

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Монография посвящена применению метода ВКБ (коротковолнового приближения) для решения различных физических задач, связанных со взаимодействием волн в неоднородных средах. С единой точки зрения рассматриваются вопросы теории колебаний, гидродинамики, квантовой механики, теории плазмы и нелинейной оптики. Подробно излагаются одномерный случай для уравнений второго и четвертого порядка и различные аспекты его применения к исследованию эволюции и распространения волн в случайно-неоднородных средах.

Книга предназначена для научных работников, интересующихся вопросами теории волновых процессов в различных средах, а также для аспирантов и студентов.

Содержание

Предисловие	3
Глава I. Основные уравнения и предположения	5
§ 1. Введение	—
§ 2. Адиабатическая теория возмущений в квантовой механике	8
§ 3. Уравнение Орра — Зоммерфельда	10
§ 4. Магаитогидродинамические колебания в плазме	12
§ 5. Электромагнитные волны в нелинейных кристаллах. Уравнения для амплитуд	15
Глава II. Одномерный метод ВКБ	21
§ 6. Введение	—
§ 7. Одна точка поворота. Метод Цвана	23
§ 8. Две точки поворота. Прохождение через барьер	26
§ 9. Две точки поворота. Надбарьерное отражение. Точность адиабатического инварианта	31
§ 10. Две точки поворота. Правила квантования. Обсуждение точности метода	34
§ 11. Прохождение через параболический слой	37
§ 12. Уравнение с периодической функцией. Движение в периодическом поле	39
§ 13. Уравнение Матье. «Медленные» нарушения трансляционной симметрии	42
§ 14. Уравнение четвертичного порядка. Два связанных осциллятора	47
§ 15. Связанные осцилляторы. Прохождение через резонанс	50
§ 16. Инварианты дифференциальных уравнений. Другой подход к определению коэффициентов шивки решений	57
Глава III. Неадиабатические переходы в квантовой механике	59
§ 17. Введение	—
§ 18. Полукласическое приближение	61
§ 19. Связь полукласического решения с точным	63
§ 20. Взаимодействие волн как возмущение	65

§ 21. Формула Ландау — Зинера [10]	66
§ 22. Сильное взаимодействие [3]	68
§ 23. Термы разного наклона	70
Глава IV. Уравнения типа Орра — Зоммерфельда	72
§ 24. Введение	—
§ 25. Правила квантования	75
§ 26. Задача о прохождении	80
§ 27. Модель с отражением	85
Глава V. Эволюционная задача	89
§ 28. Введение	—
§ 29. Теорема Рэлея	90
§ 30. Эволюционная задача для уравнения Орра — Зоммерфельда	92
§ 31. Конечное усиление начальных возмущений	99
Глава VI. Распадная неустойчивость	102
§ 32. Введение	—
§ 33. Абсолютная неустойчивость	105
§ 34. Задача о прохождении. Конечное усиление возмущений	108
§ 35. Генерация второй гармоники и суммарных частот	111
Глава VII. Стационарные решения нелинейных уравнений для амплитуд	114
§ 36. Введение	—
§ 37. Взаимодействие волн в однородных средах	117
§ 38. Генерация второй гармоники	120
§ 39. Об эффективности преобразования частот в поле неоднородной волны накачки	129
§ 40. Взаимодействие трех волн	133
§ 41. Стабилизация взрывной неустойчивости	139
Глава VIII. Взаимодействие волн в случайно-неоднородных средах	145
§ 42. Введение	—
§ 43. О кинетическом уравнении для осциллятора в случайном внешнем поле	146
§ 44. Трансформация волн в среде со случайными неоднородностями	151
§ 45. Распространение нелинейной волны в случайной среде	157
§ 46. Нелинейное взаимодействие трех волн	164
Литература	167

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — дать взаимосвязанное изложение фрагментов теории волновых взаимодействий в неоднородных средах, которые являются предметом исследования разных разделов физики. С задачами подобного рода мы сталкиваемся в гидродинамике, физике плазмы, нелинейной оптике и даже в биологии. Конечно, в каждой из перечисленных областей существуют свои проблемы и развиваются свои, специфические для данной области методы. Тем не менее в ряде случаев математические модели оказываются довольно схожими, так что можно говорить о некоторых закономерностях, общих для широкого круга обсуждаемых задач. Таким образом, несмотря на разнородность содержания рассматриваемой теории с точки зрения ее приложений, цель книги может быть достигнута благодаря тому, что материал довольно легко классифицируется по типам математических задач и методов, используемых для их решения.

В ходе изложения теории волновых взаимодействий мы постоянно будем сталкиваться с необходимостью решения уравнений с переменными коэффициентами. Одним из наиболее мощных приближенных методов решения является метод ВКБ. Несмотря на то, что при его использовании обычно ограничиваются только главным членом асимптотического ряда, он позволяет получить ответы на многие вопросы, важные с физической точки зрения (см. гл. II).

Многие характерные особенности взаимодействия волн в неоднородных средах можно проследить на модели трех связанных волновых уравнений. При этом возникает система нелинейных уравнений в частных

производных. В настоящее время нет точного решения такой системы. Поэтому при ее анализе используются различные упрощающие предположения.

Решению исходной системы в тех случаях, когда есть какие-либо основания для ее линеаризации, посвящены гл. I—IV. Заметим, что метод ВКБ в некоторых случаях не позволяет получить однозначных решений линейных уравнений с переменными коэффициентами. Тогда целесообразно комбинировать решения, полученные методом ВКБ, с решениями, найденными на основе метода контурных интегралов. С такой ситуацией мы столкнемся, например, в задаче о прохождении параболического слоя в гл. II и при обсуждении метода, предложенного Вазовым, в гл. IV.

В гл. V решения, полученные в предшествующих главах, используются для анализа эволюционной задачи, описывающей поведение начальных возмущений на неоднородном фоне. Конечно, упрощение исходной системы на основе ее линеаризации возможно далеко не всегда. В тех случаях, когда взаимодействие волн достаточно слабое, возможно иное упрощение исходной системы. Слабость взаимодействия обуславливает плавный характер амплитуд волн. В результате мы приходим к упрощенным нелинейным, так называемым укороченным уравнениям. Анализ решений таких уравнений посвящена гл. VII.

В последней главе книги обсуждаются специфические особенности взаимодействия волн в случайно-неоднородных средах. Случайный характер неоднородности приводит к проблемам, связанным с необходимостью анализа стохастических дифференциальных уравнений.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Введение

Рассмотрим некоторые конкретные физические задачи, которые сводятся с формальной точки зрения к системе связанных волновых процессов. Для того чтобы представить себе структуру уравнений, описывающих такие процессы, остановимся на одной конкретной системе, отражающей, на наш взгляд, многие характерные особенности взаимодействия волн в средах с переменными свойствами:

$$\begin{aligned}(\partial^2/\partial t^2 - v_1^2 \partial^2/\partial x^2) b_1 &= \beta_1 b_2 b_3, \\(\partial^2/\partial t^2 - v_2^2 \partial^2/\partial x^2) b_2 &= \beta_2 b_1 b_3, \\(\partial^2/\partial t^2 - v_3^2 \partial^2/\partial x^2) b_3 &= \beta_3 b_1 b_2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где b_i — искомые функции, а коэффициенты v_i , β_i в дальнейшем будут предполагаться зависящими либо от переменной x , либо от t . Система (1.1) не может быть решена аналитически в общем виде. Для ее решения используются различные упрощающие предположения. Можно, например, считать, что одна из функций b_i является заданной. Тогда система трех нелинейных уравнений (1.1) сводится к системе двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned}(\partial^2/\partial t^2 - v_1^2 \partial^2/\partial x^2) b_1 &= \alpha_1 b_2, \\(\partial^2/\partial t^2 - v_2^2 \partial^2/\partial x^2) b_2 &= \alpha_2 b_1.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь $\alpha_i = \beta_i b_3$, b_3 считается заданной функцией.

Как отмечено выше, коэффициенты v_i^2 , α_i предполагаются зависящими только от одной переменной. Будем пока считать, что они зависят от переменной t .

Тогда решение системы (1.2) можно искать в виде $a_i(t) \exp(ikx)$. В результате приходим к системе уравнений для связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_1^2(t) a_1 &= \alpha_1 a_2, \\ \ddot{a}_2 + \omega_2^2(t) a_2 &= \alpha_2 a_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В дальнейшем мы увидим, что поведение связанных осцилляторов в основном определяется резонансными точками, в которых совпадают частоты колебаний $\omega_1(t) = \omega_2(t)$, и точками поворота, в которых по крайней мере одна из частот обращается в нуль $\omega_i(t) = 0$.

В гл. II система связанных осцилляторов (1.3) анализируется на основе квазиклассического приближения, т. е. предполагается, что зависимость $\omega_i(t)$ достаточно плавная. При рассмотрении резонансных явлений в связанных осцилляторах в этой главе не учитывается возможное влияние точек поворота. Предполагается, что эти точки находятся достаточно далеко и их влиянием можно пренебречь.

В гл. III рассматривается система с линейными коэффициентами

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + (1 + t/\tau_1) \omega_1^2 a_1 &= \alpha_1 a_2, \\ \ddot{a}_2 + (1 + t/\tau_2) \omega_2^2 a_2 &= \alpha_2 a_1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{const}$. Эта система после преобразования Фурье сводится к системе двух уравнений первого порядка. Причем при определенных граничных условиях можно доказать, что система, полученная в результате преобразования Фурье, эквивалентна исходной (1.4). Переход от системы двух уравнений второго порядка к системе двух уравнений первого порядка является весьма сильным упрощением. Дальнейший анализ сводится, по существу, к исследованию решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В рамках принятой модели удастся рассмотреть влияние точек поворота на резонансное взаимодействие.

В гл. IV мы перейдем к анализу системы

$$\ddot{a}_1 + \frac{t}{\tau} \omega_1^2 a_1 = \alpha_1 a_2, \quad \ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = \alpha_2 a_1, \quad (1.5)$$

где $\alpha_1 = -\alpha_2 = \text{const}$, $\omega_i = \text{const}$. Система (1.5) сводится к одному уравнению четвертого порядка. Его анализ в резонансной зоне проводится на основе метода, предложенного Вазовым [1]. Заметим, что метод ВКБ не позволяет однозначно продолжить решение в окрестности резонансной точки.

В гл. VI, VII рассматривается другое упрощение системы (1.1). Оно связано с предположением о том, что решение исходной системы можно искать в виде волн, слабо отклоняющихся от монохроматических

$$b_i(x, t) = c_i(x, t) \exp i \left(\int k_i dx - \omega_i t \right), \quad \text{где частота } \omega_i$$

связана с волновым вектором дисперсионным соотношением из линейной теории, а $c_i(x, t)$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды волн.

Пренебрежение старшими производными от медленно меняющихся амплитуд позволяет существенно упростить исходную систему. Вывод этих укороченных уравнений для амплитуд мы подробно обсудим в § 5 настоящей главы. Решения этих уравнений анализируются в гл. VII.

В гл. VI рассмотрим решение исходной системы в случае, когда используются оба упрощения. Иными словами, будем считать заданной одну из амплитуд и, следовательно, вновь придем к линейной задаче. Гл. VIII посвящена анализу взаимодействий в случайно-неоднородных средах.

Все перечисленные модельные уравнения решаются при соответствующих граничных условиях. Можно указать два типа краевых задач: задачи о прохождении и задачи на собственные значения. В первом случае предполагается, что решение известно в бесконечно удаленной точке и рассматривается его изменение после прохождения резонансной зоны (зоны сильного взаимодействия осцилляторов). Второй тип задач сводится к поиску финитных решений, т. е. решений, локализованных в конечной области безграничного пространства.

Во втором случае решение существует не всегда. Если краевая задача не имеет решений ни при каких значениях параметров, то приходится рассматривать более общую постановку задачи с начальными условиями (см. гл. V).

Рассмотрим, например, уравнение в частных производных:

$$\widehat{L}(x, t)a_i = 0, \quad (1.6)$$

где $\widehat{L}(x, t)$ — линейный дифференциальный оператор. Его коэффициенты в соответствии с ранее сделанным предположением зависят только от одной переменной. Для определенности будем считать, что они зависят от x . Применяя преобразование Лапласа по переменной t , перейдем к линейному уравнению с правой частью

$$\widehat{L}_p(x)a_i = f_i(x), \quad (1.7)$$

где $\widehat{L}_p(x)$ — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами, зависящими от переменной x и параметра p , появляющегося в результате преобразования Лапласа. Правая часть в уравнении (1.7) определяется значением искомой функции при $t = 0$. Далее решение уравнения (1.7) ищется методом функции Грина. Окончательно решение $a_i(x, t)$ получается после обратного преобразования Лапласа.

Перейдем теперь к обсуждению конкретных физических задач, в которых мы столкнемся со взаимодействием волн в средах с переменными свойствами.

§ 2. Адиабатическая теория возмущений в квантовой механике

Рассмотрим квантовую систему, на которую действует возмущение, обусловленное медленным адиабатическим изменением некоторых параметров, от которых зависит состояние системы. В этом случае можно развить специальный приближенный метод расчета, называемый адиабатической теорией возмущений [2—4]. Сущность адиабатической теории возмущений состоит в том, что в первом приближении медленно меняющиеся параметры считаются неизменными.

Для определенности будем говорить о столкновении (элементарном процессе) двух атомов. При этом фигурирует два сорта частиц: легкие электроны, движущиеся с большими скоростями, и тяжелые, относительно медленные ядра. Характерное время, необходимое

для перестройки быстрой электронной подсистемы, существенно меньше характерного времени перестройки ядерной подсистемы.

Запишем уравнение Шредингера для полной квантовой системы

$$i\hbar\partial\Psi(r, R)/\partial t = \widehat{H}(r, R)\Psi(r, R), \quad (2.1)$$

где r — набор координат электронов, а R — набор ядерных координат.

В первом приближении рассмотрим электронную подсистему, зафиксировав положение ядер,

$$\widehat{H}_e(r, R)\varphi_m(r, R) = U_m(R)\varphi_m(r, R). \quad (2.2)$$

Решение этой задачи с учетом граничных условий дает собственные значения $U_m(R)$, параметрически зависящие от координат ядер. Функции $U_m(R)$ называют адиабатическими электронными термами. Собственные функции $\varphi_m(r, R)$ образуют адиабатический базисный набор, отвечающий гамильтониану $\widehat{H}_e(r, R)$.

Решение полной системы будем искать в виде разложения

$$\Psi(r, R) = \sum_m \chi_m(R) \varphi_m(r, R) \exp(-iEt/\hbar). \quad (2.3)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2.1), с учетом того, что $\varphi_m(r, R)$ образуют ортонормированную полную систему функций, получим условие для определения $\chi_m(R)$

$$\begin{aligned} - \sum_i \frac{\hbar^2}{2M_i} \Delta_{R_i} \chi_m(R) + [E - C_{mm}(R) - U_m(R)] \times \\ \times \chi_m(R) = \sum_{m \neq m'} c_{mm'} \chi_{m'}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{где } c_{mm'} = \sum_i \left\{ - \frac{\hbar^2}{2M_i} \langle \varphi_m | \Delta_{R_i} | \varphi_{m'} \rangle - \frac{\hbar^2}{M_i} \times \right. \\ \left. \times \langle \varphi_m | \nabla_{R_i} | \varphi_{m'} \rangle \nabla_{R_i} \right\}. \end{aligned}$$

Итак, получили систему связанных уравнений Шредингера.

Если пренебречь правой частью в уравнениях (2.4), то приходим к системе несвязанных уравнений Шредингера, описывающих движение ядер в потенциальном поле $U_m(R)$. Полная волновая функция в нулевом приближении ($c_{mm'} = 0$) может быть представлена как

$$\Psi(r, R) = \chi_m(R) \varphi_m(r, R) \exp(-iEt/\hbar).$$

Она имеет такой вид, как если бы подсистемы были независимыми. Такое приближение соответствует тому, что электронная подсистема как бы подстраивается под перемещение ядер, т. е. квантовое состояние U_m электронной подсистемы изменяется в соответствии с движением ядер.

§ 3. Уравнение Орра — Зоммерфельда

Исследование резонансных эффектов в колебаниях сплошных сред удобно начать с классической задачи о колебаниях плоскопараллельных неоднородных течений несжимаемой жидкости [5].

Введем прямоугольную систему координат, где ось Oy направлена вдоль течения, а ось Ox — по направлению, в котором изменяется его скорость $v_0(x)$. Предположим, что профиль скорости не имеет точек перегиба, т. е. d^2v_0/dx^2 нигде не обращается в нуль. В дальнейшем будем считать, что вязкость жидкости мала, так что число Рейнольдса велико.

Движение несжимаемой жидкости описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{3.1}$$

и уравнением Навье — Стокса

$$d\mathbf{v}/dt = -\nabla p/\rho + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{3.2}$$

Здесь все обозначения общепринятые. Применяя к уравнению (3.2) операцию rot и учитывая (3.1), нетрудно привести его к виду:

$$(d/dt - \nu\Delta_{x,y})(\operatorname{rot}_z \mathbf{v}) = 0. \tag{3.3}$$

В отсутствие вязкости это уравнение выражает закон сохранения ротора скорости в идеальной несжимаемой жидкости.

Для двумерных течений уравнение (3.1) позволяет ввести функцию тока $\varphi(v_x) = \partial\varphi/\partial y$, $v_y = -\partial\varphi/\partial x$. В результате уравнение (3.3) принимает окончательный вид

$$(d/dt - \nu\Delta_{x,y})\Delta_{x,y}\varphi = 0. \quad (3.4)$$

Заметим, что в отсутствие вязкости профиль скорости может быть произвольным, иными словами, уравнению (3.4) при $\nu = 0$ удовлетворяет произвольная функция

$$\varphi_0(x) = \int^x dx v_{0y}(x). \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь малые возмущения $v_1 \ll v_0$, $\varphi_1 \ll \varphi_0$. В силу стационарности и однородности течения по Oy возмущение можно выбрать в виде $\varphi_1(x, t) \exp i(ky - \omega t)$. В результате уравнение (3.4) приводится к известному уравнению Орра — Зоммерфельда

$$-iv\Delta^2\varphi_1 + [\omega - kv_0(x)]\Delta\varphi_1 + kv_0''\varphi_1 = 0, \\ \Delta = d^2/dx^2 - k^2. \quad (3.6)$$

В отсутствие вязкости уравнение представляется так:

$$\Delta\varphi_1 - v_0''\varphi_1/[v_0(x) - \omega/k] = 0. \quad (3.7)$$

Если речь идет о течении в слое, то нормальная компонента скорости обращается в нуль на ограничивающих поверхностях ($x = x_{1,2}$). Это дает граничные условия для «невязкого» уравнения (3.7) $v_1(x_{1,2}) = ik\varphi_1(x_{1,2}) = 0$. При наличии вязкости следует учесть отсутствие тангенциальной составляющей скорости на ограничивающей поверхности, так что для уравнения Орра — Зоммерфельда (3.6) имеем еще два граничных условия $d\varphi_1/dx|_{x=x_{1,2}} = 0$. В дальнейшем (см. § 26) мы увидим, что на характер поведения решения уравнения (3.6) существенное влияние оказывает наличие так называемой резонансной точки x_s , определяемой условием $v_0(x_s) = \omega/k$. Эта точка является особой для невязкого уравнения (3.7). Ее название (резонансная) в данном случае оправдывается тем, что в этой точке совпадают скорость течения и фазовая скорость колебаний.

§ 4. Магнитогидродинамические колебания в плазме

Плазма рассматривается в магнитогидродинамическом приближении. В качестве исходных берутся уравнения магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} d\mathbf{H}/dt &= \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \\ d\mathbf{v}'/dt &= -\nabla p'/\rho_0 + \mu[\text{rot} \mathbf{H}' \times \mathbf{H}_0]/\rho_0 + \\ \partial\rho/\partial t + \text{div} (\rho \cdot \mathbf{v}) &= 0, \\ \text{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь все обозначения общеприняты. В дальнейшем индексом будем снабжать невозмущенные величины, а возмущенные величины — штрихом.

Примем $v_0 = 0$, тогда уравнения для возмущений представляются в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{H}'/dt &= \text{rot} [\mathbf{v}' \times \mathbf{H}_0], \\ d\mathbf{v}'/dt &= -\nabla p'/\rho_0 + \mu[\text{rot} \mathbf{H}' \times \mathbf{H}_0]/\rho_0 + \\ &+ \mu[\text{rot} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}']/\rho_0, \\ \partial\rho'/\partial t + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{v}') + \mathbf{v}' \cdot \nabla\rho_0 &= 0, \\ \text{div} \mathbf{H}' &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В изотермическом случае

$$p_0 = c^2\rho_0, \quad p' = c^2\rho', \quad c^2 = \text{const}. \tag{4.3}$$

При этом параметры невозмущенной плазмы должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\nabla p_0 = \mu[\text{rot} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0]. \tag{4.4}$$

Введем декартову систему координат. Будем считать, что направление магнитного поля совпадает с осью z . Примем также, что невозмущенные величины не меняются в этом направлении. Тогда возмущенные величины можно считать $\sim \exp(ik_z z)$, где k_z — волновое число вдоль магнитного поля. Кроме того, будем считать возмущения плазмы несжимаемыми

$$\text{div} \mathbf{v}' = 0. \tag{4.5}$$

Тогда система (4.2) после несложных преобразований сводится к одному уравнению

$$\nabla_{\perp} (\partial^2/\partial t^2 + \omega_A^2) \nabla_{\perp} \zeta = 0. \quad (4.6)$$

Здесь ζ характеризует амплитуду возмущения (в частности, под ζ можно понимать смещение плазмы в направлении неоднородности $\zeta = v_{\perp}$), $\omega_A = k_z c_A$, $c_A = (\mu H_0^2/\rho_0)^{1/2}$ — скорость Альфвена, ∇_{\perp} — градиент поперек магнитного поля.

Магнитогидродинамическое приближение, использованное при выводе уравнения (4.6), не учитывает тонких кинетических эффектов, таких, как конечность ларморовского радиуса и столкновения. С их учетом в уравнении (4.6) появляются дополнительные слагаемые [6]. Приведем их без вывода (за подробностями можно обратиться к работе [6])

$$(\hat{L}_0 + \hat{L}_1)\zeta = 0, \quad (4.7)$$

где $\hat{L}_0 = \nabla_{\perp} (\partial^2/\partial t^2 + \omega_A^2) \nabla_{\perp}$ — оператор уравнения (4.6), а \hat{L}_1 — добавка, обусловленная кинетическими эффектами:

$$\hat{L}_1 \left[\omega_A^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{T_e}{T_i} \right) \rho_i^2 + 2i\omega_A^2 \cdot \delta \cdot \rho_i^2 \right] \nabla_{\perp}^4. \quad (4.8)$$

Здесь T_e , T_i — электронная и ионная температуры, ρ_i — ларморовский радиус ионов. Первое слагаемое обусловлено учетом конечности ларморовского радиуса, а второе — вкладом запертых электронов. Безразмерный параметр $\delta = (4/7)(v_e/\omega_A)\epsilon^{1/2}$ связан с частотой электрон-ионных столкновений ν_e , а величина ϵ представляет собой отношение радиуса орбиты запертого электрона к характерному размеру системы.

Предположим, что в плазме имеются быстрые (пучковые) частицы плотностью n_b , причем их доля невелика на фоне плотности основной плазмы n_0 , т. е. $n_b/n_0 \ll 1$. Тогда их присутствие можно учесть [6], заменив частоту ω_A в (4.7) на

$$\omega_s = \omega_A(1 - i\eta/2), \quad (4.9)$$

где величина $\eta \sim n_b/n_0$ является малой добавкой к единице.

Таким образом, уравнение, описывающее альфвеновские колебания в неоднородной и неравновесной плазме, сводится к уравнению четвертого порядка с комплексными коэффициентами (4.7), (4.8), (4.9).

Приведем другой пример плазменных колебаний, обусловленных сжимаемостью среды. Вернемся к системе (4.2). Рассмотрим на ее основе взаимодействие магнитозвуковых колебаний [7]. Магнитное поле будем считать постоянным ($H_{0z} = \text{const}$), а градиент плотности — направленным вдоль него $\rho_0 = \rho_0(z)$. Кроме того, будем рассматривать двумерные возмущения (H', v', ρ', p'), зависящие только от y, z, t . Первые два уравнения системы (4.2), спроектированные на ось x , дают уравнения для волн Альфвена

$$\begin{aligned} \partial v_x' / \partial t &= \mu H_0 \cdot \partial H_x' / \partial z / \rho_0, \\ \partial H_x' / \partial t &= H_0 \cdot \partial v_x' / \partial z. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Однако мы не будем на них останавливаться, а перейдем к обсуждению магнитозвуковых волн, обусловленных сжимаемостью плазмы.

Учитывая, что неоднородность имеется только в z -м направлении, решения системы (4.2) будем искать в виде $v' = v_1(z) \cdot \exp i(k_y y - \omega t)$, $\rho' = \rho_1(z) \exp i(k_y y - \omega t)$ и т. д. Комбинируя уравнения системы (4.2), нетрудно получить два уравнения второго порядка относительно ρ_1 и v_{1y}

$$\begin{aligned} d^2 \rho_1 / dz^2 + \omega^2 \rho_1 / c^2 &= k_y \omega \rho_0 v_{1y} / c^2, \\ d^2 v_{1y} / dz^2 + (\omega^2 \rho_0 / \mu H_0^2 - k_y^2) v_{1y} &= \omega c^2 k_y \rho_1 / \mu H_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что связь между колебаниями плотности и скорости существует, если параметр k_y отличен от нуля. Система может быть заменена следующим дифференциальным уравнением четвертого порядка:

$$\begin{aligned} v_{1y}^{IV} + \left[\frac{\omega^2 \rho_0}{\mu H_0^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_y^2 \right] v_{1y}'' + 2 \frac{\omega^2}{\mu H_0^2} \rho_0' v_{1y}' + \\ + \left[\frac{\omega^2}{\mu H_0^2} \rho_0'' + \rho_0 \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) - \frac{\omega^2 k_y}{c^2} \right] v_{1y} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полагая $\rho_0(z)$ медленно меняющейся функцией z и пренебрегая ρ_0' и ρ_0'' , можно записать уравнение (4.12) в виде

$$v_{1y}^{IV} + \left[\frac{\omega^2 \rho_0}{\mu H_0^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_y^2 \right] v_{1y}'' + \left[\frac{\rho_0 \omega^2}{\mu H_0^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) - \frac{\omega^2 k_y}{c^2} \right] v_{1y} = 0. \quad (4.13)$$

Считая в интересующем нас интервале ход плотности линейным ($\rho_0 = \alpha z$), где $\alpha \ll 1$, и вводя безразмерную переменную $\xi = \alpha z - b$, уравнение (4.13) можно записать в виде (вывод взят из работы [14])

$$v_{1y}^{IV} - \beta^2 (\xi + 2b) v_{1y}'' + \beta^4 [b(b + \xi) - L^2] v_{1y} = 0, \quad (4.14)$$

где $a = \omega^2 / \mu H_0^2$, $b = \omega^2 / c^2 - k_y^2$, $\beta = 1 / \alpha \gg 1$, $L^2 = \omega_1 k_y^2 / c^2$. Уравнение (4.14), как и уравнение Ора — Зоммерфельда, имеет резонансную точку (коэффициент при второй производной обращается в нуль при $\xi_s = -2b$). Кроме того, коэффициент при последнем слагаемом в (4.14) также может обращаться в нуль. В дальнейшем мы увидим, что эта особенность имеет смысл точки поворота аналогично точке поворота в уравнении Шредингера.

§ 5. Электромагнитные волны в нелинейных кристаллах. Уравнения для амплитуд

Если амплитуды распространяющихся в среде волн становятся значительными, существенную роль играют эффекты, связанные с нелинейностью. В нелинейных системах принцип суперпозиции не выполняется и наложение двух (или большего числа) волн приводит к искажению каждой из них, т. е. происходит нелинейное взаимодействие волн. Особенно эффективными нелинейными взаимодействиями в системе из S волн становятся при выполнении резонансных условий:

$$\sum_{j=1}^S n_j \omega_j = 0, \quad \sum_{j=1}^S n_j k_j = 0, \quad (5.1)$$

где n_j — целые числа. Резонансные условия (5.1) часто называют условиями фазового синхронизма, а взаимодействия волн, характеризующиеся этими условиями, принято называть резонансными.

Мы ограничимся рассмотрением нелинейного взаимодействия трех одномерных волновых пакетов, которое характерно для сред с квадратичной нелинейностью. Это взаимодействие играет основную роль в процессах параметрического усиления и преобразования частоты, вынужденного комбинационного и мандельштам-бриллюэновского рассеяния, в разнообразных процессах обмена энергией между волнами в плазме и т. п. (см. [8—12]).

В слабонеоднородных слабонелинейных средах комплексные амплитуды волн — медленно изменяющиеся в пространстве и во времени функции. Взаимодействие таких узких в ω - и k -пространстве волновых пакетов можно описывать в рамках приближенных укороченных уравнений [8—11].

Если в уравнениях отсутствует явная зависимость от времени, то средние волновые числа пакетов изменяются в пространстве в соответствии с локальным дисперсионным соотношением

$$\omega_j^2 = \omega_j^2(\mathbf{k}_j(x), x) = \text{const.} \quad (5.2)$$

Таким образом, в неоднородных средах условия фазового синхронизма для волновых векторов волн, вообще говоря, не могут быть выполнены во всех точках пространства. Резонансные нелинейные взаимодействия волн чрезвычайно чувствительны к расстройкам фазового синхронизма, поэтому неоднородность существенно влияет на характер этих процессов.

Укороченные уравнения, описывающие взаимодействие трех волн в однородных средах, неоднократно выводились для самых различных ситуаций в физике плазмы и нелинейной оптике (см., например, [11]). В работе [13] эти уравнения записаны в гамильтоновом виде. Влияние неоднородности сред на форму уравнений и характер взаимодействий обсуждалось в обзоре Ерохина и Моисеева [14] и монографии Ахманова и Чиркина [15].

Мы рассмотрим вопрос о модификации укороченных уравнений под влиянием неоднородности на примере

трех связанных электромагнитных волн в неоднородном нелинейном кристалле без пространственной дисперсии [9, 15, 16]. Интересующие нас уравнения можно получить при учете нелинейности из волнового уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + (4\pi/c^2) \partial^2 \mathbf{P}^{(1)}/\partial t^2 + (1/c^2) \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2 = \\ = -(4\pi/c^2) \partial^2 \mathbf{P}^{(2)}/\partial t^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$ — векторы линейной и нелинейной диэлектрической поляризации. Вектор $\mathbf{P}^{(1)}$ определяется тензором линейной восприимчивости $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathcal{H}(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') dt'. \quad (5.4)$$

В средах с квадратичной нелинейностью вектор $\mathbf{P}^{(2)}$ определяется тензором нелинейной квадратичной восприимчивости $\chi(\mathbf{r}, t, t')$ [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \chi(\mathbf{r}, t', t'') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t' - t'') \times \\ \times dt' dt''. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Зависимость тензоров $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ и $\chi(\mathbf{r}, t, t')$ от пространственных координат связана с неоднородностью среды.

Будем далее полагать, что все величины в уравнении (5.3) зависят только от одной пространственной координаты x , а частоты взаимодействующих волн подчиняются условию $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Решение уравнения (5.9) будем искать в «квазиклассическом» виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, t) = \sum_{j=1}^3 \left\{ (1/2) \mathbf{e}_j a_j(x, t) \exp i \left[\int_0^x k_j(x_1) dx_1 - \omega_j t \right] + \right. \\ \left. + \text{к. с.} \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где \mathbf{e}_j — единичные векторы поляризации, $k_j(x) = n_j(\omega_j x) \omega_j / c$, n_j — показатель преломления, $a_j(x, t)$ — медленно изменяющиеся амплитуды волн. Подставляя выражение (5.6) в волновое уравнение и отбрасывая старшие производные, при условии $|a_j dk_j/dx| \ll$

« $|k_j da_j/dx|$ приходим к следующей системе укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial a_1/\partial t + v_1 \partial a_1/\partial x &= i \sigma_1 a_3 a_2^* \exp \left[i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right], \\ \partial a_2/\partial t + v_2 \partial a_2/\partial x &= i \sigma_2 a_3 a_1^* \exp \left[i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right], \\ \partial a_3/\partial t + v_3 \partial a_3/\partial x &= i \sigma_3 a_1 a_2 \exp \left[-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь $\Delta(x) = k_3(x) - k_1(x) - k_2(x)$, $v_j = c/n_j(\omega_j, x)$ — групповые скорости волн, коэффициенты нелинейного взаимодействия $\sigma_j(x)$ имеют вид [16]

$$\sigma_j(x) = 2\pi\omega_j \chi_{\text{эф}}(x)/n_j^2(\omega_j, x) = 4\pi\omega_j d_{\text{эф}}(x)/n_j^2(\omega_j, x), \quad (5.8)$$

причем эффективная нелинейность $\chi_{\text{эф}}$ определена как

$$\chi_{\text{эф}}(x) = \mathbf{e}_3 \chi(-\omega_3, \omega_1, \omega_2, x) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 2d_{\text{эф}}(x). \quad (5.9)$$

Таким образом, неоднородность приводит к зависимости коэффициентов укороченных уравнений от пространственных координат, а также к появлению переменной расстройки фазового синхронизма $\Delta(x)$.

Возможность использования укороченных уравнений связана с пренебрежением рядом эффектов, таких, как дифракционные и эффекты фокусировки, разбегание пучков вследствие анизотропии и др. Детальное обсуждение области применимости и уравнений (5.7) можно найти в монографии Ахманова и Чиркина [15]. Естественно, эти уравнения также неприменимы вблизи точек нарушения квазиклассического описания, где обращается в нуль локальное волновое число (или частота) волны. В дальнейшем будем исследовать резонансные нелинейные взаимодействия волн в областях вдали от точек обращения в нуль групповых скоростей, средних локальных волновых чисел пакетов волн. Групповые скорости при этом будем приближенно считать постоянными, учитывая лишь основной эффект, связанный с расстройками фазового синхронизма волн из-за неоднородности.

Заменой переменных $c_j(\vec{x}, t) = n_j a_j(x, t) / 2(2\pi\omega_j)^{1/2}$ система уравнений (5.7) приводится к гамильтоновому виду

$$\begin{aligned} \partial c_1 / \partial t + v_1 \partial c_1 / \partial x &= iV c_3 c_2^* \exp\left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1\right), \\ \partial c_2 / \partial t + v_2 \partial c_2 / \partial x &= iV c_3 c_1^* \exp\left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1\right), \\ \partial c_3 / \partial t + v_3 \partial c_3 / \partial x &= iV^* c_1 c_2 \exp\left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1\right); \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$V = 4d_{3\phi} (2\pi)^{3/2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/2} / n_1 n_2 n_3. \quad (5.11)$$

Квадрат модуля комплексной амплитуды $|c_j|^2$ имеет смысл плотности числа квантов волны с частотой ω_j . Легко проверить, что уравнения (5.10) могут быть записаны следующим образом:

$$\partial c_j / \partial t + i\delta\mathcal{H} / \delta c_j^* = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.12)$$

где $\delta / \delta c_j^*$ — вариационная производная. Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (i/2) \sum_{j=1}^3 \int (v_j c_j dc_j^* / dx - v_j c_j^* dc_j / dx) dx - \\ &- \int \left[V c_1^* c_2^* c_3 \exp\left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1\right) + V^* c_1 c_2 c_3^* \exp\left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1\right) \right] dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

При выводе уравнений (5.10) путем варьирования гамильтониана по формулам (5.12), (5.13) групповые скорости волн полагались постоянными. К гамильтоновому виду могут быть преобразованы укороченные уравнения, описывающие взаимодействие волн любой природы, специфика конкретной задачи отражается лишь в виде матричного элемента взаимодействия V и групповых скоростей волн.

В неравновесных средах, где знак производной диэлектрической проницаемости $d\epsilon/d\omega$ может быть отри-

цательным, могут существовать волны с отрицательной энергией. На возможность существования таких волн впервые обратили внимание Кадомцев, Михайловский и Тимофеев [17]. В таких средах могут осуществляться резонансные взаимодействия трех волновых пакетов, подчиняющиеся условиям:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \Delta(x) = k_1 + k_2 + k_3. \quad (5.14)$$

Выполнение этих условий возможно потому, что частота волны с отрицательной энергией изменяет знак. В этом случае главную роль в гамильтониане играет член $-\int \left[U c_1 c_2 c_3 \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right) + \text{к. с.} \right] dx$. Варьированием гамильтониана

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (i/2) \sum_{j=1}^3 \int [v_j c_j dc_j^* / dx - v_j c_j^* dc_j / dx] dx - \\ & - \int \left[U c_1 c_2 c_3 \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right) + \text{к. с.} \right] dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

получаем укороченные уравнения, описывающие взаимодействие волн в неравновесных неоднородных средах:

$$\begin{aligned} \partial c_1 / \partial t + v_1 \partial c_1 / \partial x &= i U^* c_2^* c_3^* \exp \left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right), \\ \partial c_2 / \partial t + v_2 \partial c_2 / \partial x &= i U^* c_1^* c_3^* \exp \left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right), \\ \partial c_3 / \partial t + v_3 \partial c_3 / \partial x &= i U^* c_1^* c_2^* \exp \left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Уравнения (5.16) допускают решение, обращающее амплитуды всех волн в бесконечность за конечное время. Это явление получило название взрывной неустойчивости [18]. Впервые такой процесс был изучен на примере взаимодействия волн со случайными фазами [19].

В последующих главах мы обратимся к анализу влияния неоднородности на процессы нелинейного взаимодействия как в равновесных, так и в неравновесных средах.

ОДНОМЕРНЫЙ МЕТОД ВКБ

§ 6. Введение

При изучении уравнения типа уравнения Шредингера

$$d^2\psi/dx^2 - U(x, E)\psi = 0, \quad (6.1)$$

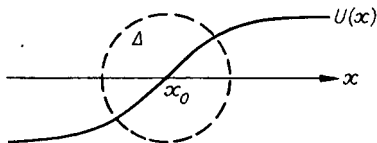
$$U(x, E) = V(x) - E \quad (6.2)$$

различные физические условия задачи могут привести к тому, что коэффициент $U(x)$ будет меняться медленно на расстоянии характерного изменения решения ψ :

$$d \ln \psi/dx \gg d \ln U/dx. \quad (6.3)$$

Аналогичная картина имеет место для ряда задач теории колебаний и теории устойчивости сплошной среды. Ясно, что наличие неравенства (6.3) позволяет явно ввести в уравнение (6.1) некоторый малый параметр и искать решение в виде ряда по этому параметру. Полученные таким образом решения, однако, существен-

Рис. 1. Потенциал в окрестности особой точки.



но отличаются от решений, найденных в виде ряда теории возмущений. Для того чтобы разобраться в этом, проведем некоторые качественные преобразования уравнения (6.1). Пусть $U(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 1. Положим $U(x) = k_0^2 \bar{U}(x)$, $\xi = x/R$, где $\bar{U}(x) \sim 1$, за исключением области Δ вблизи точки x_0 (см. рис. 1), в которой $U(x_0) = 0$, а R — характерная длина изменения $U(x)$: $1/R \sim d \ln U(x)/dx$. Тогда уравнение (6.1) переписется как

$$\varepsilon d^2\psi/d\xi^2 - \bar{U}(\xi)\psi = 0, \quad (6.4)$$

где

$$\varepsilon = 1/(k_0 R)^2 \ll 1. \quad (6.5)$$

Неравенство (6.5) есть следствие (6.3). Из (6.4) видно, что в результате медленного изменения коэффициента $U(x)$ в уравнении (6.1) появляется малый параметр ε при старшей производной. Решение уравнения (6.4) можно искать в виде

$$\psi(\xi) = \exp \left\{ i\varepsilon^{-1/2} \int^{\xi} k(\xi, E) d\xi \right\}, \quad (6.6)$$

$$k = k^{(0)} + \varepsilon^{1/2} k^{(1)} + \varepsilon k^{(2)} + \dots,$$

или, что то же самое,

$$\psi(\xi) = \Pi(\xi) \exp \left\{ j\varepsilon^{-1/2} \int^{\xi} k^{(0)}(\xi, E) d\xi \right\} [1 + \dots], \quad (6.7)$$

где $\Pi(\xi)$ — предэкспоненциальный множитель, учитывающий $k^{(1)}(\xi)$, а в фигурных скобках стоит ряд по $\varepsilon^{1/2}$. Непосредственно можно получить

$$k^{(0)} = \pm(-\bar{U}(\xi, E))^{1/2}, \quad k^{(1)} = d \ln k^{(0)}/dx. \quad (6.8)$$

В дальнейшем величину

$$S = \varepsilon^{-1/2} \int^{\xi} [-\bar{U}(\xi, E)]^{1/2} d\xi \quad (6.9)$$

будем называть фазой. Нетрудно видеть, что ряд в фигурных скобках в (6.7) есть фактически разложение по $1/S$.

Формула (6.7) представляет собой решение уравнения (6.4) в виде асимптотического ряда по параметру медленности $\varepsilon^{1/2}$, главный член которого определяется функциями $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$. Это решение имеет особенности, присущие вообще асимптотическим разложениям, в то время как истинное решение может быть аналитической функцией¹⁾. Простейшей особенностью является точка совпадения характеристических корней уравнения (6.4), т. е. точка, в которой

$$k_1^{(0)} = k_2^{(0)}. \quad (6.10)$$

Согласно (6.8), условие (6.10) выполняется в точке x_0 , где $U(x_0) = 0$ ²⁾. Нетрудно оценить величину области Δ

¹⁾ Последнее мы будем все время в дальнейшем предполагать.

²⁾ В квантовой механике x_0 называется точкой поворота.

(см. рис. 1), в которой решение в форме (6.7) оказывается несправедливым. Предположим для конкретности вблизи x_0

$$\bar{U}(\xi) = \bar{U}_0(\xi - \xi_0), \quad \xi_0 = x_0/R.$$

Учитывая, что неравенству (6.3) эквивалентно

$$S \gg 1, \quad (6.11)$$

получим $\Delta \sim \varepsilon^{1/3}R$.

Изложенная схема построения решений уравнения (6.1) известна как метод стационарной фазы, а в квантовой механике — как ВКБ-приближение (см., например, [1]). Основная трудность переносится на спивку решений вблизи особой точки (например, при $x < x_0$ и $x > x_0$). Ниже будут рассмотрены различные случаи функции $U(x)$, приводящие к определенной структуре особенностей асимптотических решений типа (6.7). Характерные физические примеры будут относиться либо к квантовой механике, либо к теории колебаний и к вопросам, связанным с сохранением адиабатических инвариантов³⁾. Малый параметр ε явно вводится в уравнение не будет. Подразумевается, что выполнено условие медленности типа (6.3) и что всегда можно перейти от записи в форме (6.1) к записи в форме (6.4).

§ 7. Одна точка поворота. Метод Цвана

Запишем два приближенных решения уравнения

$$d^2\psi/dx^2 - U(x, E)\psi = 0 \quad (7.1)$$

в виде

$$\begin{aligned} \psi_+ &= k^{-1/2} \exp \left\{ i \int^x k(x, E) dx \right\}, \\ \psi_- &= k^{-1/2} \exp \left\{ -i \int^x k(x, E) dx \right\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где k удовлетворяет характеристическому уравнению

$$k^2(x, E) + U(x, E) = 0, \quad (7.3)$$

³⁾ Различные вопросы, связанные с деталями метода ВКБ и его приложениями, можно найти также в монографиях [2—4].

а ψ_{\pm} есть главные члены асимптотических рядов (6.7). Преимущества рассуждений, которые будут приведены ниже, основаны на том, что вместо полных рядов (6.7) используются только главные члены разложений. Однако в силу асимптотического характера последних это приводит к определенным трудностям. Будем считать, что функция $U(x, E)$ аналитична в рассматриваемой области комплексной плоскости x и имеет простой нуль в точке x_0 . Разлагая $U(x, E)$ в ряд вблизи x_0 и ограничиваясь первым членом $U(x) \approx U_0 z$, $z = x - x_0$, получаем вместо (7.2)

$$\psi_{\pm} = (U_0 z)^{-1/4} \exp\{\pm iz^{3/2} U_0^{1/2}\}. \quad (7.4)$$

Общее решение уравнения (7.1) можно записать в виде

$$\psi = A\psi_+ + B\psi_-, \quad (7.5)$$

где A, B — произвольные постоянные.

На рис. 2 изображены сплошные линии, на которых фаза решения $S = U_0^{1/2} z^{3/2}$ чисто действительная, и штриховые, на которых фаза чисто мнимая. Разрез выбран по линии 1. Линии 1—4 называются линиями уровня. На этих линиях оба решения ψ_+, ψ_- осциллирующие и одного порядка величины. На штриховых линиях одно из решений (например, ψ_-) экспоненциально растет с ростом $|z|$, а ψ_+ экспоненциально затухает. Если $B \neq 0$, то на штриховой линии в рассмат-

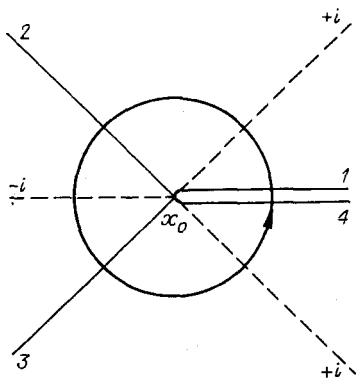


Рис. 2. Линии уровня в окрестности точки поворота.

риваемом примере член с ψ_+ в (7.5) не следует писать, так как это означало бы превышение точности метода. Но тогда на любой другой линии уровня мы, вообще говоря, не знаем, чему равен коэффициент при ψ_+ . Описанная ситуация хорошо известна как явление Стокса (см., например, [5—8]).

Теперь мы можем сформулировать стоящую перед нами задачу: определить коэффициенты A_i ,

B_i на i -й линии уровня, если они заданы на какой-либо одной из линий уровня. Изысканный метод решения был предложен Цваном [5] и эффективно использован в дальнейшем в работах [6, 7].

Пусть на линии 1 (см. рис. 2) задано решение (7.5) с коэффициентами A_1, B_1 . Будем совершать обход точки x_0 в комплексной плоскости x настолько далеко от x_0 , чтобы можно было пользоваться для ψ_+, ψ_- выражениями (7.2). В спектре (1, 2) ψ_- является экспоненциально растущей и поэтому на линии 2

$$B_2 = B_1.$$

Коэффициент при ψ_+ в соответствии с изложенным неизвестен и можно записать

$$A_2 = A_1 + \alpha B_1,$$

где α — неизвестный множитель. В секторе (2, 3) экспоненциально растущим является ψ_+ , и потому

$$A_3 = A_2, \quad B_3 = B_2 + \beta A_2,$$

где β — неизвестно. Аналогично

$$B_4 = B_3, \quad A_4 = A_3 + \gamma B_3.$$

Здесь A_4, B_4 — коэффициенты при ψ_+, ψ_- , взятых на нижнем берегу разреза, а γ — неизвестно.

Теперь следует учесть, что истинное решение уравнения (7.1) является аналитическим, и в результате полного обхода вокруг произвольной точки в комплексной плоскости нужно вернуться к исходному выражению для решения. Значит, решения на линиях 1 и 4 (на верхнем и нижнем берегах разреза) должны тождественно совпадать. Заменяя в (7.4) z на $ze^{2\pi i}$, получим

$$B_4 = iA_1, \quad A_4 = iB_1 \quad (7.6)$$

или, выражая A_4, B_4 через A_1, B_1 ,

$$\beta A_1 + (1 + \alpha\beta)B_1 = iA_1, \quad (7.7)$$

$$(1 + \gamma\beta)A_1 + [\alpha + \gamma(1 + \alpha\beta)]B_1 = iB_1.$$

Уравнения (7.7) должны выполняться при произвольных A_1, B_1 . Отсюда находим четыре уравнения для оп-

ределения неизвестных множителей α , β , γ :

$$\begin{aligned}\beta = i, \quad 1 + \alpha\beta = 0, \quad 1 + \gamma\beta = 0, \\ \alpha + \gamma(1 + \alpha\beta) = i.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Первые три уравнения в (7.8) дают

$$\alpha = \beta = \gamma = i.\tag{7.9}$$

Четвертое уравнение есть следствие первых трех. Полученные выражения (7.9) решают вопрос о склейке решений при наличии одной точки поворота.

Интересным обстоятельством является следующее: для определения α , β , γ не требуется знать вид предэкспоненциального множителя в решениях (7.4). Действительно, пусть в результате полного обхода вместо (7.6) следует

$$B_4 = qA_1, \quad A_4 = qB_1,\tag{7.10}$$

где q — неизвестный множитель, возникающий из предэкспоненты. Тогда вместо системы (7.8) имеем

$$\begin{aligned}\beta = q, \quad 1 + \alpha\beta = 0, \quad 1 + \gamma\beta = 0, \\ \alpha + \gamma(1 + \alpha\beta) = q.\end{aligned}\tag{7.11}$$

Отсюда $\alpha = \beta = \gamma = q = i$. Таким образом, для получения (7.9) достаточно знать только первый член разложения фазы по степеням малого параметра. Этот член $k = \pm[-U(x, E)]^{1/2}$ определяется из характеристического уравнения (7.3), которое ничем не отличается от характеристического уравнения при постоянных коэффициентах в (7.1).

§ 8. Две точки поворота. Прохождение через барьер

Пусть $U(x, E)$ имеет простые нули в двух точках. Физический интерес представляют три случая, отличающиеся различным расположением кривой $U(x)$ относительно оси x (рис. 3). Как это принято в квантовой механике, случаи *a*, *b*, *в* будем называть соответственно «ямой», «прохождением через барьер» и

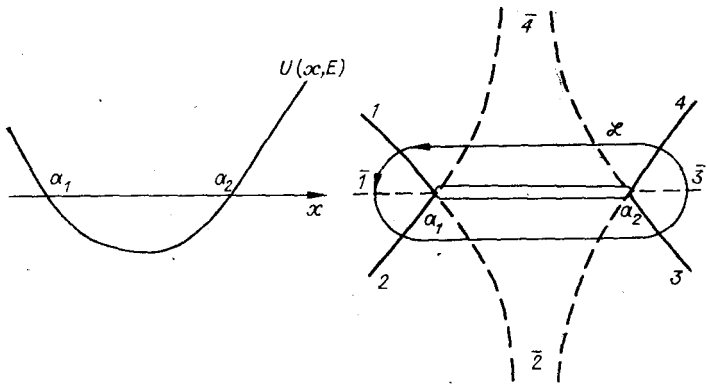
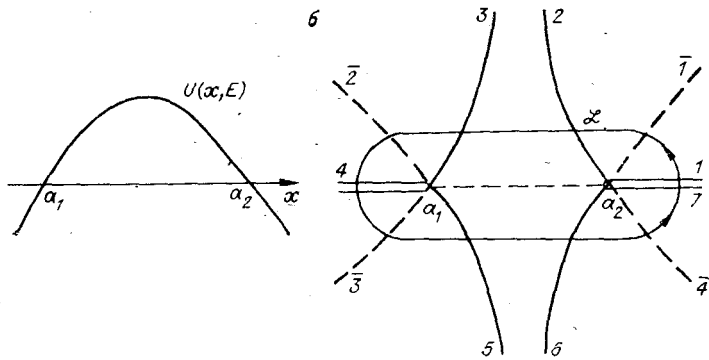
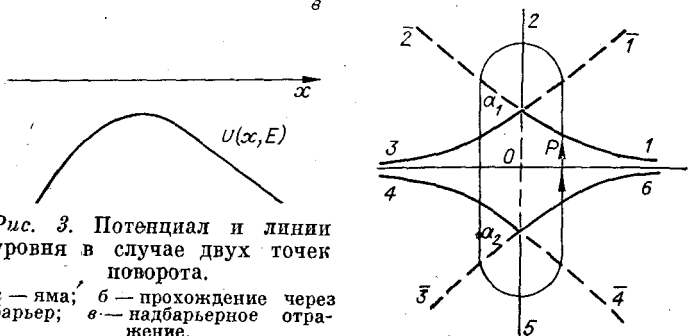
α  β  γ 

Рис. 3. Потенциал и линии уровня в случае двух точек поворота.

α — яма; β — прохождение через барьер; γ — надбарьерное отражение.

«надбарьерным» отражением. Мы начнем изучение решений при наличии двух точек поворота с прохождения через барьер (см. рис. 3, б). На линии 1 запишем решение в виде

$$\psi = A_1\psi_+ + B_1\psi_-, \quad (8.1)$$

где
$$\psi_{\pm} = k^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_{a_2}^x k(x) dx \right\}. \quad (8.2)$$

Будем обходить точки поворота a_1, a_2 , по контуру, изображенному на рисунке. Тогда на линии 2, так же как в предыдущем параграфе, можно написать

$$B_2 = B_1, \quad A_2 = A_1 + \alpha_1 B_1. \quad (8.3)$$

При переходе с линии 2 на линию 3 мы не пересекаем штриховых линий, т. е. в области перехода ни одно из решений ψ_+, ψ_- не является преимущественным по сравнению с другим. Поэтому на линии 3 запишем:

$$\psi = A_3\bar{\psi}_+ + B_3\bar{\psi}_-, \quad (8.4)$$

где
$$\bar{\psi}_{\pm} = k^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_{a_1}^x k(x) dx \right\},$$

$$A_3 = e^{\delta}(A_1 + \alpha_1 B_1), \quad B_3 = B_1 e^{-\delta}, \quad (8.5)$$

$$2\delta = i \oint_{\mathcal{L}} k(x) dx > 0 \quad (8.6)$$

(контур \mathcal{L} обозначен на рис. 3, б). Появление множителей $e^{\pm\delta}$ в (8.5) связано с изменением начала отсчета при написании $\bar{\psi}_{\pm}$. В секторе (3, 4) $\bar{\psi}_+$ экспоненциально возрастает с ростом $|x|$, поэтому

$$A_4 = A_3 = e^{\delta}(A_1 + \alpha_1 B_1), \quad (8.7)$$

$$B_4 = B_3 + \beta_1 A_3 = e^{\delta}[\beta_1 A_1 + (\alpha_1 \beta_1 + e^{-2\delta}) B_1].$$

Дальше мы можем упростить задачу, заметив, что линии уровня 5, 6, 7 эквивалентны соответственно линиям уровня 2, 3, 4. Тогда, воспользовавшись формулами (8.7), имеем

$$A_7 = e^{\delta}(A_4 + \alpha_2 B_4), \quad (8.8)$$

$$B_7 = e^{\delta}[\beta^2 A_4 + (\alpha_2 \beta_2 + e^{-2\delta}) B_4].$$

Теперь мы должны сравнить решения, взятые на разных берегах разреза (линии 1 и 7), и потребовать их совпадения вследствие аналитичности истинного решения. Для этого следует учесть, что k^2 имеет простые нули в точках a_1 и a_2 и, следовательно, k можно записать в виде

$$k = [(k - a_1)(x - a_2)]^{1/2} f(x), \quad (8.9)$$

где $f(x)$ в рассматриваемой области аналитична. Полный обход вокруг точек a_1, a_2 не меняет показателя экспонент в (8.2), а предэкспоненты приобретают знак минус. Отсюда

$$A_7 = -A_1, \quad B_7 = -B_1. \quad (8.10)$$

Подставляя (8.8) и (8.7) в (8.10), приходим к следующим уравнениям для определения $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_2 \beta_1 &= -e^{-2\delta}, \\ \alpha_1 + \alpha_2(\alpha_1 \beta_1 + e^{-2\delta}) &= 0, \\ \beta_2 + \beta_1(\alpha_2 \beta_2 + e^{-2\delta}) &= 0, \\ \alpha_1 \beta_2 + (\alpha_1 \beta_1 + e^{-2\delta})(\alpha_2 \beta_2 + e^{-2\delta}) &= e^{-2\delta}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Мы получили четыре уравнения для определения четырех неизвестных. К сожалению только три из них являются линейно-независимыми, и поэтому в случае двух точек поворота используемый метод не приводит к однозначной сшивке решений. Из системы (8.11) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 &\equiv \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 \equiv \beta, \\ \alpha\beta &= -(1 + e^{-2\delta}). \end{aligned} \quad (8.12)$$

В действительности, если $U(x)$ вещественно, то неоднозначность в определении α и β меньше, чем это следует из (8.12). Учтем, что если $\psi(x)$ — решение, то $\psi^*(x^*)$ есть также решение. Для решения $\psi^*(x^*)$ в расположении линий уровня на рис. 3, б следует сделать замены:

$$1 \rightarrow 7, \quad 2 \rightarrow 6, \quad 3 \rightarrow 5. \quad (8.13)$$

Кроме того, в той области, где раньше появлялся коэффициент α , теперь стоит β^* . Так как согласно (8.13)

берега разрезов меняются местами, предэкспонента меняет знак и, следовательно,

$$\alpha = -\beta^*. \quad (8.14)$$

Из (8.14) и (8.12) вытекает, что

$$\alpha = ie^{i\varphi}(1 + e^{-2\delta})^{1/2}, \quad (8.15)$$

$$\beta = ie^{-i\varphi}(1 + e^{-2\delta})^{1/2},$$

где φ — неизвестная фаза, которая не может быть определена рассматриваемым методом.

Физический интерес представляет следующая задача: задано решение при $x \gg a_2$ (коэффициенты A_1, B_1) и требуется найти решение при $x \ll a_1$ (коэффициенты A_4, B_4). Воспользовавшись формулами (8.7), (8.12), (8.15), можем написать

$$\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} e^\delta & ie^{i\varphi}(1 + e^{2\delta})^{1/2} \\ ie^{-i\varphi}(1 + e^{2\delta})^{1/2} & -e^\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (8.16)$$

где множитель $-i$ возникает из предэкспоненты в результате полуобхода. Учтем, что при полуобходе, согласно (8.9), показатели экспонент меняют знак. Если записать решение при $x \ll a_1$ в форме $\psi = A\bar{\psi}_- + B\bar{\psi}_+$, то согласно (8.16)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi}(1 + e^{2\delta})^{1/2} & -e^\delta \\ e^\delta & ie^{i\varphi}(1 + e^{2\delta})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Формулу (8.17) запишем сокращенно в виде

$$A = MA_1, \quad (8.18)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad M = -i \begin{pmatrix} \beta e^\delta & -e^\delta \\ e^\delta & \alpha e^\delta \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Матрицу M будем называть в дальнейшем матрицей перехода.

Пусть, например, $B_1 = 0$. Тогда из (8.17) следует

$$D = |A_1/A|^2 = 1/(1 + e^{2\delta}), \quad (8.20)$$

$$R = |B_1/A|^2 = 1/(1 + e^{-2\delta}),$$

$$R + D = 1.$$

В квантовой механике величина R называется коэффициентом отражения от барьера, а D — коэффициентом прохождения. При выводе (8.17) на расстояние между точками a_1, a_2 , а значит, и на величину δ никаких ограничений не накладывалось. При $\delta \rightarrow 0$ $D \rightarrow 1/2$, $R \rightarrow 1/2$. При $\delta \gg 1$ $D \approx e^{-2\delta}$, $R \approx 1 - e^{-2\delta}$. Отметим, что матрица перехода M оставляет инвариантной величину:

$$|A|^2 - |B|^2 = \text{inv} = |A_1|^2 - |B_1|^2. \quad (8.21)$$

Позднее мы остановимся на этом обстоятельстве более подробно.

Поскольку физический интерес представляют обычно величины R и D , в рассматриваемом случае неоднозначность в фазе коэффициентов шивки α и β , как видно из (8.20), не существенна.

§ 9. Две точки поворота.

Надбарьерное отражение.

Точность адиабатического инварианта

Перейдем теперь к случаю надбарьерного отражения (см. рис. 3, в). Так как $U(x)$ действительно, два корня в точках a_1, a_2 комплексно-сопряжены друг другу. Линии уровня 1, 3, 4, 6 асимптотически приближаются к действительной оси, которая, в свою очередь, тоже является линией уровня. Определим матрицу перехода решения, заданного далеко слева от точки O , в решение далеко справа от точки O (или наоборот). Эта задача решается аналогично предыдущей. На линиях $\bar{1}, \bar{3}, \psi_- \gg \psi_+$, а на линиях $\bar{2}, \bar{4} \psi_+ \gg \psi_-$, где знак \gg означает, что слева стоит экспоненциально растущее с ростом $|x|$ решение, а справа — экспоненциально затухающее.

Пусть на действительной оси в точке P задано решение

$$\psi = A_1\psi_+ + B_1\psi_-, \quad (9.1)$$

$$\psi_{\pm} = k^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_0^x k(x) dx \right\}. \quad (9.2)$$

На линии I имеем (ввиду изменения начала отсчета интеграла в (9.2))

$$A'_1 = A_1 e^{-\delta/2}, \quad B'_1 = B_1 e^{\delta/2}, \quad (9.3)$$

$$2\delta = i \oint_{\mathcal{L}} k(x) dx > 0; \quad (9.4)$$

на линии 2

$$A_2 = A'_1 + \alpha B'_1, \quad B_2 = B'_1; \quad (9.5)$$

на линии 3

$$A_3 = A_2, \quad B_3 = B_2 + \beta A_2. \quad (9.6)$$

С линии 3 спускаемся на действительную ось слева от точки O и, заменяя нижний предел (т. е. начало отсчета) интеграла в (9.2) a_1 на O , получаем

$$A'_3 = A_3 e^{-\delta/2}, \quad B'_3 = B_3 e^{\delta/2}. \quad (9.7)$$

Далее вся операция обхода аналогична проделанному только что полуобходу (см. § 8). В результате, так же как и для прохождения через барьер, имеем

$$M = -i \begin{pmatrix} \beta e^{-\delta} & -e^{-\delta} \\ e^{-\delta} & \alpha e^{-\delta} \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

где

$$\alpha = -\beta^* = i e^{i\varphi} (1 + e^{2\delta})^{1/2}, \quad (9.9)$$

φ — по-прежнему неизвестная фаза. Из формул (9.8), (9.9) и (8.17) видно, что полученная матрица перехода M обладает теми же свойствами, что и в случае прохождения через барьер, и отличается от последней только определением δ . Коэффициенты прохождения и отражения соответственно равны [9]

$$D = 1/(1 + e^{-2\delta}), \quad R = 1/(1 + e^{2\delta}), \quad R + D = 1. \quad (9.10)$$

Приведенные рассуждения можно использовать для решения вопроса о сохранении адиабатического инва-

рианта [10]. Рассмотрим уравнение для классического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (9.11)$$

где $\omega(t)$ — аналитическая функция t , медленно меняющаяся со временем так, что выполнено условие

$$\dot{x}/x \gg \dot{\omega}/\omega. \quad (9.12)$$

Частота $\omega(t)$ нигде не обращается в нуль на действительной оси t (рис. 4). Нетрудно видеть, что этот случай с формальной стороны полностью аналогичен надбарьерному отражению в квантовой механике. Пусть при $t \rightarrow \pm\infty$ решения уравнения (9.11) имеют вид

$$x(t \rightarrow -\infty) = x_+ + rx_-, \quad (9.13)$$

$$x(t \rightarrow +\infty) = dx_+,$$

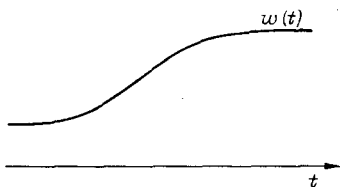


Рис. 4. Характер изменения частоты со временем.

$$x_{\pm} = \omega^{-1/2}(t) \exp \left\{ \pm i \int^t \omega(t) dt \right\},$$

где r и d определяются с помощью матрицы перехода (9.8). Согласно определению R и D , имеем $|r|^2 = R$, $|d|^2 = D$. Коэффициенты отражения и прохождения R и D имеют размерность действия I для осциллятора и пропорциональны числу частиц в квантовой механике. Если $\delta \gg 1$, то из (9.13) и (9.10) следует, что

$$I(t \rightarrow -\infty) - I(t \rightarrow +\infty) \sim e^{-2\delta}. \quad (9.14)$$

Формула (9.14) определяет точность адиабатического инварианта — действия при рассмотренных условиях. Если $\delta < 1$, то изменение адиабатического инварианта существенно. Если кривая $\omega(t)$ начинает приближаться к прямой, параллельной оси t , то $\epsilon \rightarrow 0$ (см. § 6) и в соответствии с (6.6) $\delta \rightarrow \infty$. Точность инварианта повышается, что очевидно.

**§ 10. Две точки поворота.
Правила квантования.
Обсуждение точности метода**

Нам осталось рассмотреть последний случай двух точек поворота — «яму» (см. рис. 3, а). Обычная постановка задачи заключается в следующем: найти собственные значения E , которые соответствуют собственным функциям $\psi(x, E)$, ограниченным на $\pm \infty$. При $x < a_1$ и $x > a_2$ решение $\psi(x, E)$ может быть только затухающим с ростом $|x|$. Нам необходимо найти условия, при которых осуществляется последний вариант.

Начнем решение задачи с определения правил спивки решений. Эта процедура будет полностью эквивалентна той, что делалась в § 8, 9. На линии I зададим решение в виде

$$\psi = A_1 \psi_+ + B_1 \psi_- \quad (10.1)$$

На линиях $I, 3$ экспоненциально растущим является ψ_+ , а на линиях $\bar{2}, \bar{4}$ — ψ_- . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1, \quad B_2 = B_1 + \alpha_1 A_1, \\ A_3 &= (A_2 + \beta_1 B_2) e^{-i\tau}, \quad B_3 = (\alpha_1 A_1 + B_1) e^{i\tau}, \\ A'_1 &= [A_3 (1 + \alpha_2 \beta_2) + \beta_2 B_3] e^{-i\gamma} = e^{i\mu} A_1, \\ B'_1 &= (\alpha_2 A_3 + B_3) e^{i\gamma} = e^{i\mu} B_1, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где A'_1, B'_1 — коэффициенты, с которыми мы возвращаемся на линию I ;

$$2\gamma = - \oint_{\mathcal{L}} k(x, E) dx > 0; \quad (10.3)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} [k'(x)/k(x)] dx \quad (10.4)$$

(в нашем случае $\mu = \pi$). Из уравнений (10.2) находим

$$\begin{aligned} \alpha_2 \beta_1 + e^{2i\tau} &= e^{i\mu}, \\ \alpha_2(1 + \alpha_1 \beta_1) + \alpha_1 e^{2i\tau} &\neq 0, \\ \beta_1(1 + \alpha_2 \beta_2) + \beta_2 e^{2i\tau} &= 0, \\ (1 + \alpha_1 \beta_1)(1 + \alpha_2 \beta_2) e^{-2i\tau} + \alpha_1 \beta_2 &= e^{i\mu}, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad (10.5)$$

$$\alpha\beta = e^{i\mu} - e^{2i\gamma}.$$

Формула (10.5) принципиально ничем не отличается от аналогичных выражений, полученных в § 8, 9, однако неоднозначность в определении коэффициентов α , β теперь более сильная, так как условие $\psi(x) = \psi^*(x^*)$ для действительной функции $U(x, E)$ выполняется тождественно и ничего нового не дает.

Чтобы в секторах (1, $\bar{1}$, 2) и (3, $\bar{3}$, 4) отсутствовали экспоненциально растущие решения, необходимы условия:

$$A_1 = A_3 = 0. \quad (10.6)$$

Подставляя (10.6) в выражение для A_3 из (10.2), находим: $\beta = 0$ или, согласно (10.5),

$$e^{i(2\gamma - \mu)} = 1. \quad (10.7)$$

Отсюда

$$2\gamma + \mu = 2n\pi \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (10.8)$$

или

$$\int_{a_1}^{a_2} k(x, E) dx = \pi(n + 1/2). \quad (10.9)$$

Уравнение (10.9) определяет те собственные значения E , для которых решение является ограниченным на $\pm \infty$. Если функция $U(x, E)$ комплексная, то все рассуждения остаются прежними, однако для существования решений, обращающихся на $\pm \infty$ в нуль, необходимо, чтобы действительная ось x проходила в секторах (1, $\bar{1}$, 2) и (3, $\bar{3}$, 4). Уравнение (10.9) будем называть по аналогии с квантовой механикой правилами квантования.

Таким образом, в случае ямы неоднозначность в определении α и β снова оказалась несущественной для получения величин, интересных с физической точки зрения.

Обсудим теперь некоторые вопросы, связанные с точностью полученных правил шивки решений. Будем увеличивать расстояние между точками a_1, a_2

(см. рис. 3, а, б) в случаях прохождения через барьер и надбарьерного отражения. При этом $\delta \rightarrow \infty$. Незвестная фаза φ , входящая в выражения для α , β , связана со следующими членами в разложении (6.6), (6.7), которые мы не учитывали. Эти члены дают вклад в фазу решения S порядка $\varepsilon^{1/2}$. При удалении точек a_1, a_2 $\delta \rightarrow \infty$, так как $\varphi \sim \varepsilon^{1/2} \rightarrow 0$. Отсюда $\alpha, \beta \rightarrow i$, что совпадает с формулами (7.9) для одной точки поворота.

Итак, при наличии двух точек поворота можно при обходе одной из точек пользоваться правилами (7.9) с указанной выше точностью. То же справедливо и при большем числе особых точек. Точность формул (7.9) можно повысить, если обходить одновременно рассматриваемую точку поворота и ближайшие к ней. Чем больше особых точек мы сможем обойти одновременно, тем более высокая точность получаемых правил шивки решений. Однако, как видно из результатов § 8, 9 и настоящего, уже для двух точек поворота коэффициенты шивки определяются неоднозначно. В то же время физически необходимые результаты (коэффициенты R, D и правила квантования) определить однозначно еще можно. При одновременном обходе особых точек, число которых больше двух, неоднозначность в определении коэффициентов шивки настолько велика, что использование метода Цвана теряет смысл и появляется необходимость в обходе точек поворота порознь, заключая внутрь контура обхода не более двух точек.

Приведенные соображения оправдывают следующее опасное место, возникающее при прохождении через барьер и при надбарьерном отражении. Изменение начала отсчета, которым мы пользовались, приводит к появлению при коэффициентах A_1, B_1 множителя типа $\exp(\pm\delta)$. Если, например, множитель $\exp(-\delta)$ окажется при том решении, которое в рассматриваемом секторе экспоненциально нарастает, то это решение, может быть, нельзя уже считать преобладающим. Чтобы приведенные в § 8, 9 выводы были справедливыми, необходимо, очевидно, чтобы радиус контура одновременного обхода двух точек поворота был намного больше расстояния между этими точками. Это объясняет следующий известный факт: коэффициенты R, D и

правила квантования для $U(x) = a + bx^2$, полученные в ВКБ-приближении, совпадают с точными. Контур обхода для параболической функции $U(x)$ можно увести как угодно далеко на бесконечность, т. е. повышать сколь угодно точность результатов ⁴⁾.

§ 11. Прохождение через параболический слой

Рассмотрим конкретный пример $U(x, E)$, когда уравнение (6.1) имеет точное решение

$$\psi'' + (\lambda + x^2)\psi = 0, \quad (11.1)$$

и сравним решения (11.1) с полученными выше результатами. Решение этого уравнения в ВКБ-приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_+ &= (\lambda + x^2)^{-1/4} \exp \left\{ i \int_{(-\lambda)^{1/2}}^x (\lambda + x^2)^{1/2} dx = \right. \\ &= (\lambda + x^2)^{-1/4} \exp i \left\{ \frac{1}{2} x (\lambda + x^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \lambda \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \ln [x + (\lambda + x^2)^{1/2}] - \frac{1}{4} \lambda \ln |\lambda| \right\} \right. \end{aligned}$$

или при $x \gg |\lambda|$

$$\psi_+ \sim x^{i(\lambda-1)/2} e^{ix^2/2} \exp \left\{ - (i/4) \lambda \ln |\lambda| + (j/2) \lambda \ln 2 \right\}. \quad (11.2)$$

Аналогично

$$\psi_- \sim x^{-i(\lambda+1)/2} e^{-ix^2/2} \exp \left\{ + (i/4) \lambda \ln |\lambda| - (i/2) \ln 2 \right\}. \quad (11.3)$$

Пусть на линии уровня 1 (см. рис. 3, б) задано решение $\psi = \psi_-$. Тогда на линиях 2, 3 (началом отсчета является $x = 0$) согласно формулам (8.3) имеем

$$\psi = \psi_- + \alpha \psi_+, \quad (11.4)$$

⁴⁾ Можно привести примеры других функций $U(x)$, для которых R , D и правила квантования, полученные в ВКБ-приближении, совпадают с точными.

где α определяется формулой (8.15):

$$\alpha = ie^{i\varphi}(1 + e^{2\delta})^{1/2}. \quad (11.5)$$

В соответствии с (8.5) нетрудно получить

$$\delta = \pi\lambda/2. \quad (11.6)$$

С другой стороны, точным решением уравнения (11.1) является [11]

$$\psi(x, \lambda) = D_p(\pm(1 + i)x), \quad (11.7)$$

где D_p — функция параболического цилиндра. Зададим на линии уровня 1 решение, соответствующее ψ —:

$$\psi = D_p((1 + i)x).$$

При больших $|x|$ имеем асимптотику

$$D_{-(1+i\lambda)/2}((1 + i)x) \sim x^{-(1+i\lambda)/2} e^{-ix^2/2} \times \\ \times \exp\{\pi\lambda/8 - [(1 + i\lambda) \ln 2]/4 - i\pi/8\}. \quad (11.8)$$

На линиях уровня 2, 3 асимптотика функции $D_p((1 + i)x)$ имеет вид

$$D_{-(1+i\lambda)/2}((1 + i)x) \sim \\ \sim x^{-(1+i\lambda)/2} e^{-ix^2/2} \exp\{\pi\lambda/8 - [(1 + i\lambda) \ln 2]/4 - \\ - i\pi/8\} - (2\pi)^{1/2} [1/\Gamma((1 + i\lambda)/2)] x^{-(1-i\lambda)/2} e^{ix^2/2} \times \\ \times \exp\{\pi\lambda/2 - i\pi/2 - i\pi(1 - i\lambda)/8 - \\ - [(1 - i\lambda) \ln 2]/4\}. \quad (11.9)$$

Из сравнения (11.8) и (11.9) с (11.2)–(11.4) находим

$$\alpha = i(2\pi)^{1/2} [1/\Gamma((1 + i\lambda)/2)] e^{\pi\lambda/4} \times \\ \times \exp\{i[-(\lambda/2) \ln 2 + (\lambda/2) \ln |\lambda|]\}. \quad (11.10)$$

Из (11.10) получаем

$$|\alpha| = (2\text{ch}(\pi\lambda/2))^{1/2} e^{\pi\lambda/4} = (1 + e^{\pi\lambda})^{1/2} = \\ = (1 + e^{2\delta})^{1/2}, \quad (11.11)$$

что совпадает с (9.9), и

$$\varphi = \arg \alpha - \pi/2 = \arg \Gamma(1/2 + i\lambda/2) - \\ - i(\lambda/2) \ln 2 + (i/2)\lambda \ln |\lambda|. \quad (11.12)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ $\varphi \sim 0(1/\lambda)$. (11.13)

При $\lambda \rightarrow 0$ $\varphi \sim (\lambda/2) \ln |\lambda| + (\lambda/2)(\ln 2 - C)$, (11.14)

где C — постоянная Эйлера.

§ 12. Уравнение с периодической функцией. Движение в периодическом поле

Как уже упоминалось в § 9, метод Цвана можно использовать при наличии более чем двух особых точек за счет определенной потери точности. Покажем это на примере периодической функции $U(x)$

$$U(x + L) = U(x). \quad (12.1)$$

Решения уравнения

$$\psi'' + U(x)\psi = 0 \quad (12.2)$$

обладают свойством трансляционной симметрии

$$\psi(x + L) = \lambda\psi(x), \quad (12.3)$$

где λ — собственное значение оператора сдвига по координате на L . На рис. 5 показан ход функции $U(x)$, а на рис. 6 изображены линии уровня.

Пусть в области $x_3 > x > x_0$ задано решение в виде

$$\psi(x) = A\psi_+ + B\psi_-, \quad (12.4)$$

где

$$\psi_{\pm} = k^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \times \int_{x_0}^x k(x) dx \right\}. \quad (12.5)$$

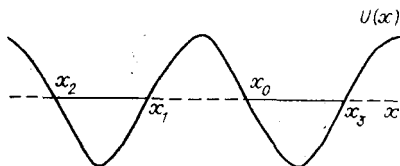


Рис. 5. Потенциал в периодическом случае.

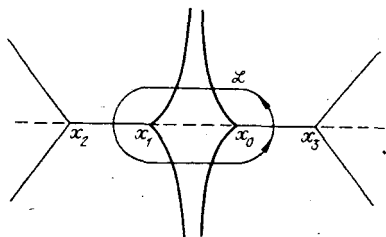


Рис. 6. Линии уровня в периодическом случае.

Обсудим имеющиеся в нашем распоряжении возможности. В [12] авторы из области (x_0, x_3) проходят «под барьер» в область (x_0, x_1) и затем выходят в область (x_2, x_1) . Такой подход принципиально неверен и приводит к неправильным результатам. С одной стороны, это связано с тем, что в (x_0, x_1) решение ψ_+ является экспоненциально растущим с ростом $|x|$, а ψ_- — экспоненциально затухающим. Вследствие этого коэффициент при ψ_- остается не определенным в пределах применимости ВКБ-приближения. С другой стороны, даже малый коэффициент при ψ_- в интервале (x_0, x_1) может дать существенный вклад в области (x_2, x_1) .

Таким образом, получив на штриховой линии (см. рис. 6) приближенное решение, мы не имеем корректного метода перехода на линию уровня. Существует, однако, возможность одновременного обхода точек (x_0, x_1) , рассмотренная в § 8, 9. При этом мы допускаем ошибку в определении коэффициентов сшивки $\sim 1/kl$ в фазе и $\sim e^{-2kl}$ по модулю, где l — расстояние от x_1 до ближайшей особенности в x_2 . Для того, чтобы эта ошибка была мала, необходимо, очевидно, потребовать: $kl \gg 1$. Это означает, что между точками x_1, x_2 (т. е. в яме) должно происходить большое число осцилляций решения ψ .

Перейдем теперь к определению λ в ВКБ-приближении. В области

$$x_1 = x_3 - L > x > x_0 - L = x_2 \quad (12.6)$$

запишем решение в виде

$$\psi(x) = \bar{A}\bar{\psi}_+ + \bar{B}\bar{\psi}_-, \quad (12.7)$$

где

$$\bar{\psi}_\pm = k^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x k(x) dx \right\}. \quad (12.8)$$

Так как x в формуле (12.8) меняется в интервале (12.6), $\bar{\psi}_\pm$ тождественно совпадает с $\psi(x)$ (см. (12.4)). Таким образом, оператор сдвига по координате на период можно представить с помощью матрицы M , определенной из условия

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (12.9)$$

Искомые λ есть собственные значения матрицы M . Используя формулу (8.17), можно сразу написать

$$M = -i \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi - ia} (1 + e^{2\delta})^{1/2} & -e^{\delta - ia} \\ e^{\delta + ia} & ie^{i\varphi + ia} (1 + e^{2\delta})^{1/2} \end{pmatrix},$$

где

$$\delta = i \int_{x_0}^{x_1} k(x) dx > 0, \quad (12.11)$$

$$a = \int_{x_1}^{x_2} k(x) dx > 0,$$

а множители $\exp(\pm a)$ появляются вследствие того, что начало отсчета в (12.8) выбрано в точке x_2 , а не в x_0 . Из выражения (12.10) находим уравнение для определения λ

$$\lambda^2 - 2(1 + e^{2\delta})^{1/2} \cos(a + \varphi) \cdot \lambda + 1 = 0. \quad (12.12)$$

Из (12.12) следует, что два корня λ_1, λ_2 связаны соотношением $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Если λ — комплексное, то $|\lambda_{1,2}| = 1$ и все решения уравнения (12.12) ограниченные. Если корни действительные, то одно из решений растет при $x \rightarrow \infty$, другое затухает. Выражение для λ имеет вид

$$\lambda_{1,2} = (1 + e^{2\delta})^{1/2} \cos(a + \varphi) \pm \pm i [1 - (1 + e^{2\delta}) \cos^2(a + \varphi)]^{1/2}. \quad (12.13)$$

Отсюда сразу получаем условие ограниченности решения

$$(1 + e^{2\delta}) \cos^2(a + \varphi) \leq 1. \quad (12.14)$$

Полученное выражение справедливо для любых δ . При $\delta \gg 1$

$$\cos^2(a + \varphi) \leq e^{-2\delta}. \quad (12.15)$$

При $\delta \ll 1$

$$\cos^2(a + \varphi) \leq (1 - \delta)/2. \quad (12.16)$$

Как будет показано в следующем параграфе, неопределенной фазой φ можно пренебречь в случае (12.15). При $\delta \ll 1$ фаза φ в (12.16) существенна.

Изложенное решение непосредственно применимо к задаче о движении квазиклассической частицы в пе-

риодическом потенциале. Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$\psi'' + [E - V_1(x)]\psi = 0 \quad (2m = \hbar = 1), \quad (12.17)$$

$$V_1(x + L) = V_1(x) = V_0 V(x), \quad |V(x)| \leq 1,$$

где V_0 — амплитуда потенциала $V_1(x)$. Удобно перейти к безразмерным переменным

$$d^2\psi/dz^2 + [q^2 - V(\Omega z)]\psi = 0, \quad (12.18)$$

$$\text{где } z = xV_0^{1/2}, \quad q^2 = E/V_0, \quad \Omega = 2\pi/LV_0^{1/2}.$$

Условием применимости ВКБ-приближения является

$$\Omega/q \ll 1. \quad (12.19)$$

Физически приемлемы только ограниченные ψ -функции. Это накладывает определенные ограничения на возможные значения энергии частицы E . Таким образом, условие (12.14) служит для определения собственных значений энергии.

§ 13. Уравнение Матье. «Медленные» нарушения трансляционной симметрии

Изучим более подробно уравнение (12.18), выбрав конкретный вид потенциала $V(\Omega z)$:

$$V(\Omega z) = \cos^2 \Omega z. \quad (13.1)$$

Задача заключается в том, чтобы для уравнения Матье

$$d^2\psi/dz^2 + [q^2 - \cos^2 \Omega z]\psi = 0 \quad (13.2)$$

определить значения q , обеспечивающие ограниченные на всей оси z решения $\psi(z)$. Подставляя в формулы (11.11)

$$k(z) = (q^2 - \cos^2 \Omega z)^{1/2}, \quad (13.3)$$

находим

$$a = (2/\Omega)\{E(\pi/2, q) - (1 - q^2)F(\pi/2, q)\}, \quad (13.4)$$

$$\delta = (2/\Omega)\{E(\pi/2, (1 - q^2)^{1/2}) - q^2F(\pi/2, (1 - q^2)^{1/2})\},$$

где E , F — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода. Мы ограничимся рассмотрением интересного с физической точки зрения случая, ког-

да уровень энергии проходит близко к краю ямы, т. е. $E \sim V_0$, или

$$0 < 1 - q^2 \ll 1. \quad (13.5)$$

В этом случае

$$a \approx (2/\Omega)\{1 - (1/4)(1 - q^2)\ln[16e^{1/2}/(1 - q^2)]\}, \quad (13.6)$$

$$\delta \approx (\pi/2\Omega)(1 - q^2).$$

Условием малости δ является ⁵⁾

$$(1 - q^2)/\Omega \ll 1. \quad (13.7)$$

При выполнении неравенства (13.7) точки x_1 и x_0 на рис. 5, 6 настолько приближаются друг к другу, что $k(z)$ можно разложить в ряд по z и ограничиться первыми двумя членами. Это приводит к задаче типа параболического слоя (см. § 10). Согласно (10.14), получаем

$$\begin{aligned} \varphi \approx & - [(1 - q^2)/2\Omega]\ln[(1 - q^2)/\Omega] - \\ & - [(1 - q^2)/2\Omega](\ln 2 - C). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Из (13.6) и (13.8) определяем

$$a + \varphi \approx 2/\Omega - [(1 - q^2)/2\Omega]\ln \Omega. \quad (13.9)$$

Подставляя (13.9) в условие ограниченности решения (12.16), находим

$$\begin{aligned} (3\pi/4) \gtrsim (1/\Omega)\{1 - (1/4)(1 - q^2)\ln \Omega\} - \\ 2n\pi \gtrsim \pi/4, \end{aligned} \quad (13.10)$$

где $n \gg 1$ — произвольное целое число. Уравнение (13.10) определяет так называемые разрешенные энергетические зоны. Значения $\pi/4$ и $3\pi/4$ соответствуют краям этих зон. Итак, энергетический спектр имеет характер чередующихся разрешенных и запрещенных энергетических полос (зон). В рассмотренном случае, определяющемся неравенством (13.7), ширина ΔE разрешенной зоны находится из (13.10)

$$\Delta E \sim \pi\Omega V_0/\ln(1/\Omega). \quad (13.11)$$

Ширина запрещенных зон того же порядка. Хотя выражение (13.11) получено для конкретного вида (13.1)

⁵⁾ Другие случаи рассматривались в [13].

потенциала $V(\Omega z)$, можно показать, что оно справедливо и в общем случае периодической $V(\Omega z)$ для уравнения (12.18).

В теории устойчивости колебаний уравнение Матье исследуется в несколько иной постановке. Уравнение движения записывается в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 - h \cos \Omega t] x = 0, \quad h < 1. \quad (13.12)$$

Условием применимости ВКБ-приближения будет

$$h\Omega/\omega_0 \ll 1. \quad (13.13)$$

Интересны, наоборот, неустойчивые решения, растущие со временем (параметрический резонанс). Свободным параметром является Ω .

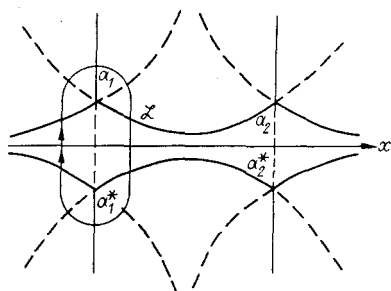


Рис. 7. Линии уровня для уравнения Матье в случае высоких резонансов.

Вблизи некоторых значений Ω возможен параметрический резонанс. Ясно, что изложенную схему можно применить для отыскания асимптотик функций Матье (в частности, при $h \sim 1$) и определения областей $\Delta\Omega$, при которых возможна неустойчивость⁶⁾. Схема линий уровня показана на рис. 7.

Точки a_1, a_1^* можно обходить одновременно по контуру \mathcal{L} и воспользоваться при этом для матрицы перехода выражением (9.8). Как и в § 12, мы должны потребовать, чтобы расстояние между точками a_1, a_2 было велико, т. е.

$$\Omega/\omega_0 \ll 1. \quad (13.14)$$

Неравенство (13.14) означает, что излагаемый метод применим для исследования резонансов высокого порядка.

Задачи, рассмотренные в предыдущем и в этом параграфах являются в определенном смысле идеализированными. Реально возможно слабое отклонение

⁶⁾ В такой постановке эту задачу решал Г. Е. Векштейн.

функции $V(x)$ от периодичности. Будем говорить о «медленном» отклонении от периодичности, не ограничивая величины этого отклонения, например период $L = L(x)$ с условием медленности

$$dL/dx \sim L/L_1 \ll 1. \quad (13.15)$$

Хотя теория возмущений неприменима, однако наличие малого параметра (13.15) дает возможность построить решение в виде некоторого асимптотического ряда.

Будем для конкретности говорить о движении частицы в потенциале, медленно отклоняющемся от периодического. Вместо уравнения (12.18) рассмотрим

$$d^2\psi/dz^2 + [q^2(z) - V(z\Omega(z))]\psi = 0, \quad (13.16)$$

где

$$q^2(z) = [E - \bar{V}(z)]/V_0, \quad (13.17)$$

а $\bar{V}(z)$ и $\Omega(z)$ — медленно меняющиеся функции с характерной длиной изменения $L_1 \gg L$ по переменной x . Построим решения уравнения (13.16), ограниченные на действительной оси z , и выясним, что происходит с зонной структурой энергетического спектра частицы вследствие слабого нарушения трансляционной симметрии [14].

В первом приближении для достаточно высоких уровней, когда можно воспользоваться ВКБ-методом, будем пренебрегать зависимостью \bar{V} и Ω от z . Тогда можно воспользоваться результатами § 11.

$$\psi = A\psi_+ + B\psi_-,$$

$$\psi_{\pm} = k^{-1/4} \exp i \left\{ \int^z k(z) dz \right\}, \quad (13.18)$$

$$k = [q^2 - V(\Omega z)]^{1/2},$$

где q определено формулой (13.17), а матрица M имеет вид (11.10). Все интегралы, входящие в M , берутся по отрезку длиной $\sim L$, и поэтому вполне естественно пренебречь при определении a и δ зависимостью \bar{V} и Ω от x . Во втором приближении учтем эту зависимость. Тогда вместо (12.9), (12.10) получаем

$$\begin{pmatrix} \bar{A}(z) \\ \bar{B}(z) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi(z)-ia(z)} (1 + e^{2\delta(z)})^{1/2} - e^{\delta(z)-ia(z)} \\ e^{\delta(z)+ia(z)} & ie^{i\varphi(z)+ia(z)} (1 + e^{2\delta(z)})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} \quad (13.19)$$

Если вычесть слева и справа по столбцу с компонентами $A(z)$; $B(z)$, то получим систему двух уравнений в конечных разностях, которую можно заменить системой двух дифференциальных уравнений первого порядка. Решение этой системы можно искать в ВКБ-приближении. Это дает

$$\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} \sim \exp\left\{\pm i \int^z k_1(z, E) dz\right\} = A_{\pm}(z), \quad (13.20)$$

где $k_1(z, E) = \ln \lambda(z, E)$, (13.21)

а λ , согласно (11.12), определяется из уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda(1 + e^{2\phi(z)})^{1/2} \cos[a(z) + \varphi(z)] + 1 = 0. \quad (13.22)$$

В дальнейшем с функциями $A_{\pm}(z)$ следует поступать так же, как с ψ_{\pm} , в зависимости от вида $k_1(z, E)$. В этом смысле задача свелась к уже известной нам процедуре. Собственные значения определяются видом функции $k_1(z, E)$, причем характер зависимости $k_1(z)$ (например, яма или горб) может быть различным для различных значений E . Пусть функция $V(\Omega z)$ задана уравнением (13.1). Тогда величины a , δ , φ определяются по-прежнему уравнениями (13.6), (13.8), в которых для q надо воспользоваться формулой (13.17).

Согласно (13.20), квазиимпульс частицы $k_1(z, E)$ можно рассматривать как импульс для функций $A(z)$, $B(z)$, удовлетворяющих уравнению типа Шредингера с энергией $[\ln \lambda(z, E)]^2$. Точкам поворота соответствуют

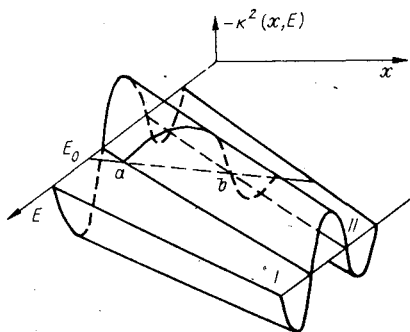


Рис. 8. Энергетическая поверхность в случае нарушения трансляционной симметрии.

края энергетических зон, определяемых уравнением (13.10), где $q(z)$ имеет вид (13.17).

На рис. 8 изображена поверхность $k^2(x, E)$. Области I, II соответствуют разрешенным зонам энергии. Плоскость $E = E_0$ вырезает на поверхности $k^2(x, E)$ кривую $k^2(x, E_0)$, имеющую «горбы» между разрешенными зонами и «ямы» внутри зон. Это означает возможность туннельного перехода между зонами. Точки a и b являются точками поворота. При $x > x_0$ в области энергий, для которых $k^2(x, E) < 0$, зоны исчезают, а в области энергий, где $k^2(x, E) > 0$, энергетический спектр становится сплошным. Если $k^2(x, E)$ в некоторой области энергий имеет вид ямы, то спектр вырождается в дискретный.

§ 14. Уравнение четвертого порядка. Два связанных осциллятора

До сих пор речь шла об уравнении второго порядка. Ниже будет показано, как в простейших случаях путем небольших усложнений можно применить метод Цвана для исследования дифференциальных уравнений произвольного порядка. Рассмотрим сначала уравнение четвертого порядка

$$\psi^{IV} + 2U_2(x)\psi'' + U_1(x)\psi = 0. \quad (14.1)$$

Как и для уравнения второго порядка, будем предполагать медленную зависимость $U_1(x)$, $U_2(x)$, характеризуемую малым параметром ε :

$$k \sim \psi'/\psi, \quad L \sim U_1'/U_1 \sim U_2'/U_2, \quad (14.2)$$

$$\varepsilon = 1/(kL)^2 \ll 1.$$

Решение (14.1) ищем в виде

$$\psi = \exp \left\{ i \int^x (k^{(0)} + k^{(1)} + \dots) dx \right\}, \quad (14.3)$$

где $k^{(0)} \sim \varepsilon^{-1/2}$, $k^{(1)} \sim 1$, $k^{(2)} \sim \varepsilon^{1/2}$. Подставляя (14.3) в (14.1) и приравнивая члены одного порядка, имеем

$$(k^{(0)})^4 - 2U_2(k^{(0)})^2 + U_1 = 0, \quad (14.4)$$

$$4(k^{(0)})^3 k^{(1)} - 6i(k^{(0)})^2 \frac{dk^{(0)}}{dx} 2U_2 \left(i \frac{dk^{(0)}}{dx} - 2k^{(0)} k^{(1)} \right) = 0, \quad (14.5)$$

Характеристическое уравнение (14.4) дает

$$(k_{1,2}^{(0)})^2 = U_2 \pm (U_2^2 - U_1)^{1/2}. \quad (14.6)$$

Из уравнения (14.5) с помощью (14.6) получаем

$$\begin{aligned} k_{1,2}^{(1)} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{d}{dx} \ln k_{1,2}^{(0)} + \frac{d}{dx} \ln [(k_{1,2}^{(0)})^2 - U_2] + \right. \\ \left. + U_2' / [(k_{1,2}^{(0)})^2 - U_2] \right\} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{d}{dx} \ln k_{1,2}^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{d}{dx} \ln (U_2^2 - U_1)^{1/2} \pm U_2' / (U_2^2 - U_1)^{1/2} \right\}. \quad (14.7) \end{aligned}$$

Таким образом, главный член асимптотического ряда (14.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi \sim k_{1,2}^{-1/4} (U_2^2 - U_1)^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int^x k_{1,2}(x) dx - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int^x dx U_2' / (U_2^2 - U_1)^{1/2} \right\}, \quad (14.8) \end{aligned}$$

где нулевой индекс при k для простоты опущен.

Решения (14.8) так же, как асимптотические решения уравнения второго порядка, имеют особые точки. Такими точками являются, в частности, точки совпадения корней характеристического уравнения (14.4), т. е. точки, где возможны равенства:

$$k_1 = -k_1 = 0, \quad k_2 = -k_2 = 0, \quad (14.9)$$

$$k_1 = k_2, \quad (14.10)$$

$$k_1 = -k_2. \quad (14.11)$$

Необходимость построения асимптотических решений уравнения типа (14.1) встречается в различных физических задачах, например при изучении неупругих атомных столкновений [6], теории гидродинамической устойчивости [15], законов сохранения адиабатических инвариантов [16]. Остановимся подробнее на последней задаче.

Рассмотрим систему двух связанных осцилляторов, функция Лагранжа которой равна

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (1/2) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (1/2) \omega_1^2(t) x^2 - \\ - (1/2) \omega_2^2(t) y^2 + \alpha(t) xy. \quad (14.12) \end{aligned}$$

Уравнения движения для рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x &= \alpha(t) y, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \alpha(t) x.\end{aligned}\tag{14.13}$$

Относительно функций ω_1 , ω_2 , α будем предполагать выполненными условие аналитичности и условие медленности, аналогичное (14.2). Если бы параметры системы ω_1 , ω_2 , α были постоянными, то можно было перейти к нормальным колебаниям

$$\begin{aligned}\ddot{X} + \Omega_1^2 X &= 0 \\ (\Omega_1 &\neq \Omega_2), \\ \ddot{Y} + \Omega_2^2 Y &= 0,\end{aligned}\tag{14.14}$$

не связанным друг с другом. Нормальные частоты Ω_1 , Ω_2 определяются из характеристического уравнения

$$\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega^2 + (\omega_1^2 \omega_2^2 - \alpha^2) = 0 \tag{14.15}$$

и являются собственными значениями матрицы преобразования квадратичной формы (14.12) к каноническому виду, или, что то же самое, системы (14.13) к (14.14). Связь между (X, Y) и (x, y) следующая:

$$x = \frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{[(\omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \alpha^2]^{1/2}} X + \frac{\alpha}{[(\omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \alpha^2]^{1/2}} Y \tag{14.16}$$

$$y = \frac{\alpha}{[(\omega_2^2 - \Omega_1^2)^2 + \alpha^2]^{1/2}} X + \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2}{[(\omega_2^2 - \Omega_1^2)^2 + \alpha^2]^{1/2}} Y,$$

где

$$\Omega_{1,2}^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2 \pm [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2/4 + \alpha^2]^{1/2}, \tag{14.17}$$

а нормировка выбрана такой, чтобы при $\alpha \rightarrow 0$ выполнялось условие $x \rightarrow X$, $y \rightarrow Y$.

Вернемся теперь к системе (14.13). Учитывая формулы (14.3), (14.8), главные члены четырех асимптотических рядов, представляющих независимые решения, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 X_{\pm} &= \Pi_1(t) \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega_1 dt \right\}, \\
 Y_{\pm} &= \Pi_2(t) \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega_2 dt \right\},
 \end{aligned}
 \tag{14.18}$$

где $\Omega_{1,2}$ — по-прежнему решения характеристического уравнения (14.15). По сути дела, в нулевом приближении в ВКБ-методе происходит переход к «квазинормальным» колебаниям с той же матрицей преобразования, что и в случае постоянных $\omega_1, \omega_2, \alpha$. В точке, где совпадают характеристические корни, ранг матрицы преобразования понижается и она становится особой. Возникает тот же вопрос, что и для решений уравнения второго порядка: определить правила сшивки приближенных решений (14.18) в различных областях комплексного переменного t .

§ 15. Связанные осцилляторы. Прохождение через резонанс

В дальнейшем будем предполагать, что все возможные особые точки системы (14.13) достаточно удалены, так что каждую из них можно рассматривать отдельно. На рис. 9 прямыми условно представлены четыре решения (14.18). Точкам пересечения прямых (или «пересечения» решений) соответствуют точки совпадения характеристических частот типа (14.9)—(14.11). Особые области, в которых нарушается условие применимости ВКБ-приближения, обозначены окружностями. Эту область будем называть резонансной. Точка t_1 отвечает случаю (14.10), t_2 — случаю (14.9), t_3 — случаю (14.11). Сделанное в начале параграфа предположение заключается в том, что резонансные области на рис. 9 следуют на достаточно большом расстоянии друг от друга. Случаи (14.10), (14.11) описывают так называемые внутренние резонансы в системе.

Ограничимся случаем $\omega_1 \omega_2 > \alpha$. Тогда особые точки не могут быть на действительной оси. Пусть слева от какой-либо резонансной области задано решение системы (14.13) в виде

$$\psi = A_1 X_+ + A_2 Y_+ + A_3 Y_- + A_4 X_- \tag{15.1}$$

Нам необходимо найти решение справа от резонан-

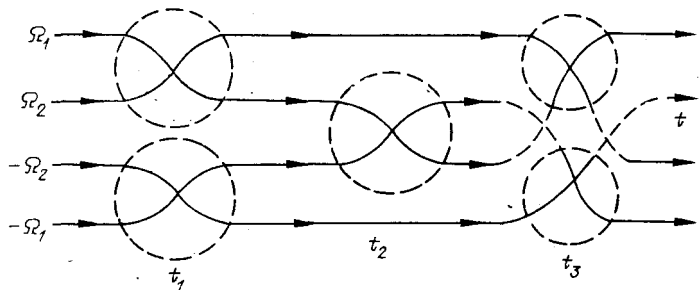


Рис. 9. Схема пересечения решений для связанных осцилляторов.

свой области

$$\bar{\psi} = B_1 X_+ + B_2 Y_+ + B_3 Y_- + B_4 Y_-, \quad (15.2)$$

т. е. определить матрицу перехода M для соответствующего типа резонанса

$$\mathbf{B} = M\mathbf{A}, \quad (15.3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^+ = (A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*),$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^+ = (B_1^*, B_2^*, B_3^*, B_4^*),$$

а «крест» означает операцию транспонирования и комплексного сопряжения.

Для особых точек типа точек поворота (14.9) матрица перехода получена в § 9. Она действует только на пересекающиеся решения и оставляет другие без изменения. Найдем матрицы перехода для случая (14.10).

С точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ имеем из (14.14)

$$\begin{aligned} X_{\pm} &\sim \Omega_1^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega_1(t) dt \right\}, \\ Y_{\pm} &\sim \Omega_2^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega_2(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Представим

$$\Omega_1 \equiv (\Omega_1 + \Omega_2)/2 + (\Omega_1 - \Omega_2)/2, \quad (15.5)$$

$$\Omega_2 \equiv (\Omega_1 + \Omega_2)/2 - (\Omega_1 - \Omega_2)/2.$$

В окрестности резонансной области с $\Omega_1 = \Omega_2$ множитель $\exp \left\{ \pm i \int^t dt (\Omega_1 + \Omega_2)/2 \right\}$ в решениях (15.4) можно рассматривать как коэффициент при решениях. Ограничимся изучением случая, когда $\Omega_1 - \Omega_2$ имеет точку ветвления в комплексной плоскости, т. е.

$$\Omega_1 - \Omega_2 = (m^2 + t^2)^{1/2} f(t), \quad (15.6)$$

где $f(t)$ аналитична в области обхода особых точек. Вблизи резонанса зацепляются пары (X_+, Y_+) и (X_-, Y_-) (см. рис. 9). Каждую из этих пар решений можно рассматривать независимо. Линии уровня, согласно (15.6), ведут себя так же, как на рис. 3, в, обозначениями которого мы и воспользуемся. Пусть на действительной оси справа от резонансов задано

$$\begin{aligned} \psi = & \exp \left\{ i \int^t dt (\Omega_1 + \Omega_2)/2 \right\} \times \\ & \times \left\{ A_1 \Omega_1^{-1/2} \exp \left(i \int^t dt (\Omega_1 - \Omega_2)/2 \right) + \right. \\ & \left. + A_2 \Omega_2^{-1/2} \exp \left(-i \int^t dt (\Omega_1 - \Omega_2)/2 \right) \right\}. \quad (15.7) \end{aligned}$$

Согласно (9.7), на действительной оси слева от резонансов имеем

$$A_1' = A_1 e^{-\delta} + \alpha_1 A_2; \quad A_2' = \beta_1 A_1 + (1 + \alpha_1 \beta_1) e^{\delta} A_2, \quad (15.8)$$

где

$$2\delta = i \oint_{\mathcal{P}} dt (\Omega_1 - \Omega_2)/2 > 0. \quad (15.9)$$

Завершая обход, приходим в исходную точку с коэффициентами

$$A_1'' = A_1' e^{-\delta} + \alpha_2 A_2', \quad A_2'' = \beta_2 A_1' + (1 + \alpha_2 \beta_2) e^{\delta} A_2'. \quad (15.10)$$

Проследим теперь за предэкспоненциальными множителями в (15.7). В результате полуобхода $\Omega_1 - \Omega_2$ меняет знак и, следовательно, $\Omega_{1,2}$ переходит соответственно в $\Omega_{2,1}$. Полный обход не меняет предэкспонент. Отсюда

$$A_1'' = A_1, A_2'' = A_2. \quad (15.11)$$

Учитывая (15.8), (15.10), (15.11), получаем уравнения для определения $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$

$$\begin{aligned} e^{-2\delta} + \alpha_2\beta_1 &= 1, \\ \alpha_2(1 + \alpha_1\beta_1) + \alpha_1e^{-2\delta} &= 0, \end{aligned} \quad (15.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_1(1 + \alpha_2\beta_2) + \beta_2e^{-2\delta} &= 0, \\ \alpha_1\beta_2 + (1 + \alpha_1\beta_1)(1 + \alpha_2\beta_2)e^{2\delta} &= 1. \end{aligned}$$

Решение системы (15.12) дает

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2 \equiv \alpha = ie^{i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2}, \\ \beta_1 &= -\beta_2 \equiv \beta = ie^{-i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2}, \end{aligned} \quad (15.13)$$

где φ — неизвестная фаза и учтено, что $\alpha = -\beta^*$. Согласно формулам (15.8), нетрудно записать матрицу перехода

$$M = \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2} & e^{-\delta} \\ -\delta & ie^{i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & e^{-\delta} \\ e^{-\delta} & \alpha \end{pmatrix}. \quad (15.14)$$

Эта матрица определяет связь

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad (15.15)$$

где $B_{1,2}$ — коэффициенты соответственно при $\exp\left\{i \int^t \Omega_{1,2} dt\right\}$. Для второй пары решений (X_-, Y_-) правила прохождения через резонанс определяются из (15.15) с добавлением операции комплексного сопряжения. Матрица перехода удовлетворяет условию унитарности

$$MM^+ = M^+ = 1 \quad (15.16)$$

и определяет инвариант

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = |B_1|^2 + |B_2|^2 = \text{inv.} \quad (15.17)$$

С точностью до множителей $e^{\pm i\varphi}$ матрица перехода M определялась в [6], однако метод ее определения не является корректным. Полученные в работе [6] решения имеют предэкспоненту, отличающуюся от действительной (см. (15.4)). Как будет видно ниже, это замечание окажется существенным при выяснении физического смысла закона сохранения (15.17).

Аналогичным образом нетрудно найти матрицу перехода для резонанса типа (14.11), когда $\Omega_1 = -\Omega_2$ [16]. Мы приведем окончательный результат без вывода

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2} & e^{-\delta} \\ e^{-\delta} & ie^{i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad (15.18)$$

где δ определяется уравнением

$$2\delta = i \oint_{\mathcal{L}} dt (\Omega_1 + \Omega_2)/2 > 0, \quad (15.19)$$

а контур \mathcal{L} охватывает обе точки, в которых $\Omega_1 = -\Omega_2$.

Физический интерес представляет случай, когда решение (15.1) действительное. Переобозначая для удобства

$$X_{\pm} \rightarrow X_{\pm} e^{\pm i\pi/4}, \quad Y_{\pm} \rightarrow Y_{\pm} e^{\pm i\pi/4},$$

можно записать соответственно для случаев $\Omega_1 = \Omega_2$ и $\Omega_1 = -\Omega_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= M_1 \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = M_2 \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_2^* \\ A_1^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^+ = (A_1^*, A_2^*, A_2, A_1), \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_2^* \\ B_1^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^+ = (B_1^*, B_2^*, B_2, B_1), \end{aligned} \quad (15.20)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_1} \cos \sigma_1 & i \sin \sigma_1 & 0 & 0 \\ i \sin \sigma_1 & e^{i\varphi_1} \cos \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_1} \cos \sigma_1 & i \sin \sigma_1 \\ 0 & 0 & i \sin \sigma_1 & e^{-i\varphi_1} \cos \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (15.21)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_2} \cos \sigma_2 & 0 & i \sin \sigma_2 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \cos \sigma_2 & 0 & i \sin \sigma_2 \\ i \sin \sigma_2 & 0 & e^{i\varphi_2} \cos \sigma_2 & 0 \\ 0 & i \sin \sigma_2 & 0 & e^{-i\varphi_2} \cos \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (15.22)$$

Здесь использованы обозначения

$$\sin \sigma_1 = e^{-\delta_1}, \quad \sin \sigma_2 = e^{-\delta_2}, \quad (15.23)$$

а δ_1 , δ_2 определяются соответственно формулами (15.9) и (15.19). Если мы проходим последовательно оба резонанса, то

$$B = M_1 M_2 A. \quad (15.24)$$

Из унитарности матриц M_1 , M_2 следует инвариантность величины

$$AA^+ = BB^+ = |A_1|^2 + |A_2|^2 = |B_1|^2 + |B_2|^2 = \text{inv} = I. \quad (15.25)$$

Нетрудно выяснить физический смысл полученного закона сохранения. Для этого введем амплитуды a_i «квазинормальных» колебаний X , Y , которые, согласно (15.4), равны

$$a_i = A_i / \Omega_i^{1/2}. \quad (15.26)$$

Тогда из (15.25) следует

$$I = \Omega_1 |a_1|^2 + \Omega_2 |a_2|^2 = E_1 / \Omega_1 + E_2 / \Omega_2 = I_1 + I_2, \quad (15.27)$$

где E_1 , E_2 — соответственно энергии X -, Y -колебаний. Таким образом, адиабатический инвариант рассматриваемой системы равен сумме формальных адиабатических инвариантов в каждой из подсистем. Слово «формальный» означает, что величины порознь могут не сохраняться.

Полученный результат без особого труда обобщается на случай системы связанных осцилляторов с n степенями свободы. При этом предполагается, что в системе существуют резонансы только рассмотренного типа и расстояние между ними достаточно далеко. Тогда можно записать

$$\mathbf{B} = \left(\prod_{i,k} M_{ik} \right) \mathbf{A}, \quad (15.28)$$

где матрицы M_{ik} , соответствующие резонансу $\Omega_i = \Omega_k$, перемножаются в порядке следования резонансов при движении в положительном направлении оси t . Матрица M_{ik} составляется с помощью элементов матриц M_1 (или M_2):

$$m_{ik} = m_{ki} = \sin \sigma_{ik} = m_{N+k, N+i} = m_{N+i, N+k}, \quad (15.29)$$

$$m_{ii} = m_{kk}^* = m_{N+k, N+k} = m_{N+i, N+i}^* = e^{-i\varphi_{ik}} \cos \sigma_{ik},$$

где $m_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы $M_{\alpha\beta}$, N — число степеней свободы, а

$$\sin \sigma_{ik} = e^{-\delta_{ik}}, \quad 2\delta_{ik} = \oint_{\mathcal{L}_{ik}} dt (\Omega_1 - \Omega_2)/2. \quad (15.30)$$

Все остальные диагональные элементы M_{ik} равны 1, а недиагональные — нулю.

Из унитарности M_{ik} следует закон сохранения величины

$$I = \sum_{i=1}^N E_i/\Omega_i, \quad (15.31)$$

где E_i — энергия i -го нормального колебания.

Из формул (15.20)–(15.23), (15.27) видно, что степень несохранения адиабатического инварианта осциллятора зависит от величины соответствующего значения δ . При $\delta \gg 1$, как и в § 9, получаем экспоненциальную точность. В приведенном выше рассмотрении мы не можем сделать величину δ сколь угодно малой. Это связано с тем, что нельзя параметр связи α устремить к нулю, так как при $\alpha < \varepsilon^{1/2}$ нарушается условие применимости ВКБ-приближения. При малых α можно, однако, воспользоваться теорией возмущений [1] и получить сохранение адиабатического инварианта с точностью до членов $\sim \alpha/\varepsilon^{1/2}$.

§ 16. Инварианты дифференциальных уравнений. Другой подход к определению коэффициентов сшивки решений

Рассмотрим надбарьерное отражение (см. § 9) и аналогичный случай для двух связанных осцилляторов (см. § 14) в другом плане. Если A и B — коэффициенты при двух линейно-независимых решениях уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (16.1)$$

то при действительном $\omega^2(t)$ матрица перехода M оставляет, согласно (9.8), инвариантной величину

$$|A|^2 - |B|^2 = \text{inv}. \quad (16.2)$$

Аналогично для двух связанных осцилляторов, описываемых системой (14.13), матрица перехода оставляет инвариантной величину

$$|A|^2 + |B|^2 = \text{inv}, \quad (16.3)$$

где A, B — коэффициенты при «квазинормальных» колебаниях X, Y . Приведенные инварианты можно получить непосредственно из дифференциального уравнения, описывающего процесс. Покажем это.

Так как ω^2 действительно в (16.1), то x^* — также решение

$$\ddot{x}^* + \omega^2(t)x^* = 0. \quad (16.4)$$

Умножая (16.1) на x^* , а (16.4) — на x и вычитая, находим известный инвариант

$$d(\dot{x}x^* - \dot{x}^*x)/dt = 0. \quad (16.5)$$

Подставляя в (16.5)

$$x = A\omega^{-1/2} \exp\left(i \int^t \omega(t) dt\right) + B\omega^{-1/2} \exp\left(-i \int^t \omega(t) dt\right), \quad (16.6)$$

придем к закону сохранения (16.2). Аналогично поступим в случае двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \alpha y, & \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \alpha x, \\ \ddot{x} + \omega_1^2 x^* &= \alpha y^*, & \ddot{y}^* + \omega_2^2 y^* &= \alpha x^*. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Отсюда

$$d(\dot{x}x^* - \dot{x}^*x + \dot{y}y^* - \dot{y}^*y)/dt = 0. \quad (16.8)$$

Подставляя в (16.8) x, y из (14.16), где

$$X = A\Omega_1^{-1/2} \exp\left(i \int^t \Omega_1(t) dt\right),$$

$$Y = B\Omega_2^{-1/2} \exp\left(i \int^t \Omega_2(t) dt\right),$$

получаем закон сохранения (16.3).

Теперь естественно возникает вопрос, нельзя ли воспользоваться законами сохранения для сшивки асимптотических решений, поскольку, они следуют сразу, как только записаны дифференциальные уравнения. Мы покажем ниже, что это не только возможно, но и приводит к ряду упрощений. Ограничимся для краткости только случаем двух связанных осцилляторов. Закон сохранения (16.3) накладывает ограничение унитарности на матрицу перехода. В соответствии с формулами (15.8) имеем

$$M = \begin{pmatrix} \beta & (1 + \alpha\beta)e^\delta \\ e^{-\delta} & \alpha \end{pmatrix}, \quad (16.9)$$

где α, β — неизвестные коэффициенты сшивки. Условие унитарности M означает $MM^+ = 1$, откуда следуют четыре уравнения:

$$\begin{aligned} |\beta|^2 + |1 + \alpha\beta|^2 e^{2\delta} &= 1, \\ |\alpha|^2 + e^{-2\delta} &= 1, \end{aligned} \quad (16.10)$$

$$\beta e^{-\delta} + \alpha^*(1 + \alpha\beta)e^\delta = 0,$$

$$\beta^* e^{-\delta} + \alpha(1 + \alpha^*\beta^*)e^\delta = 0.$$

Решая (16.10), получаем уже известные нам выражения

$$\alpha = -\beta^* = ie^{i\varphi}(1 - e^{-2\delta})^{1/2}. \quad (16.11)$$

Преимущества предложенного вывода заключаются в том, что мы сократили вдвое число неизвестных коэффициентов сшивки и нигде не пользовались видом предэкспоненты.

Резюмируя результаты этого параграфа, можно утверждать, что для склейки асимптотических решений во всех рассмотренных случаях достаточно написать ВКБ-решение только в нулевом приближении. Но это означает, что мы пользуемся только характеристическим уравнением системы, которое имеет тот же вид, что и в случае уравнения с постоянными коэффициентами. Приведенные выше результаты допускают обобщение и для систем более высокого порядка. Подчеркнем, что знание вида предэкспоненты необходимо для построения решений и не нужно для склейки решений.

Глава III

НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

§ 17. Введение

В этой главе рассмотрим переходы в двухуровневой квантовой системе [1] на основе адиабатической теории возмущений (см. гл. 1, § 2). В качестве примера обсудим неупругое столкновение двух атомов (столкновение второго рода), сопровождающееся переходом энергии возбуждения от одного партнера к другому. Предположим, что два электронных терма пересекаются в некоторой точке R_0 . Можно ожидать, что именно в этой точке (точке совпадения значений потенциалов $U_1 = U_2$) вероятность перехода максимальна, так как здесь переход мог бы осуществиться классическим образом.

Выделим из системы (2.4) два уравнения, для которых предполагается пересечение термов, и представим их в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\hbar^2/2M) u_1'' + (E + F_1 x) u_1 + a u_2 &= 0, \\ (\hbar^2/2M) u_2'' + (E + F_2 x) u_2 + a u_1 &= 0. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Здесь a — матричный элемент взаимодействия, F_1 и F_2 — силы в точке $x = 0$ пересечения термов; E — энергия, отсчитываемая от этой точки.

В настоящее время мы не располагаем общим решением системы (17.1). Решение найдено только для частного случая, когда точка пересечения термов и точки поворота находятся достаточно далеко друг от друга [2]. Для медленных атомных столкновений такое условие является неудовлетворительным [3], и потому представляет интерес приближенный метод решения системы (17.1), именуемый классическим или полуклассическим приближением [4]. Сущность этого метода состоит в том, что движение ядер рассматривается классически и вводится некоторая средняя траектория, параметры которой соответствуют некоторым средним характеристикам электронных термов. Полуклассическое приближение является весьма интересным методом решения рассматриваемой задачи, поскольку при определенных граничных условиях и постоянном матричном элементе взаимодействия показана полная эквивалентность полуклассического и квантовомеханического методов расчета [4].

Системе связанных волновых уравнений Шредингера можно поставить в соответствие систему связанных осцилляторов с частотами, зависящими от времени,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_1^2(t) a_1 &= \alpha a_2, \\ \ddot{a}_2 + \omega_2^2(t) a_2 &= \alpha a_1. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Энергии E отвечает некоторое общее для обоих осцилляторов среднее значение частоты. Системы (17.1) и (17.2) совпадают с точностью до переобозначений, и вся излагаемая ниже теория могла бы быть продемонстрирована на системе связанных осцилляторов. Но исторически сложилось так, что все основные результаты были получены в квантовой механике. Здесь же была дана довольно простая и наглядная трактовка основных положений теории в терминах полуклассического приближения. Поэтому мы считаем целесообразным остановиться именно на квантовомеханической задаче как наиболее удобной форме изложения общей теории неадиабатических переходов.

Впервые аналитическое выражение для вероятности такого перехода было получено Ландау [5, 6]. В своих работах он рассмотрел предельный случай

слабой связи. Зинером [7] и Штюкельбергом [2] на основе полуклассического приближения был рассмотрен предельный случай сильной связи. Основной результат для вероятности перехода носит название формулы Ландау — Зинера.

В последнее время авторы ряда работ (см., например, [3, 8]) пытались расширить область применимости формулы Ландау — Зинера, ограниченную при первоначальной ее формулировке. Кроме того, имеется большое количество конкретных элементарных процессов, сечения которых рассчитаны с помощью теории неадиабатических переходов. Опубликованная недавно монография [9] дает полное представление о состоянии данного вопроса в настоящее время.

В настоящей главе нас будет интересовать только методическая часть, которая, как отмечено выше, представляет не меньший интерес, например, для задачи о связанных осцилляторах.

§ 18. Полуклассическое приближение

Рассмотрим медленное движение ядер как классическое, а электронное движение так, как это принято в квантовой механике. Тогда в нестационарном волновом уравнении Шредингера

$$i\hbar\partial\Psi(r, t)/\partial t = \widehat{H}_e(r, R(t))\Psi(r, t) \quad (18.1)$$

гамильтониан оказывается зависящим от времени, что обусловлено временной зависимостью ядерных координат $R(t)$. Переменная r обозначает совокупность координат электронов. Решение уравнения (18.1) ищется в виде так называемой неадиабатической функции

$$\Psi(r, t) = \sum_n b_n(t) \exp\left[-(i/\hbar) \int H_{nn}(R) dt\right] \varphi_n(r, R). \quad (18.2)$$

Здесь H_{nn} — диагональные элементы гамильтониана $\widehat{H}_e(r, R(t))$ в базисе адиабатических функций φ_n , являющихся собственными функциями оператора $\widehat{H}_e(r, R)$:

$$\widehat{H}_e(r, R)\varphi_n(r, R) = U_n\varphi_n(r, R), \quad (18.3)$$

где время фигурирует только в виде параметра. Подставляя неадиабатическую функцию (18.2) в нестационарное уравнение (18.1), получим следующую систему уравнений для коэффициентов:

$$i\hbar \dot{b}_n = \sum_n [H_{nm} - i\hbar (\partial/\partial t)_{nm}] \times \\ \times \exp \left[- (i/\hbar) \int^t (H_{mm} - H_{nn}) dt \right] \cdot b_m. \quad (18.4)$$

В дальнейшем мы ограничимся приближением двух состояний, когда учитывается неадиабатическая связь только между двумя электронными термами. Тогда неадиабатическая функция аппроксимируется выражением вида

$$\Psi(r, t) = a_1(t) \exp \left[- (i/\hbar) \int^t U_1(R) dt \right] \varphi_1(r, R) + \\ + a_2(t) \exp \left[- (i/\hbar) \int^t U_2(R) dt \right] \varphi_2(r, R), \quad (18.5)$$

где $\varphi_{1,2}$ — адиабатические электронные функции.

Далее нас будут интересовать переходы между состояниями дискретного спектра. Определяющую роль для вероятности перехода играет точка, в которой процесс мог бы осуществиться классическим образом. Условие классической осуществимости перехода требует равенства потенциальных энергий.

Если между состояниями системы есть переходы, то пересечение уровней исчезает. В самом деле, предположим, что полный адиабатический гамильтониан \hat{H}_e можно представить в виде некоторого нулевого гамильтониана и небольшого возмущения $\hat{H}_e = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Кроме того, допустим, что термы нулевого гамильтониана $U_{1,2}^0$ пересекаются в некоторой точке R_0 . Матрица гамильтониана H_e в базисе функций φ_1^0 и φ_2^0 имеет вид

$$\begin{pmatrix} H_{11}(R) & H_{12}(R) \\ H_{21}(R) & H_{22}(R) \end{pmatrix}, \quad (18.6)$$

а ее собственные значения

$$U_{1,2} = \bar{U}(R) \pm \Delta U(R), \quad (18.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(R) &= (1/2)(H_{11} - H_{22}), \quad \Delta U(R) = \\ &= (1/2)[(H_{11} - H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Разность адиабатических энергий $\Delta U(R)$ определяется величиной радикала в (18.7). Так что минимальное расстояние между уровнями

$$\Delta U_{\min} = 2|H_{12}(R_0)|. \quad (18.8)$$

Таким образом, если между состояниями дискретного спектра возможны переходы ($H_{12} \neq 0$), то термы, соответствующие этим состояниям, не пересекаются. Тем не менее мы сохраним термин «пересечение термов» (так как это принято в квантовой механике), хотя в действительности можно говорить только о точке наибольшего сближения термов. Вблизи этой точки можно разложить $U_1 - U_2$ по степеням малой разности $x = R - R_0$, написав

$$U_1 - U_2 = x(F_2 - F_1), \quad F = -(\partial U / \partial R)_{R_0}. \quad (18.9)$$

Тогда
$$\Delta U = [(F_2 - F_1)^2 x^2 + 4H_{12}^2(R_0)]^{1/2}. \quad (18.10)$$

Для справедливости приведенных формул необходима малость ΔU_{\min} по сравнению с расстоянием до других термов.

§ 19. Связь полуклассического решения с точным

Предположим, что в точке пересечения термы имеют наклон одного знака ($F_1 F_2 > 0$) [4]. Обратимся к системе связанных волновых уравнений Шредингера с пересекающимися термами:

$$\begin{aligned} (\hbar^2/2M) u_1'' + (E + F_1 x) u_1 + a u_2 &= 0, \\ (\hbar^2/2M) u_2'' + (E + F_2 x) u_2 + a u_1 &= 0. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Здесь a — матричный элемент взаимодействия; $E = Mv^2/2$ — энергия, отсчитываемая от точки $x = 0$, в которой пересекаются термы нулевого приближения. Введем еще ряд обозначений:

$$\Delta F = F_2 - F_1, \quad F = (F_1 F_2)^{1/2}, \quad E' = 2ME/\hbar^2$$

$$a' = 2Ma/\hbar^2, \quad F'_n = 2MF_n/\hbar^2 \quad (n = 1, 2), \quad (19.2)$$

$$\Delta F' = F'_2 - F'_1, \quad F' = (F'_1 F'_2)^{1/2}.$$

Величина F является действительной, поскольку в точке пересечения термы имеют наклон одного знака.

Решение системы (19.1) ищем в виде следующего контурного интеграла:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_l \exp \left[ikx - i \frac{(F'_1 + F'_2)}{2F'_1 F'_2} \left(\frac{k^3}{3} - E'k \right) \right] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{F'_n}} \varphi_n(k) dk, \quad (19.3)$$

где l — контур, на концах которого подынтегральное выражение обращается в нуль. Для функций $\varphi_n(k)$ получаются уравнения

$$i\partial\varphi_1/\partial k = [\Delta F'/2(F')^2](k^2 - E')\varphi_1 - a'\varphi_2/F', \quad (19.4)$$

$$i\partial\varphi_2/\partial k = [\Delta F'/2(F')^2](k^2 - E')\varphi_2 - a'\varphi_1/F'.$$

Адиабатическое приближение для функций φ_n получается из этой системы при диагонализации правой части (19.4). В этом приближении переходы между состояниями отсутствуют, а движение ядер происходит по искаженным термам.

Вводя новую функцию и аргумент

$$A_n = \varphi_n \exp [\pm (i/2)(F')^{-2} \cdot \Delta F' \cdot (k^3/3 - E'k)], \quad t = \hbar k/F, \quad (19.5)$$

находим из (19.4) следующую систему уравнений, совпадающую с уравнениями классического приближения:

$$i\dot{A}_1 = -(a/\hbar) \exp \left[i \int \frac{\Delta F \cdot x(t)}{\hbar} dt \right] A_2, \quad (19.6)$$

$$i\dot{A}_2 = (a/\hbar) \exp \left[i \int \frac{\Delta F \cdot x(t)}{\hbar} dt \right] A_1,$$

$$x(t) = Ft^2/2M - Mv^2/2F. \quad (19.7)$$

Смещая начало отсчета времени, представим траекторию (19.7) в форме $x(t) = vt + Ft^2/2M$. Нетрудно видеть, что второе слагаемое есть не что иное, как ре-

зультат ускорения изображающей точки при прохождении области сильного неадиабатического взаимодействия.

Решая систему (19.4) без учета взаимодействия, можно получить главные члены асимптотического разложения φ_n

$$\varphi_{1,2} \sim c_{1,2} \exp [\mp i(F')^{-2} \Delta F' (k^3/3 - E'k)]. \quad (19.8)$$

Пусть $c_{1,2}^+$ — значения констант при $k \rightarrow \infty$ и $c_{1,2}^-$ — их значения при $k \rightarrow -\infty$. Подстановка (19.8) в (19.3) и исследование асимптотического поведения $u_n(x)$ при $x \rightarrow \infty$ показывает, что экспоненциальное убывание $u_n(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ получается только в том случае, если в качестве контура l выбрать прямую, параллельную реальной оси и сдвинутую в нижнюю полуплоскость k . Тогда при $x \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение $u_n(x)$ определится двумя точками перевала $k_0 \pm \pm (F'_n x + E')^{1/2}$ в (19.3). При $x \rightarrow \infty$ получаем $|k_0| \rightarrow \infty$. Это оправдывает использование асимптотик (19.8) вместо точных функций $\varphi_n(k)$. Вычисление (19.3) при $x \rightarrow \infty$ дает

$$u_n(x) \sim ic_n^+ (F'_n x)^{-1/4} \cdot \exp [(2i/3) (F'_n)^{1/2} x^{3/2} + i\pi/4] + \\ + ic_n^- (F'_n x)^{-1/4} \cdot \exp [-(2i/3) (F'_n)^{1/2} x^{3/2} - i\pi/4], \\ n = 1, 2. \quad (19.9)$$

Зададимся граничными условиями, положив $c_2^- = 0$, $|c_1^-| = 1$. Из асимптотики (19.8) видно, что $|c_n^\mp| = |\varphi_n(\mp\infty)|$, т. е. $|c_n^\mp|^2 = |A_i(\mp\infty)|^2$. Таким образом, система волновых уравнений (19.1) с указанными выше граничными условиями полностью эквивалентна системе (19.6) с начальными условиями $A_2(-\infty) = 0$ и $|A_1(-\infty)| = 1$, которые определяют задачу о нахождении вероятности неадиабатического перехода $P_{1,2} = |A^2(+\infty)|^2$ в полуклассическом приближении.

§ 20. Взаимодействие волн как возмущение

В настоящем параграфе рассчитывается вероятность неадиабатического перехода для системы двух атомов в том случае, когда расщепление термов мало и им

можно пренебречь [3]. Для этого необходимо, чтобы разность эффективных сил, действующих на ядра, была мала по сравнению с самими силами ($\Delta F \ll F$). Предположим, что переход происходит вблизи точки поворота, так что, используя полуклассическое приближение, траекторию ядер определим из условия (19.7).

Воспользуемся методом теории нестационарных возмущений [10]. Вероятность перехода в первом приближении

$$P_{1,2} = (1/\hbar^2) \left| \int_{-\infty}^{\infty} a \exp \left[(i/\hbar) \int^t (U_1 - U_2) dt_1 \right] dt \right|^2, \quad (20.1)$$

где U_1 и U_2 — пересекающиеся термы. Если положить $U_1 - U_2 = \Delta F \cdot x$, то интеграл (20.1) с учетом (19.7) можно выразить через функцию Эйри. Опуская несложные выкладки и вводя удобные безразмерные параметры $b = 4a(aM)^{1/2}\hbar(\Delta F \cdot F)^{1/2}$ и $\varepsilon = Mv^2/\Delta F/4aF$, получим

$$P_{1,2} = \pi b^{4/3} \Phi^2(-\varepsilon b^{2/3}), \quad (20.2)$$

где Φ — функция Эйри. Требование слабости волнового взаимодействия выражается в виде условия $b \ll 1$. В предельных случаях больших отрицательных и положительных аргументов функции Эйри выражение (20.2) дает

$$P_{1,2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{4\pi a^2}{\hbar v \Delta F}, & \varepsilon b^{2/3} \gg 1, \\ \frac{\pi}{4} \frac{b}{\sqrt{|\varepsilon|}} \exp \left[-\frac{4}{3} b |\varepsilon|^{3/2} \right], & \varepsilon b^{2/3} \ll 1, \end{cases} \quad (20.3)$$

причем в первом из этих равенств проведено усреднение быстро осциллирующей вероятности по малому интервалу энергии. Противоположное условие $|\varepsilon b^{2/3}| \ll 1$ отвечает случаю сближения точки пересечения и точки поворота. При этом $\Phi^2(-\varepsilon b^{2/3}) \sim 1$ и вероятность перехода оказывается порядка $\pi b^{4/3}$.

§ 21. Формула Ландау — Зинера [10]

Обсуждаемая в настоящем параграфе модель неадиабатической связи двух состояний была первой попыткой описать неадиабатическое взаимодействие в

небольшой области межатомных расстояний вблизи квазипересечения или пересечения термов. Рассмотрим эту широко используемую модель на основе полуклассического приближения.

В окрестности точки пересечения термов скорости ядер будем считать постоянными. Иными словами, предполагается, что в интервале сильной связи воли энергия ядер меняется незначительно:

$$mv^2/2 \gg F_n \delta R. \quad (21.1)$$

Уравнения (19.6) будем решать, выбрав в качестве граничных условий $A_1(-\infty) = 1$, $A_2(-\infty) = 0$. Тогда $A_2(\infty)$ определит вероятность перехода из одного состояния в другое после прохождения зоны неадиабатического взаимодействия. Если же эта зона проходит дважды, то переход осуществится с вероятностью

$$W = 2|A_2(\infty)|^2[1 - |A_2(\infty)|^2]. \quad (21.2)$$

При этом мы предполагаем, что области неадиабатичности находятся друг от друга на достаточно большом расстоянии, так что их взаимным влиянием — интерференцией — можно пренебречь. Указанное условие вместе с условием (21.1) представляется в виде

$$S_n = (1/\hbar) \int \left\{ 2M \left[\frac{Mv^2}{2} - U_n(R) \right] \right\}^{1/2} dR \gg 1, \\ \Delta S = |S_1 - S_2| \gg 1. \quad (21.3)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае кривые $U_1(t)$ и $U_2(t)$ пересекаются в мнимых точках

$$t_0^{(\pm)} = (\pm i) \cdot 2 |H_{12}| / |F_2 - F_1| v. \quad (21.4)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях t коэффициент $A_1(t)$ имеет «квазиклассический по времени» вид

$$A_1(t) = \exp \left[- (i/\hbar) \int_{-\infty}^t U_1(t) dt \right]. \quad (21.5)$$

Перейдем с левой вещественной полуоси в плоскости комплексного переменного t на правую полуось по контуру, на котором условие квазиклассичности выполняется везде. Поскольку $U_1 < U_2$, переход должен совер-

шаться в верхней полуплоскости (с обходом точки t_0^+). После обхода $A_1(t)$ перейдет в $A_2(t)$, причем:

$$|A_2(\infty)|^2 = \exp \left[- (2/\hbar) \operatorname{Im} \int_{t_1}^{t_0} \Delta U dt \right], \quad (21.6)$$

где в качестве t_1 можно выбрать любую точку на вещественной оси, например $t_1 = 0$. Учитывая (21.1), согласно (18.10), имеем

$$\Delta U = [(F_1 - F_2)(vt)^2 - 4H_{12}^2]^{1/2}. \quad (21.7)$$

Заменяя ΔU в показателе экспоненты в (21.6) его выражением (21.7) и интегрируя, окончательно получим формулу Ландау — Зинера

$$W = 2 \exp(-2\pi\delta) [1 - \exp(-2\pi\delta)], \\ \delta = H_{12}^2 / \hbar v |F_2 - F_1|. \quad (21.8)$$

Вероятность перехода становится малой как при больших, так и при малых δ . В пределе малых δ вместо (21.8) имеем

$$W = 4\pi H_{12}^2 / \hbar v |F_2 - F_1|. \quad (21.9)$$

Из (21.9) видно, что характерное время нахождения атомов в зоне сильного неадиабатического взаимодействия пропорционально $|H_{12}|/|\Delta F|v$, а размер неадиабатической зоны — $H_{12}/\Delta F$. Учитывая это, представим в переменных ε , b условие большой разности фаз и условие отсутствия интерференции амплитуд вероятности (21.3) в следующем виде:

$$S = b\varepsilon^{2/3} \gg 1, \quad \varepsilon \gg 1. \quad (21.10)$$

Эти условия определяют область применимости формулы Ландау — Зинера. Заметим, что формула применима и в тех случаях, когда условие квазиклассичности может быть нарушено.

§ 22. Сильное взаимодействие [3]

Для определения вероятности перехода при $b \gg 1$ (большое расщепление) необходимо в нулевом приближении исходить из адиабатических функций Ψ_n , найденных с учетом расщепления. Эти функции выражаются в виде линейных комбинаций невозмущенных

функций φ_n . Диагонализируя матрицу (18.6), находим адиабатические функции точного гамильтониана

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= [\varphi_1 \cos \chi + \varphi_2 \sin \chi] \exp \left[-(i/\hbar) \int E_1 dt \right], \\ \Psi_2 &= [-\varphi_1 \sin \chi + \varphi_2 \cos \chi] \exp \left[-(i/\hbar) \int E_2 dt \right], \\ \chi &= (1/2) \operatorname{arctg} (2/y), \quad y = \Delta Fx/a, \end{aligned} \quad (22.1)$$

где E_1 и E_2 — термы с учетом расщепления. Неадиабатическая функция ищется в виде $A_1(t)\Psi_1 + A_2(t)\Psi_2$. Решение в первом приближении с начальными условиями $A_1(-\infty) = 1$, $A_2(-\infty) = 0$ представляется как

$$c_2(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\chi} \exp \left[(i/\hbar) \int (E_1 - E_2) dt \right] dt. \quad (22.2)$$

Подставляя сюда $E_1 - E_2 = [4a^2 - (\Delta Fx)^2]^{1/2}$ и заменяя переменную интегрирования, получаем

$$c_2(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{1 + (\xi^2 - \varepsilon)^2} \exp \left(ib \int_0^z \sqrt{1 + (z^2 - \varepsilon)^2} dz \right) d\xi \quad (22.3)$$

Для приближенного расчета этого интеграла [10] сместим путь интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной до ближайшей особой точки подынтегрального выражения ξ_0 . В результате приходим к следующему выражению для вероятности перехода:

$$P_{1,2} = B \exp \left\{ 2 \operatorname{Re} ib \int_0^{\xi_0} [1 + (z^2 - \varepsilon)^2]^{1/2} dz \right\}. \quad (22.4)$$

Интеграл (22.4) может быть выражен через полные эллиптические интегралы от комплексного модуля, что дает возможность точно вычислить его величину. Предэкспоненциальный фактор B , слабо зависящий от ε , может быть найден в результате решения системы (19.4) вблизи нулей подынтегральной функции (22.4). В рассматриваемом случае таких точек четыре и они расположены симметрично относительно действительной и мнимой оси z .

Рассмотрим предельный случай, когда можно учитывать только одну пару точек ветвления $\varepsilon \ll -1$,

$|\varepsilon|^{1/2} b^{1/3} \gg 1$ [4]. Вблизи $k = \sqrt{E}$ величину $k_2 - E$ можно представить в виде $2\sqrt{E}(k - \sqrt{E})$. Вводя новую переменную $\eta = k - \sqrt{E}$, перепишем уравнения (19.4) следующим образом

$$id\varphi_1/d\eta = \alpha\eta\varphi_1 - \beta\varphi_2, \quad (22.5)$$

$$id\varphi_2/d\eta = -\alpha\eta\varphi_2 - \beta\varphi_1,$$

где $\alpha = \Delta FE^{1/2}/F^2$, $\beta = a/F$. Исключая φ_2 , сведем систему (22.5) к одному уравнению

$$d^2\varphi_1/d\eta^2 + (\beta^2 - \alpha - \alpha^2\eta^2)\varphi_1 = 0. \quad (22.6)$$

Замена $\xi = \eta(2\alpha)^{1/2}$ приводит к известному уравнению Вебера

$$d^2\varphi_1/d\xi^2 + [\beta_2/2\alpha - 1/2 - \xi^2/4]\varphi_1 = 0. \quad (22.7)$$

В гл. II мы уже сталкивались с таким уравнением в задаче о прохождении параболического слоя (см. § 11).

Предэкспоненциальный фактор, полученный в задаче о прохождении параболического слоя, соответствует фактору B в рассматриваемой задаче. В переменных ε , b он представляется в виде

$$B = 2\pi\delta[\Gamma(1-\delta)]^{-2}\delta^{-2\delta} \cdot \exp(2\delta), \quad \delta = b/8\varepsilon^{1/2}. \quad (22.8)$$

После преобразования Γ -функции по формуле $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ придем к следующему выражению для B :

$$B = 2\pi^{-1}\delta \cdot \sin^2(\pi\delta)\Gamma^2(\delta) \cdot \delta^{-2\delta} \cdot \exp(2\delta). \quad (22.9)$$

При $\delta \ll 1$ находим $B = 2\pi\delta$, что соответствует результату, полученному по теории возмущений (см. § 19). При $\delta \gg 1$ можно провести усреднение по осцилляциям, при этом $B = 2$ в соответствии с формулой Ландау — Зинера.

§ 23. Термы разного наклона

Рассмотрим ситуацию, когда наклоны термов имеют разные знаки ($F_1 F_2 < 0$) [8]. Результаты, относящиеся к данному случаю, мы изложим более кратко, останавливаясь лишь на основных соотношениях.

Система, аналогичная (19.4), неэрмитова в отличие от случая $F_1 F_2 > 0$, поэтому классическую траекторию ввести нельзя. Если в случае $F_1 F_2 > 0$ инвариантным являлось соотношение (см. § 16)

$$|A_1(k)|^2 + |A_2(k)|^2 = \text{const}, \quad (23.1)$$

то теперь, когда $F_1 F_2 < 0$,

$$|A_1(k)|^2 - |A_2(k)|^2 = \text{const}. \quad (23.2)$$

Рассуждением, аналогичным предыдущему, связывающим асимптотики $u_n(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ с асимптотиками $A_n(k)$ при $|k| \rightarrow \infty$, получим для коэффициента отражения Q и прохождения P выражения

$$Q = |A_1(\infty)|^{-2}, \quad P = |A_2(\infty)/A_1(\infty)|^2. \quad (23.3)$$

Если $k \rightarrow -\infty$, имеем $A_1(-\infty) = 1$, $A_2(-\infty) = 0$. Как и $P_{1,2}$ в предыдущей задаче, Q и P зависят только от двух параметров ε и b . Найдем вероятности отражения и прохождения для двух случаев: больших энергий ($\varepsilon \gg 1$) (надбарьерное отражение) и очень малых ($\varepsilon \ll -1$) (подбарьерное прохождение).

При $\varepsilon \gg 1$ для определения коэффициентов отражения и прохождения существенны две области вблизи $k = \pm E^{1/2}$. Решая систему (19.4) точно в окрестности этих точек, получим

$$P = (1 + \cos \varphi)/(1 + d + \cos \varphi), \quad Q = d/(1 + d + \cos \varphi), \quad (23.4)$$

$$d = \exp(-4\pi\delta)/2[1 - \exp(-2\pi\delta)],$$

где, как и ранее, $\delta = b/8\varepsilon^{1/2}$; φ — произвольная фаза. Вблизи $\varphi = \pi(2n+1)$ имеет место резонансное отражение. При этом коэффициент отражения совпадает с известной формулой Брейта — Вигнера для рассеяния на квазистационарном состоянии [10]

$$Q = (E_0^2/4)/[(\Delta E)^2 + E_0^2/4], \quad (23.5)$$

причем ширина уровня $E_0 = \hbar|F_1 F_2| \exp(-2\pi\delta)/v\Delta F$.

Коэффициент отражения, усредненный по небольшому интервалу энергии,

$$Q = \int_0^{2\pi} Q(\varphi) d\varphi = (1/2) \exp(-2\pi\delta)/[1 - \exp(2\pi\delta)]. \quad (23.6)$$

Из формулы (23.6) видно существенное различие отражения от одноуровневого барьера и барьера с верхней адиабатической кривой. Если в первом случае $Q \rightarrow 0$ при $E \rightarrow \infty$, то здесь при $E \rightarrow \infty$ $Q \rightarrow 1$.

В случае подбарьерного прохождения ($E < -V$, где V — потенциальный барьер, образующийся в результате расщепления пересекающихся термов) экспоненциально малая вероятность прохождения находится так же, как в предыдущей задаче:

$$P = B \exp \left\{ -2 \int_{a_1}^{a_2} \left[|F| + \frac{F_1 + F_2}{2} x - \left[\left(\frac{\Delta F x}{2} \right)^2 + V^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2} dx \right\}, \quad (23.7)$$

где a_1 и a_2 — корни подинтегрального выражения. Предэкспонента B , которая в случае одной адиабатической кривой равна единице, имеет вид

$$B = 2\pi\delta^{\delta/2} \exp(-\delta)/\delta[\Gamma(\delta)]^2. \quad (23.8)$$

В случае малого расщепления между термами ($\delta \ll 1$) $B = 2\pi\delta$. При $\delta \gg 1$ получаем $B = 1$ и проникновение идет как через одноуровневый барьер. Влияние второй адиабатической кривой сказывается при $\delta \sim 1$.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ ТИПА ОРРА — ЗОММЕРФЕЛЬДА

§ 24. Введение

В ряде случаев (см., например, § 3, 4), анализируя колебания в неоднородных и слабодиссипативных средах, мы приходим к необходимости исследования дифференциальных уравнений четвертого порядка со зна-

копеременным коэффициентом при второй производной

$$\alpha\varphi^{IV} - U_2(x)\varphi'' + U_1(x)\varphi = 0. \quad (24.1)$$

Исследованию подобных уравнений посвящено довольно много работ (см., например, [1], [2]). Эти уравнения обычно имеют малый параметр перед старшей производной. Это позволяет разделить четыре линейно-независимых решения на две группы: быстро меняющиеся, при рассмотрении которых можно не учитывать члены с низшими производными, и медленно меняющиеся, получающиеся из укороченного уравнения без учета старших производных. Решения разного масштаба переходят друг в друга в особых точках укороченного уравнения. Обычно особые точки соответствуют резонансным точкам. В них, например, может совпадать скорость движения сплошной среды с фазовой скоростью волны.

Впервые исследование решений в окрестности резонансной точки было проведено Вазовым [3] на основе метода Лапласа. Заметим, что для рассматриваемых уравнений метод ВКБ, дополненный методом неопределенных множителей Цвана, позволяет получить правило квантования [4], но на основе метода ВКБ нельзя однозначно связать решения по разные стороны от резонансной точки. Более удобен метод Лапласа, позволяющий однозначно продолжить решение в резонансной зоне.

Представим уравнение четвертого порядка с линейными коэффициентами при членах с нулевой и второй производной в виде системы двух уравнений второго порядка, соответствующих связанным осцилляторам:

$$\begin{aligned} a_1'' + k_1^2 a_1 &= \alpha_1 a_2, \\ a_2'' + (k_2^2 x/L) a_2 &= \alpha_2 a_1, \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Система (24.2) аналогична системе уравнений, рассматривавшейся в предыдущей главе в связи с неадиабатическими взаимодействиями в квантовой механике. Отличие состоит в том, что в данном случае правые части имеют противоположные знаки.

Если в системе (24.2) исключить a_2 , то мы придем к уравнению четвертого порядка с линейными коэф-

фициентами

$$a_1^{IV} + (k_1^2 + xk_2^2L^{-1})a_1'' + (xk_1^2k_2^2L^{-1} + \alpha^2)a_1 = 0. \quad (24.3)$$

Это уравнение подробно исследовано в работах Ерохина и Моисеева [5]—[7] с помощью метода, предложенного Вазовым [3]. Анализируя задачу о прохождении барьера длинноволновой модой (на основе уравнения (24.3)), они обнаружили, что при определенных условиях коэффициент прохождения может достигать единицы. При этом длинноволновая мода целиком преобразуется в коротковолновую (возможен, конечно, и обратный процесс). Этот эффект был назван аномальной трансформацией.

Решение системы (24.2) можно искать методом ВКБ. Тогда для квазиклассического волнового вектора получим

$$2q_{\pm}^2 = k_1^2 + xk_2^2L^{-1} \pm [(k_1^2 - k_2^2x^2L^{-2})^2 - 4\alpha^2]^{1/2}. \quad (24.4)$$

Нетрудно видеть, что с учетом взаимодействия $\sim \alpha$, уменьшается разность $q_+^2 - q_-^2$. Это означает, что в отличие от квантовомеханического случая взаимодействие волн приводит не к расщеплению квадратов волновых векторов q_{\pm}^2 (являющихся аналогом термов), а к их сближению.

Если бы нас интересовала только задача о прохождении волны через резонансную зону, то уравнение (24.3) можно было бы решить исходя из эквивалентной системы (24.2) так же, как в предыдущей главе, понижая порядок системы с помощью преобразования Фурье. В работе [8], посвященной неадиабатическим переходам в квантовой механике, система (24.2) (при $\alpha_1 = \alpha_2$) решалась именно таким способом. Однако, используя такой метод решения, мы не получаем полной системы частных решений рассматриваемой задачи в отличие от метода Вазова, позволяющего получить полную систему частных решений. К сожалению, метод Вазова развит пока только для уравнений четвертого порядка, между тем далеко не всякую систему двух уравнений второго порядка можно свести к эквивалентному уравнению четвертого порядка.

§ 25. Правила квантования

Классическим примером уравнения со знакопеременным коэффициентом при второй производной является известное в теории гидродинамической устойчивости уравнение Орра — Зоммерфельда [9], содержащее малый параметр при четвертой производной. Нас будет интересовать в случае слабонеоднородной среды дифференциальное уравнение

$$\alpha\beta\varphi^{IV} - \beta U_2(x, k, \omega)\varphi'' + U_1(x, k, \omega)\varphi = 0, \quad (25.1)$$

где k , ω — соответственно волновой вектор и частота волны; β — малый параметр «квазиклассичности», учитывающий слабую неоднородность по x ; α — малый параметр, связанный с конкретной постановкой задачи (в уравнении Орра — Зоммерфельда, например, α пропорционально вязкости); $U_1, U_2 \sim 1$, за исключением малых областей вблизи точек, где U_1 и U_2 обращаются в нуль. Отметим, что применяемый в данном параграфе метод ВКБ нарушается не только вблизи точек, где $U_1 = 0$ (вблизи таких точек волновой вектор двух из четырех линейно-независимых решений (25.1) становится малым), но также и вблизи точек, где $U_2 = 0$. В связи с этим возникает задача при учете указанных особенностей получить правила нахождения собственных частот («правила квантования») для финитных решений (25.1).

Для удобства выберем конкретный вид U_1, U_2 (рис. 10). Решения (25.1) вдали от точек поворота A, B, O_1, O_2 отыскиваются в виде асимптотического ряда по малому параметру $\beta^{1/2}$

$$\varphi_{1,2} = \text{const} \cdot q_{1,2}^{-1/2} \cdot \exp \left[\beta^{-1/2} \int q_{1,2}(x) dx \right], \quad (25.2)$$

$$\varphi_{3,4} = \text{const} \cdot q_{3,4}^{-5/2} \cdot \exp \left[\beta^{-1/2} \int q_{3,4}(x) dx \right], \quad (25.3)$$

где ¹⁾ $q_{1,2} = \pm [U_2/2\alpha - (U_2^2/4\alpha^2 - U_1/\alpha^{1/2})^{1/2}],$ (25.4)

$$q_{3,4} = \pm [U_2/2\alpha + (U_2^2/4\alpha^2 - U_1/\alpha)^{1/2}]^{1/2}.$$

¹⁾ Выражения (25.4) для предэкспоненциальных множителей справедливы при $x > \alpha^{1/2}$.

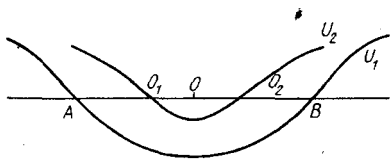


Рис. 10. Выбор формы потенциалов для уравнения Орра — Зоммерфельда.

Для получения решения вблизи точек, где $U_2 = 0$, полагаем $U_2 = Ux(U \sim 1)$, $x = \beta y$. Это приводит к уравнению

$$\alpha\beta^{-2}\varphi^{IV} - U\varphi'' + U_1\varphi = 0. \quad (25.5)$$

Нетрудно видеть, что вблизи точки, в которой $U_2 = 0$, существуют точки, где соответственно $q_1 = q_3$, $q_2 = q_4$ (точки «пересечения» решений). Вблизи указанных точек строгое разделение «нормальных» решений (25.2) и (25.3) между собой, вообще говоря, невозможно — они «трансформируются» друг в друга.

Физическая картина решения задачи существенно зависит от величины параметра α/β^2 . Если $\alpha/\beta^2 \ll 1$, то, как видно из (25.4), расстояние между точками пересечения решений мало по сравнению с длиной волны пересекающихся решений. Только этот случай исследовался при изучении пуазейлевского течения [9], а также в связи с другими физическими задачами [10]. При этом связь между решениями $\varphi_{1,2}$ и $\varphi_{3,4}$ осуществляется только в первом порядке по α/β^2 (слабая связь). Финитным решениям в рассматриваемом случае соответствуют следующие правила квантования [11]:

$$\int_{q_1}^{q_2} (U_2/\alpha\beta)^{1/2} dx = (n + 1/2)\pi, \quad (25.6)$$

$$\int_{q_2}^A (U_1/\beta U_2)^{1/2} dx = (n + 1/2)\pi.$$

Качественно новая картина возникает при $\alpha/\beta^2 \gg 1$. В этом случае вокруг каждой точки пересечения решений всегда можно выделить такую область в комплексной x -плоскости, где справедливо «квазиклассическое» приближение (25.2), (25.3) для решения (25.5). Очевидно, что вблизи указанных точек решение типа (25.2) может уже в нулевом приближении трансформироваться в решение типа (25.3) и наоборот (сильная связь).

Решения уравнения (25.5) получим, применяя метод Лапласа:

$$\varphi(y) = \int t^{-2} \exp(yt - \alpha\beta^{-2}t^3/3U + U_1/tU) dt, \quad (25.7)$$

где интеграл берется в плоскости комплексного переменного по контуру, на концах которого функция $\exp(yt - \alpha t^3/3U\beta^2 + U_1/tU)$ обращается в нуль.

Решение (25.7), как и уравнение (25.5), справедливо в области $y < \beta^{-1}$. При

$$1 < y < \beta^{-1} \quad (25.8)$$

для вычисления (25.7) можно воспользоваться методом перевала и получить следующие четыре линейно-независимые решения:

$$\begin{aligned} \varphi_i(y) \sim \pi^{1/2} y^{-1/2} (U_1/U \bar{q}_i^3 - \alpha \bar{q}_i / \beta^2 U)^{-1/2} \bar{q}_i^{-2} \times \\ \times \exp \int^y \bar{q}_i(y) dy \quad (i = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (25.9)$$

где

$$\bar{q}_{1,2} = \pm (\beta^2 U / 2\alpha)^{1/2} [y - (y^2 - 4\alpha U_1 / \beta^2 U^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (25.10)$$

$$\bar{q}_{3,4} = \pm (\beta^2 U / 2\alpha)^{1/2} [y + (y^2 - 4\alpha U_1 / \beta^2 U^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

Используя (25.10), получаем решения (25.9) в виде

$$\varphi_{1,2} \sim (q_i)^{-1/4} \exp \int^y \bar{q}_i(y) dy, \quad \varphi_{3,4} \sim (\bar{q}_i)^{-5/4} \exp \int^y q_i(y) dy, \quad (25.11)$$

которые соответственно переходят в (25.2) и (25.3). Точкам пересечения решений соответствует

$$y_0 = ia = \pm (4\alpha U_1 / \beta^2 U^2)^{1/2}. \quad (25.12)$$

Из (25.12) и (25.8) следует, что при $\alpha/\beta^2 \gg 1$, в согласии со сказанным ранее, точки y_0 всегда могут быть окружены областью, где можно воспользоваться решением (25.9), переходящим в квазиклассические решения (25.2) и (25.3). В непосредственной близости от точек y_0 контуры в плоскости t , соответствующие линейно-независимым решениям (25.5), не разделяются и необходимо дополнительное исследование характера решений в точках y_0 . Нас, однако, этот вопрос не интересует, поскольку для получения квазиклассических правил квантования достаточно знать правила обхода

точек y_0 в комплексной x -плоскости.

Воспользуемся представлением:

$$\pm [y - (y^2 + a^2)^{1/2}]^{1/2} = \begin{cases} \pm 2^{-1/2} [(y + ia)^{1/2} - \\ - (y - ia)^{1/2}], & y > 0; \\ \pm i 2^{-1/2} [(|y| + ia)^{1/2} - \\ - (|y| - ia)^{1/2}], & y < 0; \end{cases}$$

$$\pm [y + (y^2 + a^2)^{1/2}]^{1/2} = \begin{cases} \pm 2^{-1/2} [(y + ia)^{1/2} + (y - ia)^{1/2}], \\ & y > 0, \\ \pm i 2^{-1/2} [(|y| + ia)^{1/2} + \\ + (|y| - ia)^{1/2}], & y < 0. \end{cases}$$

После этого решения (25.2), (25.3) для (25.5) записываются в виде

$$\Phi_{1,2} = \begin{cases} (w_1 - w_2)^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^y (w_1(y) - w_2(y)) dy \right\} (y > 0), \\ (w_1 - w_2)^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int^y (w_1(|y|) - w_2(|y|)) dy \right\} (y < 0); \end{cases} \quad (25.13)$$

$$\Phi_{3,4} = \begin{cases} (w_1 + w_2)^{-5/2} \exp \left\{ \pm \int^y (w_1(y) + w_2(y)) dy \right\} (y > 0), \\ (w_1 + w_2)^{-5/2} \exp \left\{ \pm i \int^y (w_1(|y|) + w_2(|y|)) dy \right\} (y < 0), \end{cases}$$

где

$$w_1 = [\beta^2 U(y - ia)/2\alpha]^{1/2}, \quad w_2 = [\beta^2 U(y + ia)/2\alpha]^{1/2}.$$

Пользуясь формулами (25.13), можно построить картину линий уровня w_1 , w_2 для каждой из точек пересечения решений отдельно (рис. 11)²⁾. Правила сшивания решений (25.13) вблизи точки O_1 получим следующим образом. Из (25.13) видно, что можно обходить отдельно в комплексной y -плоскости вокруг точек $a_1 = ia$ и $a_2 = -ia$. Пары решений (φ_1, φ_4) и (φ_2, φ_3) при обходе вокруг a_1 и пары (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4)

²⁾ Смысл всех обозначений и букв, не оговариваемых в тексте, ясен из рис. 11.

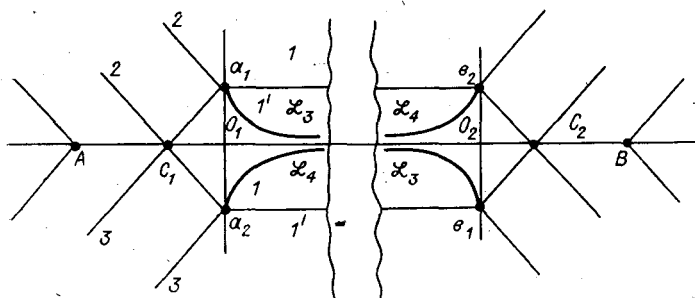


Рис. 11. Линии уровня для уравнения Орре — Зоммерфельда.

при обходе вокруг a_2 ведут себя независимо. Обозначим через A_i, B_i, C_i, D_i систему коэффициентов решения при $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ соответственно вблизи линий с номером i , выходящих из точек a_1, a_2 . Пользуясь при обходе вокруг каждой точки в отдельности правилами, описанными в гл. II [12], получаем после одновременного обхода a_1, a_2

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A_1 + iD_1, B_2 = B_1 + iD_1, \\
 C_2 &= iA_1 + iB_1 + C_1 - D_1, D_2 = D_1, \\
 A_3 &= A_2 + iC_2, B_3 = B_2 + iC_2, C_3 = C_2, \\
 D_3 &= iA_2 + iB_2 - C_2 + D_2, \\
 A'_1 &= A_3 + iD_3, B'_1 = B_3 + iD_3, \\
 C'_1 &= iA_3 + iB_3 + C_3 - D_3, D'_1 = D_3, \\
 A'_1 &= -B_1, B'_1 = -A_1, C'_1 = -D_1, D'_1 = -C_1.
 \end{aligned} \tag{25.14}$$

Слева от точки A запишем произвольное решение, обращаемое на $-\infty$ в нуль:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= |w_1 - w_2|^{-1/2} \exp \left\{ -i \int_A^y w_1(y) dy + i \int_A^y w_2(y) dy \right\} + \\
 &+ D |w_1 + w_2|^{-5/2} \exp \left\{ \int_A^y w_1(y) dy + \int_A^y w_2(y) dy \right\}. \tag{25.15}
 \end{aligned}$$

Используя (25.13)–(25.15) и требуя финитность решения на $+\infty$ получаем следующие правила кван-

тования:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 &= (n + 1/2)\pi, & \Phi_1 &= i \int_{\mathcal{L}_1} p_1 dz - i \int_{\mathcal{L}_2} p_2 dz, \\ \Phi_2 &= \int_{\mathcal{L}_3} p_1 dz + \int_{\mathcal{L}_4} p_2 dz, & \Phi_3 &= -i \int_{\mathcal{L}'_1} p_1 dz + j \int_{\mathcal{L}'_2} p_2 dz, \end{aligned} \quad (25.16)$$

$$\text{где } p_1 = \sqrt{(\beta^2/2\alpha)(U_2 - \sqrt{4\alpha U_1/\beta^2})}, \quad p_2 = \sqrt{(\beta^2/2\alpha) \times \overrightarrow{\times (U_2 + \sqrt{4\alpha U_1/\beta^2})}}.$$

Здесь контуры $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ начинаются из точки A , идут вдоль действительной оси и заканчиваются: контур \mathcal{L}_1 в точке a_1 , а \mathcal{L}_2 — в точке a_2 . Контуры $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$ начинаются соответственно в точках a_1, a_2 , затем спускаются на действительную ось, идут вдоль нее и заканчиваются соответственно в точках b_1, b_2 . Контуры $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ аналогичны контурам $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ с заменой a_1, a_2 на b_1, b_2 и A на B . Выражения для p_1, p_2 вблизи O_1, O_2 переходят соответственно в w_1, w_2 .

Нетрудно убедиться в том, что определенные в (25.18) величины Φ_1, Φ_2, Φ_3 чисто действительные. Рассмотрим, например, Φ_2 . На действительной оси, где

контуры \mathcal{L}_3 и \mathcal{L}_4 совпадают, интеграл $\int_{O_1}^{O_2} (p_2 + p_2) dy$ чисто действительный. Кроме того,

$$\int_{a_2}^{O_2} (z + ia)^{1/2} dz = (ia)^{3/2}, \quad \int_{a_1}^{O_1} (z - ia)^{1/2} dz = (-ia)^{3/2},$$

откуда сразу следует высказанное утверждение.

§ 26. Задача о прохождении

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о прохождении волны через резонансную зону на примере уравнения Орра — Зоммерфельда (см. гл. I, § 4)

$$iv\Delta^2\varphi + [\omega - kv_0(x)]\Delta\varphi + kv_0''\varphi = 0, \quad (26.1)$$

где $\Delta = d^2/dx^2 - k^2$.

В § 25 для получения правил квантования использован метод фазовых интегралов, дополненный методом неопределенных множителей Цвана. Однако, как уже отмечалось выше, такой подход не всегда позволяет однозначно продолжить решение в окрестности резонансной точки. Именно так обстоит дело в задаче о прохождении волны через зону взаимодействия. Более удобен метод, предложенный Вазовым, который основан на преобразовании Лапласа [3]. Изложим этот метод, следуя А. В. Тимофееву [13]. В окрестности резонансной точки уравнение (26.1) принимает вид:

$$\Lambda^{-1}\varphi^{IV} + z\varphi'' + \varphi = 0, \quad (26.2)$$

$$\text{где } z = (x_s - x)v_0''/v_0', \quad \Lambda = ik(v_0')^4/v(v_0'')^3.$$

Используя преобразование Лапласа, представим решение уравнения (26.2) в виде

$$\varphi = \int dt \exp(tz) W(t). \quad (26.3)$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение (26.2), получим $W(t) = t^{-2} \exp(t^3/3\Lambda - 1/t)$.

Достаточно далеко от особой точки, в области, где выполнены условия

$$\Lambda \gg \max\{|z|^{-3}, |z|^{-1}\}, \quad (26.4)$$

получаем асимптотические решения двух типов (быстро и медленно меняющиеся)

$$\varphi^+ = \int t^{-2} \exp(t^2/3\Lambda + tz) dt, \quad (26.5)$$

$$\varphi^- = \int t^{-2} \exp(-1/t + tz) dt. \quad (26.6)$$

Контуры интегрирования выбираются из условия обращения в нуль либо совпадения значений на его концах присоединенной билинейной формы $t^2 W(t) \exp(tz)$ [17]. Соответствующие контуры интегрирования изображены на рис. 12. На этом рисунке заштрихованы секторы, в которых величина $\text{Re}(t^3/3\Lambda)$ положительна.

Рис. 12 приведен для случая, когда $\arg \Lambda = 0$. При $\arg \Lambda \neq 0$ вся картина должна быть повернута на угол $\arg \Lambda/3$. Учитывая, что каждому контуру соответствует свое решение, мы получаем таким образом всего семь

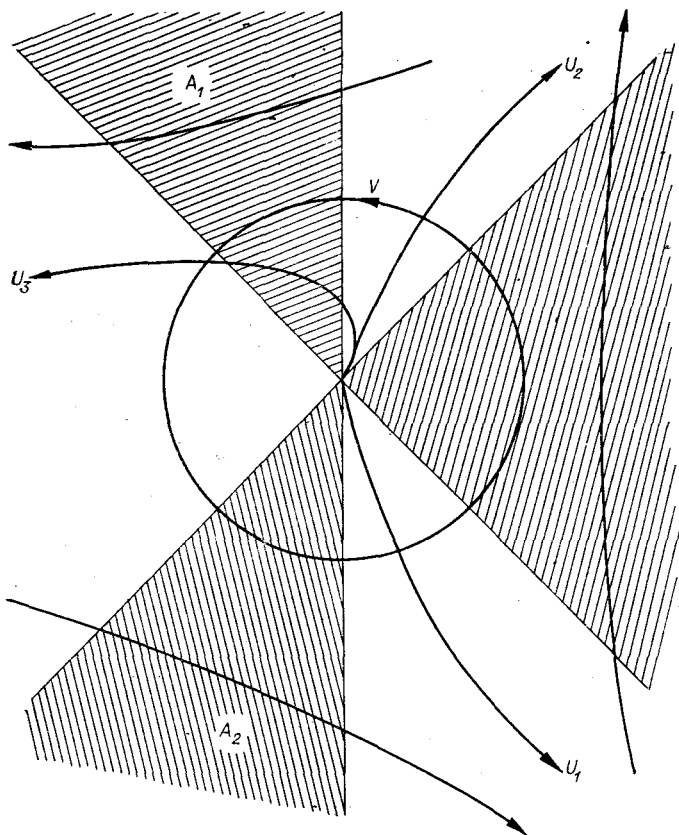


Рис. 12. Контуры интегрирования в (26.3) при $\arg \Lambda = 0$.

частных решений уравнения (26.2). Обозначим их через V, A_k, U_k ($k = 1, 2, 3$). Конечно, только четыре из них являются линейно-независимыми. Согласно теореме Коши (о том, что интеграл по замкнутому контуру от регулярной функции равен нулю [17]), непосредственно из рисунка легко установить три недостающие связи между решениями:

$$A_1 + A_2 + A_3 = V, \quad U_3 - U_2 = A_1, \quad U_1 - U_3 = A_2 - V. \quad (26.7)$$

Медленно меняющаяся функция V , определяемая интегралом (26.6) по замкнутому контуру, выражается через функцию Бесселя

$$V = 2\pi iz^{1/2} I_1(2z^{1/2}). \quad (26.8)$$

Эта функция неоднозначна. Многозначность проистекает от наличия в ее выражении радикала $z^{1/2}$. Если в комплексной плоскости z провести разрез, запрещающий обход точки ветвления $z = 0$, то функция V становится однозначной. При $|z| \gg 1$ она имеет следующие асимптотические представления [15]:

$$V = \pi^{1/2} z^{1/4} [\exp(2iz^{1/2} - i\pi/4) - \exp(-2iz^{1/2} + i\pi/4)], \quad -2\pi < \arg z < 2\pi, \quad (26.9)$$

$$V = \pi^{1/2} z^{1/4} [-\exp(2iz^{1/2} - i\pi/4) - \exp(2iz^{1/2} + i\pi/4)], \quad 0 < \arg z < 4\pi. \quad (26.10)$$

Нетрудно убедиться, что значения функции V при $\arg z = \varphi$ и $\arg z = \varphi + 2\pi$ совпадают и различаются лишь ее представления. Заметим, что в секторе $0 < \arg z < 2\pi$, где применимы оба выражения (26.9), (26.10), они различаются на экспоненциально малую величину, которая не превосходит ошибки, допускаемой асимптотическим представлением. Мы будем использовать (26.9) при $0 \leq \arg z \leq \pi$ и (26.10) при $\pi \leq \arg z < 2\pi$. Разрез проведем при $\arg z = 2\pi - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, на рис. 13 он изображен волнистой линией.

Быстро меняющиеся функции A_k (26.5) определяются методом перевала. На контуры A_3 и A_1 при $0 < \arg z < 2\pi$ попадает одна

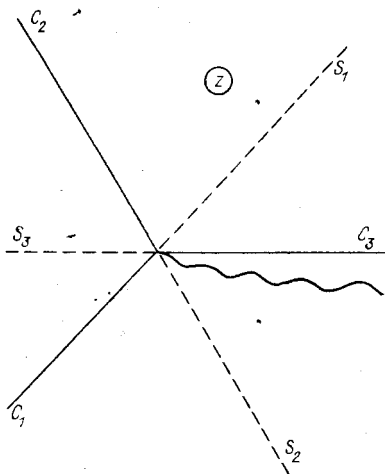


Рис. 13. Плоскость комплексного переменного z для уравнения (26.2) при $\arg \Lambda = 0$, C_k — линии действительной фазы для быстроосциллирующих решений A_k .

перевальная точка $t_c = -i(\Lambda z)^{1/2}$. На контур $A_2(2\pi/3 < \arg z < 8\pi/3)$ также попадает лишь одна перевальная точка $t_c = i(\Lambda z)^{1/2}$. Учитывая это, находим

$$A_1 = \pi^{1/2} \Lambda^{-3/4} z^{-5/4} \exp(-2i\Lambda^{1/2} z^{3/2}/3 - i\pi/4),$$

$$4\pi/3 < \arg z < 10\pi/3, \quad (26.11)$$

$$A_2 = -\pi^{1/2} \Lambda^{-3/4} z^{-5/4} \exp(2i\Lambda^{1/2} z^{3/2}/3 + i\pi/4),$$

$$2\pi/3 < \arg z < 8\pi/3, \quad (26.12)$$

$$A_3 = \pi^{1/2} \Lambda^{-3/4} z^{-5/4} \exp(-2i\Lambda^{1/2} z^{3/2} - i\pi/4),$$

$$0 < \arg z < 2\pi. \quad (26.13)$$

Имеющие физический смысл решения не должны меняться по величине при изменении $\arg z$ на 2π . В соответствии с этим выражения (26.11)–(26.13) позволяют определить функции A_k при любых значениях $\arg z$, кроме $\arg z = 2\pi(1 - k/3) + 2\pi n$, т. е. (26.11)–(26.13) определяют функции A_k во всей плоскости, кроме линий $C_k(\arg C_k = 2\pi(1 - k/3))$. Для того чтобы найти значения A_k на этих линиях, нужно воспользоваться соотношениями (26.7), которые определяют связь быстро меняющихся решений с медленно меняющимися.

Рассмотрим функцию U_3 . Она выражается через функцию Бесселя [15]

$$U_3 = \pi i z^{1/2} H_1(2z^{1/2}). \quad (26.14)$$

При $|z| \gg 1$ для этой функции имеем

$$\pi i z^{1/2} H_1(2z^{1/2}) = \pi^{1/2} z^{1/4} \exp(2iz^{1/2} - \pi i/4),$$

$$-2\pi < \arg z < 4\pi. \quad (26.15)$$

Функция $z^{1/2} H_1(2z^{1/2})$, являющаяся решением укороченного (без члена с четвертой производной) уравнения (26.2), неаналитична, поскольку ее значения при $\arg z = \varphi$ и $\arg z = \varphi + 2\pi$ не совпадают. Эти трудности устраняются, если учесть, что представление плавного решения через функцию Бесселя справедливо лишь в секторе $S - S_3$ при $-2\pi/3 < \arg z < 2\pi/3$ (см. рис. 13, сектор S — вся комплексная плоскость, а S_3 определяется неравенством $-2\pi/3 \geq \arg z \geq 2\pi/3$).

Для того чтобы получить выражение U_3 в секторе S_3 , следует снова воспользоваться соотношениями

(26.7). Аналогичными рассуждениями устанавливается, что в секторе $S - S_2$ ($0 < \arg z < 4\pi/3$) $U_2 = \pi iz^{1/2} H_1(2z^{1/2})$ и в секторе $S - S_1$ $U_1 = \pi iz^{1/2} H_1(2z^{1/2}) + 2\pi iz^{1/2} I_1(2z^{1/2})$. В секторах S_k эти решения становятся быстро меняющимися. Величина сектора S_k выбирается из условия $\arg(tz) \geq 0$ (см. рис. 13), при этом подынтегральное выражение в (26.6) не убывает и функция U_k становится конечной лишь при учете слагаемого $t^3/3\Lambda$. Иными словами, требование ограниченности функции U_k при больших t приводит к тому, что решение в секторах S_k становится быстро меняющимся.

Полученные асимптотические представления для V , U_k , A_k вместе с соотношениями (26.7) позволяют полностью решить вопрос о построении асимптотических решений уравнения (26.2) во всей комплексной плоскости переменного z . Исключение составляет лишь некоторая область вокруг резонансной точки, внутри которой несправедливы использованные нами упрощенные представления решений.

В качестве примера рассмотрим прохождение плавной моды через зону взаимодействия [5]. Для вещественных z имеем

$$U_2 = \begin{cases} -\pi |z|^{1/2} H_1(2i|z|^{1/2}) & \text{при } z < 0, \\ i\pi z^{1/2} H_1(2z^{1/2}) + \pi \Lambda^{-3/2} z^{-5/4} \exp(i\pi/4 + \\ \quad + 2\Lambda^{1/2} z^{3/2}/3) & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

Поскольку плавное решение экспоненциально затухает при $z > 0$, длинноволновая мода полностью переходит в коротковолновую. Как следует из формул связи (28.7), медленно меняющееся решение трансформируется в быстро меняющееся в некотором секторе. Если этот сектор не захватывает действительной оси (такая ситуация имеет место, например, для уравнения Орра — Зоммерфельда), то энергия падающей моды целиком поглощается в окрестности резонансной точки.

§ 27. Модель с отражением

До сих пор, анализируя решения уравнения (26.1) в окрестности резонансной точки, мы пренебрегали возможной пространственной зависимостью коэффици-

ента при члене с нулевой производной. В настоящем параграфе мы учтем переменность обоих коэффициентов.

Рассмотрим в качестве модели следующее уравнение (см. § 4):

$$\varphi^{IV} + \lambda^2[y\varphi'' + (\beta + y)\varphi] = 0. \quad (27.1)$$

Его анализ можно провести аналогично тому, как это было сделано для уравнения Орра — Зоммерфельда (см. § 26) на основе метода Вазова [1, 7]. Прежде чем приступить к его решению заметим, что при вещественных λ^2 и β для уравнения (27.1) справедливо интегральное соотношение

$$\begin{aligned} U^*d\varphi/dy - Ud\varphi^*/dy + \varphi dU/dy - \varphi dU^*/dy + \\ + 3\lambda^2(\varphi d\varphi^*/dy - \varphi^*d\varphi/dy) = \text{const}, \quad (27.2) \\ \beta\lambda^2 \neq -1, \quad U = d^2\varphi/dy^2, \end{aligned}$$

выражающее закон сохранения потока энергии взаимодействующих мод. Как и в предыдущем параграфе, нас будет интересовать решение рассматриваемого уравнения в окрестности резонансной точки. Поскольку уравнение (27.1) по-прежнему анализируется методом Вазова, мы изложим путь исследования менее подробно, останавливаясь лишь на основных соотношениях.

Уравнение (27.1) решается, как и раньше, методом Лапласа. Стандартная процедура позволяет представить решение в виде интеграла по контуру

$$\begin{aligned} \varphi(y, \mu, \lambda) = \\ = \int_C ds [(s+i)/(s-i)]^{2\mu} \exp(\zeta s + s^3/3\lambda^2)/(s^2+1), \quad (27.3) \end{aligned}$$

где $\zeta = y - \lambda^{-2}$, $2\mu = \beta + \lambda^{-2}$. В отличие от предыдущего случая (26.3) интегральное ядро имеет две точки ветвления $s = \pm i$. Контур интегрирования, удовлетворяющие требованию обращения в нуль на их концах присоединенной билинейной формы, представлены на рис. 14. Соответствующие формулы связи имеют вид

$$A_1 + A_2 + A_3 = V, \quad \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + A_3 = U_1 + U_2, \quad (27.4)$$

где $\bar{A}_1 = A_1 \exp(-2\pi\mu)$, $\bar{A}_2 = A_2 \exp(-2\pi\mu)$.

Достаточно далеко от резонансной зоны, в области, где выполнены условия

$$|\zeta| \gg \max\{|\lambda|^{-2/3}, |\lambda|^{-2}, |\mu/\lambda|^2\}, \quad (27.5)$$

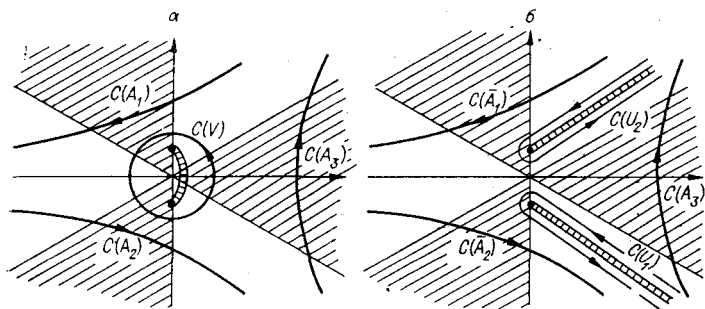


Рис. 14. Контуры интегрирования в (27.3) при $\arg \Lambda = 0$ (а) и $\arg \Lambda^2 = 0$ (б). Секторы, в которых $\operatorname{Re}(t^3/\Lambda) > 0$, заштрихованы.

решения вновь можно разделить на быстро и медленно меняющиеся. Для медленно меняющихся решений (V , U_h) интеграл, соответствующий (26.6), сводится к функции Уиттекера, а для быстро меняющихся — интеграл, соответствующий (26.5), по-прежнему может быть взят методом перевала.

В качестве фундаментальной системы решений примем U_1 , U_2 и A_1 , A_3 . Их асимптотические представления при условии (27.5) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \pi^{1/2} \lambda^{-3/2} \zeta^{-5/4} \exp(i\pi/4 + 2i\lambda \zeta^{3/2}/3), \\
 &\quad -2\pi/3 < \arg(\zeta \lambda^{2/3}) < 4\pi/3, \\
 A_3 &= \pi^{1/2} \lambda^{-3/2} \zeta^{-5/4} \exp(-i\pi/4 - 2i\lambda \zeta^{3/2}/3), \\
 &\quad 0 < \arg(\zeta \lambda^{2/3}) < 2\pi,
 \end{aligned}
 \tag{27.6}$$

$$\begin{aligned}
 U_2 &= (2\zeta)^{i\mu} [\pi/\Gamma(1+i\mu)] \exp(i\zeta - i/3\lambda^2 - \pi\mu), \\
 &\quad 0 < \arg(\zeta \lambda^{2/3}) < 4\pi/3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= (2\zeta)^{i\mu} [\pi/\Gamma(1+i\mu)] \exp(-i\zeta + i/3\lambda^2 - \pi\mu), \\
 &\quad -4\pi/3 < \arg(\zeta \lambda^{2/3}) < 0.
 \end{aligned}$$

Мы опять сталкиваемся с неаналитичностью решений U_1 , U_2 , которую можно устранить, если использовать формулы связи (27.4). При этом плавное решение в области комплексного переменного $|\arg(\zeta \lambda^{2/3})| < 2\pi/3$ становится мелкомасштабным:

$$U_{1,2} \rightarrow A_{2,1} \exp[(-2\pi\mu - 1) - 1]. \tag{27.7}$$

Рассмотрим теперь прохождение длинноволновой моды справа ($\zeta > 0$) налево ($\zeta < 0$) через зону взаимодействия ($\zeta \sim 0$). Пусть $\lambda, \mu > 0$. При этом граничные условия удовлетворяются решением U_2 , так что из (27.6), (27.7) имеем

$$\varphi \approx \begin{cases} (2|\zeta|)^{i\mu} [\pi/\Gamma(1+i\mu)] \cdot \exp(i\zeta - i/3\lambda^2 - \\ - \mu\pi/2) - A_1 [1 - \exp(-2\pi\mu)], \zeta > 0, \\ (2|\zeta|)^{i\mu} [\pi/\Gamma(1+i\mu)] \cdot \exp(i\zeta - i/3\lambda^2 - \\ - 3\pi\mu/2), \zeta < 0. \end{cases} \quad (27.8)$$

Для коэффициента прохождения D (квадрат отношения модулей амплитуд прошедшей и падающей) получим $D = \exp(-2\pi\mu)$. Коэффициент трансформации длинноволновой моды в коротковолновую Q может быть вычислен на основе интеграла (27.2) с учетом того, что β и χ действительны,

$$Q = 1 - D = 1 - \exp(-2\pi\mu). \quad (27.9)$$

Аналогичным образом можно получить коэффициент прохождения при падении длинноволновой моды слева направо.

Если на область взаимодействия справа падает коротковолновая мода, то, выбирая решение в виде $\varphi_2 = U_2 - A_2$, можно показать, что возникает длинноволновая мода, просачивающаяся влево со стороны отрицательных значений ζ . При этом коэффициент трансформации

$$Q_- = \exp(-2\pi\mu)[1 - \exp(-2\pi\mu)]. \quad (27.10)$$

Формула (27.10) имеет сходство с формулой Ландау — Зинера (21.8). Это сходство не случайно. Аналогия между взаимодействием волн неадиабатическими переходами в квантовой механике отмечалась в начале настоящей главы. В данном случае, если следовать этой аналогии, имеет место пересечение термов, у одного из которых наклон равен нулю (ср. (24.1) с (17.1)). Поскольку при выводе формулы (27.10) мы не накладывали никаких ограничений на параметры исходной задачи, можно заключить, что формула Ландау — Зинера справедлива во всем диапазоне параметров, если один из пересекающихся термов имеет наклон, равный нулю [8].

ЭВОЛЮЦИОННАЯ ЗАДАЧА

§ 28. Введение

Еще Релей в 1883 г. показал, что течения невязкой несжимаемой жидкости устойчивы, если профиль скорости течения не имеет точек перегиба (теорема Релея). Позднее было найдено, что в этом случае отсутствуют и затухающие и нейтральные колебания (см., например, [1]). А. В. Тимофеев, давший физическую интерпретацию этой теореме, показал [2], что незатухающие собственные колебания отсутствуют из-за того, что они поглощаются в резонансных точках, т. е. там, где фазовая скорость волны совпадает со скоростью течения.

Реально волна может поглотиться только за счет вязкости. Поэтому в окрестности резонансной точки неприменимо приближение - идеальной жидкости. В гл. IV было показано, что правило обхода для несжимаемой жидкости совпадает с правилом обхода особенностей, предложенным Ландау [3] в задаче о колебаниях покоящейся однородной плазмы. В обоих случаях это правило приводит к выводу о поглощении волны резонансными частицами [4].

В тех случаях, когда отсутствуют собственные колебания, возникает вопрос об эволюции начальных возмущений. В 1960 г. Кейз и Дикий [5, 6] показали (независимо), как эволюционирует начальное возмущение в течении идеальной жидкости. Они доказали, что произвольное начальное достаточно гладкое возмущение затухает во времени по степенному закону.

Решая задачу с начальными условиями, обычно используют преобразование Лапласа. При этом предполагают, что начальные возмущения возникают мгновенно при $t = 0$, т. е. зависимость начального возмущения от времени имеет ступенчатый характер. Это обстоятельство оказывается весьма существенным при определении временной асимптотики [7].

В последнее время появились работы, в которых эволюционная задача решалась с учетом эффектов,

проявляющихся только в резонансной зоне [4, 8]. Если речь идет о течении несжимаемой жидкости, то это эффекты, обусловленные вязкостью. «Вязкие» эффекты оказываются существенными на последнем этапе эволюции. В конечном счете именно они обеспечивают асимптотическую устойчивость начальных возмущений.

При анализе эволюционной задачи удобно использовать преобразование Лапласа или Фурье по времени, если, конечно, коэффициенты уравнений не являются функциями времени. В результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение с правой частью, дополненное граничными условиями. Решение такого уравнения можно получить методом функции Грина. Однако применение этого метода нуждается в дополнительном исследовании. Дело в том, что вид функции Грина принципиально зависит от того, существует или нет нетривиальное решение однородного уравнения. Если его нет, то неоднородная задача всегда имеет определенное единственное решение. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то это не так. Во втором случае вводится понятие обобщенной функции Грина [9]. Ее построение не приводит к однозначному решению, и даже в простейшем случае довольно громоздкое. В физических приложениях обычно ограничиваются построением классической (необобщенной) функции Грина. При этом всякий раз приходится решать вопрос о существовании собственного решения однородной задачи.

В настоящей главе мы рассмотрим эволюцию начальных возмущений в задачах, которые сводятся к уравнению четвертого порядка. Речь пойдет об уравнении Орра — Зоммерфельда и уравнении для альфвеновских колебаний в неравновесной и неоднородной плазме, для которых доказана теорема Релея.

§ 29. Теорема Релея

Релей доказал отсутствие собственных колебаний в невязком слое плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости на основе интегральных соотношений. Рассмотрим в качестве исходного уравнение

$$\varphi_1'' - k^2 \varphi_1 - [v_0''/v_0(x) - \omega/k] \varphi_1 = 0, \quad (29.1)$$

получающееся из уравнения Орра — Зоммерфельда (см. § 3), если в нем опустить члены, содержащие вязкость. На поверхностях, ограничивающих течение ($x = x_{1,2}$), нормальная компонента скорости обращается в нуль $\varphi_1(x_{1,2}) = 0$. Таким образом, мы приходим к краевой задаче для уравнения (29.1). Если при заданном профиле $v_0(x)$ (напомним, что любой профиль $v_0(x)$ удовлетворяет стационарной невязкой задаче § 3) найдутся собственные частоты с $\text{Im } \omega > 0$, то соответствующее течение окажется неустойчивым, т. е. амплитуды собственных колебаний будут нарастать во времени.

Следуя Релею, предположим, что такие колебания существуют. Умножим (29.1) на φ^* и проинтегрируем по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ -|\varphi_1'|^2 - k^2 |\varphi_1|^2 + \frac{i(\text{Im } (\omega/k)) + (\text{Re } (\omega/k) - v_0(x))}{|\omega/k - v_0(x)|^2} \times \right. \\ \left. \times v_0'' |\varphi_1|^2 \right\} = 0. \quad (29.2)$$

Если профиль течения не имеет точек перегиба, т. е. $v_0'' \neq 0$, то соотношение (29.2) не может быть удовлетворено, так как мнимая часть подынтегрального выражения не меняет знака в интервале интегрирования (x_1, x_2). Следовательно, в течениях с профилем скорости без точек перегиба нарастающие собственные колебания не могут существовать и такие течения устойчивы. Это утверждение и составляет содержание теоремы Релея.

Заметим, что в ходе доказательства теоремы мы не интересовались знаком $\text{Im } \omega$. Важно было только, что $\text{Im } \omega \neq 0$. Поэтому утверждение теоремы можно сразу обобщить, заключив, что отсутствуют также и затухающие колебания [1]. Более того, если нейтральные колебания ($\text{Im } \omega = 0$) рассматривать как предельный случай колебаний с $\text{Im } \omega \neq 0$, то можно показать, что и такие колебания в изучаемых течениях невозможны [1].

Остановимся на другом, более общем доказательстве теоремы [40]. Рассмотрим уравнение

$$\varphi'' - k^2 \varphi + U(x) \varphi = 0, \quad (29.3)$$

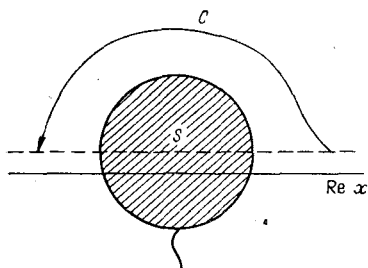


Рис. 15. Плоскость комплексного переменного для уравнения (29.3).

где $U(x) = A(x)/(\omega - kv_0(x))^n$, $n > 0$. Предположим, что скорость движения сплошной среды $v_0(x)$ меняется в пространстве так, что вдали от резонансной точки при $|x - x_s| \sim a$ выполняется условие $k^2 \gg |U|$. Тогда всюду вне малой окрестности резонансной точки уравнение (29.3) сводится к урав-

нению свободного движения

$$\varphi'' - k^2\varphi = 0. \quad (29.4)$$

Из (29.4) следует, что решение, спадающее в области положительных значений разности $x - x_s$, имеет асимптотику $\exp[-k(x - x_s)]$. Если существуют собственные функции, то при переходе к отрицательным значениям величины $x - x_s$ асимптотика должна измениться и принять вид $\exp k(x - x_s)$. Известно, что асимптотика решений может изменяться лишь на линиях мнимой фазы (линии Стокса). На рис. 15 линия мнимой фазы нанесена штриховой линией, область, в которой неприменимо упрощенное уравнение (29.4), заштрихована. Полагая, что $v'_0 > 0$, в соответствии с правилом обхода Ландау проведем разрез (так, как это показано на рис. 15 (волнистая линия)). Возьмем решение, имеющее на штриховой линии справа от S вид спадающей экспоненты. Переходя по контуру C в область слева от S , мы нигде не пересекали линий Стокса (штриховых линий), следовательно, в этой области решение будет нарастающим. Таким образом, мы показали, что уравнение (29.1) не обладает собственными функциями.

§ 30. Эволюционная задача для уравнения Орра — Зоммерфельда

Предположим, что уравнение Орра — Зоммерфельда не имеет решений, удовлетворяющих граничным условиям, выставляемым на твердых поверхностях (см.

§ 3). Тогда для исследования устойчивости течения несжимаемой жидкости в слое необходимо перейти к задаче с начальными условиями, которую, как обычно, будем решать методом преобразования Лапласа. Учет начальных возмущений приводит к тому, что исходное уравнение становится неоднородным

$$-i\nu\Delta^2\varphi_\omega + (\omega - kv_0(x))\Delta\varphi_\omega + kv_0''\varphi_\omega = c(x). \quad (30.1)$$

Здесь $\Delta = d^2/dx^2 - k^2$, а $c(x)$ определяется начальным возмущением. Стандартная процедура приводит к следующему выражению для функции $\varphi(x, t)$:

$$\varphi(x, t) = -(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) \int d\tilde{x} c(\tilde{x}) G_\omega(x, \tilde{x}), \quad (30.2)$$

где $G_\omega(x, \tilde{x})$ — функция Грина уравнения (30.2).

Выберем пространственную зависимость правой части уравнения (30.1) в виде δ -функции $c(\tilde{x}) \sim \delta(\tilde{x} - x_0)$, тогда его решение должно быть пропорциональным функции Грина. Последнее можно выразить через решения однородного уравнения, соответствующего уравнению с правой частью (30.1). В окрестности точки x_s , где $\omega = kv_0(x)$, его можно представить в безразмерном виде, разложив коэффициент при втором слагаемом в (30.1) в резонансной точке x_s (в дальнейшем у функций φ и G индекс ω для краткости опустим):

$$\Lambda^{-1}\varphi^{IV} + z\varphi'' + \varphi = 0. \quad (30.3)$$

Здесь $z = (x_s - x)v_0''/v_0'$, $\Lambda = ik(v_0')^4/v(v_0'')^3$.

Напомним некоторые свойства его решений (см. § 26). Поскольку коэффициент перед четвертой производной мал, решения однородного уравнения можно разделить на крупно- (φ_1, φ_2) и мелкомасштабные (φ_3, φ_4). Такое разделение справедливо вдали от точки x_s , в которой разность $\omega - kv_0(x)$ обращается в нуль и может нарушаться при $|z| < \Lambda^{-1/3}$.

Как показано в гл. IV, приближенные выражения для φ_1, φ_2 могут быть получены из решения укороченного уравнения с отброшенной четвертой производной. В качестве линейно-независимых удобно выбрать решения, обращающиеся в нуль при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\varphi_1 = 2\pi iz^{1/2} I_1(2z^{1/2}),$$

$$\varphi_2 = \pi i z^{1/2} H_1(2z^{1/2}) + 2\pi i z^{1/2} I_1(2z^{1/2}). \quad (30.4)$$

При нахождении асимптотик мелкомасштабных решений в дифференциальном уравнении может быть опущен свободный член (вследствие наличия малого параметра перед старшей производной)

$$\varphi_{3,4} = \pi^{1/4} \Lambda^{-3/4} z^{-5/4} \exp(\pm 2i\Lambda^{1/2} z^{3/2}/3 \mp i\pi/4). \quad (30.5)$$

Следует отметить, что из-за логарифмической особенности у функции $H_1(2z^{1/2})$ пространственный масштаб решения φ_2 при приближении к x_s резко сокращается — оно становится мелкомасштабным, и это его свойство сохраняется в секторе комплексного переменного $\pi/6 < \arg z < 5\pi/6$. Для того чтобы получить асимптотическое представление φ_2 в этой области, в (30.4) следует произвести замену (см. § 26)

$$\varphi_2 \rightarrow \varphi_2 - \varphi_4. \quad (30.6)$$

Это означает, что вязкость проявляется в окрестности x_s и в секторе $\pi/6 < \arg z < 5\pi/6$. «Вязкий» сектор комплексного переменного z не захватывает действительной оси, и потому при рассмотрении крупномасштабных решений в некоторых случаях можно учитывать явление трансформации, обходя точку x_s в комплексной плоскости. Причем правило обхода может быть получено заменой ω на $\omega + i\gamma$, т. е. совпадает с правилом обхода Ландау. С помощью решений (30.4), (30.5) представим функцию Грина в виде

$$G(x, x_0) = \frac{1}{\alpha W_4} \begin{cases} \varphi_1(x) W(\varphi_2(x_0), \varphi_3(x_0), \varphi_4(x_0)) + \\ + \varphi_3(x) W(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \varphi_4(x_0)) \\ (x > x_0), \\ \varphi_2(x) W(\varphi_1(x_0), \varphi_3(x_0), \varphi_4(x_0)) + \\ \varphi_4(x) W(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \varphi_3(x_0)) \\ (x < x_0). \end{cases} \quad (30.7)$$

Здесь W — функциональные определители, $W_4 = W(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \varphi_3(x_0), \varphi_4(x_0))$, последняя величина для уравнения (30.2) не зависит от координаты.

Рассмотрим сначала малые времена. Для того чтобы узнать, как будет развиваться начальное возмущение

ние, характеризуемое функцией $c(\tilde{x}) \sim \delta(\tilde{x} - x_0)$, следует вычислить интеграл

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) G(x, x_0). \quad (30.8)$$

Асимптотика интегралов типа (30.8) определяется особенностями подынтегрального выражения. Если бы однородное уравнение, соответствующее (30.1), имело собственные функции, то одно и то же решение удовлетворяло бы граничным условиям как при $x \rightarrow -\infty$, так и при $x \rightarrow \infty$. В результате при собственных значениях частоты функциональный определитель W_4 обращался бы в нуль, а функция Грина имела бы полюс. Но однородное уравнение, соответствующее (30.1), не имеет собственных функций с $\text{Im } \omega \geq 0$ (теорема Реллея). Поскольку, помимо того, полное уравнение четвертого порядка регулярно и, следовательно, его решения (а не их асимптотические представления!) также регулярны, функция Грина не должна иметь особенностей. Отсюда следует, что все возмущения при $t \rightarrow \infty$ должны затухать, т. е. среду следует считать асимптотически устойчивой. Однако это не означает, что амплитуда начальных возмущений будет монотонно стремиться к нулю. Как мы увидим в следующем параграфе, начальные возмущения могут в течение некоторого времени нарастать, и, вообще говоря, не исключено, что за это время их амплитуда достигнет значительной величины.

Мы не смогли вычислить интеграл (30.8) в общем виде и получили лишь приближенные выражения в предельных случаях малых ($t \ll T$) и больших ($t \gg T$) времен. Здесь $T \sim v^{-1/3} (kv_0')^{2/3}$ — характерное время, после которого проявляются «вязкие» эффекты, учитываемые в (30.2) слагаемым с четвертой производной. Его можно определить из следующих качественных соображений [4].

Под действием вязкости начальное возмущение скорости за время Δt расплывается на расстояние $\Delta x \sim \sim (v\Delta t)^{1/2}$. Ввиду того, что возмущения, расположенные в разных точках, движутся с различной скоростью, их фазы сдвигаются относительно друг друга. За время Δt фазовый сдвиг возмущений, расположенных на рас-

стояниях Δx , становится равным $\Delta \varphi = kv'_0 \Delta x \cdot \Delta t$. Подставляя сюда $\Delta x (v \Delta t)^{1/2}$, находим, что за время $\Delta t \geq (kv'_0)^{-2/3} v^{-1/3}$ действие вязкости приведет к затуханию элементарных возмущений, так как в одной и той же точке окажутся возмущения с фазой, отличающейся более чем на π . Таким образом, характерное время T проявления вязких эффектов можно оценить как $T \sim (kv'_0)^{-2/3} v^{-1/3}$.

Эту же оценку можно получить и из других соображений. Укороченное уравнение (30.1) имеет особенность при $\omega = kv_0(x)$. Поэтому естественно ожидать, что на интеграл (30.8) определяющее влияние окажет зависимость решений φ_i от величины $\omega - kv_0(x)$. В силу такой зависимости каждому частотному интервалу $\delta\omega$ может быть поставлен в соответствие пространственный — $\delta x \sim \delta\omega (kv'_0)^{-1}$, и наоборот. Эффекты, обусловленные вязкостью, становятся существенными на расстояниях $\delta x_s \sim (v/kv'_0)^{1/3}$ от резонансной точки. Этому расстоянию отвечает частотный интервал $\delta\omega_s \sim v^{1/3} (kv'_0)^{2/3}$, с которым по соотношению неопределенности связано характерное время $T \sim \delta\omega_s^{-1} = v^{-1/3} (kv'_0)^{-2/3}$.

Приведенные качественные соображения показывают, что при $t \ll T$ окрестность особой точки $|x - x_s| \ll \delta x_s$, в которой проявляются «вязкие» эффекты, не должна оказывать существенного воздействия на эволюцию возмущений. В области $|x - x_s| \gg \delta x_s$ для решений φ_i мы можем использовать приближенные асимптотические выражения (30.4) и (30.5). При $|x' - x_s| \gg \delta x_s$ в функции Грина, составленной из (30.4), (30.5), можно пренебречь малым слагаемым, пропорциональным $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$. Используя также условия $|\partial^n \varphi_{3,4}/dx^n| \gg |\partial^n \varphi_{1,2}/\partial x^n|$, представим детерминанты, стоящие при $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, в следующем приближенном виде: $\varphi_2(x_0) W(\varphi'_3(x_0), \varphi'_4(x_0))$ и $\varphi_1(x_0) W(\varphi'_3(x_0), \varphi'_4(x_0))$ соответственно. Аналогичным образом получим $W_4 \approx W(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)) \cdot W(\varphi''_3(x_0), \varphi''_4(x_0))$. В результате этих преобразований функция Грина представляется так:

$$G(x, x_0) = \frac{i}{\pi} \begin{cases} \varphi_1(x) \varphi_2(x_0), & x > x_0, \\ \varphi_2(x) \varphi_1(x_0), & x < x_0. \end{cases} \quad (30.9)$$

Асимптотика интеграла (30.8) определяется логарифмической особенностью функции φ_2 (см. (30.4)):

$$\varphi(x, x_{0x} t) \sim t^{-1} (k_1 |x - x_0|)^{1/2} H_1(2(k_1 |x - x_0|)^{1/2}) \times \\ \times \left[\frac{\exp(-ikv_0(x)t)}{kv_0(x)} + \frac{\exp(-ikv_0(x_0)t)}{kv_0(x_0)} \right], \quad k_1 = v_0''/v_0'.$$

(30.10)

Из (30.10) следует, что начальное возмущение, локализованное в точке x_0 , возбуждает два волновых процесса с частотами $kv_0(x)$ и $kv_0(x_0)$ соответственно, здесь x — точка наблюдения. Волновой процесс первого типа, являющийся аналогом воли Ван-Кампена — Кейза (см., например, [4, 14]), представляет собой колебания, бегущие с локальной скоростью потока. Присутствие в асимптотике таких колебаний вполне естественно.

Появление волнового процесса второго типа в определенной степени связано с использованием метода преобразования Лапласа [7]. Действительно, при внезапном «включении» возмущений должен возбудиться весь спектр частот рассматриваемой системы. Однако в точке x возмущения с частотами $\omega \neq kv_0(x)$ взаимно уничтожают друг друга из-за интерференции.

Рассмотрим теперь большие времена. При $t \gg T$ интеграл (30.8) будем вычислять методом перевала. Положение точки перевала на плоскости комплексной частоты определяется условием

$$t = -id \ln G/d\omega. \quad (30.11)$$

Отсюда следует, что для достаточно больших времен асимптотика возмущения будет отлична от нуля, если функция Грина включает в себя составляющую, характерный частотный масштаб которой стремится к нулю.

Ранее было отмечено, что в пространстве частот в окрестности точек $kv_0(x)$, $kv_0(x_0)$ масштаб $\delta\omega_s \sim T^{-1}$. Однако он уменьшается с удалением от точек $kv_0(x)$, $kv_0(x_0)$ (см. (30.5), (30.6)). В результате при $t \gg T$ точка перевала, если она существует, должна находиться на достаточно больших расстояниях от точек $kv_0(x)$, $kv_0(x_0)$, где для функций φ_i опять справедливы асимптотические представления (30.5), (30.6).

Выделим ту часть функции Грина, которая может дать точку перевала. Рассмотрим сначала область

$x > x_0$. В первом слагаемом явление трансформации решений нужно учитывать лишь у функции $\varphi_2(x)$. Быстро меняющаяся часть $\varphi_4(x_0)$, добавляемая к функции $\varphi_2(x_0)$ в определителях, очевидным образом выпадает. Асимптотика первого слагаемого имеет вид $\varphi_1(x) \varphi_2(x_0) W(\varphi_3'(x_0), \varphi_1'(x_0))$. В ней быстро меняющиеся решения $\varphi_3(x_0)$ и $\varphi_4(x_0)$ взаимно погашаются, и поэтому точка перевала может быть связана только с быстро меняющейся частью $\varphi_2(x)$, появляющейся в результате трансформации.

Во второе слагаемое быстро меняющиеся решения $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x_0)$ входят с разными аргументами. Несложные оценки, однако, показывают, что погашение экспоненты происходит и в этом случае. В результате при интегрировании второго слагаемого контур интегрирования можно сместить в область как угодно больших отрицательных значений $\text{Im } \omega$, где $t \gg |d \ln G / d\omega|$.

Аналогичные соображения приводят к выводу о том, что в области $x < x_0$ точка перевала вообще отсутствует. Следовательно, при $t \gg T$ сколько-нибудь значительный уровень возмущений останется лишь в области $x > x_0$. Используя для функции Грина приближенное выражение

$$G \approx \begin{cases} i\pi^{-1} \varphi_1(x) \varphi_2(x_0), & x > x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases} \quad (30.12)$$

где асимптотика $\varphi_1(x)$ определяется (30.4), (30.6), получаем

$$\varphi(t, x, x_0) \sim t^{-1} H_1(2(k_1|x - x_0|)^{1/2}) \times \\ \times \exp[-ikv_0(x)t - v(kv_0')^2 t^3/24], \quad x > x_0. \quad (30.13)$$

Закон затухания $\exp(-ct^3)$ характерен для несобственных мод в слабодиссипативных средах. Так, в [11] показано, что по этому закону затухают волны Ван-Кампена под влиянием слабых кулоновских соударений. Действительно, волны Ван-Кампена возникают при движении пучков заряженных частиц, плотность которых модулирована в направлении движения. Например, если скорости всех частиц пучка одинаковы (распределение по скоростям имеет вид $f_0(v) = \delta(v - v_0)$), то в лабораторной системе координат будем видеть периодическую волну с частотой $\omega = 2\pi v_0/\lambda$, где

λ — пространственный период модуляции. Под действием кулоновских соударений распределение будет расплываться по закону $f_0(v) \sim \exp[-(v - v_0)^2/c_1 t]$. Нетрудно видеть, что интеграл $\int \exp(ikvt)f_0(v)dv$, определяющий временную зависимость возмущений, спадает во времени по закону $\exp(-ct^3)$.

В рассматриваемой задаче затухание происходит апалогичным образом. Действительно, в силу того, что скорость потока является функцией координаты x , на различных линиях тока возмущения движутся с различной скоростью. Эффекты вязкости приводят к диффузии возмущений в поперечном направлении. В результате на одной и той же линии тока оказываются возмущения, двигающиеся с различными скоростями.

§ 31. Конечное усиление начальных возмущений

В настоящем параграфе мы рассмотрим плазменные колебания, описываемые уравнениями, очень близкими к уравнению Орра — Зоммерфельда. Уравнения альфвеновских и ленгмюровских колебаний в неоднородной и неравновесной плазме совершенно идентичны по форме [20]:

$$\alpha d^4 \varphi / dx^4 + d(\epsilon d\varphi / dx) / dx - k^2 \epsilon \varphi = 0,$$

$$\epsilon = n_0 [\omega^2 (1 + i\eta) - \omega_0^2(x)].$$

Здесь ω_0 — та или иная частота в зависимости от типа колебаний; параметр η обусловлен наличием в плазме высокоэнергетичных частиц (пучка), причем предполагается, что их доля невелика и соответственно $\eta \ll 1$. Для определенности в дальнейшем будем считать, что речь идет об альфвеновских колебаниях. Коэффициент при старшей производной, играющий роль «вязкости», является в данном случае комплексной величиной. Его действительная часть обусловлена учетом конечного ларморовского радиуса ионов ρ_i , а мнимая — диссипацией за счет электрон-ионных столкновений (см. § 4).

Рассмотрим случай альфвеновских колебаний плазмы с линейным профилем плотности $n_0(x) = n_0'(0) + xn_0''$, помещенной в однородное магнитное поле. При линей-

ном профиле плотности исходное уравнение принимает вид

$$\Lambda^{-1} d^4 \varphi / dx^4 + d[(x - x_s) d\varphi / dx] / dx - k^2 (x - x_s) \varphi = 0, \quad (31.1)$$

где $x_s = \omega_0^2(0) n_0(0) / (\omega^2 n_0'(0))$, $\Lambda = \alpha^{-1} d\varepsilon / dx |_{x=x_s}$, $\alpha = \frac{7}{4} \omega^2 \rho_i n_0 (1 - i\delta)$, $\delta = \frac{4}{7} \frac{v_e}{\omega} \varepsilon^{1/2}$ (см. § 4). Прежде чем приступить к построению решения уравнения (31.1), заметим, что наибольший практический интерес, представляет не само решение, а лишь граница перехода между решениями, растущими и затухающими во времени. Ответ на этот вопрос можно получить довольно просто, используя так называемое локальное квазиклассическое приближение. Оно состоит в следующем. Малость параметра α используется как основание для отбрасывания члена со старшей производной. Коэффициент ε предполагается достаточно плавным, так что его можно вынести за знак дифференцирования. Затем частота колебаний и инкремент определяются из условия $\varepsilon(\omega, x) = 0$. При этом каждой точке x ставится в соответствие колебание со своей частотой

$$\omega_s(x) = \omega_0(x) (1 - i\eta/2). \quad (31.2)$$

Пространственная структура таких колебаний в локальном приближении не анализируется, поскольку укороченное уравнение является сингулярным (оно имеет особенность как раз в той точке $x = x_s$, где $\varepsilon(\omega, x) = 0$). В окрестности этой точки характерный пространственный масштаб решения резко сокращается, и поэтому становятся существенными эффекты, обусловленные конечностью ларморовского радиуса ионов, не учитываемые в локальном приближении. Для того чтобы включить их в рассмотрение, необходимо перейти к дифференциальному уравнению четвертого порядка. Конечно, такой упрощенный подход, строго говоря, неприменим к системе с распределенными параметрами. Однако ниже будет показано, что локальный квазиклассический подход, несмотря на всю его нестрогость, дает правильную оценку величины инкремента в данной задаче.

Вернемся теперь к уравнению (31.1). Как видно, между его решением и решением уравнения Орра — Зоммерфельда есть много общего. Принципиальное от-

личие состоит в появлении мнимой добавки в коэффициенте при второй производной и действительной добавки в коэффициенте при старшей производной. Эти добавки обуславливают два новых эффекта: на начальном этапе эволюции амплитуда колебаний оказывается нарастающей, а на конечном этапе эволюции колебания перестают быть гармоническими — их частота нарастает со временем.

В окрестности нуля функции $\epsilon(\omega, x)$ частные решения уравнения (31.1) можно получить, как и в предыдущем параграфе, используя малость параметра α . Тогда, считая $\alpha = 0$, получим плавные решения

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\approx K_0(k(x - x_s)), \\ \varphi_2 &\approx K_0(k(x_s - x)) = K_0(k(x - x_s)) + i\pi I_0(k(x - x_s)), \\ I_\nu(z) &= (i^{-\nu}) \mathcal{J}_\nu(iz). \end{aligned} \quad (31.3)$$

Полагая $k = 0$, получим мелкомасштабные решения. Они, как и в предыдущей задаче, выражаются в виде

$$\varphi_{3,4} = \pi^{1/2} \Lambda^{-1/4} (x - x_s)^{3/4} \exp[\pm 2i\Lambda^{1/3} (x - x_s)^{3/2} / 3 \mp i\pi/4]. \quad (31.4)$$

Функция Макдональда K_0 , как и функция Бесселя H_1 , обладает в нуле логарифмической особенностью. С приближением к ней масштаб решений φ_1 и φ_2 сокращается, они становятся мелкомасштабными, и это их свойство сохраняется в секторе

$$(\arg \alpha + 4\pi)/3 < \arg(x - x_s) < (\arg \alpha + 2\pi)/3. \quad (31.5)$$

Асимптотику решений φ_1 и φ_2 в этой области получим после замены

$$K_0(k(x - x_s)) \rightarrow K_0(k(x - x_s)) - \varphi_4. \quad (31.6)$$

Предположим, что выполнены условия теоремы Релея, а точнее, ее аналога для уравнения (31.1). Тогда для анализа устойчивости движения мы должны перейти к задаче с начальными условиями. Вся схема построения решения эволюционной задачи для уравнения (31.1) аналогична схеме, использованной в предыдущем параграфе для уравнения Орра — Зоммерфельда. Поэтому приведем сразу окончательное асимптотическое решение, не останавливаясь на промежуточных выкладках (за подробностями можно обратиться к работе [15]).

На малых временах $t \ll T = \omega_0^{-1} (\kappa \rho_i)^{-2/3}$ имеем

$$\varphi(t, x, x_0) \sim t^{-1} \omega_0 \left[\omega_s^{-1}(x) \exp(-i \omega_s(x) t) + \right. \\ \left. + \omega_s^{-1}(x_0) \exp(-i \omega_s(x_0) t) \right] K_0(k|x - x_0|), \quad (31.7)$$

на больших временах $t \gg T$

$$\varphi(t, x, x_0) \sim t^{-1} K_0(k|x - x_0|) \exp[-ikx_0 - \\ -i \omega_s(x) t + i(\kappa \omega_0 t)^3 / (24\Lambda)], \quad x > x_0, \quad (31.8)$$

где ω_0 — альфвеновская частота; κ — величина, обратная характерному масштабу неоднородности плотности плазмы. Из (31.7), (31.8) следует, что в начальной стадии возмущения возрастают. Причем инкремент нарастания определяется локальным дисперсионным уравнением $\varepsilon(\omega, x) = 0$. При $t \sim \omega_0^{-1} (\kappa \rho_i)^{-2/3}$ колебания перестают быть гармоническими — их частота начинает возрастать со временем; при несколько большем времени $t \sim \omega_0^{-1} (\kappa \rho_i)^{-2/3} \delta^{-1/3}$ инкремент нарастания начинает уменьшаться, и наконец, при $t > t_m = 2(2\gamma_s)^{1/2} \times \times \omega_0^{-3/2} (\kappa \rho_i)^{-1}$ нарастание сменяется затуханием. Здесь $\gamma_s = (1/2)\eta\omega_0$ — локальный инкремент колебаний. При $t = t_m$ амплитуда начального возмущения возрастает в A раз:

$$A \approx \exp \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\Lambda_0}{\delta} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_s}{\omega_0'} \right)^{3/2} \right], \quad (31.9)$$

где $\Lambda_0 = \frac{4}{7} \rho_i^{-2} \omega_0^{-1} \omega_0^1$. В (31.9) предполагается, что показатель экспоненты велик по сравнению с единицей. Поэтому мы пренебрегли предэкспоненциальным множителем. Затухание возмущений обусловливается эффектами конечной проводимости плазмы.

Глава VI

РАСПАДНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

§ 32. Введение

Во многих случаях амплитуду или интенсивность одной из волн (волны накачки) в укороченных уравнениях (5.10) можно считать заданной. К анализу та-

кого рода случаев мы и обратимся в настоящей главе. Множество задач нелинейной оптики было исследовано в приближении заданного поля, когда амплитуда и фаза одной из волн полагаются постоянными (см., например, [1]). Это приближение хорошо описывает начальную стадию процесса нелинейного взаимодействия волн.

Приближение заданного поля налагает значительные ограничения на область применимости получаемых результатов. В ряде случаев удастся несколько расширить область применимости линеаризованных уравнений, используя приближение заданной интенсивности [2]. При этом интенсивность одной из волн полагается постоянной, а на фазы всех волн не налагается никаких ограничений. Последнее обстоятельство является существенным при исследовании взаимодействий волн в сильно неоднородных средах. В этих случаях фазы всех волн (в том числе и волны накачки) сильно промодулированы за счет неоднородности, в то время как интенсивности вторичных волн малы из-за ослабления эффективности взаимодействия расстройками фазового синхронизма. Ниже, при линеаризации укороченных уравнений, будем использовать приближение как заданного поля, так и заданной интенсивности.

Волна конечной амплитуды, распространяющаяся в нелинейной среде, может искажаться из-за взаимодействий с волнами возмущения. Для эффективного преобразования энергии в системе трех волн необходимо выполнение резонансных условий

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.$$

Взаимодействие волны накачки с волнами возмущения происходит различным образом в зависимости от соотношения частот волн. Если волна накачки обладает максимальной частотой, то при выполнении резонансных условий она неустойчива относительно распада на два волновых возмущения. При этом амплитуда возмущений экспоненциально возрастают со временем. Такой процесс впервые рассматривался В. Н. Ораевским и Р. С. Сагдеевым [3] и получил название распадной неустойчивости волны конечной амплитуды. Найденные Бломбергом с соавторами [4] стационарные решения укороченных уравнений показали, что на

нелинейной стадии развития распадной неустойчивости (с учетом влияния вторичных волн на исходную) возможно полное преобразование энергии в низшие частоты. Если характер линейных дисперсионных соотношений для волн $\omega_j(\mathbf{k}_j)$ таков, что резонансные условия (32.1) выполняются сразу для большого числа троек волн, то в результате развития распадной неустойчивости исходной волны и вторичных волн в нелинейной среде возможно образование целого спектра колебаний с различными частотами [5].

В большинстве ранних работ, посвященных резонансным нелинейным взаимодействиям волн, среда считалась безграничной и однородной. Серьезное внимание к распадным процессам в неоднородных средах было привлечено в связи с проблемой преобразования энергии мощного лазерного излучения в плазменные колебания. Уже из первых работ, посвященных резонансным волновым взаимодействиям в неоднородных средах, следовало, что неоднородность существенно изменяет характер этих процессов [6—8]. Так, в работе [6] обнаружено, что запрещенная условиями фазового синхронизма генерация второй гармоники в плазме без магнитного поля возможна в неоднородной плазме в области, где становится близкой к нулю диэлектрическая проницаемость волны на основной частоте.

Розенблютом [7] было показано, что распадная неустойчивость в неоднородных средах, вообще говоря, носит сносный характер. Экспоненциальное нарастание амплитуд возмущений со временем (абсолютная неустойчивость) возможно лишь для некоторых частных случаев неоднородностей и соотношения знаков групповых скоростей волн. В противном случае наблюдается лишь конечное усиление возмущений с последующим выносом их из области фазового синхронизма [7, 8]. Интересно отметить, что задача об абсолютной неустойчивости волны конечной амплитуды тесно связана с задачей о собственных значениях уравнения Шредингера с комплексным потенциалом. Конечное усиление волновых возмущений в отсутствие абсолютной неустойчивости при $\nu_1 \nu_2 > 0$ соответствует подбарьерному прохождению возмущений.

Ниже мы рассмотрим не только распадную неустойчивость, но и процессы смещения частот. При этом в

дальнейшем всюду будем считать, что область эффективного взаимодействия волн достаточно удалена от точек нарушения квазиклассического описания волновых полей, так что влияние последних на рассматриваемые процессы можно считать малым. Частичный анализ такого рода влияния для линейризованных задач можно найти в [9, 10].

§ 33. Абсолютная неустойчивость

Пусть в нелинейной среде распространяется волна с частотой ω_3 . Исследуем эволюцию возмущений с частотами ω_1 и ω_2 такими, что $\Delta\omega = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 = \text{const}$, $\Delta(x) = k_3 - k_1 - k_2$. Полагая амплитуду c_3 волны с частотой ω_3 заданной, из (1.7), (5.10) получаем линейную систему для амплитуд малых возмущений $c_1(x, t)$ и $c_2(x, t)$

$$\partial c_1 / \partial t + v_1 \partial c_1 / \partial x = iV c_3 c_2^* \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 - i\Delta\omega t \right), \quad (33.1)$$

$$\partial c_2^* / \partial t + v_2 \partial c_2^* / \partial x = iV c_3^* c_1 \exp \left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 - i\Delta\omega t \right).$$

Здесь и далее для простоты считаем коэффициент нелинейного взаимодействия V действительным.

Нетрудно убедиться, что в безграничной однородной среде при $\Delta = 0$ малые возмущения экспоненциально нарастают со временем $c_{1,2} \sim \exp(vt)$ с инкрементом

$$v = [V^2 |c_3|^2 - (\Delta\omega)^2 / 4]^{1/2}. \quad (33.2)$$

Расстройка фазового синхронизма по частоте $\Delta\omega$ приводит к тому, что распадная неустойчивость имеет место только для волн с достаточно большой амплитудой $|c_3| > |\Delta\omega / 2V|$.

Ситуация существенно усложняется при наличии расстройек фазового синхронизма $\Delta(x)$, вызванных неоднородностью среды. Проанализируем, следуя Розенблюту [7], в каких случаях в неоднородной среде может осуществляться экспоненциальное нарастание возмущений со временем, т. е. абсолютная неустойчивость.

Полагая $\Delta\omega = 0$, проведем в уравнениях (33.1) преобразование Лапласа по времени. Исключив c_2^* , перейдем к новой переменной Ψ :

$$\Psi = c_1^* \exp \left[-i \int_0^x dx_1 \Delta(x_1)/2 + p^* (v_1^{-1} + v_2^{-1}) x/2 \right]. \quad (33.3)$$

Тогда, пренебрегая начальными условиями, получим уравнение

$$d^2\Psi/dx^2 + \{[\Delta + ip(v_1^{-1} - v_2^{-1})]^2/4 - id\Delta/dx/2 - V^2|c_3|^2/v_1v_2\} \Psi = 0. \quad (33.4)$$

При выводе уравнения (33.4) мы считали $V(x)$ и $v_i(x)$ достаточно медленно изменяющимися функциями, чтобы можно было пренебречь производными от этих величин. Учет пространственной зависимости $V(x)$ и $v_i(x)$ становится важным, например, в областях, где эти величины проходят через нуль. В дальнейшем такие случаи рассматривать не будем, считая для простоты эти величины постоянными.

Попытаемся найти решение уравнения (33.4), локализованное в безграничной среде (т. е. убывающее на бесконечности). Если такое решение существует при $\text{Re } p_0 > 0$, то p_0 соответствует собственному значению нормальной моды, растущей со временем. Если таких решений нет, то может иметь место только конечное усиление начальных возмущений.

Будем считать, что $\Delta(x)$ — растущая функция пространственной координаты. Тогда из (33.3), (33.4) нетрудно получить асимптотику частных решений при больших значениях $|x|$:

$$c_1^{(1)} = \exp(-p^*x/v_1),$$

$$c_1^{(2)} = \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 - p^*x/v_2 \right). \quad (33.5)$$

Если $\text{Re } p > 0$, то при $v_1v_2 > 0$ независимо от направлений групповых скоростей ни одно из частных решений и никакая их комбинация не могут одновременно убывать при стремлении аргумента как к $+\infty$, так и к

$-\infty$. Следовательно, при $v_1 v_2 > 0$ в безграничной среде мы не можем построить локализованных решений, экспоненциально нарастающих со временем.

Если $v_1 v_2 < 0$, то такое решение, вообще говоря, построить можно. Пусть для определенности $v_1 > 0$, $v_2 < 0$. Тогда $c_1^{(1)}$ убывает при $x > 0$, а $c_1^{(2)}$ — при $x < 0$; весь вопрос в том, сможет ли удовлетворить частное решение с такими асимптотиками условиям сшивки в начале координат. Обратимся к анализу частных случаев.

Для линейной неоднородности $\Delta(x) = \Delta'(0)x$ даже при $v_1 v_2 < 0$ нельзя построить ограниченное решение, удовлетворяющее также и условиям сшивки в нуле. Поэтому в безграничной линейно-неоднородной среде ($\Delta(x) = \Delta'(0)x$) абсолютная неустойчивость отсутствует и можно наблюдать лишь конечное усиление возмущений.

Покажем, что для неоднородности вида $\Delta(x) = \Delta'' x^2/2$ ($\Delta'' = d^2\Delta/dx^2/x = 0$) при $v_1 v_2 < 0$ может иметь место абсолютная неустойчивость. Пусть инкремент $\nu_0 = V \cdot |c_3|$ достаточно велик, так что членом $d\Delta/dx$ в уравнении (33.4) можно пренебречь. В результате вместо (33.4) имеем

$$d^2\Psi/dx^2 + \{[\Delta'' x^2/2 + ip(|v_1^{-1}| + |v_2^{-1}|)]^2/4 + \nu_0^2/|v_1 v_2|\} \Psi = 0. \quad (33.6)$$

Выражение в фигурных скобках обращается в нуль в четырех точках

$$x = \pm \{(2/\Delta'')[-ip(|v_1^{-1}| + |v_2^{-1}|) \pm \pm 2i\nu_0(|v_1 v_2|)^{-1/2}]\}^{1/2}, \quad (33.7)$$

имеющих смысл точек поворота.

Будем искать такие собственные значения p , чтобы две точки поворота лежали близко к началу координат $x = 0$. Эти собственные значения определяются из условия

$$p = 2\nu_0(1 - \delta)(|v_1 v_2|)^{1/2}/(|v_1| + |v_2|), \quad (33.8)$$

где δ предполагается малой добавкой. Уравнение (33.6) при таком положении точек поворота можно представить в виде

$$d^2\Psi/dx^2 + (1/4)\{[\Delta'' x^2/2 + 4iv_0(|v_1v_2|)^{-1/2}] \times \\ \times [\Delta'' x^2/2 - 2iv_0\delta(|v_1v_2|)^{-1/2}]\}\Psi = 0. \quad (33.9)$$

Вблизи внутренних точек поворота уравнение (33.9) сводится к известному уравнению гармонического осциллятора. Его решения убывают вне этих точек как $\exp(-\lambda x^2/2)$, где $\lambda = \exp[-i(\pi/4)(v_0\Delta'')^{1/2}|v_1v_2|^{-1/4}]$, а δ можно найти из условия, определяющего положение нижнего уровня в гармоническом осцилляторе:

$$\delta = [\exp(-i\pi/4)2^{-3/2}](\Delta'')^{1/2}(v_0^2/|v_1v_2|). \quad (33.10)$$

Из (33.10) видно, что с ростом v_0 величина δ уменьшается. Таким образом, при достаточно больших значениях v_0 существует собственная функция, соответствующая значению p с $\text{Re } p > 0$ (см. (33.8)—(33.10)), а следовательно, реализуется абсолютная неустойчивость.

§ 34. Задача о прохождении. Конечное усиление возмущений

В предыдущем параграфе было показано, что в линейно-неоднородной среде абсолютная неустойчивость отсутствует независимо от знаков групповых скоростей волн возмущения. В данном параграфе мы построим стационарную картину усиления колебаний в отсутствие абсолютной неустойчивости [11].

В окрестности резонансной точки $x=0$, малой по сравнению с масштабом неоднородности среды, расстройку синхронизма $\Delta(x)$ можно разложить по степеням x . Ограничимся линейным членом $\Delta = \Delta'x$ ($\Delta' = d\Delta/dx|_{x=0}$) и рассмотрим решение системы (33.1), не зависящее от времени:

$$dc_1/dx = i(Vc_3/v_1)c_2^* \exp(i\Delta'x^2/2), \quad (34.1)$$

$$dc_2^*/dx = -i(Vc_3^*/v_2)c_1 \exp(-i\Delta'x^2/2). \quad (34.2)$$

Исключая c_2^* и переходя к переменной $\xi = x/(|\Delta'|)^{1/2}$, получим следующее уравнение для c_1 :

$$d^2c_1/d\xi^2 - i\xi dc_1/d\xi - zc_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = iVc_3/v_1, \quad \gamma_2 = -iVc_3^*/v_2, \quad (34.3)$$

$$z = \gamma_1\gamma_2/|\Delta'| = V^2|c_3|^2/(v_1v_2|\Delta'|).$$

Его общее решение запишем в виде

$$c_1(\xi) = a_1 \Psi_{iz}^{(+)}(\xi) + a_2 \Psi_{iz}^{(+)}(-\xi). \quad (34.4)$$

Здесь a_1 и a_2 — произвольные постоянные, а функции $\Psi_{\lambda}^{(\pm)}$ выражаются через функции параболического цилиндра D_{λ} ($\lambda = iz$):

$$\Psi_{\lambda}^{(\pm)}(\xi) = D_{\lambda} \exp(\pm i\pi\xi/4) \exp[\mp i(\pi\lambda - \xi^2)/4]. \quad (34.5)$$

Асимптотическое поведение $\Psi^{(\pm)}(\xi)$ описывается следующими функциями:

$$\Psi^{(\pm)} \rightarrow \xi^{\lambda}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (34.6)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(\pm)} \rightarrow & (-\xi)^{\lambda} \exp(\mp i\pi\lambda) + (-\xi)^{-\lambda-1} \cdot (\mp 2\pi i)^{1/2} \times \\ & \times \exp[\mp i(\pi\lambda - x^2)/2] / \Gamma(-\lambda), \quad \xi \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (34.7)$$

Поскольку z — действительная величина, главными членами в (34.4), (34.6) при $|\xi| \rightarrow \infty$ оказываются медленно меняющиеся слагаемые, так что

$$c_{1,2} \sim \text{const } |\xi|^{\pm iz}. \quad (34.8)$$

Будем считать, что постоянные, соответствующие падающим волнам, в выражении (34.8) заданы. Тогда решение позволяет определить амплитуды уходящих волн. Обозначим в (34.8) константы, отвечающие падающим волнам, A_i , а уходящим — B_i ($i = 1, 2$).

Рассмотрим случай, когда $v_1 v_2 > 0$. Найдем сначала решение для частного вида граничных условий, когда на область взаимодействия падает только волна c_2^* . При этом граничные условия имеют вид $A_1^{(2)} = 0$, $A_2^{(2)} = 1$. Верхним индексом j здесь и в дальнейшем обозначается такое частное решение системы (34.1), (34.2), когда на область взаимодействия падает только волна с частотой ω_j . Решение задачи для общего случая граничных условий определяется в силу линейности суперпозицией этих частных решений. Далее, определяя постоянные a_1 и a_2 в (34.4), (34.6), получим

$$c_2^{*(2)} = \Psi_{-iz}^{(-)}(-\xi), \quad c_1^{(2)} = i\gamma_1 \exp(i\xi^2/2) \cdot \Psi_{-iz-1}^{(-)}(-\xi). \quad (34.9)$$

Отсюда с помощью (3.7) можно найти константы уxo-

дующих волн $B_{1,2}^{(2)}$. Аналогично для решения c_1 можно определить $B_{1,2}^{(1)}$. Полученные результаты можно записать в виде матрицы $B_k^{(i)} (v_1 v_2 > 0)$

$$B_k^{(i)} = \begin{pmatrix} \exp(\pi z) & \gamma_1 (2\pi i)^{1/2} \cdot \exp(\pi z/2)/\Gamma(1+iz) \\ \gamma_2 (-2\pi i) \exp(\pi z/2)/\Gamma(1-iz) & \exp(\pi z) \end{pmatrix}. \quad (34.10)$$

В случае $v_1 v_2 < 0$

$$B_k^{(i)} = \begin{pmatrix} \exp(-\pi z) & \gamma_1 (2\pi i)^{1/2} \exp(-\pi z/2)/\Gamma(1+iz) \\ \gamma_2 (-2\pi i)^{1/2} \exp(-\pi z/2)/\Gamma(1-iz) & \exp(-\pi z) \end{pmatrix}. \quad (34.11)$$

Таким образом, для $v_1 v_2 > 0$ усиление имеет место при $z > 0$, а для $v_1 v_2 < 0$ — при $z < 0$. Диагональные элементы матрицы $B_k^{(i)}$ представляют собой коэффициенты усиления падающей волны, а недиагональные определяют амплитуду возникающей волны с частотой биений.

Если $z \gg 1$, можно получить наглядное представление о структуре поля в резонансной области с помощью асимптотических выражений для функций $\Psi_\lambda^{(\pm)}(\xi)$. Рассмотрим амплитуду $c_1^{(2)}$. При $v_1 v_2 > 0$, $-1 < \alpha < 1$, где $\alpha = \xi/2z^{1/2}$, имеем

$$|c_1^{(2)}|^2 = \gamma_1 \exp\{2z[\pi - \arccos \alpha + \alpha(1-\alpha^2)^{1/2}]\}/2z\alpha(1-\alpha^2)^{1/2};$$

при $\alpha \sim 1$

$$|c_1^{(2)}|^2 = 2\gamma_1 z^{-2/3} \Phi^2(2z^{2/3}(1-\alpha)) \cdot \exp(2\pi z),$$

где Φ — функция Эйри; при $\alpha \gg 1$

$$|c_1^{(2)}|^2 = \alpha \gamma_1^2 (1 + \sin \chi(\alpha)/\alpha) \cdot \exp(2\pi z)/z(\alpha-1)^{1/2},$$

$$\chi(\alpha) = 4z\{\alpha(\alpha^2-1)^{1/2} - \ln[(\alpha+(\alpha^2-1)^{1/2})/(\alpha-(\alpha^2-1)^{1/2})]\}.$$

Таким образом, модуль амплитуды экспоненциально возрастает в резонансной области $|\xi| > 2z^{1/2}$ с пространственным инкрементом $\sim z^{1/2}$ и достигает максимального значения, которое в $1,9z^{1/6}$ раз превышает стационарный уровень, а затем осциллирует с уменьшающимися амплитудой и периодом.

Эту же задачу можно было решать на основе квазиклассического приближения при условии, что свойства среды изменяются достаточно слабо. Введем новую функцию $\Psi^* = c_1 \exp\left(-i \int_0^x \Delta dx_1/2\right)$, для которой уравнение (33.4) при $p=0$ примет следующий вид:

$$d^2\Psi/dx^2 + (\Delta^2/4 - id\Delta/dx/2 - v_0^2/v_1v_2) \Psi = 0, \quad (34.12)$$

$$v_0^2 = V^2 |c_3|^2.$$

С квазиклассической точностью вторым слагаемым в круглых скобках можно пренебречь. Поэтому вместо (34.12) имеем

$$d^2\Psi/dx^2 + (\Delta^2/4 - v_0^2/v_1v_2) \Psi = 0. \quad (34.13)$$

Задача о прохождении для такого уравнения подробно рассмотрена в § 11. В приближении ВКБ коэффициент усиления для квадратов модулей амплитуд равен

$$\exp\left[2 \int_{x_1}^{x_2} (v_0^2/v_1v_2 - \Delta^2(x)/4)^{1/2} dx\right]. \quad (34.14)$$

Интегрирование проводится в плоскости x между нулями подкоренного выражения. Если $v_1v_2 > 0$, то точки поворота лежат на действительной оси. Параметрическое усиление соответствует подбарьерному прохождению. Проводя интегрирование для линейной зависимости $\Delta = \Delta'x$, получим по-прежнему усиление в

$$\exp[2\pi V^2 |c_3|^2 / (v_1v_2 |\Delta'|)] = \exp(2\pi z) \text{ раз.} \quad (34.15)$$

Аналогичная задача для $v_1v_2 < 0$ сводится к случаю надбарьерного отражения. Точки поворота оказываются на мнимой оси. Коэффициент усиления в этом случае также определяется формулой (34.15), но при $v_1v_2 < 0$ в ней следует взять модуль произведения групповых скоростей.

§ 35. Генерация второй гармоники и суммарных частот

В данном параграфе мы рассмотрим стационарные решения для процессов преобразования частоты вверх, простейшим из которых является генерация второй

гармоники. Канонические уравнения, описывающие генерацию второй гармоники, можно получить по формуле (5.12) варьированием гамильтониана

$$\mathcal{H} = (i/2) \sum_{j=1}^2 [v_j c_j d c_j^* / dx - v_j c_j^* d c_j / dx] - \int \left[V_{12} c_1^{*2} c_2 \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right) + \text{к. с.} \right] dx. \quad (35.1)$$

В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \partial c_1 / \partial t + v_1 \partial c_1 / \partial x &= 2i V_{12} c_1^* c_2 \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right), \\ \partial c_2 / \partial t + v_2 \partial c_2 / \partial x &= i V_{12}^* c_1^2 \exp \left(-i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right). \end{aligned} \quad (35.2)$$

Здесь и в дальнейшем будем считать $v_{1,2}$ и V_{12} постоянными, а V_{12} действительной величиной. Перейдем в уравнениях (35.2) к новой переменной

$$\Psi_2 = c_2 \exp \left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1 \right). \quad (35.3)$$

С учетом этой замены систему (35.2) в стационарном случае $\partial / \partial t = 0$ можно записать в виде

$$\partial c_1 / \partial x = 2i (V_{12} / v_1) c_1^* \Psi_2, \quad (35.4)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \Psi_2 / \partial x^2 - i \Delta(x) d \Psi_2 / dx + \\ + [2V_{12}^2 (|c_1|)^2 / v_1 v_2 - i d \Delta / dx] \Psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (35.5)$$

Пусть на границе полубесконечной нелинейной среды происходит постоянная подкачка волны основной частоты, так что

$$c_1(x=0) = c_{10}, \quad c_2(x=0) = 0. \quad (35.6)$$

Тогда в приближении заданной интенсивности волны накачки генерация второй гармоники описывается линейным уравнением [2, 12]

$$\begin{aligned} d_2 \Psi_2 / dx^2 - i \Delta(x) d \Psi_2 / dx + (2g^2 - i d \Delta / dx) \Psi_2 = 0, \\ g^2 = V_{12}^2 (|c_{10}|)^2 / v_1 v_2 = \text{const} \end{aligned} \quad (35.7)$$

с граничными условиями (35.6), которые принимают вид:

$$\Psi_2(x=0) = 0, \quad d\Psi_2/dx|_{x=0} = iV_{12}c_{10}^2/v_2. \quad (35.8)$$

Для случая линейно-неоднородной среды ($\Delta(x) = \Delta'x$) может быть получено точное решение уравнения (35.7) [10], которое с учетом граничных условий приводит к следующему выражению для амплитуды второй гармоники:

$$c_2(x) = i(V_{12}/v_2) c_{10}^2 F(k, m; -iz^2), \quad (35.9)$$

где $F(k, m; -iz^2)$ — вырожденная гипергеометрическая функция с параметрами $k = 1/2 - ig^2/2\Delta'$, $m = 3/2$, $z^2 = \Delta'x^2/2$ [13]. Отсюда находим интенсивность второй гармоники

$$I_2 = V_{12}^2 |c_{10}|^4 F_1/v_2^2, \quad (35.10)$$

где $F_1 = F(k, m; -iz^2) \cdot F(k^*, m; iz^2)$.

Рассмотрим случай слабонеоднородных сред ($\Delta'x^2 \ll \ll 1$). Тогда на малых длинах $gx \ll 1$, используя соответствующее разложение функции $F(k, m; y)$, для интенсивности гармоники получаем выражение [13]

$$I_2(x) \approx (V_{12}c_{10}^2x^2/v_2)^2 [1 - 2(gx)^2/3 - (\Delta'x^2)^2/45]. \quad (35.11)$$

Если среда сильно неоднородна, то для получения решения на достаточно больших расстояниях ($\Delta'x^2 \gg \gg 1$) можно воспользоваться следующей асимптотикой функции $F(k, m; y)$ [13]:

$$F(k, m; y) \approx (-y)^k \Gamma(m)/\Gamma(m-k) + y^{k-m} \exp(y) \cdot \Gamma(m)/\Gamma(k), \quad (35.12)$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция. Тогда при $g^2/2\Delta' \ll 1$ находим

$$I_2(x) \approx (2/\Delta') (V_{12}c_{10}^2/v_2)^2 \exp(-\pi g^2/2\Delta'). \quad (35.13)$$

Полученные выше на малых ($\Delta'x^2 \ll 1$) и на больших ($\Delta'x^2 \gg 1$) длинах выражения для интенсивности второй гармоники демонстрируют, каким образом неоднородность уменьшает эффективность преобразования частоты. Формула (35.13) показывает, что на больших расстояниях происходит насыщение.

Обсудим теперь процесс генерации суммарных ча-

стот $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\Delta(x) = k_3 - k_1 - k_2$. Пусть на границе нелинейной среды осуществляется стационарная подкачка волн с частотами ω_1 и ω_2 : $c_j(x=0) = c_{j0}$ ($j = 1, 2$), $c_3(x=0) = 0$. После замены $\Psi_3 = c_3 \times \exp\left(i \int_0^x \Delta(x_1) dx_1\right)$ нетрудно в приближении заданной интенсивности привести систему (5.10) к одному уравнению для $\Psi_3(x)$

$$d^2\Psi_3/dx^2 - i\Delta(x)d\Psi_3/dx + (2g_3^2 - id\Delta/dx)\Psi_3 = 0, \quad (35.14)$$

где $g_3^2 = V^2[(|c_{10}|)^2/v_2 + (|c_{20}|)^2/v_1]/v_3$. Уравнение (35.14) аналогично (35.7), поэтому его решение имеет вид (35.9), где $V_{12}c_{10}^2/v_2$ следует заменить на $Vc_{10}c_{20}/v_3$. Таким образом, процессы смешения частот в приближении заданной интенсивности вполне аналогичны генерации второй гармоники.

Глава VII

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД

§ 36. Введение

В 1962 г. в работе Армстронга, Бломбергера и др. [1] были получены стационарные решения уравнений (5.10) для случая однородных сред. Эти решения позволили проанализировать различные процессы резонансного взаимодействия волн на нелинейной стадии, когда влияние вторичных волн на волну накачки уже нельзя считать малым. Так, из решений, полученных в [1], следует, что развитие распадного процесса в однородных средах в отсутствие диссипации приводит к периодическому обмену энергией между накачкой и вторичными волнами, так что распадная неустойчивость носит обратимый характер [2]. Формализм, развитый в [1], позволил исследовать влияние постоянных

расстройек фазового синхронизма на эффективность преобразования частот.

В. Е. Захаров и С. В. Манаков применили метод обратной задачи рассеяния для анализа укороченных уравнений (5.10), (5.16) при точном выполнении условий фазового синхронизма [3]. Авторами [3] указан алгоритм построения некоторого класса точных решений укороченных уравнений, соответствующих частному виду матриц рассеяния. В [3] также получены и проанализированы асимптотические (при $t \rightarrow \pm\infty$) решения задачи о резонансном рассеянии волновых пакетов друг на друге. Эти решения проясняют ряд «тонких» вопросов, связанных с влиянием соотношения групповых скоростей и исходных параметров волновых пакетов на характер их взаимодействия.

Метод обратной задачи рассеяния, вообще говоря, может быть применен к анализу уравнений (5.10), (5.16) и при $\Delta(x) \neq 0$ [4]. Укажем замену переменной, в результате которой различие между однородной и неоднородной задачами сводится к виду граничных и (или) начальных условий. Перейдем в уравнениях (5.10) к новым амплитудам $b_j(x, t)$

$$b_j(x, t) = c_j \exp(i\Psi_j(x, t)), \quad (36.1)$$

где фазы $\Psi_j(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial\Psi_j/\partial t + v_j\partial\Psi_j/\partial x = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (36.2)$$

$$\int_0^x \Delta(x_1) dx_1 - \Psi_1 - \Psi_2 + \Psi_3 = 0. \quad (36.3)$$

Тогда для амплитуд $b_j(x, t)$ мы получаем систему (5.10), где $\Delta(x) = 0$. Начальные и граничные условия при этом следует изменить с учетом сделанной замены. Таким образом, взаимодействие трех пакетов волн в неоднородной среде эквивалентно взаимодействию начально возмущенных пакетов при точном выполнении условий фазового синхронизма в однородной среде. Гладкие начальные условия для системы (5.10) после замены (36.1) для сильнонеоднородных сред становятся быстро осциллирующими в пространстве функциями. Стационарные граничные условия после замены (36.1) при $\Delta(x) \neq 0$, вообще говоря, становятся нестационарными.

В ряде случаев решения нелинейных уравнений с переменными коэффициентами могут иметь вид быстро осциллирующих в пространстве или во времени функций с медленно меняющимися параметрами. Для анализа нелинейных уравнений в таких случаях можно применять асимптотические методы, аналогом которых для линейных задач является метод ВКБ [5—7]. Строго обоснованный асимптотический метод получения решений нелинейных уравнений с переменными коэффициентами (комплексный метод ВКБ), быстро убывающих вне окрестности некоторых точек, кривых и поверхностей, изложен в монографии В. П. Маслова [7].

Основные трудности при использовании асимптотических методов для анализа нелинейных систем возникают вблизи точек (кривых, поверхностей), где нарушаются условия применимости квазиклассического подхода. Если для линейных задач существуют излагаемые выше подходы, позволяющие в значительной мере обойти эти трудности, то при анализе нелинейных уравнений эти трудности пока существенны. Можно указать ряд работ, в которых авторам удалось теми или иными способами «сшить» асимптотические решения при переходе через особую область [8—12]. В областях, где нарушается квазиклассическое описание, исходное нелинейное решение может претерпевать существенные качественные изменения. Уединенная нелинейная волна может разбиваться на ряд волн, могут появляться отраженные нелинейные волны [8, 9]. Авторами [10] показано, что кноидальная волна после прохождения области смены знака нелинейности не остается стационарной. Вместо стационарной картины наблюдаются сильные биения спектральных компонент. Укручение нелинейной волны может привести к опрокидыванию [6], в результате которого могут возникнуть многопоточные движения [11]. Как уже упоминалось в предыдущей главе, мы не касаемся вопросов, связанных с влиянием областей нарушения квазиклассического подхода на процессы резонансного нелинейного взаимодействия волн.

Мы лишь упомянули возможные подходы к анализу распадных и взрывных взаимодействий, изложение которых выходит за рамки нашей книги. В данной главе

мы ограничимся построением и анализом не зависящих от времени асимптотических решений укороченных уравнений при переменных расстройках фазового синхронизма [13—18], которые представляют собой обобщение стационарных решений [1] на случай неоднородных сред.

§ 37. Взаимодействие волн в однородных средах

При исследовании стационарных решений уравнений (5.10) удобно перейти к комплексным амплитудам $A_j(x, t) = v_j^{1/2} c_j(x, t)$. Квадрат модуля $|A_j|^2$ имеет смысл числа квантов N_j , проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. После замены переменной $\xi = Vx/(v_1 v_2 v_3)^{1/2}$ в (5.10) придем к следующим уравнениям, описывающим стационарные решения ($\partial/\partial t = 0$):

$$\begin{aligned} dA_1/d\xi &= iA_2^* A_3 \exp\left(i \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1\right), \\ dA_2/d\xi &= iA_1^* A_3 \exp\left(i \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1\right), \\ dA_3/d\xi &= iA_1 A_2 \exp\left(-i \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1\right). \end{aligned} \quad (37.1)$$

Здесь $\kappa(\xi) = \Delta(\xi) \cdot (v_1 v_2 v_3)^{1/2} / V$, $\Delta(\xi) = k_3 - k_1 - k_2$. Уравнения (37.1) имеют интегралы движения, аналогичные соотношениям Мэнли — Роу в теории параметрических усилителей [19]:

$$\begin{aligned} m_1 &= N_3 + N_1 = \text{const}, \\ m_2 &= N_3 + N_1 = \text{const}, \\ m_3 &= N_1 - N_2 = \text{const}, \\ N_j &= |A_j|^2. \end{aligned} \quad (37.2)$$

Используя условие резонанса для частот $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и (37.2), нетрудно получить следующий интеграл уравнений (37.1), смысл которого состоит в сохранении

плотности потока мощности:

$$\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 = \text{const.} \quad (37.3)$$

Дальнейшее исследование удобно проводить, перейдя к действительным амплитудам ρ_j и фазам φ_j волн $A_j(\xi) = \rho_j(\xi) \exp(i\varphi_j(\xi))$. Тогда система (37.1) сводится к следующим четырем уравнениям для $\rho_j(\xi)$ и относительной разности фаз волн $\theta(\xi) = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 + \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1$:

$$\begin{aligned} d\rho_1/d\xi &= -\rho_2\rho_3 \sin \theta, \\ d\rho_2/d\xi &= -\rho_1\rho_3 \sin \theta, \\ d\rho_3/d\xi &= \rho_1\rho_2 \sin \theta, \\ d\theta/d\xi &= \kappa(\xi) + (\rho_1\rho_2/\rho_3 - \rho_1\rho_3/\rho_2 - \rho_2\rho_3/\rho_1) \cos \theta. \end{aligned} \quad (37.4)$$

Легко убедиться, что уравнениям (37.4) тождественно удовлетворяет интегральное соотношение, которое мы используем в дальнейшем:

$$\rho_1\rho_2\rho_3 \cos \theta + \int_0^\xi \kappa(\xi_1) \rho_3 d\rho_3/d\xi_1 d\xi_1 = \Gamma, \quad (37.5)$$

где Γ — константа, определяемая граничными условиями. При постоянной расстройке фазового синхронизма $\kappa = \kappa_0 = \text{const}$ интегральное соотношение (37.5) переходит в известный [1] интеграл движения уравнений (37.4)

$$\rho_1\rho_2\rho_3 \cos \theta + \kappa_0 \rho_3^2/2 = \Gamma. \quad (37.6)$$

Интегралы (37.2), (37.6) позволяют привести исследуемую систему уравнений к уравнению для плотности потока квантов одной из волн $N_3(\xi)$ [1]

$$dN_3/d\xi = \pm 2[N_3(m_1 - N_3)(m_2 - N_3) - (\Gamma + \kappa_0 N_3/2)^2]^{1/2}. \quad (37.7)$$

Выбор знака в уравнении (37.7) определяется граничными условиями. Уравнение (37.7) можно переписать в интегральной форме

$$\xi = \pm (1/2) \int_{N_3(0)}^{N_3(\xi)} dN_3 / [N_3(m_1 - N_3)(m_2 - N_3) - (\Gamma + \kappa_0 N_3/2)^2]^{1/2}. \quad (37.8)$$

Пусть N_{3a} , N_{3b} , N_{3c} — три корня, обращающие в нуль подкоренное выражение в знаменателе под знаком интеграла в (37.8) ($N_{3c} \geq N_{3b} \geq N_{3a} \geq 0$):

$$N_3(m_1 - N_3)(m_2 - N_3) - (\Gamma + \kappa_0 N_3/2)^2 = 0. \quad (37.9)$$

Перейдя в (37.8) к переменной $y^2 = (N_3 - N_{3a}) / (N_{3b} - N_{3a})$, получаем эллиптический интеграл Якоби в стандартной форме [19]

$$\xi = \pm (N_{3c} - N_{3a})^{-1/2} \int_{y(0)}^{y(\xi)} dy / [(1 - y^2)(1 - \gamma^2 y^2)]^{1/2}, \quad (37.10)$$

где $\gamma^2 = (N_{3b} - N_{3a}) / (N_{3c} - N_{3a})$.

Таким образом, решение для плотности истока квантов $N_3(\xi)$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned} N_3(\xi) &= N_{3a} + (N_{3b} - N_{3a}) \operatorname{sn}^2 [(N_{3c} - N_{3a})^{1/2}(\xi + \xi_0); \gamma], \\ N_2(\xi) &= N_2(0) + N_3(0) - N_{3a} - \\ &- (N_{3b} - N_{3a}) \operatorname{sn}^2 [(N_{3c} - N_{3a})^{1/2}(\xi + \xi_0); \gamma], \quad (37.11) \\ N_1(\xi) &= N_1(0) + N_3(0) - N_{3a} - \\ &- (N_{3b} - N_{3a}) \operatorname{sn}^2 [(N_{3c} - N_{3a})^{1/2}(\xi + \xi_0); \gamma]. \end{aligned}$$

Здесь величина ξ_0 определяется граничными условиями.

В работе [1] на основе решения (37.11) проанализированы различные интересные для приложений частные случаи граничных условий как при точном согласовании фазовых скоростей, так и при постоянных расстройках фазового синхронизма волн. При больших расстройках фазового синхронизма нелинейное взаимодействие волн существенно ослабляется и носит осцилляционный характер.

В силу пространственно-временной аналогии в укороченных уравнениях [21] формулами (37.11) описывается также не зависящее от пространственной координаты ($\partial/\partial x = 0$) решение исходной системы (37.1), соответствующее нелинейному взаимодействию трех волновых пакетов в безграничной однородной среде, каждый из которых представляет собой дельта-функ-

цию в k -пространстве. При этом переменная ξ в выражениях (37.11) — определенным образом нормированное время, а под $N_3(\xi)$ следует понимать не плотность потока квантов, а число квантов в единице объема [2]. На основе решения (37.11) в [2] проанализирована нелинейная стадия развития распадной неустойчивости в безграничной однородной плазме и показан обратимый характер распадной неустойчивости.

§ 38. Генерация второй гармоники

Простейший из процессов нелинейного взаимодействия трех волн в средах с квадратичной нелинейностью — генерация второй гармоники. В данном параграфе мы исследуем влияние расстройек фазового синхронизма, вызванных неоднородностью среды, на этот процесс без использования линеаризующих уравнения приближений.

Как и в предыдущем параграфе, перейдем в уравнениях (35.2) к действительным амплитудам и фазам волн $A_j(x) = v_j^{1/2} c_j(x) = \rho_j(x) \exp(i\varphi_j(x))$, ($j = 1, 2$). Тогда для действительных амплитуд ρ_j и относительной разности фаз волн $\theta = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \int_0^x \Delta(x_1) dx_1$ в стационарном случае получим из (35.2) следующую систему ($\omega_2 = 2\omega_1$, $\Delta(x) = k_2 - 2k_1$):

$$\begin{aligned} d\rho_1/d\xi &= -2\rho_1\rho_2 \sin \theta, \\ d\rho_2/d\xi &= \rho_1^2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (38.1)$$

$$d\theta/d\xi = \tilde{\kappa}(\xi) + (\rho_1^2/\rho_2 - 4\rho_2) \cos \theta,$$

где $\xi = V_{12}x/v_1(v_2)^{1/2}$, $\tilde{\kappa}(\xi) = v_1(v_2)^{1/2}\Delta(\xi)/V_{12}$. (38.2)

Из первых двух уравнений получается соотношение Мэнли — Роу, которое для случая двух волн эквивалентно условию сохранения плотности потока мощности W в среде без потерь:

$$\begin{aligned} W &= \omega_1(\rho_1^2 + 2\rho_2^2) = \omega_1 v_1 (|c_1|)^2 + \omega_2 v_2 (|c_2|)^2 = \\ &= \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2. \end{aligned} \quad (38.3)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$I = 2\omega_1\rho_2^2/W, \quad I_1 = \omega_1\rho_1^2/W,$$

$$\xi = \xi(2W/\omega_1)^{1/2} = xV_{12}(2W)^{1/2}/v_1(\omega_1v_2)^{1/2} = x/l_{\text{нл}}, \quad (38.4)$$

$$l_{\text{нл}}^{-1} = V_{12}(2W)^{1/2}/v_1(\omega_1v_2)^{1/2}$$

Здесь $l_{\text{нл}}$ — характерная длина нелинейного взаимодействия; $I_1(\xi)$, $I(\xi)$ — нормированные интенсивности первой и второй гармоник, связанные законом сохранения

$$I_1 + I = 1. \quad (38.5)$$

Величина I представляет КПД генерации второй гармоники по плотности мощности. Для однородных по сечению пучков накачки I является одновременно и КПД генерации второй гармоники по полной мощности.

Уравнения (38.1) в безразмерных переменных с учетом соотношения (38.5) приводятся к виду

$$dI/d\xi = \pm 2I^{1/2}(1 - I) \sin \theta, \quad (38.6)$$

$$d\theta/\xi = \kappa(\xi) \pm [(1 - I)/I^{1/2} - 2I^{1/2}] \cos \theta,$$

$$\kappa(\xi) = v_1(v_2)^{1/2}\Delta(\xi) \cdot (\omega_1)^{1/2}/V_{12}(2W)^{1/2} =$$

$$= \tilde{\kappa} \cdot (\omega_1/2W)^{1/2}. \quad (38.7)$$

Здесь выбор знака «плюс» или «минус» определяется знаком $\sin \theta$ при $\xi = 0$, $\kappa(\xi) = \Delta(\xi)l_{\text{нл}}$ — безразмерная расстройка фазового синхронизма. Уравнениям (38.6), (38.7) тождественно удовлетворяет интегральное соотношение, аналогичное полученному в предыдущем параграфе для трех волн:

$$I^{1/2}(1 - I) \cos \theta + (1/2) \int_0^\xi d\xi_1 \kappa(\xi_1) dI/d\xi_1 = \Gamma. \quad (38.8)$$

Выразим $\cos \theta$ через $I(\xi)$, используя (38.8), и подставим полученное выражение в уравнение (38.7). Проинтегрируем после этого формально левую и правую части (38.7). Полученное выражение для фазы $\theta(\xi)$ подставим в (38.6) и приведем окончательно систему (38.6), (38.7) к одному интегродифференциальному уравнению для $I(\xi)$:

$$dI/d\xi = 2I^{1/2} (1 - I) \sin \left\{ \pi/2 + \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^\xi d\xi_1 [1/(1 - I(\xi_1)) - 1/2I(\xi_1)] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) dI/d\xi_2 \right\}. \quad (38.9)$$

При выводе уравнения (38.9) начальная разность фаз волн выбрана для простоты равной $\theta(0) = \pi/2$ ($\Gamma = 0$). Введем следующее обозначение:

$$\alpha\{I(\xi)\} = \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^\xi d\xi_1 [1/(1 - I(\xi_1)) - 1/2I(\xi_1)] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) dI/d\xi_2. \quad (38.10)$$

Величина $\alpha\{I(\xi)\}$ имеет смысл набег разности фаз волн из-за неоднородности среды на длине ξ . Уравнение (38.10) можно переписать также в интегральном виде, удобном для качественного исследования ($I(0) = 0$):

$$I(\xi) = \text{th}^2 \left\{ \int_0^\xi d\xi_1 \cos[\alpha\{I(\xi_1)\}] \right\}. \quad (38.11)$$

Как видно из уравнения (38.11), неоднородность среды уменьшает эффективную длину нелинейной среды и, если набег разности фаз волн $\alpha\{I(\xi)\} \gg 1$ велик, то косинус в подынтегральном выражении осциллирует, что существенно ослабляет нелинейное взаимодействие волн.

Первый максимум генерации второй гармоники в неоднородной среде достигается на длине ξ_m , определяемой из условия:

$$dI/d\xi|_{\xi=\xi_m} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha\{I(\xi_m)\} = \pi/2. \quad (38.12)$$

КПД генерации второй гармоники в первом максимуме можно оценить из выражения (38.11)

$$I_m(\xi_m) \approx \text{th}^2 \left[\int_0^{\xi_m} d\xi_1 \cos \alpha(\xi_1) \right]. \quad (38.13)$$

Рассмотрим сначала случай больших расстройек фазового синхронизма $|\kappa|^{-1} \ll 1$, достаточно медленно изменяющихся в пространстве, так что

$$|\kappa'|/\kappa^2 \ll 1. \quad (38.14)$$

При этом эффективность преобразования энергии во вторую гармонику невелика, ее интенсивность мала ($I \ll 1$), и потому нетрудно вычислить набег разности фаз $\alpha(\xi)$ в (38.10), (38.11) с точностью до членов порядка $|\kappa|^{-1} \ll 1$ и $|d(\kappa^{-1})/d\xi| \ll 1$

$$\alpha(\xi) \approx \int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1/2. \quad (38.15)$$

Оценив таким образом величину $\alpha(\xi)$ в явном виде, нетрудно теперь проинтегрировать уравнение (38.11). Приближенное решение в этом случае для граничного условия $I_1(0) = 1$, $I(0) = 0$ имеет вид

$$I(\xi) \approx \text{th}^2 \left[\int_0^{\xi} d\xi_1 \cos \left(\int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2)/2 \right) \right], \quad (38.16)$$

$$|\kappa|^{-1} \ll 1, \quad |d(\kappa^{-1})/d\xi| \ll 1. \quad (38.17)$$

Интеграл под знаком гиперболического тангенса при выполнении условий (38.17) можно оценить методом стационарной фазы [21], считая, что в рассматриваемом интервале отсутствуют точки, стационарной фазы ($\kappa(\xi) \neq 0$):

$$I(\xi) \approx \text{th}^2 \left[2 \sin \left(\int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1/2 \right) / \kappa(\xi) \right]. \quad (38.18)$$

Поскольку аргумент гиперболического тангенса мал, разлагая тангенс, получаем решение в форме

$$I(\xi) \approx 4 \sin^2 \left(\int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1/2 \right) / \kappa^2(\xi). \quad (38.19)$$

Подставляя решение (38.18), (38.19) в выражение (38.10) для $\alpha\{I(\xi)\}$, можно убедиться в том, что отброшенные члены малы по сравнению с удержанными: эти члены будут приводить к более медленному по сравнению с основным изменению фазы, которое мо-

жет быть вычислено по теории возмущений, однако существенно не изменит характера решения (38.18), (38.19). При постоянных расстройках фазового синхронизма ($\kappa = \kappa_0 = \text{const}$) выражение (38.19) полностью соответствует формуле, полученной в [1] разложением точного решения по малым $|\kappa_0^{-1}| \ll 1$ при сильных расстройках фазового синхронизма.

Заметим, что решение в виде (38.19), по существу, может быть получено применением метода ВКБ к исходным уравнениям в приближении заданной интенсивности

$$d^2 A_2 / d\xi^2 + i\kappa(\xi) dA_2 / d\xi + A^2 = 0, \quad (38.20)$$

или
$$d^2 \Psi / d\xi^2 + (\kappa^2 / 4 - i\kappa' / 2 + 1) \Psi = 0,$$

где
$$\Psi = A_2 \exp\left(i \int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1 / 2\right).$$

Исследуем теперь решение уравнения (38.11) в области, окружающей точку фазового синхронизма ξ_c ($\kappa(\xi_c) = 0$), и рассмотрим случай равных нулю расстройок фазового синхронизма на входе в нелинейную среду ($\kappa(0) = 0$). Пусть неоднородность носит линейный характер ($\kappa(\xi) = \kappa' \xi$). При выполнении условий $I(0) = 0$, $\kappa(\xi) = \kappa' \xi$ уравнение (38.11) удобно переписать в интегральном виде

$$I(\xi) = \text{th}^2 \left\{ \int_0^{\xi} d\xi_1 \cos[\alpha \{I(\xi_1)\}] \right\}, \quad (38.21)$$

$$\alpha \{I(\xi)\} = \kappa' \left\{ \int_0^{\xi} \xi_1 d\xi_1 + \int_0^{\xi} d\xi_1 [1 / (1 - I(\xi_1)) - 1 / 2 I(\xi_1)] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \xi_2 dI / d\xi_2 \right\}. \quad (38.22)$$

Если $|\kappa'| \gg 1$ (большой градиент неоднородности в области фазового синхронизма), интеграл в (38.21) под знаком гиперболического тангенса можно оценить методом стационарной фазы. Точка стационарной фазы определяется из уравнения $d[\alpha(\xi)] / d\xi|_{\xi=\xi_c} = 0$, откуда следует $\xi_c = 0$. Таким образом, эта точка, об-

ласть вблизи которой дает основной вклад в интеграл в (38.21), совпадает, что вполне естественно, с точкой фазового синхронизма $\xi_c = 0$ ($\kappa(0) = 0$).

Для вычисления интеграла $\int_0^{\xi} d\xi_1 \cos[\alpha\{I(\xi_1)\}]$ с точностью до членов порядка $(|\kappa'|)^{-1/2} \ll 1$ методом стационарной фазы не требуется полной информации о функции $\alpha\{I(\xi)\}$, достаточно знать лишь производную этой функции в точке стационарной фазы $d^2\alpha/d\xi^2|_{\xi=\xi_c}$. Эту величину нетрудно вычислить, разлагая выражения (38.21), (38.22) по малым $\xi \ll 1$ вблизи $\xi_c = 0$. Произведя соответствующие вычисления, приходим к следующему приближенному выражению для интенсивности:

$$I(\xi) \approx \text{th}^2 \left[\int_0^{\xi} d\xi_1 \cos(\kappa' \xi_1^2/3) \right]. \quad (38.23)$$

Решение (38.23) также можно записать в удобном виде, используя косинус-интеграл Френеля [19]:

$$C(t) = 2 \int_0^t \cos t_1^2 dt_1 / (2\pi)^{1/2}, \quad (38.24)$$

$$I(\xi) \approx \text{th}^2 \{ (3\pi/2 |\kappa'|)^{1/2} C[\xi (|\kappa'|/3)^{1/2}] \}. \quad (38.25)$$

Максимальная эффективность генерации второй гармоники в линейно-неоднородной среде, где безразмерная расстройка фазового синхронизма имеет вид $\kappa(\xi) = \kappa' \xi$, достигается на расстоянии ξ_m от входа в нелинейную среду, определяемом из уравнения (38.12). На расстояниях ξ , больших ξ_m , происходит обратная перекачка энергии в основное излучение и интенсивность второй гармоники падает. Решая (38.12) с учетом (38.25), нетрудно вычислить расстояние от границы нелинейной среды ξ_m , на котором достигается максимальный КПД $I_m(\xi_m)$ генерации второй гармоники:

$$\xi_m \approx (3\pi/2 |\kappa'|)^{1/2}, \quad (38.26)$$

$$I_m(\xi_m) \approx \text{th}^2 [(3\pi/2 |\kappa'|)^{1/2} C((\pi/2)^{1/2})]. \quad (38.27)$$

Следует заметить, что приближенное решение (38.25) справедливо лишь в ограниченной области ($|\xi| \sim \xi_m$) вблизи точки фазового синхронизма, по-

сколько используется разложение функции вблизи точки стационарной фазы; при дальнейшем увеличении ξ существенно увеличивается расстройка фазового синхронизма $\kappa(\xi)$ и колебания интенсивностей первой и второй гармоник носят затухающий характер. Эти колебания приближенно описываются формулой (ср. (38.16), (38.18), (38.19))

$$I \approx I_m/2 + \text{th}^2 \left[2 \sin \left(\int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1/2 + \theta_0 \right) / \kappa(\xi) \right],$$

$$(|\kappa(\xi)|)^{-1} \ll 1, \quad (38.28)$$

где θ_0 — некоторая постоянная добавка к фазе, определяемая начальными условиями.

Аналогичным образом нетрудно получить решения в виде интегралов от известных функций для любой неоднородности $\kappa(\xi)$ при условии, что точка фазового синхронизма находится в начале нелинейной среды ($\kappa(0) = 0$); задача сводится в этом случае к вычислению второй производной $\alpha''(0)$ функции $\alpha\{I(\xi)\}$ в точке стационарной фазы.

Для неоднородностей степенного вида $\kappa(\xi) = \kappa' \xi^p$ КПД генерации второй гармоники вблизи точки фазового синхронизма описывается следующим выражением:

$$I(\xi) \approx \text{th}^2 \left\{ \int_0^{\xi} d\xi_1 \cos \left[\kappa' \xi_1^{p+1} / (p+2) \right] \right\}, \quad (38.29)$$

$$\kappa(\xi) = \kappa' \xi^p.$$

Максимальное значение КПД $I_m(\xi_m)$ в средах с неоднородностью вида $\kappa(\xi) = \kappa' \xi^p$ достигается на длине ξ_m , равной

$$\xi_m \approx [(p+2)\pi/2|\kappa'|]^{1/(p+1)}, \quad (38.30)$$

$$I_m(\xi_m) \approx \text{th}^2 \left\{ \int_0^{\xi_m} d\xi_1 \cos \left[(\kappa' \xi_1^{p+1}) / (p+2) \right] \right\}. \quad (38.31)$$

Аналитические решения для случая не равных нулю на входе в нелинейную среду расстроек фазового синхронизма ($\kappa(\xi) = \kappa_0 + \kappa' \xi$) могут быть получены способом, близким к описанному выше. Мы не будем приводить здесь соответствующие громоздкие выкладки, а обсудим лишь вопрос об оптимальных расстрой-

как фазового синхронизма на входе в нелинейную среду κ_{opt} , обеспечивающих максимальные значения КПД генерации второй гармоники I_{max} в нелинейной среде с заданной неоднородностью. Этот вопрос является важным, например, для проблемы повышения КПД оптических удвоителей частоты света.

КПД генерации второй гармоники $I(\xi, \kappa_0, \kappa')$ в линейно-неоднородной среде зависит от безразмерной длины нелинейной среды $\xi = L/l_{\text{нл}}$, расстройки фазового синхронизма на входе $\kappa_0 = \Delta(0)l_{\text{нл}}$ и параметра κ' , характеризующего степень неоднородности нелинейной среды. Длина нелинейной среды и расстройка фазового синхронизма на входе могут быть выбраны оптимальными (ξ_{opt} и $\kappa_{0\text{opt}}$) таким образом, чтобы обеспечивался предельно возможный КПД $I_{\text{max}}(|\kappa'|)$ в среде с данным градиентом неоднородности κ' .

Эффективная генерация второй гармоники в неоднородной среде, как видно из проведенного выше анализа (см. (38.23)), происходит в области $-(3\pi/2|\kappa'|)^{1/2} \leq \xi - \xi_c \leq (3\pi/2|\kappa'|)^{1/2}$, окружающей точку ξ_c , где фазовый синхронизм выполняется точно. Для эффективной генерации расстройка фазового синхронизма и длина нелинейной среды должны подбираться таким образом, чтобы вся область интенсивного нелинейного взаимодействия с размером $2(3\pi/2|\kappa'|)^{1/2}$ вблизи точки фазового синхронизма целиком находилась внутри нелинейной среды. Смещение положения точки фазового синхронизма внутри нелинейной среды может быть достигнуто изменением расстройки фазового синхронизма на входе κ_0 . Таким образом, предельно достижимые КПД генерации второй гармоники $I_{\text{max}}(|\kappa'|)$ в линейно-неоднородной среде с градиентом неоднородности κ' для однородных по сечению пучков накачки можно оценить с помощью формулы (ср. (38.27))

$$I_{\text{max}}(|\kappa'|) \approx \text{th}^2 [2(3\pi/2|\kappa'|)^{1/2} C((\pi/2)^{1/2})]. \quad (38.32)$$

На рис. 16 показаны зависимости предельных КПД генерации второй гармоники $I_{\text{max}}(|\kappa'|)$ от модуля градиента неоднородности $|\kappa'|$, полученные на основе численного анализа исходной системы (38.6), (38.7) (кривая 1) и по формуле (38.32) (кривая 2). Видно, что полученная формула хорошо описывает исследуе-

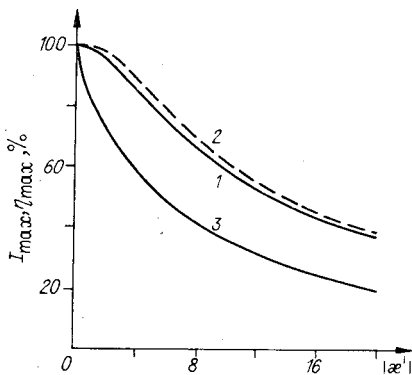


Рис. 16. Зависимость предельных КПД I_{\max} , η_{\max} от параметра $|\kappa'|$. 1 — однородный по сечению пучок накачки, рассчитанный на ЭВМ; 2 — неоднородный по сечению пучок накачки, рассчитанный по формуле (38.32); 3 — неоднородный по сечению пучок накачки.

мый процесс практически во всем диапазоне коэффициентов преобразования энергии во вторую гармонику.

Сделаем несколько замечаний о характере приближений, использованных при получении аналитических решений (38.23), (38.29). С формальной стороны замена неизвестной функции $\alpha\{I(\xi)\}$ простыми степенными выражениями допустима лишь при выполнении условий

$$|\kappa'|^{-1/2} \ll 1 \text{ и } |d(|\kappa'|)^{-1/2}/d\xi| \ll 1. \quad (38.33)$$

В этом случае КПД, как легко видно из (38.25), малы, что соответствует приближению заданной интенсивности. Разложив гиперболический тангенс в (38.25) по малому аргументу согласно условиям (38.33), получим решение, соответствующее приближению заданной интенсивности. Численный анализ показывает, что полученные в этой главе стационарные решения типа (38.23), (38.29) применимы и при высоких коэффициентах преобразования энергии в системе волн.

В слабонеоднородных ($|\kappa| \ll 1$) нелинейных средах могут быть достигнуты высокие КПД преобразования энергии. Решение системы (38.6), (38.7) в этом случае на не слишком больших расстояниях мало отличается от соответствующего решения для однородной среды, так что набег фазы $\alpha\{I(\xi)\}$ в (38.11) можно вычислять, подставляя вместо $I(\xi)$ невозмущенное решение $I_0(\xi) = \text{th}^2 \xi$. Тогда для линейно-неоднородной среды $\kappa(\xi) = \kappa_0 + \kappa' \xi$ получим следующее приближенное решение в квадратурах при малых $|\kappa| \ll 1$:

$$I(\zeta) \approx \text{th}^2 \left[\int_0^{\zeta} d\zeta_1 \cos(\kappa_0 \text{sh } 2\zeta_1/4 + \kappa' \text{ch}^2 \zeta_1/2 - \kappa' \zeta_1 \text{cth } \zeta_1/2) \right]. \quad (38.34)$$

Если неоднородность среды настолько слаба, что набег фазы $\alpha(\zeta) \ll 1$, то можно разложить косинус в выражении (11.35) по малому аргументу и получить решение в явном виде:

$$I(\zeta) \approx \text{th}^2(\zeta) \{ 1 - (2 \text{sh } 2\zeta)^{-1} [(\kappa_0^2 + (\kappa')^2) \text{sh } 4\zeta/32 + \kappa' \kappa_0 \text{ch } 4\zeta/16 + ((\kappa')^2 - \kappa' \kappa_0 \zeta) \text{sh } 2\zeta/2 + (\kappa' \kappa_0 - (\kappa')^2 \zeta) \text{ch } 2\zeta/2 - \kappa' \kappa_0 \zeta^2/2 + \kappa' \zeta^3/3 + (3\kappa' - \kappa_0^2) \zeta/8 - 9\kappa' \kappa_0/16 - (\kappa')^2 \zeta^2 \text{cth } \zeta] \}. \quad (38.35)$$

Сравнение точных решений с приближенными (38.34), (38.35) показывает, что последние хорошо применимы при $\kappa \lesssim 0,7$, тогда возможно достижение высоких КПД ($\geq 90\%$).

§ 39. Об эффективности преобразования частот в поле неоднородной волны накачки

В предыдущем параграфе исследовалась генерация второй гармоники для однородных по сечению пучков накачки. В реальных условиях распределение плотности мощности накачки по сечению пучка, как правило, является неоднородным: интенсивность накачки спадает на крыльях пучка, что приводит к увеличению эффективной нелинейной длины $l_{\text{нл}}$, параметра κ' и, как следствие, к снижению КПД генерации второй гармоники по полной мощности. В этом параграфе мы исследуем влияние неоднородности пучка накачки по сечению на КПД преобразования энергии во вторую гармонику по полной мощности.

Будем рассматривать цилиндрически-симметричный случай, а распределение интенсивности волны накачки по сечению пучка будем считать гауссовским:

$$\rho_1(x=0, r) = \rho_1(x=0, r=0) \exp(-r^2/a^2), \quad (39.1)$$

где r — расстояние от оси пучка в поперечном направлении, a — радиус поперечного сечения интенсивности пучка по уровню $\exp(-2)$.

Удобно ввести (аналогично (38.4)) безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} I_1 &= \omega_1 \rho_1^2 / W_0, \quad I = 2\omega_1 \rho_2^2 / W_0, \\ \xi &= x/l_{\text{нл}}, \quad l_{\text{нл}}^{-1} = V_{12} (2W_0)^{1/2} / v_1 (\omega_1 v_2)^{1/2}, \\ \kappa(\xi) &= \Delta \cdot l_{\text{нл}} = \kappa_0 + \kappa' \xi, \\ W_0 &= (\omega_1 \rho_1^2 + 2\omega_1 \rho_2^2) |_{x=0, r=0}. \end{aligned} \quad (39.2)$$

Здесь W_0 — плотность мощности накачки в центре пучка при $\xi = 0$. Мы будем полагать дифракцию слабой, что справедливо для длин $L < L_d = ka^2/2$ при малых коэффициентах преобразования энергии (при больших усилениях это условие требует уточнения в связи с нелинейностью [20]).

Зависимость амплитуд $\rho_j(x, r)$ от поперечной координаты в условиях слабости дифракционных эффектов определяется лишь граничными условиями

$$\begin{aligned} \rho_1(x=0, r) &= \rho_0 \mathcal{J}_0^{1/2}(r), \quad \rho_0 = \rho_1(x=0, r=0), \\ \rho_2(x=0) &= 0, \end{aligned} \quad (39.3)$$

где $\mathcal{J}_0(r) = \exp(-2r^2/a^2)$.

С учетом соотношения Мэнли — Роу $\mathcal{J}_1(\xi, r) + I(\xi, r) = \mathcal{J}_0(r)$ система укороченных уравнений (ср. (38.6), (38.7)) для интенсивности $I(\xi, r)$ и относительной разности фаз волн

$$\theta(\xi, r) = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1$$

в безразмерных переменных приобретает вид

$$dI/d\xi = 2I^{1/2}(\mathcal{J}_0(r) - I) \sin \theta, \quad (39.4)$$

$$d\theta/d\xi = \kappa(\xi) + [(\mathcal{J}_0(r) - I)/I^{1/2} - 2I^{1/2}] \cos \theta,$$

$$I(\xi=0) = 0, \quad \theta(\xi=0) = \pi/2. \quad (39.5)$$

Зависимость от поперечной координаты r вошла теперь в уравнение через параметр $\mathcal{J}_0(r)$, а не в граничные условия, что несколько удобнее при численном анализе задачи.

Решение системы (39.4) с граничными условиями (39.5) дает выражение для нормированной интенсивности второй гармоники $I(\zeta, \kappa_0, \kappa', \mathcal{I}_0)$, зависящее от параметра $\mathcal{I}_0(r)$, определяемого расстоянием от центра пучка. В дальнейшем нас будет интересовать КПД преобразования частоты по полной мощности

$$\eta = \int_0^{\infty} 2\omega_1 \rho_2^2(\zeta, r) r dr / \omega_1 \int_0^{\infty} \rho_1^2(\zeta = 0, r) r dr, \quad (39.6)$$

или с учетом обозначений (39.2)

$$\eta = \int_0^1 d\mathcal{I}_0 I(\zeta, \kappa_0, \kappa', \mathcal{I}_0) / \mathcal{I}_0. \quad (39.7)$$

При точном выполнении условий фазового синхронизма КПД преобразования частоты по полной мощности для гауссовского пучка определяется следующим выражением (рис. 17, кривая 2):

$$\eta = 1 - 2 \operatorname{th} \zeta / \zeta + 2 \ln (\operatorname{ch} \zeta) / \zeta^2. \quad (39.8)$$

Рис. 17 (кривые 1, 2) иллюстрирует тот факт, что даже при точном выполнении условий фазового синхронизма неоднородность пучка по сечению существенно ограничивает эффективность преобразования частоты при не слишком больших длинах нелинейной среды. При больших длинах отличие в эффективности преобразования частоты однородных и неоднородных по сечению пучков стирается, так что и для неоднородных пучков сохраняется принципиальная возможность достижения КПД генерации по полной мощности 100%.

Дальнейший анализ задачи проводился на ЭВМ. Интегрирование решения $I(\zeta, \kappa_0, \kappa', \mathcal{I}_0(r))$ системы (39.4), (39.5) по параметру $\mathcal{I}_0(r)$ (см. (39.7)) проводилось на каждом шаге разностной схемы, в результате чего получалась интересующая нас величина КПД генерации второй гармоники по полной мощности $\eta(\zeta, \kappa_0, \kappa')$, зависящая от безразмерных длин нелинейной среды ζ , начальной расстройки фазового синхронизма κ_0 и параметра κ' , характеризующего неоднородность среды.

В неоднородных средах характер решений для КПД $\eta(\zeta, \kappa_0, \kappa')$ качественно изменяется. Вначале с увеличением длины кристалла ζ КПД $\eta(\zeta, \kappa_0, \kappa')$ воз-

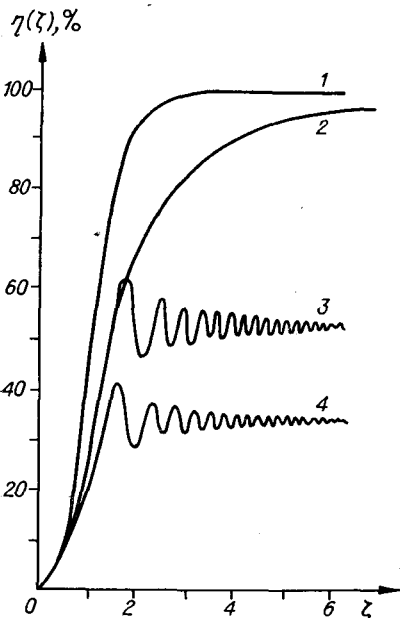


Рис. 17. Зависимость КПД преобразования частоты $\eta(\zeta)$ от безразмерной длины кристалла ζ .

1 — $\kappa_0=0$, $\kappa'=0$ (однородный пучок накачки); 2 — $\kappa_0=0$, $\kappa'=0$ (неоднородный пучок накачки); 3 — $\kappa_0=\kappa_{0\text{opt}}=-6,5$, $\kappa'=8$ (однородный пучок накачки); 4 — $\kappa_0=\kappa_{0\text{opt}}=-5,5$, $\kappa'=8$ (неоднородный пучок накачки).

пучков накачки, как и для однородных по сечению пучков накачки, следует подбирать одновременно начальную расстройку κ_0 и длину кристалла ζ таким образом, чтобы в этих условиях КПД генерации достигал своего максимально возможного значения:

$$\eta(\zeta_{\text{opt}}, \kappa_{0\text{opt}}, |\kappa'|) = \eta_{\text{max}}(|\kappa'|).$$

Для получения зависимости предельно достижимых КПД $\eta_{\text{max}}(|\kappa'|)$ от параметра $|\kappa'|$ расстройка фазового синхронизма на входе κ_0 и длина кристалла ζ подбирались на основе численных расчетов таким образом, чтобы обеспечить максимальное значение КПД при

растает, достигая некоторого максимального значения при данных κ_0 и κ' , а затем, осциллируя, стабилизируется (см. рис. 17) на более низком уровне. При этом неоднородность пучка по сечению оказывается существенной и на больших длинах (ср. кривые 3, 4 на рис. 17), так что разница между однородным и гауссовским пучком не исчезает с увеличением длины нелинейной среды, как это было в случае однородных сред. Этот эффект связан с увеличением влияния неоднородности нелинейной среды на крыльях пучка из-за уменьшения интенсивности накачки.

При исследовании вопроса о предельно возможных КПД генерации второй гармоники в случае гауссовских

каждом заданном значении параметра $|\kappa'|$. На рис. 16 показана зависимость КПД генерации второй гармоники по полной мощности $\eta_{\max}(|\kappa'|)$ от параметра $|\kappa'|$ для неоднородного по сечению пучка накачки (кривая 3) в сравнении с соответствующей зависимостью для однородного пучка накачки. Видно, что неоднородность пучка по сечению приводит к существенному снижению предельно достижимых значений КПД по сравнению с однородным пучком.

§ 40. Взаимодействие трех волн

Данный параграф посвящен анализу стационарных решений укороченных уравнений для невырожденного взаимодействия трех волн ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\Delta(x) = k_3 - k_1 - k_2$).

Рассмотрим сначала нелинейные процессы, в которых энергия преобразуется в более высокие частоты. При этом на границу нелинейной среды подаются волны с частотами ω_1 и ω_2 , а волна с суммарной частотой ω_3 генерируется. Такие процессы в нелинейной оптике принято называть процессами смещения частот, а по терминологии, принятой в теории плазмы, такие нелинейные взаимодействия волн называются нераспадаемыми.

Систему уравнений (37.4) с учетом соотношений Мэнли — Роу (37.2) и интегрального соотношения (37.5) способом, аналогичным описанному в § 38, можно привести в интегродифференциальному уравнению для плотности потока числа квантов $N_3(\xi)$ с частотой ω

$$dN_3/d\xi = \pm 2[N_3(m_1 - N_3)(m_2 - N_3)]^{1/2} \cos[\alpha\{N_3(\xi)\}], \quad (40.1)$$

$$\alpha\{N_3(\xi)\} = \int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1 + (1/2) \int_0^{\xi} d\xi_1 [(m_1 - N_3)^{-1} + (m_2 - N_3)^{-1} - N_3^{-1}] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) dN_3/d\xi_2. \quad (40.2)$$

Выбор знака в уравнении (40.1), так же как и в (37.7), определяется граничными условиями. Константы m_1 и m_2 определяются соотношениями Мэнли — Роу (37.2).

Пусть $N_3(0) = 0$, а $N_1(0) \geq N_2(0)$, тогда $m_1 = N_1(0)$, $m_2 = N_2(0)$. Для этого случая в уравнении (40.1) следует выбрать знак «плюс». Для простоты здесь и ниже мы рассматриваем случай $\theta(0) = \pi/2$, что соответствует равенству нулю константы Γ в (37.5).

Исследуем сначала решение (40.1), (40.2) вблизи точки фазового синхронизма $\xi_c = 0$ для неоднородности вида $\kappa = \kappa' \xi$. Уравнение (40.1) удобно переписать в интегральном виде

$$\int_0^{\xi} d\xi_1 \cos \alpha \{N_3(\xi_1)\} = \int_{N_3(0)}^{N_3(\xi)} dN_3 / 2 [N_3(m_1 - N_3)(m_2 - N_3)]^{1/2}. \quad (40.3)$$

Это уравнение напоминает выражение (37.8) для случая $\Gamma = \kappa_0 = 0$, лишь вместо переменной ξ — длины нелинейной среды — стоит некоторое интегральное выражение, играющее роль эффективной длины нелинейной среды.

Если среда однородна и расстройка фазового синхронизма равна нулю ($\kappa = 0$), то из (40.3) получается уже известное нам решение (37.11), которое для этого частного случая ($\Gamma = 0$, $N_{3c} = N_1(0)$, $N_{3b} = N_2(0)$, $N_{3a} = 0$, $\xi_0 = 0$, $\gamma^2 = N_2(0)/N_1(0)$) принимает вид:

$$\begin{aligned} N_3(\xi) &= N_2(0) \operatorname{sn}^2 [(N_1(0))^{1/2} \xi; \gamma], \\ N_2(\xi) &= N_2(0) - N_2(0) \operatorname{sn}^2 [(N_1(0))^{1/2} \xi; \gamma], \\ N_1(\xi) &= N_1(0) - N_2(0) \operatorname{sn}^2 [(N_1(0))^{1/2} \xi; \gamma]. \end{aligned} \quad (40.4)$$

При малых $\gamma^2 = N_2(0)/N_1(0) \ll 1$ решение (40.4) приближенно можно записать следующим образом:

$$N_3(\xi) \approx N_2(0) \sin^2 [(N_1(0))^{1/2} \xi]. \quad (40.5)$$

Из (40.3) видно, что эффективная длина нелинейной среды $\int_0^{\xi} \cos[\alpha \{N_3(\xi_1)\}] d\xi_1$ тем меньше, чем сильнее неоднородность.

Пусть градиент неоднородности велик, так что для оценки интеграла $\int_0^{\xi} \cos[\alpha \{N_3(\xi_1)\}] d\xi_1$ можно применить метод стационарной фазы подобно тому, как это

было сделано в § 38. Прделав соответствующие вычисления, приходим к следующему выражению для оценки этого интеграла вблизи точки стационарной фазы:

$$\int_0^{\xi} \cos [\alpha \{N_3(\xi_1)\}] d\xi_1 \approx \int_0^{\xi} \cos (\kappa' \xi_1^2 / 3) d\xi_1 = \\ = (3\pi/2 |\kappa'|)^{1/2} C((|\kappa'|/3)^{1/2} \xi). \quad (40.6)$$

Такая оценка интеграла в (40.4) может быть получена при выполнении условий

$$(|\kappa'|/N_1(0))^{-1/2} \ll 1, \quad d(|\kappa'|^{-1/2})/d\xi \ll 1. \quad (40.7)$$

Условия (40.7) аналогичны условиям (38.33), однако в отличие от безразмерных величин κ' , ξ , введенных в § 38, величины κ' и ξ в формуле (40.8) имеют размерность. Введенные в § 37 и имеющие размерность переменные $N_j(\xi)$, ξ , $\kappa(\xi)$ удобны для рассмотрения невырожденного трехчастотного взаимодействия волн, ибо позволяют записать соответствующие решения в общем виде независимо от соотношения частот взаимодействующих волн.

Окончательно получаем с учетом (40.3)—(40.5) при выполнении условий (40.7) приближенное решение для $N_3(\xi)$

$$N_3(\xi) \approx N_2(0) \operatorname{sn}^2[(3\pi N_1(0)/2|\kappa'|^{1/2})C((|\kappa'|/3)^{1/2}\xi); \gamma], \\ \gamma^2 = N_2(0)/N_1(0). \quad (40.8)$$

Плотность потока квантов $N_3(\xi)$ волны с суммарной частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ вначале нарастает, достигая максимального значения $N_{3m}(\xi_m)$, как это видно из (40.5), (40.8), на расстоянии $\xi_m = (3\pi/2|\kappa'|)^{1/2}$, причем

$$N_{3m}(\xi_m) \approx N_2(0) \operatorname{sn}^2[(3\pi N_1(0)/2|\kappa'|)^{1/2}C((\pi/2)^{1/2}); \gamma], \quad (40.9)$$

а затем происходит обратная перекачка энергии в волны с частотами ω_1 и ω_2 с последующими осцилляциями.

При малых $\gamma^2 = N_2(0)/N_1(0) \ll 1$ выражения (40.8), (40.9) упрощаются аналогично (40.5)

$$N_3(\xi) \approx N_2(0) \sin^2[(3\pi N_1(0)/2|\kappa'|)^{1/2}C((|\kappa'|/3)^{1/2}\xi)], \quad (40.10)$$

$$N_{3m}(\xi_m) \approx N_2(0) \sin^2 [(3\pi N_1(0)/2|\kappa'|)^{1/2} C((\pi/2)^{1/2})]. \quad (40.11)$$

Если плотности потока квантов волн с частотами ω_1, ω_2 на границе нелинейной среды одинаковы ($N_1(0) = N_2(0)$), то из (40.3), (40.6) получаем следующее выражение для $N_3(\xi)$:

$$N_3(\xi) = N_1(0) \operatorname{th}^2 [(3\pi N_1(0)/2|\kappa'|)^{1/2} \cdot C((|\kappa'|/3)^{1/2}\xi)]. \quad (40.12)$$

Сравнение (40.12) с формулой (38.25) показывает, что этот частный случай, так же как и при точном согласовании фазовых скоростей [1], вполне аналогичен генерации второй гармоники.

Максимальный коэффициент преобразования энергии с повышением частоты может быть оценен по формуле (область фазового синхронизма должна целиком находиться внутри нелинейной среды)

$$N_{3 \max}(2\xi_m) \approx N_2(0) \operatorname{sn}^2 [2(3\pi N_1(0)/2|\kappa'|)^{1/2} C((\pi/2)^{1/2}); \gamma]. \quad (40.13)$$

Проанализируем теперь случай, когда волной накачки является волна с максимальной частотой $\omega_3 (N_3(0) > N_1(0), N_2(0) = 0)$. Этот случай соответствует пространственному развитию обсуждавшейся в предыдущей главе распадной неустойчивости на нелинейной стадии; в нелинейной оптике такой процесс принято называть параметрическим усилением волны разностной частоты. Плотность потока квантов $N_3(\xi)$ описывается уравнением (40.1), в котором следует выбрать знак «минус».

Величины m_1 и m_2 определяются соотношениями Мэнли — Роу:

$$m_1 = N_1(0) + N_3(0), \quad m_2 = N_3(0). \quad (40.14)$$

Решение для расстройки фазового синхронизма, равной нулю ($\kappa = 0$) (см. (37.11), (40.14)), имеет вид ($N_{3c} = N_1(0) + N_3(0)$)

$$N_{3b} = N_3(0), \quad N_{3a} = 0, \quad \gamma^2 = N_3(0)/(N_1(0) + N_3(0))$$

$$N_3(\xi) = N_3(0) \operatorname{sn}^2[(N_1(0) + N_3(0))^{1/2}(\xi - \xi_0); \gamma], \quad (40.15)$$

$$N_2(\xi) = N_3(0) - N_3(0) \operatorname{sn}^2 [(N_1(0) + N_3(0))^{1/2}(\xi - \xi_0); \gamma],$$

$$N_1(\xi) = N_1(0) + N_3(0) - \\ - N_3(0) \operatorname{sn}^2 [(N_1(0) + N_3(0))^{1/2}(\xi - \xi_0); \gamma].$$

Здесь величина $\xi_0(N_1(0) + N_3(0))^{1/2}$ равна в соответствии с граничными условиями четверти периода эллиптического синуса [19]

$$\xi_0(N_1(0) + N_3(0))^{1/2} = K(\gamma), \quad (40.16)$$

где $K(\gamma)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Выражение (40.16) определяет ту длину, на которой происходит полное преобразование энергии в волны с частотами ω_1 и ω_2 , т. е. полный распад волны с максимальной частотой. Вспоминая, что $\xi = Vx/(v_1v_2v_3)^{1/2}$ и $N_j = v_j|c_j|^2$ (см. § 37), из (40.16) получаем следующее выражение для длины x_0 , на которой происходит полное преобразование энергии:

$$x_0 = K(\gamma)(v_1v_2v_3)^{1/2}/V(v_1|c_1(0)|^2 + v_3|c_3(0)|^2)^{1/2}, \quad (40.17)$$

$$\gamma^2 = N_3(0)/(N_1(0) + N_3(0)).$$

В случае, когда $N_1(0)/N_3(0) \ll 1$, полный эллиптический интеграл первого рода $K(\gamma)$ можно разложить по малому параметру $\gamma' = (1 - \gamma^2)^{1/2} = N_1(0)/(N_1(0) + N_3(0)) \ll 1$:

$$K(\gamma) \approx -(\gamma'/2)^2 + \ln(4/\gamma')[1 + \gamma'/2 + O((\gamma')^4)]. \quad (40.18)$$

В результате получаем

$$x_0 \approx (v_1v_2)^{1/2} \ln[N_3(0)/N_1(0)]/2V|c_3(0)|. \quad (40.19)$$

Величина, обратная x_0 , отличается от пространственного инкремента распадной неустойчивости логарифмическим множителем, который определяет длину, необходимую для того, чтобы малые начальные возмущения даже при экспоненциальном росте достигли амплитуды исходной волны.

В этом случае также можно применить к анализу решения уравнения (40.1) в области вблизи точки фазового синхронизма развитый выше подход. Пусть точка фазового синхронизма находится в нуле ($\kappa(\xi) = \kappa'\xi$). Тогда аналогично (40.8) получаем при выполнении условий

$$|\kappa'/(N_1(0) + N_3(0))|^{-1/2} \ll 1, \quad d(|\kappa'|^{-1/2})/d\xi \ll 1 \quad (40.20)$$

следующее выражение для плотности потока квантов $N_1(\xi)$ усиливаемой волны:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) \approx & N_1(0) + N_3(0) - \\
 & - N_3(0) \operatorname{sn}^2 \{ [(3\pi(N_1(0) + N_3(0)) / 2|\kappa'|)^{1/2} \times \\
 & \times C((|\kappa'|/3)^{1/2}\xi) - K(\gamma)] ; \gamma \}, \\
 & \gamma^2 = N_3(0) / (N_1(0) + N_3(0)). \quad (40.21)
 \end{aligned}$$

Если неоднородность сильная, то интенсивность волны с частотой ω_1 нарастает лишь до точки $\xi_m = (2\pi/2|\kappa'|)^{1/2}$, а затем происходит обратная перекачка энергии. Максимальная плотность потока числа квантов $N_{1 \max}$ достигается в случае, когда вся область синхронизма с размером $2\xi_m = 2(3\pi/2|\kappa'|)^{1/2}$ находится внутри нелинейной среды. Эта величина может быть рассчитана по формуле

$$\begin{aligned}
 N_{1 \max} \approx & N_1(0) + N_3(0) - \\
 & - N_3(0) \operatorname{sn}^2 \{ [2(3\pi(N_1(0) + N_3(0)) / 2|\kappa'|)^{1/2} \times \\
 & \times C((\pi/2)^{1/2}) - K(\gamma)] ; \gamma \}. \quad (40.22)
 \end{aligned}$$

Степень влияния неоднородности может быть оценена из сопоставления характерной длины нелинейного взаимодействия $\xi_0 = K(\gamma) / (N_1(0) + N_3(0))^{1/2}$ и длины области фазового синхронизма $2\xi_m = 2(3\pi/2|\kappa'|)^{1/2}$. Если неоднородность достаточно слабая, так что $\xi_0 < 2\xi_m$, то возможно полное преобразование энергии в низшие частоты, поскольку эллиптический синус в (40.22) может стать равным нулю, при этом $N_{1 \max} \approx N_3(0)$. В противоположном случае ($\xi_0 > 2\xi_m$) полное преобразование энергии не осуществляется, так как на длине порядка $2\xi_m$ начинается обратная перекачка энергии, а максимальный коэффициент ее преобразования определяется формулой (40.22).

В заключение мы сделаем несколько замечаний о границах применимости формул, полученных выше. Если градиент неоднородности в области фазового синхронизма достаточно велик, так что выполнены условия (40.7), (40.20), то коэффициент преобразования энергии в новые частоты мал. Разложив полученные выше решения с учетом (40.7), (40.20) по малому аргументу, мы фактически приходим к приближению заданной интенсивности. Так, соответствующий предельный

переход в формуле (40.22) приводит нас к результату (см. (34.10), (34.14), (34.15)), уже полученному в § 34 для линеаризованных уравнений ($C((\pi/2)^{1/2}) \approx 0,78$).

§ 41. Стабилизация взрывной неустойчивости

Процесс нелинейного взаимодействия трех волн при участии волн с отрицательной энергией может происходить качественно различным образом в зависимости от соотношения частот в системе волн. Если частота волны с отрицательной энергией не максимальна, то укороченные уравнения, описывающие процесс, вполне аналогичны обсуждавшимся в предыдущих параграфах. Однако при этом в системе волн даже при низкочастотной накачке возможен полный обмен энергией между низко- и высокочастотными модами, что означает полный распад волны с низкой частотой [25]. Расстройки фазового синхронизма, вызванные неоднородностью, влияют на этот процесс аналогично тому, как это описано в § 40.

В случае, когда волна с максимальной частотой является волной с отрицательной энергией, резонансное нелинейное взаимодействие приводит к одновременному нарастанию амплитуд всех трех волн. В простейших моделях [23, 24], описывающих такое взаимодействие, наблюдается так называемая взрывная неустойчивость (рост амплитуд всех взаимодействующих волн до бесконечности за конечное время и на конечной длине).

Естественно, что в зависимости от конкретной физической ситуации модели должны быть дополнены факторами, обуславливающими ограничение бесконечного роста амплитуд волн. Если амплитуды волн в результате взаимодействия достигают больших значений, то чрезвычайно важным становится учет нелинейностей более высокого порядка. В ряде работ показано, что стабилизация взрывной неустойчивости может быть связана с расстройкой резонансного взаимодействия волн, возникающей из-за нелинейных сдвигов частот [25]. К ограничению роста амплитуд приводит также обратное влияние возбуждаемых волн на орбиты ча-

стиц в плазме и функцию их распределения, а следовательно, на дисперсионные свойства среды [25, 26]. При линейном затухании взрывная неустойчивость возбуждается начиная лишь с некоторых пороговых интенсивностей волн [25, 27].

В данном параграфе мы будем рассматривать другую ситуацию, когда амплитуды волн не достигают таких значений, при которых становится существенным учет нелинейностей более высокого порядка, а характер взаимодействия волн в основном определяется неоднородностью среды.

Взрывная неустойчивость чрезвычайно чувствительна к расстройкам фазового синхронизма волн. Так, в работе [28] показано, что при не слишком больших начальных интенсивностях волн даже малая постоянная расстройка стабилизирует взрывную неустойчивость и устанавливает периодический режим. Стационарная картина нелинейного взаимодействия волн в неравновесных неоднородных средах изучалась Т. А. Давыдовой и В. Н. Ораевским [29]. Они показали, что неоднородность среды, приводящая к расстройкам фазового синхронизма, может стабилизировать развитие «пространственного взрыва».

Ниже мы будем рассматривать стационарную картину взрывного взаимодействия, следуя работам [13, 14]. Пусть групповые скорости всех волн положительны ($v_j > 0$), волна с частотой ω_3 ($\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, $\Delta(x) = k_1 + k_2 + k_3$) является волной с отрицательной энергией. Тогда стационарная ($\partial/\partial t = 0$) картина нелинейного взаимодействия волн будет описываться уравнениями, следующими из (5.16) (см. гл. I):

$$\begin{aligned} dA_1/d\xi &= iA_2^*A_3^* \exp\left(-i \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1\right), \\ dA_2/d\xi &= iA_1^*A_3^* \exp\left(-i \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1\right), \\ dA_3/d\xi &= iA_1^*A_2^* \exp\left(-i \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1\right), \end{aligned} \quad (41.1)$$

Здесь комплексные амплитуды введены так же, как и в § 37 настоящей главы: $A_j = v_j^{1/2} c_j$, $\xi = Ux/(v_1 v_2 v_3)^{1/2}$,

$\kappa(\xi) = \Delta(\xi)(v_1 v_2 v_3)^{1/2} / U$ (U для простоты считаем действительным). Квадрат модуля комплексной амплитуды $|A_j|^2$ имеет смысл плотности потока числа квантов. Уравнения (41.1) имеют интегралы движения, аналогичные соотношениям Мэнли — Роу (37.2)

$$\begin{aligned} N_3 - N_1 &= m_1 = \text{const}, \\ N_3 - N_2 &= m_2 = \text{const}, \\ N_1 - N_2 &= m_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad N_j = |A_j|^2, \quad (41.2)$$

Системе (41.1) тождественно удовлетворяет следующее интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} [N_3(N_3 - m_1)(N_3 - m_2)]^{1/2} \cos \theta - (1/2) \int_0^\xi d\xi_1 \kappa(\xi_1) \times \\ \times dN_3/d\xi_1 = \Gamma, \quad A_j = N_j^{1/2} \exp(i\varphi_j). \end{aligned} \quad (41.3)$$

Здесь $\theta = - \left[\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \int_0^\xi d\xi_1 \kappa(\xi_1) \right]$, а Γ — константа, определяемая граничными условиями.

Система (41.1), так же как и в предыдущих параграфах, приводится с помощью соотношения (41.3) к следующему уравнению для плотности потока квантов волны с отрицательной энергией:

$$dN_3/d\xi = \pm 2[N_3(N_3 - m_1)(N_3 - m_2)]^{1/2} \sin[\alpha\{N_3(\xi)\}], \quad (41.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha\{N_3(\xi)\} = \left\{ \theta_0 + \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1 - (1/2) \int_0^\xi d\xi_1 [N_3^{-1} + (N_3 - \right. \\ \left. - m_1)^{-1} + (N_3 - m_2)^{-1}] \left(\Gamma + \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) dN_3/d\xi_2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (41.5)$$

Знак в уравнении (41.4) определяется начальным значением относительной разности фаз волн $\theta_0 = \theta(0)$. При точном согласовании фазовых скоростей волн и $\theta(0) = \pi/2$ ($\Gamma = 0$) уравнение (41.4) решается в эллиптических функциях. Удобнее переписать для этого случая уравнение (41.4) в интегральной форме:

$$2\xi = \int_{N_3(0)}^{N_3(\xi)} dN_3 / [N_3(N_3 - m_1)(N_3 - m_2)]^{1/2}. \quad (41.6)$$

Пусть для определенности $N_3(0) > m_1 > m_2$, тогда после введения переменных

$$y = (m_1/N_3)^{1/2}, \quad \gamma = (m_2/m_1)^{1/2} \quad (41.7)$$

интеграл (41.6) приводится к эллиптическому [19]:

$$m_1^{1/2}\xi = - \int_{y(0)}^{y(\xi)} dy / [(1 - y^2)(1 - \gamma^2 y^2)]^{1/2}. \quad (41.8)$$

Отсюда получаем выражение для $N_3(\xi)$

$$N_3(\xi) = m_1 / [(m_1/N_3(0))^{1/2} - \operatorname{sn}(m_1^{1/2}\xi; \gamma)]^2. \quad (41.9)$$

Поскольку $m_1/N_3(0) < 1$, выражение (41.9) обращается в бесконечность как $(\xi_\infty - \xi)^{-2}$ на некотором конечном расстоянии ξ_∞ . Иными словами, нелинейное взаимодействие волн в этом случае носит взрывной характер. Для безграничной однородной среды существует пространственно-однородное ($\partial/\partial x = 0$) решение исходной системы уравнений, совершенно идентичное (41.9) в силу упоминавшейся выше пространственно-временной аналогии. Это решение описывает временную картину развития взрывной неустойчивости в безграничной однородной среде [3].

Приближенные решения уравнения (41.4) можно получить аналогично тому, как это было сделано в предыдущих параграфах. Ограничимся анализом простейшего случая граничных условий: $\Gamma = m_1 = m_2 = 0$, $\theta(0) = \pi/2$. Перепишем уравнение (41.4) в интегральном виде с учетом этих граничных условий

$$N_3(\xi) = N_3(0) \left\{ 1 - (N_3(0))^{1/2} \int_0^\xi d\xi_1 \times \right. \\ \left. \times \cos \left[\int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) + \Phi(\xi_1) \right] \right\}^{-2}, \quad (41.10)$$

$$\Phi(\xi) = - (3/2) \int_0^\xi d\xi_1 (N_3(\xi_1))^{-1} \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) dN_3/d\xi_2. \quad (41.11)$$

Рассмотрим сначала решение в области, где отсутствуют точки фазового синхронизма. Если неоднородность достаточно сильная, так что выполнены условия

$$(|\kappa|/(N_3(0)^{1/2})^{-1} \ll 1, \quad |d(\kappa^{-1})/d\xi| \ll 1, \quad (41.12)$$

то интеграл в (41.10) может быть оценен методом стационарной фазы. При этом вклад в интеграл вносят концы интегрирования, поскольку, по условию, в рассматриваемом интервале отсутствуют точки стационарной фазы.

Взрывная неустойчивость при выполнении условий (41.12) не развивается и решение носит осцилляторный характер

$$N_3(\xi) \approx N_3(0) \left[1 - (N_3(0))^{1/2} (\kappa(\xi))^{-1} \times \right. \\ \left. \times \sin \left(\int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1 + \Phi(\xi) \right) \right]^{-2}. \quad (41.13)$$

В этом выражении величина $\Phi(\xi)$ приводит к медленному изменению фазы синуса, который приблизительно можно оценить следующим образом:

$$\Phi(\xi) \approx 3N_3(0) \int_0^\xi d\xi_1 / \kappa(\xi_1). \quad (41.14)$$

Выражение (41.14) показывает, что медленный набег фазы $\Phi(\xi)$ следует учитывать, если мы интересуемся точной фазой решения, поскольку $\Phi(\xi)$ на значительных длинах может дать набег порядка единицы.

Обратимся теперь к виду решения в областях вблизи точек стационарной фазы ξ_c , которые являются областями фазового синхронизма:

$$\kappa(\xi_c) = -d\Phi/d\xi|_{\xi=\xi_c} \approx 0. \quad (41.15)$$

Пусть $\theta_c = \theta(\xi_c)$ — относительная разность фаз волн, с которой взаимодействующие волны приходят в точку стационарной фазы. Если выполнены условия

$$(|\kappa' N_3(0)|)^{-1/2} \ll 1, \quad |d(|\kappa'|^{-1/2})/d\xi| \ll 1, \quad (41.16)$$

$$\kappa' = d\kappa/d\xi|_{\xi=\xi_c},$$

то приближенное решение в области вблизи точки

$\xi = \xi_c$ можно записать в виде

$$N_3(\xi) \approx N_3(0)[1 - \chi(\xi)]^{-2}, \quad (41.17)$$

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & (\pi N_3(0)/|\kappa'|)^{1/2} \cos \theta_c [1 + \\ & + \text{sign}(\xi - \xi_c) C((|\kappa'|/2)^{1/2} |\xi - \xi_c|)] - \\ & - (1/2)(\pi N_3(0)/|\kappa'|)^{1/2} \text{sign}(\kappa') \sin \theta_c [1 + \\ & + \text{sign}(\xi - \xi_c) S((|\kappa'|/2)^{1/2} |\xi - \xi_c|)], \end{aligned}$$

$$\text{sign } \xi = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ -1, & \xi < 0, \end{cases} \quad \theta_c = \theta(\xi_c). \quad (41.18)$$

Здесь $C(t)$ и $S(t)$ — интегралы Френеля, определяемые формулами:

$$C(t) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^t \cos t_1^2 dt_1,$$

$$S(t) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^t \sin t_1^2 dt_1.$$

Характер решения (41.17), (41.18) определяется знаком функции $\chi(\xi)$, в зависимости от которого область вблизи точки фазового синхронизма оказывается областью нарастания интенсивностей волн ($\text{sign } \chi = +1$) либо, наоборот, областью устойчивости ($\text{sign } \chi = -1$). Максимальное по модулю значение χ_{\max} легко находится непосредственно из (41.18):

$$\chi_{\max} \approx (\pi N_3(0)/|\kappa'|)^{1/2} [2 \cos \theta_c - \text{sign}(\kappa') \sin \theta_c]. \quad (41.19)$$

Знак χ_{\max} , а следовательно, и характер решения определяется значением фазы θ_c . Так, при $\text{sign}(\kappa') = -1$

$$\text{sign } \chi_{\max} = 1, \quad -\arctg 2 < \theta_c < \pi - \arctg 2, \quad (41.20)$$

$$\text{sign } \chi_{\max} = -1, \quad \pi - \arctg 2 < \theta_c < 2\pi - \arctg 2. \quad (41.21)$$

Если $\text{sign } \chi_{\max} = -1$, то взрывная неустойчивость в области фазового синхронизма не развивается. В случае, когда $\text{sign } \chi_{\max} = 1$, условием стабилизации взрывной неустойчивости является следующее:

$$\chi_{\max} < 1. \quad (41.22)$$

Рис. 18, полученный в результате анализа исходной системы уравнений на ЭВМ, демонстрирует фазовый эффект, описываемый формулами (41.17) и (41.21).

Расстройка фазового синхронизма выбрана в виде $\kappa(\xi) = a \cos \xi$, причем кривая 2 соответствует устойчивому вблизи точки стационарной фазы $\xi_c = \pi/2$ случаю ($\text{sign } \chi = -1$) и фазе θ_c , попадающей в интервал, определяемый неравенствами (41.21).

Вдали от точек стационарной фазы в сильно неоднородных средах решение носит, как видно из (41.13), осцилляторный характер с малыми периодами и амплитудами, причем осцилляции интенсивности происходят вблизи некоторого среднего значения, которое определяется вкладом в решение предшествующих точек стационарной фазы. Так, после прохождения p точек стационарной фазы решение будет иметь вид

$$N_3(\xi) \approx N_3(0) \left[1 - \sum_{j=1}^p \chi_{\max j} - (N_3(0))^{1/2} (\kappa(\xi))^{-1} \sin \left(\int_0^{\xi} \kappa(\xi_1) d\xi_1 + \Phi(\xi) \right) \right]^{-2}. \quad (41.23)$$

Здесь $\chi_{\max j}$ — вклад в решение j -й точки стационарной фазы, определяемый по формуле (41.19).

Глава VIII

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

§ 42. Введение

Неоднородность сред весьма часто может носить случайный характер (например, из-за турбулентных флуктуаций плотности, скорости, магнитного поля и

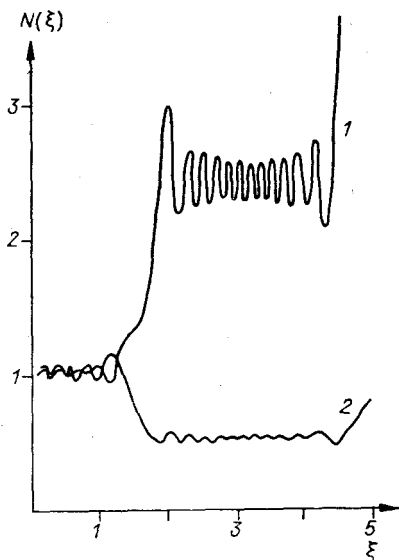


Рис. 18. Численное решение системы (41.1) при $\kappa(\xi) = a \cos \xi$.
 $a=40$ (1), 35,8 (2).

т. п.). В таких случаях мы приходим к необходимости анализа систем линейных или нелинейных стохастических дифференциальных уравнений [1—6].

В линейных задачах теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями при условии малости флуктуаций амплитуд полей применяются хорошо разработанные методы, основанные на последовательном усреднении по случайному процессу рядов теории возмущений [1—3]. Существенные результаты в линейной теории получены и для сильных флуктуаций с применением аппарата теорий марковских случайных процессов (см., например, [7, 8]).

Особые трудности возникают при анализе нелинейных стохастических дифференциальных уравнений [14—17]. Непосредственное усреднение стохастических дифференциальных уравнений обычно удается провести лишь для частных моделей случайных процессов. Как правило, в нелинейных задачах такая процедура приводит к бесконечным зацепляющимся цепочкам уравнений для моментов, анализ которых может представлять значительные трудности. В последнее время был развит ряд методов усреднения нелинейных стохастических уравнений для дельта-коррелированных случайных процессов [8—10], предложены способы усреднения для некоторых конкретных моделей случайных процессов с конечным временем корреляции [11—13]. Вместе с тем даже при анализе частных случаев нелинейных стохастических дифференциальных уравнений далеко не всегда удается получить хорошо обозримые конечные результаты.

В настоящей главе изложены некоторые результаты, относящиеся к теории распространения и взаимодействия линейных и нелинейных волн в случайно-неоднородных средах. На частных примерах, допускающих достаточно полный анализ, обсуждаются некоторые особенности, возникающие при исследовании линейных и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений.

§ 43. О кинетическом уравнении для осциллятора в случайном внешнем поле

Рассмотрим, следуя работе [18], поведение осциллятора под действием внешней силы, которая пред-

ставляет последовательность импульсов с известным случайным законом распределения величины импульсов и промежутков времени между импульсами. В зависимости от времени длительности импульса τ (времени «столкновения») и частоты осциллятора ω возможны два предельных случая: $\omega\tau \ll 1$ и $\omega\tau \gg 1$. Ниже рассматривается второй случай в приближении, когда средний интервал между импульсами много больше ω^{-1} (редкие «столкновения»).

Исходным уравнением, описывающим движение осциллятора, будет

$$\ddot{x} + (\omega^2 + F(t))x = 0. \quad (43.1)$$

Здесь $F(t)$ — последовательность достаточно гладких импульсов¹⁾ с известным случайным законом распределения их формы и промежутков между ними. Условие достаточной «плавности» импульсов $\omega\tau \gg 1$ позволяет записать решение уравнения (43.1) в ВКБ-приближении

$$x = Ax_+ + Bx_-,$$

$$x_{\pm} = \Omega^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega(t') dt' \right\}, \quad \Omega = (\omega^2 + F(t))^{1/2}. \quad (43.2)$$

В интервале между столкновениями $\Omega \approx \omega$ и решение (43.2) представляет собой обычные колебания. Действие столкновения приводит к изменению адиабатического инварианта (E — энергия осциллятора)

$$I = E/\Omega, \quad (43.3)$$

аналогичному эффекту надбарьерного отражения в квантовой механике. Рассмотрим комплексную плоскость t . Линии уровня асимптотических решений (43.2) имеют вид, изображенный на рис. 19. При этом считается, что ближайшими к действительной оси особенностями являются точки t_k, t_k^* (звездочка означает комплексное сопряжение), в которых $\Omega^2(t)$ имеет простой нуль:

$$\Omega^2(t) = \Psi(t) \prod_k (t - t_k)(t - t_k^*). \quad (43.4)$$

Здесь $\Psi(t)$ может иметь особенности или нули в точках

¹⁾ В дальнейшем действие импульса на осциллятор будем называть столкновением.

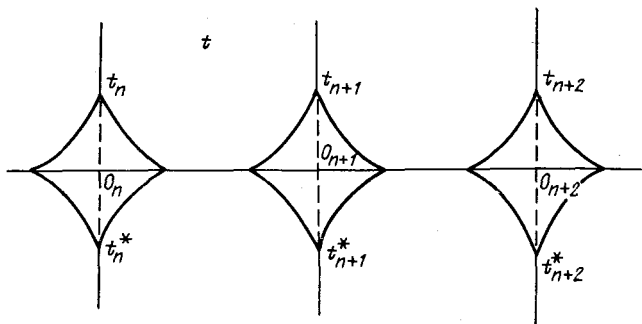


Рис. 19. Линии уровня асимптотических решений (43.2).

с мнимой частью, много большей $\text{Im } t_h$. Изменение адиабатического инварианта при условии (43.4) возникает при прохождении достаточно узкой области вблизи точек O_h (см. рис. 19) и вычислялось в гл. II.

Введем оператор сдвига T_n^+

$$x(t + T_n) = T_n^+ x(t). \quad (43.5)$$

Здесь T_n — промежуток между O_{n+1} и O_n , а момент времени t лежит в интервале (O_{n-1}, O_n) . Воспользуемся для оператора T_n^+ видом, приведенным в § 9:

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} \Phi \exp i(\pi/2 + S_n + \varphi_n) & \exp -[\delta_n + i(\pi/2 - S_n)] \\ \exp[-\delta_n + i(\pi/2 - S_n)] & \Phi \exp -i(\pi/2 + S_n + \varphi_n) \end{pmatrix}, \quad (43.6)$$

$$\delta_n = -i \int_{t_n^*}^{t_n} \Omega(t') dt' > 0, \quad S_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Omega(t') dt' > 0, \quad (43.7)$$

$$\Phi = (1 + \exp(-2\delta_n))^{1/2}.$$

При этом оператор T_n^+ действует на вектор-столбец с компонентами $A_n x_+$, $B_n x_-$. Фаза φ_n в (43.6) по порядку величины не более единицы, и точный вид ее в дальнейшем не понадобится. Оператор T_n имеет структуру

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (43.8)$$

Для удобства выберем x в действительном виде,

т. е. $B = A^*$. Из (43.7) следует, что если $B_n = A_n^*$, то $B_{n+1} = A_{n+1}^*$. Отсюда, согласно (43.3),

$$I_n = |A_n|^2. \quad (43.9)$$

Учтем теперь, что столкновения редкие. Тогда

$$S_n \approx \omega T_n \gg 1 \quad (43.10)$$

и оператор сдвига принимает вид

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon_n^2)^{1/2} \exp(i\omega T_n) & \varepsilon_n \exp(i\omega T_n) \\ \varepsilon_n \exp(-i\omega T_n) & (1 + \varepsilon_n^2)^{1/2} \exp(-i\omega T_n) \end{pmatrix}, \quad (43.11)$$

$$\varepsilon_n = \exp(-\delta_n)/2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$\ddot{\xi} + \left[\omega^2 + \sum_k u_k \delta(t - \bar{t}_k) \right] \xi = 0, \quad (43.12)$$

решение которого на интервале $(\bar{t}_{n-1}, \bar{t}_n)$ запишем в виде

$$\xi(t) = \bar{A}_n \xi_+ + \bar{A}_n^* \xi_-, \quad \xi_{\pm} = \exp(\pm i\omega t). \quad (43.13)$$

Оператор сдвига \bar{T}_n^+ определим аналогично (43.5)

$$\xi(t + \bar{T}_n) = \bar{T}_n^+ \xi(t), \quad (\bar{T}_n = \bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n). \quad (43.14)$$

Имеем

$$\bar{T}_n^+ = \begin{pmatrix} (1 + u_n^2/4\omega^2)^{1/2} \exp i(\bar{\varphi}_n + \omega \bar{T}_n) & (u_n/2\omega) \Psi \\ (u_n/2\omega) \Psi^{-1} (1 + u_n^2/4\omega^2)^{1/2} & \exp -i(\bar{\varphi}_n + \omega \bar{T}_n) \end{pmatrix}, \quad (43.15)$$

$$\bar{\varphi}_n = \text{arctg}(u_n/2\omega), \quad \Psi = \exp(i\pi/2 + \omega \bar{T}_n).$$

Сравнивая (43.11), (43.15) и учитывая (43.10), видим, что исходное уравнение (43.1) можно заменить уравнением (43.11), если положить

$$\xi = \Omega^{1/2} x, \quad \varepsilon_n = u_n/2\omega, \quad \bar{T}_n = T_n. \quad (43.16)$$

Перейдем к выводу кинетического уравнения. Пусть $f(\xi, \eta, t)$ — плотность вероятности того, что в момент времени t переменная ξ лежит в интервале $(\xi, \xi + d\xi)$,

а переменная η — в интервале $(\eta, \eta + d\eta)$, причем $\int f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 1$. Точки \bar{t}_k в уравнении (43.12) будем считать распределенными по закону Пуассона, т. е. вероятность того, что интервал между \bar{t}_k и \bar{t}_{k+1} лежит в области $(T, T + dT)$, равна

$$P(T)dT = \lambda \exp(-\lambda T)dT. \quad (43.17)$$

Предполагается известной также плотность вероятности $w(\varepsilon)$ того, что ε_n (для любого n) лежит в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$. В случае (43.12) уравнение для $f(\xi, \eta, t)$ рассматривалось в [25], приведем его без вывода

$$\begin{aligned} \partial f(\xi, \eta, t)/\partial t &= (\omega^2 \xi \partial/\partial \eta - \eta \partial/\partial \xi) f(\xi, \eta, t) + \\ &+ \lambda \int d\varepsilon' w(\varepsilon') f(\xi, \eta + \omega \varepsilon' \xi, t) - \lambda f(\xi, \eta, t). \end{aligned} \quad (43.18)$$

В частности, если $w(\varepsilon') = \pi^{-1} \delta(\varepsilon' - \varepsilon)$, то имеем

$$\begin{aligned} \partial f(\xi, \eta, t)/\partial t &= (\omega^2 \varepsilon \partial/\partial \eta - \eta \partial/\partial \xi) f(\xi, \eta, t) + \\ &+ \lambda [f(\xi, \eta + \omega \varepsilon \xi, t) - f(\xi, \eta, t)]. \end{aligned} \quad (43.19)$$

При больших δ , т. е. очень малых ε , получаем из (43.19) уравнение типа Фоккера — Планка

$$\begin{aligned} \partial f/\partial t &\approx (\omega^2 + \varepsilon \lambda \omega) \xi \partial f/\partial \eta - \eta \partial f/\partial \xi + \\ &+ \lambda (\omega^2 \varepsilon^2 \xi^2/2) \partial^2 f/\partial \eta^2 \end{aligned} \quad (43.20)$$

с коэффициентом диффузии $D \sim \lambda \omega^2 \varepsilon^2 \xi^2/2$. Согласно (43.11), величина ε экспоненциально мала и, следовательно, также мал коэффициент диффузии. Как увидим ниже, вторые моменты от f , которые в силу (43.9) и (43.16) пропорциональны адиабатическому интервалу осциллятора I , растут со временем. Это приводит к тому, что начиная с некоторых моментов времени уравнение (43.20) перестает быть справедливым. Условие применимости уравнения (43.20) следующее:

$$\xi \ll \xi_0 = (2/\omega \varepsilon) (\partial \ln f / \partial \eta)^{-1}. \quad (43.21)$$

Введем вторые моменты функции распределения f : $\langle \xi^2 \rangle$, $\langle \xi \eta \rangle$, $\langle \eta^2 \rangle$, где скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по $f(\xi, \eta, t)$. Уравнения для них, приведенные в [25], легко получаются из (43.19) и имеют вид

$$d\langle \xi^2 \rangle/dt = 2\langle \xi \eta \rangle,$$

$$d\langle \xi \eta \rangle / dt = -(\omega^2 + \lambda \varepsilon \omega) \langle \xi^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle, \quad (43.22)$$

$$d\langle \eta^2 \rangle / dt = \lambda \varepsilon^2 \omega^2 \langle \xi^2 \rangle - 2(\omega^2 + \lambda \varepsilon \omega) \langle \varepsilon \eta \rangle.$$

Решение системы (43.22) пропорционально $\exp \Gamma t$, где Γ — корни уравнения

$$\Gamma^3 + 4(\omega^2 + \lambda \varepsilon \omega) \Gamma - 2\lambda \varepsilon^2 \omega^2 = 0. \quad (43.23)$$

Уравнение (43.23) всегда имеет один неустойчивый корень $\Gamma_0 > 0$, и в нашем случае

$$\Gamma_0 \approx \varepsilon^2 \lambda / 2 = \lambda \exp(-2\delta) / 8. \quad (43.24)$$

Таким образом, характерное время развития неустойчивости достаточно велико: $\tau_R \sim 8\lambda^{-1} \exp(2\delta)$.

В соответствии с (43.9) все вторые моменты пропорциональны I и рост их в среднем со временем означает увеличение величины $\langle I \rangle = (\xi^2 + \eta^2 / \Omega^2)$. Иногда удобно переписать уравнение (43.18) в переменных типа действие — фаза. Введем

$$I = (\varepsilon^2 + \omega^{-2} \eta^2)^{1/2}, \quad z = \eta / \omega \xi. \quad (43.25)$$

Тогда уравнение (43.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial F(I, z) / \partial t = \omega \partial [(1 + z^2) F(I, z)] / \partial z + \\ + \lambda \{ F(\bar{I}, \bar{z}) \partial (\bar{I}, \bar{z}) / \partial (I, z) - F(I, z) \}, \end{aligned} \quad (43.26)$$

где $\bar{I} = I[1 + (z + \varepsilon/\omega)^2]^{1/2} / (1 + z^2)^{1/2}$, $\bar{z} = z + \varepsilon/\omega$, $F(I, z) dI dz = f(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

Если проинтегрировать (43.26) по I , то получается кинетическое уравнение для фаз (точнее, для котангенса фаз z). Однако кинетического уравнения только

для $F(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(I, z) dz$ получить не удастся.

Приведенный выше метод получения кинетического уравнения может быть применен и для более сложных, чем осциллятор, систем. При этом предполагается известным оператор сдвига T^+ в ВКБ-приближении.

§ 44. Трансформация волн в среде со случайными неоднородностями

Пусть в среде возможны два типа связанных колебаний h_1, h_2 , описываемых уравнениями, аналогичными уравнениям (14.13) для связанных осцилляторов,

$$\begin{aligned} d^2 h_1 / dx^2 + k_1^2(x) h_1 &= \alpha(x) h_2, \\ d^2 h_2 / dx^2 + k_2^2(x) h_2 &= \alpha(x) h_1. \end{aligned} \quad (44.1)$$

Здесь x — параметр неоднородности. В однородном случае можно перейти к нормальным колебаниям $H_{1,2}$:

$$d^2 H_{1,2} / dx^2 + q_{1,2}^2 H_{1,2} = 0,$$

где волновые векторы $q_{1,2}$ нормальных колебаний определяются из уравнений

$$q_{1,2}^2 = (k_1^2 + k_2^2) / 2 \pm [(k_1^2 - k_2^2)^2 / 4 + \alpha^2]^{1/2}. \quad (44.2)$$

В слабонеоднородном случае, когда $k_{1,2}$, α — «медленные» функции координаты $d(\ln q_{1,2}) / dx \ll q_{1,2}$, приближенными решениями (44.1) будут «квазинормальные» колебания (см. § 14)

$$H_{1,2}^{\pm} \approx (q_{1,2})^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^x q_{1,2}(x') dx' \right\}, \quad (44.3)$$

где $q_{1,2}$ по-прежнему определены уравнениями (44.2).

В определенных областях, в частности в окрестностях точек, где $q_1 = q_2$, решения типа (44.3) становятся несправедливыми (см. гл. II). При прохождении этих областей амплитуды квазинормальных колебаний скачкообразно меняются по сравнению с начальными и происходит как бы перераспределение энергии между квазинормальными колебаниями. Точки, в которых $q_1 = q_2$, будем называть в дальнейшем точками трансформации волн.

При прохождении волн через достаточно большие объемы неоднородной среды число точек трансформации может быть большим. Естественно считать их распределение хаотическим и заданным в виде некоторой случайной функции координаты. Возникает вопрос, как описать кинетику волн в среде со случайно расположенными точками трансформации. Формально задача аналогична системе связанных осцилляторов, проходящих через резонансы в случайные моменты времени. Ниже развивается метод решения подобного рода задач [19].

Начнем с рассмотрения единичного акта трансформации. Пусть для некоторых значений x слева от области трансформации решение уравнения (44.1) пред-

ставлено так:

$$H = A_1 H_1^+ + A_2 H_2^+.$$

Справа от области трансформации решение имеет вид

$$H = \bar{A}_1 H_1^+ + \bar{A}_2 H_2^+.$$

Связь между (\bar{A}_1, \bar{A}_2) и (A_1, A_2) определяется уравнением (15.15), в котором мы для удобства переобозначим:

$$\exp(-\delta) = \sin a,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \exp(i\varphi) \cdot \cos a & \sin a, \\ \sin a & i \exp(-i\varphi) \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad (44.4)$$

$$\delta = \left| \oint (q_1 - q_4) dx \right| / 2.$$

Здесь интеграл в δ берется по контуру, охватывающему две комплексно-сопряженные точки трансформации; φ — известная фаза, которая в дальнейшем окажется несущественной. Каждый акт трансформации можно рассматривать как «столкновение» волн, а матрицу перехода от (A_1, A_2) к (\bar{A}_1, \bar{A}_2) — как оператор столкновения.

Матрица перехода между последовательными столкновениями имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} i \exp i(\varphi + S_1) \cdot \cos a & \exp i S_2 \cdot \sin a \\ \exp i S_1 \cdot \sin a & i \exp i(S_2 - \varphi) \cdot \cos a \end{pmatrix}, \quad (44.5)$$

где $S_1 = \int q_1(x') dx'$, $S_2 = \int q_2(x') dx'$. Интегралы в $S_{1,2}$ берутся между двумя ближайшими точками трансформации. Для того чтобы избежать возможности перекрытия областей трансформации, ограничимся случаем достаточно редких столкновений и потребуем

$$l q_{1,2} \gg 1, \quad (44.6)$$

где l — среднее расстояние между точками трансформации. Неравенство (44.5) приводит, в частности, к тому, что фазовые набег S_1, S_2 в (44.5) велики и можно пренебречь фазой φ .

Предположим теперь, что в некоторой начальной точке x_0 задан вектор A_0 с компонентами $(A_1^{(0)}, A_2^{(0)})$ и на отрезке пути до x волна испытывает n столкно-

вений (проходит n точек трансформации). Тогда в точках x вектор \mathbf{A}_n может быть представлен как

$$\mathbf{A}_n(x) = M_n \cdot M_{n-1} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot \mathbf{A}_0(x_0).$$

Здесь $M_n = M_k(x_{k-1}, x_k)$ и определяется формулой (44.5), в которой точкой трансформации будет x_k , все параметры зависят от номера k , а интегралы в $S_{1,2}^{(k)}$ вычисляются на дуге между x_{k-1} и x_k . Задача заключается в определении среднего значения $\langle \mathbf{A}(x) \rangle$, усредненного по всем возможным вариантам размещения точек трансформации на (x_0, x) . Будем считать распределение последних пуассоновским, а величину a — пока постоянной (ограничение на a будет снято ниже). Это означает, что вероятность появления точки трансформации в элементе dx равна $l^{-1}dx$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dU/dx &= iq_1 U - i \sum_k \delta(x - x_k) (aV - \pi U/2), \\ dV/dx &= iq_2 V - i \sum_k \delta(x - x_k) (aU - \pi V/2), \end{aligned} \quad (44.7)$$

где x_k — точки трансформации. Нетрудно убедиться, что матрица перехода решений системы (44.7) между двумя последовательными точками трансформации тождественна с (44.5), если положить

$$U = q_1^{1/2} H_1, \quad V = q_2^{1/2} H_2. \quad (44.8)$$

Из (44.8) следует, что квадраты амплитуд U, V совпадают с действиями соответственно H_1 - и H_2 -колебаний, и задачу об усреднении решений системы (44.1) можно заменить эквивалентной задачей об усреднении решений системы (44.7).

Введем функцию распределения $f(x, U_1, U_2, V_1, V_2)$, где $U_1 = \text{Re } U, U_2 = \text{Im } U, V_1 = \text{Re } V, V_2 = \text{Im } V, \int f dU_1 dU_2 dV_1 dV_2 = 1$. Кинетическое уравнение для f можно получить обычным образом (см., например, [31]):

$$\begin{aligned} \partial f / \partial x - q_1 U_2 \partial f / \partial U_1 + q_1 U_1 \partial f / \partial U_2 - q_2 V_2 \partial f / \partial V_1 + \\ + q_2 V_1 \partial f / \partial V_2 = \bar{S}\{f\}, \end{aligned} \quad (44.9)$$

где столкновительный член имеет вид

$$\bar{S}\{f\} = l^{-1} [f(x, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2) - f], \quad (44.10)$$

$$f = f(x, U_1, U_2, V_1, V_2).$$

Координаты $\bar{U}_{1,2}$, $\bar{V}_{1,2}$ определяются из условия, что в результате столкновения они принимают значения $U_{1,2}$, $V_{1,2}$. Уравнения (44.9), (44.10) имеют вид обычного уравнения Колмогорова — Феллера для разрывного случайного процесса. Из системы (44.7) или (44.4) и (44.8), имеем

$$\bar{U}_1 = U_2 \cos a + V_1 \sin a, \quad \bar{U}_2 = -U_1 \cos a + V_2 \sin a, \quad (44.11)$$

$$\bar{V}_1 = U_1 \sin a + V_2 \cos a, \quad \bar{V}_2 = U_2 \sin a - V_1 \cos a.$$

Преобразования (44.11), так же как и (44.4), (44.5), сохраняют инвариантной величину

$$I = |U|^2 + |V|^2 = q_1 |H_1|^2 + q_2 |H_2|^2, \quad (44.12)$$

имеющую смысл полного действия системы двух колебаний. Действие столкновений заключается в перераспределении адиабатических инвариантов каждого из колебаний.

Уравнения (44.9), (44.10) позволяют вычислить любой момент функции распределения f . Физический интерес представляет определение средних значений адиабатических инвариантов каждого из типов колебаний, т. е., согласно (44.12), средних $\langle |U|^2 \rangle$, $\langle |V|^2 \rangle$. Умножая (44.9) последовательно на $U_1^2, U_2^2, U_1, U_2, V_1^2, \dots$ и интегрируя по всему фазовому пространству, получаем

$$d\langle I_1 \rangle / dx = -l^{-1} \sin^2 a \langle I_1 \rangle + l^{-1} \sin^2 a \langle I_2 \rangle + l^{-1} \sin 2a \langle I_{21} \rangle,$$

$$d\langle I_2 \rangle / dx = l^{-1} \sin^2 a \langle I_1 \rangle - l^{-1} \sin^2 a \langle I_2 \rangle - l^{-1} \sin 2a \langle I_{21} \rangle,$$

$$d\langle I_{12} \rangle / dx = (q_2 - q_1) \langle I_{21} \rangle, \quad (44.13)$$

$$d\langle I_{21} \rangle / dx = -(q_2 - q_1) \langle I_{12} \rangle - (2l)^{-1} \sin 2a \langle I_1 \rangle + (2l)^{-1} \sin 2a \langle I_2 \rangle - 2l^{-1} \sin^2 a \langle I_{21} \rangle,$$

$$I_1 = U_1^2 + U_2^2, \quad I_2 = V_1^2 + V_2^2, \quad I_{12} = U_1 V_1 + U_2 V_2 = \\ = \text{Re} [U (V_1 - iV_2)],$$

$$I_{21} = U_1 V_2 - U_2 V_1 = -\text{Im} [U (V_1 - iV_2)].$$

Из (44.13) и (44.12) находим стационарное решение

$$\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = I/2, \quad \langle I_{12} \rangle = \langle I_{21} \rangle = 0. \quad (44.14)$$

Результат (44.14), в частности, означает, что если на границе плазмы было возбуждено только колебание с заданным значением I , то после прохождения достаточно широкого слоя второе колебание значительно «нагревается».

Перейдем теперь к описанию процесса приближения к равновесию. Решение системы (44.13) отыскиваем в виде $\exp(\kappa x)$. Уравнение для κ будет

$$\kappa^3 + 4l^{-1} \sin^2 a \kappa^2 + [4l^{-2} \sin^2 a + (q_1 - q_2)^2] \kappa + 2(q_1 - q_2)^2 l^{-1} \sin^2 a = 0. \quad (44.15)$$

Из трех корней уравнения (44.15) один отрицательный и два комплексно-сопряженных с отрицательной действительной частью.

Длина релаксации определяется корнем κ_0 , для которого $|\operatorname{Re} \kappa_0|$ минимально. Выпишем значения κ_0 для некоторых предельных случаев:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &\approx l_0^{-1}, & l_0 |q_1 - q_2| &\gg 1, & l_0 &= l/4 \sin^2 a, & (44.16) \\ \kappa_0 &\approx -(1/2)(q_1 - q_2)^2 l_0, & l_0 |q_1 - q_2| &\ll 1. \end{aligned}$$

Второй случай ввиду условия редких столкновений (44.6) может осуществляться лишь при достаточно малых значениях $(q_1 - q_2)$.

Если теперь параметр столкновения a считать случайным с функцией распределения $w(a)$ ($\int w(a) da = 1$), то в уравнении (44.9) столкновительный член $\bar{S}\{f\}$ заменяется на $\langle \bar{S}\{f\} \rangle = \int w(a) \bar{S}\{f(a)\} da$. Соответственно в уравнении (44.15) следует заменить $\sin^2 a$ на

$$\langle \sin^2 a \rangle = \int w(a) \cdot \sin^2 a \cdot da.$$

В заключение сделаем два замечания. Первое связано с тем, что рассматривались только точки трансформации $q_1 = q_2$. Существуют и другие особенности решений (44.3) — например, в точках, где $q_{1,2} = 0$. Как показано в § 43, такие особенности приводят к общему росту в среднем адиабатического инварианта I всей системы. Естественно, что проведенное в данном параграфе рассмотрение предполагает, что эффекты, связанные с трансформацией типа (44.4), являются основными. Второе замечание связано с возможностью простого обобщения изложенного метода для произвольного числа связанных колебаний.

§ 45. Распространение нелинейной волны в случайной среде

Решение задачи о распространении линейной волны в случайной среде до сих пор встречает серьезные трудности. Если, однако, флуктуирующая часть среды мала, то существуют достаточно хорошие методы исследования (см., например, [3, 8]), аналогичные борновскому приближению в квантовой механике. Эти методы могут быть использованы в случае слабой нелинейности [15, 16], когда при вычислении поправок к волне за счет флуктуаций среды нелинейностью можно пренебречь.

Если нелинейность волны не является малой, то в обычном виде методика исследования линейного случая неприменима. Будем для определенности говорить о мощном волновом импульсе — солитоне, распространяющемся в случайной среде. Можно выделить два предельных случая: 1) размер солитона немного меньше характерного масштаба флуктуаций; 2) размер солитона велик по сравнению с масштабом флуктуаций. В первом случае флуктуации являются адиабатическими и анализ распространения нелинейной волны в такой среде можно провести, например, с помощью метода Уитэма [20]. По существу, анализу такого типа посвящены работы [21, 22] о распространении солитона на мелкой воде со случайно меняющейся глубиной. Метод для исследования второго случая при распространении солитона в области мелкомасштабных флуктуаций рассматривается ниже. В основе его лежит учет нелинейных членов в уравнении без предположения их малости. Это приводит к тому, что, например, диссипативный член перестает быть линейным и приобретает довольно сложную структуру.

Пусть движение нелинейной волны описывается уравнением

$$v_t + c_0 v_x + (1/2)(v^2)_x + c_0 h^2 v_{xxx} = \xi Q(v), \quad (45.1)$$

левая часть которого есть уравнение Кортевега — де Вриза, а правая часть учитывает неоднородность среды при $\xi = \xi(x)$. Здесь c_0 — скорость звука, а h — масштаб дисперсии (например, глубина «мелкой воды»).

Все дальнейшие рассуждения и выкладки не зависят от вида функционала $Q\{v\}$. Мы обратим, однако, внимание лишь на два различных вида: $Q_1\{v\} = v$ и $Q_2\{v\} = v_x$; первому соответствует диссипативный член в уравнении (45.1), приводящий к затуханию волны со временем при $\xi < 0$ и нарастанию при $\xi > 0$. Подобный член возникает, например, в цепочке осцилляторов, для которых сила трения пропорциональна их скорости. Действительно, линейная часть уравнения (45.1) получается в длинноволновом приближении из системы

$$\ddot{y}_n - \xi \dot{y}_n = c_0^2 h^{-2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}),$$

где y_n — смещение n -го атома и $v = \dot{y}$. Член $\xi \dot{y}_n = \xi v$ описывает трение (положительное или отрицательное в зависимости от знака ξ) из-за взаимодействия со средой и для случайной функции $\xi(x)$ имитирует взаимодействие с турбулентной средой.

Другой интересный случай возникновения члена типа Q_1 соответствует распространению волны на «мелкой воде» с переменной глубиной $h = h_0 + h_1(x)$ в тех случаях, когда производная dh_1/dx достаточно велика [23, 24]. При этом $\xi \sim dh_1/dx$ описывает случайные шероховатости дна.

Случай $Q = Q_2 = v_x$ соответствует, как видно из (45.1), случайной добавке $\xi(x)$ к скорости звука c_0 и также возникает из-за неоднородности среды. Однако правая часть (45.1) имеет при этом недиссипативную структуру.

Далее во всех выкладках будем для удобства писать выражение Q_1 , а в конце работы приведем результат для Q_2 . Относительно величины ξ , случайным образом зависящей от x , будем предполагать ее малость и малость ее градиентов:

$$\xi \ll v, \quad d(\ln \xi)/dx \gg \partial(\ln v)/\partial x. \quad (45.2)$$

Кроме того, считаем $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi(x)\xi(y) \rangle = R(x-y)$. Полагая $v = \langle v \rangle + u$, $\langle u \rangle = 0$ и учитывая малость $u \ll \langle v \rangle$, находим из (45.1)

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_t + 1/2 \langle (v^2) \rangle_x + c_0 \langle v \rangle_x + c_0 h^2 \langle v \rangle_{xxx} = \\ = \langle \xi u \rangle - (1/2) \langle u^2 \rangle_x, \end{aligned} \quad (45.3)$$

$$u_t + [u \langle v \rangle + c_0]_x + u_{xxx} = \xi \langle v \rangle. \quad (45.4)$$

В нулевом приближении усредненная волна удовлетворяет уравнению

$$\langle v \rangle_t + (1/2)(\langle v \rangle^2)_x + c_0 \langle v \rangle_x + c_0 h^2 \langle v \rangle_{xxx} = 0,$$

решение которого известно. Пусть, например, это будет солитон, движущийся со скоростью $c > c_0$, $\langle v(x, t) \rangle = v_0(x - ct)$. Решение в такой форме может быть подставлено в уравнение (45.4), так как учет изменения параметров (в частности, скорости c) за счет флуктуаций ξ привел бы в уравнении (45.4) для величины u к появлению членов более высокого порядка малости. Учитывая это, перейдем в (45.4) к новой системе отсчета, движущейся со скоростью c : $t = t$, $y = x - ct$, что приведет к уравнению

$$\partial u / \partial t + \partial(\hat{H}u) / \partial y = \xi(y + ct)u, \quad (45.5)$$

где $u = u(y, t)$ и введен оператор

$$\hat{H} = c_0 h^2 \partial^2 / \partial y^2 + v_0(y) - c + c_0. \quad (45.6)$$

Формальное решение (45.5) представим в виде

$$\begin{aligned} u(y, t) &= \int_{-\infty}^t d\tau \exp\{- (t - \tau) \partial \hat{H}(y) / \partial y\} \xi(y + \\ &+ c\tau) \langle v(y, t) \rangle = \int_0^{\infty} d\tau \exp\{- \tau \partial \hat{H}(y) / \partial y\} \xi[y + \\ &+ c(t - \tau)] \langle v(y, t) \rangle. \end{aligned} \quad (45.7)$$

Далее учтем, что в силу второго неравенства в (45.2) флуктуации являются мелкомасштабными по сравнению с изменением $\langle v \rangle$ и действием оператора под знаком экспоненты на $\langle v \rangle$ можно пренебречь с точностью до членов более высокого порядка малости по ξ . По той же причине можно в первом приближении пренебречь некоммутуруемостью операторов $\partial / \partial y$ и $\hat{H}(y)$, входящих в показатель экспоненты и действующих на ξ .

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора \hat{H} , определенного в (45.6) $\hat{H}\Psi = E\Psi$, и разложим флуктуацию $\xi(x)$ по полному набору собственных функций $\Psi(E; x)$ оператора \hat{H} :

$$\xi(x) = \sum_E C(E) \Psi(E; x), \quad (45.8)$$

где знак \sum_E означает суммирование по дискретной части спектра и интегрирование по непрерывной части. Подставляя (45.8) в (45.7) и учитывая сделанные выше приближения, получаем

$$\begin{aligned}
 u(y, t) &= \sum_E C(E) \int_0^\infty d\tau \exp\{-\tau \hat{H}(y) / \partial y\} \cdot \Psi[E; y + \\
 &+ c(t - \tau)] \cdot \langle v(y, \tau) \rangle = \sum_E C(E) \int_0^\infty d\tau \exp\{-\tau E \partial / \partial y\} \times \\
 &\times \Psi[E; y + c(t - \tau)] \langle v(y, t) \rangle = \sum_E C(E) \int_0^\infty d\tau \Psi[E; y - \\
 &- \tau(E + c) + ct] \langle v(y, t) \rangle.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$u(x, t) = \sum_E C(E) \int_0^\infty d\tau \Psi[E; x - \tau(E + c)] \langle v(x, t) \rangle. \quad (45.9)$$

С помощью выражения (45.9) теперь можно вычислить правую часть (45.3). Заметим, что в отсутствие нелинейности и дисперсии $\hat{H} = (c - c_0) \partial / \partial x$, и мы приходим к случаю, рассмотренному Хоувом [3]. В данном случае зависимость от $\langle v \rangle$ поправок $u(x, t)$ к усредненной огибающей волны $\langle v(x, t) \rangle$ определяется зависимостью от $\langle v \rangle$ собственных значений E и собственных функций $\Psi(E; x)$ стационарного уравнения Шредингера с потенциалом $v_0 = \langle v \rangle$.

Для первого члена в правой части уравнения (45.3) имеем

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \langle \xi(x, t) u(x, t) \rangle = \langle v(x, t) \rangle \times \\
 &\times \left\langle \xi(x, t) \sum_E C(E) \int_0^\infty d\tau \Psi[E; x - \tau(c + E)] \right\rangle = \\
 &= \langle v(x, t) \rangle \int_0^\infty d\tau \sum_E \int dz R(x - z) \Psi^*(E; z) \times \\
 &\quad \times \Psi[E; x - \tau(c + E)], \quad (45.10)
 \end{aligned}$$

где использована ортогональность собственных функ-

ций $\Psi(E; x)$ для получения из (45.8) коэффициентов $C(E)$. После замены переменных в (45.10) имеем

$$I_1 = \langle v(x, t) \rangle \int_0^{\infty} dr \int dz R(x-z) \sum_E (c+E)^{-1} \Psi^*(E; z) \times \\ \times \Psi(E; x-r) = - \langle v(x, t) \rangle \int_0^{\infty} dr \int dz R(x-z) \times \\ \times G(-c; z, x-r), \quad (45.11)$$

где $G(E; x_1, x_2)$ — функция Грина оператора \hat{H} . Формула (45.11) выражает конечный результат для первого члена в правой части уравнения (45.3), причем зависимость от $\langle v \rangle$ входит также в G , так как в рассматриваемом приближении $v_0 = \langle v \rangle$.

Перейдем теперь к вычислению выражения

$$I_2 = \langle u_2 \rangle = (\langle v(x, t) \rangle)^2 \left\langle \sum_{E_1} C(E_1) \sum_{E_2} C(E_2) \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \times \right. \\ \left. \times \Psi[E_1; x - \tau_1(c + E_1)] \Psi[E_2; x - \tau_2(c + E_2)] \right\rangle.$$

Так же, как и при выводе (45.10), (45.11), выражаем $C(E)$ из (45.8) и делаем замену переменных при интегрировании по τ_1, τ_2

$$I_2 = (\langle v \rangle)^2 \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\infty} dr_2 \int dx_1 \int dx_2 R(x_1 - x_2) \times \\ \times \sum_{E_1} (c + E_1)^{-1} \Psi^*(E_1; x_1) \Psi[E_1; (x - r_1)] \times \\ \times \sum_{E_2} (c + E_2)^{-1} \Psi^*(E_2; x_2) \Psi[E_2; (x - r_2)] = \\ = (\langle v \rangle)^2 \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\infty} dr_2 \int dx_1 \int dx_2 R(x_1 - x_2) \times \\ \times G[-c; x_1, (x - r_1)] \cdot G[-c; x_2, (x - r_2)]. \quad (45.12)$$

Выражение (45.12) является окончательным и представляет собой поправку к нелинейному члену за счет случайных флуктуаций среды. В этом легко убедиться, если рассмотреть случай слабой нелинейности. Тогда

выражение (45.12) переписывается как $I_2 = \text{const} (\langle v \rangle)^2$. Аналогично при слабой нелинейности $I_1 = \text{const} \langle v \rangle > 0$, т. е. выражение (45.11) описывает эффективное увеличение амплитуды волны, аналогичное увеличению скорости броуновской частицы.

В общем случае уравнение (45.3) для усредненной части волны приобретает вид

$$\langle v \rangle_t + c_0 \langle v \rangle_x - I_1 + (1/2)[(\langle v \rangle)^2 + I_2]_x + \langle v \rangle_{xxx} = 0. \quad (45.13)$$

Перейдем к оценке структуры диссипативной и нелинейной поправок I_1, I_2 . Как уже отмечалось, согласно второму неравенству в (45.2), флуктуации среды $\xi(x)$ являются мелкомасштабными по сравнению с $\langle v \rangle$. Поэтому в разложении (45.8) должны присутствовать в основном собственные функции $\Psi(E; x)$ с такими значениями E , при которых они быстро осциллируют, т. е.

$$d(\ln \Psi)/dx \gg \partial(\ln \langle v \rangle)/\partial x. \quad (45.14)$$

Так как $\langle v \rangle$ есть потенциал в уравнении $\hat{H}\Psi = E\Psi$, условие (45.14) означает возможность использования ВКБ-приближения. Отсюда

$$\Psi \sim A p^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int^x p dx \right\}, \quad (45.15)$$

$$p = h^{-1}(c/c_0 - 1 - \langle v \rangle/c_0 + E/c_0)^{1/2}.$$

Пусть R имеет вид

$$R(x) = R_0 \gamma \exp(-\gamma x) \quad (45.16)$$

и γ достаточно велико. Тогда, подставляя (45.15), (45.16) в (45.11), находим

$$I_1 \approx A_1 R_0 \langle v \rangle / (c_0 h^2 \gamma^2 + c_0 + \langle v \rangle), \quad (45.17)$$

где A_1 — константа порядка единицы. Выражение (45.17) для нелинейного отрицательного трения при малых $\langle v \rangle$ переходит в линейное трение с коэффициентом (инкрементом) $|I_1/\langle v \rangle| = A_1 R_0 / (c_0 h^2 \gamma^2 + c_0)$. С ростом амплитуды волны $\langle v \rangle$ эффективный инкремент уменьшается. Действительно, при этом солитон становится уже, так как ширина солитона имеет порядок

$$\Delta \sim h [c_0 / (c - c_0)]^{1/2}, \quad (45.18)$$

а амплитуда $\sim c - c_0$. Чем уже солитон, тем более

плавными для него становятся флуктуации фона, что и приводит к уменьшению вязкости. Данное обстоятельство следует также и из условия мелкомасштабности в (45.2), в чем можно убедиться подстановкой (45.18) в (45.2).

Перейдем к анализу выражения для I_2 . С помощью выражений (45.15), (45.16) оцениваем аналогично предыдущему (45.12)

$$I_2 \approx (A_2 R_0 / \gamma) [\langle v \rangle / (c_0 h^2 + c_0 + \langle v \rangle)]^2, \quad (45.19)$$

где A_2 — константа порядка единицы. Таким образом, получаем окончательный вид уравнения (45.3) для $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle_t + c_0 \langle v \rangle_x + A_1 R_0 \langle v \rangle / (c_0 h^2 \gamma^2 + c_0 + \langle v \rangle) + c_0 h^2 v_{xxx} = 0. \quad (45.20)$$

Выражение для I_2 в (45.19) и (45.20) учитывает изменение вида нелинейности волны в среде с флуктуациями. Этот эффект приводит к существенной перестройке формы волны и исчезает при малых $\langle v \rangle$ или в адиабатическом случае.

Основные эффекты, полученные выше, — нелинейная структура «вязкого» члена и изменение типа нелинейности волны — возникают при распространении сильно нелинейной волны в среде с флуктуациями и не являются, естественно, особенностью рассмотренной конкретной модели. Нетрудно видеть по схеме вывода поправок I_1 , I_2 , что без каких-либо изменений можно рассмотреть любой другой вид члена в уравнении (45.1), связанного со случайными неоднородностями. Аналогичное замечание можно сделать и относительно вида уравнения (45.1). Рассмотрение другого типа нелинейного волнового процесса приводит к изменению вида оператора \hat{H} , но для последнего требуется только знание асимптотик собственных функций.

Нетрудно убедиться, в частности, что если в правой части уравнения (45.1) стоит член ξv_x (это соответствует флуктуациям плотности среды), то диссипативный член в уравнении для усредненного фона $\langle v \rangle$ имеет вид

$$I_1 = \langle \xi v_x \rangle = \langle \xi u_x \rangle \sim R_0 \langle v \rangle_{xxx} / (c_0 h^2 \gamma^2 + c_0 + \langle v \rangle),$$

соответствующий стандартному вязкому члену.

§ 46. Нелинейное взаимодействие трех волн

В § 45 на примере распространения нелинейной волны в слабодиспергирующих случайных средах было показано, что случайные неоднородности приводят к появлению нелинейной структуры «вязкого» члена и изменению характера нелинейности в уравнении для среднего поля. В настоящем параграфе мы обратимся к анализу вырожденного нелинейного взаимодействия трех волн в случайных средах и покажем, что аналогичные эффекты имеют место и в этом случае [26].

Сравним характер затухания средних интенсивностей гармоник из-за флуктуаций неоднородности среды и за счет диссипации. Для этого обратимся к анализу слабодиссипативного случая. Дополним уравнения (38.1), описывающие генерацию второй гармоники, членами, ответственными за слабую диссипацию полей:

$$d\rho_1/d\xi + \nu_1\rho_1 = -2\rho_1\rho_2 \sin \theta$$

$$d\rho_2/d\xi + \nu_2\rho_2 = \rho_1^2 \sin \theta, \quad (46.1)$$

$$d\theta/d\xi = \kappa(\xi) + [\rho_1^2/\rho_2 - 4\rho_2] \cos \theta.$$

Здесь ν_1 и ν_2 — декременты затухания соответственно первой и второй гармоник, $\kappa(\xi)$ — расстройка фазового синхронизма, являющаяся случайной функцией координаты.

Исследуем вначале недиссипативный случай ($\nu_1 = \nu_2 = 0$). Для частного случая граничных условий ($I(0) = 0$) система (46.1) приводится к одному уравнению (38.11) для интенсивности второй гармоники $I(\xi)$ (обозначения здесь те же, что и в § 38):

$$I(\xi) = \text{th}^2 \left\{ \int_0^\xi d\xi_1 \cos[\alpha \{I(\xi_1)\}] \right\}, \quad (46.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha \{I(\xi)\} = & \int_0^\xi \kappa(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^\xi d\xi_1 [(1 - I(\xi_1))^{-1} - \\ & - (2I(\xi_1))^{-1}] \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \kappa(\xi_2) dI/d\xi_2. \end{aligned} \quad (46.3)$$

Пусть $\kappa(\xi)$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним $\langle \kappa(\xi) \rangle = 0$ и парной корреляционной функцией $\langle \kappa(\xi_1) \kappa(\xi_2) \rangle = B(\xi_1 - \xi_2)$.

Будем считать флуктуирующие составляющие амплитуд гармоник малыми по сравнению с их средними. Тогда при исследовании уравнения (46.2), (46.3) можно применить теорию возмущений аналогично тому, как это было сделано в § 38. В результате в первом приближении по малым флуктуациям интенсивности из (46.2) можно получить решение

$$I(\xi) \approx \text{th}^2 \left\{ \int_0^{\xi} d\xi_1 \cos[\alpha \{I_0(\xi)\}] \right\}, \quad (46.4)$$

где $I_0(\xi) = \text{th}^2(\xi)$ — невозмущенное решение. Нетрудно видеть, что любые моменты и корреляционные функции случайного процесса $I(\xi)$ могут быть получены из (46.4) в виде интегралов от известных функций. Заметим, что непосредственное применение теории возмущений к системе (46.1) уже на первом шаге привело бы к необходимости исследовать систему второго порядка с переменными коэффициентами весьма сложного вида.

Чтобы получить решение для средней интенсивности $\langle I(\xi) \rangle$ в явном виде, будем считать в (46.4) набег разности фаз α малым ($\alpha \ll 1$). Разложив выражение (46.4) по малым α и проведя усреднение, получим

$$\langle I(\xi) \rangle \approx \text{th}^2(\xi) \left[1 - (2/\text{sh } 2\xi) \int_0^{\xi} d\xi_1 \langle \alpha^2 \{I_0(\xi_1)\} \rangle \right], \quad (46.5)$$

$$I_0(\xi) = \text{th}^2 \xi.$$

Рассмотрим случай малых корреляционных длин $l_{\text{к}} (\gamma^{-1} = l_{\text{к}}/l_{\text{нл}} \ll 1, l_{\text{нл}}$ определена формулой (38.4)). Для получения результатов в первом приближении по малому параметру $\gamma^{-1} \ll 1$ корреляционную функцию $B(\xi_1 - \xi_2)$ можно считать δ -функцией

$$B(\xi_1 - \xi_2) \approx b \cdot \delta(\xi_1 - \xi_2). \quad (46.6)$$

Для получения следующих членов разложения по малому параметру γ^{-1} следует конкретизировать вид корреляционной функции $B(\xi_1 - \xi_2)$. Можно рассмот-

реть, например, корреляционную функцию вида

$$B(\xi_1 - \xi_2) = \langle \kappa^2 \rangle \exp(-\gamma |\xi_1 - \xi_2|), \quad (46.7)$$

где $\langle \kappa^2 \rangle = B(0) = \langle \Delta^2(0) \rangle l_{\text{нл}}^2$ — средний квадрат безразмерной расстройки фазового синхронизма. Удержание лишь старшего члена по параметру γ^{-1} соответствует формально следующему предельному переходу в (46.7)

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \rightarrow 0, \quad \langle \kappa^2 \rangle \rightarrow \infty, \quad 2\langle \kappa^2 \rangle \gamma^{-1} \rightarrow b = \text{const}, \\ \langle \kappa^2 \rangle \exp(-\gamma |\xi_1 - \xi_2|) \rightarrow b\delta(\xi_1 - \xi_2). \end{aligned} \quad (46.8)$$

Отсюда понятен смысл величины b :

$$b = 2\langle \Delta^2 \rangle l_{\text{нл}} \cdot l_{\text{к}} = cl_{\text{нл}}, \quad c = 2l_{\text{к}} \langle \Delta^2 \rangle. \quad (46.9)$$

Величина c характеризует свойства среды и не зависит от амплитуд волн.

Усреднив $\alpha^2(\xi)$ в (46.5) по случайному процессу с корреляционной функцией (46.6) и вычислив интегралы, получим следующее выражение для средней интенсивности второй гармоники $\langle I(\xi) \rangle$:

$$\langle I(\xi) \rangle \approx \text{th}^2(\xi) [1 - b(\text{ch } 4\xi + 16 \text{ch } 2\xi - 17)/120 \text{sh } 2\xi], \quad (46.10)$$

$$b = 2\langle \Delta^2 \rangle l_{\text{нл}} \cdot l_{\text{к}} = 2\langle \kappa^2 \rangle l_{\text{к}}/l_{\text{нл}}.$$

Таким образом, случайные неоднородности приводят к обратной перекачке энергии в первую гармонику.

Обратимся теперь к исследованию слабодиссипативного случая. Аналитически может быть рассмотрен случай равных декрементов затухания гармоник ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$).

Проведя соответствующие вычисления и считая потери малыми ($\nu l_{\text{нл}} \ll 1$, $\nu \xi \ll 1$), получим следующее выражение для усредненной по случайному процессу интенсивности второй гармоники:

$$\begin{aligned} \langle I(\xi) \rangle = \text{th}^2 \xi [1 - 2\nu l_{\text{нл}} \xi (1 + \xi/\text{sh } 2\xi) - \\ - b(\text{ch } 4\xi + 16 \text{ch } 2\xi - 17)/120 \text{sh } 2\xi]. \end{aligned} \quad (46.11)$$

Формула (46.11) показывает, что с ростом безразмерной длины кристалла фактор, связанный со случайной неоднородностью в выражении (46.11), экспоненциально нарастает, в то время как рост диссипативного члена носит лишь линейный характер.

1. Wasow W. A study of the solution of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values λ .—Ann. Math., 1950, v. 52, p. 350—361.
2. Никитин Е. Е., Уманский С. Я. Неадиабатические переходы при плазменных атомных столкновениях. М.: Атомиздат, 1979.
3. Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики. Т. II. М.: Наука, 1971.
4. Никитин Е. Е. Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах. М.: Химия, 1970.
5. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости.—Успехи физ. наук, 1970, т. 102, в. 2, с. 185—210.
6. Мазур В. А., Михайловский А. В., Френкель А. А., Шухман И. Г. Неустойчивость несобственных колебаний и их роль в проблеме токамака с инжекцией нейтралов. Препринт ИАЭ-2693. М., 1976. 30 с.
7. Моисеев С. С., Смилянский В. Р. К вопросу о трансформации волн в магнитной гидродинамике.—Магнитная гидродинамика, 1965, № 2, с. 23—30.
8. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНТИ, 1964.
9. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
10. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны.—Успехи физ. наук, 1971, т. 103, в. 2, с. 193—212.
11. Цытович В. И. Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967.
12. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Нелинейная теория плазмы.—В кн.: Вопросы теории плазмы. В. 7. М.: Атомиздат, 1973, с. 3—145.
13. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией.—Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, в. 4, с. 431—453.
14. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Волновые процессы в неоднородной плазме.—В кн.: Вопросы теории плазмы. В. 7. М.: Атомиздат, 1963, с. 146—204.
15. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М.: изд. МГУ, 1971.
16. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. М.: Мир, 1976.

17. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1964, т. 47, в. 6, с. 2266—2268.
18. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N. Nonlinear interaction of Positive and Negative Energy modes in Rarefied Plasmas.— Ann. Phys., 1969, v. 55, p. 207—247.
19. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рюттов Д. Д. О взаимодействии волн с отрицательной энергией в слаботурбулентной плазме.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, в. 3, с. 913—920.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ II

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1974.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир., 1965.
3. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ-приближение. М.: Мир. 1967.
4. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
5. Zwaan A. Diss. Itrecht. 1929.
6. Stueckelberg E. C. Theorie der unelastischen Stößen zwischen Atomen.— *Helv Phys. Acta*, 1932, Bd 5, S. 369—422.
7. Furry W. H. Two notes on phase-integral methods.— *Phys. Rev.*, 1947, v. 71, p. 360—371.
8. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
9. Покровский В. Л., Халатников И. М. К вопросу о надбарьерном отражении частиц высоких энергий.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1961, т. 40, в. 6, с. 1713—1719.
10. Дыхне А. М. Квантовые переходы в адиабатическом приближении.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1960, т. 38, в. 2, с. 570—578.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
12. Коган В. И., Галицкий В. М. Сборник задач по квантовой механике. М.: Физматгиз, 1956.
Гольдман П. И., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М.: Физматгиз, 1957.
13. Дыхне А. М. Квазиклассическая частица в одномерном периодическом потенциале.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1960, т. 40, в. 5, с. 1423—1426.
14. Заславский Г. М., Фридман А. М. Движение квазиклассической частицы в квазипериодическом потенциале.— Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 3, с. 580—583.
15. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости.— Прикл. мат. и техн. физ., 1964, № 5, с. 44—45.
16. Заславский Г. М., Моисеев С. С. Связанные осцилляторы в адиабатическом приближении.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 2, с. 318—321.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ III

1. **Никитин Е. Е.** Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах. М.: Химия, 1970.
2. **Stuckelberg E. C.** Theorie der unelastischen Stößen Zwischen Atomen.— *Helv Phys. Acta*, 1932, Bd 5, S. 369—422.
3. **Никитин Е. Е.** Неадиабатические переходы вблизи точки поворота при атомных столкновениях.— *Оптика и спектроскопия*, 1961, т. 11, в. 4, с. 452—456.
4. **Быховский В. И., Никитин Е. Е., Овчинникова М. Я.** Вероятность неадиабатического перехода вблизи точки поворота.— *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1969, т. 47, в. 8, с. 750—756.
5. **Landau L. D.** Zur theorie die Energieübertragung bei Shößen.— *Phys. Z. Sowjetunion*, 1932, Bd 1, S. 88—98.
6. **Landau L. D.** Zur theorie die Energieübertragung bei Shößen.— *Phys. Z. Sowjetunion*, 1932, Bd 2, S. 46—51.
7. **Zener C.** Non adiabatic crossing of energy levels.— *Proc. Roy. Soc.*, 1932, v. A 137, p. 696—702.
8. **Овчинникова М. Я.** О соответствии квантовых и классических уравнений для системы двух линейных термов.— *Докл. АН СССР*, 1965, т. 161, № 3, с. 641—644.
9. **Никитин Е. Е., Уманский С. Я.** Неадиабатические переходы при медленных атомных столкновениях. М.: Атомиздат, 1979.
10. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
11. **Саясов Ю. С.** О вероятности неадиабатических переходов вблизи точек поворота.— *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1964, т. 46, в. 2, с. 560—567.
12. **Покровский В. Л., Халатников И. М.** К вопросу о падбарьерном отражении частиц высоких энергий.— *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1961, т. 40, в. 6, с. 1713—1719.
13. **Дыхне А. М., Чаплик А. В.** К теории неупругих столкновений.— *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1962, т. 43, в. 3 (9), с. 889—892.
14. **Овчинникова М. Я.** Вероятность неадиабатического перехода вблизи точки поворота.— *Оптика и спектроскопия*, 1964, т. 17, в. 6, с. 822—825.
15. **Никитин Е. Е., Овчинникова М. Я.** Интерференционные явления в атомном рассеянии.— *Успехи физ. наук*, 1971, т. 104, в. 3, с. 379—412.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IV

1. **Ерохин И. С., Моисеев С. С.** Волновые процессы в неоднородной плазме.— В кн.: *Вопросы теории плазмы*. В. 7. М.: Атомиздат, 1963, с. 146—204.
2. **Голант В. Е., Пилюя А. Д.** Линейная трансформация и поглощение волн в плазме.— *Успехи физ. наук*, 1971, т. 104, в. 3, с. 413—457.
3. **Wason A.** A study of the solutions of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values λ .— *Ann. Math.*, 1950, v. 52, p. 350—361.
4. **Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З.** Асимптоти-

ческий метод решения дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя малыми параметрами в гидродинамической теории устойчивости.— Докл. АН СССР, 1964, т. 158, в. 6, с. 1295—1298.

5. Моисеев С. С. Об одной возможности трансформации волн в плазме.— Прикл. мат. и техн. физ., 1966, № 3, с. 3—7.
6. Заславский Г. М. О кинетическом уравнении для осцилляторов в случайном внешнем поле.— Прикл. мат. и техн. физ., 1966, № 6, с. 76—79.
7. Ерохин Н. С. К вопросу об аномальной трансформации волн в неоднородной плазме.— Укр. физ. журн., 1969, № 14, с. 2059—2066.
8. Овчинникова М. Я. Вероятность неадиабатического перехода вблизи точки поворота.— Оптика и спектроскопия, 1964, т. 17, в. 6, с. 822—825.
9. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
10. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1960.
11. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости.— Прикл. мат. и техн. физ., 1964, № 5, с. 44—55.
12. Fugge W. H. Two notes on phase-integral methods.— Phys. Rev., 1947, v. 71, p. 360—371.
13. Тимофеев А. В. Резонансные явления в течении плазмы и жидкости. Препринт ИАЭ-1570. М., 1968.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: ГИТЛ, 1951.
15. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
16. Ерохин Н. С. Законы сохранения и инварианты дифференциальных уравнений в некоторых задачах неоднородной среды.— Прикл. мат. и техн. физ., 1970, № 6, с. 9—16.
17. Железняков В. В., Золотник Е. Я. О переходе плазменных волн в электромагнитные в неоднородной изотропной плазме.— Изв. вузов. Радиофизика, 1962, № 5, с. 644—657.
18. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости.— Успехи физ. наук, 1970, т. 102, в. 2, с. 185—210.
19. Ерохин Н. С., Захаров В. Е., Моисеев С. С. Генерация второй гармоники при падении электромагнитной волны на неоднородную плазму.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1969, т. 56, в. 1, с. 179—185.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ V

1. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
2. Тимофеев А. В. Желобковые колебания разреженной плазмы с некомпенсированным пространственным зарядом.— Журн. техн. физ., 1968, т. 38, в. 1, с. 14—23.
3. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1946, т. 16, с. 574—586.
4. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы в жидкости.— Успехи физ. наук, 1970, т. 102, в. 2, с. 185—210.

5. Case K. M. Stability of Inviscid Plane Conett Flow.— Phys. Fluids, 1960, v. 3, p. 143—148, p. 149—154.
6. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1960, т. 125, № 5, с. 1068—1071.
7. Костин В. М., Тимофеев А. В. Об устойчивости электронного потока с градиентом скорости.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 53, в. 4 (10), с. 1378—1387.
8. Тимофеев А. В., Мейтлис В. П., Чулков Г. И. Альфвеновские флуктуации в неоднородной и неравновесной плазме.— Физика плазмы, 1978, т. 4, в. 5, с. 1078—1087.
9. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Гостехиздат, 1954.
10. Тимофеев А. В. Временная эволюция альфвеновских колебаний в неоднородной и неравновесной плазме. Препринт ИАЭ-2674. М., 1976.
11. Тимофеев А. В. К теории устойчивости альфвеновских колебаний неоднородной плазмы.— Физика плазмы, 1976, т. 2, в. 3, с. 510—512.
12. Михайловский А. Б. Гидромагнитная пучковая неустойчивость в токамаке с инжекцией нейтральных атомов.— Физика плазмы, 1975, т. 1, в. 1, с. 72—80.
13. Timofeev A. V. Resonance interaction of flute oscillations with ion larmor drift.— Nuclear Fusion., 1968, v. 8, N 2, p. 99—107.
14. Тимофеев А. В. Резонансные явления в течении плазмы и жидкости. Препринт ИАЭ-1570. М., 1968.
15. Бизли К. О., Ломинадзе Д. Т., Михайловский А. Б. Возбуждение коротковолновых альфвеновских колебаний высокоэнергетичными ионами в токамаке.— Физика плазмы, 1976, т. 2, в. 1, с. 170—172.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
17. Rosenbluth M. N., Rutherford P. H. Excitation of Alfvén waves by high-energy ions in a Tokamak.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, N 23, p. 1428—1431.
18. Карман В. И. Об «особых» решениях уравнений для плазменных колебаний.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1966, т. 51, в. 3 (9), с. 907—914.
19. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. В кн.: Вопросы теории плазмы. В. 5. М.: Атомиздат, 1967, с. 3—209.
20. Мазуров В. А., Михайловский А. Б., Френкель А. Л., Шухман И. Г. Неустойчивости несобственных колебаний и их роль в проблеме токамака с инжекцией нейтралов. Препринт ИАЭ-2693. М., 1976. 30 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI

1. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М.: изд. МГУ, 1971.
2. Тагиев З. А., Чиркин А. С. Приближение заданной интенсивности в теории нелинейных волн.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 73, в. 4, с. 1217—1282.

3. **Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З.** Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы.— Журн. техн. физ., 1962, т. 32, в. 11, с. 1291—1296.
4. **Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S.** Interactions between light waves in a nonlinear dielectric.— Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 1918—1939.
5. **Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** Нелинейная теория плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. В. 7. М., Атомиздат, 1973, с. 3—145.
6. **Ерохин И. С., Захаров В. Е., Моисеев С. С.** Генерация второй гармоники при падении электромагнитной волны на неоднородную плазму.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1969, т. 56, в. 1, с. 179—185.
7. **Rosenbluth M. N.** Parametric instabilities in inhomogeneous media.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, N 9, p. 565—567.
8. **Pilia A. D.** Proc. of 11-th Conf. on phenomena in ionized gases. Oxford, 1971, p. 320.
9. **Ерохин И. С., Моисеев С. С.** Волновые процессы в неоднородной плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. В. 7. М., Атомиздат, 1973, с. 146—204.
10. **Галеев А. А., Лаваль Г., О'Нейл Т., Розеблют М., Сагдеев Р. З.** Взаимодействие мощной электромагнитной волны с плазмой.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, в. 3(9), с. 973—989.
11. **Пилия А. Д.** Нестационарная теория распадной неустойчивости в слабонеоднородной плазме.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, в. 3(9), с. 973—989.
12. **Тагиев З. А., Чиркин А. С.** Об эффективности преобразования оптических частот в неоднородных нелинейных средах.— Квантовая электроника, 1977, т. 4, в. 7, с. 1503—1508.
13. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VII

1. **Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S.** Interactions between light waves in a nonlinear dielectric.— Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 1918—1939.
2. **Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** Нелинейная теория плазмы. В кн.: Вопросы теории плазмы. В. 7. М.: Атомиздат, 1973, с. 3—145.
3. **Захаров В. Е., Манаков С. В.** К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 69, в. 5(11), с. 1654—1673.
4. **Андреев А. А.** Распадное взаимодействие волновых пакетов в нелинейной неоднородной и нестационарной среде.— Письма в ЖТФ, 1979, т. 5, в. 6, с. 377—381.
5. **Уизем Дж.** Линеиные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. **Островский Л. А., Пелиновский Е. И.** В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М.: Наука, 1977, с. 52—60.
7. **Маслов В. П.** Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.

8. Пелиновский Е. И. Об эволюции солитона в неоднородной среде.— Прикл. мат. и техн. физ., 1971, № 6, с. 80—85.
9. Пелиновский Е. И., Степанянц Ю. А. Трансформация магнитозвукового солитона в двухслойной плазме.— Журн. техн. физ., 1975, т. 45, в. 1, с. 173—175.
10. Пелиновский Е. И., Шаврацкий С. Х. О разрушении кноидальных внутренних волн в неоднородном по горизонтали океане.— Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, в. 6, с. 669—672.
11. Заславский Г. М. О рассеянии и трансформации нелинейных периодических волн в неоднородной среде.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, в. 6, с. 2129—2140.
12. Островский Л. А., Пелиновский Е. И., Фридман В. Е. Распространение акустических волн конечной амплитуды в неоднородной среде при наличии акустик.— Акустич. журн., 1976, т. 22, в. 6, с. 914—921.
13. Филоненко Н. Н. Нелинейное взаимодействие волн в случайнонеоднородной среде. Тезисы докл. на 7-й Всесоюз. конф. по когерентной и нелинейной оптике. М.: Изд. МГУ, 1974, с. 169.
14. Филоненко Н. Н., Мельник Л. П. О взрывной неустойчивости в неоднородных средах.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 69, в. 4, с. 1183—1194.
15. Мельник Л. П., Филоненко Н. Н. О методе решения укороченных уравнений для нелинейного взаимодействия волн в неоднородных средах.— В кн.: Труды VI Международного симпозиума по нелинейной акустике. Ч. 1, М.; изд. МГУ, 1976, с. 150—154.
16. Мельник Л. П., Филоненко Н. Н. О предельных КПД параметрических преобразователей частоты с оптически неоднородными нелинейными средами.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1976, т. 70, в. 2, с. 458—466.
17. Мельник Л. П., Филоненко Н. Н., Холодных А. И. Об ограничении КПД удвоителей частоты из-за продольной оптической неоднородности нелинейных кристаллов.— Квантовая электроника, 1979, т. 6, в. 1, с. 25—30.
18. Мельник Л. П., Филоненко Н. Н. Изв. вузов. Радиофизика, 1979, т. 22, в. 5, с. 542—554.
19. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
20. Карамзин Ю. М., Сухоруков А. П. О взаимофокусировке мощных световых пучков в средах с квадратичной нелинейностью.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 69, в. 3, с. 834—847.
21. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С. Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1968, т. 55, в. 4 (10), с. 1430—1448.
22. Копсон Э. Асимптотические разложения. М.; Мир, 1966.
23. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рютов Д. Д. О взаимодействии волн отрицательной энергии в слаботурбулентной плазме.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, в. 3, с. 913—920.
24. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N. Nonlinear interaction of positive and negative energy modes in rarefied plasmas.— Ann. Phys., 1969, v. 55, p. 207—247.

25. Weiland J., Wilhelmsson H. Coherent nonlinear interaction of waves in plasmas. Perg. Press., 1976.
26. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967.
27. Stenflo L., Weiland J., Wilhelmsson H. A solution of equation describing explosive instabilities.— *Physica Scripta*, 1970, v. 1, N 1, p. 46.
28. Рабинович М. И., Реутов В. П. Взаимодействие параметрически связанных волн в неравновесных средах.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1973, т. 16, в. 6, с. 815—839.
29. Давыдова Т. А., Ораевский В. Н. Стабилизация взрывной неустойчивости за счет неоднородности среды.— *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1974, т. 66, в. 5, с. 1613—1621.
30. Льюиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VIII

1. Bourret R. C. Stochastically perturbed fields with applications to wave propagation in random media.— *Nuovo Cimento*, 1962, v. 26, N 1, p. 1—31.
2. Bourret R. C. Propagation of randomly perturbed fields.— *Canad. J. Phys.*, 1962, v. 40, p. 783—790.
3. Howe M. S. On wave scattering by random inhomogeneities with application to the theory of weak bores.— *J. Fluid Mech.*, 1971, v. 45, N 4, p. 785—804.
4. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
6. Барабенков Ю. И., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. М. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.— *Успехи физ. наук*, 1970, т. 102, в. 1, с. 3—42.
7. Татарский В. И. Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Препринт АН СССР. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии.; М., 1970. 121 с.
8. Кляцкин В. И., Татарский В. И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики.— *Успехи физ. наук*, 1973, т. 110, в. 4, с. 499.
9. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
10. Van Kampen N. G. Stochastic differential equation.— *Phys. Reports*, 1976, v. 24c, N 3, p. 172—228.
11. Дьяков Ю. Е. Уравнение типа Дайсона для волн в оптически нелинейных средах. Ч. 1. Линеиные задачи.— *Кр. сообщ. по физике*, М.: ФИАН, 1973, № 4, с. 23—29.
12. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Турбулентная конвекция в недиффузионном приближении.— *Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана*, 1977, т. 13, в. 7, с. 690—698.

13. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Простой метод решения стохастических уравнений для некоторых распространенных моделей случайных процессов. Препринт ИФСО-55Ф. Красноярск, 1977, с. 28.
14. Пелиновский Е. Н. Распространение волн в статистически неоднородном океане.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 331—355.
15. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. О нелинейном взаимодействии волн в плазме со случайными неоднородностями.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, в. 1, с. 213—218.
16. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. О нелинейных волнах ионного звука в плазме с трехмерными случайными неоднородностями.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 64, в. 2, с. 505—509.
17. Заславский Г. М. Распространение нелинейной волны в случайной среде.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 66, в. 5, с. 1632—1637.
18. Заславский Г. М. О кинетическом уравнении для осциллятора в случайном внешнем поле.— Журн. прикл. мат. и техн. физ., 1966, № 6, с. 76—79.
19. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н. Прикл. мат. и техн. физ., 1967, в. 1, с. 21—24.
20. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
21. Пелиновский Е. И. Физика атмосферы и океана, 1971, № 7, с. 1226.
22. Yajima N. Effect of Botton irregularities on small amplitude shallow water waves.— J. Phys. Soc., Japan, 1972, v. 33, N 5, p. 1471—1477.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
24. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Физика атмосферы и океана. 1970, № 6, 934.
25. Frisk H. Z., Lloyd S. P. Electron levels in anone-dimensional random lattice.— Phys. Review, 1960, v. 120, N 4, p. 1175—1189.
26. Мельник Л. П., Филоненко Н. Н. О предельных КПД параметрических преобразователей частоты с оптически-неоднородными нелинейными средами.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1976, т. 70, в. 2, с. 458—466.
27. Беспалов В. И. Удвоение частоты света в нелинейной среде со случайными неоднородностями.— Изв. вузов. Радиофизика, 1966, т. 9, в. 6, с. 1117—1123.
28. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М.: изд. МГУ, 1971.
29. Бломберген И. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
30. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. Нелинейное взаимодействие волн в сильнонеоднородных средах.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1980.
31. Leibowitz M. A. Statistical behaviour of linear systems with randomly varying parameters.— J. Math., 1963, v. 4, p. 852—858.

Оглавление

<i>Предисловие</i>	3
Глава I. Основные уравнения и предположения	5
§ 1. Введение	—
§ 2. Адиабатическая теория возмущений в квантовой механике	8
§ 3. Уравнение Орра — Зоммерфельда	10
§ 4. Магнитогидродинамические колебания в плазме	12
§ 5. Электромагнитные волны в нелинейных кристаллах. Уравнения для амплитуд	15
Глава II. Одномерный метод ВКБ	21
§ 6. Введение	—
§ 7. Одна точка поворота. Метод Цвана	23
§ 8. Две точки поворота. Прохождение через барьер	26
§ 9. Две точки поворота. Надбарьерное отражение. Точность адиабатического инварианта	31
§ 10. Две точки поворота. Правила квантования. Обсуждение точности метода	34
§ 11. Прохождение через параболический слой	37
§ 12. Уравнение с периодической функцией. Движение в периодическом поле	39
§ 13. Уравнение Матье. «Медленные» нарушения трансляционной симметрии	42
§ 14. Уравнение четвертичного порядка. Два связанных осциллятора	47
§ 15. Связанные осцилляторы. Прохождение через резонанс	50
§ 16. Инварианты дифференциальных уравнений. Другой подход к определению коэффициентов шивки решений	57
Глава III. Неадиабатические переходы в квантовой механике	59
§ 17. Введение	—
§ 18. Полуклассическое приближение	61
§ 19. Связь полуклассического решения с точным	63

§ 20. Взаимодействие волн как возмущение	65
§ 21. Формула Ландау — Зинера [10]	66
§ 22. Сильное взаимодействие [3]	68
§ 23. Термы разного наклона	70

Глава IV. Уравнения типа Орра — Зоммерфельда 72

§ 24. Введение	—
§ 25. Правила квантования	75
§ 26. Задача о прохождении	80
§ 27. Модель с отражением	85

Глава V. Эволюционная задача 89

§ 28. Введение	—
§ 29. Теорема Рэля	90
§ 30. Эволюционная задача для уравнения Орра — Зоммерфельда	92
§ 31. Конечное усиление начальных возмущений	99

Глава VI. Распадная неустойчивость 102

§ 32. Введение	—
§ 33. Абсолютная неустойчивость	105
§ 34. Задача о прохождении. Конечное усиление возмущений	108
§ 35. Генерация второй гармоники и суммарных частот	111

Глава VII. Стационарные решения нелинейных уравнений для амплитуд 114

§ 36. Введение	—
§ 37. Взаимодействие волн в однородных средах	117
§ 38. Генерация второй гармоники	120
§ 39. Об эффективности преобразования частот в поле неоднородной волны накачки	129
§ 40. Взаимодействие трех волн	133
§ 41. Стабилизация взрывной неустойчивости	139

Глава VIII. Взаимодействие волн в случайно-неоднородных средах 145

§ 42. Введение	—
§ 43. О кинетическом уравнении для осциллятора в случайном внешнем поле	146
§ 44. Трансформация волн в среде со случайными неоднородностями	151
§ 45. Распространение нелинейной волны в случайной среде	157
§ 46. Нелинейное взаимодействие трех волн	164

Литература	167
----------------------	-----