виде δ -образных толчков. Поэтому длительность «столкновения» τ , равна нулю. Время между столкновениями равно T . Его можно интерпретировать как время свободного пробега τ_0 . Время расцепления корреляций τ_c , или время потери памяти о начальных условиях, удовлетворяет, согласно (2.28) при $K \gg 1$, равенству

$$\tau_c \ll T = \tau_0.$$

Наконец, из (2.39), (2.40) (см. также (2.24)) находим время диффузии

$$\tau_D = \frac{\Omega}{\pi \varepsilon^2} \frac{I^2}{V^2} \sim \frac{T}{\varepsilon^2} \gg T. \quad (2.41)$$

Таким образом, шкала времен выглядит следующим образом:

$$\tau_c \ll \tau_c \ll \tau_0 \ll \tau_D. \quad (2.42)$$

При выводе кинетического уравнения мы пользовались асимптотикой $t \rightarrow \infty$. Теперь можно указать ее смысл: $t \gg \tau_0 = T$.

Впоследствии мы встретимся с выводом основного кинетического уравнения для значительно более сложных систем. Однако все основные элементы его получения, описанные выше, сохраняются. Сохраняются также соотношения (2.42) между характерными временами задачи.

§ 6.3. Диффузионное движение частицы в поле волнового пакета

Выбор переменных. Уравнение для функции распределения. Аппроксимация волновых пакетов. Квазилинейное уравнение. Замечание о времени «захвата» частицы

В многочисленных задачах теории плазмы движение заряженной частицы происходит в поле волнового пакета, т. е. уравнения движения имеют вид (5.3.4):

$$x = \frac{e}{m} \sum_k E_k \cos(kx - \omega_k t), \quad (3.1)$$

где зависимость ω_k от k характеризует закон дисперсии волн, составляющих волновой пакет. В § 5.3 мы выяснили, при каком условии движение частицы становится стохастическим. Это условие согласно (5.3.7) имеет вид

$$K = \frac{(e/m) k E_k}{\Omega_k^2} \geq 1, \quad (3.2)$$

где обозначено

$$\Omega_k = \Delta k (v - d\omega_k/dk) \quad (3.3)$$

и Δk есть характерное расстояние между волновыми числами волн, являющимися соседними в спектре волнового пакета. Соответственно, Ω_k имеет смысл характерного расстояния по частоте между такими волнами. Удобно ввести еще одно обозначение:

$$\frac{1}{\tau_k} = \left(\frac{e}{m} k E_k \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

где τ_k согласно (3.1) есть период малых колебаний частицы в поле k -й плоской волны. Критерий (3.2) принимает теперь простой вид:

$$K = \frac{1}{\tau_k^2 \Omega_k^2} \geq 1, \quad (3.5)$$

имеющий смысл квадрата параметра перекрытия резонансов.

Построим кинетическое уравнение, описывающее движение частицы при выполнении условия (3.5). Перепишем уравнение (3.1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{2} \sum_k (V_k \exp(i\vartheta_k) + V_{-k} \exp(-i\vartheta_k)), \quad V_{-k} = V_k^*, \\ \dot{\vartheta}_k &= kv - \omega_k \equiv \omega_k(v), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\vartheta_k = kx - \omega_k t, \quad V_k = (e/m) E_k, \quad v = \dot{x}. \quad (3.7)$$

Введем функцию распределения

$$f(v, \vartheta, t) \equiv f(v, \vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, \dots, \vartheta_{k_N}, t),$$

где N — число гармоник в спектре волнового пакета. Уравнение Лиувилля для $f(v, \vartheta, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} + \\ + \frac{1}{2} \sum_k [V_k \exp(i\vartheta_k) + V_{-k} \exp(-i\vartheta_k)] \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, запишем разложение

$f(v, \vartheta, t)$ в ряд Фурье по ϑ :

$$f(v, \vartheta, t) = \sum_{(n)} \{ f^{(n)}(v, t) \exp [i(n, \vartheta)] + f^{(-n)}(v, t) \exp [-i(n, \vartheta)] \}, \quad (3.9)$$

где

$$f^{(-n)} = (f^{(n)})^*, \quad (n, \vartheta) = n_1 \vartheta_{k_1} + n_2 \vartheta_{k_2} + \dots + n_N \vartheta_{k_N}$$

и символ (n) обозначает набор целых чисел (n_1, n_2, \dots, n_N) . Приближение хаотических фаз в данном случае выглядит следующим образом:

$$f^{(n)}(v, \vartheta, t=0) = 0, \quad n \neq 0. \quad (3.10)$$

Условие (3.10) означает, что в начальный момент времени функция распределения не зависела от фаз ϑ и, следовательно, не зависела от координаты x .

Будем теперь считать, что условие (3.5) выполнено для всех k . Тогда можно построить кинетическое уравнение, описывающее движение частицы, при произвольных начальных условиях. Заметим прежде всего, что в уравнениях движения (3.6) переменная v играет роль переменной действия. Поступим аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе. Введем огрубленную функцию распределения

$$F(v, t) = \langle f^{(0)}(v, t) \rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_1} \dots \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_N} f^{(0)}(v, t). \quad (3.11)$$

Возмущенная часть оператора Лиувилля согласно (1.2) и (3.8) имеет вид

$$\hat{L}_1 = -\frac{i}{2} \sum_k [V_k \exp(i\vartheta_k) + V_{-k} \exp(-i\vartheta_k)] \frac{\partial}{\partial v} \quad (3.12)$$

и не зависит явно от t . Отсюда, аналогично (2.7),

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{L}_1 | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_1} \dots \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_N} \exp[-i(m, \vartheta)] \hat{L}_1 = \\ &= -\frac{i}{2} \sum_k (V_k \delta_{m_k, -1} + V_{-k} \delta_{-m_k, 1}) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляем (3.12), (3.13) в уравнение (2.32) и полагаем в нем $p=0$ (так как \hat{L}_1 не зависит явно от t). Дифференцирование полученного выражения по t дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \text{Re} \sum_k V_k \left\langle \exp \left[i \int_0^t \omega_k(v) dt' \right] \right\rangle \frac{\partial f^{(1)}}{\partial v} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \int_0^\infty d\tau \left\langle \cos \int_0^\tau \omega_k(v) dt' \right\rangle \frac{\partial F}{\partial v}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где индекс (1) при f означает, что все $n_k = 1$. Мы намеренно опустили ряд выкладок, полностью идентичных тому, что делалось в предыдущем параграфе, и обращаем внимание лишь на изменения, связанные с наличием N различных фаз ϕ_k .

Произведем оценку корреляторов, входящих в (3.14). Для этой цели исследуем качественно некоторые свойства выражения

$$G(t) = \sum_k (A_k \exp(i\omega_k t) + A_k^* \exp(-i\omega_k t)). \quad (3.15)$$

Пусть для простоты сумма по k распространяется от $k=0$ до некоторого достаточно большого k_{\max} . Удобно начать с простого случая:

$$\begin{aligned} A_k &= \text{const} \equiv A, \\ \omega_{kn} &= nk_0 c \equiv n\Omega, \quad k_{\max} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где n — целое число. Тогда имеет место соотношение

$$G(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\Omega t) = AT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.17)$$

Равенство (3.17) легко устанавливается с помощью формулы суммирования Пуассона. Рассмотрим, к чему приводят различные отклонения от условий (3.16). Конечная ширина пакета в (3.15) размывает δ -функции в (3.17). Из соотношения неопределенности следует, что вместо δ -функций в (3.17) будут стоять δ -образные функции с шириной

$$\Delta t \sim (\omega_{\max} - \omega_{\min})^{-1},$$

где ω_{\max} — частота ω_k при $k = k_{\max}$ и ω_{\min} — соответственно частота при $k = k_{\min}$. Свойство δ -образности временных импульсов, входящих в $G(t)$, определяется условием достаточно большой ширины волнового пакета по частотам:

$$\Delta t \omega_k \ll 1. \quad (3.18)$$

Очевидно, что условие (3.18) выполняется только в низкочастотной части спектра. Если дисперсия частот мала, т. е. мала величина $d^2\omega_k/dk^2$, то можно считать, что

$$\Omega \approx \frac{d\omega_k}{dk} \Delta k, \quad (3.19)$$

где Δk — характерное расстояние между волновыми числами соседних гармоник пакета. Слабая зависимость Ω от k создает слабую неэквидистантность по времени δ -образных импульсов. Наконец, если зависимость A_k от k мала, то это приводит к слабой модуляции амплитуд δ -образных импульсов. Таким образом, если отклонения от условий (3.16) невелики в указанном выше смысле, то с хорошей точностью для волнового пакета (3.15) можно воспользоваться аппроксимацией (3.17), в которой величина Ω имеет смысл (3.19). Использование формулы (3.17)

вместо (3.15) означает также возможность свести непрерывные по времени уравнения движения к отображениям, подобно тому, как это делалось в гл. 4.

Приведенные рассуждения позволяют воспользоваться формулой (2.33) и записать

$$\left\langle \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t \omega_k(v) dt' \right\} \right\rangle \right\rangle = \langle \exp \{ i [\vartheta_k(t) - i\vartheta_k(0)] \} \rangle \sim \\ \sim \exp(-t/\tau_c) \exp[i\omega_k(v)t], \quad (3.20)$$

где

$$\tau_c \sim \frac{1}{\Omega_k \ln K} \quad (3.21)$$

и Ω_k определено выражением (3.3). Аналогично,

$$\int_0^{\infty} dt \langle \cos [\vartheta_k(t) - \vartheta_k(0)] \rangle \sim \frac{2/\tau_c}{(1/\tau_c)^2 + \omega_k^2(v)} = \\ = \frac{2/\tau_c}{(1/\tau_c)^2 + (\omega_k - kv)^2} \equiv 2\pi \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega_k - kv\right). \quad (3.22)$$

Из (3.20) следует, как и ранее, что при больших t член первого порядка по возмущению в уравнении (3.14) исчезает и оно переходит в кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega_k - kv\right) \frac{\partial F}{\partial v}, \quad (3.23)$$

описывающее диффузию частицы в пространстве скоростей и известное в теории плазмы как квазилинейное уравнение [91, 107] (ком. 7).

Из приведенных выше рассуждений можно получить одно следствие, которое связано с некоторым общим свойством динамики частицы в области стохастичности. В § 5.3 при анализе уравнений (3.1) или (3.6) уже отмечалось, что потенциал каждой из плоских волн создает для частицы на фазовой плоскости область, соответствующую области захвата в нелинейный резонанс. Условие стохастичности (3.5) означает просто условие перекрытия таких областей. Теперь заметим, что характерное время прохождения частицей потенциальной ямы, создаваемой одной плоской волной, в которую захвачена частица, равно τ_k согласно (3.4). Поэтому из (3.5) и (3.21) следует, что

$$\frac{\tau_k}{\tau_c} \sim \tau_k \Omega_k \ln \frac{1}{\tau_k \Omega_k} \ll 1. \quad (3.24)$$

Совмещая неравенство (3.24) с условием (3.5), получаем следующее соотношение между временами:

$$T_k \gg \tau_c \gg \tau_k, \quad T_k = 2\pi/\Omega_k. \quad (3.25)$$

Если теперь воспользоваться понятиями нелинейного резонанса (§ 1.3), то нетрудно придать величине τ_k смысл периода фазовых колебаний частицы в ячейке сепаратрисы, порожденной потенциалом одной k -й плоской волны. Таким образом, соотношение (3.25) показывает, что время расцепления корреляций попадает в интервал времен между периодом фазовых колебаний и периодом дискретных отображений (толчков со стороны внешней силы). Приведенное утверждение носит общий характер для всех рассмотренных нами случаев появления стохастичности.

Комментарии к гл. 6

1. Характер нелинейности столкновительного члена зависит от типа столкновений, определяющих эволюцию функции распределения. В формуле (1.6) это парные, или двухчастичные столкновения, и поэтому правая часть в (1.6) является квадратичным функционалом F . Существуют, однако, такие случаи, когда двухчастичные процессы не дают или почти не дают вклада в эволюцию f , а основную роль играют трехчастичные процессы. В этом случае процедура огрубления может быть связана с расцеплением, например, следующего типа:

$$f(p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3) = F(p_1, q_1) F(p_2, q_2) F(p_3, q_3),$$

а кинетическое уравнение будет иметь структуру

$$\partial F / \partial t = \text{St} \{F, F, F\}.$$

2. Сейчас можно лишь выразить сожаление о том, что работы Боголюбова [99, 100] по выводу кинетического уравнения типа основного уравнения были опубликованы в труднодоступных изданиях и остались для многих физиков неизвестны вплоть до издания трудов [102]. Результаты этих работ в значительной степени предвосхитили те методы и способы описания, которые были в дальнейшем развиты. Несмотря на давность публикаций работ [99, 100], они до сих пор поражают глубиной и тонкостью исследования предмета.

3. Методы получения основного кинетического уравнения, использующие ПХФ, были развиты в наиболее полной форме Пригожиным и его школой [7, 12]. Изящный метод проекционного оператора был предложен Цванцигом [103]. В работах Зубарева [1, 104, 105] был предложен метод неравновесного статистического оператора, позволяющий, в частности, в трудных случаях определить вид необходимого проекционного суммированного оператора.

4. В задачи данного параграфа не входит описание строгого и достаточного совершенного метода получения кинетического уравнения. Поэтому следующий далее вывод носит весьма упрощенный характер. Это компенсируется возможностью достаточно четко проследить за тем, как можно органически ввести в схему вывода кинетического уравнения свойство перемешивания траекторий, и тем самым освободиться от использования ПХФ.

5. Приведенный выше нестрогий вывод основного кинетического уравнения может быть существенно улучшен путем выборочного суммирования бесконечного по ε ряда, причем в каждом порядке по ε^2 отбираются старшие (диагональные) члены. Эта процедура подробно описана в книге Пригожина [7].

6. Это замечание, в частности, показывает, что не всякое усреднение по фазам приводит к необратимости. Система должна иметь некоторую внутреннюю структуру такую, что потеря части информации о ее движении привела бы к необратимым уравнениям. Очевидно, что в рассмотренном случае свойство перемешивания такую структуру обеспечивает.

7. Уравнение (3.23) в пределе, когда $\Delta(1/\tau_c, \omega - kv)$ переходит в $\delta(\omega - kv)$, известно как квазилинейное уравнение в теории плазмы. Оно было получено в условиях ПХФ в работе [91] и в значительной степени способствовало развитию теории коллективных процессов в плазме благодаря многочисленным приложениям. Многие из них можно найти в монографиях [107, 108] и в обзоре [109].

При выводе квазилинейного уравнения авторы работы [91] использовали условие отсутствия «захваченных» частиц, которое, по существу, совпадает с условием перекрытия резонансов. Действительно, только в этом случае частицы, находящиеся в потенциальных ямах одной какой-либо из волн, не смогут находиться в ней существенно дольше, чем в течение времени пролета частицы в яме $\sim \tau_R$.

ГЛАВА 7

НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ

До сих пор предметом нашего исследования были системы с малым числом степеней свободы. Естественно ожидать, что увеличение числа степеней свободы N должно приводить к более легким условиям возникновения перемешивания. Следует ли ожидать, что при $N \gg 1$ движение является практически стохастическим, и областями устойчивости (т. е. областями фазового пространства и значений параметров задачи, где движение является условно-периодическим) можно пренебречь? По существу, этот вопрос означает, что характер движения системы более существенно зависит от N , чем от других параметров задачи. В этом месте мы попадаем в плен широко распространенного представления о том, что законы статистической механики становятся применимы при больших N . В действительности вопросительный знак переходит лишь в другое место: какие N можно считать большими? Чем число $N = 10^{23}$, при котором законы статистической механики заведомо выполняются в доступных нашему вниманию объектах, отличается от числа $N = 10^2$, при котором появление стохастичности становится далеко не безусловным (как мы увидим ниже)?

Нелинейное волновое поле является наиболее удобным и наиболее изученным в настоящее время объектом для анализа условий перехода от регулярного движения к перемешивающемуся (стохастическому) в системе с большим числом степеней свободы. В этой главе будет рассмотрено поле со слабой нелинейностью, под которой подразумевается, что нулевое приближение в виде линейного волнового поля является достаточно хорошим приближением.

§ 7.1. Проблема Ферми — Паста — Улама (ФПУ)

Происхождение и формулировка проблемы. Перекрытие резонансов и граница стохастичности

Первая попытка убедиться в правильности ортодоксального взгляда на условия применимости законов статистической механики к реальным системам (большое число степеней свободы N

и сильное взаимодействие между ними) была предпринята в известной работе Ферми, Паста и Улама [110]. Ее авторы исходили из следующих соображений. Рассмотрим колеблющийся континуум — струну. Приблизительно этот континуум может быть заменен конечным числом колеблющихся точек — осцилляторов. Например,

$$\ddot{u}_m = (u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}) + \beta[(u_{m+1} - u_m)^3 - (u_m - u_{m-1})^3], \quad (1.1)$$

$$m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Система (1.1) описывает цепочку из N связанных ангармонических осцилляторов, у которых смещение u_m удовлетворяет некоторому граничному условию, например циклическому:

$$u_N = u_0.$$

Системе (1.1) приближенно соответствует уравнение колебаний струны:

$$u_{tt} = u_{xx}(1 + 3\beta u_x^2) + \gamma u_{xxxx}, \quad (1.2)$$

где $\gamma = a^2/12$, a — шаг цепочки.

Пусть теперь создана некоторая простая конфигурация струны, соответствующая возбуждению одной или нескольких низших мод струны. Если мы ожидаем статистическое поведение системы, то ее термализация означала бы передачу энергии из возбужденных мод во все остальные. Возбуждение новых мод должно происходить таким образом, чтобы энергии каждой из них в среднем были близки по значениям (равнораспределение энергий по степеням свободы). Эти рассуждения очевидным образом переносятся на цепочку осцилляторов (1.1). Необходимо лишь, чтобы N было достаточно велико (в работе [110] N достигало 64). Взаимодействие мод (или осцилляторов) осуществляется благодаря наличию нелинейных членов в уравнениях (1.1), (1.2). Поэтому даже при $\beta \ll 1$ решение системы (1.1) при больших N представляет серьезные трудности. В начале 50-х годов в Лос-Аламосе появилась возможность провести численное изучение системы (1.1) на ЭВМ, результаты которого и были приведены в статье [110] (ком. 1). Авторы были очень удивлены этими результатами. Вместо ожидавшейся термализации цепочки осцилляторов энергия из возбужденной моды передавалась лишь в несколько ближайших мод и дальше по спектру не распространялась. Общий характер движения системы носил условно-периодический характер без явных признаков стохастичности. Возникшее противоречие между исходными рассуждениями и результатом численного эксперимента получило название проблемы Ферми — Паста — Улама (ФПУ).

Дальнейшие исследования [111 — 113] подтвердили результаты, полученные в [110], и тем самым закрепили возникший парадокс. Его разрешение было впервые предложено Израилевым и Чириковым [114]. Оно основывалось на том, что для возникновения стохастичности необходимо выполнить некоторые специаль-

ные условия для нелинейности колебаний осцилляторов и энергии возбуждения системы. Эти условия не были выполнены в работах [110—113], что и привело к устойчивости системы и сохранению в ней условно-периодического движения.

Проведем качественный анализ условия появления стохастичности [114] в системе (1.1). Введем координаты q_k с помощью соотношений

$$u_m = (2/N)^{1/2} \sum_{k=1}^N q_k \sin(\pi km/N). \quad (1.3)$$

Они удовлетворяют уравнениям движения

$$q_k + \omega_k^2 \left[1 - \frac{3\beta}{4N} \omega_k^2 (2 - \omega_k^2) q_k^2 \right] q_k = \frac{\beta}{8N} \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{kk_1k_2k_3} q_{k_1} q_{k_2} q_{k_3}, \quad (1.4)$$

где $V_{kk_1k_2k_3}$ — известная функция k, k_1, k_2, k_3 и

$$\omega_k = 2 \sin(\pi k/2N). \quad (1.5)$$

Система (1.4) описывает колебания связанных осцилляторов. Если считать параметр β достаточно малым, то связь между осцилляторами мала и в нулевом приближении их можно считать невзаимодействующими. Тогда можно записать

$$q_k^{(0)} = c_k(t) \cos \vartheta_k, \quad (1.6)$$

$$\vartheta_k = \bar{\omega}_k t + \text{const}, \quad \bar{\omega}_k \equiv \omega_k + \delta\omega_k,$$

где $c_k(t)$ — амплитуды колебаний, а

$$\delta\omega_k = -\frac{3\beta}{16N} \omega_k^3 (2 - \omega_k^2) c_k^2 \quad (1.7)$$

— поправка к частоте за счет ангармонизма колебаний. Подстановка (1.6) в (1.4) дает первое приближение:

$$\ddot{q}_k + (\omega_k + \delta\omega_k)^2 q_k = \frac{\beta}{8N} \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{kk_1k_2k_3} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \cos \vartheta_{k_1} \cos \vartheta_{k_2} \cos \vartheta_{k_3}. \quad (1.8)$$

Отсюда видно, что в системе (1.8) могут возникать резонансы при условиях

$$n\bar{\omega}_k + \sum_{i=1}^3 n_i \omega_i \approx 0, \quad n, n_i = \pm 1. \quad (1.9)$$

Для определения ширины резонанса поступим аналогично тому, как это делалось в § 4.3. Подставляем (1.6) в (1.8) и удерживаем старшие члены. Это дает

$$-2\omega_k \dot{c}_k \sin \vartheta_k = \frac{\beta}{8N} \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{kk_1k_2k_3} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \cos \vartheta_{k_1} \cos \vartheta_{k_2} \cos \vartheta_{k_3}. \quad (1.10)$$

Оставим в (1.10) только резонансные члены, удовлетворяющие условию (1.9). Для оценки запишем лишь один такой член, например,

$$c_k \sim \frac{\beta V_{k k_1 k_2 k_3}}{64 N \omega_k} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \exp i(\vartheta_k + \vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_2} - \vartheta_{k_3}). \quad (1.11)$$

Пусть ширина резонанса определяется амплитудой Δc_k . Это означает, что ширина резонанса по частоте равна

$$\Delta \omega_k = \frac{d\bar{\omega}_k}{dc_k} \Delta c_k = \frac{d\delta\omega_k}{dc_k} \Delta c_k. \quad (1.12)$$

В частности, той же величиной $\Delta \omega_k$ определяется и расстройка резонанса. Поэтому интегрирование (1.11) по времени с учетом (1.6) и (1.12) дает оценку

$$\Delta \omega_k \sim \frac{\beta}{64 N \omega_k} V_{k k_1 k_2 k_3} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \frac{1}{\Delta \omega_k},$$

откуда

$$\Delta \omega_k \sim \left[\frac{\beta}{64 N \omega_k} V_{k k_1 k_2 k_3} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \frac{d\delta\omega_k}{dc_k} \right]^{1/2}. \quad (1.13)$$

Мы рассмотрим то, что ранее было названо изолированным резонансом. Очевидно, что ближайшие резонансы могут быть получены из свойств структуры спектра. Обозначим через Δ_k расстояние по частоте между соседними резонансами. Очевидно, что

$$\Delta_k \sim \omega_{k+1} - \omega_k \approx \frac{d\omega_k}{dk} = \frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi k}{2N}. \quad (1.14)$$

Отсюда условие возникновения стохастичности может быть записано как условие перекрытия резонансов

$$\bar{K} = \frac{\Delta \omega_k}{\Delta_k} \geq 1. \quad (1.15)$$

Его можно также переписать в виде

$$\beta \geq \beta_0, \quad (1.16)$$

где критическое значение β_0 определяется из условия $\bar{K} = 1$. Удобно, однако, ввести безразмерный параметр нелинейности, который согласно (1.2), (1.3) имеет вид

$$\epsilon \sim 3\beta\omega^2 u^2 \sim 3\beta E/N, \quad (1.17)$$

где E — полная энергия колебаний струны. Из формул (1.15) — (1.17) можно получить критерий стохастичности в виде [114]

$$\epsilon > \text{const}/k, \quad (1.18)$$

где $k \ll N$ — некоторый средний номер возбужденных мод. Таким образом, если условие (1.18) не выполнено и имеет место обратное неравенство

$$\epsilon < \text{const}/k, \quad (1.19)$$

то движение должно сохранять свой условно-периодический характер. Это является следствием теоремы КАМ и объясняет причины неудач работы [110].

Приведенные качественные соображения разъясняют парадокс ФПУ. Термализация струны (или цепочки осцилляторов) может произойти лишь при достаточно интенсивном возбуждении мод с не слишком малыми номерами k . Численные эксперименты Израилева и Чирикова [114, 115] подтвердили проведенный ими качественный анализ. Аналогичная граница стохастичности возникает и в двумерной цепочке [116].

§ 7.2. Стохастизация волнового поля

Гамильтониан взаимодействующих фононов. Распадные спектры. Построение дискретного отображения. Условие устойчивости и условие стохастичности. Роль числа степеней свободы. Энтропия Колмогорова в многомерной системе

Приведенный выше пример задачи ФПУ явился лишь небольшой иллюстрацией анализа рождения перемешивающегося движения в системе с большим числом степеней свободы. Перейдем к исследованию нелинейного волнового поля с более общей точки зрения (ком. 2). Запишем гамильтониан нелинейного волнового поля в виде разложения

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \sum_k \dot{u}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 u_k^2 + \\
 & + \frac{1}{3} \beta \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k_1 k_2 k_3} u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) + \\
 & + \frac{1}{4} \beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} V_{k_1 k_2 k_3 k_4} u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} u_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + \dots, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

где β — малый параметр разложения по степеням переменной u . В выражении (2.1) мы ограничиваемся разложением до β^2 , т. е. до u^4 . Функция $\delta(k)$ понимается как символ Кронекера $\delta_{k,0}$, если спектр волновых чисел k — дискретный, и $\delta(k)$ — обычная δ -функция Дирака, если спектр волновых чисел непрерывный и суммирование по k следует заменить интегрированием.

Выражение (2.1) можно рассматривать как энергию системы слабо взаимодействующих осцилляторов или (что более употребительно) фононов. Ядра $V_{k_1 k_2 k_3}$, $V_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ удовлетворяют свойствам симметрии

$$V_{k_1 k_2 k_3} = V_{k_2 k_1 k_3} = V_{k_1 k_3 k_2} = \dots,$$

$$V_{k_1 k_2 k_3 k_4} = V_{k_2 k_1 k_3 k_4} = V_{k_2 k_1 k_4 k_3} = \dots$$

Спектр частот $\omega_k = \omega(k)$ предполагается дискретным с характерным расстоянием между гармониками $\sim \Delta k$ и с расстоянием

между частотами

$$\Omega_k = \frac{d\omega_k}{dk} \Delta k. \quad (2.2)$$

Нам предстоит решить вопрос об условиях, при которых возникает термодинамически равновесный фононный газ. Остановимся предварительно на двух вспомогательных вопросах.

Первый из них связан с возможностью резонансного взаимодействия фононов. Мы уже видели в предыдущем параграфе, что резонанс между несколькими модами играет выделенную роль в эволюции переменных задач. В общем случае условие резонанса можно записать в виде

$$\sum_j n_j \omega_j = 0, \quad (2.3)$$

где n_j — какие-либо целые (положительные и отрицательные) числа. Однако в рассматриваемой задаче, как будет видно дальше, основную роль будет играть частный случай условия (2.3):

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad k = k_1 + k_2, \quad (2.4)$$

описывающий процесс взаимодействия трех волн: распад волны с импульсом k на волны с импульсами k_1, k_2 или слияние волн с импульсами k_1, k_2 в одну волну с импульсом k (рис. 7.1). Уравнения (2.4) обычно интерпретируются как законы сохранения

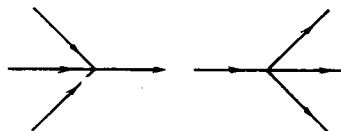
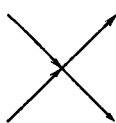
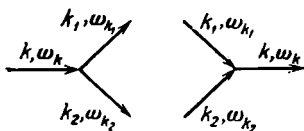


Рис. 7.1. Трехволновые процессы распада (а) и слияния (б) волн.

Рис. 7.2. Примеры четырехволновых процессов.

энергии и импульса при взаимодействии фононов. Появление дополнительно к уравнению для частот (2.3) еще и закона сохранения импульса обусловлено наличием δ -функций в гамильтониане (2.1), выражающих его трансляционно-инвариантные свойства. Аналогично (2.4) можно, например, записать четырехволновые резонансные взаимодействия в виде процессов (рис. 7.2), для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \omega_{k_1} + \omega_{k_2} &= \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, & k_1 + k_2 &= k_3 + k_4, \\ \omega_{k_1} &= \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, & k_1 &= k_2 + k_3 + k_4. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система (2.4), в которой $\omega_k = \omega(k)$, может быть рассмотрена как система уравнений относительно k, k_1, k_2 . Она не всегда имеет решение. Это зависит от вида функции $\omega(k)$. В зависимости от того, существуют или нет решения уравнений (2.4), спектр волн

$\omega(k)$ называется соответственно распадным или нераспадным. Спектр волн может быть нераспадным относительно трехволновых взаимодействий, но распадным относительно четырехволновых взаимодействий; нераспадным в одномерном случае, но распадным в двумерном случае, и т. д. На рис. 7.3 даны примеры нераспадных (а) и распадных (б) спектров в одномерном трехволновом

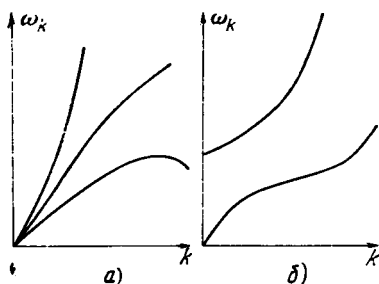


Рис. 7.3. Примеры нераспадных (а) и распадных (б) спектров в одномерном трехволновом случае.



Рис. 7.4. Пример графического решения системы (2.4) в одномерном случае.

случае. Графический способ решения вопроса о существовании решения системы (2.4) приведен на рис. 7.4.

Предположим для простоты, что в гамильтониане (2.1) можно пренебречь членами 4-го и более высоких порядков по u . Это приводит к следующим уравнениям движения:

$$\ddot{u}_{k_1} + \omega_{k_1}^2 u_{k_1} = -\beta \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k_1 k_2 k_3} u_{k_2} u_{k_3} \delta(k_1 - k_2 - k_3). \quad (2.6)$$

Остановимся на понятии распадной неустойчивости [70, 108]. В нулевом приближении

$$u_k = u_k^{(0)} \cos(\omega_k t + \varphi_{k, (0)}). \quad (2.7)$$

Пусть теперь возбуждена лишь одна волна u_k с $k_3 = k$ конечной амплитуды, а волны с k_1, k_2 в (2.6) рассматриваются как бесконечно малые возмущения с амплитудами u_{k_1}, u_{k_2} . Из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{k_1} + \omega_{k_1}^2 u_{k_1} &= -\beta V_{k_1 k_2 k} u_{k_2}^{(0)} u_k^{(0)} \cos(\omega_k t + \varphi_{k, (0)}), \\ \ddot{u}_{k_2} + \omega_{k_2}^2 u_{k_2} &= -\beta V_{k_2 k_1 k} u_{k_1}^{(0)} u_k^{(0)} \cos(\omega_k t + \varphi_{k, (0)}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Положим

$$u_{k_1} = c_1(t) \cos \omega_{k_1} t, \quad u_{k_2} = c_2(t) \cos \omega_{k_2} t.$$

Подставляем эти выражения в (2.8), оставляем только резонансные члены и пренебрегаем членом $\ddot{c}_{1,2}$. Это дает

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{\beta V}{2\omega_{k_1}} u_k^{(0)} c_2, \quad \dot{c}_2 = \frac{\beta V}{2\omega_{k_2}} u_k^{(0)} c_1, \\ V_{k_1 k_2 k} &= V_{k_2 k_1 k} \equiv V. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9) легко следует, что

$$c_{1,2} = c_{1,2}(0) \exp(\pm v_k t),$$

где инкремент неустойчивости v_k равен

$$v_k = \frac{\beta |V u_k^{(0)}|}{2 (\omega_{k_1} \omega_{k_2})^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Описанная распадная неустойчивость фиктивна в том смысле, что она дает временную эволюцию амплитуд волнового триплета лишь на начальном интервале времени. В дальнейшем, когда амплитуды нарастают, начинают работать отброшенные нелинейные члены и уравнения (2.8) теряют применимость. Мы рассмотрим этот процесс позднее.

Второй вспомогательный вопрос, на котором следует остановиться, связан с определенным представлением правой части в уравнениях движения (2.6). Здесь мы воспользуемся теми же рассуждениями, что и в § 6.3 при переходе от выражения (6.3.15) к (6.3.17). Подставим нулевое приближение (2.7) в (2.6) и в (2.4):

$$\begin{aligned} \ddot{u}_k + \bar{\omega}_k^2 u_k = & -\beta \sum_{k_1, k_2} V_{k k_1 k_2} u_{k_1}^{(0)} u_{k_2}^{(0)} \delta(k - k_1 - k_2) \times \\ & \times \cos(\omega_{k_1} t + \varphi_{k_1, (0)}) \cos(\omega_{k_2} t + \varphi_{k_2, (0)}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь величина $\bar{\omega}_k$ образована следующим образом. Из (2.1) учитывается член $\sim \beta^2$ для того, чтобы выделить из него нелинейную добавку к частоте ω_k . Тогда

$$\bar{\omega}_k \approx \omega_k + \frac{3}{2} \beta^2 \frac{1}{\omega_k} \sum_{k_1} V_{k, -k, k_1, -k_1} (u_{k_1}^{(0)})^2, \quad (2.12)$$

причем точное знание численного коэффициента во втором члене в (2.12) не требуется. В правой части (2.11) зависимость от времени можно представить в виде суммы слагаемых следующего типа:

$$\exp[\pm i(\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2}) t].$$

Если считать, что расстояние между гармониками Ω_k (2.2), матричные элементы $V_{k k_1 k_2}$ и амплитуды $u_k^{(0)}$ медленно меняются с изменением k , то приближенно можно записать

$$\begin{aligned} \ddot{u}_k + \bar{\omega}_k^2 u_k \approx & -\frac{1}{4} \beta V u^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\Omega t) = \\ = & -\frac{1}{2} \beta V \frac{u^2}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где V , u , Ω — некоторые средние по пакету значения величин $V_{k k_1 k_2}$, $u_k^{(0)}$, Ω_k . Кроме того, как и в (6.3.18), мы пользуемся

неравенством

$$\Omega_k / (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \ll 1, \quad (2.14)$$

т. е. ширина интервала возбужденных частот велика по сравнению с характерным расстоянием между частотами. Если, в частности, $\omega_{\min} \ll \omega_{\max}$, то неравенство (2.14) просто означает, что

$$N = \omega_{\max} / \Omega \gg 1, \quad (2.15)$$

где N — число возбужденных мод.

Основное достижение, связанное с использованием аппроксимации (2.13) вместо (2.11), заключается в том, что непрерывная задача (2.11) сведена к задаче (2.13), в которой теперь явно можно ввести отображения с интервалом T . Здесь полезно напомнить, в чем заключается удобство введения отображения. Во-первых, явно выделены моменты времени, в которых происходит существенное изменение адиабатического инварианта осциллятора (это моменты действия δ -функций); во-вторых, коэффициент при δ -функциях явно учитывает изменение адиабатического инварианта (ком. 3).

Уравнение типа (2.12) подробно исследовано в гл. 4, и нам остается лишь воспользоваться этими результатами. Положим

$$u_k = (I_k \bar{\omega}_k)^{1/2} \exp(i\vartheta_k) + \text{к.с.}, \quad \dot{u}_k = i(\bar{\omega}_k I_k)^{1/2} \exp(i\vartheta_k) + \text{к.с.}$$

Тогда уравнение (2.13) эквивалентно модельной задаче со следующим гамильтонианом:

$$H_k \approx \bar{\omega}_k I_k + \frac{2\pi V_0}{\Omega_k} \left(\frac{I_k}{\omega_k} \right)^{1/2} \cos \vartheta_k \sum_n \delta(t - nT), \quad (2.16)$$

$$\vartheta_k = \bar{\omega}_k t + \varphi_{k,(0)}, \quad V_0 = \frac{1}{4} \pi \beta V \frac{I}{\omega}.$$

Гамильтониан (2.16) приводит, согласно (2.13), к следующему отображению между двумя последовательными действиями δ -функциональных толчков:

$$I_{k,(n+1)} = I_{k,(n)} + \Delta I_{k,(n)}, \quad (2.17)$$

$$\vartheta_{k,(n+1)} = \vartheta_{k,(n)} + 2\pi \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \frac{2\pi}{\Omega_k} \sum_{k_1} \frac{\partial \bar{\Delta \omega}_k}{\partial I_{k_1,(n)}} \Delta I_{k_1,(n)}.$$

Величина $\Delta I_{k,(n)}$ находится из уравнения движения

$$\dot{I}_k = - \frac{\partial H_k}{\partial \vartheta_k} = \frac{2\pi V_0}{\Omega_k} \left(\frac{I_k}{\omega_k} \right)^{1/2} \sin \vartheta_k \sum_n \delta(t - nT)$$

путем интегрирования в окрестности δ -функции:

$$\Delta I_{k,(n)} = \frac{2\pi V_0}{\Omega_k} \left(\frac{I_{k,(n)}}{\omega_k} \right)^{1/2} \sin \vartheta_{k,(n)}. \quad (2.18)$$

Последний член в уравнении для фазы в (2.17) учитывает изменение фазы за счет нелинейной добавки к частоте на интервале отображения $2\pi/\Omega_k$. Подстановка (2.18) в (2.17) дает

$$I_{k,(n+1)} = I_{k,(n)} + \frac{2\pi V_n}{\Omega_k} \left(\frac{I_{k,(n)}}{\omega_k} \right)^{1/2} \sin \vartheta_{k,(n)}, \quad (2.19)$$

$$\vartheta_{k,(n+1)} = \vartheta_{k,(n)} + 2\pi \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k_1} K_{kk_1,(n)} \sin 2\vartheta_{k_1,(n)},$$

где обозначено

$$K_{kk_1} = \left(\frac{2\pi}{\Omega_k} \right)^2 \omega_k V_0 \left(\frac{I_k}{\omega_k} \right)^{1/2} \frac{\partial \bar{\omega}_k}{\partial I_{k_1}}. \quad (2.20)$$

Если использовать выражение (2.12) для $\bar{\omega}_k$ и (2.16) для V_0 , то это дает вместо (2.20)

$$K_{kk_1} \sim \frac{\beta u_k}{\omega_k^2 \Omega_k^2} V V_{k,-k_1,k_1,-k_1}. \quad (2.21)$$

Выражению (2.21) для K_{kk_1} можно придать более изящный вид. Для этого обратимся к исходному гамильтониану (2.1). Из его структуры следует, что безразмерным параметром ангармонизма (который здесь служит также и возмущением) является величина

$$\epsilon_k = \beta u_k. \quad (2.22)$$

Кроме того, если отвлечься от детальной структуры матричных элементов $V_{k_1 k_2 k_3}$, $V_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ и считать их одного порядка, то

$$V \sim \omega_k^2, \quad V_{k,-k,k_1,-k_1} \sim \omega_k^2. \quad (2.23)$$

Тогда выражение (2.21) с помощью (2.22), (2.23) преобразуется в следующее:

$$K \sim \epsilon_k \frac{\omega_k^2}{\Omega_k^2} = \epsilon_k \omega_k^2 / \left(\frac{d\omega_k}{dk} \Delta k \right)^2. \quad (2.24)$$

Дальнейший анализ отображений (2.19) во многом напоминает исследование универсальной модели стохастичности в гл. 4 (см. формулу (4.1.9)). Начнем с первого уравнения в системе (2.19). Подставим выражение для V_0 из (2.16) в (2.18). Это дает

$$\Delta I_{k,(n)} = \frac{1}{2} \pi^2 \beta \left(\frac{I_{k,(n)}}{\omega_k} \right)^{1/2} \frac{V}{\omega \Omega_k} I_{k,(n)} \sin \vartheta_{k,(n)},$$

или, с учетом обозначения (2.22) и оценки (2.23),

$$\Delta I_{k,(n)} = \frac{1}{2} \pi^2 \epsilon_k \frac{\omega_k}{\Omega_k} I_{k,(n)} \sin \vartheta_{k,(n)}.$$

Таким образом,

$$\Delta I/I \sim \epsilon \omega / \Omega \ll 1, \quad (2.25)$$

т. е. изменение действия под влиянием одного толчка должно быть мало для применимости теории возмущения. Заметим, что в оценке (2.25) параметр ε мал, а параметр ω/Ω велик.

Теперь перейдем к уравнению для фаз в системе (2.19). Прежде всего, из выражения (2.24) для параметра K следует, что он может быть как малым, так и большим независимо от условия (2.25). В том случае, когда параметр K мал, изменение фаз при действии толчка остается малым так же, как и изменение действия. Очевидно, что в первом приближении этот случай можно считать устойчивым. Иначе обстоит дело при условии

$$K \sim \varepsilon \omega^2 \left| \frac{d\omega}{dk} \Delta k \right|^2 \gg 1. \quad (2.26)$$

Остановимся на нем подробнее. При $K \gg 1$ изменения фаз почти всюду велики. Действительно, имеем из (2.19)

$$\frac{\partial \theta_{k, (n+1)}}{\partial \theta_{k', (n)}} = \delta_{kk'} + 2K_{kk', (n)} \cos 2\theta_{k', (n)}. \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что имеет место растяжение фаз θ_k всюду, кроме малых областей $\sim 1/K$ в фазовом пространстве вблизи значений $\theta = \pi/4, 3\pi/4$. Таким образом, в фазовом пространстве волн при условии (2.26) развивается стохастическая неустойчивость. Из области стохастичности выпадают островки устойчивости, определяемые условием

$$K_{kk'} \cos 2\theta_{k'} \leq 1, \quad (2.28)$$

мера которых тем меньше, чем больше K .

Хотя аналогия уравнения для фаз в (2.19) с универсальным преобразованием в гл. 4 очевидна, тем не менее одно обстоятельство является принципиально новым: растяжение фазы θ_k происходит во многих «направлениях» $\theta_{k'}$, а именно в тех, для которых $K_{kk'} > 1$. Это приводит к важным физическим следствиям. Остановимся сначала на энтропии Колмогорова для такого рода системы.

В § 1.6 энтропия Колмогорова была введена из простых качественных соображений об эволюции в неустойчивом случае огрубленного фазового объема $\overline{\Delta\Gamma}$ (см. (1.6.9)):

$$\overline{\Delta\Gamma} = \Delta\Gamma_0 \exp(ht). \quad (2.29)$$

В том случае, когда имеется N неустойчивых степеней свободы с инкрементами неустойчивости h_i , выражение (2.29) легко обобщается:

$$\overline{\Delta\Gamma} = \Delta\Gamma_0 \exp\left(t \sum_{i=1}^N h_i\right). \quad (2.30)$$

Отсюда в соответствии с определением (1.6.11) находим динамическую энтропию Колмогорова:

$$h = \lim_{\Delta\Gamma_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \overline{\Delta\Gamma} = \sum_{i=1}^N h_i. \quad (2.31)$$

Грубо говоря, при наличии N неустойчивых направлений K -энтропия возрастает в $\sim N$ раз.

Выражение (2.31) легко использовать для рассматриваемого волнового поля. Из формулы (2.27) при условии (2.26) следует, что

$$\left| \frac{\partial \theta_{k,(n+1)}}{\partial \theta_{k',(n)}} \right| \sim K_{kk'} \gg 1, \quad (2.32)$$

где множитель $\cos 2\theta_{k',(n)}$ для простоты оценки опущен. Пусть теперь

$$D(\theta_{k,(n)}) = d\theta_{k_1,(n)} d\theta_{k_2,(n)} \dots d\theta_{k_N,(n)}$$

есть элемент объема на n -м шаге преобразования. Рассмотрим величину

$$\frac{D(\theta_{k,(n)})}{D(\theta_{k,(0)})} = \left| \frac{\partial \theta_{k_i,(n)}}{\partial \theta_{k_j,(0)}} \right| \quad (i, j = 1, \dots, N),$$

характеризующую изменение фазового объема за n шагов, которое выражается через соответствующий якобиан. Имеем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{D(\theta_{k,(n)})}{D(\theta_{k,(0)})} = \left| \frac{\partial \theta_{k_i,(n)}}{\partial \theta_{k_j,(n-1)}} \right| \left| \frac{\partial \theta_{k_i,(n-1)}}{\partial \theta_{k_j,(n-2)}} \right| \dots \left| \frac{\partial \theta_{k_i,(1)}}{\partial \theta_{k_j,(0)}} \right|.$$

Воспользуемся выражением (2.32). Это дает

$$D(\theta_{k,(n)}) \sim (N^2 K^N)^n D(\theta_{k,(0)}), \quad (2.33)$$

где K — некоторое характерное значение величины $K_{kk'}$ и N — число взаимодействующих волн. Подставляя выражение для $D(\theta_{k,(n)})$ из (2.33) в (2.31) вместо $\Delta\Gamma$, получаем

$$h \sim N \ln K + 2 \ln N \approx N \ln K \quad (2.34)$$

при $N \gg 1$. Отметим, что главный член в (2.34) соответствует обычному выражению для K -энтропии системы, в которой растяжение происходит независимо в N координатных направлениях фазового пространства. Поправочный член в (2.34) обусловлен в рассматриваемой модели тем, что различные степени свободы не независимы.

Итак, выражение (2.34) показывает в явном виде, что инкремент неустойчивости траекторий системы в фазовом пространстве возрастает в $\sim N$ раз по сравнению со случаем одной степени свободы. На основании этого нам следует ожидать, что время расщепления корреляций фаз волн должно соответственно уменьшиться в N раз. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий коррелятор:

$$\mathcal{R}_k(t) = \langle \exp i(\theta_{k,(n)} - \theta_{k,(0)}) \rangle, \quad (2.35)$$

где $n \approx 2\pi\Omega t$ ($n \gg 1$) и обозначено

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_1, (0)} d\vartheta_{k_2, (0)} \dots d\vartheta_{k_N, (0)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} D(\vartheta_{q, (0)}). \quad (2.36)$$

Один из способов его оценки заключается в следующем. Воспользуемся неравенством (2.26) и будем оставлять в рекуррентном соотношении для фаз (2.19) только наиболее быстро меняющиеся члены. Тогда

$$\vartheta_{k, (n)} - \vartheta_{k, (0)} \sim \omega_k t + \sum_{k_1} K_{kk_1} \sin \left\{ 2 \sum_{k_2} K_{k_1 k_2} \times \right. \\ \left. \times \sin \left[2 \sum_{k_3} K_{k_2 k_3} \dots \sin \left(2 \sum_{k_n} K_{k_{n-1} k_n} \sin 2\varphi_{k_n, (0)} \right) \right] \right\}. \quad (2.37)$$

Далее следует подставить (2.37) в (2.35) и пропзвести оценку интеграла методом стационарной фазы так, как это делалось в § 4.1 для случая одной фазовой переменной. Мы опустим эти громоздкие выкладки и приведем сразу результат:

$$\mathcal{R}_k(t) \sim \exp(-t/\tau_k + i\omega_k t), \quad (2.38)$$

где время релаксации τ_k равно

$$\tau_k = \frac{2}{\Omega_k N \ln K} = \frac{2}{|d\omega_k/dk| \Delta k N \ln K}. \quad (2.39)$$

Формула (2.39) содержит ожидаемый результат: время релаксации обратно пропорционально числу степеней свободы, по которым происходит перемешивание. В данном случае такими степенями свободы являются фазы. Из сравнения (2.34) и (2.39) следует соотношение для безразмерного времени релаксации (времени перемешивания фаз) $\tau_k \Omega_k$ и K -энтропии:

$$h \sim 1/\tau\Omega. \quad (2.40)$$

Соотношения (2.34), (2.39), (2.40) демонстрируют универсальность в системах колебательного или волнового типа. Ее можно сформулировать в виде следующих свойств:

1) при малых нелинейностях и возмущениях перемешивание происходит по фазам;

2) основной характеристикой перемешивания является параметр растяжения фаз K ;

3) существуют универсальные соотношения, связывающие параметр K с энтропией h и временем перемешивания τ (ком. 4).

В заключение параграфа заметим, что при условии $K \ll 1$ из определения (2.35) для коррелятора следует в первом приближении по K , что экспоненциальное убывание $\mathcal{R}_k(t)$ отсутствует. Поэтому условие

$$K_{kk_1} \sim 1 \quad (2.44)$$

можно принять в качестве границы стохастичности. Выражение (2.41) можно рассматривать как уравнение, которое определяет некоторую границу спектра k_0 , разделяющую область стохастизирующихся волн от области регулярных колебаний. Из (2.24), в частности, следует, что в областях аномальной дисперсии, где

$$\Omega_k = (d\omega_k/dk)\Delta k \rightarrow \infty,$$

должны происходить срыв стохастичности и появление областей устойчивого движения.

Наконец, полезно также отметить, что критерий стохастичности (2.26) может быть получен из условия перекрытия резонансов, подобно тому, как это делалось в § 7.1 для задачи Ферми — Паста — Улама.

§ 7.3. Кинетическое описание волнового поля

Метод уравнения Лиувилля. Потеря памяти о начальных условиях. Роль перемешивания

В предыдущем параграфе была выполнена основная работа: было показано, что при определенных условиях фазы волн стохастизируются. Это, как известно, и нужно для того, чтобы можно было получить кинетическое описание. Интересно, однако, проследить за тем, как возникает такое описание и как механизм перемешивания «вторгается» в обычную рутину вывода кинетического уравнения. В упрощенном варианте одной степени свободы (см. § 6.2) такая задача уже решалась. Здесь мы будем следовать близкому к изложенному в § 6.2 методу [118].

Перепишем гамильтониан (2.1) в переменных действие — угол (I_k, ϑ_k) :

$$H = H_0 + V_{\text{int}}, \quad H_0 = \sum_k \omega_k I_k, \quad (3.1)$$

$$V_{\text{int}} = \beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \right)^{1/2} [V_{k_1 k_2 k_3} \times$$

$$\times \exp [i (\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_2} + \vartheta_{k_3})] \delta(k_1 + k_2 + k_3) +$$

$$+ 3V_{k_1 k_2, -k_3} \exp [i (\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_2} - \vartheta_{k_3})] \delta(k_1 + k_2 - k_3) + \text{к. с.}] + O(\beta^2),$$

где нелинейная поправка к частоте ω_k включена в члены $\sim \beta^2$ (см. (2.12)).

Введем функцию плотности частиц в фазовом пространстве $f(I, \vartheta, t)$, удовлетворяющую уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} = \sum_k \left(\frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial f}{\partial I_k} - \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial I_k} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} \right), \quad (3.2)$$

$$f(I, \vartheta, t) \equiv f(I_1, \vartheta_1; I_2, \vartheta_2; \dots; t).$$

Функция f является периодической функцией фаз, и поэтому ее можно записать в виде разложения в ряд:

$$f(I, \vartheta, t) = \sum_{(n)} (f^{(n)}(I, t) \exp [i(n, \vartheta)] + \text{к. с.}),$$

$$(n, \vartheta) \equiv \sum_k n_k \vartheta_k, \quad f^{(n)} = (f^{(-n)})^*, \quad (n) \equiv n_1, n_2, \dots \quad (3.3)$$

Удобно перейти к представлению взаимодействия, чтобы избавиться от второго члена в левой части (3.2). В этом представлении разложение (3.3) выглядит следующим образом:

$$f(I, \vartheta, t) = \sum_{(n)} (f^{(n)}(I, t) \exp [i(n, \vartheta - \omega t)] + \text{к. с.}). \quad (3.4)$$

Далее мы будем пользоваться всюду представлением взаимодействия. Подставляя (3.4) в (3.2), получаем

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} = -i\beta [Q_{n, n+1} f^{(n+1)} \exp(-i[\omega]t) + Q_{n, n-1} f^{(n-1)} \exp(i[\omega]t)], \quad (3.5)$$

где

$$Q_{n, n\pm 1} = 3 \sum_{k_1, k_2, k_3} \left\{ V_{k_1, k_2, -k_3} \left(\frac{n_{k_1}}{2I_{k_1}} + \frac{n_{k_2}}{2I_{k_2}} - \frac{n_{k_3}}{2I_{k_3}} \pm \right. \right.$$

$$\left. \pm \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} \pm \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} \mp \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) \left(\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \right)^{1/2} \delta_{[k], 0} + \text{к. с.} \left. \right\},$$

$$[\omega] \equiv \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}, \quad [k] \equiv k_1 + k_2 - k_3. \quad (3.6)$$

Кроме того, в выражении для Q отобраны только резонансные члены, для которых выполняются распадные условия (2.4) и которые дают основной вклад в $\partial f / \partial t$.

При $t = 0$ разложение (3.4) имеет вид

$$f(I, \vartheta, 0) = \sum_n (f^{(n)}(I, 0) \exp [i(n, \vartheta)] + \text{к. с.}). \quad (3.7)$$

Обычно используемое для вывода кинетического уравнения приближение хаотических фаз заключается в следующем:

$$f(I, \vartheta, 0) = f(I), \quad (3.8)$$

т. е.

$$f^{(n)}(I, 0) = f(I) \delta_{n, 0}. \quad (3.9)$$

Так же, как и в § 6.2, мы сейчас покажем, что перемешивание создает такие условия для вывода кинетического уравнения, при которых необходимость в использовании гипотезы случайных начальных фаз (3.8) отпадает. Тем самым кинетическое описание системы возникает как естественное (внутреннее) свойство системы, а не как следствие некоторых (возможно, что и вполне правдоподобных) гипотез.

Совершим в уравнении (3.5) преобразование Лапласа:

$$f_p^{(n)} = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f^{(n)}(I, t) dt.$$

Это дает

$$p f_p^{(n)} - f^{(n)}(I, 0) = -i\beta (Q_{n,n-1} f_{p-i[\omega]}^{(n-1)} + Q_{n,n+1} f_{p+i[\omega]}^{(n+1)}). \quad (3.10)$$

Отсюда следует уравнение для $f_p^{(0)}$:

$$p f_p^{(0)} - f^{(0)}(I, 0) = -i\beta (Q_{0,-1} f_{p-i[\omega]}^{(-1)} + Q_{0,1} f_{p+i[\omega]}^{(1)}). \quad (3.11)$$

Проведем итерацию (3.11) до членов $\sim \beta^2$ включительно:

$$p f_p^{(0)} - f^{(0)}(I, 0) = -i\beta \left(Q_{0,-1} \frac{f^{(-1)}(I, 0)}{p-i[\omega]} + Q_{0,1} \frac{f^{(1)}(I, 0)}{p+i[\omega]} \right) - \beta^2 Q_{0,-1} Q_{0,1} \frac{f^{(0)}(I, 0)}{p^2 + [\omega]^2}. \quad (3.12)$$

Обратим внимание на то, что в выражении (3.12) не используются условия (3.8), (3.9), соответствующие приближению хаотических фаз. Это проявляется формально в присутствии членов, пропорциональных $f^{(\pm 1)}(I, 0)$. Более высокие гармоники начальных условий появляются при последующих итерациях.

Переходя к асимптотике $t \rightarrow \infty$, т. е. $p \rightarrow 0$, и возвращаясь к t -представлению, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}(I, t)}{\partial t} = & -i\beta [Q_{0,-1} \exp(-i[\omega]t) f^{(-1)}(I, 0) + \\ & + Q_{0,1} \exp(i[\omega]t) f^{(1)}(I, 0)] + \\ & + 4\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{-\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta([\omega]) \delta_{[k], 0} \times \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] f^{(0)}(I, t), \quad (3.13) \end{aligned}$$

где

$$\left[\frac{\partial}{\partial I} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}}.$$

Уравнение (3.13) имеет простую структуру. Член порядка β сохраняет информацию о начальных фазах системы благодаря наличию множителей $f^{(\pm 1)}(I, 0)$. Вся оставшаяся часть уравнения имеет фоккер-планковскую структуру и соответствует кинетическому уравнению Пригожина — Браута.

Введем теперь новую (крупнозернистую) функцию распределения $F(I, t)$, используя операцию огрубления по начальным фазам волн:

$$\begin{aligned} F(I, t) = & \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^1 d\vartheta_{k_1, (0)} d\vartheta_{k_2, (0)} \dots d\vartheta_{k_N, (0)} f^{(0)}(I, t) \equiv \\ & \equiv \langle f^{(0)}(I, t) \rangle, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где N — число степеней свободы, т. е. число возбужденных в системе колебаний.

Применим оператор округления «...» к уравнению (3.13). Это дает

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\beta \{Q_{0,-1} \langle \exp(-i[\omega]t) \rangle f^{(-1)}(I, 0) + Q_{0,1} \langle \exp(i[\omega]t) \rangle \times \\ \times f^{(1)}(I, 0)\} + 4\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta([\omega]) \delta_{[k], 0} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] F. \quad (3.15)$$

Обратим теперь внимание на то, что если частоты ω_k не зависят от амплитуд (т. е. нелинейность в частоте отсутствует), то

$$\langle \exp(\pm i[\omega]t) \rangle = \exp(\pm i[\omega]t)$$

и уравнение (3.15) не отличается от уравнения (3.13). Другими словами, операция усреднения по начальным фазам не приводит к кинетическому описанию для случая частот, не зависящих от амплитуд.

Ситуация, однако, меняется, если учесть поправку $\delta\omega_k$, связанную с членом $\sim\beta^2$ в гамильтониане (3.1). Выражение для $\delta\omega_k$ дается формулой (1.7). Тогда в уравнении (3.15) фазовая память системы связана с корреляторами (см. формулы (2.35), (2.36))

$$\mathcal{R}_{k_1, k_2, k_3}(t) = \langle \exp(\pm i[\bar{\omega}]t) \rangle = \langle \exp\{\pm i([\bar{\theta}(t)] - [\bar{\theta}(0)])\} \rangle. \quad (3.16)$$

Пусть выполнены условия перемешивания (2.26). Тогда согласно (2.38) корреляторы (3.16) экспоненциально затухают за время $\sim\tau_k$, определяемое формулой (2.39). Уравнение (3.15) переходит в следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 4\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta[\omega] \delta_{[k], 0} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] F. \quad (3.17)$$

Сделаем, прежде всего, два технических замечания. Всюду в (3.17) следовало бы писать не ω , а $\bar{\omega} = \omega + \delta\omega$. Это, однако, привело бы к появлению членов порядка β^4 , что является излишней точностью. В уравнениях (3.10)–(3.12) величина $\underline{\omega}$ считалась не зависящей от времени. Вместе с тем величина $\bar{\omega}$, на которую следует заменить ω , является функцией времени. Этой зависимостью также можно пренебречь, поскольку она является очень малой по сравнению с ω :

$$\tau_k \omega_k \sim \frac{\omega_k}{N\Delta k |d\omega_k/dk| \ln K} \sim \frac{\omega_k}{\max \omega_k} \frac{1}{\ln K} \ll 1.$$

Если условие перемешивания (2.26) не выполнено, то корреляторы $\mathcal{R}_{k_1 k_2 k_3}$ могут убывать со временем не быстрее, чем степенным образом, и их вкладом пренебрегать нельзя. В этом случае кинетическое описание (3.17) не возникает и память о начальных фазах в системе сохраняется.

Мы показали, таким образом, что хаотизация фаз волны, описанная в § 7.2, существенно используется при выводе кинетического уравнения (3.17) из первых принципов. Последнее предполагает непосредственное использование свойств динамики при движении с перемешиванием. Обратим также внимание на то, что кинетическое описание (3.17) возникает для функции распределения $F(I, t)$, определенной с помощью функции $f(I, \theta, t)$ соотношением (3.14).

§ 7.4. Кинетическое уравнение для фононов

Введем понятие моментов функции распределения $F(I, t)$:

$$\langle I_{k_1} \dots I_{k_m} \rangle = \int I_{k_1} \dots I_{k_m} F(I, t) (dI).$$

Умножая уравнение (3.17) на I_k и интегрируя по всем I , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d \langle I_k \rangle}{dt} = & 18\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \times \\ & \times (\delta_{k_1, k} + \delta_{k_2, k} - \delta_{k_3, k}) \delta_{k_1 + k_2, k} \times \\ & \times (\langle I_{k_2} I_{k_3} \rangle + \langle I_{k_1} I_{k_3} \rangle - \langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аналогичным образом можно построить бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений.

В теории твердого тела и в теории плазмы часто пользуются кинетическим уравнением для фононов. Оно получается из (4.1), если предположить, что вторые моменты расцепляются через первые:

$$\langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle = \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle, \quad (k_1 \neq k_2). \quad (4.2)$$

Предположение (4.2) аналогично гипотезе Больцмана, которая была им использована для вывода кинетического уравнения. Величина $\langle I_k \rangle$ пропорциональна среднему числу фононов с волновым вектором k . Подставляя (4.2) в (4.1), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle I_k \rangle}{\partial t} = & 18\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \times \\ & \times \{ 2 [\langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle + \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle] \times \\ & \times \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \delta_{k+k_1, k_2} - [\langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle + \\ & + \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle] \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \delta_{k_1 + k_2, k} \}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) является аналогом уравнения Больцмана. Его правая часть приводит к возрастанию энтропии.

Существенной особенностью уравнения (4.3) являются те условия, которые лежат в основе его получения. Мы показали, что таких условий два: первое связано с выполнением критерия перемешивания, второе — с расцеплением корреляторов типа (4.2). Эти условия, вообще говоря, взаимно независимы.

Комментарии к гл. 7

1. Вот как вспоминает о начале этих работ Станислав Улам [117]: «После войны, во время одного из своих частных посещений Лос-Аламоса, Ферми заинтересовался развитием и потенциальными возможностями электронных вычислительных машин. Он неоднократно обсуждал со мной характер будущих задач, которые можно было бы решать с помощью таких машин. Мы решили подобрать ряд задач для эвристической работы, когда в отсутствие замкнутых аналитических решений экспериментальная работа на ЭВМ, возможно, помогла бы понять свойства решений. Особенно плодотворным это могло бы оказаться в случае задач, касающихся асимптотического — долговременного или «глобального» — поведения нелинейных физических систем... Решение всех этих задач послужило бы подготовкой к установлению, в конечном счете, модели движений системы, в которой должно было бы наблюдаться «смешивание» и «турбулентность». Целью всего этого явилось получение скоростей смешивания и «термализация» в надежде, что результаты расчета смогут дать намеки на будущую теорию. Пожалуй, можно высказать догадку, что одна из побудительных причин такого выбора задач идет от давнего интереса Ферми к эргодической теории...».

2. Изложение этого и следующего параграфов следует работам [106, 14, 15].

3. При переходе от (2.11) к (2.12) следует более подробно оговорить ситуацию с начальными фазами $\Phi_{k,(0)}$. При получении выражения (2.12) молчаливо предполагается, что фазы $\Phi_{k,(0)}$ слабо изменяются с изменением k . Существует, однако, случай, когда изменение фаз $\Phi_{k,(0)}$ является быстрым и, в частности, случайным (при переходе от одной гармоники к другой). Естественно, что этот случай пуждается в особом анализе, который был проведен в [13] и, в наиболее полной форме, в [119].

4. Приведенные свойства не являются следствиями каких-либо теорем, т. е. не вытекают из каких-либо строгих доказательств. Однако до сих пор во всех случаях мы встречались именно с такого рода ситуацией. Поэтому следует оговорить, что возможны некоторые, может быть, не «типичные» случаи, когда решение вопроса о характеристиках перемешивания не сводится к приведенной схеме. Такое может произойти, например, в задачах, в которых фазы полей уже содержат априори случайный (внешний) элемент [119].

ГЛАВА 8

СТОХАСТИЧНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Нелинейные периодические волны (в дальнейшем — просто нелинейные волны) образуются в произвольных нелинейных средах в отсутствие диссипации. Они представляют собой особое движение некоторого периодического профиля волны со скоростью u и формально могут быть записаны в виде зависимости

$$y = y(x - ut).$$

Регулярные очень длинные волны, наблюдаемые часто на поверхности воды, дают наглядное представление о такого типа процессе.

Нелинейная волна представляет собой довольно сложную динамическую систему. Ее можно представить себе как пакет плоских волн, между которыми существует сильная связь. Поэтому задача о влиянии внешних возмущений на нелинейную волну содержит ряд особенностей по сравнению с задачами о возмущении траекторий частиц.

В этой главе понятия нелинейного резонанса и стохастичности будут распространены на новый класс динамических систем: нелинейные периодические волны (ком. 1).

§ 8.1. Стационарная динамика нелинейных волн

Фазовая плоскость. Особые точки и солитоны. Нелинейный закон дисперсии. Опрокидывание волны. Критическая скорость. Спектральные свойства нелинейных волн

Нелинейные периодические волны представляют собой частный случай волн, распространяющихся в заданном направлении. Это обстоятельство можно использовать для некоторого упрощенного описания волны. Рассмотрим, для определенности, нелинейное волновое уравнение в виде

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + F(y), \quad F(y) = dV(y)/dy. \quad (1.1)$$

Найдем его решение в форме бегущей волны:

$$y = y(\xi), \quad \xi = x - ut. \quad (1.2)$$

Скорость волны u следует рассматривать как некоторый параметр задачи. Из (1.1) и (1.2) следует

$$(c^2 - u^2)y'' + F(y) = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) эквивалентно уравнению движения нелинейного осциллятора с массой $(c^2 - u^2)$ в поле с потенциалом $V(y)$. Интеграл энергии имеет вид

$$E = \frac{1}{2}(c^2 - u^2)(y')^2 + V(y). \quad (1.4)$$

Теперь можно провести анализ различных решений на фазовой плоскости (y', y) . Он аналогичен тому, как это делалось в § 1.2. Физическим решениям соответствуют финитные, т. е. замкнутые траектории на фазовой плоскости. Через гиперболическую особую точку проходит особая траектория с энергией E_c . Этой траектории соответствует вырожденный случай нелинейной волны $y_c(x - ut)$ с бесконечным периодом. Такая волна представляет собой уединенный профиль возмущения среды — солитон, распространяющийся со скоростью u . Ярким примером солитона является цунами.

Из определения (1.2) для переменной ξ следует, что пространственный период волны равен

$$\lambda = \sqrt{2(c^2 - u^2)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dy}{\sqrt{E - V(y)}}, \quad (1.5)$$

где ξ_1 и ξ_2 — точки поворота в потенциальной яме $V(y)$. Введем также понятие волнового числа волны:

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Из (1.5) следует важное соотношение

$$k = k(E, u). \quad (1.6)$$

Оно определяет связь между волновым числом и скоростью волны. Зависимость этой связи от энергии E , т. е. от амплитуды волны, есть следствие нелинейности уравнения движения (1.3). Выражение (1.6) можно поэтому интерпретировать как нелинейный закон дисперсии волны. Переход к линейному случаю осуществляется в пределе $y \rightarrow 0$, $u = \omega/k$.

Переход от переменных (x, t) к одной переменной ξ приводит к упрощению задачи и одновременно к потере некоторой информации о нелинейной волне. Хотя при замене $\xi = x - ut$ в задачу вводится новый параметр u , тем не менее мы ничего не знаем о его допустимых значениях. Для выяснения этого обстоятельства следует рассмотреть исходную систему уравнений среды.

Рассмотрим в качестве примера задачу о нелинейных плазменных колебаниях, которая уже встречалась в § 1.2. Запишем

полную систему уравнений, описывающих эти колебания [21]:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad v_t + vv_x = \frac{e}{m} \Phi_{xx},$$

$$\Phi_{xx} = 4\pi e (\rho - \rho_0). \quad (1.7)$$

Здесь ρ и v — плотность и скорость среды, Φ — скалярный потенциал поля. Для решений в форме (1.2) находим из (1.7)

$$\rho (v - u) = \text{const} = -u,$$

$$E = 1/2 (\varphi')^2 - 2\omega_0^2 (2u\varphi^{1/2} - \varphi),$$

$$\varphi^{1/2} \equiv u - v, \quad \omega_0^2 = 4\pi e^2 \rho_0 / m. \quad (1.8)$$

Интеграл энергии (1.8) отличается от (1.2.11) лишь тем, что в последнем положено $u = 1$.

При $E = 0$ траектория проходит через точку $\varphi = 0$, и, следовательно, величина v достигает значения u . При этом плотность ρ обращается в бесконечность. Это явление называется опрокидыванием нелинейной волны. Решение системы (1.8) становится многозначным, а сама система (1.8) теряет смысл. Таким образом, особенность при $E = 0$ носит более сложный характер, чем это можно было бы себе представить из анализа только интеграла энергии E .

Рассмотрим еще один пример, который содержит одновременно оба типа особенностей, приводящих как к существованию солитона, так и к возможности опрокидывания волны. Это — модель ионно-звуковых колебаний плазмы [125], описываемых системой

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad v_t + vv_x = -\frac{e}{M} \Phi_x,$$

$$\Phi_{xx} = -4\pi (\rho - \rho_0 \exp(e\Phi/T_e)), \quad (1.9)$$

где ρ , v , M — плотность, скорость и масса ионов, T_e — температура электронов. Для решений типа (1.2) система (1.9) имеет интеграл энергии

$$2E = (u - v)^2 (v')^2 + 1 + uv + \exp(uv - v^2/2),$$

где для удобства дебаевский радиус $r_d = (T_e/4\pi e^2 \rho_0)^{1/2}$ и скорость полного звука $c = (T_e/M)^{1/2}$ положены равными единице. На рис. 8.1 приведено семейство фазовых траекторий на плоскости (v', v) при различных значениях E и $u = \text{const}$. Решение в виде солитона существует при $E = 0$ и при любом допустимом значении u . На рис. 8.2 изображено семейство фазовых траекторий для различных значений u при $E = \text{const}$. Из него видно, что для тех значений E , для которых существует периодическое решение, имеется критическое значение скорости u_c . Этой скорости соответствует опрокидывание волны. Величина u_c зависит от E , и при малых E $u_c \approx 1,6$.

Периодические решения вида (1.2) могут быть разложены в ряд Фурье:

$$y(x - ut) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp[ink(x - ut)]. \quad (1.10)$$

Зависимость a_n от n будем называть спектром волны. В случае, близком к линейному, амплитуды a_n быстро убывают с ростом n . Это позволяет ограничиться учетом первых нескольких членов в разложении (1.10).

Решения в виде нелинейных волн типа (1.2) описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому их анализ сводится к изучению свойств нелинейных колебаний, определяемых некоторой функцией Гамильтона. Так же, как и в § 1.2, можно ввести параметр N , определяющий характерное число гармоник a_n в спектре волны. Это означает, что при $n < N$ амплитуды a_n убывают не слишком быстро, в то время как при $n > N$ они являются экспоненциально малыми. Для всех приведенных

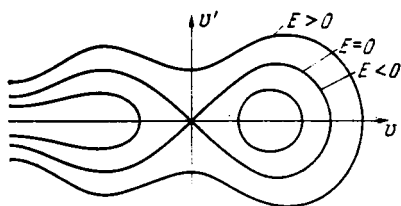


Рис. 8.1. Фазовая плоскость ионно-звуковых колебаний при $u = \text{const}$.

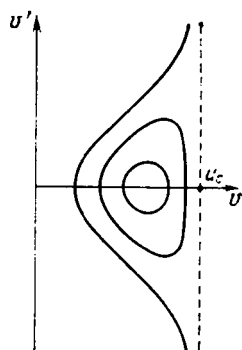


Рис. 8.2. Фазовая плоскость ионно-звуковых колебаний при $E = \text{const}$.

выше примеров такое N можно найти. Величина N характеризует степень ангармонизма нелинейной волны. В § 1.2 мы интерпретировали нелинейное колебание как приблизительно N сильно связанных гармонических колебаний с кратными частотами $n\omega$ ($1 \leq n \leq N$). Аналогично можно считать, что нелинейная периодическая волна представляет собой $\sim N$ сильно связанных плоских волн, имеющих одинаковые фазовые скорости u . Это представление в дальнейшем будет использовано.

§ 8.2. Возмущение нелинейных волн

Уравнения для фурье-компонент. Гамильтониан. Канонические уравнения движения. Скобки Пуассона

Для описания общей эволюции нелинейных волн существует ряд методов. Каждый из них связан с характерным классом решаемых задач. Как отмечалось выше, нелинейную волну можно представить как волновой пакет, состоящий из сильно связанных плоских волн. Поэтому можно себе представить, что для достаточно слабых возмущений такой волновой пакет не развалится. Более того, он может эволюционировать, изменяя свою геометрию в пространстве и во времени. Однако эти изменения можно

описать в рамках малых или медленных изменений параметров, характеризующих нелинейную волну в целом. Альтернативой такому описанию является учет изменений каждой в отдельности гармоники пакета.

Ниже мы будем рассматривать достаточно грубые эффекты возмущения нелинейных периодических волн. Поэтому ограничимся кратким изложением соответствующего гамильтонова метода [124]. Рассмотрим уравнение движения в виде

$$y_{,tt} = c^2 y_{,xx} + F(y) + \varepsilon \Phi(y, x, t), \quad (2.1)$$

где Φ — возмущение, а ε — безразмерный малый параметр возмущения. Зададим также периодические по координате граничные условия, которым должно удовлетворять решение

$$y(x + \lambda, t) = y(x, t) \quad (2.2)$$

и возмущение

$$\Phi(y(x + \lambda), x + \lambda, t) = \Phi(y, x, t). \quad (2.3)$$

Разложим y в ряд Фурье:

$$y(x, t) = \sum_n y_n \exp(inkx), \quad y_{-n} = y_n^*, \quad (2.4)$$

где $k = 2\pi/\lambda$. Аналогичное разложение можно записать для силы F и возмущения Φ :

$$F(y) = \sum_n F_n \exp(inkx), \quad F_{-n} = F_n^*,$$

$$\Phi(y, x, t) = \sum_n \Phi_n \exp(inkx), \quad \Phi_{-n} = \Phi_n^*.$$

Разложение $F(y)$ в ряд имеет следующий смысл. Пусть $F(y)$ представляется в виде следующего степенного ряда:

$$F(y) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)} y^k.$$

Тогда

$$F_n = F^{(0)} \delta_{n,0} + F^{(1)} y_n + F^{(2)} \sum_{n_1, n_2} y_{n_1} y_{n_2} \delta(n - n_1 - n_2) + \\ + F^{(3)} \sum_{n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n - n_1 - n_2 - n_3) + \dots \quad (2.5)$$

Аналогично представляется разложение возмущения.

Используя приведенные разложения, можно переписать уравнение (2.1) в виде бесконечной системы

$$\ddot{y}_n + n^2 k^2 c^2 y_n - F_n = \varepsilon \Phi_n. \quad (2.6)$$

В отсутствие возмущения ($\varepsilon = 0$) системе уравнений

$$\ddot{y}_n + n^2 k^2 c^2 y_n - F_n = 0 \quad (2.7)$$

может быть придана еще одна форма. Действительно, если рассматривать только решение типа нелинейной волны, распространяющейся со скоростью u , то вследствие (1.2) разложение (2.4) представимо также в виде

$$y(x, t) = \sum_n a_n \exp[ink(x - ut)], \quad (2.8)$$

т. е.

$$y_n = a_n \exp(-inkut). \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что

$$\dot{y}_n = -n^2 k^2 u^2, \quad (2.10)$$

и из сравнения с (2.7) получаем интегральное соотношение

$$u^2 = c^2 + \frac{1}{n^2 k^2} F_n. \quad (2.11)$$

которое является другой формой дисперсионного соотношения (1.6) (величина F_n/n^2 , естественно, не зависит от n).

Гамильтонову форму описания для уравнения движения (2.1) можно ввести различными способами. Один из простейших вариантов заключается в том, что уравнение (2.6) рассматривается как уравнение движения частицы. Тогда сразу можно записать функцию Гамильтона в виде

$$H = 1/2 \sum_n (\dot{y}_n \dot{y}_{-n} + n^2 k^2 c^2 y_n y_{-n}) + V[y] + \varepsilon \Psi[y; x, t], \quad (2.12)$$

где $V[y]$ и $\Psi[y; x, t]$ — функционалы от y_n , составленные следующим образом. Пусть $V(y)$ и $\Psi(y; x, t)$ разложены в степенные ряды по y :

$$V(y) = \sum_{h=0}^{\infty} V^{(h)} y^h, \quad \Psi(y; x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} \Psi^{(h)}(x, t) y^h, \quad (2.13)$$

причем

$$\frac{dV}{dy} = F(y), \quad \frac{d\Psi(y; x, t)}{dy} = \Phi(y; x, t).$$

Определим теперь выражения

$$V[y] = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx V(y), \quad \Psi[y; x, t] = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \Psi(y; x, t), \quad (2.14)$$

причем всюду в (2.14) под знаком интеграла следует подставить вместо y его разложение в ряд Фурье (2.4). Тогда простые вычисления с учетом (2.13) дают

$$V[y] = \sum_{h=0}^{\infty} V^{(h)} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_h} y_{n_1} y_{n_2} \dots y_{n_h} \delta(n_1 + n_2 + \dots + n_h), \quad (2.15)$$

$$\Psi[y; x, t] = \sum_n \sum_{h=0}^{\infty} \Psi_n^{(h)}(t) \sum_{n_1, n_2, \dots, n_h} y_{n_1} y_{n_2} \dots y_{n_h} \times \\ \times \delta(n + n_1 + n_2 + \dots + n_h).$$

Нетрудно, в частности, заметить, что

$$F^{(k-1)} = kV^{(k)}.$$

Гамильтониан в форме (2.12) существенно использует граничные условия (2.3). Представим его также в виде

$$H = H_0 + H_1, \quad H_1 = \varepsilon \Psi.$$

Уравнения движения (2.7) можно записать в следующем гамильтоновом виде:

$$\frac{d}{dt} \dot{y}_n = - \frac{\partial H}{\partial y_{-n}}, \quad \frac{d}{dt} y_n = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-n}}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.16) легко обобщить для произвольного движения с непрерывным спектром. Этот случай в дальнейшем рассматриваться не будет.

Пусть $Q(y)$ есть произвольная функция y и $Q = Q[y]$ — функционал от компонент y_n , полученный аналогично $V[y]$ (см. (2.14), (2.15)). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \sum_n \left(\frac{\partial Q}{\partial y_n} \dot{y}_n + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}_n} \ddot{y}_n \right) = \\ &= \sum_n \left(\frac{\partial Q}{\partial y_n} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-n}} - \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}_n} \frac{\partial H}{\partial y_{-n}} \right) \equiv [Q, H], \end{aligned} \quad (2.17)$$

где введено определение скобок Пуассона [.,.].

Приведенные выше формулы и уравнения представляют собой тот аппарат, который будет использован дальше для решения некоторых задач об эволюции нелинейных периодических волн.

§ 8.3. Нелинейный резонанс

Укороченные уравнения. Нелинейный резонанс. Модуляция параметров волны. Влияние пространственной структуры возмущения

Исследование возмущения нелинейной волны общего типа является трудной задачей. Однако при определенных условиях можно достаточно простым путем получить нетривиальные физические результаты. Опишем сначала качественную сторону рассматриваемого ниже приближения.

В конце § 8.1 отмечалось, что нелинейную периодическую волну можно рассматривать как волновой пакет, состоящий из $\sim N$ сильно связанных плоских волн. Между амплитудами этих волн a_n существует сильная корреляция. Она формально выражается в том, что все a_n являются определенными функциями двух параметров: H_0 и k . Далее будем считать нелинейность

волны очень сильной, т. е.

$$N \gg 1. \quad (3.1)$$

В этих условиях малые возмущения волны слабо изменяют интеграл энергии волны E , а также величину $H_0 = H_0(E)$. Одновременно мало изменяется и скорость волны $u = u(H_0, k)$. Вообще, следует ожидать, что спектральная структура волны и число N также изменяются слабо. Все это является следствием неравенства (3.1). Однако наиболее существенное утверждение связано с тем, что спектральные гармоники волны находятся в сильной связи между собой, и поэтому малые возмущения не могут разрушить эту связь. Такова качественная сторона применяемого ниже приближения. Его формальное выражение заключается в следующем (ком. 2).

Рассмотрим в качестве невозмущенного движения нелинейную периодическую волну. Для нее справедливы соотношения (2.7)–(2.11). Соответствующий ей гамильтониан равен H_0 . Представим решение возмущенной задачи (2.12) в виде

$$y(x, t) = \sum_n y_n \exp(in kx) = \sum_n a_n \exp[in(kx - \theta)],$$

$$y_n \equiv a_n \exp(-in\theta). \quad (3.2)$$

Разложение (3.2) основано на граничном условии (2.2). В нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) имеем, согласно (2.9),

$$\dot{H}_0 = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(H_0) = ku(H_0). \quad (3.3)$$

При наличии возмущения имеем, в соответствии с формулой (2.17),

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= [H_0, H] = [H_0, H_1] = \varepsilon [H_0, \Psi] = \\ &= \varepsilon \sum_n \left(\frac{\partial H_0}{\partial y_n} \frac{\partial \Psi[y; x, t]}{\partial \dot{y}_{-n}} - \frac{\partial H_0}{\partial \dot{y}_n} \frac{\partial \Psi[y; x, t]}{\partial y_{-n}} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если возмущение Ψ не зависит от «скорости» (т. е. от \dot{y}), то (3.4) можно упростить:

$$\dot{H}_0 = -\varepsilon \sum_n \dot{y}_{-n} \frac{\partial \Psi[y; x, t]}{\partial y_{-n}} = -\varepsilon \sum_n \dot{y}_n \frac{\partial \Psi[y; x, t]}{\partial y_n}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) является точным. Более сложно получить уравнение для фазы θ . Из (3.3) и (3.5) следует, что уравнение для θ имеет следующую структуру:

$$\dot{\theta} = \omega(H_0) + O(\varepsilon). \quad (3.6)$$

Произведем простой качественный анализ уравнения (3.6). При значениях ω , не слишком близких к нулю, изменение ω из-за возмущения имеет порядок

$$\Delta\omega = |d\omega/dH_0| \Delta H. \quad (3.7)$$

Это выражение необходимо сравнить со вторым членом в (3.6), имеющим порядок ε . Очевидно, что если отсутствуют какие-либо особые ситуации, то согласно (3.5) $\Delta H/H \sim \varepsilon$. Поэтому оба члена в (3.6) имеют один и тот же порядок по ε .

Иначе обстоит дело в том случае, когда возмущение в (3.5) может содержать резонансные члены. Появляются резонансные знаменатели, и ΔH существенно возрастает. Например, при нелинейном резонансе (см. § 1.3) $\Delta H \sim \varepsilon^{1/2}$, и можно ограничиться укороченным уравнением

$$\dot{\vartheta} = \omega(H_0(t)).$$

Как будет видно ниже, аналогичное положение имеет место и при резонансе возмущения с нелинейной волной.

Ограничимся для простоты случаем, когда Φ в (2.1) не зависит от y . Учитывая связь Φ и Ψ и подставляя в правую часть уравнения (3.5) невозмущенное значение (3.2) для y_n , получаем

$$\dot{H}_0 = -i\varepsilon\omega(H_0) \sum_n n a_n(H_0) \exp(in\vartheta) \Phi_n(t),$$

$$\dot{\vartheta} = \omega(H_0).$$

Система (3.8) является замкнутой и представляет собой укороченные уравнения для эволюции нелинейной волны. Пусть возмущение является периодическим по времени с частотой ν . Разложим $\Phi_n(t)$ в ряд:

$$\Phi_n(t) = \sum_l \Phi_{nl} \exp(-il\nu t).$$

Из (3.9) и (3.8) следует, что при выполнении условия

$$n\omega(H_r) - l\nu = 0$$

в некоторой точке $H_0 = H_r$ возникает резонанс. Вообще, для каждой пары чисел (n, l) может существовать значение $H_0^{(n,l)}$, при котором уравнение (2.10) удовлетворяется.

Как и в § 1.3, рассмотрим сначала случай изолированного резонанса. Это означает, что в уравнениях (3.8) основную роль играет один резонанс (3.10) в точке H_r , и всеми остальными членами в сумме в (3.8) можно пренебречь. Система (3.8) принимает вид*)

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon \mathcal{Y} \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= m\omega(I) - l\nu, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\omega(I) = \omega(H(I)) = \partial H / \partial I, \quad \mathcal{Y} = 2n |a_n| |\Phi_n|. \quad (3.12)$$

*) Индекс 0 при H для простоты записи опускается.

Уравнения (3.11) описывают изменение «действия» (I) и фазы (ψ) в окрестности резонанса (3.10). Относительная величина изменения $\Delta I/I$ мала. Поэтому можно считать $\mathcal{Y} \approx \text{const} = \mathcal{Y}(I_r)$ и разложить

$$\omega(I) \approx \omega(I_r) + \frac{d\omega(I_r)}{dI} (I - I_r),$$

$$H_r = H(I_r).$$

Отсюда находим первый интеграл системы (3.11):

$$\frac{1}{2} n \frac{d\omega(I_r)}{dI} (I - I_r)^2 - 2\epsilon \mathcal{Y} \sin \psi = \mathcal{H}. \quad (3.13)$$

Величина \mathcal{H} является также эффективным гамильтонианом для нелинейного резонанса с канонической парой $(I - I_r, \psi)$. Уравнение (3.13) совпадает с (1.3.10), и поэтому дальнейший его анализ будет аналогичен. Из (3.13) следует, что величина $\Delta I = I - I_r$ и ψ колеблются со временем, что приводит к периодической модуляции параметров волны. Ширина резонанса по действию равна

$$\max \Delta I = \left[\frac{4\epsilon \mathcal{Y}}{m |\omega'(I_r)|} \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

Фурье-амплитуды нелинейной волны a_n являются функциями одной переменной I , и поэтому их значения также периодически изменяются со временем пропорционально ΔI :

$$a_n(I) = a_n(I_r) + \frac{da_n(I_r)}{dI} \Delta I. \quad (3.15)$$

Аналогичное колебание испытывает и скорость волны, так как

$$u = \frac{1}{k} \omega(I) = \frac{1}{k} [\omega(I_r) + \omega'(I_r) \Delta I]. \quad (3.16)$$

Таким образом, при резонансном взаимодействии нелинейной волны с внешним возмущением возникает своеобразное связанное состояние поля с волной. Это взаимодействие в первом приближении не разрушает волну, а приводит к периодической модуляции ее параметров во времени. Максимальное значение частоты модуляции (частоты фазовых колебаний) согласно (3.13), (3.14) равно

$$\Omega = |\omega'(I_r)| \max \Delta I = \left[\frac{4\epsilon}{n} \mathcal{Y} |\omega'(I_r)| \right]^{1/2}. \quad (3.17)$$

Величина (3.17) определяет с помощью формулы (3.16) глубину модуляции скорости волны:

$$\max \Delta u = \max [u(I) - u(I_r)] = \Omega/k. \quad (3.18)$$

Ширина резонанса (3.14), (3.17), (3.18) зависит от пространственного спектра внешнего возмущения. Действительно, условие резонанса (3.10) выделяет при взаимодействии n -ю гармонику

волны, амплитуда которой входит в величину возмущения (см. (3.12)). Так как при $n > N$ амплитуды a_n становятся экспоненциально малыми (см. § 8.1), то отсюда следует, что ширина резонанса сильно уменьшается. Причину этого легко понять из следующих рассуждений. Учтем, что ширина горба нелинейной волны (в частности, ширина солитона) имеет порядок

$$\delta_s \sim \frac{1}{kN} = \frac{\lambda}{2\pi N}.$$

Тогда условие $n > N$ означает, что длина волны возмущения меньше ширины горба волны (или ширины солитона). Таким образом, возмущение является мелкомасштабным и влияет на волну только некоторым усредненным образом.

§ 8.4. Стохастическая неустойчивость нелинейной волны

Расстояние между резонансами. Условия стохастичности. Переменные действие — угол. Уравнение диффузии нелинейной волны

Вернемся снова к уравнению (3.8) и перепишем его с учетом разложения (3.9):

$$\dot{H} = -i\epsilon\omega(H) \sum_n n a_n(H) \sum_l \Phi_{nl} \exp[i(n\theta - lvt)], \quad (4.1)$$

где нулевой индекс при H для простоты опущен. В предыдущем параграфе был рассмотрен случай одного изолированного резонанса

$$n\omega(I_r) = \nu$$

(переход от переменной H к переменной I осуществляется с помощью формулы (3.12)). В общем случае, когда резонансов много, их перекрытие означает появление стохастичности. Задача (4.1) с формальной точки зрения мало отличается от задачи о нелинейном осцилляторе во внешнем поле. Некоторое отличие составляет лишь определенная структура правой части в (4.1).

Обозначим через $I_{n,l}$ то значение величины I , при котором выполняется условие резонанса (3.10):

$$n\omega(I_{n,l}) = l\nu. \quad (4.2)$$

Ближайшие к (4.2) резонансы находятся из условия

$$(n \pm 1)\omega(I_{n \pm 1, l}) = l\nu \quad (4.3)$$

или из условия

$$n\omega(I_{n, l \pm 1}) = (l \pm 1)\nu. \quad (4.4)$$

Найдем расстояние между резонансами

$$\delta\omega_{\alpha\beta} = |\omega(I_{n \pm \alpha, l \pm \beta}) - \omega(I_{n, l})|, \quad \alpha = 0, 1, \quad \beta = 0, 1. \quad (4.5)$$

В случае (4.3) имеем

$$\delta\omega_{10} = \left(\frac{l}{n} - \frac{l}{n+1} \right) \nu \approx \frac{l}{n^2} \nu = \frac{\omega^2}{l\nu} = \frac{\omega}{n}. \quad (4.6)$$

Подстановка (4.4) в (4.5) дает

$$\delta\omega_{01} = v/n = \omega/l. \quad (4.7)$$

Наконец, при больших n и l может оказаться существенным еще один случай:

$$\delta\omega_{11} = \left| \frac{l}{n} - \frac{l+1}{n+1} \right| v \approx \frac{|n-l|}{n^2} v, \quad |n-l| \geq 1. \quad (4.8)$$

При $n \sim l \gg 1$ и $|n-l| \sim 1$ величина $\delta\omega_{11}$ оказывается существенно меньше, чем $\delta\omega_{10}$ и $\delta\omega_{01}$, что вытекает из сравнения выражения (4.8) с (4.6) и (4.7).

Теперь можно записать условие возникновения стохастичности как условие перекрытия резонансов

$$K = (\Delta\omega/\min \delta\omega)^2 \geq 1, \quad (4.9)$$

где ширина резонанса $\Delta\omega = \Omega$ определяется формулой (3.17). Подставляя формулы (3.12), (3.17), (4.6)–(4.8) в условие (4.9), получаем следующие три случая:

$$\begin{aligned} K_{10} &= \frac{8\epsilon n^2 |a_n \Phi_n \omega'|}{\omega^2} \geq 1 \quad (n \gg 1, l \sim 1), \\ K_{01} &= \frac{8\epsilon n^2 |a_n \Phi_n \omega'|}{v^2} \geq 1 \quad (n \sim 1, l \gg 1), \\ K_{11} &= \frac{8\epsilon n^4 |a_n \Phi_n \omega'|}{|n-l|^2 v^2} \geq 1 \quad (n, l \gg 1, |n-l| \sim 1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Выполнение какого-либо из условий (4.10) означает, что фаза волны θ (см. (3.3)) становится случайной функцией и ее корреляция экспоненциально убывает со временем.

Нелинейная волна покрывается случайной рябью, и ее эволюцию можно описать с помощью кинетического уравнения. Для получения такого уравнения убедимся сначала в том, что переменные (I, θ) действительно являются канонически сопряженной парой. Запишем гамильтониан возмущенной волны в виде

$$H = H_0[y, \dot{y}] + \epsilon \Phi[y; x, t]. \quad (4.11)$$

Ограничимся, как и в предыдущем параграфе, случаем

$$\Psi[y; x, t] = \sum_n y_{-n} \Phi_n(t).$$

Используя определение I в (3.12) и разложение для y в ряд Фурье в форме (3.2), перепишем выражение (4.11) следующим образом:

$$H = H_0(I) + \epsilon \sum_n a_{-n}(I) \exp(in\theta) \Phi_n(t). \quad (4.12)$$

Составим из (4.12) формальные выражения

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -i\epsilon \sum_n n a_{-n}(I) \exp(in\theta) \Phi_n(t), \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \epsilon \sum_n \frac{da_{-n}(I)}{dI} \exp(in\theta) \Phi_n(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Нетрудно видеть, что уравнение для \dot{I} эквивалентно первому уравнению в (3.8). Прямым дифференцированием правых частей в (4.13) убеждаемся в справедливости равенства

$$\partial \dot{I} / \partial I = -\partial \dot{\theta} / \partial \theta.$$

Отсюда следует, что переменные (I, θ) являются канонически сопряженной парой для гамильтониана в форме (4.12).

Теперь нетрудно записать уравнение Фоккера — Планка для функции распределения $f(I, t)$, которое получается в результате усреднения по случайной фазе θ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial f}{\partial I}, \quad (4.14)$$

где коэффициент диффузии $D(I)$ определяется стандартным выражением

$$D(I) = \frac{1}{t_0} \langle [I(t_0) - I(0)]^2 \rangle. \quad (4.15)$$

Здесь скобки «...» означают, как и ранее, усреднение по фазе. Время t_0 должно быть велико по сравнению со временем затухания фазовых корреляций и мало по сравнению со временем диффузии. Подставляя в (4.15) выражение для действия из (4.13), имеем

$$D = -\varepsilon^2 \sum_{n_1, n_2} n_1 n_2 a_{n_1} a_{n_2} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt_1 \times \\ \times \int_0^{t_0} dt_2 \Phi_{n_1}(t_1) \Phi_{n_2}(t_2) \langle \exp \{i [n_1 \theta(t_1) + n_2 \theta(t_2)]\} \rangle. \quad (4.16)$$

Используя разложение (3.9) для $\Phi_n(t)$ и удерживая в (4.16) лишь старший по t_0 член, получаем

$$D \approx \pi \varepsilon^2 \sum_n n^2 |a_n(I)|^2 \sum_l |\Phi_{nl}|^2 \delta(n\omega - l\nu). \quad (4.17)$$

Выражение (4.17) принципиально не отличается от формулы (3.2.23) для нелинейного осциллятора.

Уравнение (4.14) описывает медленную диффузию параметров волны (энергии и амплитуды) в поле периодического возмущения. Оценим величину D . Во многих типичных ситуациях при $n \leq N$

$$a_n \sim \frac{a(I)}{N} \left(\frac{n}{N} \right)^{\nu},$$

где a — амплитуда волны, и при $n \gg N$

$$a_n \sim \exp(-n/N).$$

(Например, для уравнения Кортевега — де Вриза $\gamma = 0$.) Примем

также для простоты, что в области допустимых значений l в формуле (4.17) амплитуды Φ_{nl} приблизительно постоянны. Тогда величина D легко оценивается следующим образом:

$$D \approx \pi \varepsilon^2 a^2 (I) \Phi_0^2 \frac{1}{N^2} \sum_n n^2 \left(\frac{n}{N} \right)^{2\nu} \frac{1}{\delta\omega},$$

где $\Phi_0 \sim |\Phi_{nl}|$. Если, например, имеет место случай (4.7) $\delta\omega = \delta\omega_{01}$, то

$$D \sim \pi \varepsilon^2 a^2 (I) \Phi_0^2 \frac{N^2}{\nu}. \quad (4.18)$$

Величина N также является функцией I , и поэтому задача об эволюции энергии H (или действия I) волны оказывается замкнутой благодаря уравнениям (4.14), (4.18).

Во многих реальных случаях связь между I , H и N является степенной:

$$H \sim ka^{\nu_1}, \quad \omega \sim ka^{\nu_2}, \quad N \sim (1/k) a^{\nu_3}, \quad (4.19)$$

где для удобства все величины выражены через амплитуду волны a . Из определения I (3.12) и соотношений (4.19) следует

$$I \sim a^{\nu_1 - \nu_2}, \quad a \sim I^{1/(\nu_1 - \nu_2)}. \quad (4.20)$$

Подстановка (4.19), (4.20) в (4.18) дает выражение для коэффициента диффузии волны:

$$D \sim \frac{\pi \varepsilon^2 \Phi_0^2}{\nu k^2} I^{2(1+\nu_3)/(\nu_1 - \nu_2)}. \quad (4.21)$$

Уравнение эволюции волны (4.14) можно переписать теперь в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D_0}{k^2} \frac{\partial}{\partial I} I^{2(1+\nu_3)/(\nu_1 - \nu_2)} \frac{\partial f}{\partial I}. \quad (4.22)$$

Отсюда следует, что для больших t

$$\langle I \rangle \sim \frac{1}{k^2} t^{(\nu_1 - \nu_2)/2(\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - 1)}. \quad (4.23)$$

Используя снова формулы связи (4.19), (4.20), получаем из (4.23) окончательно

$$\langle H \rangle \sim k^{(\nu_2 + \nu_1)/(\nu_2 - \nu_1)} t^{\nu_1/2(\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - 1)}. \quad (4.24)$$

Выражение (4.24) определяет не только скорость роста средней энергии волны, но и ее спектр (показатель при волновом числе k).

Комментарии к гл. 8

1. Интенсивное исследование нелинейных задач привело к построению нового метода решения нелинейных волновых уравнений, основанного на обратной задаче рассеяния. Начало этим исследованиям было положено зна-

менитой работой [123]. Метод обратной задачи рассеяния позволяет для многих нелинейных волновых уравнений найти точное решение задачи Коши [122]. Эти решения описывают регулярные (не стохастические) движения среды. Они охватывают довольно широкий класс известных (типичных) нелинейных волновых уравнений. Физическая реальность, однако, представляет нам значительно более богатую картину явлений, так как она включает в себя различные виды турбулентного движения, бифуркационные явления и т. п. Содержание настоящей главы связано с такими моделями, которые допускают появление стохастического (турбулентного) движения.

Различные примеры нелинейных сред и нелинейных волновых движений содержатся в книгах [120, 121]. Обзор явлений, связанных с появлением стохастичности в нелинейных волнах, приведен в [124].

2. Проводимый ниже анализ следует работе [126]. Аналогичный метод был использован для исследования резонансного взаимодействия нескольких нелинейных волн [127, 128].

ГЛАВА 9

СТОХАСТИЧНОСТЬ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Эта и последующие три главы будут посвящены анализу квантовых динамических систем. Могут ли уравнения квантовой динамики рождать «хаос» (в отсутствие внешних случайных сил и параметров), подобно тому, как это имеет место в классических динамических системах? Несмотря на то, что поставленный вопрос может показаться достаточно разумным, в нем содержится слишком большая неопределенность. Она связана с тем, что многие понятия механики, которые существенно используются при анализе стохастичности в классическом случае, теряют свой смысл в квантовой механике. Вместе с тем из принципа соответствия следует, что в условиях, близких к классическим ($\hbar/I \ll 1$, I — характерное действие системы), все результаты квантовой динамики должны быть близки к результатам классической динамики. Это утверждение и ряд других соображений, приводимых ниже, показывают, что вопрос о зарождении «хаоса», или стохастичности, в квантовой механике нуждается в более точной постановке, использующей понятия квантовой теории.

Однако прежде всего следует «пересмотреть» понятия, используемые в классической теории стохастичности, и выявить трудности, возникающие при попытках их перенесения в квантовую теорию.

§ 9.1. Квантовые K -системы

Сравнение классических и квантовых систем. Проблема устойчивости. Проблема интегралов движения и интегрируемости. Особенности квазиклассического приближения. Квантовые K -системы и постановка задачи

Исследование стохастичности в классических системах определялось главным образом следующими двумя проблемами: проблемой устойчивости системы и проблемой обоснования статистической механики. В гл. 1 было показано, каким образом они связаны между собой. Напомним, что хаотическое движение классической системы возникает как результат наиболее сильной

неустойчивости системы. Эта неустойчивость, называемая локальной, приводит к перемешиванию траекторий в фазовом пространстве, расцеплению корреляций соответствующих переменных, релаксации к равновесному распределению, разрушению интегралов движения и т. д. По существу, все методы исследования условий возникновения стохастичности основаны на анализе свойств локальной устойчивости траекторий системы в фазовом пространстве.

В этом месте нам легко перейти к трудностям анализа задач квантовой механики, где понятие траектории отсутствует, и поэтому обычное понятие локальной неустойчивости теряет смысл. Вместе с ним исчезает и возможность применения мощных методов, развитых в классической динамике (по крайней мере, в их существующей форме). В связи с этим исследование возможности существования стохастичности в квантовой механике приводит к необходимости более тонкого понимания некоторых основных принципов квантовомеханического описания. Остановимся на некоторых из них.

Как уже отмечалось, в классической механике существует хорошо разработанная теория устойчивости, в которой понятие траектории системы в фазовом пространстве играет фундаментальную роль. В квантовой механике состояния системы описываются векторами в гильбертовом пространстве. Понятие об их устойчивости является далеко не однозначным. Более того, оно может не соответствовать нашему представлению об устойчивости реальных физических систем. Столь же неясной является проблема устойчивости операторов, которые в гейзенберговском представлении описывают динамику квантовой системы.

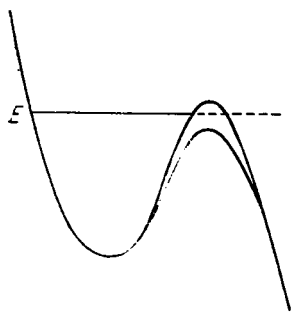


Рис. 9.1. Малое возмущение потенциала превращает финитное движение классической частицы в инфинитное.

Приведем элементарный пример, который иллюстрирует неадекватность проблемы устойчивости в классической и квантовой механике. Рассмотрим движение частицы в потенциале, изображенном на рис. 9.1. Если классическая частица с энергией E движется вблизи горба потенциала, то малое возмущение может превратить финитное движение в инфинитное. Траектория частицы оказывается неустойчивой относительно такого возмущения. В квантовом случае весь энергетический спектр системы является непрерывным, а движение — инфинитным вследствие туннелирования под барьером. Малое возмущение потенциала не приводит к изменению характера спектра системы, а изменение волновых функций пропорционально величине возмущения.

В классической механике методы анализа стохастичности не различают того, действуют ли на систему внешние силы, зави-

ящие от времени, или система является замкнутой и стационарной. В квантовой механике приходится выделять два типа задач: 1) задача об эволюции системы под действием нестационарных возмущений и 2) задача об энергетическом спектре и волновых функциях в стационарном случае. Второй тип задач не имеет аналога в классической механике. Он и порождает ряд «необычных» вопросов.

Известно, что в квантовой механике правила квантования для определения энергетического спектра связаны с независимыми интегралами движения системы (квантовые числа должны быть интегралами движения). В классическом пределе стохастичность приводит к разрушению интегралов движения. В квантовой механике этому должно соответствовать разрушение квантовых чисел. Каковы должны быть правила квантования в этом случае? Этот вопрос можно расширить следующим образом. В классической механике существуют неинтегрируемые задачи (например, задача трех тел). Неинтегрируемость (см. гл. 1) связана с возникновением стохастичности (и с разрушением некоторых интегралов движения). В квантовой механике вопрос о неинтегрируемости до сих пор не ставился. Определенное влияние здесь оказала иллюзия линейности уравнения Шредингера. Как будет видно далее, в квантовой механике классически неинтегрируемая задача требует совсем иного подхода.

Еще один пример указывает на типичную ошибку, связанную с отсутствием в квантовой механике четкого понятия, которое являлось бы аналогом понятия интегрируемости в классической системе. Рассмотрим систему из двух связанных нелинейных осцилляторов (например, модель Хенона — Хейлеса в § 5.3). При достаточно малых энергиях системы (и, следовательно, малых нелинейностях и связи) можно с заданной степенью точности диагонализировать гамильтониан и представить его в виде суммы гамильтонианов для двух степеней свободы. Гамильтониан каждой из степеней свободы является интегралом движения. Таким образом, состояния всей системы описываются набором из двух независимых квантовых чисел (n_1, n_2). Полная энергия системы может быть выражена как функция этих чисел:

$$E = E(n_1, n_2) = E_1(n_1) + E_2(n_2), \quad (1.1)$$

где E_1, E_2 — энергии каждой из нормальных степеней свободы. В квантовом случае считается, что при включении между подсистемами взаимодействия (по крайней мере, достаточно большого) понятия квантовых чисел n_1 и n_2 исчезают. Не существует также волновых функций подсистем. Смысл сохраняют только полная энергия и волновая функция всей системы. Именно с этим утверждением и связана распространяемая ошибка. Не только (!) полная энергия является интегралом движения.

Для понимания того, что здесь происходит, рассмотрим сначала задачу в классическом пределе. При малых взаимодействиях

существуют два действия I_1 и I_2 , которые являются также интегралами движения. Кроме того, можно представить E в виде

$$E = E(I_1, I_2) = E(I_1) + E(I_2). \quad (1.2)$$

С увеличением энергии взаимодействия разделение (1.2) невозможно, однако энергию системы по-прежнему можно представить в виде

$$E = E(I_1, I_2). \quad (1.3)$$

Можно сказать, что в случае (1.2) интеграл энергии является аддитивным, а в случае (1.3) — неаддитивным. Однако, как и ранее, есть два интеграла движения (действия I_1, I_2). Поэтому снова можно ввести два квантовых числа, и энергия системы будет двухпараметрической функцией. Дальнейшее увеличение энергии взаимодействия может привести к появлению стохастичности. Тогда один из интегралов движения исчезнет и только полная энергия E (или функция от нее) останется инвариантом движения.

Таким образом, даже при сильных взаимодействиях между разными степенями свободы может существовать ровно столько квантовых чисел (и соответственно столько же базисных систем волновых векторов), сколько степеней свободы в системе. Найти их, однако, непросто.

Приведенные выше рассуждения основаны на классическом анализе. Это обычный прием, если квантовая проблема рассматривается в квазиклассическом приближении. Однако существуют ситуации, в которых рассматриваемая задача является существенно квантовой. Примером могут служить сильная связь между спином и орбитой и разрушение соответствующих квантовых чисел.

Отсутствие «чисто квантового» языка для анализа проблем устойчивости и стохастичности создает определенные трудности в постановке задачи для квантовых систем. Даже использование квазиклассического подхода, как это будет видно дальше, оказывается недостаточным. Тем не менее можно указать следующий «ограниченный» вариант проблемы стохастичности в квантовых системах. Пусть

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t) \quad (1.4)$$

есть оператор Гамильтона квантовой системы и $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots)$, $\hat{q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots)$ — соответственно операторы импульсов и координат*). Назовем систему квантовой K -системой, если соответствующая ей классическая система, получаемая из (1.4) при $\hbar = 0$, обладает свойством стохастичности. Тогда задача заключается в том, чтобы описать динамику квантовых K -систем.

*) В частном случае гамильтониан \hat{H} может и не зависеть от времени.

Этот же вопрос может быть сформулирован в обратном варианте: как квантовать классические K -системы? Исследование этой задачи будет проведено в настоящей и в следующей главах (ком. 1).

§ 9.2. Квантовые отображения

Отображение в представлении Шредингера. Отображение гейзенберговских операторов. Проектирование на фазовое пространство. Отображение проекций. Немарковость отображений проекций

Анализ классических систем показал, что переход от дифференциальных уравнений движения к уравнениям в конечных разностях (отображениям) приводит к существенному упрощению задачи. Естественно и в квантовом случае начать анализ с такой системы, которая бы допускала построение отображений.

Рассмотрим систему, определенную гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\hat{p}, \hat{q}) + \epsilon \hat{V}(\hat{q}, t), \quad (2.1)$$

$$\hat{V}(\hat{q}, t) = V(\hat{q}) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

В классическом пределе, когда переменные (p, q) становятся s -числами, система (2.1) совпадает с (4.1.3) (она подробно исследовалась в § 4.1). Как отмечалось в § 4.1, особенностью системы (4.1.3) является не только определенное удобство в построении дискретного отображения, но и то, что структура этого отображения является универсальной для гамильтоновых систем с одной степенью свободы, возмущаемых нестационарными силами. С физической точки зрения система (2.1), так же как и (4.1.3), представляет собой нелинейный осциллятор, на который действует периодическое возмущение с очень широкой полосой частот.

Состояния системы (2.1) можно определить волновой функцией $\psi(q, t)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(q, t) = [\hat{H}_0(\hat{p}, \hat{q}) + \epsilon \hat{V}(\hat{q}, t)] \psi(q, t). \quad (2.2)$$

Построим отображения для волновой функции $\psi(q, t)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_n &= \psi(q, t_n^+) \equiv \psi(q, nT + 0), \\ t_n^\pm &= nT \pm 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представим формальное решение уравнения (2.2) в виде

$$\psi(q, t_2) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \hat{H} dt \right] \psi(q, t_1). \quad (2.4)$$

Используя представление (2.4) и определение (2.3), получим

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^+} \widehat{H} dt \right] \psi_n = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_{n+1}^-}^{t_{n+1}^+} \widehat{H} dt \right] \times \\ \times \psi(q, t_{n+1}^-) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_{n+1}^-}^{t_{n+1}^+} \widehat{H} dt \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \widehat{H} dt \right] \psi_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

На интервале (t_n^+, t_{n+1}^-) возмущение $\widehat{V}(q, t) = 0$, и происходит свободное движение системы. На интервале (t_{n+1}^-, t_{n+1}^+) , наоборот, вклад в интеграл $\int \widehat{H} dt$ дает только возмущение $\widehat{V}(q, t)$ из-за наличия в нем δ -функции. Поэтому из (2.5) вытекает следующее уравнение:

$$\psi_{n+1} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varepsilon T \widehat{V}(q) \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_0 T \right] \psi_n. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) является квантовым отображением в представлении Шредингера. Трудность в его итерировании связана с некоммутативностью операторов $\widehat{V}(q)$ и \widehat{H}_0 .

Рассмотрим теперь отображение операторов в представлении Гейзенберга. Введем бозонные операторы рождения и уничтожения a^+ и a , удовлетворяющие соотношению коммутации

$$[a, a^+] = 1.$$

Связь между операторами (a, a^+) и $(\widehat{p}, \widehat{q})$ может быть достаточно произвольной. Рассмотрим, например, обычные соотношения

$$\begin{aligned} a &= i(2m\omega\hbar)^{-1/2} (\widehat{p} - im\omega\widehat{q}), \\ a^+ &= -i(2m\omega\hbar)^{-1/2} (\widehat{p} + im\omega\widehat{q}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее примем для простоты следующий вид гамильтониана (2.1):

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \widehat{H}_0(a^+a) + \varepsilon \widehat{V}(a^+, a, t), \\ \widehat{V}(a^+, a, t) &= \hbar (a^+ + a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Представление (2.8) имеет простой смысл. Из (2.7) следует, что величина $\langle a^+a \rangle$ соответствует в классическом пределе безразмерному действию (I/\hbar) , а комбинации операторов $a^+ + a$ соответствует координата. Таким образом, в классическом пределе выражение (2.8) переходит в следующее:

$$H = H_0(I) + (2m\omega\hbar)^{1/2} \varepsilon q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (2.9)$$

В гамильтониане (2.9) структура возмущения означает так называемый дипольный характер взаимодействия осциллятора с полем. Если выразить координату q через переменные действие — угол (I, ϕ) , то мы приходим к выражению типа (4.1.3).

Гейзенберговские уравнения движения имеют вид

$$i\hbar\dot{a} = [a, \hat{H}] = \hbar\omega(a^+a)a + \varepsilon\hbar \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (2.10)$$

где обозначено

$$\hbar\omega(a^+a)a = [a, \hat{H}_0(a^+a)]. \quad (2.11)$$

В интервале времени (t_1, t_2) между двумя δ -импульсами величина $\hat{n} = a^+a$ сохраняется. Поэтому эволюция оператора $a(t)$ определяется, согласно (2.10), преобразованием

$$a(t_2) = \exp[-i\omega(a^+a)(t_2 - t_1)]a(t_1). \quad (2.12)$$

Пусть теперь δ -импульс возмущения действует, например, в момент времени t_0 . Тогда, интегрируя выражение (2.10) в окрестности точки t_0 , находим

$$a(t_0 + 0) = a(t_0 - 0) - i\varepsilon. \quad (2.13)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_n = a_n(nT - 0), \quad a_{n+1} = a((n+1)T - 0). \quad (2.14)$$

Объединяя выражения (2.12) и (2.13) и подставляя их в (2.14), находим искомое отображение

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \exp[-i\omega(\bar{a}_n^+ \bar{a}_n)T] \bar{a}_n, \\ a_{n+1}^+ &= \bar{a}_n^+ \exp[i\omega(\bar{a}_n^+ \bar{a}_n)T], \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\bar{a}_n = a_n - i\varepsilon$, $\bar{a}_n^+ = a_n^+ + i\varepsilon$. Формулы (2.15) определяют квантовое \hat{T} -отображение гейзенберговских операторов:

$$(a_{n+1}, a_{n+1}^+) = \hat{T}(a_n, a_n^+). \quad (2.16)$$

Следующий этап исследований связан с анализом отображений (2.6) и (2.16). До сих пор (в классических задачах) мы рассматривали отображения векторов с конечным числом элементов. В квантовой механике отображение (2.6) записано для поля $\psi(q, t)$. Отображение (2.16) получено для операторов, для которых поля являются собственными функциями. Одним из методов анализа таких отображений является проектирование их на некоторое пространство [133, 134] и последующий анализ проекций. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Выберем некоторый базис, состоящий из векторов $\langle \cdot |$ и $|\cdot \rangle$. Квантовомеханические средние операторов a , a^+ находятся из выражений

$$\alpha = \langle \cdot | a | \cdot \rangle, \quad \alpha^* = \langle \cdot | a^+ | \cdot \rangle. \quad (2.17)$$

Они и определяют пространство проекций (α, α^*) , которое может выполнять ту же роль, что и фазовое пространство в классической механике. Проектирование (усреднение) отображения (2.16) дает

$$(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}^*) = \langle \cdot | \hat{T}(\alpha_n, \alpha_n^*) | \cdot \rangle. \quad (2.18)$$

Выражение (2.18) не имеет замкнутой формы, так как правая часть не выражена в виде функции от (α_n, α_n^*) . Если бы это удалось сделать, то мы пришли бы к отображению типа

$$(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}^*) = \hat{\mathcal{F}}(\alpha_n, \alpha_n^*), \quad (2.19)$$

которое уже записано для конечномерных векторов (в данном случае — двумерных).

Если оператор $\hat{\mathcal{F}}$ не зависит от $(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}^*; \dots; \alpha_0, \alpha_0^*)$, то он обладает марковским свойством. Именно такая ситуация реализовывалась во всех рассмотренных до сих пор случаях классических задач. Однако, как будет видно далее, в квантовом случае оператор перестает быть оператором марковского типа.

§ 9.3. Проектирование в базе когерентных состояний

Когерентные состояния и их свойства. Нормальное упорядочение и проектирование. Разложение по степеням \hbar . Негамильтоновость уравнений для квантомеханических средних. Расходимость разложения по \hbar .

Выбор базисных функций $\langle \cdot |$ и $| \cdot \rangle$ для получения оператора $\hat{\mathcal{F}}$, реализующего отображение проекций в формуле (2.19), в достаточной степени произволен. Удобно выбрать базис когерентных состояний, который определяется как левая и правая функции операторов a^+ и a :

$$\langle \alpha | a^+ = \alpha^* \langle \alpha |, \quad a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle. \quad (3.1)$$

Когерентное состояние было построено Шредингером для линейного осциллятора как пример нерасплывающегося волнового пакета. Формализм когерентных состояний был введен Глаубером [141]. Приведем некоторые необходимые сведения о когерентных состояниях [142, 143].

Состояние $|\alpha\rangle$ представляет собой гауссовский волновой пакет:

$$|\alpha\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\left(\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} x - \alpha\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}\right] \quad (3.2)$$

с минимальным соотношением неопределенности $\Delta p \Delta x = \hbar/2$.

Система когерентных состояний обладает свойством полноты. Разложение единичного оператора $\hat{1}$ в базе когерентных состояний имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{1}, \quad d^2\alpha \equiv d(\operatorname{Re} \alpha) d(\operatorname{Im} \alpha).$$

База когерентных состояний является переполненным. Поэтому одно когерентное состояние может быть выражено через другие когерентные состояния:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta \exp\left(\alpha\beta^* - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right) |\beta\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta \langle\beta|\alpha\rangle |\beta\rangle. \quad (3.3)$$

Состояние $|\alpha\rangle$ может быть разложено по состояниям чисел заполнения:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle = \widehat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (3.4)$$

где $\widehat{D}(\alpha)$ — оператор сдвига:

$$\widehat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a). \quad (3.5)$$

Закон умножения для операторов сдвига имеет вид

$$\widehat{D}(\alpha) \widehat{D}(\beta) = \widehat{D}(\alpha + \beta) \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right]. \quad (3.6)$$

Когерентные состояния не ортогональны, но обладают конечной областью «перекрывтия»:

$$\begin{aligned} |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 &= \exp(-|\alpha - \beta|^2), \\ \langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \beta^*\alpha\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Когерентные состояния могут быть выбраны в качестве состояния произвольной системы, взятой в некоторый фиксированный момент времени t_0 [142—144]. Последующая эволюция системы приводит к разрушению когерентного состояния, так как волновые пакеты произвольной нелинейной системы расплываются со временем (это свойство нелинейных систем было отмечено еще Паули [145]). Исключение составляют системы с квадратичными гамильтонианами [143] и некоторые специальные случаи нелинейных систем.

Обозначим через $|\alpha_0\rangle$ и $\langle\alpha_0|$ когерентные состояния в начальный момент времени $t_0 = 0$, а через a_0 и a_0^+ — начальные значения гейзенберговских операторов a и a^+ . Тогда в соответствии с определением (3.1) имеем

$$\begin{aligned} a_0 |\alpha_0\rangle &= \alpha_0 |\alpha_0\rangle, & \langle\alpha_0| a_0^+ &= \alpha_0^* \langle\alpha_0|, \\ a_0 &= a(0), & a_0^+ &= a^+(0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пространство переменных (α_0, α_0^*) назовем фазовым пространством. Для любой операторной функции $Q(a_0^+, a_0)$ ее проекция на

фазовое пространство определяется выражением

$$\langle Q \rangle \equiv \langle \alpha_0 | Q(a_0^+, a_0) | \alpha_0 \rangle. \quad (3.9)$$

Обозначим через $Q^{(N)}(a_0^+, a_0)$ функцию $Q(a_0^+, a_0)$, нормально упорядоченную по операторам a_0^+ , a_0 . Это означает, что функция $Q^{(N)}(a_0^+, a_0)$ представлена в форме

$$Q^{(N)}(a_0^+, a_0) = \sum_{k,l} Q_{kl} (a_0^+)^k a_0^l, \quad (3.10)$$

т. е. все операторы a_0^+ стоят слева, а операторы a_0 — справа. Заметим, что $Q = Q^{(N)}$, поскольку они представляют один и тот же оператор в различных формах. В выражении (3.10) предполагается также, что функция Q разложима в степенной ряд. Из определений (3.8) и (3.9) следует правило проектирования

$$\langle Q \rangle = \langle Q^{(N)}(a_0^+, a_0) \rangle = Q^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0), \quad (3.11)$$

т. е. после приведения операторной функции $Q(a^+, a)$ к нормальной форме $Q^{(N)}(a_0^+, a_0)$ вычисление среднего значения $\langle Q^{(N)} \rangle$ сводится просто к замене операторов a_0^+ и a_0 соответственно на числа.

Опишем теперь, как должен выглядеть метод отображений в фазовом пространстве (α_0^*, α_0) . Пусть, например, гейзенберговские уравнения движения для операторов $a^+(t)$ и $a(t)$ заданы в виде квантового отображения (2.15) или в общем виде (2.16). Тогда операторы a_n^+ и a_n могут быть выражены через начальные условия a_0^+ и a_0 :

$$a_n^+ = a_n^+(a_0^+, a_0), \quad a_n = a_n(a_0^+, a_0),$$

где правые части представляют собой некоторые операторные функции. Используя определение (3.9) и правило (3.11), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n &\equiv \langle a_n \rangle = a^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0), \\ \alpha_n^* &\equiv \langle a_n^+ \rangle = a^{+(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Эти выражения показывают, что оператор сдвига в пространстве проекций \mathcal{F} , введенный выражениями (2.18) и (2.19), зависит также от начальных условий в явной форме, что и порождает его немарковский характер.

В большинстве случаев решение гейзенберговских уравнений движения является невыполнимой задачей. Однако именно это предстоит сделать для того, чтобы упорядочить операторы a_n^+ , a_n относительно начальных операторов a_0^+ , a_0 . Поэтому следует рассмотреть возможные приближенные методы решения этой задачи. Рассмотрим задачу о нормальном упорядочении в случае, близком к классическому, и получим правила нормального упорядочения в виде разложения по степеням \hbar [133, 134].

Обозначим через \widehat{N} оператор нормального упорядочения по a_0^+ , a_0 :

$$\widehat{N} \{(a_0)^p (a_0^+)^q\} = (a_0^+)^q (a_0)^p, \quad (3.13)$$

т. е. в выражении, стоящем под знаком оператора \widehat{N} , можно произвольно переставлять операторы a_0^+ и a_0 так, как если бы они были c -числами. Обратим внимание на следующие соотношения, вытекающие из определений (3.10) и (3.13):

$$\begin{aligned} \widehat{N} Q(a_0^+, a_0) &\neq Q^{(N)}(a_0^+, a_0), \\ \widehat{N} \{Q^{(N)}(a_0^+, a_0)\} &= Q^{(N)}(a_0^+, a_0). \end{aligned}$$

Воспользуемся известным равенством [146]

$$(a_0)^p (a_0^+)^q = \widehat{N} \left\{ \left(a_0 + \frac{\partial}{\partial a_0^+} \right)^p (a_0^+)^q \right\}. \quad (3.14)$$

Разложение выражения (3.14) по степеням \hbar дает

$$(a_0)^p (a_0^+)^q = (a_0^+)^q (a_0)^p + pq (a_0^+)^{q-1} (a_0)^{p-1} + O(\hbar^2). \quad (3.15)$$

Пусть теперь $Q_1(a_0^+, a_0)$ и $Q_2(a_0^+, a_0)$ есть две произвольные операторные функции. Тогда из (3.14) и (3.15) следует

$$Q_1 Q_2 = Q_1^{(N)} Q_2^{(N)} = \widehat{N} \{Q_1^{(N)} Q_2^{(N)} + \hbar \widehat{\mathcal{D}}(Q_1^{(N)}, Q_2^{(N)})\} + O(\hbar^2), \quad (3.16)$$

где введена $\widehat{\mathcal{D}}$ -форма:

$$\widehat{\mathcal{D}}(A, B) = \frac{\partial A}{\partial a_0} \frac{\partial B}{\partial a_0^+}. \quad (3.17)$$

Из выражений (3.14) и (3.16) находим формулу для проектирования произведения двух операторных функций в виде разложения по степеням \hbar :

$$\begin{aligned} \langle Q_1 Q_2 \rangle &= Q_1^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0) Q_2^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0) + \\ &+ \hbar \widehat{\mathcal{D}}(Q_1^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0), Q_2^{(N)}(\alpha_0^*, \alpha_0)) + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогичным образом можно получить формулы проектирования и для более сложных выражений [147]. Полученные формулы проектирования в виде разложения по степеням \hbar будут использованы в следующем параграфе.

Сделаем замечание относительно уравнений движения для проекций. Рассмотрим канонически сопряженную пару переменных (p, q) и соответствующую им пару операторов $(\widehat{p}, \widehat{q})$. Уравнения движения для классических переменных (p, q) являются гамильтоновыми. Однако уравнения движения для средних $(\langle \widehat{p} \rangle, \langle \widehat{q} \rangle)$, вообще говоря, гамильтоновыми не являются. Исключения составляют системы с квадратичным по \widehat{p}, \widehat{q} гамильтонианом (например, линейный осциллятор). Приведем пример, иллюстрирующий сделанное утверждение [147].

Вместо операторов (\hat{p}, \hat{q}) удобно рассмотреть операторы (a^+, a) , выражающиеся через их линейные комбинации. Пусть гамильтониан системы равен

$$H_0 = \hbar\omega a^+ a + \hbar^2 \mu (a^+ a)^2. \quad (3.19)$$

Тогда уравнение движения имеет вид

$$i\dot{a} = (\omega + \hbar\mu)a + 2\hbar\mu a^+ a a. \quad (3.20)$$

Уравнение для \dot{a}^+ получается из (3.20) эрмитовым сопряжением. Поскольку величина $a^+ a$ коммутирует с гамильтонианом, то нетрудно записать решение уравнения (3.20):

$$\begin{aligned} a(t) &= \exp[-i(\omega + \hbar\mu + 2\hbar\mu a^+ a)t] a_0 = \\ &= \exp[-i(\omega + \hbar\mu + 2\hbar\mu a_0^+ a_0)t] a_0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $a_0 = a(0)$ и соответственно $a_0^+ = a^+(0)$. Воспользуемся известной формулой нормального упорядочения [146] и перепишем (3.21) в виде

$$\begin{aligned} a(t) &= \exp[-i(\omega + \hbar\mu)t] \times \\ &\times \hat{N} \{ \exp[(\exp(-2i\hbar\mu t) - 1) \tilde{a}_0^+ \tilde{a}_0] a_0 \}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где знак тильды « \sim » означает, что величины \tilde{a}_0^+ и \tilde{a}_0 следует рассматривать под знаком оператора \hat{N} как c -числа. Согласно определению (3.11) из (3.22) находим

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \langle \alpha_0 | a(t) | \alpha_0 \rangle = \\ &= \exp[-i(\omega + \hbar\mu)t] \exp[(\exp(-2i\hbar\mu t) - 1) |\alpha_0|^2] \alpha_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Выражение для $\alpha^*(t)$ получается из (3.23) комплексным сопряжением.

Рассмотрим теперь фазовое пространство (α^*, α) и вычислим изменение фазового объема на траектории $(\alpha^*(t), \alpha(t))$. Имеем

$$\begin{aligned} J(t) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial \alpha(t)}{\partial \alpha_0^*} \\ \frac{\partial \alpha^*(t)}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial \alpha^*(t)}{\partial \alpha_0^*} \end{array} \right| = \\ &= (1 - 4 |\alpha_0|^2 \sin^2 \hbar\mu t) \exp(-4 |\alpha_0|^2 \sin^2 \hbar\mu t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Таким образом, фазовый объем осциллирует со временем с периодом

$$T_0 = \pi / \hbar\mu. \quad (3.25)$$

В моменты времени $t_n = nT_0$ ($n = 0, 1, \dots$) величина $J(t)$ обращается в единицу.

Исходные уравнения движения для гейзенберговских операторов $a^+(t)$ и $a(t)$ имеют гамильтонов вид. При проектировании этих уравнений с использованием любого базиса (в том числе

и базиса когерентных состояний), вообще говоря, не обязательно, чтобы уравнения движения для проекций имели ту же гамильтонову структуру. Однако в данном случае уравнения для проекций $\alpha^*(t)$ и $\alpha(t)$ должны в пределе $\hbar \rightarrow 0$ переходить в классические уравнения движения, которые являются гамильтоновыми. Отсюда следует, что разложение по \hbar не может быть регулярным и имеет ограниченное время применимости. Действительно, из выражения (3.24) следует, что все квантовые поправки, получаемые в виде ряда по степеням \hbar , расходятся со временем. Они остаются малыми на временах $t \ll t_0$, где

$$t_0 = 1/\mu\hbar|\alpha| \sim T_0/|\alpha|. \quad (3.26)$$

Мы увидим дальше, как это обстоятельство оказывается существенным для динамики квантовых K -систем.

§ 9.4. Расплывание волновых пакетов

Роль нелинейности. Время расплывания «свободного» волнового пакета. Условие существования квазиклассического приближения.

Проведем качественный анализ полученных в предыдущем параграфе результатов о динамике в фазовом пространстве проекций. На первый взгляд кажется, что если выполнено неравенство

$$|\alpha|^2 \sim I/\hbar \gg 1, \quad (4.1)$$

где I — характерная величина действия классической системы, то состояние системы близко к классическому. Однако существование условия (3.26) вынуждает нас отнестись к этому выводу с большим вниманием. Действительно, пусть динамические процессы в системе в классическом пределе определяются некоторым характерным временем T . Тогда ясно, что при $T \ll t_0$ (время t_0 определяется формулой (3.26)) мы попадаем в область, где квантовые поправки малы. Наоборот, обратное неравенство $T \gg t_0$ показывает, что процесс в том виде, в котором он описывается классическим пределом задач, не может реализоваться и квантовые поправки к нему оказываются немалыми. Иными словами, неравенства (4.1) явно недостаточно для применения квазиклассического приближения на характерных временах $\sim T$. Это приводит нас к необходимости остановиться более детально на рассмотрении физических причин, приводящих к формулам (3.24), (3.26).

Поскольку в квантовой механике мы всегда имеем дело не с отдельной траекторией системы, а с волновым пакетом, то естественно рассмотреть сначала эволюцию некоторой области в фазовом пространстве, заполненную частицами (ячейку фазовой жидкости). Пусть, например, такими частицами являются линейные осцилляторы, имеющие все одинаковые частоты. Тогда ячейка фазового пространства перемещается без деформации границ.

В квантовой механике этому обстоятельству соответствует возможность построить нерасплывающийся волновой пакет (когерентное состояние). Иначе обстоит дело в нелинейном случае. Частоты осцилляторов зависят от их энергий (т. е. от величины действия). Поэтому частицы из различных участков фазового пространства движутся с различными скоростями. В результате происходит искажение формы границы ячейки (рис. 9.2). Фазовая ячейка расплывается, а профиль «фронта» ее границы укрупняется (рис. 9.3). В результате появляется многозначность в форме границы ячейки, которая аналогична появлению многозначных течений в гидродинамике при опрокидывании фронта нелинейной волны.

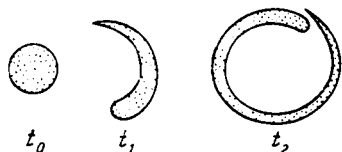


Рис. 9.2. Динамическое расплывание ячейки фазовой жидкости.

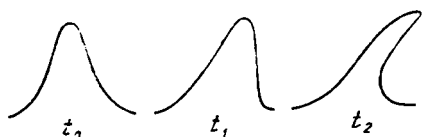


Рис. 9.3. Укрупнение «фронта» ячейки фазовой жидкости.

Описанному процессу классической механики соответствует в квантовой механике отсутствие нерасплывающихся волновых пакетов в тех случаях, когда система является нелинейной. Пусть, например, начальный волновой пакет локализован в области $(\Delta I_0, \Delta \Phi_0)$ соответственно по действию и по фазе. С течением времени расплывание пакета должно приводить к полной неопределенности по фазе $\Delta \Phi \sim 2\pi$. Пусть, например, система является нелинейным осциллятором с частотой $\omega(I)$. Тогда максимальное значение для времени расплывания по фазе волнового пакета дается величиной

$$\tau_h = \left(\left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \Delta I_0 \right)^{-1} \sim \left(\hbar \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \right)^{-1} = \frac{1}{\hbar \mu}. \quad (4.2)$$

Таким образом, существенное влияние квантовых эффектов должно проявляться на временах $t > \tau_h$. Мы пришли к тому же результату, что и при точном анализе для частной модели (3.19) (сравните формулу (3.25) с формулой (4.2)).

Введем параметр

$$\zeta = T/\tau_h = \hbar \mu T, \quad (4.3)$$

где время T определено в начале параграфа. Тогда следует ожидать, что если выполнено условие $\zeta \ll 1$, то существует некоторый интервал времени, большой по сравнению с T , на котором поведение системы близко к классическому и квантовые поправки малы. Наоборот, при $\zeta \gg 1$ квантовые эффекты становятся существенными уже на временах, меньших чем T . Значение

$\zeta \sim 1$ можно принять в качестве границы области существенно квантовой динамики системы. Заметим, что неравенство (4.1) может выполняться независимо от значений параметра ζ . Поэтому условие квазиклассичности выражается в двух неравенствах: неравенство (4.1) и неравенство $\zeta \ll 1$.

Мы еще неоднократно будем возвращаться к обсуждению роли параметра ζ по мере анализа динамики квантовых K -систем.

§ 9.5. $\widehat{\mathcal{F}}$ отображение и условие стохастичности (приближенный анализ)

Вывод $\widehat{\mathcal{F}}$ -отображения. Классический предел. Квантовые поправки и $\widehat{\mathcal{D}}$ -формы. Экспоненциальная расходимость квантовых поправок. Квантовая граница стохастичности. Область квазиклассичности и условие ее существования

Рассмотрим уравнения (2.15), которые задают квантовое \widehat{T} -отображение для гейзенберговских операторов $a^+(t)$, $a(t)$ системы с гамильтонианом (2.9). Будем считать для определенности, что невозмущенный гамильтониан \widehat{H}_0 имеет форму (3.19). Тогда гамильтониан (2.9) с учетом (2.7) приобретает вид

$$\widehat{H} = \hbar\omega a^+a + \hbar^2\mu (a^+a)^2 + \varepsilon\hbar (a^+ + a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (5.1)$$

а отображение (2.15) переходит в следующее:

$$a_{n+1} = \exp[-i(\omega + \hbar\mu + 2\hbar\mu\bar{a}_n^+\bar{a}_n)T]\bar{a}_n. \quad (5.2)$$

Получим для уравнения (5.2) $\widehat{\mathcal{F}}$ -отображение в виде разложения по степеням \hbar [133, 134]. Задача проектирования уравнения (5.2) в базисе когерентных состояний связана с необходимостью нормально упорядочить правую часть (5.2) по операторам a_0^+ , a_0 . Произведем сначала нормальное упорядочение экспоненты:

$$\exp(sa_n^+a_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s^p}{p!} (a_n^+a_n)^p. \quad (5.3)$$

С помощью формул (3.16), (3.17) получаем

$$(a_n^+a_n)^p = \widehat{N} \left\{ (a_n^+a_n)^p + p(a_n^+a_n)^{p-1} \widehat{\mathcal{D}}(a_n^+, a_n) + \frac{1}{2} p(p-1)(a_n^+a_n)^{p-2} \widehat{\mathcal{A}}(a_n^+, a_n) \right\} + O(\hbar^2), \quad (5.4)$$

где для сокращения записи вместо выражения $a_n^{(N)}(a_0^+, a_0)$ и $a_n^{+(N)}(a_0^+, a_0)$ под знаком оператора \widehat{N} пишется соответственно a_n и a_n^+ . Кроме того, обозначено

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}(a_n^+, a_n) \equiv & a_n^2 \widehat{\mathcal{D}}(a_n^+, a_n^+) + a_n a_n^+ \widehat{\mathcal{D}}(a_n, a_n^+) + \\ & + a_n^+ a_n \widehat{\mathcal{D}}(a_n^+, a_n) + (a_n^+)^2 \widehat{\mathcal{D}}(a_n, a_n). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) в (5.3) и выполняя суммирование, получаем

$$\exp(sa_n^+ a_n) = \hat{N} \{ [1 + s\hat{\mathcal{D}}(a_n^+, a_n) + \frac{1}{2}s^2\hat{\mathcal{A}}(a_n^+, a_n)] \exp(sa_n^+ a_n) \} + O(\hbar^2). \quad (5.6)$$

Аналогично находится соотношение

$$\begin{aligned} \exp(sa_n^+ a_n) a_n &= \\ &= \hat{N} \{ \exp(sa_n^+ a_n) a_n + \hat{\mathcal{D}}(\exp(sa_n^+ a_n), a_n) \} + O(\hbar^2) = \\ &= \hat{N} \{ [a_n + 2sa_n\hat{\mathcal{D}}(a_n^+, a_n) + \frac{1}{2}s^2 a_n\hat{\mathcal{A}}(a_n^+, a_n)] \times \\ &\quad \times \exp(sa_n^+ a_n) \} + O(\hbar^2). \quad (5.7) \end{aligned}$$

Теперь проектирование выражений (5.6), (5.7) на фазовое пространство сводится просто к замене операторов a_n^+ , a_n соответственно на α_n^* , α_n . Подставляя формулы (5.5)–(5.7) в уравнение (5.2) и усредняя, находим

$$\alpha_{n+1} = (\bar{\alpha}_n - \hbar\Delta\alpha_n) \exp[-i(\omega + \hbar\mu + 2\hbar\mu|\bar{\alpha}_n|^2)T] + O(\hbar^2), \quad (5.8)$$

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_n - i\varepsilon, \quad \bar{\alpha}_n^* = \alpha_n^* + i\varepsilon,$$

где поправка $\Delta\alpha_n$ обусловлена квантовыми эффектами и равна

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_n &= -4i\mu T\bar{\alpha}_n\hat{\mathcal{D}}(\alpha_n^*, \alpha_n) - 2i\mu T\bar{\alpha}_n^*\hat{\mathcal{D}}(\alpha_n, \alpha_n) - \\ &\quad - 2\hbar\mu^2 T^2\bar{\alpha}_n\hat{\mathcal{A}}(\alpha_n^*, \alpha_n). \quad (5.9) \end{aligned}$$

Выражения (5.8) и (5.9) определяют искомое $\hat{\mathcal{F}}$ -отображение с точностью до членов $\sim\hbar^2$. При $\hbar=0$ отображение (5.8) переходит в соответствующее классическое отображение

$$\alpha_{n+1} = \bar{\alpha}_n \exp[-i(\omega + 2\hbar\mu|\alpha_n|^2)T]. \quad (5.10)$$

Для того чтобы перейти к классическому отображению в стандартной форме в переменных действие — угол (I, ϑ) , следует сделать в формуле (5.10) замену

$$\alpha_n = (I_n/\hbar)^{1/2} \exp(-i\vartheta_n), \quad \alpha_n^* = (I_n/\hbar)^{1/2} \exp(i\vartheta_n). \quad (5.11)$$

Подстановка выражения (5.11) в (5.10) дает

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n (1 + 2\varepsilon \sin \vartheta_n + \varepsilon^2), \\ \vartheta_{n+1} &= \arctg\left(\operatorname{tg} \vartheta_n + \frac{\varepsilon}{\cos \vartheta_n} + \omega T + 2\mu T I_n\right). \quad (5.12) \end{aligned}$$

Отображение (5.12) является типичным для задач, связанных с нелинейными колебаниями. Такие отображения изучались в гл. 4 (см., например, формулу (4.1.1)). Для анализа уравнений (5.12) рассмотрим производную

$$\frac{d\vartheta_{n+1}}{d\vartheta_n} = \frac{1 + \varepsilon \sin \vartheta}{1 + 2\varepsilon \sin \vartheta + \varepsilon^2} + K \cos \vartheta, \quad (5.13)$$

где обозначено

$$K = 4\varepsilon\mu_0\omega T \quad (5.14)$$

и введен безразмерный параметр нелинейности

$$\mu_0 = \mu I / \omega. \quad (5.15)$$

Индекс n в правой части уравнения (5.13) для сокращения записи опущен. Определение (5.14) для параметра K совпадает с формулой (4.1.11). Все результаты § 4.1 могут быть перенесены для отображения (5.12). В частности, при $K \ll 1$ движение осциллятора является условно-периодическим. Условие

$$K \geq 1 \quad (5.16)$$

определяет появление стохастичности.

Напомним некоторые основные свойства модели (5.12), если выполнен критерий стохастичности (5.16). По переменной ϑ происходит быстрое перемешивание, и корреляция фаз ϑ экспоненциально релаксируется:

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \exp[-i(\vartheta_n - \vartheta_0)] \sim \exp[-nT/\tau_c], \quad (5.17)$$

где время релаксации τ_c равно (при $K \gg 1$)

$$\tau_c = 2T/\ln K. \quad (5.18)$$

По переменной I происходит медленная диффузия, описываемая уравнением (при $\varepsilon \ll 1$)

$$\frac{\partial f(I, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial f(I, t)}{\partial I}, \quad (5.19)$$

где $f(I, t)$ — функция распределения состояний системы по действию и D — коэффициент диффузии:

$$D = \varepsilon^2 I^2 / T. \quad (5.20)$$

В частности, из уравнений (5.19) и (5.20) следует, что

$$\langle I(t) \rangle = \langle I(0) \rangle + \varepsilon^2 t / T, \quad (5.21)$$

где

$$\langle I(t) \rangle = \int dI I f(I, t).$$

Таким образом, динамика классической системы выглядит следующим образом. На малых временах порядка τ_c происходит процесс перемешивания по фазе ϑ , и на больших временах порядка

$$\tau_D = 2I^2/D = 2T/\varepsilon^2 \quad (5.22)$$

развивается диффузия по переменной I . Из (5.18) и (5.22) следует, что

$$\tau_c/\tau_D = \varepsilon^2/\ln K \ll 1.$$

Закончим описание свойств классического предела модели (5.12), приведя некоторые характеристики локальной неустойчивости системы. Пусть выполнено условие стохастичности (5.16), причем $K \gg 1$. Тогда

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \vartheta_0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_{n-1}} \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial \vartheta_{n-2}} \dots \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \vartheta_0} \sim K^n = \exp(n \ln K). \quad (5.23)$$

Используя выражение (5.11), можно записать

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial \vartheta_0} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_0} \frac{\partial \alpha_0}{\partial \vartheta_0} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_0^*} \frac{\partial \alpha_0^*}{\partial \vartheta_0} = -i \left(\alpha_0 \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_0} - \alpha_0^* \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_0^*} \right).$$

Так как

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial \vartheta_0} = \frac{\partial |\alpha_n|}{\partial \vartheta_0} \exp(-i\vartheta_n) - i\alpha_n \frac{\partial \vartheta_n}{\partial \vartheta_0},$$

то оценка (5.23) приводит к следующему выражению:

$$\left| \frac{\partial \alpha_n}{\partial \vartheta_0} \right| \sim K^n = \exp(n \ln K), \quad (5.24)$$

т. е. комплексные амплитуды α и α^* обладают свойством локальной неустойчивости с тем же инкрементом неустойчивости, что и для фаз.

Воспользуемся теперь приведенной выше информацией для анализа квантовых поправок в \mathcal{F} -отображении (5.8). Подстановка выражения (5.11) в формулы (5.8) и (5.9) дает с точностью до членов $\sim \hbar^2$ и ε^2 отображение в переменных (I, ϑ) :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n (1 + 2\varepsilon \sin \vartheta_n + \varepsilon^2) + 4\hbar\mu T \beta_n (\Delta I)_n, \\ \vartheta_{n+1} &\approx \vartheta_n + (\omega + \hbar\mu) T + 2\mu T I_{n+1} + 2\hbar\mu T \beta_n (\Delta \vartheta)_n, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где $(\Delta I)_n$ и $(\Delta \vartheta)_n$ в квантовых поправках выражены так:

$$\begin{aligned} (\Delta I)_n &= -I_n \{ \sin \vartheta_n + \cos \vartheta_n + \\ &\quad + \varepsilon (2 + 2 \cos 2\vartheta_n - \sin 2\vartheta_n - \cos \vartheta_n) \}, \\ (\Delta \vartheta)_n &= 1 + 2\varepsilon^2 (1 + \sin^2 \vartheta_n), \end{aligned} \quad (5.26)$$

а параметр β_n определяется формулой

$$\beta_n = \frac{1}{4} \frac{I_n}{I_0} \left(\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \vartheta_0} \right)^2. \quad (5.27)$$

Из выражений (5.25)–(5.27) следует, что все квантовые поправки пропорциональны параметру β . Для оценки величины β рас-

смотрим случай сильной стохастичности: $K \gg 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{I_0} &= \frac{I_n}{I_{n-1}} \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} \dots \frac{I_1}{I_0} = \exp \left(\sum_{m=0}^{n-1} \ln \frac{I_{m+1}}{I_m} \right) = \\ &= \exp \left[\sum_{m=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{\Delta I_m}{I_m} \right) \right] \approx \exp \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Delta I_m}{I_m} \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

где $\Delta I_m = I_{m+1} - I_m \ll I_m$. Величина ΔI зависит от фазы ϑ . Поэтому в показателе экспоненты в формуле (5.28) стоит сумма большого числа случайных слагаемых. В силу закона больших чисел

$$\sum_{m=0}^n \frac{\Delta I_m}{I_m} \rightarrow n \frac{\langle \Delta I \rangle}{I_n}, \quad (5.29)$$

где скобки «...» означают усреднение по фазе ϑ_m . Подставляя (5.23), (5.28) и (5.29) в определение β (5.27), находим окончательно

$$\begin{aligned} \beta_n &\sim \frac{1}{4} \exp \left[n \left(2 \ln K + \frac{\langle \Delta I \rangle}{I_n} \right) \right] \sim \frac{1}{4} \exp (2n \ln K) = \\ &= \frac{1}{4} \exp (4t_n/\tau_c) \quad (t_n = nT). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Итак, квантовые поправки в $\hat{\mathcal{F}}$ -отображении (5.8) экспоненциально нарастают со временем с показателем, равным по порядку величины инкременту локальной неустойчивости соответствующей классической системы. Поэтому формулы для $\hat{\mathcal{F}}$ -отображения (5.8) или (5.25) быстро становятся неприменимыми [133]. Остановимся на этом эффекте подробнее.

Источником происхождения расходимости квантовых поправок являются производные по начальным условиям. Эти производные возникли благодаря $\hat{\mathcal{D}}$ -формам (3.17), которые имеются в каждом члене $\hat{\mathcal{F}}$ -отображения, связанном с квантовыми поправками (см. формулу (5.9)). Выражения, аналогичные $\hat{\mathcal{D}}$ -формам, имеют гидродинамическую аналогию. Они возникают при переходе от уравнений гидродинамики в эйлеровой форме к уравнениям гидродинамики в лагранжевой форме. Эта аналогия имеет естественное происхождение. Действительно, квантовомеханические уравнения движения соответствуют уравнениям движения среды, в то время как уравнения для проекции α , α^* соответствуют уравнениям движения жидкой частицы. Поэтому появление $\hat{\mathcal{D}}$ -форм в членах, содержащих квантовые поправки, связано с сохранением в уравнениях (5.8) или (5.25) информации о том, что система описывает эволюцию во времени квантовой «жидкости». Расплывание волнового пакета («растекание жидкой капли») происходит теперь не степенным образом, как это было в примере (3.19), а экспоненциально со временем из-за

локальной неустойчивости системы. Покажем, что сделанное утверждение вытекает из простых оценок.

Из уравнений (5.25) и (5.26) следует, что квантовые поправки остаются малыми при выполнении условия

$$\hbar\mu T\beta = \zeta\beta \ll 1, \quad (5.31)$$

где параметр ζ определен формулой (4.3). Подставляя выражение (5.30) для β в (5.31), находим

$$t \ll t_h \equiv \frac{1}{4} \tau_c \ln \frac{1}{\zeta} \sim \frac{T}{2 \ln K} \ln \frac{1}{\hbar\mu T}. \quad (5.32)$$

С другой стороны, время t_h имеет простой физический смысл: это время расплывания волнового пакета. Действительно, вследствие локальной неустойчивости (см. формулу (5.23)) имеем

$$\Delta\theta(t) \sim \Delta\theta_0 \exp(t/\tau_c). \quad (5.33)$$

Величину $\Delta\theta_0$ можно определить как неопределенность фазы на одном шаге отображения за время T , т. е.

$$\Delta\theta_0 \sim T \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \Delta I \sim T \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \hbar \sim \hbar\mu T.$$

Подставляя $\Delta\theta_0$ в (5.33), находим

$$\Delta\theta(t) \sim \hbar\mu T \exp(t/\tau_c).$$

Условие полного растекания волнового пакета по фазе $\Delta\theta(t) \sim 2\pi$ приводит к выражению для времени расплывания, совпадающему с величиной t_h в формуле (5.32). Это и есть время, на котором квантовые поправки в $\hat{\mathcal{F}}$ -отображении становятся порядка единицы.

Рассмотрим неравенство (5.32) более детально. Пусть ΔI есть изменение действия на один шаг отображения. Тогда $\Delta I/I \sim \epsilon$, и можно ввести параметр

$$\kappa = \Delta I/\hbar \sim \epsilon I/\hbar, \quad (5.34)$$

определяющий число квантов в возмущении. Очевидно, что квазиклассическому приближению должно соответствовать неравенство

$$\kappa \gg 1, \quad (5.35)$$

которое является более сильным, чем неравенство $I/\hbar \gg 1$. Нетрудно видеть с помощью определений (4.3), (5.14), (5.15) и (5.34), что параметр ζ может быть представлен также в виде

$$\zeta = 4K/\kappa. \quad (5.36)$$

Теперь мы можем показать, что параметр ζ играет исключительную роль в той связи, которая существует между квантовой динамикой и ее классическим пределом при $\hbar \rightarrow 0$. Введем для этого следующее понятие. Будем говорить, что на интервале вре-

мени существует квазиклассическое приближение для системы, если на этом интервале поправки к средним значениям операторов мало отличаются от значений соответствующих классических величин, взятых в тот же момент времени. Выше для одного примера устойчивой системы с гамильтонианом (3.19) было показано, что условием существования квазиклассического приближения на интервале времени T является неравенство (см. формулу (3.24))

$$\zeta \ll 1. \quad (5.37)$$

Этот же вывод был получен в конце § 9.4 из общих соображений о расплывании волнового пакета для устойчивой системы. Покажем, что неравенство (5.37) возникает и в случае квантовой K -системы. Известно, что для классической K -системы минимальным характерным временем является время τ_c перемешивания в фазовом пространстве. Только на временах $t \gg \tau_c$ могут проявиться стохастические свойства системы. Совмещение этого условия с условием (5.32) снова приводит к неравенству (5.37) для существования квазиклассического приближения на таких временах, на которых могли бы проявиться стохастические свойства системы.

Если термин «стохастичность» употребляется только в том смысле, в котором он определен для классических систем, то нетрудно видеть, что при условии

$$\zeta \gg 1 \quad (5.38)$$

динамика системы определяется существенно квантовыми законами. Другими словами, при выполнении неравенства (5.38) классический предел сильно отличается от истинных средних значений операторов, несмотря на то, что ортодоксальное условие так называемого квазиклассического приближения (5.35) выполнено (большие квантовые числа). Поэтому значение $\zeta \sim 1$ можно принять в качестве квантовой границы стохастичности.

Полезно также обсудить, почему ранее не возникал вопрос о том, что кроме обычного неравенства (5.35) необходимо еще выполнение дополнительного условия (5.37) для того, чтобы квазиклассическое приближение имело хоть какой-то смысл. Это легко понять, если обратиться к тому представлению для ζ , которое дается формулой (5.36). Для устойчивых динамических систем (при $\hbar = 0$) параметр $K < 1$. Поэтому обычное условие квазиклассичности (5.35) автоматически приводило также к неравенству (5.37).

Однако в случае квантовых K -систем параметр K может быть велик по сравнению с единицей. Поэтому даже при выполнении неравенства (5.35) отношение K/\hbar может быть любым. В этом и заключается нетривиальность параметра ζ для квантовых K -систем.

Проведенный выше анализ показывает, что для квантовых K -систем в любом случае существует такое время, начиная с ко-

того квазиклассический подход перестает быть справедливым, и следует обратиться к другому, существенно квантовому анализу.

Комментарии к гл. 9

1. При исследовании условий перемешивания в классических системах Крылов [42] начал также работу по анализу квантовых систем. Попытка исследования стохастичности квантового газа твердых шариков путем анализа изменения волновой функции в результате рассеяния была предпринята в работе [129]. Аналогичный путь использовался для объяснения ряда экспериментальных фактов во множественном рождении частиц при столкновениях высоких энергий [130]. Различные качественные соображения о том, каков должен быть энергетический спектр системы в условиях стохастичности, высказались в работах [131, 132]. Формулировка и исследование ряда задач о квантовых K -системах были проведены в работах [73, 133—136]. В статьях [137, 138] содержится обзор результатов по исследованию стохастичности в квантовых системах. Численный анализ динамики квантовых K -систем проводился в [139, 140].

ГЛАВА 10

СТОХАСТИЧНОСТЬ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

(продолжение)

Результаты предыдущей главы позволяют понять различие в динамике волновых функций и средних значений операторов физических величин для устойчивых ($K \ll 1$) и стохастических ($K \gg 1$) систем. Этот анализ показывает, что при условии $\xi \ll 1$ существует такое время, в течение которого поведение системы близко к классическому, а влияние квантовых поправок мало. В течение этого времени можно пользоваться квазиклассическим приближением и приписывать системе свойства, близкие к свойствам классических K -систем.

Эта глава посвящена определению динамики квантовых K -систем на больших временах, когда квантовые поправки уже не малы.

§ 10.1. Квантовое отображение волновых функций

Формулы отображения. Вычисление средних значений. Обобщения

В § 9.2 мы уже показывали, каким образом может быть получено квантовое отображение для волновой функции в представлении Шредингера (см. формулу (9.2.6)). К сожалению, этот путь не очень удобен, так как необходимо «распутывать» операторные функции. Рассмотрим другую модификацию метода построения квантовых отображений [148] (ком. 1).

Пусть гамильтониан системы снова взят в виде (9.5.1). Согласно формуле (9.2.6) имеем

$$\psi_{n+1} = \exp[-i\epsilon(a^+ + a)] \exp[-i(\omega a^+ a + \hbar\mu(a^+ a)^2)T]. \quad (1.1)$$

Выберем в качестве начального состояния когерентное состояние: $\psi_0 = |\alpha_0\rangle$. Используя разложение (9.3.4), найдем результат действия оператора $\exp(-i\hat{H}_0 T/\hbar)$ на произвольное когерентное

состояние $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_0 T\right) &= \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{(m!)^{1/2}} \exp[-i(m\omega + \hbar\mu m^2)T] |m\rangle, \\ \widehat{H}_0 &= \hbar\omega a^\dagger a + \hbar^2\mu (a^\dagger a)^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} \exp(-i\hbar\mu T m^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi F(\xi) \exp(-im\xi), \\ \Gamma(\xi) &= (4i\pi\hbar\mu T)^{-1/2} \exp\left(\frac{i\xi^2}{4\mu\hbar T}\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для сокращения записи введем интегральные операторы

$$\widehat{\Gamma}(\xi)(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Gamma(\xi)(\cdot), \quad \widehat{\Gamma}^*(\eta)(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \Gamma^*(\eta)(\cdot). \quad (1.4)$$

Подставляя разложение (1.3) в (1.2) и используя обозначение (1.4), находим

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_0 T\right)|\alpha\rangle = \widehat{\Gamma}(\xi)|\alpha \exp[-i(\omega T + \xi)]\rangle. \quad (1.5)$$

С помощью формул (9.3.5) и (9.3.6) можно также получить следующее соотношение:

$$\exp[-i\varepsilon(a^\dagger + a)]|\delta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}i\varepsilon(\delta + \delta^*)\right]|\delta - i\varepsilon\rangle. \quad (1.6)$$

Из определения (1.1) теперь легко записать выражение для ψ_1 , используя результаты (1.5) и (1.6):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \widehat{\Gamma}(\xi) \exp\left[-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha_0 \exp[-i(\omega T + \xi)] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_0^* \exp[i(\omega T + \xi)])\right] |\alpha_0 \exp[-i(\omega T + \xi)] - i\varepsilon\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Аналогично можно выразить ψ_2 через $\psi_0 = |\alpha_0\rangle$ и т. д. Продолжая таким образом итерационный процесс, можно найти

$$\psi_n = \prod_{j=1}^n \widehat{\Gamma}(\xi_j) \exp\left[-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha\{\xi_j\} + \alpha^*\{\xi_j\})\right] |\alpha\{\xi_n\} - i\varepsilon\rangle, \quad (1.8)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \alpha\{\xi_0\} &= \alpha_0, \quad \alpha\{\xi_1\} = \alpha_0 \exp[-i(\omega T + \xi_1)], \\ \alpha\{\xi_j\} &= (\alpha\{\xi_{j-1}\} - i\varepsilon) \exp[-i(\omega T + \xi_j)], \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

С помощью формулы (1.8) можно вычислять среднее значение любой операторной функции $A(a_0^+, a_0)$ в моменты времени $t_n = nT + 0$:

$$\langle A(a_0^+, a) \rangle_n = \text{Sp}(\psi_n^+ A(a_0^+, a_0) \psi_n) = \text{Sp}(\psi_n^+ A^{(N)}(a_0^+, a_0) \psi_n).$$

Подставляя в это выражение значения ψ_n из (1.8), получаем

$$\begin{aligned} \langle A(a_0^+, a_0) \rangle_n &= \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \hat{\Gamma}^*(\eta_k) \hat{\Gamma}(\xi_j) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} i\varepsilon (\alpha \{\xi_j\} + \alpha^* \{\xi_j\}) + \frac{1}{2} i\varepsilon (\alpha \{\eta_k\} + \alpha^* \{\eta_k\}) \right] \times \\ &\times A^{(N)}(\alpha^* \{\eta_n\} + i\varepsilon, \alpha \{\xi_n\} - i\varepsilon) \langle \alpha \{\eta_n\} - i\varepsilon | \alpha \{\xi_n\} - i\varepsilon \rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В частности, из (1.10) следует

$$\begin{aligned} \alpha_n = \langle a_0 \rangle_n &= \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \hat{\Gamma}^*(\eta_k) \hat{\Gamma}(\xi_j) \alpha \{\xi_n\} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} i\varepsilon (\alpha \{\xi_j\} + \alpha^* \{\xi_j\}) + \frac{1}{2} (\alpha \{\eta_k\} + \alpha^* \{\eta_k\}) \right] \times \\ &\times \langle \alpha \{\eta_n\} - i\varepsilon | \alpha \{\xi_n\} - i\varepsilon \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) для α_n можно преобразовать к несколько иной форме. Из рекуррентных соотношений (1.9) следует

$$|\alpha \{\xi_n\} - i\varepsilon|^2 = |\alpha_0|^2 + \varepsilon^2 n + i\varepsilon \sum_{l=1}^n (\alpha \{\xi_l\} - \alpha^* \{\xi_l\}). \quad (1.12)$$

Используя выражение (9.37) для матричных элементов когерентных состояний и формулу (1.12), получаем из (1.11)

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \exp[-|\alpha_0|^2 - \varepsilon^2(n-1)] \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \hat{\Gamma}^*(\eta_k) \hat{\Gamma}(\xi_j) \alpha \{\xi_n\} \times \\ &\times \exp \left[-i\varepsilon \sum_{l=1}^{n-1} (\alpha \{\xi_l\} - \alpha^* \{\eta_l\}) + \alpha^* \{\eta_n\} \alpha \{\xi_n\} \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Мы получили соотношения, которые выражают среднее значение (α_n) оператора a в момент времени $t_n + 0$ через начальное условие (α_0) . Однако рекуррентного соотношения, связывающего α_n с α_{n-1} , не существует, в противоположность тому, что имеет место в классическом пределе (ком. 2).

Определим величину

$$\mathcal{I}_n = \text{Sp}(\psi_n^+ a_0^+ a_0 \psi_n), \quad (1.14)$$

являющуюся аналогом классического действия, взятого в момент времени $t_n + 0$. Используя общую формулу (1.10) и рекуррентные соотношения (1.9), находим

$$\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n + i\varepsilon (\alpha_n - \alpha_n^*) + \varepsilon^2. \quad (1.15)$$

Эта формула определяет рекуррентную связь между значениями \mathcal{J} , взятыми в разные моменты времени.

В заключение этого параграфа приведем некоторые обобщения полученных соотношений. Представим исходный классический гамильтониан системы (9.2.1) в следующем виде:

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(q) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (1.16)$$

где I — классическое действие системы. Квантовым обобщением гамильтониана (1.16) можно выбрать следующее выражение:

$$\hat{H} = \hat{H}_0(a^+a) + \varepsilon \hat{V}(a^+ + a) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (1.17)$$

В этом параграфе были получены квантовые отображения для случая, когда

$$\hat{H}_0(a^+a) = \hbar\omega a^+a + \hbar^2\mu (a^+a)^2,$$

$$\hat{V}(a^+ + a) = \frac{\hbar}{T} (a^+ + a).$$

Аналогичные отображения легко построить и для произвольных функций $\hat{H}_0(a^+a)$ и $\hat{V}(a^+ + a)$, используя соответствующее фурье-преобразование. Приведем соответствующие выражения.

Пусть $E(m)$ — собственные значения оператора $\hat{H}_0(a^+a)$ и $m \geq 0$ — целое число, т. е.

$$H_0(a^+a)|m\rangle = E(m)|m\rangle.$$

Тогда

$$\hat{T}_0|\beta\rangle \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0T\right)|\beta\rangle = \hat{\Gamma}_0(\xi)|\beta \exp(-i\xi)\rangle, \quad (1.18)$$

где оператор $\hat{\Gamma}_0(\xi)$ определен аналогично (1.4) с ядром

$$\Gamma_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E(z)T + iz\xi\right]. \quad (1.19)$$

Аналогично представим

$$\hat{T}_\varepsilon \equiv \exp[-i\varepsilon\hat{V}(a^+ + a)] = \int d\bar{\xi} \Gamma_\varepsilon(\bar{\xi}) \exp[-i(a^+ + a)\bar{\xi}], \quad (1.20)$$

$$\Gamma_\varepsilon(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int dx \exp[-i\varepsilon V(x) + i\bar{\xi}x].$$

С помощью выражений (1.6) и (1.20) можно записать действие оператора возмущения на когерентное состояние:

$$\hat{T}_\varepsilon|\delta\rangle = \hat{\Gamma}_\varepsilon(\bar{\xi}) \exp\left[-\frac{1}{2}i\bar{\xi}(\delta + \delta^*)\right]|\delta - i\varepsilon\rangle. \quad (1.21)$$

Теперь запишем действие оператора сдвига \hat{T} на время T :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \hat{T}\psi_0 = \hat{T}|\alpha_0\rangle = \hat{T}_\varepsilon\hat{T}_0|\alpha_0\rangle = \\ &= \hat{\Gamma}(\xi, \bar{\xi}) \exp\left[-\frac{1}{2}i\bar{\xi}(\alpha_0 e^{-i\varepsilon} + \alpha_0^* e^{i\varepsilon})\right]|\alpha_0 e^{-i\varepsilon} - i\bar{\xi}\rangle, \quad (1.22)\end{aligned}$$

где

$$\hat{\Gamma}(\xi, \bar{\xi}) = \hat{\Gamma}_\varepsilon(\bar{\xi})\hat{\Gamma}_0(\xi).$$

Формула (1.22) является обобщением формулы (1.7). Последовательные итерации приводят также к обобщению формулы (1.8):

$$\begin{aligned}\psi_n &= \prod_{j=1}^n \hat{\Gamma}(\xi_j, \bar{\xi}_j) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}i\varepsilon(\alpha|\xi_j, \bar{\xi}_j\rangle + \alpha^*|\xi_j, \bar{\xi}_j\rangle)\right]|\bar{\alpha}|\xi_j, \bar{\xi}_j\rangle, \quad (1.23)\end{aligned}$$

где рекуррентные соотношения (1.9) заменяются на следующие:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}|\xi_0, \bar{\xi}_0\rangle &= \bar{\alpha}_0, \\ \bar{\alpha}|\xi_j, \bar{\xi}_j\rangle &= \bar{\alpha}|\xi_{j-1}, \bar{\xi}_{j-1}\rangle e^{-i\bar{\xi}_j} - i\bar{\xi}_j, \\ \alpha|\xi_j, \bar{\xi}_j\rangle &= \bar{\xi}_j(\bar{\alpha}|\xi_j, \bar{\xi}_j\rangle + i\bar{\xi}_j) \quad (j = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Выражения (1.8) и (1.23) решают задачу о построении квантовых отображений для гамильтонианов типа (1.17). То обстоятельство, что в качестве начального состояния было выбрано когерентное состояние, не является существенным. Действительно, любое другое начальное состояние может быть разложено по базису когерентных состояний в силу полноты этого базиса.

§ 10.2. Анализ квантовых отображений

Корреляция фаз. Локальная неустойчивость. Квантовая граница. Диффузия

Формула (1.11) определяет точное выражение для проекции оператора a на фазовое пространство в момент времени $t_n = nT + 0$. Выражение для проекции оператора a^+ находится из (1.11) путем комплексного сопряжения. Уравнение (1.11) содержит основную физическую информацию. Действительно, в классическом пределе ($\hbar = 0$) выражение для \mathcal{R}_n (9.5.17) определяет корреляцию фаз системы. Положим

$$\alpha_n = |\alpha_n| \exp(-i\theta_n)$$

и рассмотрим величину

$$\mathcal{R}_n^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \alpha_n \alpha_0^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 |\alpha_n \alpha_0| \exp[-i(\vartheta_n - \vartheta_0)]. \quad (2.1)$$

Поскольку величина $|\alpha_n|$ медленно меняется со временем при $K \gg 1$, то

$$\mathcal{R}_n^\alpha \sim \mathcal{R}_n |\alpha_0|^2. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что вычисление коррелятора (2.1) фактически дает возможность определить корреляцию фаз проекций α_n . Более того, выбор начального условия при $K \gg 1$ является несущественным. Поэтому

$$\mathcal{R}_n^\alpha \sim |\alpha_0| \langle \alpha_n \rangle, \quad (2.3)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают, как и ранее, интегрирование по фазе. Таким образом, усреднение выражения (1.11) по начальной фазе определяет (с точностью до медленно меняющегося множителя) квантовый коррелятор фаз, являющийся аналогом коррелятора фаз в классическом пределе в соответствии с соотношениями (2.1)–(2.3).

Ранее в классическом пределе ($\hbar = 0$) было получено выражение (9.5.11) для величины \mathcal{R}_n . Используя его и формулу (2.2), находим

$$\mathcal{R}_n^\alpha \sim |\alpha_0|^2 \exp(-nT/\tau_c). \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) имеет ограниченное время применимости, которое совпадает со временем применимости квазиклассического приближения. Это время t_n приведено в формуле (9.5.32): $t_n = \tau_c \ln(1/\xi)$. Подставляя его в формулу (2.4) вместо nT , находим тот уровень затухания корреляционной функции, который может быть получен из квазиклассического анализа:

$$\mathcal{R}_{i_n}^\alpha \sim \xi^{1/4} = (\hbar \mu T)^{1/4}. \quad (2.5)$$

Корреляционная функция \mathcal{R}_n^α затухает экспоненциально (как и в классическом пределе) до величины порядка $\xi^{1/4}$ за время $\sim t_n$. Следующая задача состоит в определении закона поведения величины \mathcal{R}_n^α при $t \gg t_n$. Этой цели и служит формула (2.3), в которой среднее $\langle \alpha_n \rangle$ должно находиться из точного выражения (1.13). Такие вычисления были проведены в работе [148]. Они являются довольно громоздкими, и поэтому мы приведем лишь конечный результат:

$$\mathcal{R}_n^\alpha \geq \text{const} / \sqrt{n\kappa}. \quad (2.6)$$

Таким образом, начиная с величины порядка (2.5) дальнейшее убывание корреляционной функции со временем происходит не быстрее, чем степенным образом (ком. 3).

Медленное убывание корреляций на больших временах означает отсутствие в квантовых K -системах полного перемешивания — обстоятельство, являющееся прямым следствием соотношения неопределенности. Грубая интерпретация сделанного замечания состоит в том, что в ячейке фазового пространства объемом \hbar невозможно разместить более одного состояния, и поэтому состояния нельзя достаточно хорошо «размещать» в фазовом пространстве.

Приведенная особенность квантовых K -систем находит свое отражение также и при анализе свойств локальной неустойчивости.

В классическом пределе локальной неустойчивостью обладает величина $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$ (см. формулу (9.5.24) *). Оценим ее в квантовом случае, используя точное выражение (1.13) для α_n . Имеем

$$\frac{\partial\alpha_n}{\partial\theta_0} = \exp[-|\alpha_0|^2 + \varepsilon^2(n-1)] \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \hat{\Gamma}^*(\eta_k) \hat{\Gamma}(\xi_j) Q \times \exp\left[-i\varepsilon \sum_{l=1}^{n-1} (\alpha\{\xi_l\} - \alpha^*\{\eta_l\}) + \alpha^*\{\eta_n\} \alpha\{\xi_n\}\right], \quad (2.7)$$

где обозначено

$$Q = \frac{\partial\alpha\{\xi_n\}}{\partial\theta_0} + \alpha\{\xi_n\} \left[-i\varepsilon \sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{\partial\alpha\{\xi_l\}}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\alpha^*\{\eta_l\}}{\partial\theta_0} \right) + \frac{\partial\alpha^*\{\eta_n\}}{\partial\theta_0} \alpha\{\xi_n\} + \alpha^*\{\eta_n\} \frac{\partial\alpha\{\xi_n\}}{\partial\theta_0} \right]. \quad (2.8)$$

Воспользуемся выражениями

$$P_n(\xi) = \exp[-in\omega T - i(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)].$$

С их помощью из определений (1.9) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha\{\xi_l\}}{\partial\theta_0} &= -iP_l(\xi) \alpha\{\xi_l\}, \\ \frac{\partial\alpha^*\{\eta_l\}}{\partial\theta_0} &= iP_l^*(\eta) \alpha^*\{\eta_l\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Формулы (2.9) следует подставить в (2.8), а получившееся выражение — в (2.7). Поскольку $|P_l| = 1$ для любого l , то отсюда сразу следует оценка

$$|\partial\alpha_n/\partial\theta_0| \leq \text{const } n|\alpha_n|. \quad (2.10)$$

Таким образом, рост величины $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$ происходит в квантовом случае не быстрее, чем степенным образом, и, следовательно,

*) Напомним, что в данном случае локальная неустойчивость проявляется в том, что модуль разности двух значений амплитуды α_n , принадлежащих двум траекториям с малой разностью начальных значений фаз θ_0 , экспоненциально растет со временем.

экспоненциальная локальная неустойчивость на больших временах отсутствует. Эквивалентное утверждение заключается в том, что энтропия Колмогорова для динамики средних значений равна нулю (ком. 4). Этот факт также отражает существование корреляций в квантовых системах.

Влияние квантовых эффектов на отклонения законов эволюции средних значений (α_n, α_n^*) от соответствующих классических законов может быть сформулировано в более явном виде.

Рассмотрим снова соотношение (1.13) при $n=1$ и выполним интегрирование по ξ_1, η_1 . Это дает

$$\alpha_1 = \exp\{-i(\omega + \hbar\mu)T - (1 - \exp(-2i\hbar\mu T))|\bar{\alpha}_0|^2\}\bar{\alpha}_0, \quad (2.11)$$

$$\alpha_0 \equiv \alpha_0 - i\varepsilon.$$

Из формулы (2.11) сразу видна роль параметра

$$\zeta = \hbar\mu T, \quad (2.12)$$

определенного формулой (9.4.3). При $\zeta \ll 1$ можно произвести разложение по ζ . В этом случае отображение (2.11) переходит в классическое с добавлением малых поправок порядка $\hbar\mu T$. Дальнейшая итерация приводит к быстрому накоплению этих поправок. При $\zeta \gg 1$ квантовые эффекты существенны уже на первом шаге отображения, которое в этом случае сильно отличается от классического.

Формула (2.11) позволяет, таким образом, сделать утверждение о том, что область сильного влияния квантовых эффектов отделена от области слабого их влияния границей

$$\zeta \sim 1, \quad (2.13)$$

которая уже была получена в § 9.5 из качественных соображений. Подчеркнем, что в данном случае значение (2.13) следует из точного выражения (2.11).

Условие существования квазиклассического приближения для описания квантовой K -системы в течение конечного (но не малого) времени выражается неравенством $\zeta \ll 1$, или, согласно формуле (9.5.36), неравенством $K \ll \kappa$. С другой стороны, условие того, что система является K -системой, заключается в неравенстве $K \gg 1$. Совмещение этих двух условий дает

$$\kappa \gg K \gg 1. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) определяет значения параметров, при которых динамика квантовой K -системы в течение длительного времени близка к динамике классической K -системы.

Однако существование хотя и малых, но конечных корреляций в квантовом случае оказывает определенное влияние на процесс диффузионного изменения «медленной» переменной \mathcal{I} . Согласно формуле (1.14) эта переменная является аналогом классического действия системы I . Медленные случайные изменения

действия I описываются уравнением диффузии (9.5.19). Согласно формуле (9.5.21) имеет место закон

$$\langle I(t) \rangle = I(0) + \varepsilon^2 t / T. \quad (2.15)$$

Обратимся теперь к квантовому случаю. Из точного соотношения (1.15) следует

$$\langle \mathcal{J}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \mathcal{J}_n = \mathcal{J}_0 + \varepsilon^2 n + i\varepsilon \sum_{m=1}^{n-1} (\langle \alpha_m \rangle - \langle \alpha_m^* \rangle), \quad (2.16)$$

где

$$\langle \alpha_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \alpha_m. \quad (2.17)$$

В классическом пределе средние по фазе $\langle \alpha_m \rangle$, $\langle \alpha_m^* \rangle$ обращаются в нуль и формула (2.16) после замены $n = t/T$ переходит в формулу (2.15). Однако в квантовом случае величина $\langle \alpha_m \rangle$ пропорциональна коррелятору \mathcal{R}_m^α в соответствии с формулой (2.3). Эти корреляторы лишь на временах $t < t_\lambda$ убывают экспоненциально, и поэтому на этих временах

$$\langle \mathcal{J}(t) \rangle \approx \mathcal{J}_0 + \varepsilon^2 t / T \quad (t < t_\lambda), \quad (2.18)$$

что совпадает с классическим выражением (2.15). Однако при $t > t_\lambda$ поведение коррелятора \mathcal{R}_n^α меняется и определяется формулой (2.6). Поэтому, несмотря на малость величин $\langle \alpha_m \rangle$, их сумма в выражении (2.16) начинает накапливаться и существенно влияет на асимптотическое поведение $\langle \mathcal{J}(t) \rangle$. Для его оценки, очевидно, необходимо более точное определение затухания корреляционной функции \mathcal{R}_n^α , чем это сделано в формуле (2.6) (ком. 5).

§ 10.3. Взаимодействие квантовых резонансов

Квантовый нелинейный резонанс во внешнем поле. Эффективный гамильтониан. Взаимодействие двух резонансов при их перекрытии. Численный анализ стохастичности при перекрытии резонансов

В 4.2 было показано, что в типичной ситуации для классических систем условие стохастичности совпадает с критерием перекрытия резонансов (4.2.8), предложенным Чириковым. В тех случаях, когда ширина отдельного резонанса совпадает с расстоянием до ближайшего резонанса, возникает случайное движение. Естественно рассмотреть подобную ситуацию и в квантовом случае.

Исследуем сначала вопрос об изолированном нелинейном резонансе в квантовом случае [150]. Пусть гамильтониан системы

задан в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \cos \nu t \quad (3.1)$$

и описывает действие периодической во времени силы на некоторую нелинейную систему с гамильтонианом \hat{H}_0 . Обозначим через E_n и ψ_n собственные значения и собственные функции невозмущенной задачи

$$\hat{H}_0 \psi_n = E_n \psi_n. \quad (3.2)$$

По аналогии с классическим случаем (см. § 1.3) мы рассмотрим следующую ситуацию. Пусть частота внешнего возмущения ν близка к частоте перехода невозмущенной системы ω_{n_0} в окрестности уровня с номером n_0 , т. е.

$$\hbar \nu \approx \hbar \omega_{n_0} = E_{n_0+1} - E_{n_0}. \quad (3.3)$$

Величину n_0 будем считать большой ($n_0 \gg 1$), что соответствует квазиклассической ситуации. Дальнейшая конкретизация системы связана с характером переходов, близких к резонансному. Если ангармонизм невозмущенной системы очень велик, то переходы, близкие к резонансному переходу (3.3), уже не являются резонансными вследствие сильной неэквидистантности энергетического спектра E_n . В этом случае достаточно ограничиться лишь рассмотрением переходов между двумя уровнями с номерами n_0 и $n_0 + 1$.

В другом предельном случае ангармонизм системы мал и энергетический спектр E_n не очень сильно отличается от эквидистантного. Тогда большое число переходов, находящихся по соседству с основным переходом ($n_0 \approx n_0 + 1$), также близки к резонансным и должны быть рассмотрены одновременно. Именно эта ситуация и будет рассматриваться ниже.

Обозначим через Δn число уровней в окрестности n_0 , которые эффективно захвачены в резонанс. Это означает, что в полосе спектра $n_0 \pm \Delta n$ частоты переходов между соседними уровнями близки к частоте возмущения ν . Будем предполагать выполненным следующее неравенство:

$$n_0 \gg \Delta n \gg 1. \quad (3.4)$$

Введем безразмерные параметры

$$\varepsilon = \frac{2V_{n_0, n_0+1}}{n_0 \hbar \omega_{n_0}}, \quad \mu = \frac{n_0 E_{n_0}''}{\hbar \omega_{n_0}}, \quad (3.5)$$

где штрих означает дифференцирование по n_0 , а матричные элементы возмущения $V_{n, n+1}$ определены обычным образом:

$$V_{n, n+1} = \langle \psi_n | \hat{V} | \psi_{n+1} \rangle.$$

Параметр ε характеризует величину возмущения, а параметр μ — величину нелинейности (ангармонизма энергетического

спектра). Они аналогичны соответственно параметрам ϵ и α , введенным в классическом случае в § 1.3. Будем также предполагать выполненным неравенство

$$\epsilon \ll \mu_0 \ll 1/\epsilon, \quad (3.6)$$

которое соответствует неравенству (1.3.7). Представим волновую функцию $\psi(x, t)$ полной системы (3.1) в виде следующего разложения по собственным функциям невозмущенной задачи (3.2):

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) \exp \left[-i \left((n - n_0) \nu + \frac{1}{\hbar} E_{n_0} \right) t \right]. \quad (3.7)$$

Подставим выражение (3.7) в уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V} \cos \nu t) \psi(x, t).$$

Оставляя только резонансные члены, находим

$$i\hbar \dot{c}_n = w_n c_n + V_{n, n+1} c_{n+1} + V_{n, n-1} c_{n-1}, \quad (3.8)$$

где

$$w_n = E_n - E_{n_0} - \hbar \nu (n - n_0). \quad (3.9)$$

В системе (3.8) следует оставить только такие n , которые лежат в области $\sim (n_0 - \Delta n, n_0 + \Delta n)$, где переходы близки к резонансным. Величина Δn и оправдание неравенства $\Delta n \ll n_0$ (3.4) будут приведены ниже.

Произведем разложение в формуле (3.9) в ряд по малой величине $(n - n_0)$:

$$w_n \approx w_{n_0} + w'_{n_0} (n - n_0) + 1/2 w''_{n_0} (n - n_0)^2.$$

Учитывая определение

$$\hbar \omega_n = E_{n+1} - E_n \approx E'_n$$

и условие резонанса (3.3), получаем для w_n :

$$w_n \approx 1/2 E''_{n_0} (n - n_0)^2. \quad (3.10)$$

Вследствие малости возмущения можно заменить в системе (3.8) всюду $V_{n, n\pm 1}$ на $V_{n_0, n_0\pm 1}$. Кроме того, из неравенства $n_0 \gg 1$ имеем

$$V_{n_0, n_0+1} \approx V_{n_0, n_0-1} \equiv V_{n_0}.$$

Теперь исходная система существенно упрощается:

$$i\hbar \dot{c}_n = 1/2 E''_{n_0} (n - n_0)^2 c_n + V_{n_0} (c_{n+1} + c_{n-1}). \quad (3.11)$$

Система (3.11) легко решается. Действительно, введем новые амплитуды $a(\varphi, t)$ согласно формуле

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi a(\varphi, t) \exp [i(n - n_0)\varphi], \quad (3.12)$$

причем

$$a(\varphi, t) = a(\varphi + 2\pi, t). \quad (3.13)$$

Подстановка (3.12) в (3.11) дает

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} a, \quad (3.14)$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} E_{n_0}'' \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + U(\varphi), \quad U(\varphi) = 2V_{n_0} \cos \varphi.$$

Мы пришли к уравнению Шредингера для квантового ротатора с массой, пропорциональной $1/E_{n_0}''$. Классическим аналогом гамильтониана является эффективный гамильтониан (1.3.10), описывающий фазовые колебания системы вблизи резонанса.

Общее решение задачи (3.14) имеет вид

$$a(\varphi, t) = \sum_q b_q \chi_q(\varphi) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \lambda_q t\right), \quad (3.15)$$

где λ_q и χ_q — соответственно собственные значения и собственные функции стационарной задачи

$$\widehat{\mathcal{H}} \chi_q = \lambda_q \chi_q, \quad (3.16)$$

а b_q — коэффициенты разложения, определяемые начальным условием. Из вида оператора $\widehat{\mathcal{H}}$ следует, что уравнение (3.16) является уравнением Матье. Тем самым система собственных значений λ_q и собственных функций χ_q известна. Спектр λ_q имеет зонную структуру. Согласно условию (3.13) нам необходимо отобрать только периодические по φ функции $\chi_q(\varphi)$. Им соответствуют функции Матье первого рода и те значения λ_q , которые расположены на границах зон. Именно эти функции χ_q и соответствующие им собственные значения λ_q входят в разложение (3.15).

Пусть теперь $c_n(0)$ определяют начальные значения амплитуд $c_n(t)$ в системе (3.8). Тогда из (3.12) и (3.15) следует, что

$$c_n(t) = \sum_m \sum_q c_m(0) \chi_q(n - n_0) \chi_q(n_0 - m) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \lambda_q t\right),$$

где

$$\chi_q(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(in\varphi) \chi_q(\varphi).$$

Это и есть решение задачи о нелинейном резонансе, выраженное через начальные условия.

Оценим число уровней Δn , захваченных в резонанс. Из формул (3.14) для $\widehat{\mathcal{H}}$ имеем

$$\frac{\Delta n}{n_0} \sim \left(\frac{2V_{n_0}}{n_0^2 |E_{n_0}''|} \right)^{1/2} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^{1/2}, \quad (3.17)$$

где использованы обозначения (3.5). Из принятого условия (3.6) следует согласно (3.17), что $\Delta n \ll n_0$, т. е. неравенство (3.4). Это оправдывает произведенные ранее разложения по Δn .

Полученный результат может быть также интерпретирован следующим образом. Под влиянием периодического возмущения уровни энергии невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 в полосе $(n_0 - \Delta n, n_0 + \Delta n)$ «расщепляются» на уровни квазиэнергии. Число квазиуровней в окрестности каждого из уровней в полосе $(n_0 - \Delta n, n_0 + \Delta n)$ порядка Δn , т. е. порядка числа уровней, захваченных в резонанс. Это утверждение вытекает из того, что именно столько различных функций χ_α входит эффективно в разложение (3.15).

Расстояние между уровнями квазиэнергий имеет порядок

$$\Delta E_{\min} \sim \min \lambda_q \sim (V_{n_0} |E_{n_0}''|)^{1/2} \sim \hbar \omega_{n_0} (\epsilon \mu_0)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Нетрудно видеть (см. формулу (1.3.13)), что частота переходов между уровнями квазиэнергий $\Delta E/\hbar$ соответствует частоте фазовых колебаний в классическом пределе. В силу второго неравенства в формуле (3.6) имеем

$$\Delta E \ll \hbar \omega_{n_0}, \quad (3.19)$$

что оправдывает использование резонансного приближения.

Обратим также внимание на то, что величина «расщепления» уровней ΔE пропорциональна $\epsilon^{1/2}$, а не ϵ , как, например, при резонансном возмущении двухуровневой системы. На первый взгляд может показаться, что все основные особенности квантового нелинейного резонанса те же, что и в классическом случае. В действительности имеется одно существенное отличие, связанное со вторым неравенством в (3.4): $\Delta n \gg 1$. Оно проявляется при взаимодействии резонансов, которое рассматривается ниже.

Взаимодействие нескольких резонансов возникает при их перекрытии. В классическом случае (§ 4.2) перекрытие резонансов являлось одним из критериев появления стохастичности. Более сильное утверждение заключалось в том, что стохастичность возникает даже тогда, когда перекрываются всего лишь два резонанса [25, 84]. В этом случае гамильтониан системы имеет, например, вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + 1/2 \hat{V}_1 \cos \nu_1 t + 1/2 \hat{V}_2 \cos \nu_2 t, \quad (3.20)$$

где ν_1 и ν_2 — две частоты внешнего поля. Обозначим через $\Delta \omega_1$, $\Delta \omega_2$ характерные ширины резонансов от взаимодействия с отдельными частотами ν_1 и ν_2 соответственно в классическом случае. Пусть для простоты

$$V_1 = V_2 = V, \quad \Delta \omega_1 \sim \Delta \omega_2 = \Delta \omega.$$

Расстояние между резонансами определяется величиной

$$\delta \omega = |\nu_1 - \nu_2|.$$

Тогда критерий перекрытия резонансов в классическом случае выглядит следующим образом: если выполнено условие

$$|\Delta\omega/\delta\omega - 1| \gg 1,$$

то в фазовом пространстве происходит движение с перемешиванием в области, приблизительно ограниченной границей невозмущенных резонансов.

Простые рассуждения показывают, что невозможно провести прямую аналогию между перекрытием резонансов в классическом случае и в квантовом случае. Действительно, из результатов, полученных в этом параграфе, следует, что изолированный квантовый нелинейный резонанс проявляется в сильном взаимодействии конечного числа ($\sim \Delta n$) состояний с энергиями, лежащими в полосе квантовых чисел $\sim (n_0 - \Delta n, n_0 + \Delta n)$. Это проявляется в том, что система уравнений (3.11) имеет эффективно конечный порядок ($\sim 2\Delta n$). Перекрытие двух резонансов означает, что эффективный порядок системы для амплитуд s_n увеличивается до величины $\sim 4\Delta n$, но тем не менее остается конечным. Таким образом, задача о перекрытии двух резонансов в квантовой механике сводится с формальной точки зрения к системе линейных уравнений. Порядок этой системы конечен, и поэтому в ней не может возникнуть стохастичность (конечные линейные системы таким свойством не обладают).

Приведенные выше рассуждения обладают определенным недостатком: они основаны на результатах, полученных по теории возмущений и примененных к области, в которой эта теория несправедлива. В классическом случае, однако, подобная оценка привела к правильному результату (см. § 4.2). Для анализа квантового случая обратимся к результатам численного анализа [151, 152].

Примем для определенности в гамильтониане (3.20) следующие выражения:

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega[a^+a + \mu_0(a^+a)^2], \quad \hat{V} = \hat{V}_1 = \hat{V}_2 = V_0(a^+ + a). \quad (3.21)$$

Тогда невозмущенный спектр задачи имеет вид

$$E_n = \hbar\omega(n + \mu_0 n^2), \quad (3.22)$$

где $\hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle$. Приведем задачу к симметричной форме. Определим число n_0 следующим уравнением:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \approx \frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E_n}{\partial n} \right|_{n=n_0} = \omega(1 + 2\mu_0 n_0) \equiv \omega_{n_0} \quad (3.23)$$

и представим, согласно (3.22) и (3.23), E_n в виде

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n_0} + \frac{\partial E_{n_0}}{\partial n_0} (n - n_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_{n_0}}{\partial n_0^2} (n - n_0)^2 \approx \\ &\approx E_{n_0} + \hbar v (n - n_0) + \hbar\omega\mu_0 (n - n_0)^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Теперь можно сохранить ту же форму разложения (3.7):

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t) \exp \left[-i(n - n_0) \nu t + \frac{1}{\hbar} E_{n_0} t \right] \psi_n. \quad (3.25)$$

В том же приближении (3.4) и (3.6) и с учетом представления (3.24) уравнения для амплитуд A_m имеют вид

$$i\dot{A}_m = \nu \mu_0 m^2 A_m + V_0 \cos \left(\frac{1}{2} \delta \omega t \right) (A_{m+1} + A_{m-1}), \quad m \equiv n - n_0, \quad (3.26)$$

где $\delta \omega$ — расстояние между резонансами. Система уравнений (3.26) аналогична системе (3.11) и является ее обобщением на случай двух резонансов. При $\delta \omega = 0$ уравнения (3.26) переходят в уравнения (3.11), а амплитуды A_m совпадают с амплитудами c_{n-n_0} .

Аналогично формуле (3.12) произведем разложение:

$$A_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi a(\varphi, t) \exp(im\varphi). \quad (3.27)$$

После подстановки (3.27) в (3.26) получаем

$$i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} a, \quad \widehat{\mathcal{H}} = -\hbar \nu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + U(\varphi, t), \quad (3.28)$$

$$U(\varphi, t) = 2V_0 \cos(1/2 \delta \omega t) \cos \varphi.$$

Гамильтониан в (3.28) может быть также записан в виде

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\hbar \mu_0 \nu \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V_0 [\cos(\varphi + \frac{1}{2} \delta \omega t) + \cos(\varphi - \frac{1}{2} \delta \omega t)]. \quad (3.29)$$

При $\delta \omega = 0$ выражения (3.28) и (3.29) переходят в соответствующие формулы (3.14) для одного резонанса.

Основная особенность эффективного гамильтониана (3.29) для двух резонансов состоит в том, что он явно зависит от времени, и избавиться от нее невозможно.

Аналогично формуле (3.5) введем безразмерный параметр возмущения

$$\varepsilon = 2V_0/n_0 \hbar \omega_{n_0} \approx 2V_0/n_0 \hbar \nu. \quad (3.30)$$

Из вида $U(\varphi, t)$ следует, что при очень малых значениях $\delta \omega$ возмущение является адиабатическим и приводит к слабым эффектам. При очень больших значениях $\delta \omega$ возмущение является высокочастотным и также создает малые поправки к основному движению. Наиболее сильное влияние возмущения будет в том случае, когда его частота окажется сравнимой с частотой основно-

го перехода невозмущенного движения. Это условие нетрудно получить из выражений (3.28) и (3.18):

$$\bar{K} = \frac{\omega_{n_0}}{\delta\omega} (\epsilon\mu_0)^{1/2} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim 1, \quad (3.31)$$

где ϵ определено формулой (3.30). Легко видеть, что условие (3.31) выражает фактически условие перекрытия резонансов (сравните также с (4.2.12) и (4.2.13)), поскольку величина $\Delta\omega = \Delta E/\hbar$ определяет ширину одного резонанса по частоте (в классическом пределе).

Приведем теперь данные численного анализа задачи (3.28) [151, 152]. На рис. 10.1 изображено распределение заселенностей по уровням для одного изолированного резонанса (в уравнениях (3.28) или (3.29) полагается $\delta\omega = 0$). Черный кружок обозначает начально заселенный (один) уровень. При выбранных значениях параметров полуширине резонанса соответствует $m^* \sim 14$ ($\Delta n \approx 2m^*$). Из рис. 10.1, а, б видно, что при начальной заселенности с $m > 14$ уровень «расплывается» вследствие переходов слабо. Иная картина распределения заселенностей на рис. 10.1, в, г, д. В этом случае начально заселенный уровень попадает в полосу Δn , т. е. захвачен в нелинейный резонанс, и этим определяется широкая полоса ($\sim \Delta n$) распределения заселенностей. Из рис. 10.1 видно также, что граница нелинейного резонанса является достаточно резкой. Это означает, что туннелирование системы из спектральной полосы, соответствующей ширине нелинейного резонанса, имеет малую вероятность.

Пусть ρ_α — некоторый элемент матрицы плотности. Тогда для анализа динамики $\rho_\alpha(t)$ удобно рассмотреть коррелятор

$$R(\tau) = \text{Re} \frac{\langle \rho_\alpha(t) \rho_\alpha^*(t+\tau) \rangle_t - (\langle \rho_\alpha(t) \rangle_t)^2}{(\langle |\rho_\alpha(t)|^2 \rangle_t)^{1/2}},$$

где усреднение проводится по времени:

$$\langle \dots \rangle_t = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt$$

и величина t_0 выбирается достаточно большой.

На рис. 10.2 приведена корреляционная функция различных элементов матрицы плотности в случае одного изолированного резонанса. Она имеет периодическую структуру с частотой, равной частоте фазовых колебаний $\sim \Delta E/\hbar$ (см. (3.18)). Время τ на рис. 10.2 (и на рис. 10.3) приводится в безразмерной форме: $\tau = vt$.

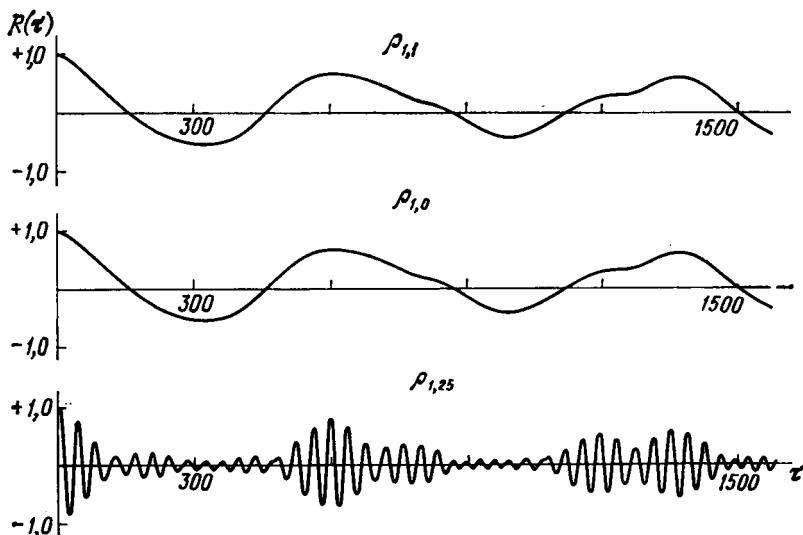


Рис. 10.2. Корреляционная функция элементов матрицы плотности для изолированного резонанса.

Корреляционная функция в случае перекрытия резонансов изображена на рис. 10.3. Теперь картина иная, чем на рис. 10.2. Коррелятор диагонального элемента затухает, что соответствует существованию релаксации диагональных элементов матрицы плотности к равновесному состоянию. При этом имеются большие остаточные корреляции, показывающие, что закон затухания не является экспоненциальным, поскольку диагональные элементы не содержат фазового множителя и, следовательно, по ним отсутствует быстрое перемешивание. Наоборот, корреляторы матричных элементов $\rho_{1,0}$ и $\rho_{1,25}$ быстро затухают с очень слабыми флуктуациями на больших временах.

Если учесть определение матрицы ρ через амплитуды A :

$$\rho_{nm}(\tau) = A_n(\tau) A_m^*(\tau)_z$$

то удобной характеристикой динамики системы является фурье-спектр амплитуд $A_m(\lambda)$:

$$A_m(\tau) = \sum_{\lambda} A_m(\lambda) \exp(-i\lambda\tau).$$

Вид $A_m(\lambda)$ при перекрытии резонансов изображен на рис. 10.4. Его структура близка к непрерывной.

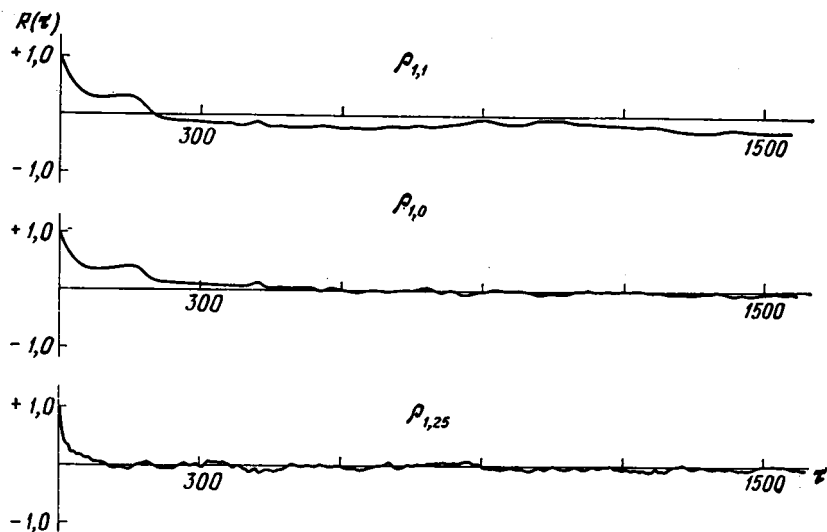


Рис. 10.3. Корреляционная функция элементов матрицы плотности при перекрытии резонансов ($\Delta l = 120$).

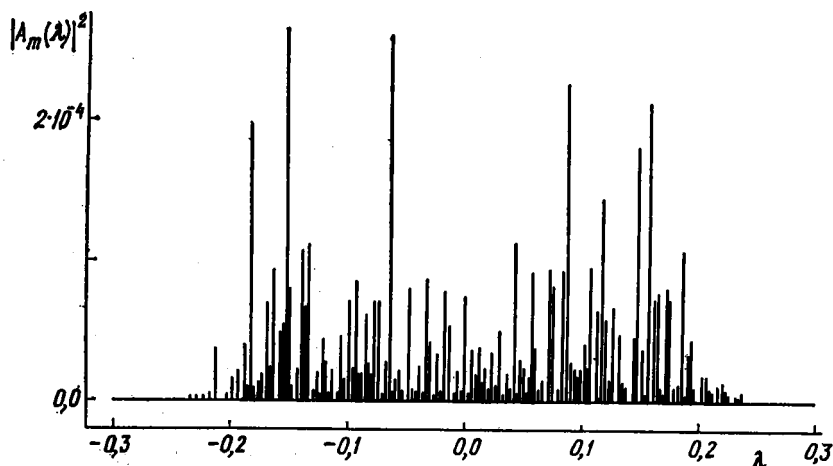


Рис. 10.4. Фурье-спектр амплитуд волновой функции при перекрытии резонансов ($\Delta l = 120$).

Переход от квазипериодической картины (см. рис. 10.2) в случае, когда резонансы находятся далеко друг от друга (изолированные резонансы), к картине, типичной для стохастического движения (см. рис. 10.3 и 10.4), когда резонансы перекрываются, является достаточно резким. При этом число уровней, захваченных в резонанс, должно быть достаточно большим. Если величину Δl уменьшать, то при значениях Δl , меньших нескольких десятков, корреляции велики и затухают очень слабо. Эта область соответствует существенно квантовой ситуации.

Комментарии к гл. 10

1. Излагаемый ниже метод является одним из вариантов использования интегрального представления для оператора сдвига во времени.

2. Можно рассмотреть квазиклассический предел в выражении (1.13). Он приводит к классическому отображению (9.5.10). Для получения квазиклассического предела необходимо вычислить интеграл (1.13) методом перевала. Эти вычисления (см. [148]) являются достаточно громоздкими и здесь не приводятся. Имеет смысл, однако, обратить внимание на то, что метод перевала применяется к $2n$ -кратному интегралу. С увеличением времени t растет порядок интегрирования $2n$. Это приводит к тому, что для достаточно больших n условия применимости метода перевала в выражении (1.13) перестают выполняться (см. подробнее в [148]). Одновременно перестает быть применимым и квазиклассическое приближение.

3. Более детальное исследование различных физических ситуаций для рассмотренной модели содержится в [149].

4. В действительности ситуация с локальной неустойчивостью является несколько более сложной [148]. На малых временах (малые n) оценка выражения (2.7) может быть получена методом перевала и приводит к формуле для $|\partial\alpha_n/\partial\theta_0|$, совпадающей с классическим выражением (9.5.24). Это означает, что на малых временах расходимость траекторий в фазовом пространстве проекций (α_n, α_n^*) является экспоненциальной, как и в классическом случае. Однако с ростом n метод перевала становится неприменимым, и начинает работать оценка (2.10). Близкие результаты приведены для модели квантового ротатора в работе [140].

5. Численный анализ динамики квантового ротатора при $K \gg 1$, проведенный в работах [139, 140], показал, что изменение средней энергии ротатора вначале подчиняется классическому закону. В дальнейшем изменение средней энергии замедляется и имеет тенденцию к насыщению.

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КВАНТОВЫХ K -СИСТЕМ

В гл. 6 уже обсуждался вопрос о выводе кинетического уравнения для классических K -систем. Обычная процедура получения кинетического уравнения связана с использованием гипотезы об ослаблении корреляций или эквивалентного ей допущения (например, приближения хаотических фаз). Это приближение позволяет ввести сокращенное описание системы в виде кинетического уравнения. Однако, как было показано в гл. 6, если известно, что динамическая система является K -системой, то никаких гипотез для получения кинетического уравнения не требуется. Сокращение описания возникает автоматически вследствие существования процесса перемешивания в фазовом пространстве по одной из переменных системы. По этой же переменной происходит и быстрое ослабление корреляций. Аналогичное утверждение (с определенными оговорками) можно сделать и для квантовых K -систем.

Квантовое кинетическое уравнение типа уравнения Больцмана было впервые приведено в работах Улинга и Уленбека [153, 154]. Строгий вывод этих уравнений, основанный на предположении об ослаблении корреляций, был дан Боголюбовым [101, 102]. Другая форма квантового кинетического уравнения, имеющая вид основного кинетического уравнения (master equation), была предложена Паули [155] и обоснована с помощью приближения хаотических фаз также Боголюбовым (см. [102, с. 5]).

В этой главе будет показано, что для квантовых K -систем может быть выведено квантовое кинетическое уравнение типа уравнения Паули без априорного предположения о случайности начальных фаз. Наше изложение будет следовать работе [135]. Модель, на которой будет продемонстрирован метод получения кинетического уравнения, представляет собой квантовый нелинейный осциллятор, возмущаемый внешней периодической силой. Классический вариант этой модели был рассмотрен в § 4.1, а квантовый вариант — в гл. 9 и 10.

Основная идея излагаемого ниже метода [135] заключается в том, чтобы показать, как эргодические свойства квантовой K -системы в классическом пределе приводят к быстрому затуханию

недиагональных элементов матриц плотности. Этот результат получается в квазиклассическом приближении и приводит к возможности сокращенного описания системы в форме кинетического уравнения типа уравнения Паули.

§ 11.1. Уравнение для матрицы плотности

Разложение по степеням возмущения. Выделение Ф-коррелятора. Роль недиагональных элементов матрицы плотности

Этот параграф является вспомогательным. Его цель — получить такое уравнение для матрицы плотности динамической системы, которое являлось бы удобным для анализа квантовых K -систем.

Как и раньше, рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(q, t), \quad (1.1)$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан невозмущенной динамической системы с дискретным спектром, а $\hat{V}(q, t)$ — возмущение, зависящее периодически от времени. Пусть E_n и $\varphi_n(q)$ — собственные значения и собственные функции \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n.$$

Представим волновую функцию системы $\psi(q, t)$ в виде разложения:

$$\psi(q, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(q), \quad (1.2)$$

где амплитуды c_n удовлетворяют уравнению

$$i\hbar \dot{c}_n = E_n c_n + \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}(t) c_m, \quad (1.3)$$

$$V_{nm}(t) = \langle n | \hat{V}(q, t) | m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \varphi_n^*(q) \hat{V}(q, t) \varphi_m(q).$$

Уравнение (1.3) можно также представить в виде следующего интегрального уравнения:

$$c_n(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) c_n(0) - \frac{i}{\hbar} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t U_{nm}(\tau) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_m \tau\right) c_m(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

где обозначено

$$U_{nm}(t) = V_{nm}(t) \exp(i\omega_{nm}t), \quad \omega_{nm} = \frac{1}{\hbar} (E_n - E_m).$$

Далее удобно использовать функцию Грина $G(q, t | q_0, t_0)$ для уравнения Шредингера с гамильтонианом (1.1). Она удовлетворяет уравнению

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 G(q, t | q_0, 0) \psi(q_0, 0).$$

Обозначим

$$G_{nm}(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq dq_0 \psi_n^*(q) G(q, t | q_0, 0) \varphi_m(q_0). \quad (1.5)$$

Из (1.5) и (1.2) следует представление для амплитуд c_n в более короткой форме:

$$c_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}(t, 0) c_m(0). \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь невозмущенную функцию Грина

$$G^0(q, t | q_0, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(q) \varphi_k^*(q_0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_k t\right), \quad (1.7)$$

$$G_{nm}^0(t, 0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \delta_{nm}$$

и воспользуемся следующим представлением для полной функции Грина:

$$G(q, t | q_0, 0) = G^0(q, t | q_0, 0) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t d\tau G^0(q, t | y, \tau) \hat{V}(y, \tau) G(y, \tau | q_0, 0).$$

С помощью выражений (1.5) и (1.7) это уравнение можно переписать в виде

$$G_{nm}(t, 0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \delta_{nm} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t - \tau)\right] \int_{-\infty}^{\infty} dy dq_0 \varphi_n^*(y) \hat{V}(y, \tau) \times \\ \times G(y, \tau | q_0, 0) \varphi_m(q_0). \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) будет использовано ниже. Подставим выражение (1.6) в (1.4):

$$c_n(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right) c_n(0) - \frac{i}{\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \sum_{m, h=1}^{\infty} c_h(0) A_{mh}^{nm}(t, 0), \quad (1.9)$$

где обозначено

$$A_{mk}^{nm}(t, 0) = \int_0^t d\tau U_{nm} \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_m \tau\right) G_{mk}(\tau, 0). \quad (1.10)$$

В уравнении (1.10) верхняя пара индексов для коэффициентов A_{rs}^{pq} относится к возмущению, а нижняя — к функции Грина. Введем теперь матрицу плотности в виде

$$\rho_{mn}(t) = c_m(t) c_n^*(t)$$

и составим для нее уравнение, используя выражение (1.9):

$$\begin{aligned} \rho_{mn}(t) = \exp(-i\omega_{mn}t) \left\{ \rho_{mn}(0) + \right. \\ \left. + \frac{i}{\hbar} \sum_{p,q=1}^{\infty} [\rho_{mp} A_{qp}^{*nq}(t, 0) - \rho_{pn}(0) A_{qp}^{mq}(t, 0)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{p,q,r,s=1}^{\infty} \rho_{rs}(0) A_{pr}^{mp}(t, 0) A_{qs}^{*nq}(t, 0) \right\}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Из формулы (1.11) получаем для диагональных компонент матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \rho_{nn}(t) = \rho_{nn}(0) + \frac{i}{\hbar} \rho_{nn}(0) \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mn}^{*nm}(t, 0) - \text{к. с.}] + \\ + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{kk}(0) \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_{mk}^{nm}(t, 0) \right|^2 + \Phi_{nn}(t, 0), \quad (1.12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{nn}(t, 0) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{p,q=1 \\ (q \neq n)}}^{\infty} [\rho_{nq}(0) A_{pq}^{*np}(t, 0) - \text{к. с.}] + \\ + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\substack{p,q,r,s=1 \\ (r \neq s)}}^{\infty} \rho_{rs}(0) A_{pr}^{np}(t, 0) A_{qs}^{*nq}(t, 0). \quad (1.13) \end{aligned}$$

Смысл проделанных выкладок состоит в следующем. В уравнении (1.12) выделены такие члены, которые содержат только диагональные компоненты матрицы плотности, а все недиагональные компоненты содержатся в функции $\Phi_{nn}(t, 0)$, которую будем называть Φ -коррелятором. Обычное приближение хаотических фаз заключается в следующем условии:

$$\rho_{nm}(0) = \rho_{nn}^{(0)} \delta_{nm}, \quad (1.14)$$

т. е. при $t=0$ все недиагональные компоненты матрицы плотности равны нулю и, следовательно, $\Phi_{nn}(t, 0) \equiv 0$.

Нашей дальнейшей целью будет исследование Φ -коррелятора без использования условия (1.14). Свойства этого коррелятора будут установлены на основе анализа динамических уравнений системы (1.1) в квазиклассическом приближении и в том случае, когда система (1.1) является квантовой K -системой.

Для упрощения задачи будем считать возмущение V малым и в уравнениях (1.11) и (1.12) ограничимся разложением в ряд до членов порядка V^2 включительно. Такая точность достаточна для получения кинетического уравнения. Из формул (1.11)–(1.13) видно, что для требуемой точности необходимо найти величины A_{mn}^{pq} с точностью до членов порядка V^2 . Это означает согласно (1.8), что функцию Грина необходимо вычислить с точностью до членов порядка V . Отсюда следует, что в правой части выражения (1.8) можно заменить G на G_0 , которое определено формулой (1.7). Элементарное вычисление величин A_{mn}^{pq} дает

$$\rho_{nn}(t) = \rho_{nn}(0) + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t d\tau U_{nk}(\tau) \right|^2 [\rho_{kk}(0) - \rho_{nn}(0)] + \Phi_{nn}(t, 0). \quad (1.15)$$

В следующем параграфе проводится вычисление Φ -коррелятора.

§ 11.2. Вывод кинетического уравнения

Функция Грина в квазиклассическом приближении. «Огрубление» матрицы плотности. Затухание Φ -коррелятора и ослабление корреляций. Переход к кинетическому описанию. Пример

Оценим Φ -коррелятор в квазиклассическом приближении. Квазиклассическая функция Грина имеет вид [156]

$$G(q, t | q_0, t_0) = \sum_l \mathcal{D}_l(q, t | q_0, t_0) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_l(q, t | q_0, t_0) - \frac{1}{2} i \mu_l \pi \right\}, \quad (2.1)$$

где преэкспоненциальный множитель \mathcal{D}_l равен

$$\mathcal{D}_l(q, t | q_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi i \hbar)^{1/2}} \left| \frac{\partial^2 S_l(q, t | q_0, t_0)}{\partial q \partial q_0} \right|^{1/2};$$

S_l — действие на l -й траектории классической частицы с гамильтонианом (1.1); q и q_0 — координаты траектории в моменты времени t и t_0 соответственно; μ_l — индекс Морса на l -й траектории; суммирование по l означает суммирование по всем траекториям, удовлетворяющим указанным граничным условиям. После под-

стаповки выражения (2.1) в формулу (1.8) получаем

$$G_{mn}(t, t_0) = \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} dq dq_0 \mathcal{D}_l(q, t | q_0, t_0) \varphi_m^*(q) \varphi_n(q_0) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_l(q, t | q_0, t_0) - \frac{1}{2} i \mu_l \pi \right\}. \quad (2.2)$$

Перейдем теперь в выражении (2.2) от переменных (p, q) к переменным (I, ϑ) . В квазиклассическом приближении можно ввести операторы действия и фазы:

$$\hat{I} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \hat{\vartheta} = \vartheta.$$

В этом представлении $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{I})$, и собственные функции оператора \hat{H}_0 имеют вид

$$\varphi_m(\vartheta) = \exp(im\vartheta)/(2\pi)^{1/2}, \quad (2.3)$$

а собственные значения оператора \hat{I} равны

$$I_m = m\hbar. \quad (2.4)$$

Выражение (2.2) принимает вид

$$G_{mn}(t, t_0) = \sum_l \int_0^{2\pi} d\vartheta d\vartheta_0 \mathcal{D}_l(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0) \exp \left\{ -im\vartheta + in\vartheta_0 + \right. \\ \left. + \frac{i}{\hbar} S_l(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0) - \frac{1}{2} i \mu_l \pi \right\}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{D}_l(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0) = \mathcal{D}_l(q, t | q_0, t_0) \left| \frac{\partial(q, q_0)}{\partial(\vartheta, \vartheta_0)} \right|_l,$$

где индекс l при якобиане преобразования указывает на то, что его вычисление следует проводить на l -й траектории.

Из формулы (2.4) следует, что условие квазиклассичности означает в выражении (2.5): $m \gg 1$, $n \gg 1$. Это позволяет провести дальнейшие упрощения, используя метод перевала. Для экстремальных траекторий в выражении (2.5) получаем

$$\frac{\partial S_l(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0)}{\partial \vartheta} = m\hbar, \quad \frac{\partial S_l(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0)}{\partial \vartheta_0} = -n\hbar. \quad (2.6)$$

Из классической механики известно, что

$$\frac{\partial S(\vartheta; t | \vartheta_0, t_0)}{\partial \vartheta} = I(t), \quad \frac{\partial S(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0)}{\partial \vartheta_0} = -I(t_0). \quad (2.7)$$

Сравнение выражений (2.6) и (2.7) показывает, что в интеграле (1.5) следует оставить только такие траектории, которые определяются следующими начальными и граничными условиями.

моменту времени t_0 соответствуют значения (I_n, ϑ_0) , а моменту времени t — значения (I_m, ϑ) . Уравнение (2.5) переходит в следующее:

$$G_{mn}(t, t_0) \approx \sum_{\text{tr}} \overline{\mathcal{D}} \exp \left\{ -im\vartheta + in\vartheta_0 + \frac{i}{\hbar} S_{mn}(\vartheta, t | \vartheta_0, t_0) \right\},$$

где явный вид предэкспоненты $\overline{\mathcal{D}}$ в дальнейшем не понадобится; сумма берется по указанным выше траекториям; S_{mn} — действие на этих траекториях. Подстановка $G_{mn}(t, t_0)$ в (1.9)–(1.11) дает следующее выражение для матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(t) = & \sum_{p,q=1}^{\infty} \sum_{\text{tr}(1)} \sum_{\text{tr}(2)} \overline{\mathcal{D}}^*(1) \overline{\mathcal{D}}(2) \times \\ & \times \exp \left\{ im\vartheta^{(1)} - in\vartheta^{(2)} - ip\vartheta_0^{(1)} + iq\vartheta_0^{(2)} - \right. \\ & \left. - \frac{i}{\hbar} S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0) + \frac{i}{\hbar} S_{nq}^{(2)}(\vartheta^{(2)}, t | \vartheta_0^{(2)}, t_0) \right\} \rho_{pq}(t_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $t \gg t_0$, а $\overline{\mathcal{D}}(1)$ и $\overline{\mathcal{D}}(2)$ медленно меняются со временем в квазиклассическом приближении. Уравнение (2.8) является исходным для построения кинетического уравнения. В соответствии с обычными принципами получения кинетического описания системы следует ввести некоторую операцию огрубления матрицы плотности. Из (2.8) видно, что матрица $\rho_{nm}(t)$ определена на множестве волновых пакетов, центры которых движутся по траекториям, удовлетворяющим определенным начальным и граничным условиям. Поэтому огрубление можно провести, например, с помощью замены

$$\sum_{\text{tr}} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0. \quad (2.9)$$

Применение оператора (2.9) к выражению (1.8) дает для огрубленной матрицы плотности $\bar{\rho}_{nm}$:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{nm}(t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0^{(1)} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0^{(2)} \rho_{nm}(t) = \\ = & \sum_{p,q=1}^{\infty} \overline{\mathcal{D}}^*(1) \overline{\mathcal{D}}(2) R(m, n, t | p, q, t_0) \bar{\rho}_{pq}(t_0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} R(m, n, t | p, q, t_0) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0^{(1)} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0^{(2)} \times \\ & \times \exp \left\{ im\vartheta^{(1)} - in\vartheta^{(2)} - ip\vartheta_0^{(1)} + iq\vartheta_0^{(2)} - \right. \\ & \left. - \frac{i}{\hbar} [S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0) - S_{nq}^{(2)}(\vartheta^{(2)}, t | \vartheta_0^{(2)}, t_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выражение для R также может быть упрощено, если принять снова во внимание, что в квазиклассическом приближении $S/\hbar \gg 1$. Воспользуемся разложением

$$\begin{aligned}
 S_{nq}^{(2)}(\vartheta^{(2)}, t | \vartheta_0^{(2)}, t_0) &\approx S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0) + \\
 + \frac{\partial S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0)}{\partial \vartheta^{(1)}}(\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}) &+ \frac{\partial S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0)}{\partial \vartheta_0^{(1)}}(\vartheta_0^{(2)} - \vartheta_0^{(1)}) + \\
 + \frac{\partial S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0)}{\partial I_m}(I_n - I_m) &+ \frac{\partial S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0)}{\partial I_p}(I_q - I_p).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Используя формулы (2.6) и известные соотношения классической механики, преобразуем выражение (2.12) в следующее:

$$\begin{aligned}
 S_{nq}^{(2)}(\vartheta^{(2)}, t | \vartheta_0^{(2)}, t_0) - S_{mp}^{(1)}(\vartheta^{(1)}, t | \vartheta_0^{(1)}, t_0) &\approx \\
 \approx I_m(\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}) - I_p(\vartheta_0^{(2)} - \vartheta_0^{(1)}) &+ \vartheta^{(1)}(I_n - I_m) - \vartheta_0^{(1)}(I_q - I_p) + \\
 + \delta = m\hbar\vartheta^{(2)} - p\hbar\vartheta_0^{(2)} + (n - 2m)\hbar\vartheta^{(1)} &- (q - 2p)\hbar\vartheta_0^{(1)} + \delta, \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

где δ — слабо зависящая от ϑ величина. В дальнейшем ее конкретный вид нам не понадобится. Подстановка выражения (2.13) в (2.11) дает

$$\begin{aligned}
 R(m, n, t | p, q, t_0) &\approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0^{(1)} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0^{(2)} \times \\
 \times \exp \{ i(m - n)(\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}) - i(p - q)(\vartheta_0^{(2)} - \vartheta_0^{(1)}) &+ i\delta \} = \\
 = e^{i\delta} |\mathcal{R}(m - n, t | p - q, t_0)|^2, \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

где использовано уже известное выражение для корреляционной функции фаз:

$$\mathcal{R}(r, t | s, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \exp \{ i(r\vartheta - s\vartheta_0) \}. \tag{2.15}$$

Выражения (2.14), (2.15) являются, в определенном смысле, окончательными, так как возможные значения коррелятора фаз \mathcal{R} определяют все дальнейшие свойства системы. Действительно, функция \mathcal{R} является типичным коррелятором фазы $\vartheta(t)$ в момент времени t и фазы $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$ в момент времени t_0 , поскольку ϑ и ϑ_0 лежат на одной и той же классической траектории (см. § 4.1). Формула (2.15) совпадает с (4.1.15). Как было показано в § 4.1, для систем рассматриваемого типа величина $|\mathcal{R}| \sim 1$, если критерий стохастичности не выполняется. В этом случае величина R также порядка единицы и недиагональные элементы не затухают (согласно (2.14)). Это, в частности, показывает, что сама по себе процедура округления (равно как и квантовомехани-

ческое усреднение) не приводит к затуханию корреляций и, следовательно, к возможности сокращенного описания системы — обстоятельство, отмеченное для квантовых систем еще Крыловым [42]. Если, однако, система является K -системой, то положение меняется. Согласно (4.1.17) имеем

$$\mathcal{R} \sim \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_c}\right), \quad t > t_0, \quad (2.16)$$

где τ_c — время расщепления корреляций фаз (время перемешивания). Согласно формулам (2.14) и (2.15) при $t \gg \tau_c$ отличными от нуля остаются лишь такие компоненты R , для которых $m = n$, $p = q$. Обращаясь к выражению (2.10), мы видим, что при $t \gg \tau_c$ затухают (экспоненциально быстро) все недиагональные компоненты матрицы плотности. Поэтому время τ_c есть время ослабления корреляций.

Перейдем теперь к получению кинетического описания системы, используя свойство ослабления корреляций для квантовых K -систем. В уравнении (1.12) от времен $(t, 0)$ перейдем ко временам t_b, t_a ($t_b > t_a$) и применим к нему оператор огрубления (2.9). Это дает

$$\bar{\rho}_{nn}(t_b) = \bar{\rho}_{nn}(t_a) + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{t_a}^{t_b} d\tau U_{nk}(\tau) \right|^2 \times \\ \times [\bar{\rho}_{kk}(t_a) - \bar{\rho}_{nn}(t_a)] + \bar{\Phi}_{nn}(t_b, t_a), \quad (2.17)$$

где

$$\bar{\Phi}_{nn}(t_b, t_a) = \\ = \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{p, q=1 \\ (q \neq n)}}^{\infty} \left[\bar{\rho}_{nq}(t_a) A_{pq}^{*np}(t_b, t_a) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t_a\right) - \text{к. с.} \right] + \\ + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\substack{p, q, r, s=1 \\ (r \neq s)}}^{\infty} \bar{\rho}_{rs}(t_a) A_{pr}^{np}(t_b, t_a) A_{qs}^{*nq}(t_b, t_a). \quad (2.18)$$

Из выражений (2.18) и (2.16), (2.14), (2.10) следует, что при $t_a \gg \tau_c$

$$\bar{\Phi}_{nn} \sim \exp(-t_a/\tau_c).$$

Таким образом, уравнение (2.17) может быть переписано в виде

$$\frac{d\bar{\rho}_{nn}}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} w_{nk} (\bar{\rho}_{kk} - \bar{\rho}_{nn}), \quad (2.19)$$

где $\bar{\rho}_{nn} = \bar{\rho}_{nn}(t)$, индекс a при t_a опущен и

$$w_{nk} = \frac{1}{\Delta t} \left| \int_t^{t+\Delta t} d\tau U_{nk}(\tau) \right|^2. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.19) совпадает по форме с кинетическим уравнением Паули. Его вывод, данный выше, содержит две особенности. Во-первых, использовано свойство перемешивания K -систем по фазам. Это свойство приводит к потере памяти о начальных условиях и к быстрому затуханию за время порядка τ_c недиагональных элементов матрицы плотности. Тем самым не возникает необходимости использовать априори предположения о случайности фаз. Во-вторых, кинетическое уравнение (2.19) получено для определенным образом огрубленной матрицы плотности. Сам способ огрубления также следует из свойств K -систем, так как операция огрубления производится по той же переменной, по которой происходит быстрый процесс перемешивания.

В качестве примера получения вероятности перехода w_{nk} для квантовой K -системы рассмотрим для гамильтониана (1.1) выражение (9.2.8). Тогда потенциал $\hat{V}(q, t)$ является периодической функцией t с периодом T и может быть представлен в виде

$$\hat{V}(q, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V_{\nu}(q) \exp [i\nu\Omega t], \quad \Omega = 2\pi/T.$$

Из определений (1.3) и (1.4) следует

$$U_{nk}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} U_{nk}(\nu) \exp [i(\nu\Omega + \omega_{nk}) t],$$

где

$$U_{nk}(\nu) = \varepsilon \langle n | V_{\nu}(q) | k \rangle.$$

Подстановка этого выражения в (2.20) дает

$$w_{nk} = \pi \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |U_{nk}(\nu)|^2 \delta(\nu\Omega + \omega_{nk}). \quad (2.21)$$

Классическая динамика задачи с гамильтонианом типа (9.2.8) рассмотрена в гл. 4 (§ 4.1). Время $\tau_c = \text{const} \cdot T/\ln K$ (формула (4.1.19)). Используя явный вид $\hat{V}(q, t)$ в (9.2.8), находим, что

$$U_{nk}(\nu) = \varepsilon V_{nk}$$

и не зависит от ν . Таким образом,

$$\frac{d\bar{\rho}_{nn}}{dt} = \frac{\pi\varepsilon^2}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |V_{nk}|^2 (\bar{\rho}_{kk} - \bar{\rho}_{nn}) \delta(\nu\Omega - \omega_{kn}), \quad (2.22)$$

где аргумент δ -функции показывает, что в кинетическом уравнении отбираются только те переходы, которые находятся в резонансе с внешним возмущением.

Уравнение (2.22) описывает хорошо известный процесс релаксации диагональных компонент матрицы плотности к равновесному распределению

$$\bar{\rho}_{nn} = \rho_0$$

для всех n . Согласно (2.21) этот процесс имеет характерное время релаксации порядка $1/\omega_{nk}$.

В заключение этой главы следует сделать одно замечание общего характера по поводу приведенного вывода кинетического уравнения. Оно связано с использованием условия квазиклассичности и с предположением, что параметр ζ достаточно мал. Как известно из § 9.5, именно это условие (см. (9.5.37)) обеспечивает существование стохастичности классического типа в квантовых K -системах. Однако неясным остается чисто квантовый случай ($\zeta \geq 1$, либо достаточно большие времена при $\zeta \ll 1$). Если в такой системе отсутствуют случайные параметры и на нее не действуют случайные силы, то вопрос о том, как возникает сокращенное статистическое описание в существенно квантовом случае, в настоящее время остается открытым.

ГЛАВА 12

РАЗРУШЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

В трех предыдущих главах рассматривались нестационарные квантовые K -системы. Появление стохастичности в них было обусловлено внешним возмущением, зависящим от времени. Настоящая глава посвящается квантованию стационарных (консервативных) гамильтоновых систем, в которых стохастичность возникает в результате взаимодействия между различными степенями свободы, число которых $N \geq 2$.

Основные свойства квантовой консервативной системы характеризуются структурой ее энергетического спектра, который определяется набором квантовых чисел n_1, \dots, n_M . Эти числа являются интегралами движения, и их число $M \leq N$. Поэтому разрушение интегралов движения должно сопровождаться также разрушением квантовых чисел. Последнее обстоятельство в свою очередь сказывается на свойствах энергетического спектра системы. Таким образом, стационарные квантовые K -системы должны иметь некоторый «нестандартный» вид энергетического спектра, исследование которого и составляет содержание этой главы (ком. 1).

Следует заметить, что необходимость разобраться в том, как влияет разрушение квантовых чисел на энергетический спектр системы, отмечалась еще в работе Ландау и Смородинского [164], однако такая возможность появилась лишь после создания теории K -систем.

§ 12.1. Исторические замечания

Правила квантования Эйнштейна. Интегрирование по топологическим орбитам. Гипотезы о спектрах «сложных» систем. Теория Вигнера — Портера — Дайсона

Историю вопроса, который является предметом этой главы, следует начать с работы Эйнштейна [26], опубликованной в 1917 г. и посвященной квазиклассическим правилам квантования. К тому времени были известны правила квантования Бора — Зоммерфельда

$$\frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \hbar n_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.1)$$

где N — число интегралов движения. Эйнштейн считал правила (1.1) неудовлетворительными, так как их применимость была ограничена лишь случаем, когда переменные в системе полностью разделяются. Действительно, только в этом случае можно выбрать такие (p_i, q_i) , чтобы выражения $\oint p_i dq_i$ были интегралами движения. Вместе с тем свойство разделения переменных не связано с собственно квантовой проблемой. Поэтому должен быть такой способ квантования, который применим для произвольной динамической гамильтоновой системы вне зависимости от свойств разделяемости ее переменных.

Эйнштейн предложил другой способ квантования:

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_k} \sum_{i=1}^N p_i dq_i = n_k \hbar \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1.2)$$

где действия I_k и контуры C_k определены в § 1.4 (см. формулу (1.4.3) и рис. 1.12). Напомним, что возможность сопоставить действиям (I_k) систему квантовых чисел (n_k) основана на следующем. Величина

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_C \sum_{i=1}^N p_i dq_i$$

для произвольного контура C является одним из интегральных инвариантов Пуанкаре. Кроме того, в том случае, когда существует точно N независимых и однозначных интегралов движения (т. е. столько, сколько степеней свободы у системы), величина

$$dS = \sum_{i=1}^N p_i dq_i \quad (1.3)$$

является полным дифференциалом и существует N различных неприводимых контуров C_k (см. § 1.4).

Работа Эйнштейна [26] заканчивается замечанием о том, что возможны случаи, когда число интегралов движения меньше числа степеней свободы, как, например (со ссылкой на результаты Пуанкаре), это может быть в задаче трех тел. Сейчас мы в состоянии оценить глубокий внутренний смысл этого замечания. Известно, как много времени и усилий понадобилось на то, чтобы понять, каким образом в динамических системах «исчезают» интегралы движения (см. § 5.3). Поэтому замечание Эйнштейна приводит к следующему вопросу: как квантовать систему, у которой вследствие стохастичности разрушены некоторые из интегралов движения?

Прежде чем перейти к ответу на поставленный вопрос, приведем элементарный вывод правил квантования (1.2) (ком. 2).

Пусть $G(q'', q' | E)$ — функция Грина системы и q — совокупность всех координат (q_1, q_2, \dots, q_N) . Введем функцию отклика

$$g(E) = \int dq G(q, q | E) = \sum_k \frac{1}{E - E_k}, \quad (1.4)$$

где E_k — собственные значения энергии системы. Формула (1.4) следует из определения функции Грина

$$G(q'', q' | E) = \sum_k \frac{\psi_k^*(q'') \psi_k(q')}{E - E_k},$$

в котором $\psi_k(q)$ — волновая функция стационарного состояния с энергией E_k . В квазиклассическом приближении выражение для G может быть упрощено и приведено к следующей хорошо известной форме (см., например, [156]):

$$G(q'', q' | E) \approx A \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q'', q' | E) + \varphi \right\}, \quad (1.5)$$

где A и φ — предэкспоненциальный множитель и фаза, а величина $S(q'', q' | E)$ является действием классической частицы, движущейся с энергией E из точки q' в точку q'' :

$$S(q'', q' | E) = \int_{q'_i}^{q''_i} \sum_{i=1}^N dq_i p_i(q; E). \quad (1.6)$$

Величины A и φ могут быть определены [156]. Их зависимость от координат является медленной. Она приводит к малым поправкам в правилах квантования и в дальнейшем учитываться не будет.

Следует отметить, что в формуле (1.6) точки q' и q'' лежат на одной и той же траектории. Поэтому интегрирование должно производиться по этой траектории. Однако в том и только в том случае, когда число интегралов движения равно N (т. е. числу степеней свободы системы), выражение (1.3) для dS является полным дифференциалом и, следовательно, интегрирование в (1.6) может быть произведено по любому контуру с началом в точке q' и концом в точке q'' . Следующее упрощение при вычислении интеграла (1.4) [168] связано с тем, что величина $S/\hbar \gg 1$, и поэтому функция $g(E)$ должна определяться в классическом приближении точками, где величина S имеет экстремум, т. е.

$$\partial S(q, q | E) / \partial q_i = 0.$$

Вычисление производной дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(q, q | E)}{\partial q_i} &= \left[\frac{\partial S(q'', q' | E)}{\partial q''_i} + \frac{\partial S(q'', q' | E)}{\partial q'_i} \right]_{q''_i = q'_i = q_i} = \\ &= p''_i - p'_i = 0, \quad (1.7) \end{aligned}$$

где p'_i и p''_i — импульсы частицы соответственно в начальной и конечной точках контура интегрирования в формуле (1.6).

Результат (1.7) означает, что в выражении (1.4) для $g(E)$ действие должно вычисляться по таким траекториям системы, у которых совпадают начальные и конечные координаты и импульсы. Другими словами, основной вклад в функцию отклика $g(E)$ дают все возможные периодические траектории. Подобный способ вычисления $g(E)$ уже содержит упрощения, однако все еще остается достаточно сложным. Это связано с тем, как устроены траектории N -мерной системы и, в частности, периодические траектории. Как уже отмечалось (§ 1.4), траектория системы является обмоткой N -мерного инвариантного тора. Таковы все траектории, за исключением тех траекторий, которые лежат на множестве нулевой меры резонансных торов. Эти траектории действительно являются замкнутыми. Наоборот, все остальные траектории являются незамкнутыми и эргодически покрывают поверхность тора. Вследствие этого, если выбрать любой малый элемент объема dq и вывести из него траекторию системы, то через некоторое время она в него вернется с любой, наперед заданной степенью точности. Если к этим сведениям добавить еще, что само выражение (1.5) является асимптотическим и допускает определенную размазку траекторий*), то произведенные нами упрощения покажутся весьма сомнительными.

Однако все упрощается благодаря свойству потенциальности S , т. е. тому, что dS является полным дифференциалом. Вместо периодического контура вдоль траектории системы можно выбрать топологически замкнутые в фазовом пространстве (p, q) орбиты Π , т. е.

$$S_{\Pi}(q, q | E) = \oint_{\Pi} \sum_{i=1}^N p_i dq_i. \quad (1.8)$$

Теперь выражение (1.5) может быть представлено в виде

$$g(E) \approx \text{const} \int dq \sum_{\Pi(q)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\Pi(q)}(E) \right], \quad (1.9)$$

где $\Pi(q)$ — замкнутый контур, проходящий через точку q . Учтем, что контур $\Pi(q)$ может быть представлен в виде суммы произвольного числа неприводимых контуров C_k , введенных в § 1.4 (см. также рис. 1.2). Тогда

$$\Pi(q) = \sum_{k=1}^N m_k C_k, \quad (1.10)$$

где (m_k) — произвольный набор из N целых неотрицательных чисел. На рис. 12.1 дан пример для случая $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_k = 0$

*) Интегрирование в действительности производится по некоторому узкому пучку траекторий.

($k = 3, \dots, N$). Из определения I_k в (1.2) и формулы (1.6) следует, что для контура $\Pi(q)$, определенного формулой (1.10), действие S_Π равно

$$S_\Pi(E) = 2\pi \sum_{k=1}^N m_k I_k(E). \quad (1.11)$$

Обратим внимание на то, что величина $S_\Pi(E)$ в (1.11) не зависит от q . Таким образом, интегрирование в (1.9) сразу выполняется и дает

$$g(E) = \text{const} \cdot V \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \exp \left[\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_{k=1}^N m_k I_k(E) \right], \quad (1.12)$$

где V — объем N -мерного тора, определенного значениями действий (I_1, \dots, I_N). Выражение (1.12) факторизуется:

$$g(E) = \text{const} \cdot V \cdot g_1(E) g_2(E) \dots g_N(E), \quad (1.13)$$

$$g_k(E) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left[\frac{2\pi i}{\hbar} m I_k(E) \right].$$

Выполняя суммирование в (1.13), получаем окончательно

$$g(E) = \text{const} \cdot V \cdot \prod_{k=1}^N \left(1 - \exp \left[\frac{2\pi i}{\hbar} I_k(E) \right] \right)^{-1}. \quad (1.14)$$

Отсюда следует, что полюса функции отклика $g(E)$ определяются условиями (1.2), которые и есть правила квантования Эйнштейна (ком. 3).

Последний шаг заключается в том, чтобы в формулу для гамильтониана

$$H(I_1, I_2, \dots, I_N) = E \quad (1.15)$$

подставить выражения (1.2). Результат определяет N -параметрический спектр собственных значений E .

На всех этапах вывода этих правил существенно использовалось условие существования инвариантных N -мерных торов в фазовом пространстве, на которые навиваются траектории системы. В стохастическом случае часть или все инвариантные торы разрушены и очевидно, что необходим другой подход.

К числу идей, предшествовавших постановке задачи о квантовании стохастических систем, следует также отнести результаты работ совсем иного рода. Эти работы представляли собой попытки решения вопроса о распределении энергетических уровней очень сложных систем. При достаточно большой энергии возбуждения тяжелых ядер структура их энер-

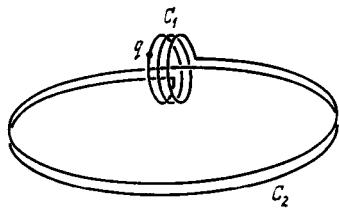


Рис. 12.1. Замкнутый контур, состоящий из трех неприводимых контуров C_1 и двух приводимых контуров C_2 .

гетического спектра очень сильно искажается, и последовательность уровней энергии становится в значительной степени нерегулярной. В этом случае статистическое описание распределения уровней становится более адекватным реальности. Авторами этой идеи Вигнером [171] и Ландау и Смородинским [164] была указана одна принципиальная особенность, связанная с необычностью рассмотрения энергии как случайной переменной: для уровней одной симметрии вероятность $P(E|\Delta E)$ обнаружения двух соседних уровней с энергией E и $E + \Delta E$ на расстоянии ΔE друг от друга должна стремиться к нулю при $\Delta E \rightarrow 0$ (принцип «отталкивания» уровней). Это означало существование сильной корреляции между близкими уровнями. Поэтому распределение расстояний между ними не могло носить характер обычных вероятностных распределений, например пуассоновского $\exp(-\text{const} |\Delta E|)$ или гауссовского $\exp(-\text{const} [\Delta E]^2)$.

Статистическая теория распределения уровней была построена в работах Вигнера, Портера и Дайсона следующим образом. Подобно тому, как в статистической механике вводится определенная гипотеза о статистическом ансамбле состояний, в основу статистической теории энергетического спектра была положена следующая гипотеза: распределение уровней энергии E_k эквивалентно распределению собственных значений λ_k ансамбля случайных матриц определенной симметрии. Будем называть это предположение «гипотезой $\lambda - E$ эквивалентности» (ком. 4). Более аккуратная ее формулировка выглядит так. Рассмотрим очень большую последовательность уровней. Выберем в ней область, содержащую также большое число ($m \gg 1$) уровней. Теперь расположим на единичной окружности собственные значения, например, унитарной матрицы очень высокого порядка со случайными элементами. Выберем на окружности дугу, содержащую примерно m собственных значений. Тогда гипотеза $\lambda - E$ эквивалентности состоит в том, что распределения, полученные для подсистемы из m уровней и m собственных значений, совпадают.

Несмотря на некоторое различие в выборе начальных распределений (гауссовская мера у Вигнера и Портера и мера на группе у Дайсона), конечный результат для функции распределения расстояний между уровнями $P(E|\Delta E)$ в обеих теориях один и тот же:

$$P(E|\Delta E) = a |\Delta E|^\alpha \exp[-b(\Delta E)^2]; \quad (1.16)$$

здесь a и b — некоторые, слабо зависящие от E функции*), а критический показатель α принимает значения 1, 2 или 4 в зависимости от типа симметрии системы.

Наиболее существенной является структура распределения при $\Delta E \rightarrow 0$:

$$P(E|\Delta E) \sim |\Delta E|^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 4 \quad (\Delta E \rightarrow 0). \quad (1.17)$$

*) В теориях Вигнера — Портера и Дайсона имеется слабое различие величин a и b , однако различие в значениях P при этом не превышает нескольких процентов.

Формула (1.17) определяет закон расталкивания уровней. Под пределом $\Delta E \rightarrow 0$ следует понимать неравенство

$$\Delta E / \langle \Delta E \rangle \ll 1, \quad (1.18)$$

где $\langle \Delta E \rangle$ есть среднее расстояние между соседними уровнями.

Гипотеза $\lambda - E$ эквивалентности не была очевидной, и основным аргумент в ее пользу был связан с тем, что распределение собственных значений ансамбля случайных матриц обладает свойством расталкивания, т. е. таким же свойством, каким должно обладать распределение уровней энергии. Однако основным вопросом о том, какие физические причины приводят к случайному распределению уровней, оставался неясным. В теории Вигнера — Портера — Дайсона отсутствие информации об этих причинах компенсировалось введением некоторого расплывчатого понятия о существовании «черного ящика взаимодействий». Аргументация к «сложности» системы также была неудовлетворительной, ибо само определение «сложности» происходило из наивного представления о системе с большим числом степеней свободы. Сейчас нам уже известно, что статистические свойства могут возникнуть даже в системе с двумя степенями свободы, в то время как в системе с большим числом степеней свободы они могут не обнаружиться, если не выполнен критерий стохастичности.

Приведенные замечания являются лишь следствиями основного недостатка гипотезы $\lambda - E$ эквивалентности: эта гипотеза никоим образом не использует информацию о конкретных динамических свойствах системы.

Таким образом, возникает задача об определении функции распределения $P(E|\Delta E)$ из первых принципов, т. е. из уравнений движения системы. Далее мы увидим, что решение этой задачи приводит к принципиально иному результату, чем (1.17) [73, 136—138].

§ 12.2. Постановка задачи

Формулировка задачи. Понятие о сериях уровней. Регулярный и нерегулярный спектры. Понятие о «сложности» системы. Статистический ансамбль уровней

Нас будет интересовать далее следующая задача: каким должен быть энергетический спектр квантовых K -систем? Этот вопрос возникает сразу при попытках квантования классических K -систем. Однако предыдущий параграф показывает, что описанные два направления развития теории энергетических спектров также приводят, по существу, к той же задаче.

Общие закономерности в структуре спектра можно установить в некоторой достаточно большой области значений энергии такой, что в ней содержится много энергетических уровней. Это означает, в частности, что мы попадаем в область квазиклассич-

ности, и поэтому решение задачи об энергетическом спектре квантовых K -систем естественным образом должно определяться динамическими свойствами соответствующей классической системы.

Из формул (1.4), (1.5) и (1.7) следует, что в квазиклассическом приближении

$$g(E) \approx \text{const} \int dq \sum_{C \in \Gamma} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_C(q, q | E) \right], \quad (2.1)$$

где C обозначает любую классическую периодическую траекторию, принадлежащую области фазового пространства Γ , в которой рассматривается движение системы.

Разложим движение системы на метрически неразложимые эргодические компоненты:

$$\Gamma = \sum_r \Gamma^{(r)}, \quad (2.2)$$

т. е. траектории, лежащие в области $\Gamma^{(r)}$, остаются в ней и только в ней. В общем случае компонентами $\Gamma^{(r)}$ являются различные островки устойчивости и области стохастичности (см. § 5.3). Структура выражения (2.1) позволяет с помощью разбиения (2.2) записать

$$g(E) = \text{const} \sum_r \int dq \sum_{C \in \Gamma^{(r)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_C(q, q | E) \right] \equiv \sum_r g^{(r)}(E). \quad (2.3)$$

Таким образом, полюса функции отклика $g(E)$ также обладают свойством аддитивности: они состоят из полюсов функций $g^{(r)}(E)$, которые определяются классическими траекториями, принадлежащими r -й метрически неразложимой эргодической компоненте фазового пространства $\Gamma^{(r)}$. Система полюсов функции $g^{(r)}(E)$ порождает последовательность собственных значений энергии, которую назовем сериями.

Таким образом, квазиклассическое квантование сводится в самом общем случае динамической системы к нахождению всех возможных энергетических серий, порождаемых эргодическими компонентами. На энергетической оси эти серии, вообще говоря не разделяются и сложным образом могут перекрываться друг с другом.

Наиболее существенным моментом формулы (2.3) является то, что каждую серию уровней можно исследовать и описывать независимо от всех остальных серий. Естественной представляется следующая классификация серий.

Каждой метрически неразложимой области фазового пространства, в которой движение является устойчивым условно-периодическим, соответствует энергетический спектр, называемый регулярным. Его квантование подчиняется правилам Эйнштейна (1.2), поскольку в таких областях существуют N -мерные инвариантные торы.

В тех областях, где все (кроме интеграла энергии) или часть однозначных и независимых интегралов движения разрушены, энергетический спектр, как будет видно далее, является квазислучайным. Такие серии уровней будем называть стохастическими.

Система будет называться тем более «сложной», чем большее число интегралов движения разрушено.

Например, для системы, фазовый портрет которой изображен на рис. 4.1, энергетический спектр состоит из трех регулярных серий и одной стохастической.

В этой главе мы будем исследовать только стохастическую серию уровней максимально «сложной» системы, поскольку определение регулярной части спектра принципиально решается формулами (1.2). Исходная постановка задачи заключается в следующем.

Рассматривается такая квантовая K -система, у которой разрушены все интегралы движения, кроме интеграла энергии. Тогда энергетический спектр является однопараметрическим (например, уровни энергии нумеруются в порядке возрастания энергии) и задача состоит в определении распределения уровней.

Необходимо сделать замечание о том, в какой связи находится статистика уровней с понятием ансамбля в обычной статистической физике. Система уровней стохастической части спектра не может быть таким же представителем ансамбля, как, например, какое-либо состояние системы многих тел*). Отказ от точного описания производится не для системы уровней, а для реальной физической системы, в которой имеются очень сложные взаимодействия и энергетический спектр которой надо определить. Возбужденные молекулы в состоянии, близком к преддиссоциации, являются примером такой системы, и точное определение состояний молекул в этом случае является столь же бессмысленным, как и определение одновременно координат большого числа частиц. Энергетический спектр возбужденных молекул является некоторой более тонкой характеристикой системы, и вероятностное описание состояний системы автоматически порождает появление вероятностных свойств в энергетическом спектре. Например, для бильярдов, являющихся K -системами, статистический ансамбль могли бы образовывать такие же бильярды с небольшим разбросом в их геометрических характеристиках. Поскольку общий характер траекторий в бильярде не зависит от небольших геометрических возмущений, то таким же свойством должно обладать и распределение уровней (в вероятностном смысле). Поэтому каждая конкретная геометрия бильярда может служить представителем ансамбля, порождающим соответствующую ему реализацию энергетического спектра. Различные геометрии порождают различные реализации спектра, которые и образуют статистический ансамбль энергетических уровней.

*) Это обстоятельство отмечалось Дайсоном [174].

§ 12.3. Универсальность K -систем и периодические орбиты

Универсальность K -систем. Масштабы универсальности. Однородность K -систем. Периодические траектории K -систем. Аналог эргодической теоремы для приближенных циклов

Этот параграф будет начат с некоторого возврата к классическим K -системам. Нам понадобятся некоторые их свойства, на которых мы до сих пор не останавливались, либо обсуждали их слишком кратко. В § 1.6 уже отмечалось свойство изоморфизма K -систем с одинаковыми значениями энтропии h , введенное Колмогоровым. Обсудим его детальнее.

Пусть динамическая система обладает свойством локальной неустойчивости с инкрементом $\nu(p, q)$, где аргументы обозначают координату точки в фазовом пространстве. Введем два масштаба в фазовом пространстве: 1) область $\Delta\Gamma$, характеризующую элемент фазового объема, по которому производится огрубление различных характеристик системы; 2) область Γ , определяющую характерный фазовый объем всей системы, или же область, на которой происходят медленные («гидродинамические») изменения характеристик системы. Тогда энтропия Колмогорова h может быть определена следующим образом:

$$h = \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_{\Delta\Gamma} \nu(p, q) dp dq. \quad (3.1)$$

Величина $h = h(\bar{p}, \bar{q})$, где (\bar{p}, \bar{q}) — координаты, например, центра тяжести элемента объема $\Delta\Gamma$. Именно относительно координат (\bar{p}, \bar{q}) и предполагается медленная «гидродинамическая» зависимость энтропии.

Приведем элементарные примеры. Отображение

$$x_{n+1} = \{Kx_n\} \quad (3.2)$$

(см. § 2.1) при целых K имеет $h = \nu$, в чем легко убедиться непосредственно, так как ν не зависит от x . Таким же свойством обладает система (3.2) при любых K . Более сложным является синус-преобразование (§ 4.3), в котором имеются островки устойчивости. Эти островки создают определенные «поверхностные» эффекты, которые нарушают однородность локальной неустойчивости. Однако при $K \gg 1$ также можно пренебречь влиянием островков устойчивости. Это означает, что если выбрать

$$\Delta\Gamma > \text{const}/K,$$

то величина h , определенная формулой (3.1), не будет зависеть от положения элемента огрубления $\Delta\Gamma$.

Можно теперь сделать следующие утверждения. Различные K -системы, имеющие одинаковые значения h , имеют одинаковое глобальное описание, и в этом смысле все такие системы изо-

морфны. Такое их свойство будем называть также универсальностью *).

Динамические свойства K -систем являются однородными в некоторой части фазового пространства, если в этой части $v = \text{const}$. Однородность может существовать и в макромасштабе, т. е. в гидродинамических движениях, если после огрубления (3.1) величина $h = \text{const}$.

Однако в действительности реальные системы обладают существенно более сложными движениями. Опишем их в краткой форме на примере ангармонического осциллятора, в котором стохастичность возникает под действием внешнего периодического возмущения (гл. 4). Гамильтонов характер системы предполагает четное число переменных (в примере с осциллятором их две). По одной из них (фазе θ) происходит быстрый процесс перемешивания с характерным временем τ_c . По второй (действию I) идет медленный процесс диффузии с характерным временем τ_D . Таким образом, возникают, вообще говоря, два масштаба универсальности глобальной динамики: универсальность динамических систем по процессам перемешивания, если их K -энтропии одинаковы (на временах $\sim \tau_c$), и универсальность по процессам диффузионной релаксации, если эти процессы имеют одинаковый коэффициент диффузии (на временах $\sim \tau_D$). Естественно, что, например, две динамические системы могут быть изоморфными относительно перемешивания и неизоморфными относительно диффузии.

В дальнейшем мы будем интересоваться только той частью глобальной динамики, которая связана с перемешиванием, и термин «универсальность» применять только относительно процессов на временах $\ll \tau_D$. Очевидно, что это предполагает существование неравенства $\tau_c \ll \tau_D$.

Системы бильярдного типа, в которых движение частицы является перемешивающимся, могут служить удобным примером для дальнейшего анализа. Свойство универсальности позволяет любой динамической системе сопоставить изоморфный ей бильярд и, с точностью до малых (краевых) эффектов, изучать общие закономерности динамики K -систем на примере динамики частицы в соответствующем бильярде. Этим обстоятельством мы будем широко пользоваться далее. Будем предполагать также K -системы в достаточной степени однородными **).

Рассмотрим теперь более тонкий вопрос о периодических траекториях K -систем. В интегрируемых динамических системах, имеющих N интегралов движения при N степенях свободы, периодические траектории лежат на резонансных торах, определяемых

*) Строго говоря, универсальностью глобальной динамики обладает не все множество состояний K -систем, а только та их часть в фазовом пространстве, в которой движение является стохастическим.

**) Это свойство также относится только к масштабу времени, на котором происходит перемешивание.

условиями

$$m_1 \omega_1(I_1, \dots, I_N) + \dots + m_N \omega_N(I_1, \dots, I_N) = 0, \quad (3.3)$$

где ω_k — частоты и m_k — положительные и отрицательные целые числа. Малые возмущения условия (3.3) приводят к тому, что траектория на возмущенном торе оказывается незамкнутой. Расстояние по фазам между периодической и возмущенной траекториями будет нарастать линейно со временем, т. е. очень медленно.

Иначе обстоит дело в K -системах. Из-за локальной неустойчивости слабое возмущение начальных условий приводит к экспоненциальному росту расстояний между траекториями. Поэтому все периодические траектории оказываются сильно неустойчивыми и, более того, число периодических траекторий с периодом T равно [177—179]

$$n(T) \sim \exp(hT). \quad (3.4)$$

Результат (3.4) легко понять из следующих соображений. Рассмотрим периодическую траекторию K -системы и выделим на ней некоторую точку A . Эта траектория тем ближе к случайной кривой, чем больше ее период T (рис. 12.2, *a*). Пусть теперь из точки A' , очень близкой к A , выходит траектория, которая возвращается очень близко к A' , но не замыкается (рис. 12.2, *b*). Тогда малым шевелением начального условия траекторию можно замкнуть вследствие локальной неустойчивости. Более того, вследствие перемешивания в любой области фазового объема имеются

траектории, которые достаточно быстро попадают в окрестность точки A . Поэтому малые шевеления этих траекторий могут превратить их в периодические. Отсюда следует, что число периодических траекторий с периодом T должно быть пропорционально объему области, огибающей фазовый объем, который

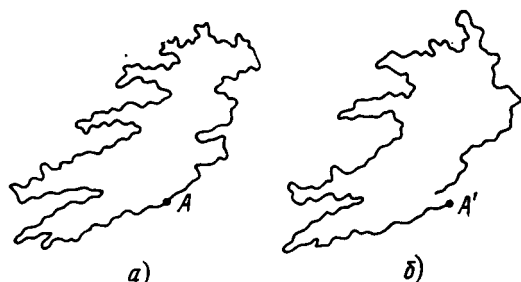


Рис. 12.2. Примеры замкнутой (*a*) и близкой к замкнутой (*b*) траекторий в K -системах.

занимает система в момент времени T . Но этот огибающий объем растет, как известно, следующим образом:

$$\Delta \Gamma(T) \sim \Delta \Gamma_0 \exp(hT).$$

Отсюда и вытекает формула (3.4).

Для $У$ -систем Аносова был получен более сильный результат [178]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T) hT}{\exp(hT)} = 1. \quad (3.5)$$

Множество периодических траекторий является всюду плотным. Однако распределение траекторий по периодам неизвестно, так как для этого необходимо знать не только их число $n(T)$, но и долю фазового объема (хотя бы «огрубленного»), которую они занимают. Решение задачи о распределении замкнутых орбит было дано Боуэном [211].

Рассмотрим область фазового объема $\Delta\Gamma \ll \Gamma$ и все периодические траектории, проходящие через нее. Тогда их распределение по периодам не зависит от расположения $\Delta\Gamma$ и слабо зависит от формы границы $\Delta\Gamma$. Это утверждение является следствием однородности K -систем.

Пусть теперь $C_{\Delta\Gamma}$ есть замкнутая орбита C , проходящая через область $\Delta\Gamma$, а $x(C_{\Delta\Gamma})$ — координата на этой орбите. Различные замкнутые орбиты $C_{\Delta\Gamma}$ можно классифицировать по их периоду $T: C_{\Delta\Gamma}(T)$. Тогда результат Боуэна [211] заключается в следующем:

$$\int g(x) \rho(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_0(\Delta\Gamma, T) \Delta\Gamma} \sum_{C \in C_{\Delta\Gamma}(T)} \int_{x \in C_{\Delta\Gamma}(T)} dx g(x) \rho_C(x). \quad (3.6)$$

Здесь $g(x)$ — произвольная интегрируемая функция x ; $\rho(x)$ — стационарная функция распределения в фазовом пространстве; $\rho_0(\Delta\Gamma, T) \Delta\Gamma$ — число периодических орбит с периодом в интервале $(T, T + \Delta T)$ и $\Delta T = (dT/d\Gamma) \Delta\Gamma$; $\rho_C(x)$ — функция распределения по координате x , принадлежащей замкнутой орбите $C_{\Delta\Gamma}(T)$.

Нетрудно видеть, что приведенный замечательный результат Боуэна (3.6) является аналогом эргодической теоремы для замкнутых орбит и, по существу, снимает трудности, связанные с усреднением различных функционалов по замкнутым орбитам. Нормировочный множитель ρ_0 в (3.6) определяется следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_0(\Delta\Gamma, T) \Delta\Gamma} \sum_{C \in C_{\Delta\Gamma}(T)} 1 = 1.$$

Для получения более качественного представления о равенстве (3.6) заметим, что множество замкнутых орбит с периодом T включает в себя также и такие орбиты, которые возвращаются в $\Delta\Gamma$ дважды (с периодами T_1 и T_2 , причем $T_1 + T_2 = T$), трижды (с периодами T_1, T_2, T_3 , причем $T_1 + T_2 + T_3 = T$) и т. д. При больших значениях T замкнутая орбита покрывает достаточно плотно и достаточно равномерно все фазовое пространство. Поэтому усреднение по замкнутым орбитам $C \in C_{\Delta\Gamma}(T)$ с большим периодом T становится эквивалентным усреднению по фазовому пространству с соответствующей мерой $\rho(x) dx$. Это замечание позволяет нам сделать следующий шаг по пути упрощения формулы (3.6). Любая непериодическая траектория, выходящая из $\Delta\Gamma$, возвращается в нее бесконечное число раз. Часть траектории между двумя последовательными прохождениями области

$\Delta\Gamma$ назовем приближенным циклом (контуры C_1, C_2, \dots на рис. 12.3). Эти контуры C_k должны мало отличаться от периодических контуров, так как малое шевеление превращает незамкнутые

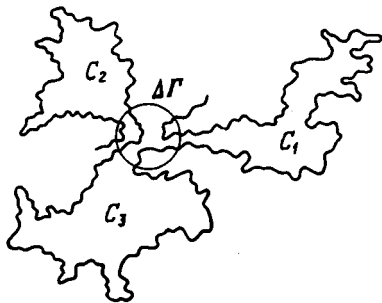


Рис. 12.3. Приближенные циклы в K -системах.

контуры C_k в замкнутые. Поэтому равенство (3.6) имеет также следующую модификацию для достаточно больших T :

$$\sum_{C \in \Delta\Gamma} = \sum_{\bar{C} \in \Delta\Gamma} \quad (3.7)$$

где $C \in \Delta\Gamma$ обозначает периодические орбиты, пересекающие область $\Delta\Gamma$, т. е. $C_{\Delta\Gamma}$, а $\bar{C} \in \Delta\Gamma$ — приближенно замкнутые циклы, пересекающие область $\Delta\Gamma$, т. е. $\bar{C}_{\Delta\Gamma}$. Если к тому же имеет место однородность во всем фазовом пространстве Γ , то равенство (3.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho_0 \Gamma} \sum_{C \in \Gamma} = \frac{1}{\rho_0 \Delta\Gamma} \sum_{C \in \Delta\Gamma} = \frac{1}{\bar{\rho}_0 \Delta\Gamma} \sum_{\bar{C} \in \Delta\Gamma}, \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{\rho_0 \Delta\Gamma} \sum_{\bar{C} \in \Delta\Gamma} 1 = 1, \quad \frac{1}{\rho_0 \Delta\Gamma} \sum_{C \in \Delta\Gamma} 1 = 1.$$

Все суммы в выражениях (3.7), (3.8) следует понимать в некотором определенном смысле, так как число периодических траекторий бесконечно и ρ_0 поэтому должно стремиться к бесконечности. Можно, однако, поступить следующим образом. Введем в суммы обрезание для всех периодов C или приближенных циклов \bar{C} с длиной больше L . Тогда суммирование в выражениях (3.7), (3.8) можно рассматривать как предел при $L \rightarrow \infty$, устроенный таким образом, что выполняются соотношения

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_0(L) \Delta\Gamma} \sum_{\substack{C < L \\ C \in \Delta\Gamma}} 1 = \text{const}, \quad (3.9)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{\rho}_0(L) \Delta\Gamma} \sum_{\substack{\bar{C} < L \\ \bar{C} \in \Delta\Gamma}} 1 = \text{const}.$$

Условия (3.9) определяют, в частности, нормировку в выражениях (3.8). Несколько сложнее обстоит дело в реальных гамильтоновых системах, где существуют два масштаба универсальности. Пусть точке A в фазовом пространстве соответствуют некоторые значения действия I_0 и фазы ϕ_0 . По фазе происходит быстрое перемешивание. Поэтому через некоторое, не слишком большое время точка на траектории, выходящей из (I_0, ϕ_0) , будет иметь

значение фазы ϕ , близкое к ϕ_0 . Тогда вследствие перемешивания по фазе можно малым шевелением точки A добиться совпадения начальной и конечной фаз. Однако по переменной I происходит медленная диффузия, и здесь возврат происходит не только на значительно больших временных масштабах ($\tau_D \gg \tau_c$), но и совсем по другим законам. Именно этот процесс возврата по переменной I и определяет характер возврата для всей системы в целом.

Если рассматриваемая гамильтонова система совершает финитное движение, то по теореме Пуанкаре о возвратах (см. § 1.1) система всегда будет возвращаться в любую окрестность точки A . Более того, если процесс блуждания частицы аналогичен диффузионному, то распределение времени возврата имеет характерный параметр T_0 такой, что вероятность возврата за время $t > T_0$ экспоненциально убывает [180]. Этот вывод является следствием существования двух масштабов универсальности, или, иначе, существованием по крайней мере двух переменных (I, ϕ), по одной из которых (ϕ) случайный процесс носит характер быстрого перемешивания, а по другой (I) — медленной диффузии.

§ 12.4. Правила квантования

Суммирование по периодическим орбитам. Правила квантования для K -систем. Связь с приближенными циклами. Связь с теорией пересечений

Вернемся снова к формуле (2.1) для функции отклика:

$$g(E) \approx \text{const} \int dq \sum_{C \in \Gamma} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_C(q, q | E) \right], \quad (4.1)$$

где C — произвольная периодическая траектория K -системы. Интегрирование по q легко выполняется, если воспользоваться свойством однородности K -систем:

$$g(E) \approx \text{const} \cdot V \sum_{C \in \Delta\Gamma} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_C(E) \right], \quad (4.2)$$

где $S_C(E)$ — действие на любой замкнутой траектории C , проходящей через $\Delta\Gamma$. Обозначим через $S_C^0(E)$ действие на одной орбите (цикле) замкнутой траектории C . Всякая периодическая траектория может состоять из произвольного числа таких циклов. Поэтому из (4.2) вытекает, что

$$\begin{aligned} g(E) &\approx \text{const} \cdot V \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{C \in \Delta\Gamma} \exp \left[\frac{i}{\hbar} m S_C^0(E) \right] = \\ &= \text{const} \cdot V \sum_{C \in \Delta\Gamma} \left[1 - \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_C^0(E) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, полюса $g(E)$ определяются уравнением

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S_C^0(E)\right] = 1, \quad (4.4)$$

из которого следует также

$$S_C^0(E) = 2\pi m\hbar, \quad (4.5)$$

где m — произвольное целое число.

Формулы (4.4) или (4.5) определяют правила квантования энергетического спектра K -систем. Их внешняя простота обманчива. Величина $S_C^0(E)$ является действием на случайной кривой, и поэтому сама является случайной переменной. Таким образом, проблема квантования K -систем сводится к задачам теории пересечения случайного процесса некоторой кривой. Прежде чем описать ее более детально, отметим, что если в формуле (4.4) перейти от замкнутой орбиты к приближенным циклам в ее окрестности шириной $\delta\Gamma$, то это дает

$$\frac{1}{\rho_0 \delta\Gamma} \sum_{\bar{C} \in \delta\Gamma} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_C^0(E)\right] = 1. \quad (4.6)$$

Правила в форме (4.5) были получены в [73], а в форме (4.6) — в [136—138] (ком. 5).

Итак, пусть известна вероятность того, что действие $S(E)$ на замкнутом витке периодической траектории (индексы C и 0 в дальнейшем опускаются) принимает значения в интервале $(S, S + dS)$ с плотностью вероятности $P(S|E)$. Тогда плотность вероятности того, что собственное значение энергии лежит в интервале $(E, E + dE)$, равна

$$P(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \int dS P(S|E) \left| \frac{dS}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar). \quad (4.7)$$

Число стационарных состояний $\mathcal{N}(E)$ в интервале $(0, E)$ равно числу корней стохастического уравнения (4.5), т. е.

$$\mathcal{N}(E) = \int_0^E dE \sum_{m=1}^{\infty} \delta(S - 2\pi m\hbar) \left| \frac{dS(E)}{dE} \right|. \quad (4.8)$$

Среднее число состояний находится усреднением выражения (4.8):

$$\langle \mathcal{N}(E) \rangle = \int_0^E dE \sum_{m=1}^{\infty} \int dS \left| \frac{dS(E)}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar) P(S|E). \quad (4.9)$$

Наконец, средняя плотность состояний равна

$$\langle \rho(E) \rangle = \frac{d}{dE} \langle \mathcal{N}(E) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \int dS \left| \frac{dS(E)}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar) P(S|E), \quad (4.10)$$

что совпадает с вероятностью $P(E)$, определенной формулой (4.7) (как и следовало ожидать).

Формулы (4.9), (4.10) являются вариантом формулы Райса [181]. При получении выражений (4.7), (4.9), (4.10) предполагалось, что производная dS/dE снова может быть выражена как функция S и не является независимой переменной. В противном случае выражения (4.7), (4.9) обобщаются следующим образом

$$\begin{aligned}
 P(E) &= \sum_{m=1}^{\infty} \int dS d\left(\frac{dS}{dE}\right) \left| \frac{dS}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar) P\left(S, \frac{dS}{dE} \middle| E\right), \\
 \langle \mathcal{N}(E) \rangle &= \\
 &= \int_0^E dE \sum_{m=1}^{\infty} \int dS d\left(\frac{dS}{dE}\right) \left| \frac{dS}{dE} \right| \delta(S - 2\pi m\hbar) P\left(S, \frac{dS}{dE} \middle| E\right), \quad (4.11) \\
 \rho(E) &= \frac{d}{dE} \langle \mathcal{N}(E) \rangle = P(E).
 \end{aligned}$$

Для любой K -системы уравнения движения или отображения определяют все свойства функции распределения $P(S|E)$ или $P\left(S, \frac{dS}{dE} \middle| E\right)$. Таким образом, формулы (4.7)–(4.11) принципиально решают задачу о квантовании K -систем в асимптотике больших значений E . Нас, однако, далее будет интересовать более тонкая характеристика энергетического спектра: распределение расстояний между ближайшими уровнями.

§ 12.5. Распределение расстояний между соседними уровнями

«Типичные» траектории и орбиты. Устойчивость случайной кривой. Закон распределения малых расстояний между уровнями. Распределение больших расстояний. Данные численного анализа

Общая постановка задачи о распределении энергетических уровней может быть теперь строго сформулирована, исходя из правил квантования (4.4) или их приближенного аналога (4.6). Рассмотрим величину $S_C^0(E)$, равную действию на некоторой замкнутой (или почти замкнутой) траектории (орбите). Траектория C принадлежит множеству замкнутых траекторий, которое достаточно хорошо представляет полный ансамбль всех замкнутых траекторий. Величина $S_C^0(E)$ является случайной величиной на множестве траекторий C . Она зависит от E как от параметра. Нас, однако, интересуют не все значения E , а лишь те, которые являются корнями уравнения (4.5). Нашей ближайшей задачей будет определение закона распределения расстояний между соседними корнями $\Delta E_k = E_{k+1} - E_k$, которые расположены в порядке возрастания.

В общем случае задача о распределении расстояний между двумя точками, в которых случайная кривая последовательно пересекает некоторую кривую, является непростой (см., например, [182]). В данном случае усложнение связано с тем, что переменная S_C^0 не есть также совсем обычная случайная переменная, так как она определяется на замкнутых орбитах, а не на траектории, представляющей случайное блуждание. Поэтому более естественным представляется использовать сначала качественные соображения для получения ответа [136, 137].

В § 12.3 мы уже описывали некоторые свойства периодических орбит в реальных K -системах. Вследствие универсальности K -систем можно для конкретности иметь в виду некоторую наглядную модель. Пусть, например, это будет бильярд со стохастическими траекториями частиц в нем. Траектория частицы порождает последовательные отображения динамических переменных задачи (см., например, Дополнение 1). Изменение распределения по действию подчиняется диффузионному уравнению типа (Д1.13). Для достаточно больших периодов замкнутых орбит плотность вероятности первого возврата в заданную область $(S, S + dS)$ за время τ пропорциональна величине [180]

$$P_{\tau}^{\sigma}(S | E) \sim \tau^{-3/2} \exp \left\{ \frac{(S - \langle \Delta S / \Delta t \rangle \tau)^2}{2 \langle (\Delta S)^2 / \Delta t \rangle \tau} \right\}, \quad (5.1)$$

где ΔS — изменение действия за время Δt одного шага отображения. Эта функция имеет резкий максимум вблизи значения

$$\bar{S}(E) \sim \langle \Delta S / \Delta t \rangle \tau. \quad (5.2)$$

Введем понятие «типичного цикла», т. е. такой замкнутой (или близкой к ней) траектории, в окрестности которой сосредоточена функция распределения всех периодических траекторий. Поскольку нас будет интересовать область больших значений энергии, то это соответствует большим значениям S . Например, в бильярдных задачах $S \sim E^{1/2}$. Кроме того, большим значениям S должны соответствовать и большие номера m в формуле (4.5).

Итак, пусть для «типичного цикла» квантовое число m имеет значение $m_0 \gg 1$. Тогда для действия «типичного цикла» частицы с энергией E

$$\bar{S}(E) = 2\pi\hbar m_0. \quad (5.3)$$

Этой величине соответствует «типичное время» цикла $\bar{\tau}$, которое оценивается с помощью формулы (5.2). Существование времени $\bar{\tau}$ будет иметь для нас фундаментальное значение. С ним связана также «типичная длина» \bar{l} одного цикла.

Пусть теперь $E + \Delta E$ соответствует ближайшему к E уровню. Аналогичные рассуждения дают для «типичного цикла» с энергией $E + \Delta E$ формулу типа (5.3):

$$\bar{S}(E + \Delta E) = 2\pi\hbar m_1, \quad (5.4)$$

где целое число m_1 , вообще говоря, не очень сильно отличается

от m_0 и в то же время $m_1 \neq m_0$. Основное следствие из формул (5.3) и (5.4) состоит в том, что

$$|\bar{S}(E + \Delta E) - \bar{S}(E)| = 2\pi\hbar|m_1 - m_0| \geq 2\pi\hbar, \quad (5.5)$$

т. е. разность действий для двух типичных циклов, соответствующих двум соседним уровням, отстоящим на величину ΔE , не может быть меньше, чем $2\pi\hbar$. Дальнейшие рассуждения покажут, что именно из этого неравенства находится асимптотика вероятности $P(E|\Delta E)$ при $\Delta E \rightarrow 0$.

Действительно, вид траектории зависит от энергии E как от параметра. Зафиксируем «типичный цикл», соответствующий энергии E , и возмутим теперь в нем параметр E на малую величину ΔE . Поскольку типичному циклу соответствует, как уже отмечалось, некоторое типичное время цикла τ , то возникает следующий вопрос: как при сколь угодно малых возмущениях параметра траектории ($\Delta E \rightarrow 0$) получить на конечном интервале времени ($\sim \tau$) конечное изменение действия $\geq 2\pi\hbar$? Ясно, например, что это невозможно в случае устойчивых траекторий, так как изменение действия ΔS при переходе от значения энергии E к $E + \Delta E$ должно стремиться к нулю при $\Delta E \rightarrow 0$ и никаким образом нельзя удовлетворить неравенству (5.5). Существенную роль в устойчивом (не стохастическом) случае играет также то обстоятельство, что время цикла $\tau(E)$ однозначно определено. Уже из приведенных рассуждений ясно, почему расталкивание уровней должно быть сильнее в устойчивом случае (т. е. при существовании полного набора интегралов движения), чем в неустойчивом (стохастическом) случае, где время циклов $\tau(E)$ распределено случайным образом (см. формулу (5.1)) и, кроме типичных циклов с типичным временем возврата τ , есть любые нетипичные циклы с произвольными $\tau(E)$. Поэтому чем сильнее неустойчивость траектории относительно малых возмущений ее параметров, тем слабее расталкивание уровней.

Итак, при $\Delta E \rightarrow 0$ нельзя подобрать «типичный цикл» с энергией $E + \Delta E$ такой, чтобы удовлетворить неравенству (5.5). Однако условие (5.5) можно выполнить, если цикл с энергией $E + \Delta E$ является нетипичным (т. е. маловероятным). Рассмотрим, как это происходит.

Из анализа классических K -систем мы уже видели, что в случае стохастичности имеется по крайней мере одна переменная (ξ), по которой происходит быстрое перемешивание. Наиболее удобными для иллюстрации являются отображения в задачах с бильярдами (см. уравнения (3.3.3) и (Д1.4)). Параметр растяжения K является функцией энергии (см., например, уравнения (3.3.5) и (3.3.2) в задаче о скользящих электронах). Поэтому возмущение E на величину ΔE приводит, вообще говоря, к возмущению начального условия на величину

$$d\xi \sim \frac{dK(E)}{dE} \Delta E. \quad (5.6)$$

Теперь заметим, что действие на траектории с энергией $E + \Delta E$ никогда не сможет отличаться на конечную величину $\geq 2\lambda\hbar$ от действия на траектории с энергией E , если только эти траектории не станут статистически независимы. Действительно, на временах, меньших времени развития стохастической неустойчивости, изменение действия из-за возмущения мало, и неравенству (5.5) нельзя удовлетворить при $\Delta E \rightarrow 0$. Наоборот, действия статистически независимых траекторий могут отличаться с не равной нулю вероятностью на произвольную величину.

В § 2.1 мы уже определяли время (см. формулу (2.1.28)), в течение которого локальная неустойчивость приводит к статистической независимости траекторий с первоначально очень близкими начальными условиями. Аналогично и в данном случае значение величины $\delta\xi_n$ на n -м шаге отображения можно представить в виде

$$\delta\xi_n \sim K\delta\xi_{n-1} \sim \dots \sim K^n\delta\xi_0 = \exp(nh)\delta\xi_0, \quad (5.7)$$

$$h = \ln K,$$

где h равно по порядку величины энтропии Колмогорова, а $\delta\xi_0$ определяется формулой (5.6). Обозначим через N_0 число шагов отображения (т. е. безразмерное время), через которое достигается $\delta\xi_{N_0} \sim 1$. Из (5.7) следует

$$N_0 = \frac{1}{\ln K} \ln \frac{1}{|\delta\xi_0|} = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{|\delta\xi_0|}. \quad (5.8)$$

Через время N_0 две траектории, начальные условия которых отличались на малую величину $\delta\xi_0$, разойдутся настолько, что станут статистически независимы.

Соотношения (5.7) являются универсальным свойством K -систем, если только правильно выбрать переменную ξ , по которой происходит перемешивание. Аналогичной универсальностью обладает и формула (5.8). Подставляя (5.7) в (5.8), находим

$$N_0 = \frac{1}{\ln K} \left\{ \ln \frac{1}{|\Delta E|} + \ln \frac{1}{|dK/dE|} \right\},$$

или, в пределе $\Delta E \rightarrow 0$,

$$N_0 = \frac{1}{\ln K} \ln \frac{1}{|\Delta E|} = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{|\Delta E|}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) определяет характерное число шагов отображения, через которое малое возмущение начальных условий, связанное с изменением энергии частицы на величину ΔE , приводит к статистической независимости этих траекторий вследствие процесса перемешивания. С другой стороны, для типичного цикла с энергией E существует типичное время цикла τ и, следовательно, типичное число шагов отображения $\bar{N} = \bar{N}(E)$. Согласно (5.9) величина N_0 растет при $\Delta E \rightarrow 0$, в то время как $\bar{N}(E)$ не изменяется. Поэтому при достаточно малых ΔE всегда выполняется

неравенство

$$N_0 \gg \bar{N}. \quad (5.10)$$

Таким образом, траектория с энергией $E + \Delta E$ может стать статистически независимой от траектории с энергией E , если частица (например, в бильярде) испытывает $\sim N_0$ столкновений, которое очень велико по сравнению с числом \bar{N} , соответствующим максимуму функции распределения $P(N)$ числа столкновений на одном цикле. Это означает также, что цикл с числом столкновений $\sim N_0$ принадлежит нетипичным циклам, т. е. маловероятным флуктуациям. Поэтому можно записать для вероятности такой очень редкой флуктуации:

$$P(N_0) \sim \exp(-\text{const} \cdot N_0). \quad (5.11)$$

Поскольку появление $\geq N_0$ столкновений на цикле с энергией $E + \Delta E$ означает возможность удовлетворить неравенству (5.5) с конечной вероятностью, то для вероятности расстояния ΔE между соседними уровнями можно записать

$$P(E|\Delta E) \propto P(N_0),$$

или, согласно (5.11),

$$P(E|\Delta E) \propto \exp(-\text{const} \cdot N_0).$$

Подстановка в это выражение формулы (5.9) дает ответ:

$$P(E|\Delta E) \propto |\Delta E|^{\text{const}/\ln K} = |\Delta E|^{\text{const}/h}. \quad (5.12)$$

Величина const в формуле (5.12) может зависеть от E . Для ее вычисления необходимы не только более строгие методы, но и большая детализация модели. Для скользящих электронов, например, получено [73]: $\text{const} \sim 1/2$.

Формула (5.12) имеет простую физическую интерпретацию. С ростом K (т. е. с ростом энтропии Колмогорова h) показатель степени в (5.12) уменьшается и расталкивание уровней становится слабее. При $K \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow \infty$) вероятность $P(E|\Delta E)$ перестает зависеть от ΔE и расталкивание уровней исчезает. Это связано с тем, что чем больше K , тем быстрее происходит стохастизация траекторий, т. е. тем сильнее локальная неустойчивость и корреляция между собственными значениями ослабевает. В пределе, когда время стохастизации траекторий стремится к нулю ($K \rightarrow \infty$), корреляция уровней исчезает. Такая система становится очень «рыхлой». В ней разрушены какие-либо свойства симметрии, и именно с этим связано исчезновение корреляций любого типа.

Распределение расстояний между уровнями, определяемое формулой (5.12), получено для области

$$\Delta E \ll \langle \Delta E \rangle. \quad (5.13)$$

Хотя закон расталкивания уровней является степенным, так же как и в теории Вигнера — Портера — Дайсона, однако имеется серьезное различие между формулами (1.17) и (5.12). Показатель

степени в (5.12)

$$\alpha = \text{const}/h(E) \quad (5.14)$$

определяется динамической характеристикой системы: K -энтропией. Однако величина α в формуле (1.17) является постоянной для любых систем (с одним и тем же типом симметрии). Удобно, кроме величины α , ввести еще один критический показатель β :

$$P' = \frac{dP(E|\Delta E)}{d|\Delta E|} \propto |\Delta E|^\beta$$

для той же области (5.13). Здесь

$$\beta = \alpha - 1 = \text{const}/h(E) - 1. \quad (5.15)$$

В теории Вигнера — Портера — Дайсона $\beta = 0, 1, 3 \geq 0$ для ансамблей соответственно с $\alpha = 1, 2, 4$. Однако из (5.15) следует, что β уменьшается с ростом h , и, начиная с некоторого значения энергии, может оказаться, что $\beta < 0$. Тогда при $\beta < 0$ и $|\Delta E| \rightarrow 0$ величина $P' \rightarrow \infty$, в то время как в теории Вигнера — Портера — Дайсона всегда $P' \rightarrow \text{const} \geq 0$, так как $\beta \geq 0$.

Рассмотрим теперь асимптотику распределения расстояний ΔE между соседними уровнями $P(E|\Delta E)$ в случае больших ΔE [73, 138], когда выполняется неравенство

$$\Delta E \gg \langle \Delta E \rangle, \quad (5.16)$$

противоположное неравенству (5.13). Пусть, как и ранее, \bar{N} есть число шагов отображения для типичного цикла, а N_0 — число шагов отображения, при котором траектория с энергией E и траектория с энергией $E + \Delta E$ становятся статистически независимыми. Величина N_0 определена формулой (5.9), если только ΔE достаточно мало. Однако, если ΔE велико, то $N_0 \sim 1$. Очевидно, что условие (5.16) приводит к неравенству, противоположному (5.10):

$$\bar{N} \gg N_0. \quad (5.17)$$

Условие (5.17) означает, что типичные циклы, соответствующие энергиям E и $E + \Delta E$, фактически являются статистически независимыми.

Пусть L — характерный период цикла, а $S = S(L, E)$ — действие на цикле. Поскольку траектория цикла состоит из большого числа отображений, то распределение вероятности величины S подчиняется гауссовскому закону:

$$P(E|S) = \left[\frac{\pi}{2} L \left\langle \frac{(\Delta S)^2}{r} \right\rangle_E \right]^{-1/2} \exp \left\{ - \frac{(S - \langle \Delta S/r \rangle_E L)^2}{2L \langle (\Delta S)^2/r \rangle_E} \right\} dS, \quad (5.18)$$

где $P(E|S)$ — вероятность того, что цикл с периодом L и энергией E имеет действие, лежащее в интервале значений $(S, S + \Delta S)$; ΔS — изменение действия на одном шаге отображения; r — длина траектории на одном шаге отображения.

Так как траектория цикла с энергией $E + \Delta E$ согласно неравенству (5.17) статистически независима от траектории с энергией E , то для нее можно записать выражение, аналогичное (5.18):

$$P(E + \Delta E | S') = \left[\frac{\pi}{2} L \left\langle \frac{(\Delta S)^2}{r} \right\rangle_{E+\Delta E} \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{(S' - \langle \Delta S / r \rangle_{E+\Delta E} L)^2}{2L \langle (\Delta S)^2 / r \rangle_{E+\Delta E}} \right\} dS'. \quad (5.19)$$

Вероятность того, что разность $S' - S$ принимает заданное значение

$$S' - S = 2\pi\hbar m$$

независимо от значения S , равна

$$P(E | E + \Delta E | m) = \int_0^\infty dS P(E | S) P(E + \Delta E | S + 2\pi\hbar m) = \\ = \left(\frac{L}{2\pi D} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{L}{2D} \left[\left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_{E+\Delta E} - \left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_E - \frac{2\pi\hbar m}{L} \right]^2 \right\}, \quad (5.20)$$

где

$$D = \frac{1}{2} \left[\left\langle \frac{(\Delta S)^2}{r} \right\rangle_{E+\Delta E} + \left\langle \frac{(\Delta S)^2}{r} \right\rangle_E \right].$$

Для двух соседних уровней можно считать $m \sim 1$, а при больших ΔE выполняется неравенство

$$\left| \left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_{E+\Delta E} - \left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_E \right| \gg \frac{2\pi\hbar}{L}, \quad (5.21)$$

так как изменение энергии E на большую величину ΔE приводит к большому изменению величины ΔS .

Используя неравенство (5.21) в выражении (5.20), получаем искомое распределение расстояний между уровнями:

$$P(E | \Delta E) \approx P(E | E + \Delta E | 0) = \\ = \left(\frac{L}{2\pi D} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{L}{2D} \left[\left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_{E+\Delta E} - \left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_E \right]^2 \right\}. \quad (5.22)$$

Выражение (5.22) может быть упрощено, если ΔE не слишком велико и допустимо разложение величины $\langle \Delta S / r \rangle$ в ряд по ΔE . Тогда

$$P(E | \Delta E) \approx \left(\frac{L}{2\pi D} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{L}{2D} \delta^2 \left(\frac{\Delta E}{\langle \Delta E \rangle} \right)^2 \right\}, \quad (5.23)$$

$$\delta \equiv \langle \Delta E \rangle \frac{d}{dE} \left\langle \frac{\Delta S}{r} \right\rangle_E$$

Таким образом, асимптотика распределения расстояний между соседними уровнями $P(E|\Delta E)$ при больших ΔE имеет гауссовский вид, однако, в отличие от формулы (1.16), здесь параметры распределения также определяются динамическими характеристиками системы.

Приведем некоторые данные численного анализа. Если рассмотреть бильярд типа «стадион» (см. рис. Д1.1, а), то движение

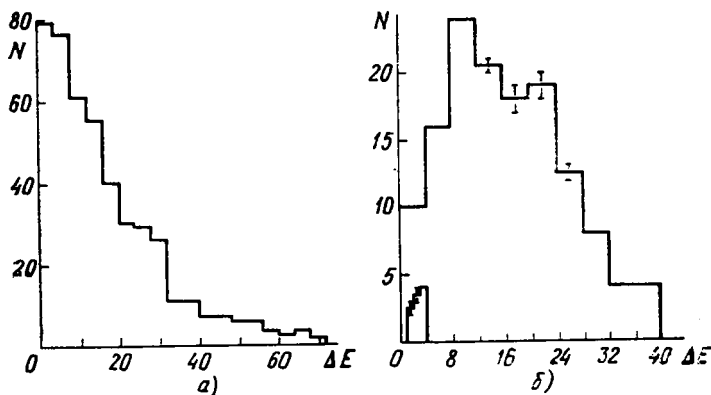


Рис. 12.4. Гистограмма распределения расстояний между уровнями по численным данным работы [183]: а) для границы в форме круга; б) для границы в форме «стадиона».

частицы в нем обладает свойством перемешивания. Поэтому соответствующее квантование такого движения должно приводить к полученному выше закону распределения расстояний между уровнями. Это обстоятельство было проверено в работе [183]. Соответствующие результаты приведены на рис. 12.4, б. Из них видно расталкивание при $\Delta E \rightarrow 0$. Для контроля на рис. 12.4, а приведено распределение расстояний между соседними собственными значениями для круга. В этом случае теоретический анализ распределения собственных значений (корней функций Бесселя) приводит к распределению пуассоновского типа. Аналогичные результаты получены также в работе [184] (ком. 6).

§ 12.6. Некоторые общие замечания о квантовых K -системах

О распределении собственных значений. «Можно ли услышать форму барабана?» Волновые функции и «квазимоды». Понятие о «среднем поле»

Задача о распределении энергетических уровней в квантовых K -системах является в действительности частью более общей проблемы асимптотики распределения собственных значений. Остановимся на одной простой иллюстрации этой проблемы.

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\Delta_d \varphi + [\lambda + v(x_1, \dots, x_d)] \varphi = 0, \quad \varphi|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (6.1)$$

где Δ_d — оператор Лапласа в d -мерном пространстве (x_1, \dots, x_d) ; \mathcal{S} — гиперповерхность в d -мерном пространстве, λ — собственные значения, подлежащие определению.

Пусть ситуация такова, что спектр собственных значений λ_i является дискретным и невырожденным. Расположим λ_i в порядке их возрастания:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < \dots \quad (6.2)$$

Рассмотрим некоторое значение λ , и пусть $\lambda_N < \lambda \leq \lambda_{N+1}$, т. е. существует N собственных значений, меньших чем λ . Вопрос заключается в следующем: можно ли указать некоторые общие свойства асимптотического распределения собственных значений λ при больших значениях N ?

Известны два подхода к решению этого вопроса. Первый из них основан на использовании вариационных методов [189], второй — на использовании теорем тауберова типа (см., например, [9, 190]). С помощью этих методов удается, в частности, определить число $N(\lambda)$ собственных значений λ_i , заключенных в области $\lambda_i < \lambda$. Характер этой формулы проще всего понять на примере стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(q)] \psi = 0, \quad \psi|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (6.3)$$

которое при $2m = \hbar = 1$ переходит в (6.1) с $E = \lambda$. Величина $N(E)$ обозначает число стационарных состояний, ограниченных в фазовом пространстве поверхностью

$$H := p^2/2m + V(q) = \text{const} = E. \quad (6.4)$$

Хорошо известна асимптотическая формула для $N(E)$:

$$N(E) \sim \Gamma(E)/(2\pi\hbar)^d \quad (E \rightarrow \infty), \quad (6.5)$$

где $\Gamma(E)$ — объем в фазовом пространстве, ограниченный поверхностью (6.4). Нетрудно теперь аналогичным образом указать формулу для $N(\lambda)$, используя для задачи (6.1) соответствующий язык квантовой механики.

Однако величина $N(E)$ в (6.5), или $N(\lambda)$, является очень грубой характеристикой распределения собственных значений. Более точкой характеристикой является распределение расстояний между ближайшими собственными значениями. Определение асимптотических формул для функции распределения расстояний между соседними собственными значениями наталкивается на серьезные трудности. Анализ, проведенный в § 12.5, позволяет не только понять причины этих трудностей, но и определить путь, на котором следует искать решение.

Все дело в том, что распределение расстояний между собственными значениями оказывается очень чувствительным к определенным свойствам потенциала V (или v) и к форме границы \mathcal{S} .

Эти свойства проще всего сформулировать на языке динамической задачи, соответствующей уравнениям (6.3) или (6.1). Действительно, асимптотические решения этих уравнений для больших номеров собственных функций и собственных значений определенным образом выражаются через решения задачи о классической динамике частицы с гамильтонианом H . Поскольку качественные свойства классических траекторий резко меняются, то должны изменяться и свойства функций распределения расстояний между уровнями. Заметим, что достаточно, например, в квадрате слегка изогнуть одну из его стенок так, чтобы она стала рассеивающей, как классические траектории частицы в таком бильярде становятся стохастическими. При этом происходит сильная перестройка функции распределения расстояний между уровнями. Однако число состояний $N(\lambda)$ при этом изменяется незначительно или не изменится вовсе.

То обстоятельство, что спектр собственных значений может быть распределен квазислучайным образом, показывает, что соответствующую функцию распределения следует искать в классе совсем иных понятий, чем это делается в случае регулярного (не случайного) распределения собственных значений.

Можно высказать следующее предположение. Оно основано на том, что классическая динамическая задача, которая сопоставляется граничной задаче типа (6.1) или (6.3), в случае общего положения является неинтегрируемой. Поэтому распределение собственных значений в случае общего положения является квазислучайным. Отсюда, в частности, следует, что не может существовать в общем случае выражения для числа состояний $N(\lambda)$ в виде ряда, например, по степеням $1/\lambda^p$ ($p > 0$). Это утверждение связано с тем, что, начиная с некоторого порядка, соответствующий член ряда должен учитывать расстояние между уровнями, которое является квазислучайной величиной. Такой член ряда не может быть записан регулярным образом.

Приведенные рассуждения могут быть распространены и на более общий случай граничных задач, чем (6.1).

К уравнению (6.1) приводятся различные задачи об определении спектра колебаний резонаторов. Форма резонатора определяет вид границы \mathcal{S} , а различные физические особенности стенок учитываются характером граничных условий.

Известна следующая задача: можно ли по спектральным характеристикам резонатора определить его форму? Эту задачу иногда формулируют в виде такого вопроса: «можно ли услышать форму барабана»? (См. его обсуждение в книге Арнольда [16].) Ответ на этот вопрос отрицательный, поскольку одинаковым спектрам собственных значений могут соответствовать сильно отличающиеся формы резонаторов. Появление стохастической компоненты в спектре собственных значений при квантовании K -систем позволяет взглянуть на этот ответ также с иной точки зрения. Две изоморфные K -системы должны иметь одинаковый (в статистическом смысле) спектр собственных значений, и в то

же время эти системы могут сколь угодно сильно отличаться по форме.

Менее ясным в настоящее время является вид волновых функций квантовых K -систем. В работе [73] было высказано предположение о том, что при разрушении интегралов движения и возникновении стохастичности классических траекторий волновая функция квантовой K -системы должна быть случайной функцией координат. Иными словами, волновое ψ -поле должно быть случайным.

Аналитическое исследование волновых функций сложно из-за того, что вообще в квазиклассическом приближении они определены недостаточно хорошо. Впервые квазиклассические волновые функции были подвергнуты серьезному критическому анализу Арнольдом [191] (см. также [16]). На основе исследования специального примера Арнольд высказал гипотезу о существовании в квазиклассическом приближении не мод, а «квазимод». Это означает следующее: с течением времени волновая функция все меньше становится похожей на колебание (например, типа плоской волны), а расплзается достаточно быстро и превращается в квазимоду. Такие функции с достаточной степенью точности удовлетворяют уравнению Шредингера, но могут очень сильно отличаться от собственных функций. В случае квантовых K -систем, как мы уже видели, такое «расплзание» волновой функции и превращение ее в квазимоду должны происходить экспоненциально быстро вследствие локальной неустойчивости классических траекторий.

Не исключено, что быстрое превращение мод в «квазимоды» в случае квантовых K -систем имеет два временных (или пространственных) масштаба. Первый из них связан с образованием сложного рельефа волновой функции, который, скорее всего, является квазислучайным. Наиболее естественным представляется введение сглаженного описания такого поля. Сглаженное волновое поле можно назвать «средним полем», и во многих отношениях оно аналогично молекулярному полю в теории фазовых переходов второго рода. Второй масштаб связан с медленной эволюцией среднего поля, вызванной малыми или крупномасштабными отклонениями реального поля от среднего поля, и с потоками «гидродинамического» типа.

§ 12.7. Стохастическое разрушение связанного состояния атомов с полем излучения

Гамильтониан системы поле + атомы. Резонансное приближение и интегралы движения. Разрушение интегралов движения

Рассматриваемый ниже пример интересен не только своими возможными приложениями, но и как модель возникновения стохастичности при изменении константы взаимодействия подсистем. Результаты, излагаемые ниже, следуют работе [192].

Рассмотрим систему атомов, взаимодействующих с полем излучения. Пусть система атомы + поле заключена в некотором объеме V . Одним из упрощенных способов описания такой системы является так называемое полуклассическое приближение, в котором атомы рассматриваются как квантовый объект, а поле — как классический объект. Простейшей ситуацией является сведение атома к некоторой двухуровневой системе, т. е. к системе, в которой возможна только одна частота перехода ω . Тогда состояние i -го атома можно описать с помощью волновой функции

$$\psi_i = a_i \psi^{(1)} + b_i \psi^{(2)}, \quad (7.1)$$

где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ — собственные функции каждого из двух возможных состояний атома, образующие базис, а величины a_i , b_i являются коэффициентами разложения по этому базису:

$$|a_i|^2 + |b_i|^2 = 1.$$

Введем разность заселенностей и дипольный момент атома:

$$n_i = |b_i|^2 - |a_i|^2, \quad (7.2)$$

$$M_i = \mu m_i = \mu (a_i b_i^* + a_i^* b_i),$$

где μ — матричный элемент дипольного момента атома. Для системы из N атомов можно определить соответствующие плотности

$$n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \quad m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i. \quad (7.3)$$

Пусть поле излучения \mathcal{E} в резонансной полости V близко к однородному, т. е. его длина волны $\lambda \gg V^{1/3}$. Тогда систему атомов можно описывать как целое с помощью величин n и m . Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\mathcal{E}} + \omega^2 \mathcal{E} = \frac{1}{2} \Lambda \omega^2 m,$$

$$\ddot{m} + \omega^2 m = -\frac{1}{2} \Lambda \omega^2 \mathcal{E} n, \quad (7.4)$$

$$\dot{n} = \Lambda \mathcal{E} \dot{m},$$

где частота безразмерного поля \mathcal{E} (в отсутствие атомов) равна ω и совпадает с частотой атомного перехода (резонансный случай). Константа взаимодействия Λ равна

$$\Lambda = (16\pi\rho^2/\hbar\omega)^{1/2}, \quad (7.5)$$

а $\rho = N/V$ — плотность атомов.

Система (7.4) сохраняет инвариантным так называемое кооперационное число

$$r = (n^2 + m^2 + \dot{m}^2/\omega^2)^{1/2} \quad (7.6)$$

и интеграл энергии

$$C = \frac{1}{\omega^2} \dot{\mathcal{E}}^2 + \mathcal{E}^2 + (r^2 - m^2 - \dot{m}^2/\omega^2)^{1/2} - \Lambda \mathcal{E} m. \quad (7.7)$$

Структуру системы (7.4) легко понять, если перейти к представлению вторичного квантования:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} + \frac{i}{\omega} \dot{\mathcal{E}} &\rightarrow c, & \mathcal{E} - \frac{i}{\omega} \dot{\mathcal{E}} &\rightarrow c^+, \\ n &\rightarrow R^z, & m + \frac{i}{\omega} \dot{m} &\rightarrow R^+, & m - \frac{i}{\omega} \dot{m} &\rightarrow R^-, \end{aligned}$$

где c^+ , c — соответственно операторы рождения и уничтожения фотона с частотой ω ; R^z , R^+ , R^- — соответствующие матрицы Паули. Тогда интегралу энергии (7.7) соответствует в новых переменных безразмерный гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_r + H_{ar}, & H_0 &= c^+ c + R^z, \\ H_r &= \Lambda(R^+ c + R^- c), & H_{ar} &= \Lambda(R^- c + R^+ c^+). \end{aligned} \quad (7.8)$$

В выражениях (7.8) член H_0 описывает энергию свободного поля и свободных атомов (в единицах $\hbar\omega$), член H_r соответствует резонансному взаимодействию атомов с полем, а член H_{ar} — антирезонансному взаимодействию.

Легко установить из (7.8) следующее соотношение коммутации:

$$[H_0, H_r] = 0. \quad (7.9)$$

Поэтому, если в выражении для H пренебречь нерезонансным членом H_{ar} (что обычно и делается), то из (7.9) вытекают два закона сохранения:

$$[\bar{H}, H_0] = 0, \quad [\bar{H}, H_r] = 0, \quad (7.10)$$

где через \bar{H} обозначен резонансный гамильтониан системы атомы + поле:

$$\bar{H} = H_0 + H_r. \quad (7.11)$$

Из (7.10) следует, что в резонансном приближении (7.11) можно ввести два независимых квантовых числа и выразить энергию как функцию этих чисел. Существование полного набора (двух) интегралов движения позволяет также получить в резонансном приближении (7.11) точное решение (см. обзор [193]). Это решение описывает периодическую со временем перекачку энергии из атомов в поле и обратно. Фазовое пространство системы имеет особую траекторию — сепаратрису (см. ниже), которой соответствует полное преобразование энергии из атомов в поле или обратно. Поэтому влияние отброшенного нерезонансного члена H_{ar} может оказаться существенным.

Для дальнейшего исследования системы вернемся снова к полуклассическому гамильтониану системы C в форме (7.7).

Обозначим через

$$y = \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\omega^2} \dot{\mathcal{E}}^2$$

число фотонов системы, приходящихся на один атом. В резонансном приближении согласно (7.10) сохраняется величина

$$H_0 = y + n, \quad (7.12)$$

имеющая смысл полного числа фотонов. Введем новые переменные I_e, φ_e и I_m, φ_m :

$$\mathcal{E} = (I_e/\omega)^{1/2} \cos \varphi_e, \quad \dot{\mathcal{E}} = -(\omega I_e)^{1/2} \sin \varphi_e, \quad (7.13)$$

$$m = (I_m/\omega)^{1/2} \cos \varphi_m, \quad \dot{m} = -(\omega I_m)^{1/2} \sin \varphi_m.$$

Тогда уравнения (7.4) могут быть переписаны в следующей канонической форме:

$$\begin{aligned} \dot{I}_e &= -\frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi_e} = -\frac{1}{2} \omega \Lambda (I_e I_m)^{1/2} (\sin \psi + \sin \varphi), \\ \dot{\varphi}_e &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial I_e} = \omega - \frac{1}{4} \omega \Lambda \left(\frac{I_m}{I_e} \right)^{1/2} (\cos \psi + \cos \varphi), \\ \dot{I}_m &= 2n \frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi_m} = -\omega n \Lambda (I_e I_m)^{1/2} (\sin \psi - \sin \varphi), \\ \dot{\varphi}_m &= -2n \frac{\partial \bar{C}}{\partial I_m} = \omega + \frac{1}{2} \omega n \Lambda \left(\frac{I_e}{I_m} \right)^{1/2} (\cos \psi + \cos \varphi), \end{aligned} \quad (7.14)$$

где роль гамильтониана играет величина $\bar{C} = \omega^2 C$ и обозначено

$$\psi = \varphi_e - \varphi_m, \quad \varphi = \varphi_e + \varphi_m. \quad (7.15)$$

Кроме того, в новых переменных

$$n^2 = r^2 - I_m/\omega. \quad (7.16)$$

Без ограничения общности можно положить в (7.16) $r = 1$, так как замена

$$y \rightarrow y/r, \quad n \rightarrow n/r, \quad m \rightarrow m/r, \quad \dot{m} \rightarrow \dot{m}/r, \quad \rho \rightarrow \rho/r, \quad \Lambda \rightarrow \Lambda r^{1/2}$$

убирает величину r из системы (7.14). Кроме того, из (7.14) и (7.15) видно, что резонансное приближение связано с пренебрежением всеми членами, содержащими фазу φ .

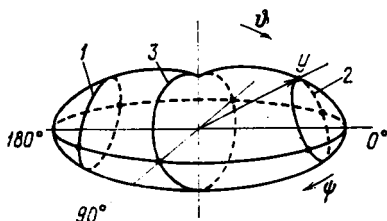


Рис. 12.5. Поверхность постоянной энергии $C = 1$ в фазовом пространстве ($y, \varphi = \arccos n$, ψ): 1 — $H_0 < 1$; 2 — $H_0 > 1$; 3 — $H_0 = 1$.

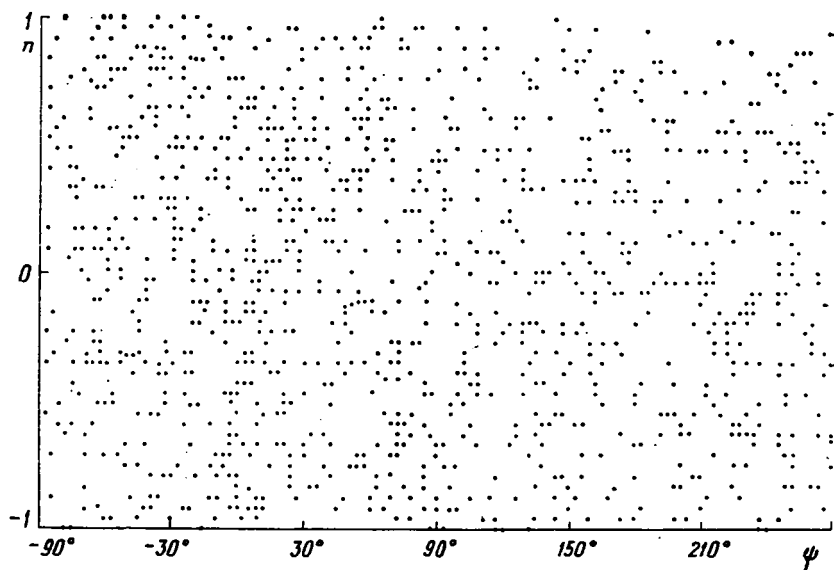


Рис. 12.6. Точки одной траектории, взятые последовательно через период поля при $C = 1$, $\Lambda = 1,8$.

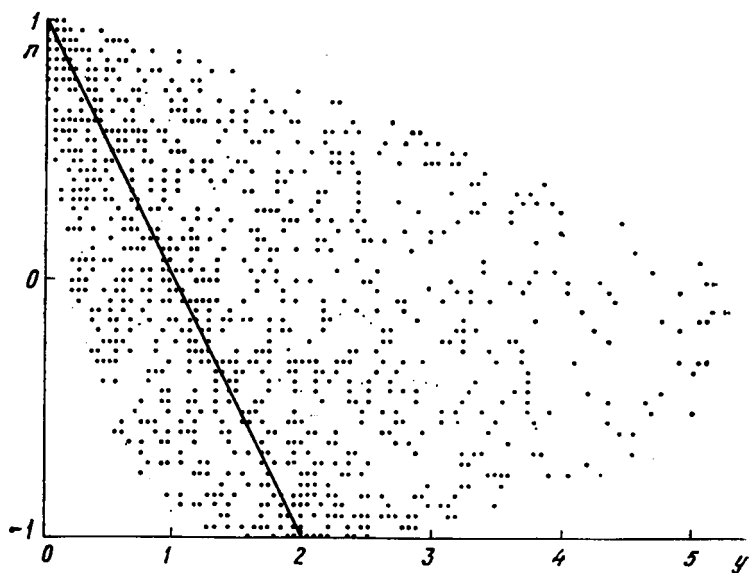


Рис. 12.7. Стохастическая траектория на плоскости (n, y) при $C = 1$, $\Lambda = 1,8$.

Сепаратрисе в перезональном приближении соответствуют значения $H_0 = C = 1$. В работе [192] было показано, что при малых значениях Λ учет перезональных членов в системе (7.14) приводит к образованию узкого стохастического слоя в окрестности сепаратрисы. Однако ситуация изменяется при $\Lambda \geq 1$, т. е. при сильной связи поля с атомами. В этом случае все фазовое

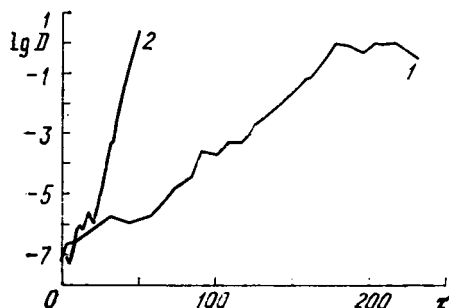


Рис. 12.8. Зависимость от времени τ расстояния D в единицах периода поля между начально близкими траекториями ($C=1$): 1 — $\Lambda = 0,9$; 2 — $\Lambda = 3$.

(7.12) также разрушается стохастически (рис. 12.7). При отсутствии перезонального члена, согласно (7.12), $y + n = \text{const}$ (прямая на рис. 12.7). Для полной системы (7.14) величина H_0 является случайно меняющейся функцией времени. На рис. 12.7 точки изображают пару значений (y, n) , взятых последовательно на одной и той же траектории при $\Lambda \geq 1$ с интервалом времени в один период поля. Наконец, рис. 12.8 иллюстрирует развитие локальной неустойчивости.

Из приведенных результатов следует, что значение константы взаимодействия (7.5) в системе атомы + поле, равное $\Lambda \sim 1$, отделяет область ($\Lambda < 1$) существования почти во всем фазовом пространстве полного набора (двух) интегралов движения от области ($\Lambda \geq 1$), где один из интегралов движения стохастически разрушен и остается только интеграл полной энергии.

§ 12.8. Внутримолекулярный обмен энергии

Два предельных случая обмена энергии. Возбужденные молекулы. Преддиссоциация и образование молекулярных связей

В этом параграфе мы лишь кратко отметим новое направление в исследованиях внутримолекулярных связей, которое развивается в последнее время.

Обычная интерпретация, например, процесса диссоциации молекулы при мономолекулярных реакциях связана с двухступенчатым процессом: энергия тем или иным способом передается в какие-либо колебательные степени свободы и потом в результате

внутримолекулярного обмена с другими степенями свободы накапливается в некоторой критической мере. В результате этого возникают условия, при которых может происходить химическая реакция. Существуют два предельных способа описания возбуждения колебательных степеней свободы молекул. Теория Слэтера [194] основана на введении квазинормальных колебаний, число которых равно числу степеней свободы. В ней практически отсутствует передача энергии между модами. В теории РРКМ [195], наоборот, происходит быстрая релаксация энергии по всем колебательным степеням свободы, а ее распределение устанавливается в соответствии с законами статистической механики. В реальной ситуации присутствуют оба предельных случая. Теория стохастичности классических систем позволяет понять по крайней мере с принципиальной точки зрения, что здесь происходит.

Обратимся для этого к системе связанных нелинейных осцилляторов. При достаточно малой энергии системы, $E < E_c$, число интегралов движения равно числу степеней свободы, и можно ввести столько же квазинормальных колебаний (практически это сделать, однако, не очень просто). Это и есть область применимости теории Слэтера. При $E > E_c$ часть интегралов движения разрушается и возникает стохастическое движение. Если разрушены все интегралы движения (кроме, конечно, полной энергии) и время перемешивания достаточно мало, то это есть область, в которой справедлива теория РРКМ. В связи со сказанным становится ясным, насколько существенно реальная ситуация связана с детальным изучением процесса разрушения интегралов движения, стохастизации движения и определения времен распределения корреляций (времен перемешивания) по различным степеням свободы.

Приведенные выше рассуждения пока не затрагивают квантовой природы объекта. В действительности, как мы уже видели, разрушение интегралов движения должно приводить также к перестройке колебательного спектра и к различным следствиям в молекулярной спектроскопии. Некоторые элементарные соображения могут служить неплохой иллюстрацией влияния перестройки спектра при сильном возбуждении молекул.

В § 2.3 (формула (2.3.3)) было показано, что газ сфер, сталкивающихся друг с другом как твердые шарики, обладает свойством перемешивания при условии

$$K = \rho/R \geq 1, \quad (8.1)$$

где R — радиус сфер, а ρ — половина характерного расстояния между центрами сфер. В более общем случае под R можно понимать характерный радиус взаимодействия между атомами в молекуле. Тогда величина 2ρ определяет расстояние между центрами взаимодействующих областей. Она является функцией энергии молекулы. Действительно, из эксперимента известно, что с увеличением энергии молекул величина $\rho = \rho(E)$ возрастает. Условие (8.1) может быть использовано для определения

критической энергии E_0 :

$$\rho(E_0) \sim R,$$

при которой в молекуле разрушаются интегралы движения (все или часть из них). Устойчивому случаю соответствует неравенство $K < 1$ или $\rho < R$, т. е. «плотная упаковка» взаимодействующих сфер. Это, как известно, приводит к возможности введения некоторого самосогласованного потенциала и к хорошо определенной одночастичной задаче с полным набором всех квантовых чисел (например, модель независимых частиц в теории ядра). Наоборот, при условии (8.1) система становится «рыхлой», и именно в этом случае возникает статистическое распределение уровней.

Одно из наиболее простых следствий возникновения статистической структуры уровней связано со спектральными особенностями возбужденных молекул. Спектры поглощения в низкочастотной области должны обладать аномальными свойствами. Действительно, пусть на молекулу действует слабое внешнее поле с частотой ω , и пусть $\hbar\omega \ll \langle \Delta E \rangle$. Тогда число резонансных переходов должно быть пропорционально $P(E|\Delta E = \hbar\omega)$. Поэтому интенсивность поглощения энергии внешнего поля согласно формуле (5.12) должна быть пропорциональна величине

$$I(\omega) \propto \omega^{\text{const}/\hbar}. \quad (8.2)$$

С увеличением энергии возбуждения молекулы должна изменяться величина \hbar , а, следовательно, и форма линии поглощения в соответствии с (8.2).

Другим примером влияния перемешивания может служить образование молекулярных связей и, в частности, водородной связи в условиях преддиссоциации. Изучение инфракрасных спектров при образовании связи обнаруживает сильное уширение спектральных линий. При сближении атомных групп, образующих молекулу, возмущение, которое действует, например, на пона водорода в одной из групп, разрушает его интегралы движения (или, что то же самое, квантовые числа, определяющие движение пона водорода). Возникает стохастическое движение пона водорода, которое и приводит к аномальной ширине соответствующих колебательных спектров.

По-видимому, образование молекулярной связи любого типа проходит через некоторую область разрушения интегралов движения и стохастичности. Однако размеры этих областей зависят от условий образования молекулы.

Комментарии к гл. 12

1. Определение распределения энергетических уровней при стохастическом разрушении интегралов движения было начато в работе [73] для модели скользящих электронов и продолжено в работе [136]. Обзор исследований этой проблемы содержится в [137], [138].

2. Правила квантования Эйнштейна были обоснованы в ряде работ [165—167, 156] и уточнены за счет пекквазиклассических поправок [167—170]. Приводимый здесь вывод следует работе [136].

3. Полезно отметить определенную «устойчивость» правил квантования (1.2). Она связана все с тем же свойством движения: существованием точно N интегралов движения. Предположим, что мы хотим «огрубить» траектории и вместо бесконечно малой области dq в окрестности точки q рассмотрим конечную область Δq . Другими словами, пусть суммирование в формуле (1.9) производится не по точным замкнутым орбитам, а по таким, которые замыкаются в малой, но конечной области фазового пространства $\Delta\Gamma$. Однако реальная траектория системы не может «сойти» со своего тора и «перейти» на другой тор (без наличия возмущения). Поэтому точность в определении величины I_k будет та же: $\Delta\Gamma$. Следовательно, правила квантования (1.2) будут определяться с той же относительной точностью, с которой отбираются периодические траектории. Именно поэтому, в частности, оправдан переход от точного выражения (1.4) к асимптотической формуле (1.5), полученной методом перевала.

4. Основные работы этого направления (по 1965 г.) собраны и изданы Портером [172]. Их анализ проведен в прекрасном обзоре Портера [173]. В работах Виггера [171] и Портера и Розенцвейга [173, 175] рассматривался гауссовский ансамбль случайных матриц. Формальное завершение это направление получило в работах Дайсона [174], который рассмотрел ансамбли случайных ортогональных, унитарных и симплектических матриц. Ряд последних результатов этого направления содержится в обзорах [187, 188]. Представление об ансамбле случайных матриц уже было известным благодаря результатам Вейля [176], который ввел понятие функции распределения (меры) на группе и получил распределение собственных значений для унитарного ансамбля.

5. Обратим внимание на то, что в формуле (4.1) интегрирование ведется по замкнутым траекториям, т. е. по замкнутым контурам, совпадающим с траекториями. В то же время в интегрируемом случае (§ 12.1) мы смогли перейти от таких контуров к топологически замкнутым контурам, лежащим на N -мерных инвариантных торах. Это привело к существенным упрощениям. Однако в рассматриваемом случае инвариантные торы разрушены, и возможность введения удобных топологических орбит, по-видимому, отсутствует.

6. Существует также определенное количество экспериментальных данных. Первые из них по анализу распределения расстояний между уровнями были получены в работе [185] для группы тяжелых ядер. Эти данные блестяще подтвердили гипотезу о существовании расталкивания между уровнями. Аналогичные результаты были получены также для электронных уровней возбужденных атомов. Здесь статистическое распределение должно возникать за счет достаточно сильного спин-орбитального взаимодействия, приводящего к разрушению квантовых чисел L и S .

Более сложным является вопрос об экспериментальном или численном определении закона расталкивания уровней и зависимости его от динамических характеристик системы. Трудности связаны с низкой точностью анализа при очень малых значениях ΔE .

ДОПОЛНЕНИЯ

Д1. Перемешивающие бильярды

Перемешивающим называется бильярд, в котором возможно движение шара с перемешиванием. Область фазового пространства, занимаемая стохастическими траекториями, может составлять часть всей области фазового пространства допустимого движения. Общая картина динамики частицы в бильярде определяется его геометрией. Бильярды очень наглядны и удобны для изучения общих свойств гамильтоновых динамических систем. Интерес к ним связан, однако, не только с этим. Можно установить однозначное соответствие между конкретными динамическими задачами и задачей о движении частицы в бильярде. Другими словами, многие динамические задачи могут быть приведены к задаче бильярдного типа (см., например, § 2.3, 3.3). Основная идея подобного соответствия заключается в следующем. Пусть для рассматриваемой гамильтоновой системы удалось тем или иным способом построить отображение, реализующее движение системы (т. е. перейти от дифференциальных уравнений движения к уравнениям в конечных разностях). Тогда это отображение имеет ту же структуру, что и отображение для траектории частицы в бильярде определенного типа.

Бильярды, как динамические системы, быстро приобрели популярность, когда стало ясно, что самым наглядным примером динамической системы со стохастическими траекториями является бильярд отрицательной кривизны. В связи с этим уместно отметить пророческие слова Жака Адамара, который еще в 1898 г. начал изучение геодезических в пространстве отрицательной кривизны [157]: «Имеется ли что-нибудь подобное в задачах динамики и, в частности, в небесной механике? Если это так, то вся постановка вопроса об устойчивости планетных систем пугается в коренном пересмотре**»).

В § 2.3 уже рассматривались бильярды со стенками отрицательной кривизны. Если границы бильярда имеют как отрицательную, так и положительную кривизну, то характер динамики частицы должен определяться соотношением времен, которые частица проводит в окрестности рассеивающих и фокусирующих областей. Эти соображения были высказаны Хопфом [40] и рассмотрены более детально в работе Бунимовича [160]. Последующие исследования показали, что стохастичность может возникать также в бильярдах, которые содержат только фокусирующие дуги и прямолинейные отрезки [161, 162]. Примеры таких бильярдов приведены на рис. Д1.1**).

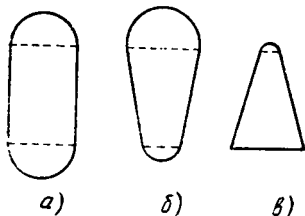
Соображения, иллюстрирующие причину возникновения стохастичности в нерассеивающем бильярде, проще всего понять на примере бильярда типа «стадион» [161]. Узкий пучок траекторий попадает на участок дуги

*) Цитируется по предисловию В. М. Алексеева к работам Р. Буэна [158].

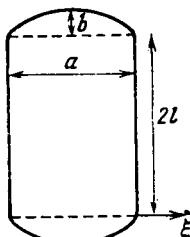
***) Бильярд типа «стадион» (рис. Д1.1, а) рассматривался также в работе [163], а в бильярде на рис. Д1.1, в, как показано Л. А. Бунимовичем, стохастичность существует при сколь угодно малой хорде дуги.

бильярда и после отражения от него начинает фокусироваться. После прохождения области фокуса пучок начинает расходиться на прямолинейном участке. При последующих прохождениях прямолинейного участка процесс расхождения лучей нарастает. Таков путь возникновения локальной неустойчивости.

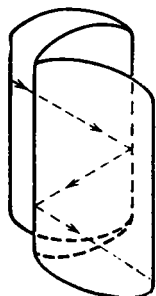
Проведем простой анализ, позволяющий получить аналитические результаты в явной форме [138]. Этот анализ выполняется одинаковым образом как для рассеивающих, так и для нерассеивающих бильярд.



Д1.1. Примеры нерассеивающих бильярд со стохастическими траекториями частиц.



Д1.2. Бильярд с фокусирующими дугами и прямолинейными участками.



Д1.3. Образование «плиссированной» поверхности.

Рассмотрим сначала бильярд в форме, изображенной на рис. Д1.2, причем являются ли дуги выпуклыми или вогнутыми, несущественно в дальнейшем. Уравнение кривой, представляющей дугу бильярда, запишем аналогично тому, как это делалось в § 3.3 для «скользящих» электронов:

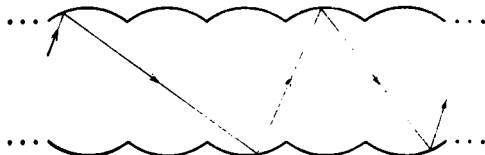
$$\chi = \chi(\xi), \quad \xi = \{x/a\}, \quad \max \chi(\xi) = b/a, \quad (Д1.1)$$

где координата ξ и параметры a, b указаны на рис. Д1.2. Следующие неравенства используются для упрощения задачи:

$$b \ll a \ll l, \quad (Д1.2)$$

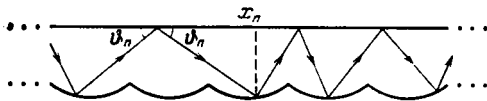
где l — длина прямолинейных участков бильярда.

Рассмотрим траекторию частицы после нескольких отражений от боковых прямолинейных участков. Будем каждый отрезок луча траектории между двумя последовательными отражениями от прямолинейных участков изображать на отдельном листе. Сложим листы с последовательными отрезками траектории в стопку и склеим их попарно вдоль тех прямолинейных участков бильярда, от которых происходит отражение (рис. Д1.3). В результате траектория частицы изображается на «плиссированной» поверхности. Подчеркнем, что падающий и отраженный лучи криволинейных участков бильярда изображаются на одном и том же листе.



Д1.4. Развертка «плиссированной» поверхности.

Растянем теперь полученную «плиссированную» поверхность и будем изучать траекторию частицы на образовавшейся однолистной плоскости (рис. Д1.4). До сих пор все рассуждения были точными. Введем последовательно ряд упрощений технического характера. Если бильярд симметричный, то удобно поверхность с траекторией согнуть вдоль оси x вдвое и склеить (рис. Д1.5). Теперь задача сводится к бильярду типа «гусеница». Следующее упрощение связано с использованием неравенств (Д1.2). Они позволяют пренебречь участками



Д1.5. Образование из «плиссированной» поверхности бильярда типа «гусеница».

траектории частицы, которые содержат более чем одно последовательных столкновений внутри дуги бильярда.

Дальнейший анализ аналогичен способу решения задачи о скользящих электронах. Введем координаты (x_n, ϑ_n) так, как это показано на рис. Д1.5.

Тогда
$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n - 2 \operatorname{arctg} \chi'(\xi_n), \quad x_{n+1} \approx x_n + l \operatorname{ctg} \vartheta_{n+1}, \quad (\text{Д1.3})$$

или

$$\vartheta_{n+1} \approx \vartheta_n - 2\chi'(\xi_n), \quad \xi_{n+1} \approx \left\{ \xi_n + \frac{l}{a} \operatorname{ctg} \vartheta_{n+1} \right\}. \quad (\text{Д1.4})$$

Отсюда находим коэффициент растяжения фаз

$$K_0 = \left| \frac{d\vartheta_{n+1}}{d\xi_n} - 1 \right| = \frac{2l}{a} |\chi''| \frac{1}{\sin^2 \vartheta_{n+1}}. \quad (\text{Д1.5})$$

Из выражения (Д1.5), как и ранее, следует условие стохастичности

$$K = \frac{2l}{a} \max \chi'' \gg 1, \quad (\text{Д1.6})$$

а безразмерная K -энтропия характеризуется выражением

$$h \sim \ln K = \ln \left(\frac{2l}{a} \max \chi'' \right). \quad (\text{Д1.7})$$

Если дуга бильярда является параболой, то из (Д1.1) следует

$$\chi(\xi) = (4b/a)\xi(1-\xi), \quad \max \chi(\xi) = \chi(1/2) = b/a$$

и выражения (Д1.6), (Д1.7) переходят в следующие:

$$K = 16lb/a^2 \gg 1, \quad h = \ln(16lb/a^2). \quad (\text{Д1.8})$$

Граница стохастичности определяется из условия $K \sim 1$. Согласно (Д1.8) это означает, что при $16lb/a^2 \gtrsim 1$ бильярд обладает свойством перемешивания.

Подчеркнем, что проведенный выше анализ и вывод уравнений отображения (Д1.4) нигде не предполагали знание явного вида формы кривой $\chi(\xi)$ вплоть до конкретных оценок типа (Д1.8). Аналогичным образом может быть рассмотрен и более сложный случай бильярда, изображенного на рис. Д1.1, в и также имеющего прямолинейные участки границы. Для него строится «плиссированная» поверхность, которая при растяжении переходит в «веер» (рис. Д1.6). Дальнейший анализ траекторий частицы и построение отображения проводятся аналогичным способом.

Д1.6. Образование из «плиссированной» поверхности бильярда типа «веер».

Изменения ϑ можно описать с помощью уравнения диффузии Колмогорова:

$$\frac{\partial w(\vartheta, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\left\langle \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} \right\rangle w(\vartheta, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \left[\left\langle \left(\frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} \right)^2 \right\rangle w(\vartheta, t) \right], \quad (\text{Д1.9})$$

где $\Delta\theta$ — изменение θ на один шаг отображения, а Δt — интервал времени между двумя последовательными отображениями. Кроме того, функция w должна удовлетворять граничному условию

$$w(-\pi/2, t) = w(\pi/2, t). \quad (Д1.10)$$

Из уравнения (Д1.4) имеем

$$\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n = -2\chi'(\xi) = -8\frac{b}{a}(1-2\xi),$$

где индекс n при ξ_n опущен для простоты записи. Из рис. Д1.5 следует, что

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{l}{2v} (|\operatorname{tg} \theta_n| + |\operatorname{tg} \theta_{n+1}|) \approx \\ &\approx l |\operatorname{tg} \theta| + \frac{1}{2} l \frac{\Delta\theta}{\cos^2 \theta} = l |\operatorname{tg} \theta| \left(1 - 8\frac{b}{a} \frac{1-2\xi}{\sin 2\theta}\right), \end{aligned}$$

где v — скорость частицы и при θ_n также опущен индекс n . Поскольку распределение по ξ является равномерным на интервале $(0, 1)$, то с точностью до членов второго порядка малости по χ' имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right\rangle &= -\frac{32 b^2 v}{3 a^2 l} \frac{1}{\sin^2 \theta}, \\ \left\langle \frac{(\Delta\theta)^2}{\Delta t} \right\rangle &= \frac{64 b^2 v}{3 a^2 l} \frac{1}{|\operatorname{tg} \theta|} \end{aligned} \quad (Д1.11)$$

Эти же соотношения могут быть получены непосредственно из (Д1.3). Формулы. (Д1.11) показывают, что выполняется принцип детального равновесия

$$\left\langle \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\langle \frac{(\Delta\theta)^2}{\Delta t} \right\rangle. \quad (Д1.12)$$

Таким образом, уравнение (Д1.9) переходит с учетом (Д1.11) и (Д1.12) в следующее:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} D(\theta) \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (Д1.13)$$

где коэффициент диффузии $D(\theta)$ равен

$$D(\theta) = \frac{64 b^2 v}{3 a^2 l} \frac{1}{|\operatorname{tg} \theta|}. \quad (Д1.14)$$

Из (Д1.14) следует, что характерное время установления равновесного распределения $w(\theta)$ равно

$$\tau_D = \frac{l}{v} \frac{3 a^2}{32 b^2}. \quad (Д1.15)$$

Распределение $w(\theta)$ легко находится из (Д1.13):

$$w(\theta) = \frac{1}{\pi \ln 2} |\ln \cos \theta| \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (Д1.16)$$

и удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} w(\theta) d\theta = 1$$

и граничному условию (Д1.10).

Д2. Диффузия Арнольда

Арнольдом [35] была обнаружена универсальная неустойчивость, присущая системам с числом степеней свободы $N \geq 3$. Понятие универсальности означает, что неустойчивость имеет место в произвольной нелинейной системе общего положения*). Понятие неустойчивости означает следующее. Пусть система имеет гамильтониан

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \theta_1; \dots; I_N, \theta_N) \quad (D2.1)$$

и $\varepsilon \ll 1$. При $\varepsilon = 0$ система (D2.1) — интегрируемая и действия I_1, \dots, I_N — интегралы движения. Если неравенство

$$|I(t) - I(0)| \ll 1 \quad (D2.2)$$

для N -мерного вектора $I(t)$, являющегося решением возмущенной системы (D2.1), справедливо для времени $t < \tau_D$, то систему (D2.1) будем называть устойчивой в течение времени τ_D . В случае неустойчивости, описанной Арнольдом, неравенство (D2.2) не выполняется для достаточно больших t . Понятие диффузии используется постольку, поскольку неустойчивость носит стохастический характер.

Явление диффузии Арнольда подробно описано Нехорошевым [199] (строгие результаты) и Чириковым [24, 25] (качественные и численные результаты). Здесь будут приведены лишь некоторые качественные понятия о диффузии Арнольда.

Пусть $N = 2$. Нелинейный резонанс между двумя степенями свободы описан в § 1.3. Условие резонанса имеет вид (см. формулу (1.3.17))

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0, \quad (D2.3)$$

где n_1, n_2 — положительные и отрицательные целые числа. Частоты ω_1 и ω_2 являются функциями действий I_1 и I_2 . Удобно вместо системы координат (I_1, I_2) использовать переменные (ω_1, ω_2) . Тогда резонансные условия (D2.3) обозначают семейство прямых (рис. D2.1). Поверхность постоянной энергии пересекает эти прямые и отбирает резонансные точки. Движение в окрестности этих точек по поверхности $H = \text{const}$ описывается уравнениями нелинейного резонанса с эффективным гамильтонианом \bar{H} (см. формулу (1.3.18)).

Каждый нелинейный резонанс имеет сепаратрисы, которая разрушается (стохастически) любым возмущением, в том числе и отброшенными нерезонансными членами (см. §§ 5.1, 5.3). Это означает также, что резонансные торы (им соответствуют точки на рис. D2.1) при их разрушении «одеваются» стохастическим слоем. Ширина слоя в том случае, когда возмущением являются нерезонансные члены, равна (см. формулу (5.1.18))

$$\Delta H/H_c \sim \varepsilon \exp(-\nu\pi/\Omega) \quad (\nu \gg \Omega), \quad (D2.4)$$

где ν — частота внешнего возмущения, Ω — частота малых колебаний возмущаемого движения.

В данном случае речь идет о разрушении нелинейного резонанса, порождаемого эффективным гамильтонианом \bar{H} . Частота малых колебаний для \bar{H} равна частоте фазовых колебаний Ω и определяется формулой (1.3.13) при $\alpha \sim 1$:

$$\Omega \sim \omega_0 \varepsilon^{1/2}, \quad (D2.5)$$

*) Естественно, что здесь и далее под произвольной системой понимается любая динамическая система, за исключением множества некоторых вырожденных случаев.

где ω_0 — частота колебаний невозмущенного движения всей системы с гамильтонианом H_0 . Нерезонансное возмущение имеет частоту $\sim 2\omega_0$, т. е. $\nu \sim 2\omega_0$. Подставляя это выражение и (Д2.5) в (Д2.4), получаем

$$\Delta H/H_c \sim \varepsilon \exp(-2\pi/\varepsilon^2). \quad (\text{Д2.6})$$

Однако при $N = 2$ торы делят фазовое пространство (§ 1.4), и поэтому разрушенные торы отделены друг от друга устойчивыми торами. Это означает, что неравенство (Д2.2) выполняется для любых t , т. е. имеет место вечная устойчивость*).

При $N \geq 3$ резонансные торы не делят фазовое пространство (§ 1.4). Поэтому резонансные многообразия, которые находятся из уравнения

$$n_1\omega_1 + \dots + n_N\omega_N = 0,$$

сложным образом пересекаются (рис. Д2.2). Им соответствуют пересекающиеся резонансные торы в фазовом пространстве. Нерезонансные возмущения одевают стохастическим слоем каждый из резонансных торов. Таким образом, все фазовое пространство пронизано сеткой узких слоев, по которым частица может совершать диффузионное движение сколь угодно далеко от своего невозмущенного движения. Это и есть диффузия Арнольда.

Оценим время диффузии τ_D . Имеем для коэффициента диффузии в пространстве энергий:

$$D \sim H_c^2/\tau_D \sim (\Delta H)^2/\tau, \quad (\text{Д2.7})$$

где ΔH определяется формулой (Д2.6), а τ — характерное время, на котором энергия изменяется на величину ΔH . Это время является очень неоднородным внутри стохастического слоя, и для него можно принять некоторое усредненное значение $\tau \sim 1/\Omega$, т. е. период фазовых колебаний. С учетом (Д2.5)

$$\tau \sim 1/(\varepsilon^2\omega_c)^{-1}. \quad (\text{Д2.8})$$

Подставляя (Д2.6) и (Д2.8) в (Д2.7), находим

$$\tau_D \sim \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\varepsilon} \exp \frac{2\pi}{\varepsilon^{1/2}}. \quad (\text{Д2.9})$$

Величина τ_D является экспоненциально большой. Она определяет время потери устойчивости. В действительности оценка (Д2.9) является очень грубой. В ней отсутствует, в частности, зависимость от числа степеней свободы системы N . Нехорошевым был получен следующий результат [199]:

$$\tau_D \sim \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\varepsilon} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon^a} \right), \quad (\text{Д2.10})$$

где

$$a = \frac{2}{(12\zeta + 3N + 14)}, \quad \zeta \geq \frac{1}{2} N(N-1). \quad (\text{Д2.11})$$

Очень важной особенностью результата Нехорошева (Д2.10), (Д2.11) является зависимость показателя a от N . С ростом N величина a становится очень малой и время неустойчивости τ_D существенно уменьшается.

Различные примеры качественных и численных оценок τ_D и физических приложений диффузии Арнольда содержатся в обзоре [25].

*) При отсутствии перекрытия резонансов.

ДЗ. Стохастичность в диссипативных динамических системах

3.1. Стохастичность и турбулентность. Во всем тексте монографии существенно использовалось свойство гамильтоновости рассмотренных динамических систем. Это означало, что фазовый объем системы сохраняется в процессе ее движения. Перемешивающееся в фазовом пространстве, или стохастическое движение обозначалось одновременно турбулентностью движения в фазовом пространстве. При анализе возникновения стохастичности в континуальных системах типа взаимодействующих волн переход к перемешиванию означает также переход и к турбулентному движению в пространстве координат системы.

Следует заметить, что понятие турбулентности всегда использовалось для определенных форм движения диссипативных сред. Поэтому полезно остановиться более подробно на связи между явлениями стохастичности и турбулентности.

Пусть, например, гидродинамическое движение описывается, кроме динамических переменных, еще некоторым значением характерного безразмерного параметра Y . Роль такого параметра может играть число Рейнольдса, число Рэлея и др. Может оказаться, что при малых значениях Y соответствующая динамика сплошной среды является устойчивой. Однако увеличение параметра Y приводит при $Y > Y_1$ к неустойчивости и к появлению нового типа движения, которое в свою очередь устойчиво при малых значениях $Y - Y_1 > 0$. Вообще говоря, гидродинамические системы могут иметь последовательность чисел Y_1, Y_2, \dots , при которых происходит качественное изменение динамики (эти изменения называют бифуркациями). Последовательность бифуркаций заканчивается движением нерегулярного, хаотического типа при $Y > Y_c$, причем обычно $Y_c > Y_1, Y_2, \dots$. Такое движение является турбулентным. Различные примеры его содержатся в монографии [196].

Условие перехода от устойчивого, ламинарного движения к турбулентному, по существу, есть условие возникновения стохастичности, или перемешивания в фазовом пространстве. Специфика появления турбулентности в гидродинамической среде обусловлена диссипативным характером уравнений движения. Динамическая система теперь не является гамильтоновой, и фазовый объем не сохраняется со временем. Тем не менее формальные методы символической динамики позволяют многие вопросы, связанные с возникновением хаоса, изучать вне связи со свойством сохранения фазового объема в процессе движения. Это возможно сделать также и с помощью менее строгих методов, аналогичных описанным в гл. 2—4.

3.2. Странные аттракторы. Первые простейшие модели (см. гл. 2), в которых исследовались условия появления стохастичности, уже были не гамильтоновыми. Однако наиболее интенсивное изучение диссипативных систем началось после работы Лоренца [200]. Работа была посвящена анализу возникновения турбулентности в процессе термоконвекции в так называемом конечномерном приближении*). Численный анализ, проведенный Лоренцем, показал, что при некоторых условиях в модели возникает хаос. Как и предполагается, переход к нему (т. е. к турбулентности) происходит через ряд бифуркаций решения (их исследование см. в [201]). Однако, если можно так выразиться, хаос имеет весьма необычную структуру. Опишем ее следующим образом.

Рассмотрим сначала гамильтонов случай. Пусть изучаемая система совершает движение с перемешиванием. Рассмотрим жидкую каплю в фазовом пространстве, имеющую конечный фазовый объем и состоящую из множества точек, принадлежащих различным состояниям системы. В процессе движения капля растекается по всему допустимому фазовому объему. Мера (начальный объем капли) сохраняется, и поэтому через некоторое время фазовый объем покрывается с некоторой конечной плотностью

*) Обзор разных моделей возникновения стохастичности в системах типа модели Лоренца и близких к ним содержится в работах [197, 198].

слоем фазовой жидкости. Его размерность равна размерности фазового пространства.

В диссипативных системах дело обстоит иначе. В фазовом пространстве имеется некоторое предельное и инвариантное множество состояний, к которым притягиваются все траектории фазовой капли. Поэтому асимптотически при $t \rightarrow \infty$ движение системы происходит на этом предельном множестве. Хаотическое движение в диссипативных системах также реализуется на этом множестве, которое имеет хаусдорфову размерность, меньшую чем размерность всего фазового пространства (подробнее об этом см. ниже). Это предельное притягивающее множество, возникающее при стохастическом движении диссипативных систем, было названо «странным аттрактором» [202]. В гамильтоновом случае имеет место некоторая предельная ситуация, в которой странным аттрактором является все фазовое пространство (это будет доказано позже).

Проведем анализ условий возникновения и свойств странного аттрактора на примере одного класса задач, возникающих в теории колебаний [203, 204].

3.3. Модель странного аттрактора. В § 4.1 рассматривалось универсальное отображение, возникающее в физических задачах гамильтонова типа. В переменных действие — угол оно порождается гамильтонианом (4.1.4):

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (Д3.1)$$

и приводит к уравнениям движения (4.1.5):

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \phi)}{\partial \phi} f(t), \quad \dot{\phi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \phi)}{\partial I} f(t), \quad (Д3.2)$$

где

$$\omega(I) = \frac{dH_0}{dI}, \quad f(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

В целях упрощения исследования пусть $V = V(\phi)$ и не зависит от I . Тогда из (Д3.2) следует

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} f(t), \quad \dot{\phi} = \omega(I), \quad (Д3.3)$$

или эти же уравнения в форме отображения

$$\bar{I} = I - \varepsilon \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} T, \quad \bar{\phi} = \phi + \omega(\bar{I}) T \quad (Д3.4)$$

(сравните с формулой (4.1.7)). Введем теперь диссипативный член в систему (Д3.1). Будем считать, что система с гамильтонианом $H_0(I)$ имеет устойчивый предельный цикл при $I = I_0$. Это означает, что если бы возмущение отсутствовало, то имели бы место уравнения движения

$$\dot{I} = -\gamma(I - I_0), \quad \dot{\phi} = \omega(I), \quad (Д3.5)$$

где γ — диссипативный коэффициент.

Рассмотрим теперь объединение уравнений (Д3.3) и (Д3.5):

$$\dot{I} = -\gamma(I - I_0) - \varepsilon \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} f(t), \quad \dot{\phi} = \omega(I), \quad (Д3.6)$$

которое описывает действие внешнего возмущения на систему, имеющую устойчивый (притягивающий) предельный цикл в отсутствие возмущения в точке $I = I_0$.

Функция $V(\theta)$ периодически зависит от θ . Поэтому выберем ее в простейшем виде (см. § 4.1):

$$V(\theta) = (I_0/T) \cos \theta,$$

где множитель I_0/T определяет размерность V , а абсолютная величина V определяется безразмерным параметром ε . Также для упрощения пусть $\omega(I)$ является линейной функцией I , т. е.

$$\omega(I) = \omega_0 \left(1 + \alpha \frac{I - I_0}{I_0} \right),$$

где величина α , как и в § 4.1, имеет смысл безразмерного параметра нелинейности (см. формулу (4.1.11)).

Введем следующие безразмерные величины:

$$y = \frac{I - I_0}{I_0}, \quad x = \frac{1}{2\pi} \theta, \quad \Omega = \omega_0 T, \quad \Gamma = \gamma T. \quad (Д3.7)$$

Теперь систему (Д3.6) можно проинтегрировать на интервале времени T и представить в виде отображения

$$\bar{y} = e^{-\Gamma} (y + \varepsilon \cos 2\pi x), \quad (Д3.8)$$

$$\bar{x} = x + \frac{1}{2\pi} \Omega (1 + \alpha \mu y) + \frac{1}{2\pi} K \mu \cos 2\pi x, \quad \text{mod } 1,$$

где переменные (x, y) берутся в момент времени, непосредственно предшествующий действию δ -функции в $f(t)$, а (\bar{x}, \bar{y}) образуются из (x, y) путем действия оператора сдвига на интервал времени T . В системе (Д3.8) обозначено

$$K = \varepsilon \alpha \Omega, \quad \mu = \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma}. \quad (Д3.9)$$

Фактор μ учитывает диссипацию. При $\Gamma = 0$ имеем $\mu = 1$ и система (Д3.8) переходит в гамильтонову:

$$\bar{y} = y + \varepsilon \cos 2\pi x, \quad (Д3.10)$$

$$\bar{x} = x + \frac{1}{2\pi} \Omega (1 + \alpha y) + \frac{1}{2\pi} K \cos 2\pi x, \quad \text{mod } 1$$

(сравните (Д3.10) с уравнениями (4.1.9)).

Исследование системы (Д3.8) можно провести аналогично тому, как это делалось в § 4.1. Будем считать, что

$$\varepsilon \ll 1, \quad \alpha \ll 1.$$

Тогда при $K \ll 1$ (это означает также, что $K\mu \ll 1$, так как $\mu \leq 1$) движение системы (Д3.8) является устойчивым и никаких аномалий не содержит. Однако при

$$K\mu \gg 1 \quad (Д3.11)$$

из (Д3.9) следует

$$|\delta\bar{x}/\delta x - 1| \sim K\mu |\sin 2\pi x| \gg 1 \quad (Д3.12)$$

и возникает локальная неустойчивость, приводящая к быстрому перемешиванию по фазовой переменной x всюду, за исключением малых областей в окрестности точек

$$x^{(1)} = 0, \quad x^{(2)} = 1/2. \quad (Д3.13)$$

Обратим внимание на то, что при $\Gamma = 0$ условие стохастичности (Д3.11) переходит в обычное: $K \gg 1$. Это же условие, очевидно, сохраняется при малых Γ . При $\Gamma > 1$ из определения (Д3.9) следует, что условие (Д3.11)

переходит в следующее:

$$K/\Gamma \gg 1.$$

(Д3.14)

Таким образом, для границы стохастичности можно принять

$$K\mu \sim 1,$$

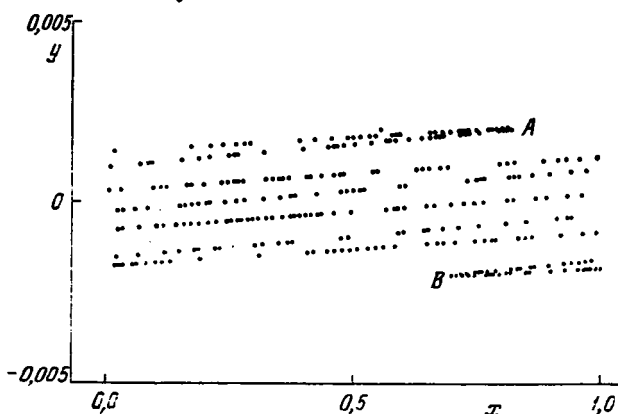
(Д3.15)

или, при $\Gamma \gg 1$,

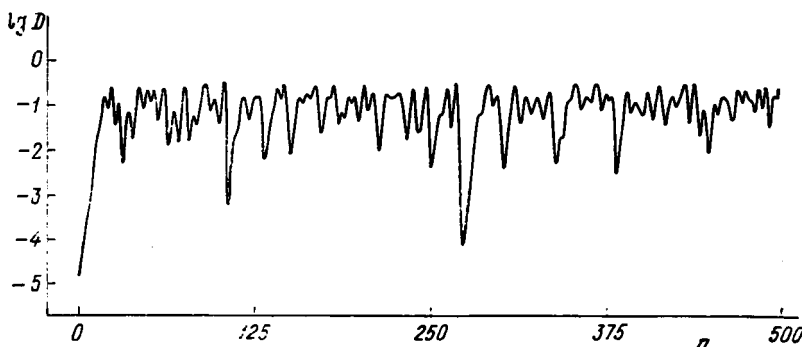
$$K \sim \Gamma.$$

(Д3.16)

Условия (Д3.15), (Д3.16) определяют границу стохастичности в рассматриваемом диссипативном случае.



Д3.1. Странный аттрактор при $\Gamma = 5$; $\alpha = 0,3$; $\varepsilon = 0,3$; $K = 9,03$.



Д3.2. Развитие локальной неустойчивости в том же случае, что и на рис. Д3.1.

Численный анализ [203, 204] подтверждает критерий (Д3.14), а множество точек отображения (Д3.8) на одной траектории имеет типичный для странного аттрактора вид (рис. Д3.1). Развитие локальной неустойчивости для расстояния

$$D(t) = [(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2]^{1/2}$$

между двумя траекториями приведено на рис. Д3.2, а корреляционная функция

$$R(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \cos 2\pi x_{n+m} \cos 2\pi x_n$$

изображена на рис. Д3.3. Близкая структура странного аттрактора была получена при разрушении устойчивого предельного цикла в работе [77].

Положения точек A и B на рис. Д3.1, определяющих границы странного аттрактора, легко определяются особыми точками (Д3.13) следующим образом. Подстановка (Д3.13) в уравнения (Д3.8) дает, например, при $\Gamma \gg 1$ (с точностью до $e^{-\Gamma}$):

$$y_A = \bar{y}(x = x^{(1)}, y = 0) = \varepsilon e^{-\Gamma}, \quad y_B = \bar{y}(x = x^{(2)}, y = 0) = -\varepsilon e^{-\Gamma},$$

$$x_A = \bar{x}(x = x^{(1)}, y = 0) = x^{(1)} + \frac{1}{2\pi} \Omega + \frac{K}{\Gamma} \cos 2\pi x^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \Omega + \frac{K}{\Gamma},$$

$$x_B = \bar{x}(x = x^{(2)}, y = 0) = x^{(2)} + \frac{1}{2\pi} \Omega + \frac{K}{\Gamma} \cos 2\pi x^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \Omega + \frac{1}{2} - \frac{K}{\Gamma}.$$

Отсюда получаем, в частности, ширину странного аттрактора (с той же точностью)

$$\Delta y = \max y - \min y = y_A - y_B = 2\varepsilon e^{-\Gamma}.$$

Уравнение кривых в структуре странного аттрактора легко получить при $e^{-\Gamma} \ll 1$. Из первого уравнения в (Д3.8) следует

$$\bar{y} \approx e^{-\Gamma} \varepsilon \cos 2\pi x.$$

Исключая с его помощью $\cos 2\pi x$ из второго уравнения в (Д3.8) и пренебрегая в нем величиной y , получаем

$$\bar{x} \approx \frac{\alpha \Omega}{2\pi \Gamma} e^{-\Gamma} \bar{y} + \frac{1}{2\pi} \Omega, \quad \text{mod } 1, \quad |\bar{y}| \leq \varepsilon e^{-\Gamma}. \quad (\text{Д3.17})$$

Выражение (Д3.17) определяет семейство прямых (см. рис. Д3.1), т. е. структуру странного аттрактора в первом приближении. В действительности каждая линия на рис. Д3.1 при увеличении масштаба изображения расщепляется на семейство прямых, аналогичное семейству нулевого приближения. Эта картина повторяется при дальнейшем увеличении масштаба. Поэтому говорят, что странный аттрактор имеет структуру канторова множества.

При слабой диссипации странный аттрактор слабо отличается от картины стохастичности в гампльтоновом случае (рис. Д3.4).

Пусть $K \gg 1$ и Γ не слишком велико, так что выполняется условие стохастичности (Д3.11). С ростом Γ число линий в структуре странного аттрактора уменьшается согласно формуле (Д3.17). Вблизи границы стохастичности (Д3.15) или (Д3.16) происходит последовательность бифуркаций по параметру K .

Области стохастичности чередуются с островками устойчивости (притягивающими циклами). При этом область существования странного аттрактора уменьшается. На рис. Д3.5 приведен пример «умирающего» странного аттрактора. Стохастическая траектория системы представляет собой траекторию с малым случайным разбросом, состоящую из трех областей (это хорошо видно из рис. Д3.5).

Д3.3. Корреляционная функция для того же случая, что и на рис. Д3.1.

3.4. Функция распределения на странном аттракторе — пример фракталии. Рассмотрим последовательность точек (x_n, y_n) на плоскости (x, y) , порождаемую отображением (Д3.8). Они образуют при $n \rightarrow \infty$ некоторое

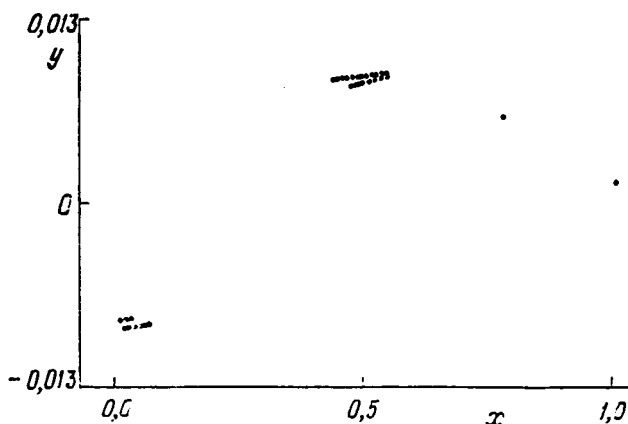
распределение на странном аттракторе, которое стремится к стационарной мере $\rho(x, y)$, наведенной отображением (Д3.9). Вид этой функции распределения в фазовом пространстве изображен на рис. Д3.6. Странный аттрактор соответствует тем же параметрам, что и на рис. Д3.1. Функция $\rho(x, y)$ имеет на рис. Д3.6 два острых максимума на границах странного аттрактора (точки А и В на рис. Д3.1). В остальной области функция распределения флуктуирует вблизи некоторого постоянного значения и представляет собой типичный пример фракталии. С хорошей степенью точности можно считать, что сглаженная по малой области функция

$$\bar{\rho}(x, y) \approx \text{const.}$$

Ситуация здесь та же, что и для модели синус-преобразования (4.3.1), и, более того, если растянуть аттрактор вдоль оси x как гармошку, то наведенная на нем функция распределения аналогична изображенной на рис. 4.4 для синус-преобразования. Такое подобие связано с тем, что при больших Γ отображение

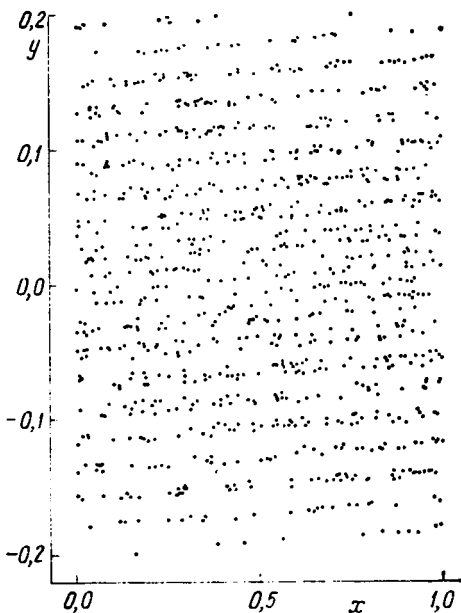
$$\bar{x} = x + \frac{1}{2\pi} \Omega + \frac{1}{2\pi} \frac{K}{\Gamma} \cos 2\pi x, \quad \text{mod } 1, \quad (\text{Д3.18})$$

которое совпадает с (4.3.1)*).



Д3.5. «Умирующий» странный аттрактор ($\epsilon = 0,3$; $\alpha = 0,3$; $\Gamma = 5,85$; $K = 9,03$).

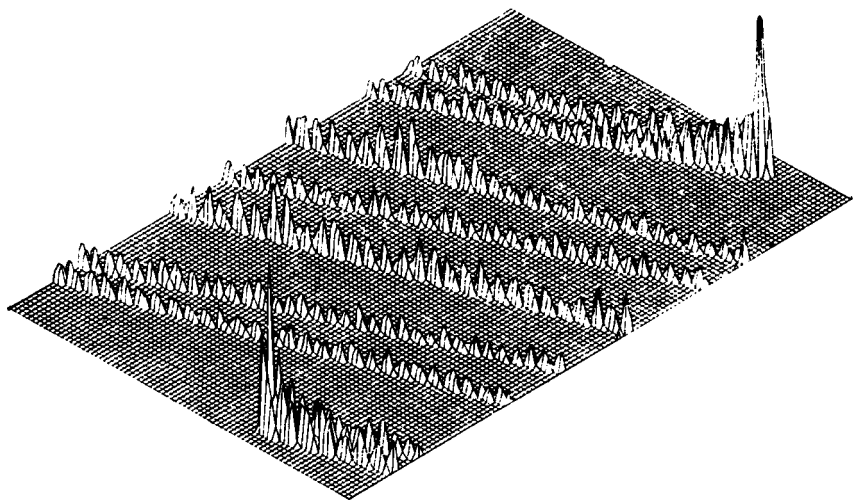
*) Сдвиг на константу $\Omega/2\pi$ и на x и замена \sin на \cos несущественны при $K/\Gamma \gg 1$.



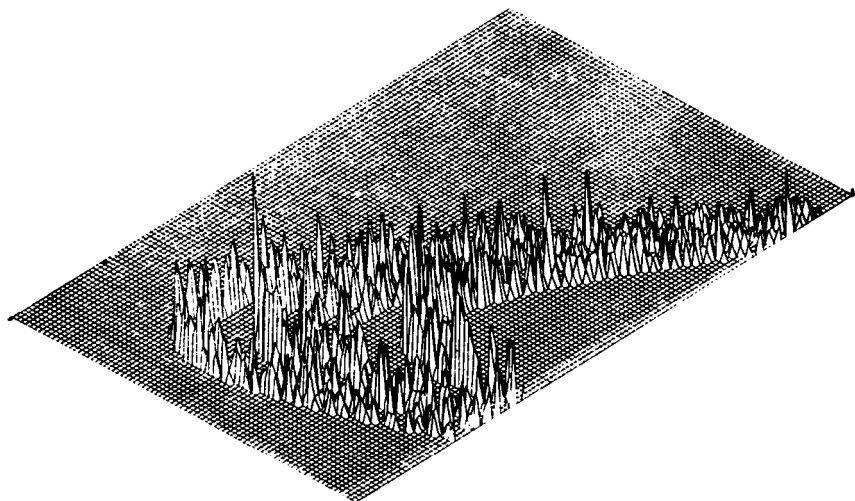
Д3.4. Странный аттрактор при слабой диссипации ($\epsilon = 0,3$; $\alpha = 0,3$; $\Gamma = 0,85$; $K = 9,03$).

(Д3.8) переходит в следующее:

Если теперь увеличивать масштаб, то возникает расслоение линий странного аттрактора и соответственно расслоение «хребтов» рельефа на рис. Д3.6, порождаемое канторовой структурой аттрактора. Пример такого расслоения в окрестности границы аттрактора B дан на рис. Д3.7.



Д3.6. Стационарная функция распределения на странном аттракторе.



Д3.7. Расслоение функции распределения в окрестности границы странного аттрактора.

Так же, как и в гамильтоновом случае, имеется перемешивание в фазовом пространстве. Его можно установить, вычисляя корреляционную функцию фаз ϕ . Однако при больших Γ отображение для фаз отщепляется от y и описывается уравнением (Д3.18). В этом случае соответствующий коррелятор уже вычислен. Действительно, уравнение (Д3.18) совпадает с

уравнением (4.14) *). Поэтому при $K/\Gamma \gg 1$ коррелятор (4.15) экспоненциально затухает со временем расщепления корреляций

$$\tau_c = \frac{2T}{\ln(K/\Gamma)}. \quad (Д3.19)$$

3.5. Размерность странного аттрактора. Для анализа различных множеств, устроенных каким-либо «нестандартным» способом, можно воспользоваться понятием размерности, введенным Хаусдорфом. Пусть интересующее нас множество погружено в пространство большей размерности S . Будем покрывать множество S -мерными кубами со стороной l . Обозначим через $n(l)$ число таких кубов, покрывающих все множество. Тогда размерность множества равна

$$d = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln n(l)}{\ln(1/l)}. \quad (Д3.20)$$

Величина $d < S$ и, вообще говоря, дробная.

Рассмотрим теперь отображение (Д3.8). Построим для него якобиеву матрицу

$$\mathcal{J}(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \bar{x}_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \bar{y}_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \bar{y}_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \quad (Д3.21)$$

Найдем множители Ляпунова из уравнения

$$|\mathcal{J}(x_n, y_n) - \lambda_n| = 0. \quad (Д3.22)$$

Из (Д3.21) следует, что

$$|\mathcal{J}(x_n, y_n)| = e^{-\Gamma} = \lambda_n^+ \lambda_n^- \quad (Д3.23)$$

и не зависит от n . Из (Д3.22) при больших $K\mu$ следует, что

$$\lambda^+ \sim K\mu, \quad \lambda^- \sim e^{-\Gamma/K\mu}. \quad (Д3.24)$$

Соотношения (Д3.24) применимы всюду, за исключением островков устойчивости, т. е. областей, где $\sin 2\pi x$ меньше, чем $1/K\mu$. Из (Д3.24) видно, что λ^+ определяет коэффициент растяжения в одном направлении, а λ^- — коэффициент сжатия в другом направлении.

При постоянных значениях $\lambda_n^\pm \equiv \Lambda^\pm$ (т. е. не зависящих от n) размерность d равна [207, 208]

$$d = 1 + \frac{\ln \Lambda^+}{\ln(1/\Lambda^-)}. \quad (Д3.25)$$

Формулу (Д3.25) можно понять из следующих простых соображений. Будем покрывать малыми квадратами со стороной l точки траектории системы, порождаемые отображением. Тогда растяжение фазового объема с коэффициентом Λ^+ приводит к тому, что на m -м шаге

$$n(l) = \text{const} (\Lambda^+)^m.$$

Действие сжатия с коэффициентом Λ^- приводит к тому, что точки множества попадают в квадрат со все более малой стороной

$$l = \text{const} (\Lambda^-)^m.$$

В пределе $l \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) формула (Д3.20) приводит к выражению (Д3.25).

*) Следует заменить $\theta = 2\pi x$ и сделать сдвиг в x на константу $1/4$.

Однако в случае отображения (Д3.8) характеристические числа λ_n^\pm зависят от номера n шага отображения. В [207] для этого случая была предложена формула (Д3.25), в которой

$$\Lambda^\pm = \lim_{m \rightarrow \infty} |\lambda_1^\pm \lambda_2^\pm \dots \lambda_m^\pm|^{1/m}. \quad (\text{Д3.26})$$

Этот результат был с большой точностью подтвержден в работе [208] путем численного анализа. Можно понять полученный результат следующим образом. Вследствие быстрого перемешивания выражение (Д3.26) быстро самоусредняется (см. ниже), т. е. стремится к неслучайному и, следовательно, постоянному пределу, не зависящему от шага отображения. Приведем соответствующие вычисления [209]. Имеем из (Д3.26)

$$\Lambda^\pm = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |\lambda_k^\pm| = \exp \langle \ln |\lambda^\pm| \rangle, \quad (\text{Д3.27})$$

где

$$\langle f(\lambda) \rangle = \int f(\lambda(x, y)) \rho(x, y) dx dy$$

и $\rho(x, y)$ — стационарная функция распределения на странном аттракторе. Подстановка (Д3.27) в (Д3.25) дает

$$d = 1 - \frac{\langle \ln \lambda^+ \rangle}{\langle \ln \lambda^- \rangle} = 1 + \frac{\langle \ln \lambda^+ \rangle}{\Gamma + \langle \ln \lambda^+ \rangle} = 1 + \frac{h}{\Gamma + h} = 2 - \frac{\Gamma}{\Gamma + h}, \quad (\text{Д3.28})$$

где введена энтропия $h = \langle \ln \lambda^+ \rangle$. При малых значениях Γ размерность странного аттрактора близка к 2:

$$d \approx 2 - \frac{\Gamma}{h} \approx 2 - \frac{\Gamma}{\ln K} = 2 - \frac{\Gamma}{h_0},$$

где $h_0 = \ln K$ — энтропия Колмогорова для отображения (Д3.10) при $\Gamma = 0$.

3.6. Связь модели с проблемой возникновения турбулентности. Система типа (Д3.6) может возникнуть в результате некоторой сильной идеализации задачи о возникновении турбулентности. Качественные соображения, приводящие к ней, следующие [204].

Пусть $a(r, t)$ есть вектор состояния, удовлетворяющий гидродинамическим уравнениям движения и граничным условиям. Разложим $a(r, t)$ в ряд Фурье:

$$a(r, t) = \sum_k a_k(t) \exp(ikr)$$

и запишем уравнения движения в виде

$$\dot{a}_k = \gamma_k a_k + i\omega_k a_k + \sum_{k_1} V_{kk_1} a_{k_1} a_{k-k_1},$$

где диссипация γ_k , частоты ω_k и матричный элемент V_{kk_1} определяются непосредственно из исходных уравнений движения.

Предположим теперь временно, что возбуждается одна неустойчивая мода с комплексной амплитудой A . На малых временах можно написать

$$A = \bar{\gamma} A + i\omega A, \quad (\text{Д3.29})$$

где $\bar{\gamma} > 0$, а индекс волнового числа для простоты опущен. Ландау [210] описал качественно переход от неперiodического движения к периодическому следующим образом. С ростом времени нарастает амплитуда $|A|$, в

выражении (Д3.29) следует учесть следующие члены разложения по $|A|$. Это приводит к уравнению

$$\dot{A} = (\bar{\gamma} + i\omega)A - \delta|A|^2A, \quad (\text{Д3.30})$$

или

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\bar{\gamma}|A|^2 - 2\text{Re } \delta|A|^4. \quad (\text{Д3.31})$$

Стационарному состоянию соответствует при $\text{Re } \delta > 0$ значение

$$I_0 = |A_0|^2 = \bar{\gamma}/\text{Re } \delta.$$

В окрестности этого значения уравнение (Д3.31) можно переписать в виде

$$\dot{I} = -2\text{Re } \delta I_0(I - I_0), \quad I \equiv |A|^2, \quad (\text{Д3.32})$$

где переменную I будем называть действием. Уравнение (Д3.32) может быть дополнено уравнением для фазы:

$$\dot{\phi} = \omega(I), \quad (\text{Д3.33})$$

где $\omega(I)$ — частота колебаний выделенной моды, в которой также должны быть учтены нелинейные поправки в виде разложения по степеням I . Конкретное выражение может быть получено из (Д3.30), если в нем положить

$$A = |A|e^{i\phi}. \quad (\text{Д3.34})$$

Уравнение (Д3.32) описывает движение в окрестности устойчивого предельного цикла, которому соответствует значение I_0 . В обычной ситуации $\bar{\gamma} \sim (Y - Y_c)^{1/2}$, где Y_c — характерное критическое число задачи.

Уравнение (Д3.31) не содержит осциллирующих членов и появляется в результате некоторой процедуры сглаживания движения выделенной моды A . Учтем теперь некоторым подходящим образом влияние других мод a_k на эволюцию моды A . Согласно исходному уравнению для a_k и (Д3.30) можно записать

$$\dot{A} = (\bar{\gamma} + i\omega)A - \delta|A|^2A + \sum_{k \neq k_0} V_{kk_0} a_k a_{k_0-k}, \quad (\text{Д3.35})$$

где волновое число k_0 соответствует моде A . Домножение (Д3.35) на A^* дает

$$\dot{I} = -2\text{Re } \delta I_0(I - I_0) + 2\text{Re} \left(A^* \sum_{k \neq k_0} V_{kk_0} a_k a_{k_0-k} \right). \quad (\text{Д3.36})$$

Будем теперь считать, что разность $Y - Y_c$ невелика и для мод a_k , входящих под знак суммы в (Д3.36), неустойчивость либо не развивается, либо развивается достаточно медленно. Тогда можно приближенно записать

$$a_k = |a_k| \exp(i\omega_k t), \quad a_{-k} = a_k^*$$

и

$$\begin{aligned} \sum_k V_{kk_0} a_k a_{k_0-k} \approx & \sum_{k > k_0} V_{kk_0} |a_k| |a_{k_0-k}| \exp [i(\omega_k - \omega_{k_0-k})t] + \\ & + \sum_{k < k_0} V_{kk_0} |a_k| |a_{k_0-k}| \exp [i(\omega_k + \omega_{k_0-k})t]. \end{aligned} \quad (\text{Д3.37})$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n t / T). \quad (\text{Д3.38})$$

Отбросим в правой части (Д3.37) быстро осциллирующие члены, входящие в сумму с $k < k_0$, и будем считать зависимость V_{kk_0} и $|a_k|$, $|a_{k_0-k}|$ от k слабой. Предположим также, что возбуждено достаточно большое число мод с $k > k_0$, дисперсия которых $d\omega_k/dk$ слаба. Тогда сравнение (Д3.37) с (Д3.38) дает

$$\sum_{k > k_0} V_{kk_0} a_k a_{k_0-k} \sim \text{const} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (\text{Д3.39})$$

где величина T имеет следующий смысл:

$$\frac{2\pi}{T} \sim \frac{d\omega}{dk} \Delta k$$

(Δk — характерное расстояние между соседними волновыми числами возбужденных мод a_k). Подстановка (Д3.34) и (Д3.39) в (Д3.36) и пренебрежение быстро осциллирующими членами в сумме (при $k < k_0$) приводят к модели (Д3.6).

Д4. Нелинейная динамика лучей

4.1. Уравнения для траектории луча. Звуковые волны в океане и атмосфере и радиоволны в ионосфере могут распространяться на очень большие расстояния. Причина этого явления заключается в том, что в соответствующей среде существует немонотонная зависимость фазовой скорости волны от некоторой координаты (например, от глубины в океане). В результате возникает естественный волноводный канал, в котором распространяется волна. Зачастую реальные параметры среды таковы, что можно воспользоваться приближением геометрической оптики. Поэтому задача о распространении волн в естественных средах может быть сведена к соответствующей задаче о динамике лучей. На этом пути удается получить ряд новых результатов и, в частности, определить условия возникновения стохастической неустойчивости лучей [159].

Для описания траектории луча воспользуемся гамильтоновским формализмом. Пусть ось z совпадает с осью волноводного канала, а координата $\mathbf{r} = (x, y)$ лежит в поперечной к оси z плоскости. Тогда координаты луча (\mathbf{r}, z) удовлетворяют гамильтоновым уравнениям

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

$$H = -[n^2(\mathbf{r}, z) - p^2]^{1/2}, \quad (\text{Д4.1})$$

где точка означает дифференцирование по z , а p — импульс, равный

$$p = n\mathbf{r}/(1 + \mathbf{r}^2)^{1/2}, \quad (\text{Д4.2})$$

$n = n(\mathbf{r}, z)$ — показатель преломления. Представим n в виде

$$n^2(\mathbf{r}, z) = n^2(\mathbf{r}) + \varepsilon v(\mathbf{r}, z), \quad (\text{Д4.3})$$

где $n(\mathbf{r})$ соответствует регулярному (однородному по z) случаю, а возмущение εv учитывает влияние неоднородности. Величина $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный параметр возмущения. Благодаря его малости можно записать H в виде

$$H = H_0(\mathbf{r}, p) + \varepsilon V(\mathbf{r}, p, z),$$

$$H_0(\mathbf{r}, p) = -[n^2(\mathbf{r}) - p^2]^{1/2},$$

$$V(\mathbf{r}, p, z) = v(\mathbf{r}, z)/2H_0. \quad (\text{Д4.4})$$

Невозмущенное движение луча определяется гамильтонианом H_0 . Таким образом, задача о траектории луча в неоднородном случае сводится к эквивалентной задаче о действии нестационарного возмущения на частицу, совершающую финитное движение, описываемое гамильтонианом H_0 . Роль времени при этом играет переменная z , неоднородность вдоль которой и создает возмущение.

Наиболее простым является плоский случай, когда n не зависит от y . Уравнения (Д4.1), (Д4.4) переходят в следующие:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p \equiv p_x, \\ H = H_0 + \varepsilon V(x, p, z), \quad H_0 = -[n^2(x) - p^2]^{1/2}. \quad (\text{Д4.5})$$

Опишем сначала невозмущенное движение луча. Пусть значение n_∞ определяет соответствующие асимптотики $n(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и $n(x)$ имеет простой вид горба с одним максимумом. Тогда H_0 определяет движение в простой потенциальной яме и финитным периодическим траекториям соответствуют лучи, распространяющиеся в естественном волноводном канале. Можно говорить о динамике эквивалентной релятивистской частицы, описываемой уравнениями (Д4.5).

Пусть E — энергия эквивалентной частицы, соответствующая значению интеграла движения $H_0(x, p) = E$. Тогда из (Д4.5) следует, что на сепаратресе $E = -n_\infty \equiv E_s$. В области финитного движения

$$-n(0) < E < -n_\infty, \quad (\text{Д4.6})$$

а в области инфинитного движения $-n_\infty < E < 0$. Введем в области (Д4.6), где движение является периодическим, переменные действие — угол (I, θ) по формулам (1.2.1), полагая в них

$$p = [n^2(x) - E^2]^{1/2}. \quad (\text{Д4.7})$$

Используя переменные (I, θ) , перепишем уравнения движения (Д4.5) в виде

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, z), \\ \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}. \quad (\text{Д4.8})$$

Будем интересоваться случаем периодического по z потенциала возмущения V . Тогда

$$V(I, \theta, z) = \frac{1}{2} \sum_{m,s=-\infty}^{\infty} V_{ms}(I) \exp(im\theta + is\kappa z) + \text{к. с.}, \quad (\text{Д4.9})$$

где κ — «частота» возмущения ($2\pi/\kappa$ — пространственный период возмущения).

Из уравнений (Д4.8) и (Д4.9) видно, что наиболее сильное влияние возмущения происходит в резонансном случае, т. е. при выполнении условия

$$m\omega(I) + s\kappa = 0. \quad (\text{Д4.10})$$

Мы пришли к случаю нелинейного резонанса, подробно рассмотренного в § 1.3. Приведем сразу результат для движения луча в окрестности одного резонанса. Пусть I_0 есть то значение I , при котором выполняется условие (Д4.10) при определенных числах (m, s) . Тогда из (Д4.8), (Д4.9) и результатов § 1.3 следует для ширины резонанса:

$$\Delta I = \max |I - I_0| = 4 \left| \varepsilon V_{ms} / \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right|^{1/2} \\ \Delta \omega = 4 \left| \varepsilon V_{ms} \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right|^{1/2} = \frac{\Omega}{m}. \quad (\text{Д4.11})$$

Физический смысл приведенных результатов заключается в следующем. Траектория луча в отсутствие возмущения осциллирует вдоль оси x с частотой $\omega(I)$. В окрестности резонансной частоты $\omega(I_0)$ на это движение накладывается дополнительный канал с эффективной модуляцией луча по z . Амплитуда модуляции определяется выражениями (Д4.11). Они же определяют и область локализации луча в поперечной к z плоскости. Таким образом, вдоль траектории невозмущенного луча, соответствующего действию I_0 , образуется дополнительный волноводный канал с эффективным размером Δl . Лучи, захваченные этим каналом, совершают в нем колебания относительно невозмущенной траектории с частотой Ω . Это приводит, в свою очередь, к периодической модуляции групповой скорости волнового поля.

4.2. Траектории луча при солитоноподобном профиле $n(x)$. Рассмотрим в качестве примера типичный случай, когда

$$n^2(x) = n_\infty^2 + \frac{\mu^2}{\text{ch}^2(x/a)}, \quad (\text{Д4.12})$$

где μ характеризует глубину соответствующей потенциальной ямы, a — ее эффективную ширину. Подстановка (Д4.12) в (Д4.5) и (1.2.1) дает

$$\begin{aligned} H_0(I) &= -[n_\infty^2 + \mu^2(1 - I/I_s)^2]^{1/2}, \quad I_s = a\mu, \\ \omega(I) &= (I_s - I)/[a^2 |H_0(I)|], \\ \omega(0) &= \omega_0 = \mu/an(0). \end{aligned} \quad (\text{Д4.13})$$

Решения x и p удается легко представить как функции фазы $\theta = \omega(I)x + \theta_0$:

$$\begin{aligned} p &= \beta(1 - \beta^2)^{1/2} \sin \theta / (\cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}, \\ x &= a \cdot \text{arcsch} \left[\frac{1}{\beta} (1 - \beta^2)^{1/2} \cos \theta \right], \end{aligned} \quad (\text{Д4.14})$$

где обозначено

$$\beta = [H_0^2(I) - n_\infty^2]^{1/2} / \mu. \quad (\text{Д4.15})$$

Заметим, что на сепаратрисе, определяющей границу волноводного канала, $I = I_s$, $H_0(I_s) = -n_\infty$. Поэтому параметр β определяет расстояние по «энергии» E до сепаратрисы.

Если имеется возмущение в виде периодических отклонений оси волновода от прямолинейной вдоль z , то в этом случае

$$n(x, z) = n(x - f(z)), \quad (\text{Д4.16})$$

где в качестве функции отклонений $f(z)$ можно принять

$$f(z) = f_0 \cos kz,$$

а $2\pi/k$ — пространственный период отклонений. Считая $\epsilon = f_0/a \ll 1$, разложим (Д4.16) в ряд по ϵ и ограничимся первыми двумя членами:

$$n^2(x - f(z)) \approx n^2(x) + f(z) \frac{dn^2(x)}{dx}.$$

Отсюда, используя (Д4.3), возмущение в формуле (Д4.8) можно представить в виде

$$\epsilon V = \frac{\epsilon}{2H_0} f(z) \frac{dn^2(x)}{dx} = -\dot{p}f(z). \quad (\text{Д4.17})$$

Приведенная выше информация достаточна для того, чтобы рассмотреть вопрос об образовании стохастического слоя в окрестности сепаратрисы. Причиной его появления является возмущение $f(z)$. Путь здесь тот же, что и в § 5.1, 5.2. Резонансы между возмущением и основным движе-

нием луча возникают, согласно (Д4.17), при условии

$$(2m + 1)\omega(I) = \kappa,$$

так как импульс p в (Д4.14) разлагается в ряд Фурье по нечетным гармоникам. При больших m расстояние между резонансами равно

$$\delta\omega = 2\omega^2/\kappa. \quad (Д4.18)$$

Для ширины резонанса по действию и по частоте при $\beta \rightarrow 0$ можно получить [159]

$$\frac{\Delta I}{I_s} = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0} \frac{n_\infty}{n(0)} \right)^{1/2},$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0} \frac{n(0)}{n_\infty} \right)^{1/2}. \quad (Д4.19)$$

Подстановка формул (Д4.18) и (Д4.19) в условие перекрытия резонансов $K = (\Delta\omega/\delta\omega)^2 \geq 1$ дает

$$K = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \varepsilon \left(\frac{\kappa}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^3 \frac{n_0}{n_\infty} \geq 1. \quad (Д4.20)$$

Выражение (Д4.20) определяет границу $\bar{\omega}$ стохастического слоя при $K \sim 1$:

$$\bar{\omega}/\omega_0 = \left[4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \varepsilon \left(\frac{\kappa}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{n_0}{n_\infty} \right) \right]^{1/3}. \quad (Д4.21)$$

Если начальное состояние луча таково, что его действие I лежит в области (Д4.21), то это значит, что его движение в пространстве вдоль z носит диффузионный характер. Диффузия луча приводит к тому, что он достигает области вблизи невозмущенной сепаратрисы и «высвечивается» из волноводной области. Таким образом, действие неоднородности как возмущения приводит к уменьшению эффективной ширины волноводного канала. В область стохастического слоя попадают моды колебаний поля с большими номерами. Поэтому излучение поля из стохастического слоя означает также процесс фильтрации высоких мод в волноводном канале

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика.— М.: Наука, 1971.
2. *Гуров К. П.* Основания кинетической теории.— М.: Наука, 1966.
3. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977.
4. *Фудзита С.* Введение в неравновесную квантовую статистическую механику.— М.: Мир, 1969.
5. *Либов Р.* Введение в кинетическую теорию.— М.: Мир, 1974.
6. *Климонтович Ю. Л.* Кипетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.— М.: Наука, 1975.
7. *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика.— М.: Мир, 1964.
8. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел.— М.: ИЛ, 1963.
9. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике.— М., Мир, 1965.
10. *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики.— М., Наука, 1967.
11. *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике.— М., Мир, 1965.
12. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 1, 2.— М., Мир, 1978.
13. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М., Наука, 1979.
14. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М., Наука, 1970.
15. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.*— УФН, 1973, т. 101, с. 3.
16. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М., Наука, 1974.
17. *Арнольд В. И.* Дифференциальные уравнения.— М., Наука, 1971.
18. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
19. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М., Физматгиз, 1958.
20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика.— М.: Наука, 1973.
21. *Ахиезер А. И., Любарский Г. Я.*— ДАН СССР, 1951, т. 80, с. 193.
22. *Берман Г. П., Заславский Г. М.*— Изв. вузов, Радиофизика, 1972, т. 15, с. 1456.
23. *Бломбергс Н.* Нелинейная оптика.— М., Мир, 1966.
24. *Чириков Б. В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности.— Новосибирск, Препринт ИЯФ № 267, 1969.
25. *Chirikov B. V.*— Phys. Rep., 1979, v. 52, p. 263.
26. *Einstein A.*— Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1917, v. 19, p. 82. (Перевод: Эйнштейн А. Собр. научных трудов, т. 3, с. 407, М., Наука, 1966).
27. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избр. труды, т. 1, 2.— М., Наука, 1971, 1972.
28. *Колмогоров А. Н.*— ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.
29. *Арнольд В. И.*— Изв. АН СССР, сер. мат. 1961, т. 25, с. 21.
30. *Арнольд В. И.*— УМН, 1963, т. 18, с. 13.

31. Арнольд В. И.— УМН, 1963, т. 18, с. 81.
32. Moser J. K.— Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math. Phys., 1962, v. K1, 11a, p. 1. В сб. переводов: Математика 1963, т. 6 : 5, с. 51.
33. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973.
34. Whittman K. J.— Rep. Progr. Phys., 1977, v. 40, p. 1033.
35. Арнольд В. И.— ДАН СССР, 1964, т. 156, с. 9.
36. Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории.— М.: ИЛ, 1959.
37. Arnold V. I., Avez A. Ergodic problems of Classical Mechanics.— N. Y.: Benjamin, 1968.
38. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
39. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация.— М.: Мир, 1969.
40. Hopf E.— Math. Ann., 1940, v. 117, p. 590.
41. Хопф Э.— УМН, 1949, т. 4, с. 129.
42. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М.— JL: Изд-во АН СССР, 1950.
43. Колмогоров А. Н.— ДАН СССР, 1958, т. 119, с. 861.
44. Волковьский К. Л., Синай Я. Г.— Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, с. 19.
45. Эрнфест П. Сборник статей.— М.: Наука, 1972, с. 98.
46. Колмогоров А. Н.— ДАН СССР, 1959, т. 124, с. 754.
47. Синай Я. Г.— ДАН СССР, 1959, т. 124, с. 768; 1959, т. 125, с. 1200.
48. Синай Я. Г.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1966, т. 30, с. 15.
49. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, т. 90.
50. Аносов Д. В., Синай Я. Г.— УМН, 1967, т. 22, с. 107.
51. Розлин В. А.— УМН, 1967, т. 22, с. 3.
52. Гуревич В. М., Синай Я. Г. Алгебраические автоморфизмы тора и цепи Маркова/Дополнение к книге: Биллингслей П. Эргодическая теория и информация.— М.: Мир, 1969, с. 205.
53. Аносов Д. В. Вступительная статья в сб. «Гладкие динамические системы».— М.: Мир, 1977.
54. Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы.— М.: Мир, 1978.
55. Лифшиц Е. М., Лифшиц И. М., Халатников И. М.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 322.
56. Holladay J. C.— Proc. Amer. Math. Soc., 1957, v. 8, p. 887.
57. Розлин В. А.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1961, т. 25, с. 499.
58. Renyi A.— Acta Math. Acad. Sci. Hungary. 1957, v. 8, p. 477.
59. Заславский Г. М., Чуриков Б. В.— ДАН СССР, 1964, т. 159, с. 306.
60. Аносов Д. В.— ДАН СССР, 1963, т. 151, с. 1250.
61. Синай Я. Г.— ДАН СССР, 1963, т. 153, с. 1261.
62. Синай Я. Г.— УМН, 1970, т. 25, с. 141.
63. Fermi E.— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1169.
64. Ulam S.— Proc. 4-th Berkeley Symp. on Math and Prob.— Berkeley— Los Angeles, 1961, v. 3, p. 315. (Перевод: Математика, 1963, т. 7, с. 137).
65. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию.— Изд-во Ереван. Госуд. ун-та, 1973.
66. Brahic A.— Astron. Astrophys., 1971, v. 12, p. 98.
67. Liberman M. A., Lichtenberg A. J.— Phys. Rev., 1972, v. 5, p. 1852.
68. Jaeger F., Lichtenberg A. J., Liberman M. A.— Plasma Physics, 1972, v. 14, p. 1073.
69. Liberman M. A., Lichtenberg A. J.— Plasma Phys., 1973, v. 15, p. 125.
70. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З.— ЖТФ, 1962, т. 32, с. 1291.
71. Волосов В. И., Комин А. В.— ЖТФ, 1968, т. 38, с. 864.
72. Vocharov V. N. and oth.— Proc. Conf. on Plasma Phys. and Control Nucl. Fusion Res.— Vienna, 1969, v. 1, p. 561.
73. Заславский Г. М., Филоменко Н. Н.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 643.
74. Чуриков Б. В.— Атомная энергия, 1959, т. 6, с. 630.
75. Заславский Г. М.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1967, т. 2, с. 16.

76. Израилев Ф. М., Чуриков Б. В.—Новосибирск: Препринт ИЯФ, 1968.
77. Chirikov B. V., Izraelev F. M.—Colloques internat. du C. N. R. S.—Toulouse, 1973, v. 229, p. 409.
78. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах.—М.: Советское радио, 1977.
79. Walker G. H., Ford J.—Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 416.
80. Заславский Г. М., Сыназ В. Н.—Изв. вузов, Радиофизика. 1970, т. 13, с. 604.
81. Бунимович Л. А.—Матем. заметки, 1970, т. 8, с. 205.
82. Мельников В. К.—ДАН СССР, 1963, т. 148, с. 1257.
83. Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.—Nuclear Fusion, 1967, v. 7, p. 253.
84. Заславский Г. М., Филопенко Н. Н.—ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1590.
85. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории.—М.: Наука, 1975.
86. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Геометрия магнитного поля. В сб. «Вопросы теории плазмы». М.: Атомиздат, 1963, т. 2.
87. Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavsky G. M.—Nuclear Fusion, 1966, v. 6, p. 297.
88. Henon M., Heiles C.—Astron. J. 1964, v. 69, p. 73.
89. Contopoulos G.—Bull. Astron. C. N. R. S., 1967, v. 2, p. 223.
90. Casati G., Ford J.—Phys. Rev. A., 1975, v. 12, p. 12, p. 1702.
91. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.—Ядерный синтез, 1961, т. 1, с. 82.
92. Бугенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1976.
93. Smale S.—Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 747. (Перевод: УМН, 1970, т. 25, с. 113).
94. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1972.
95. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику.—М.: Мир, 1975.
96. Алексеев В. М.—Матем. сборник, 1968, т. 76, с. 72; 1968, т. 77, с. 545; 1969, т. 78, с. 3.
97. Алексеев В. М. Квазислучайные колебания и качественные методы небесной механики. 9-летняя математическая школа.—Киев: Наукова думка, 1972, с. 212.
98. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.
99. Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Об уравнениях Фоккера — Планка, получаемых в теории возмущений с помощью метода, основанного на спектральных свойствах гамильтониана возмущений. Записки кафедры матем. физ. Ин-та строит. мех. АН УССР, 1939, т. 4, с. 5 (см. также: Боголюбов Н. Н. Избр. труды.—Киев: Наукова думка, 1970, т. 2, с. 5).
100. Боголюбов Н. Н. Элементарный пример установления статистического равновесия в системе, связанной с термостатом. В кн.: О некоторых статистических методах в математической физике.—Киев, АН УССР, 1945, с. 115 (см. также: Боголюбов Н. Н. Избр. труды.—Киев: Наукова думка, 1970, т. 2, с. 77).
101. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.—М.—Л.: Гостехиздат, 1946 (см. также: Боголюбов Н. Н. Избр. труды.—Киев: Наукова думка, 1970, т. 2, с. 99).
102. Боголюбов Н. Н. Избр. труды.—Киев: Наукова думка, 1970, т. 2.
103. Zwanzig R.—J. Chem. Phys., 1970, v. 61, p. 1.
104. Зубарев Д. Н., Калашников В. П.—ТМФ, 1970, т. 3, с. 126.
105. Зубарев Д. Н., Хазанов А. М.—ТМФ, 1978, т. 34, с. 69.
106. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.—ЖЭТФ, 1967, т. 52, с. 1081.
107. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков.—М.: Атомиздат, 1979.
108. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Nonlinear Plasma Theory.—N. Y.—L. Benjamin, 1969.

109. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы. В сб.: Вопросы теории плазмы.— М., Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 188.
110. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of Nonlinear Problems. Los-Alamos Scientific Report, LA-1940, 1955. (Перевод: Ферми Э. Научные труды.— М.: Наука, 1972, т. 2, с. 647).
111. *Ford J.*— Journ. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 387.
112. *Ford J., Waters J.*— Journ. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1293.
113. *Jackson E. A.*— Journ. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 581, 686.
114. *Израилов Ф. М., Чуриков Б. В.*— ДАН СССР, 1966, т. 166, с. 57.
115. *Израилов Ф. М., Хусамутдинов А. И., Чуриков Б. В.*— Новосибирск, Препринт ИЯФ № 252, 1968.
116. *Hirooka H., Saito N.*— J. Phys. Soc. Japan. 1969, v. 26, p. 624.
117. Ферми Э. Научные труды.— М.: Наука, 1972, т. 2, с. 645.
118. Солитоны в действии.— М., Мир, 1981.
119. *Дербенев Я. С., Хейфец С. А.*— ТМФ, 1977, т. 31, с. 220.
120. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
121. *Уизем Дж.* Линеиные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
122. *Зазаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов.— М.: Наука, 1980.
123. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
124. *Заславский Г. М.*— УФН, 1973, т. 111, с. 395.
125. *Сагдеев Р. З.* Коллективные процессы и ударные волны в плазме. В сб.: Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1964, т. 4, с. 20.
126. *Заславский Г. М., Филоненко Н. Н.*— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1064.
127. *Заславский Г. М., Филоненко Н. Н.*— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 1240.
128. *Берман Г. П., Заславский Г. М.*— ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 1453.
129. *Пузов Н. М., Чернавский Д. С.*— ТМФ, 1971, т. 7, с. 219.
130. *Фейнберг Е. Л.*— УФН, 1971, т. 104, с. 539.
131. *Gutzwiller M. C.*— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 139.
132. *Percival I. C.*— Adv. Chem. Phys., 1977, v. 36, p. 1.
133. *Berman G. P., Zaslavsky G. M.*— Physica A, 1978, v. 91, p. 450.
134. *Берман Г. П., Заславский Г. М.*— ДАН СССР, 1978, т. 240, с. 1082.
135. *Berman G. P., Zaslavsky G. M.*— Physica A, 1979, v. 97, p. 367.
136. *Заславский Г. М.*— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 2089.
137. *Заславский Г. М.*— УФН, 1979, т. 129, с. 211.
138. *Zaslavskii G. M.*— Phys. Rep., 1981, v. 80, p. 157.
139. *Casati G., Chirikov B. V., Izraelev F. M., Ford J.* Lecture Notes in Physics.— Springer, 1979, v. 93, p. 334.
140. *Chirikov B. V., Izraelev F. M., Shepelyansky D. L.* Soviet Scientific Reviews C, 1981, v. 2, p. 181.
141. *Glauber R. J.*— Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 84.
142. *Agarwal G. S., Wolf E.*— Phys. Rev., 1970, v. 2D, p. 2161, p. 2187, p. 2206.
143. *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.— М.: Наука, 1979.
144. *Малкин И. А., Манько В. И.*— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1746.
145. *Паули В.* Общие приципы волновой механики.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
146. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике.— М.: Наука, 1972.
147. *Berman G. P., Iomin A. M., Zaslavskii G. M.*— Physica, 1981, v. 4D, p. 113.
148. *Berman G. P., Zaslavskii G. M.*— Physica, 1982, v. 111A, p. 17.
149. *Берман Г. П., Иомин А. М.*— Препринт ИФСО, Красноярск, 1981.
150. *Berman G. P., Zaslavskii G. M.*— Phys. Lett., 1977, v. 61A, p. 295.
151. *Берман Г. П., Заславский Г. М., Коловский А. Р.*— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 506.
152. *Berman G. P., Kolovskii A. R., Zaslavskii G. M.*— Phys. Lett., 1982, v. 87A, p. 152.
153. *Uehling E. A., Uhlenbeck G. E.*— Phys. Rev., 1933, v. 43, p. 552.
154. *Uehling E. A.*— Phys. Rev. 1934, v. 46, p. 917.

155. *Pauli W.* In: Probleme der Modernen Physik, Festschrift zum 60. Geburtstage A. Sommerfelds, Hrsg. P. Debye.— Leipzig, 1928, S. 30.
156. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
157. *Nadarnard J.*— J. Math. Pure Appl. 1898, v. 4, p. 27.
158. *Бойэн Р.* Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979.
159. *Абдуллаев С. С., Заславский Г. М.*— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 524.
160. *Бунимович Л. А.*— Матем. сборник, 1974, т. 94, с. 49.
161. *Bunimovich L. A.*— Commun. math. Phys., 1979, v. 65, p. 295.
162. *Бунимович Л. А.*— Функц. анализ и его прилож. 1974, т. 8, с. 73.
163. *Benettin G., Strelcyn J. M.*— Phys. Rev. 1978, v. 17, p. 773.
164. *Ландау Л. Д., Смородинский Я. А.* Лекции по теории атомного ядра.— М.: Гостехиздат, 1955, с. 93.
165. *Keller J. B.*— Ann. Phys., 1958, v. 8, p. 180.
166. *Ballan R., Bloch C.*— Ann. Phys., 1972, v. 69, pp. 76, 85.
167. *Berry M. V., Mount K. E.*— Rep. Progr. Phys. 1972, v. 35, p. 315.
168. *Gutzwiller M. C.*— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1791.
169. *Berry M. V., Tabor M.*— Proc. Roy. Soc. A, 1976, v. 349, p. 101.
170. *Berry M. V., Tabor M.*— J. Phys. A, 1977, v. 10, p. 371.
171. *Wigner E. P.*— Math. Ann. 1951, v. 53, p. 36; 1955, v. 62, p. 548, 1957, v. 65, p. 203, 1958, v. 67, p. 325.
172. Statistical Theory of Spectra: Fluctuations/Ed. Porter C. E.— N. Y.: Academic Press, 1965.
173. *Porter C. E.*— Ibid., p. 3.
174. *Dyson F. J.*— J. Math. Phys. 1962, v. 3, pp. 140, 157, 166.
175. *Porter C. E., Rosenzweig N.*— Phys. Rev. 1960, v. 120, p. 1698.
176. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1950.
177. *Синай Я. Г.*— Изв. АН СССР, сер. мат., 1966, т. 30, с. 1275.
178. *Марзулис Г. А.*— Функц. анализ и его прилож. 1969, т. 3, с. 80; 1970, т. 4, с. 62.
179. *Bowen R.*— Amer. J. Math., 1972, v. 94, pp. 1, 413.
180. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей.— М.: Наука, 1973.
181. *Rice S. O.*— Bell Syst. Tech. J., 1945, v. 24, p. 46.
182. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы.— М.: Мир, 1969.
183. *Mac Donald S. W., Kaufman A. N.*— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1189.
184. *Casati G., Valz-Gris F., Guarneri I.*— Lett. Nuovo Cimento 1980, v. 28, p. 279.
185. *Gurevich I. I., Pevsner M. I.*— Nucl. Phys. 1956/1957, v. 2, p. 575.
186. *Rosenzweig N., Porter C. E.*— Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 1698.
187. *Пастур Л. А.*— УМН, 1973, т. 28, с. 3.
188. *Brody T. A., Flores J. et al.*— Rev. Mod. Phys. 1981, v. 53, p. 385.
189. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. 1.— М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
190. *Костюченко А. Г., Саргсян Н. С.* Распределение собственных значений.— М.: Наука, 1979.
191. *Арнольд В. И.*— Функц. анализ и его прилож. 1972, т. 6, с. 12.
192. *Белобров П. И., Заславский Г. М., Тартаковский Г. Х.*— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1799.
193. *Stenholm S.*— Phys. Reports, 1973, v. 60, p. 1.
194. *Slater N. B.* Theory of Unimolecular Reactions.— Ithaca: Cornell University, 1959.
195. *Robinson P. J., Holbrook K. A.* Unimolecular Reactions. N. Y.: Wiley, 1972.
196. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 1, 2.— М.: Наука, 1965.
197. *Монин А. С.*— УФН, 1978, т. 125, с. 97.
198. *Рабинович М. И.*— УФН, 1978, т. 125, с. 123.
199. *Нехорошев Н. Н.*— УМН, 1977, т. 32, с. 6.
200. *Lorenz E.*— J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, p. 130.

201. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.*— ДАН СССР, 1977, т. 234, с. 336.
202. *Ruelle D., Takens F.*— Comm. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 167.
203. *Zaslavsky G. M.*— Phys. Lett., 1978, v. 69A, p. 145.
204. *Заславский Г. М., Рачко Х.-Р. Я.*— ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 2052.
205. *Шильников Л. П.*— Матем. сборник, 1968, т. 77, с. 461.
206. *Li T. Y., Yorke J. A.*— Am. Math. Monthly, 1975, v. 82, p. 985.
207. *Karlan J. L., Yorke J. A.*— Lecture Notes in Math.— N. Y.: Springer-Verlag, 1979, v. 730, p. 228.
208. *Russel D. A., Hanson J. D., Ott E.*— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 1175.
209. *Заславский Г. М.*— Материалы 9 межд. конф. по велич. колебаниям.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.
210. *Ландау Л. Д.*— ДАН СССР, 1944, т. 44, с. 339.
211. *Bowen R.*— Amer. J. Math., 1972, v. 94, p. 413.
212. *Синай Я. Г.*— ДАН СССР, 1962, т. 147, с. 797.
213. *Синай Я. Г.*— Матем. сборник, 1963, т. 63, с. 23.
214. *Тихомиров В. М.*— УМН, 1963, т. 18, с. 55.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Апосова U -система 56, 60, 61
Арнольда диффузия 96, 248—249
Аттрактор странный 250—258
- Биллиарды перемешивающие 244—
247
— рассеивающие 59
Боголюбова метод 105, 121, 198
Больцмана H -теорема 31, 103
- Взаимодействие резонансов 82
Возврата среднее время 10, 11
Временное соотношение 49, 116
Время распыливания пакета 170
— расщепления корреляций 30, 48
- Гомоклиническая структура 101
— точка 99, 100
Гравитационная машина 67
- Изоморфизм K -систем 34, 35
Интегралы однозначные 23
- Квазиклассичности условия 171, 177
Квазилинейное уравнение 99, 116,
120, 122
Квазимоды 235
Квантовая граница 186
Квантовое кинетическое уравнение
198, 206—207
Квантовые K -системы 160
— отображения 161—164, 179
Квантовый нелинейный резонанс
187—191
Квантовых поправок расходимость
175
— резонансов взаимодействие 191—
197
Кинетическое уравнение 103
Когерентные состояния 164
Колмогорова — Арнольда — Мозера
теорема 25, 26, 40
- Критерий перекрытия резонансов
82, 86
— стохастичности 42, 53, 79
Крылова анализ столкновений 56
Крылова Н. С. работы 41, 178
 K -системы 30, 33
 K -энтропия 33, 34
- Лиувилля теорема 22, 23
— уравнение 12
Локальная неустойчивость 29, 30
- Маятник нелинейный 13
Менли — Роу соотношения 22
- Нелинейные волны 142
Нелинейный резонанс 17—20, 40
— — внутренний 21, 22
— — квантовый 187—191
Нелинейных волн диффузия 154
— — резонанс 148—152
— — стохастичность 153
Непрерывные дроби 42
Неприводимые контуры 24
- Опрокидывание волн 144
Ослабления корреляций принцип 107
Островки устойчивости 78, 95
Отображение на торе 54
— универсальное 74—77, 85
Отталкивания уровней принцип 214
- Парадокс возвращаемости 36—40
— обратимости 36—40
Переменные действие — угол 13
Перемешивание 28
Периодические орбиты 220, 221
Плазменные колебания 15, 16
Правила квантования K -систем 224
— — Эйнштейна 210, 213
«Преобразование пекаря» 31
«— пилы» 55

Приближение хаотических фаз 112
Пуанкаре теорема о возврате 10, 40
— — об отсутствии аналитических
интегралов 40

Равнораспределение периодических
орбит 221

Размерность дробная K -систем 257

Разрушение магнитных поверхно-
стей 92—94

Распределение Вигнера — Портера —
Дайсона 214

Растяжение при отображениях 48—
50

Расщепление корреляций 28, 41, 80

Сепаратрисы разрушение 97—92

Символическая динамика 101, 102

Синус-преобразование 84

Скользящие электроны 69

Сложности системы понятие 217

Сокращение описания 104

Солитон 143

Спектр динамической системы 29

— — нелинейных волн 144, 145

— — колебаний 15

— — энергетический нерегулярный 217

Стохастическое ускорение 62

Стохастичности критерий 42, 53, 79

Торы разрушенные 95, 96

Турбулентность 250, 258

Улама модель ускорения 88

Универсальности масштабы 219

Ускорение Ферми 62, 73

Ферми — Паста — Улама проблема
123—126

Энтропия Больцмана 32, 33

— Колмогорова 33, 34, 133

Эргодичность 27

Георгий Моисеевич Заславский

СТОХАСТИЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Серия «Современные проблемы физики»)

Редактор *Г. М. Карасева*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *Г. В. Подвольская, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 12320

Сдано в набор 22.12.83. Подписано к печати 19.07.84.
Т-14881. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1.
Гарнитура обыкновенная. Высокая печать. Усл. печ.
л. 17. Усл. кр.-отт. 17. Уч.-изд. л. 17,75. Тираж 6300 экз.
Заказ № 11. Цена 2 р. 20 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25