Н.Я. Виленкин

Специальные функции и теория представлений групп

Н.Я. Виленкин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ и теория представлений групп

Н.Я.Виленкин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Решение очень многих важных задач математической физики и техники не может быть выражено с помощью обычных, элементарных функций, и тогда приходят на помощь специальные функции (функции Лежандра, функции Бесселя, гипергеометрическая функция и т. д.). Теория специальных функций очень детально разработана и включает в себя необозримое множество формул и соотношений, выводимых самыми разнообразными методами, что затрудняет ее изучение.

Целью данной книги является изложение теории специальных функций с единой точки зрения при помощи теории представлений групп. Этот подход позволяет единым образом получать всевозможные соотношения между специальными функциями, как ранее известные, так и новые.

Книга предназначена для математиков, физиков (как теоретиков, так и экспериментаторов), научных работников в области техники, а также может быть использована аспирантами и студентами старших курсов университетов.

Содержание

ГЛАВА IV

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

ГЛАВА V

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ФУНКЦИИ ГАНКЕЛЯ И МАКДОНАЛЬДА

ГЛАВА VI

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $QU(2)$ УНИМОДУЛЯРНЫХ КВАЗИУНИТАРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА И ЯКОБИ

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

ГЛАВА IX
ГРУППА ВРАЩЕНИЙ n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ ГЕГЕНБАУЭРА

ГЛАВА X

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩЕНИЙ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

ГЛАВА XI
ГРУППА ДВИЖЕНИЯ n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Посвящается
Израилю Моисеевичу
Гельфанду

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге теория специальных функций излагается с теоретико-групповой точки зрения. С первого взгляда теория специальных функций представляется хаотическим набором формул: помимо того, что существует необозримое множество самих специальных функций, для каждой из них в настоящее время найдено много всевозможных дифференциальных уравнений, интегральных представлений, рекуррентных формул, теорем сложения и т. д. Установить какой-либо порядок в этом хаосе формул кажется совершенно безнадежной задачей.

Однако развитие теории представлений групп дало в настоящее время возможность охватить теорию наиболее важных классов специальных функций с единой точки зрения. Отметим, что оценка важности отдельных классов специальных функций сильно изменилась за последнее столетие. В середине и второй половине XIX века наиболее интересными считались эллиптические и связанные с ними функции. Однако, как отметил в одном своем выступлении Ф. Клейн (см. [77]), существует другой класс специальных функций, по меньшей мере столь же важный ввиду их многочисленных приложений к астрономии и математической физике — это гипергеометрические функции. Развитие математики за истекшее время подтверждает мнение Клейна — гипергеометрическая функция и ее различные частные и вырожденные случаи — функции Бесселя, Лежандра, ортогональные многочлены Якоби, Чебышева, Лагерра, Эрмита и т. д. — играют все бóльшую роль в самых разных отделах математики и ее приложений. Этот класс специальных функций часто называют ***специальными функциями математической физики.*** Он-то и поддается теоретико-групповой трактовке.

Связь между специальными функциями и представлениями групп была впервые открыта Э. Картаном (см. [244]). (Впрочем, еще ранее были установлены связи теории специальных функций с теорией инвариантов, являющейся одним из аспектов теории представлений групп.) Значительную роль в исследовании этих связей сыграло применение теории представлений в квантовой механике.

Дальнейшие работы в этой области стимулировались исследованиями И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка и их учеников и сотрудников в области бесконечномерных представлений групп. В ходе этих исследований была установлена связь теории представлений групп с автоморфными функциями, построена теория специальных функций над конечными полями, специальных функций в однородных областях и т. д.

Целью данной книги является систематическое изложение теории специальных функций с групповой точки зрения. При этом мы ограничились изучением классических специальных функций и тем самым простейших групп.

Книга состоит из одиннадцати глав. В первой главе изложены основные понятия и факты теории групп преобразований и представлений групп.

Во второй главе разобраны два модельных примера — аддитивная группа вещественных чисел и группа вращений окружности. Эти группы приводят соответственно к показательной и тригонометрическим функциям. В этой главе, кроме того, изложены некоторые факты классического гармонического анализа — теория рядов и интегралов Фурье в вещественной и комплексной областях.

Третья глава посвящена представлениям группы вращений трехмерного евклидова пространства и локально изоморфной ей группы $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц второго порядка. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений этих групп выражаются через многочлены Лежандра и Якоби. Поэтому из общих свойств матричных элементов вытекают различные соотношения для этих многочленов (соотношения ортогональности и полноты, рекуррентные формулы, теорема сложения и т. д.). В конце главы рассмотрен дискретный аналог многочленов Якоби — коэффициенты Клебша—Гордана.

В четвертой главе изучены представления группы движений евклидовой плоскости. Матричные элементы представлений этой группы выражаются через функции Бесселя, что позволяет вывести ряд свойств функций Бесселя из теоретико-групповых соображений. Дальнейшие свойства функций Бесселя и тесно связанных с ними функций Ганкеля и Макдональда изучены в главе V, посвященной представлениям группы движений псевдоевклидовой плоскости. В этой главе выведен ряд интегралов по индексу для цилиндрических функций. В начале главы рассмотрены группа линейных преобразований прямой линии и теория Г-функции.

В шестой и седьмой главах рассмотрены представления группы вещественных унимодулярных матриц второго порядка. Представления этой группы связаны с несколькими классами специальных функций. В шестой главе изучены функции конуса $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\theta)$. В седьмой главе рассмотрена реализация представлений в виде интегральных операторов, ядром которых служит гипергеометрическая функция. Отсюда выводится ряд свойств гипергеометрической функции, как хорошо известных (интегральное представление Меллина — Бернса), так и новых. В главе VIII аналогичным образом изучена вырожденная гипергеометрическая функция, точнее говоря, тесно связанные с ней функции Уиттекера. Показано, что теория функций Уиттекера основана на изучении представлений группы треугольных матриц третьего порядка. Исходя из этого, выведены различные свойства функций Уиттекера — интегральные представления, рекуррентные формулы, континуальные теоремы сложения. В этой же главе рассмотрены многочлены Лагерра и выведена для них формула сложения.

Все группы, рассмотренные в главах II — VIII, имеют весьма простую структуру. Более сложные группы рассмотрены в главах IX — XI, а именно, группы движений n-мерной сферы, n-мерного пространства Лобачевского и n-мерного евклидова пространства. Однако при этом мы рассматриваем не все неприводимые представления этих групп, а лишь так называемые представления класса 1, и не все матричные элементы представлений, а лишь матричные элементы «нулевого столбца». Этого оказывается уже достаточно, чтобы построить теорию многочленов Гегенбауэра и гармонических многочленов, а также получить разложение функций на n-мерной сфере и гиперболоиде. В главе XI выведены дальнейшие свойства функций Бесселя.

К сожалению, объем книги не позволил остановиться на некоторых вопросах, связанных с теорией представлений и специальными функциями. Так, не была рассмотрена группа движений n-мерного псевдоевклидова пространства. Остались почти не освещенными асимптотические свойства специальных функций. Впрочем, изложенные в книге интегральные представления этих функций позволяют получить их асимптотические разложения обычными методами (см. [6], [62]).

Автор приносит глубокую благодарность И. М. Гельфанду, советами и указаниями которого он пользовался в течение всей работы над книгой, и роль которого в создании книги трудно переоценить. Автор благодарит также М. А. Наймарка, М. И. Граева, И. И. Пятецкого-Шапиро, Ф. А. Березина, Ф. И. Карпелевича, С. Г. Гиндикина, Д. П. Желобенко, с которыми часто обсуждал вопросы теории представлений групп и теории специальных функций. Многочисленные советы М. И. Граева повлияли на трактовку некоторых вопросов и окончательное расположение материала.

Весьма полезными для автора были беседы с Я. А. Смородинским и его учениками о применениях теории представлений групп и интегральных преобразований в физике.

В. В. Цукерман взял на себя нелегкий труд по проверке формул. Большое внимание уделил рукописи на всех этапах ее прохождения А. З. Рывкин. С. А. Виленкина перепечатывала многочисленные варианты рукописи. Выражаю им благодарность за большую помощь, значительно облегчившую подготовку рукописи к печати.

Н. Виленкин

ВВЕДЕНИЕ

Специальные функции математической физики появляются чаще всего при решении уравнений в частных производных методом разделения переменных или при отыскании собственных функций дифференциальных операторов в некоторых криволинейных системах координат. Но дифференциальные операторы математической физики обычно обладают определенными свойствами инвариантности. Так, оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

инвариантен относительно движений евклидова пространства, волновой оператор

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

инвариантен относительно преобразований группы Лоренца и т. д. Это облегчает разыскание собственных функций операторов. Теория представлений групп и позволяет учитывать инвариантность операторов математической физики.

Именно, пусть линейный оператор A инвариантен относительно некоторой группы преобразований G. Можно показать, что тогда эти преобразования переводят собственные функции оператора в собственные функции, отвечающие тому же собственному значению. Тем самым элементам группы G ставится в соответствие линейное преобразование $T(g)$ в пространстве собственных функций, причем выполняется равенство

$$T(g_1)\, T(g_2) = T(g_1 g_2). \tag{1}$$

Операторные функции на группах, обладающие свойством (1), называют *представлениями групп*. Таким образом, собственные функции инвариантных операторов связаны с представлениями группы, относительно которой инвариантен этот оператор. Знание этих представлений облегчает разыскание собственных функций и позволяет выяснить их поведение при преобразованиях данной группы.

Операторы представления $T(g)$ можно задать в матричной форме, выбрав некоторый базис в пространстве представления. При этом появляются числовые функции на группе — матричные элементы представления. Но элементы групп, существенных для математической физики, задаются обычно числовыми параметрами. Например, элементы группы движений евклидовой плоскости задаются координатами (a, b) образа точки $O(0, 0)$ и углом поворота φ; элементы группы вращений трехмерного евклидова пространства — углами Эйлера φ, θ, ψ и т. д. Таким образом, изучая представления групп, мы приходим к числовым функциям от нескольких переменных.

Разумеется, желательно выразить эти функции через функции от возможно меньшего числа переменных и лучше всего через функции одного переменного. Оказалось, что такое выражение существует для некоторых групп (группы вращений трехмерного пространства, группы движений евклидовой плоскости и т. д.). Для этих групп можно так выбрать базис в пространстве представления, что элементы некоторой подгруппы H задаются диагональными матрицами, на главной диагонали которых стоят показательные функции. Остальные же элементы групп можно представить в виде $h_1\theta h_2$, где $h_1, h_2 \in H$, а $\theta(t)$ пробегает некоторое однопараметрическое многообразие.

Используя это обстоятельство, удается выразить матричные элементы представлений таких групп через показательную функцию и функции от одного параметра t. Оказалось, что эти функции совпадают с классическими специальными функциями математической физики. Так, представления группы движений евклидовой плоскости оказались связанными с функциями Бесселя $J_n(t)$, группы вращений трехмерного евклидова пространства — с функциями Лежандра и Якоби и т. д. Отметим, что появление показательной функции также не является случайным: функции вида e^{int}, где n — целое число, задают представления группы вращений евклидовой плоскости.

При изучении более сложных групп (группы вращений n-мерного евклидова пространства, группы всех движений этого пространства, группы Лоренца и т. д.) оказалось, что не все матричные элементы представлений этих групп выражаются через уже известные специальные функции. Лишь для части матричных элементов удалось получить такие выражения, а для остальных понадобились функции, ранее не встречавшиеся в математическом анализе. Эти новые функции обладают столь же разнообразными свойствами, как и классические специальные функции (см. [121]).

Таким образом, существует связь между специальными функциями и матричными элементами представлений групп. Необходимо отметить, что эта связь зависит и от выбора подгруппы H, элементы которой в данной реализации изображаются диагональными (или, в общем случае, клеточно-диагональными) матрицами. Поэтому с одной и той же группой могут оказаться связанными различные специальные функции в зависимости от того, для какой подгруппы H «диагонализируются» операторы $T(h)$. Например, если G — группа вещественных унимодулярных матриц второго порядка, а H — подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, то возникают функции конуса. Если же выбрать в качестве H подгруппу диагональных матриц, то возникает гипергеометрическая функция. Наконец, если H — подгруппа треугольных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, то получаем функции Ганкеля.

Установление связи между матричными элементами представлений и специальными функциями указало общие пути вывода свойств этих функций. Например, из равенства (1) вытекает, что матричные элементы представлений удовлетворяют соотношению

$$t_{ij}(g_1g_2) = \sum_k t_{ik}(g_1)\, t_{kj}(g_2). \tag{2}$$

Но матричные элементы выражаются через специальные функции. Поэтому формула (2) приводит к формулам для специальных функций. Так получаются, в частности, теоремы сложения для функций Бесселя, Лежандра, Гегенбауэра и др. Если считать один из элементов в равенстве (2) «бесконечно близким к единице группы», то формула (2) превращается в рекуррентное соотношение для соответствующих специальных функций.

Теоретико-групповой подход приводит к естественной трактовке интегральных представлений специальных функций. Если в пространстве представления $T(g)$ выбран ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_k\}$, то матричные элементы задаются формулой

$$t_{ij}(g) = (T(g)\,\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_i). \tag{3}$$

Но пространство представления чаще всего реализуется в виде некоторого функционального пространства (например, пространства собственных функций инвариантного оператора), а скалярное произведение в этом пространстве — в виде интеграла. Поэтому правая часть формулы (3) выражается в виде интеграла, а левая сводится к специальным функциям. Это дает интегральное представление для специальных функций.

Не всегда можно выбрать базис в пространстве представления так, чтобы элементы заданной подгруппы изображались диагональными (или хотя бы клеточно-диагональными) матрицами. Иногда приходится выбирать реализацию представления, при которой элементы из H изображаются операторами умножения на функцию (континуальный аналог диагональной матрицы). В этих случаях операторы представления $T(g)$ принимают вид интегральных операторов, ядра которых выражаются через специальные функции. Это приводит к различным интегральным соотношениям между специальными функциями, в частности, к континуальным аналогам теорем сложения.

Теоретико-групповой подход к специальным функциям тесно связан с гармоническим анализом функций. Рассмотрим в качестве типичного примера представление

$$T(g_\alpha)f(\varphi)=f(\varphi+\alpha)$$

группы вращений окружности ($f(\varphi)$ — функция на окружности, зависящая от угла φ, а g_α — вращение на угол α). Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}.$$

Одномерные пространства функций вида $c_n e^{in\varphi}$ остаются инвариантными при преобразованиях $T(g_\alpha)$:

$$T(g_\alpha)\, e^{in\varphi}=e^{in(\varphi+\alpha)}=e^{in\alpha}e^{in\varphi}.$$

Говорят, что пространство функций $f(\varphi)$ на окружности разложено на одномерные инвариантные подпространства, а представление $T(g)$ на представления $T_n(g_\alpha)=e^{in\alpha}$.

Аналогичная задача возникает во многих иных случаях. Пусть группа G действует на некотором множестве $\mathfrak{M}$ и пусть $\mathfrak{L}$ — пространство функций на этом множестве. Требуется разложить это пространство на минимальные подпространства, инвариантные относительно группы G (т. е. содержащие вместе с каждой функцией $f(x)$ все ее сдвиги $f(gx)$). По аналогии с рассмотренным выше примером эту задачу называют задачей о *гармоническом анализе* пространства $\mathfrak{L}$.

В зависимости от свойств группы G возникают различные случаи. Если группа G коммутативна и компактна (к числу таких групп относится группа вращений окружности), получается разложение $\mathfrak{L}$ в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств. Если же группа G коммутативна, но не компактна, то возникает разложение в «непрерывную прямую сумму» одномерных пространств. Типичным примером является разложение функций на прямой в интеграл Фурье:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Функции $e^{i\lambda x}$, по которым здесь ведется разложение, задают одномерные представления аддитивной группы вещественных чисел

$$e^{i\lambda(x+y)}=e^{i\lambda x}e^{i\lambda y},$$

а параметр λ, задающий представление, пробегает всю прямую.

Для некоммутативных компактных групп (например, группы унитарных матриц) получается разложение на счетное множество конечномерных инвариантных подпространств. Наиболее сложен гармонический анализ для некоммутативных некомпактных групп (например, группы Лоренца). Здесь обычно возникают разложения в непрерывную прямую сумму бесконечномерных подпространств.

Гармонический анализ на группах связан с разложением функций на группах и однородных пространствах по матричным элементам представлений. Поскольку эти матричные элементы выражаются через специальные функции, то получаются разложения в ряды и интегралы по специальным функциям. Это приводит к теоретико-групповой трактовке некоторых интегральных преобразований, встречающихся в математической физике (преобразовании Мелера — Фока, Ганкеля, Конторовича — Лебедева, Олевского и др.), а также разложений в ряды по специальным функциям. Теоретико-групповая точка зрения позволяет естественным образом перенести на такие разложения обычный гармонический анализ — теорию положительно определенных функций, формулу Планшереля и т. д. При конкретном гармоническом анализе на группах оказывается полезным метод орисфер, развитый И. М. Гельфандом и М. И. Граевым [134], [141], [142].

Другие интегральные преобразования, связанные с теорией представлений, возникают при записи самих операторов представлений, как интегральных операторов. Ядра этих операторов выражаются через специальные функции. В этом случае формулы обращения связаны с тем, что операторы $T(g)$ и $T(g^{-1})$ взаимно обратны.

Теоретико-групповое истолкование специальных функций позволяет находить их естественные обобщения. Например, рассматривая вместо вещественных матриц второго порядка матрицы с элементами из дискретно нормированного поля, И. М. Гельфанд и М. И. Граев получили специальные функции на таких полях [143]. На этом пути возникают и специальные функции матричного аргумента (другой подход к этим функциям связан с изучением однородных конусов; см. [158]). Возникающие таким путем специальные функции обладают многими свойствами специальных функций числового аргумента. С их помощью можно строить гармонический анализ на группах матриц с $\mathfrak{p}$-адическими элементами и во многих иных случаях, не охватываемых классическим анализом.

Наконец, как уже говорилось, в теории представлений возникают новые специальные функции, изучение которых приводит к новым соотношениям и для обычных функций. В частности, здесь, по-видимому, появляются ортогональные вектор-функции с многочленными элементами.

ГЛАВА I

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Эта глава носит вводный характер. Она содержит основные понятия и результаты теории представлений групп, которые будут использованы в этой книге. Кроме того, в ней показано, как строятся представления групп преобразований, а также рассмотрена связь между собственными функциями инвариантных операторов и теорией представлений групп. Наконец, в конце главы изучены матричные элементы неприводимых унитарных представлений компактных групп. Там показано, что эти элементы образуют полную ортогональную систему функций на группе относительно инвариантной меры. Этим устанавливается связь между теорией представлений групп и ортогональными разложениями.

§ 1. Основные понятия теории представлений

1. Определение. Понятие представления группы является далеко идущим обобщением понятия показательной функции. *Показательную функцию* e^{ax} можно определить как непрерывное решение функционального уравнения

$$f(x+y)=f(x)f(y), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию $f'(0)=a$.

Обобщая это уравнение на любую группу G, приходим к рассмотрению скалярных функций на группе G, удовлетворяющих уравнению

$$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2). \tag{2}$$

Однако для некоммутативных групп таких функций слишком мало, так как из равенства (2) следует, что для них должно выполняться соотношение

$$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)=f(g_2)f(g_1)=f(g_2g_1).$$

Поэтому скалярных функций, удовлетворяющих уравнению (2), недостаточно, чтобы по ним можно было разложить произвольную функцию $F(g)$ на группе G.

Чтобы получить достаточно богатый запас решений уравнения (2), надо перейти от скалярных функций к функциям, значениями которых являются матрицы или линейные преобразования. Поскольку умножение матриц некоммутативно, запас решений такого вида достаточно велик. Таким путем приходим к рассмотрению решений функционального уравнения

$$T(g_1g_2) = T(g_1)\,T(g_2),$$

где g_1 и g_2 — элементы данной группы G, а $T(g)$ — функция на этой группе, принимающая значения в множестве линейных преобразований некоторого линейного пространства $\mathfrak{L}$. Эти решения и называют *представлениями группы* G. Мы будем в дальнейшем рассматривать представления *непрерывных групп*, т. е. групп, в которых тем или иным образом определено понятие сходимости последовательности элементов. В этом случае потребуем, чтобы операторы $T(g)$ непрерывно зависели от g, т. е. чтобы из $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ вытекало $\lim\limits_{n\to\infty} T(g_n) = T(g)$. Разумеется, требование непрерывности представления зависит от того, как определена сходимость операторов $T(g)$ (например, можно говорить о слабо непрерывных, сильно непрерывных представлениях и т. д.). Мы будем требовать, кроме того, чтобы все операторы $T(g)$ были непрерывными в $\mathfrak{L}$, т. е. чтобы из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ вытекало $\lim\limits_{n\to\infty} T(g)\,x_n = T(g)\,x$. Точный смысл этого требования также зависит от выбора сходимости в $\mathfrak{L}$.

Далее, ограничимся рассмотрением невырожденных представлений, т. е. потребуем, чтобы операторы $T(g)$ имели непрерывные обратные операторы.

Итак, назовем *представлением группы* G непрерывную функцию $T(g)$ на этой группе, принимающую значения в группе невырожденных непрерывных линейных преобразований линейного пространства $\mathfrak{L}$ и удовлетворяющую функциональному уравнению

$$T(g_1g_2) = T(g_1)\,T(g_2). \tag{3}$$

Из этого уравнения легко следует, что $T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$ и $T(e) = E$, где e — единичный элемент группы G, а E — тождественный оператор в $\mathfrak{L}$.

Равенства $T(g_1g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$ и $T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$ показывают, что $T(g)$ является гомоморфным отображением группы G в группу невырожденных непрерывных линейных преобразований пространства $\mathfrak{L}$.

Представление $T(g)$ называют *точным*, если лишь для единичного элемента e из G имеем $T(e) = E$, и *тривиальным* (или *единичным*), если $T(g) = E$ для всех элементов g из группы G.

Линейное пространство $\mathfrak{L}$, в котором действуют операторы $T(g)$, называют *пространством представления* $T(g)$. Если это пространство конечномерно, то и представление $T(g)$ называют *конечномерным.*

В бесконечномерном случае мы, как правило, будем рассматривать представления операторами в гильбертовых пространствах. Лишь изредка придется иметь дело с представлениями в предгильбертовых пространствах, превращающихся в гильбертовы после пополнения по норме вида $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение в $\mathfrak{L}$.

2. Матричная запись представлений. Представление $T(g)$ группы G определено как операторная функция на этой группе, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2). \tag{1}$$

Для аналитика более естественно иметь дело с функциями, принимающими числовые значения. Чтобы перейти от абстрактных функций к функциям, принимающим числовые значения, используем матричную запись операторов.

Рассмотрим сначала случай, когда пространство представления $T(g)$ конечномерно. Выберем в этом пространстве базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Оператор $T(g)$ переводит элемент базиса $\mathbf{e}_j$ в $T(g)\mathbf{e}_j$. Разлагая $T(g)\mathbf{e}_j$ по элементам базиса, получим

$$T(g)\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(g)\,\mathbf{e}_i. \tag{2}$$

Тем самым каждому оператору представления $T(g)$ поставлена в соответствие матрица

$$(T(g)) \equiv (t_{ij}(g)), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \tag{3}$$

или, что то же самое, совокупность n^2 числовых функций $t_{ij}(g)$ на группе. Из непрерывности представления $T(g)$ вытекает, что функции $t_{ij}(g)$ непрерывны.

Так как при умножении операторов перемножаются соответствующие им матрицы, то из функционального уравнения (1) вытекает система n^2 равенств

$$t_{ij}(g_1 g_2) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}(g_1)\, t_{kj}(g_2), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{4}$$

для функций $t_{ij}(g)$.

Таким образом, можно определить n-мерное представление группы G как совокупность n^2 непрерывных числовых функций $t_{ij}(g)$, $g \in G$, удовлетворяющих системе функциональных уравнений (4), и таких, что $\operatorname{Det}(t_{ij}(g)) \neq 0$.

Разумеется, матричная запись зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ в пространстве представления. Если A — невырожденный оператор, отображающий пространство $\mathfrak{L}$ на себя, и $\mathbf{f}_i = A\mathbf{e}_i$, то в базисе $\{\mathbf{f}_i\}$ матрица представления $T(g)$ имеет вид

$$(A^{-1})(T(g))(A). \tag{5}$$

Здесь через (A) обозначена матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_k\}$, т. е. такая матрица, что

$$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i. \tag{6}$$

Таким образом, при переходе к другому базису в пространстве $\mathfrak{L}$ матрица $(T(g))$ заменяется эквивалентной ей матрицей.

Ясно, что если $(t_{ij}(g))$ — матрица представления $T(g)$, то и $\overline{(t_{ij}(g))}$ является матрицей некоторого представления $\overline{T(g)}$. Следует иметь в виду, что $\overline{T(g)}$ зависит не только от $T(g)$, но и от выбора базиса в пространстве $\mathfrak{L}$.

Если пространство представления $T(g)$ *евклидово*, то обычно выбирают в нем ортогональный нормированный базис:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \tag{7}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера[1]). В этом случае матричные элементы вычисляются по формуле

$$t_{ij}(g) = (T(g)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i). \tag{8}$$

Чтобы получить эту формулу, достаточно скалярно умножить обе части равенства (2) на $\mathbf{e}_i$.

Рассмотрим теперь бесконечномерное представление $T(g)$. Как уже говорилось, в этом случае будем считать пространство представления гильбертовым. Выберем в гильбертовом пространстве ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ В этом базисе имеем

$$T(g)\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{\infty} t_{ij}(g)\mathbf{e}_i. \tag{9}$$

Умножив обе части равенства (9) скалярно на $\mathbf{e}_i$, получим

$$t_{ij}(g) = (T(g)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i), \qquad 1 \leqslant i, j < \infty. \tag{10}$$

Итак, каждому оператору $T(g)$ поставлена в соответствие бесконечная матрица $(T(g))$ с элементами $t_{ij}(g)$. Легко показать, что при умножении операторов матрицы умножаются по обычному правилу,

---

[1]) $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$

т. е. что

$$t_{ij}(g_1g_2) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}(g_1)\, t_{kj}(g_2). \tag{11}$$

В самом деле, по формуле (10) имеем

$$t_{ij}(g_1g_2) = (T(g_1g_2)\, \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_i) = (T(g_1)\, T(g_2)\, \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_i) = (T(g_2)\, \mathbf{e}_j,\ T(g_1)^*\, \mathbf{e}_i). \tag{12}$$

Скалярное произведение векторов $T(g_2)\,\mathbf{e}_j$ и $T(g_1)^*\,\mathbf{e}_i$ выражается следующим образом:

$$(T(g_2)\, \mathbf{e}_j,\ T(g_1)^*\, \mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (T(g_2)\, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\, \overline{(T(g_1)^*\, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (T(g_2)\, \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k)\, (T(g_1)\, \mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}(g_1)\, t_{kj}(g_2). \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) вытекает равенство (11).

3. Эквивалентные представления. Пусть $T(g)$ — представление группы G в пространстве $\mathfrak{L}_1$ и A — линейное отображение пространства $\mathfrak{L}_1$ в пространство $\mathfrak{L}_2$, имеющее непрерывное обратное отображение A^{-1}. Тогда равенство

$$Q(g) = A\,T(g)\,A^{-1} \tag{1}$$

определяет представление группы G в пространстве $\mathfrak{L}_2$. В самом деле, имеем

$$Q(g_1)\,Q(g_2) = A\,T(g_1)\,A^{-1}A\,T(g_2)\,A^{-1} = A\,T(g_1)\,T(g_2)\,A^{-1} =$$
$$= A\,T(g_1g_2)\,A^{-1} = Q(g_1g_2).$$

Ясно, что указанным образом можно, исходя из данного представления $T(g)$, построить сколько угодно «новых» представлений той же группы. Эти представления считают эквивалентными $T(g)$.

Итак, представления $T(g)$ и $Q(g)$ группы G в пространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ *эквивалентны*, если существует линейный оператор A, отображающий $\mathfrak{L}_1$ в $\mathfrak{L}_2$, имеющий обратный линейный оператор A^{-1}, и такой, что

$$Q(g) = A\,T(g)\,A^{-1}.$$

Понятие эквивалентности представлений рефлексивно, симметрично и транзитивно: каждое представление эквивалентно самому себе; если представление $T(g)$ эквивалентно представлению $Q(g)$, то представление $Q(g)$ эквивалентно представлению $T(g)$; если представление $T(g)$ эквивалентно представлению $Q(g)$, а представление $Q(g)$ эквивалентно представлению $R(g)$, то $T(g)$ эквивалентно $R(g)$. Поэтому *множество всех представлений группы G разбивается на классы эквивалентных между собой представлений.* В дальнейшем мы не будем различать эквивалентные представления, т. е. будем изучать свойства классов эквивалентных между собой представлений.

Если представления $T(g)$ и $Q(g)$ эквивалентны, то при соответствующем выборе базисов они задаются одинаковыми матрицами. Именно, если в пространстве $\mathfrak{L}_1$ представления $T(g)$ выбрать базис $\{\mathbf{e}_k\}$, то в пространстве $\mathfrak{L}_2$ представления $Q(g)$ надо выбрать базис $\{A\mathbf{e}_k\}$. Мы имеем

$$Q(g)A\mathbf{e}_k = AT(g)\mathbf{e}_k.$$

Поэтому, если

$$T(g)\mathbf{e}_k = \sum t_{jk}(g)\mathbf{e}_j,$$

то

$$Q(g)A\mathbf{e}_k = A\sum t_{jk}(g)\mathbf{e}_j = \sum t_{jk}(g)A\mathbf{e}_j.$$

Таким образом, представление $T(g)$ в базисе $\{\mathbf{e}_k\}$ имеет ту же матрицу, что и представление $Q(g)$ в базисе $\{A\mathbf{e}_k\}$.

4. Сопряженные представления. Пусть $T(g)$ — представление группы G в пространстве $\mathfrak{L}$. Обозначим через $\mathfrak{L}'$ пространство, сопряженное с $\mathfrak{L}$, т. е. пространство линейных функционалов в $\mathfrak{L}$. Равенство

$$T'(g)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(T(g^{-1})\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f}\in\mathfrak{L}',\ \ \mathbf{x}\in\mathfrak{L} \tag{1}$$

определяет представление группы G. В самом деле,

$$T'(g_1)T'(g_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T(g_1)\mathbf{f}(T(g_2^{-1})\mathbf{x}) = \mathbf{f}(T(g_2^{-1})T(g_1^{-1})\mathbf{x}) =$$
$$= \mathbf{f}(T((g_1g_2)^{-1})\mathbf{x}) = T'(g_1g_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

и потому

$$T'(g_1)T'(g_2) = T'(g_1g_2).$$

Представление $T'(g)$ называют *сопряженным* представлению $T(g)$.

Выберем в пространстве $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ базис $\{\mathbf{e}_i\}$ и обозначим через $\mathbf{f}_k$ такой линейный функционал, что $\mathbf{f}_k(\mathbf{e}_i) = \delta_{ki}$. Линейные функционалы $\{\mathbf{f}_i\}$ образуют базис в пространстве $\mathfrak{L}'$, называемый *биортогональным* базису $\{\mathbf{e}_i\}$. Мы докажем сейчас следующее утверждение.

Если матрица представления $T(g)$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ равна $(t_{ij}(g))$, то матрица сопряженного с ним представления в биортогональном базисе имеет вид $(t_{ji}(g^{-1}))$. Иными словами, она получается из матрицы $(t_{ij}(g))$ транспонированием и заменой g на g^{-1}.

В самом деле, в силу биортогональности базисов имеем

$$T'(g)\mathbf{f}_j(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_j(T(g^{-1})\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_j\Big(\sum_i t_{ik}(g^{-1})\mathbf{e}_i\Big) =$$
$$= \sum_i t_{ik}(g^{-1})\mathbf{f}_j(\mathbf{e}_i) = t_{jk}(g^{-1}) = \sum_i t_{ji}(g^{-1})\mathbf{f}_i(\mathbf{e}_k)$$

и потому

$$T'(g)\mathbf{f}_j = \sum_i t_{ji}(g^{-1})\mathbf{f}_i.$$

Этим наше утверждение доказано.

Если в пространстве $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ задана невырожденная билинейная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то каждому элементу $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{L}$ соответствует линейный функционал $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, определяемый равенством

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{2}$$

В силу невырожденности формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равенство (2) устанавливает вложение пространства $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}'$.

Сужая представление $T'(g)$ на образ $\mathfrak{L}$, получаем представление группы G в $\mathfrak{L}$. Его также называют *сопряженным к* $T(g)$ (*относительно билинейной формы* $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$).

5. Эрмитово-сопряженные представления. Унитарные представления. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задано невырожденное скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (линейное по $\mathbf{x}$ и антилинейное по $\mathbf{y}$). Оператор A^* называют *эрмитово-сопряженным* оператору A относительно этого скалярного произведения, если для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{H}$ имеем

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}).$$

Покажем, что если $T(g)$ — представление группы G в пространстве $\mathfrak{H}$, то $T^*(g^{-1})$ также является представлением этой группы. В самом деле, так как $(AB)^* = B^*A^*$, то

$$T^*(g_1^{-1})\,T^*(g_2^{-1}) = [T(g_2^{-1})\,T(g_1^{-1})]^* = T^*(g_2^{-1}g_1^{-1}) = T^*[(g_1g_2)^{-1}].$$

Представление $T^*(g^{-1})$ называют *эрмитово-сопряженным* представлению $T(g)$ и обозначают $\tilde{T}(g)$.

Выберем в пространстве $\mathfrak{H}$ базис $\{\mathbf{e}_i\}$, ортонормированный относительно скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, т. е. такой, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Покажем, что в этом базисе матрица представления $\tilde{T}(g)$ получается из матрицы представления $T(g)$ путем перехода к эрмитово-сопряженной матрице (т. е. путем транспонирования и замены всех элементов комплексно-сопряженными) и замены g на g^{-1}. Иными словами, покажем, что

$$\tilde{t}_{ij}(g) = \overline{t_{ji}(g^{-1})}.$$

В самом деле, из формулы (8) п. 2 имеем

$$\tilde{t}_{ij}(g) = (\tilde{T}(g)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = (T^*(g^{-1})\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j, T(g^{-1})\mathbf{e}_i) = \\ = \overline{(T(g^{-1})\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} = \overline{t_{ji}(g^{-1})}.$$

Представление $T(g)$ группы G в пространстве $\mathfrak{H}$ называют *унитарным* относительно скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если операторы $T(g)$ оставляют скалярное произведение инвариантным, т. е. если для всех векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{H}$ и всех элементов g из G выполняется равенство

$$(T(g)\mathbf{x}, T(g)\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{1}$$

В этом случае имеем $T^*(g)\,T(g) = E$, и потому $T^*(g) = T^{-1}(g) = T(g^{-1})$.

Это равенство можно записать в виде $T(g)=\tilde{T}(g)$. Таким образом, *представление $T(g)$ унитарно, если оно совпадает с эрмитово-сопряженным представлением.*

Принимая во внимание вид матрицы эрмитово-сопряженного представления в ортонормированном базисе, получаем следующее утверждение:

В ортонормированном базисе матрица унитарного представления унитарна, т. е. такова, что

$$(t_{ij}(g))^{-1}=\overline{(t_{ji}(g))}. \tag{2}$$

Отсюда легко получить, что для этой матрицы выполняются равенства

$$\sum_j t_{ij}(g)\overline{t_{kj}(g)}=\sum_j t_{ji}(g)\overline{t_{jk}(g)}=\delta_{ik}. \tag{3}$$

Ясно, что если представление $T(g)$ унитарно и базис $\{\mathbf{e}_k\}$ ортонормирован, то и $\overline{T}(g)$ (см. стр. 25) унитарно.

Унитарные представления играют весьма важную роль в теории представлений групп. Ниже будет показано, например, что любое конечномерное представление компактной группы унитарно относительно некоторого скалярного произведения.

6. Инвариантные подпространства. Неприводимые представления. Подпространство $\mathfrak{L}_1$ пространства представления $T(g)$ называют *инвариантным,* если из $\mathbf{x}\in\mathfrak{L}_1$ следует, что для всех $g\in G$ имеем $T(g)\mathbf{x}\in\mathfrak{L}_1$. Иными словами, все операторы представления $T(g)$ переводят векторы подпространства $\mathfrak{L}_1$ в векторы того же подпространства. Для бесконечномерных представлений мы будем рассматривать лишь замкнутые инвариантные подпространства.

Для каждого представления $T(g)$ есть по крайней мере два инвариантных подпространства — нулевое подпространство и все пространство $\mathfrak{L}$ этого представления. Эти инвариантные подпространства называют *тривиальными.* Если представление $T(g)$ обладает лишь тривиальными инвариантными подпространствами, его называют *неприводимым.* Представление, имеющее нетривиальные инвариантные подпространства, *приводимо.*

С каждым приводимым представлением $T(g)$ группы G связаны два новых представления той же группы. Первое из них получается, если рассматривать операторы представления $T(g)$ лишь на подпространстве $\mathfrak{L}_1$. Мы будем называть это представление *сужением* $T(g)$ на инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_1$. Второе представление строится в фактор-пространстве $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$, т. е. линейном пространстве, элементами которого являются смежные классы $\mathbf{x}+\mathfrak{L}_1$. Из инвариантности $\mathfrak{L}_1$ следует, что оператор $T(g)$ переводит смежный класс $\mathbf{x}+\mathfrak{L}_1$

в смежный класс $T(g)\mathbf{x}+\mathfrak{L}_1$. Этим определяется представление группы G в фактор-пространстве $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$.

Покажем, что если представление $T(g)$ приводимо, то в соответственно выбранном базисе матрица этого представления имеет вид

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & A(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Именно, если инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_1$ имеет конечную размерность k, то базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathfrak{L}$ надо выбрать так, чтобы векторы $\{\mathbf{e}_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$ задавали базис подпространства $\mathfrak{L}_1$. Тогда при $1 \leqslant j \leqslant k$ векторы $T(g)\mathbf{e}_j$ принадлежат подпространству $\mathfrak{L}_1$ и, следовательно, раскладываются по векторам базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, этого подпространства:

$$T(g)\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{k} t_{ij}(g)\mathbf{e}_i.$$

Отсюда вытекает, что при $i > k$, $1 \leqslant j \leqslant k$ матричные элементы $t_{ij}(g)$ равны нулю и, следовательно, матрица представления имеет вид (1).

Если инвариантное подпространство бесконечномерно, то занумеруем векторы базиса индексами i, $-\infty < i < \infty$ и выберем базис $\{\mathbf{e}_i\}$ так, чтобы векторы $\{\mathbf{e}_i\}$, $-\infty < i < 0$ образовали базис в $\mathfrak{L}_1$. Тогда матрица представления $T(g)$ в этом базисе будет иметь вид (1).

7. Разложение представления в прямую сумму. Вообще говоря, невозможно выбрать базис в пространстве приводимого представления так, чтобы матрица $A(g)$ в (1) п. 6 обратилась в нуль. Однако если инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_1$ имеет инвариантное дополнительное подпространство $\mathfrak{L}_2$, то такой выбор возможен. Подпространство $\mathfrak{L}_2$ называют *дополнительным* к $\mathfrak{L}_1$, если любой вектор $\mathbf{x}$ из $\mathfrak{L}$ единственным образом представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{L}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{L}_2$ (иными словами, если $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ порождают все пространство $\mathfrak{L}$ и имеют нулевое пересечение). Пространство $\mathfrak{L}$ называют в этом случае *прямой суммой подпространств* $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ и пишут $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$.

Итак, пусть пространство $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ является прямой суммой инвариантных подпространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Обозначим через $T_1(g)$ сужение представления $T(g)$ на $\mathfrak{L}_1$ и через $T_2(g)$ сужение $T(g)$ на $\mathfrak{L}_2$ (ясно, что $T_2(g)$ эквивалентно представлению в фактор-пространстве $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$). Для любого вектора $\mathbf{x}$ из $\mathfrak{L}$ имеем

$$T(g)\mathbf{x} = T(g)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(g)\mathbf{x}_1 + T(g)\mathbf{x}_2 = T_1(g)\mathbf{x}_1 + T_2(g)\mathbf{x}_2,$$

где $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{L}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{L}_2$. Это равенство показывает, что $T(g)$ однозначно определено заданием представлений $T_1(g)$ и $T_2(g)$. Говорят, что $T(g)$ является *прямой суммой представлений* $T_1(g)$ и $T_2(g)$ и пишут

$$T(g) = T_1(g) + T_2(g).$$

Таким образом, если пространство $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ является прямой суммой инвариантных подпространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, то $T(g)$ есть прямая сумма своих сужений $T_1(g)$ и $T_2(g)$ на эти подпространства.

Пусть пространство $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ разложено в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathfrak{L}$ так, чтобы векторы $\mathbf{e}_i$, принадлежащие инвариантным подпространствам $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, задавали в них базис. При таком выборе матрица представления $T(g)$ примет вид

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}.$$

Определение прямой суммы представлений естественным образом обобщается на случай нескольких слагаемых. В этом случае при соответствующем выборе базиса матрица представления имеет вид

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2(g) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & T_n(g) \end{pmatrix}.$$

Введем теперь понятие прямой ортогональной суммы представлений. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ представления $T(g)$ есть такие попарно ортогональные инвариантные подпространства $\mathfrak{H}_k$, $1 \leqslant k < \infty$, что каждый элемент $\mathbf{x}$ из $\mathfrak{H}$ разлагается в сходящийся ряд $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$, где $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{H}_k$. В этом случае пишут

$$\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_k$$

и говорят, что $\mathfrak{H}$ является *прямой ортогональной суммой инвариантных подпространств* $\mathfrak{H}_k$.

Обозначим сужение представления $T(g)$ на подпространство $\mathfrak{H}_k$ через $T_k(g)$. Ясно, что если $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$, где $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{H}_k$, то

$$T(g)\,\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(g)\,\mathbf{x}_k,$$

причем $T_k(g)\,\mathbf{x}_k \in \mathfrak{H}_k$. Поэтому представление $T(g)$ однозначно определяется заданием представлений $T_k(g)$. Говорят, что $T(g)$ является *ортогональной прямой суммой представлений* $T_k(g)$ и пишут

$$T(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus T_k(g).$$

Если нет опасности недоразумения, то пишут просто

$$\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k$$

и

$$T(g) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(g).$$

8. Полная приводимость унитарных представлений. Представление $T(g)$ называется *вполне приводимым*, если оно является прямой суммой неприводимых представлений. Для вполне приводимых представлений можно так выбрать базис, что матрица представления в этом базисе клеточно-диагональна:

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2(g) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & T_n(g) \end{pmatrix},$$

причем на главной диагонали стоят матрицы неприводимых представлений $T_k(g)$ группы G (в бесконечномерном случае на главной диагонали может быть бесконечно много матриц $T_k(g)$).

Мы покажем сейчас, что *все конечномерные унитарные представления вполне приводимы*. Для этого нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть представление $T(g)$ унитарно относительно скалярного произведения* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *и* $\mathfrak{L}_1$ — *инвариантное подпространство в пространстве* $\mathfrak{L}$ *этого представления. Тогда ортогональное дополнение*[1] $\mathfrak{L}_2$ *подпространства* $\mathfrak{L}_1$ *также инвариантно.*

Чтобы доказать лемму, выберем любой вектор $\mathbf{x}$ из $\mathfrak{L}_2$. Тогда для любого вектора $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{L}_1$ имеем в силу унитарности $T(g)$

$$(T(g)\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, T(g^{-1})\mathbf{y}).$$

Но в силу инвариантности $\mathfrak{L}_1$ вектор $T(g^{-1})\mathbf{y}$ принадлежит $\mathfrak{L}_1$, и потому $(\mathbf{x}, T(g^{-1})\mathbf{y}) = 0$, а следовательно, и $(T(g)\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Этим доказано, что $T(g)\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_2$, т. е. что $\mathfrak{L}_2$ — инвариантное подпространство. Лемма доказана.

Заметим теперь, что пространство $\mathfrak{L}$ является прямой суммой подпространства $\mathfrak{L}_1$ и его ортогонального дополнения $\mathfrak{L}_2$. Поэтому, если подпространство $\mathfrak{L}_1$ инвариантно, то $\mathfrak{L}$ является прямой суммой инвариантных подпространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$.

При этом сужения представления $T(g)$ на подпространства $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ также унитарны. Продолжая далее описанный процесс, мы через

---

[1] *Ортогональным дополнением* подпространства $\mathfrak{L}_1$ называют совокупность всех векторов $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}$, таких, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для всех векторов $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{L}_1$.

конечное число шагов придем к неприводимым инвариантным подпространствам и получим разложение представления $T(g)$ в прямую сумму неприводимых представлений.

Для бесконечномерных представлений дело обстоит сложнее, поскольку в бесконечномерных пространствах могут существовать бесконечные убывающие цепочки инвариантных подпространств. Поэтому не все бесконечномерные унитарные представления вполне приводимы. Однако во всех случаях, которые нам встретятся, бесконечномерные унитарные представления разлагаются в непрерывную прямую сумму неприводимых представлений (относительно понятия непрерывной прямой суммы представлений см. Дополнение к главе I). Если мера, по которой строится непрерывная прямая сумма, сосредоточена в счетном множестве точек, получается разложение представления в ортогональную прямую сумму неприводимых представлений.

9. Кронекеровское умножение представлений. Определим кронекеровское умножение представлений. Пусть $T(g)$ и $Q(g)$ — представления группы G, действующие соответственно в линейных пространствах $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$. Каждому элементу g группы G поставим в соответствие оператор $R(g) = T(g) \otimes Q(g)$ — кронекеровское произведение операторов $T(g)$ и $Q(g)$ (относительно определения кронекеровского произведения операторов и свойств этого произведения см. Дополнение к главе I). Покажем, что $R(g)$ является представлением группы G. Для этого воспользуемся равенством

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D).$$

Из этого равенства следует, что

$$R(g_1g_2) = T(g_1g_2) \otimes Q(g_1g_2) = (T(g_1)\,T(g_2)) \otimes (Q(g_1)\,Q(g_2)) =$$
$$= (T(g_1) \otimes Q(g_1))\,(T(g_2) \otimes Q(g_2)) = R(g_1)\,R(g_2).$$

Итак, $R(g_1g_2) = R(g_1)\,R(g_2)$, т. е. $R(g)$ — представление группы G. Его называют *кронекеровским* или *тензорным произведением* представлений $T(g)$ и $Q(g)$.

Кронекеровское произведение классов эквивалентных представлений обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Кроме того, это произведение дистрибутивно относительно сложения представлений

$$T(g) \otimes (Q_1(g) + Q_2(g)) = T(g) \otimes Q_1(g) + T(g) \otimes Q_2(g).$$

Выясним, какой вид имеет матрица кронекеровского произведения двух представлений. Пусть представление $T(g)$ реализуется в пространстве $\mathfrak{L}$, представление $Q(g)$ — в пространстве $\mathfrak{M}$ и $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_j\}$ — базисы в этих пространствах. В Дополнении к главе I показано, что в этом случае в качестве базиса в пространстве $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{M}$ можно выбрать $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$. Матричными элементами оператора $T(g) \otimes Q(g)$ в этом базисе являются произведения матричных элементов операторов

$T(g)$ и $Q(g)$. Таким образом, элементы матрицы оператора $R(g) = T(g) \otimes Q(g)$ нумеруются двумя парами чисел (ij), (km) и имеют вид

$$r_{ij,km}(g) = t_{ik}(g)\, q_{jm}(g).$$

10. Характеры представлений. Недостатком матричной записи представлений является то, что она зависит не только от представления, но и от выбора базиса в пространстве представления. При переходе к другому базису матрица представления заменяется эквивалентной ей матрицей. Естественно поэтому изучать функции от матричных элементов, остающиеся инвариантными при переходе от данной матрицы к эквивалентной. Простейшей из таких функций является *след матрицы*, т. е. сумма диагональных элементов этой матрицы

$$\operatorname{Tr} A = \sum_i a_{ii}. \tag{1}$$

След матрицы представления называют *характером* этого представления и обозначают $\chi_T(g)$. Таким образом, если $(T(g)) = (t_{ij}(g))$, то

$$\chi_T(g) = \sum_i t_{ii}(g). \tag{2}$$

Из свойств следа матрицы вытекает, что характер представления не зависит от выбора базиса в пространстве представления. Поскольку путем выбора базиса можно сделать матрицы эквивалентных представлений тождественными, то *характер представления зависит только от класса эквивалентных между собой представлений.*

При фиксированном T характер $\chi_T(g)$ является функцией на группе G. Так как

$$T(g_1^{-1} g g_1) = T^{-1}(g_1)\, T(g)\, T(g_1),$$

то

$$\operatorname{Tr} T(g_1^{-1} g g_1) = \operatorname{Tr} T(g)$$

и потому

$$\chi_T(g_1^{-1} g g_1) = \chi_T(g). \tag{3}$$

Таким образом, *характер представления $T(g)$ является функцией на G, постоянной на классах сопряженных элементов.*

Действиям над представлениями отвечают соответствующие действия над их характерами. Именно, *характер суммы двух представлений равен сумме их характеров, а характер кронекеровского произведения двух представлений равен произведению их характеров:*

$$\chi_{T+Q}(g) = \chi_T(g) + \chi_Q(g), \tag{4}$$

$$\chi_{T \otimes Q}(g) = \chi_T(g)\, \chi_Q(g). \tag{5}$$

В самом деле, если матрицы представлений $T(g)$ и $Q(g)$ соответственно равны $(t_{ij}(g))$ и $(q_{ij}(g))$, то

$$\chi_{T+Q}(g)=\sum_i t_{ii}(g)+\sum_j q_{jj}(g)=\chi_T(g)+\chi_Q(g)$$

и

$$\chi_{T\otimes Q}(g)=\sum_{i,j} r_{ij,\,ij}(g)=\sum_{i,j} t_{ii}(g)\,q_{jj}(g)=$$
$$=\sum_i t_{ii}(g)\sum_j q_{jj}(g)=\chi_T(g)\,\chi_Q(g).$$

11. Инфинитезимальные операторы представления [1]). Пусть каждому вещественному числу t поставлен в соответствие элемент $g(t)$ группы G. Если для любых t и s выполняется равенство

$$g(t)g(s)=g(t+s), \tag{1}$$

то $g(t)$ называют *однопараметрической подгруппой* группы G. Из равенства (1) вытекает, что $g(0)=e$ и $g(-t)=g^{-1}(t)$ (в дальнейшем будем исключать случай, когда $g(t)\equiv e$).

Примерами однопараметрических подгрупп могут служить подгруппа вращений вокруг фиксированной оси в группе вращений евклидова пространства, подгруппа параллельных переносов по фиксированному направлению в группе движений евклидова пространства и т. д.

Пусть $g(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы G и $T(g)$ — представление этой группы. Если существует предел

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{T(g(t))-E}{t}\equiv\left.\frac{dT(g(t))}{dt}\right|_{t=0}, \tag{2}$$

то оператор A называют *инфинитезимальным оператором* представления $T(g)$, соответствующим однопараметрической подгруппе $g(t)$.

Если G — матричная группа (т. е. если ее элементами являются невырожденные матрицы n-го порядка, а групповой операцией — умножение матриц) и если представление $T(g)$ конечномерно, то инфинитезимальные операторы определены на всем пространстве представления. Для бесконечномерных представлений дело обстоит сложнее, поскольку, вообще говоря, инфинитезимальные операторы бесконечномерных представлений неограничены (например, операторы представления действуют в пространстве функций с интегрируемым квадратом модуля на некотором многообразии, а инфинитезимальные операторы являются дифференциальными). Используя теорию обобщенных функций, можно и в бесконечномерном случае распространить инфинитезимальные операторы на все пространство представления. Мы не будем, однако, на этом останавливаться.

[1]) Мы лишь кратко указываем основные факты, относящиеся к инфинитезимальным операторам представлений. Более подробное изложение можно найти, например, в книге [39].

Пусть A — инфинитезимальный оператор представления $T(g)$, соответствующий однопараметрической подгруппе $g(t)$. Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ (вообще говоря, незамкнутое) подпространство, на котором определены операторы

$$e^{tA} \equiv 1 + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^nA^n}{n!} + \ldots \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ и потому

$$\left.\frac{d(e^{tA})}{dt}\right|_{t=0} = A. \tag{4}$$

Используя теорему единственности решения для дифференциальных уравнений, выводим из равенств (2) и (4), что в конечномерном случае

$$T(g(t)) = e^{tA}. \tag{5}$$

Таким образом, *в конечномерном случае представление $T(g)$ определяется для элементов однопараметрической подгруппы $g(t)$ заданием инфинитезимального оператора A этой подгруппы.* В бесконечномерном случае дело обстоит несколько сложнее, однако для всех случаев, с которыми мы встретимся в этой книге, утверждение остается справедливым.

Группы, которые нам встретятся в дальнейшем, имеют «достаточно много» однопараметрических подгрупп. Именно, через каждый элемент g этих групп проходит однопараметрическая подгруппа. Поэтому представления $T(g)$ для таких групп определяются заданием своих инфинитезимальных операторов. При этом пространство инфинитезимальных операторов оказывается конечномерным, и его размерность равна размерности группы, т. е. числу параметров, задающих элементы группы. Например, для группы движений евклидовой плоскости пространство инфинитезимальных операторов любого представления трехмерно, поскольку любое движение плоскости задается тремя параметрами — углом поворота и координатами точки, в которую переходит начало координат.

Таким образом, при переходе к инфинитезимальным операторам мы заменяем бесконечное множество операторов представления $T(g)$ конечным множеством — базисом пространства инфинитезимальных операторов. Это приводит к существенному упрощению задач теории представлений. Например, всякое подпространство, инвариантное относительно представления $T(g)$, инвариантно и относительно его инфинитезимальных операторов. Поэтому для доказательства неприводимости $T(g)$ достаточно показать, что в пространстве $\mathfrak{L}$ этого представления нет нетривиального подпространства, инвариантного относительно базисных инфинитезимальных операторов.

В дальнейшем как правило, будут рассматриваться лишь матричные группы. Для них можно говорить об инфинитезимальных операторах (точнее, матрицах) самих однопараметрических подгрупп

$$a = \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Будем называть a *касательной матрицей* однопараметрической подгруппы.

Матричную группу называют *линейной группой Ли*, если существует окрестность единичной матрицы в этой группе, гомеоморфная единичному шару. Для линейных групп Ли совокупность касательных матриц к однопараметрическим подгруппам образует линейное пространство, такое, что вместе с любыми двумя матрицами a и b ему принадлежит их *коммутатор* $[a, b] = ab - ba$. Такие линейные пространства матриц называют *матричными алгебрами Ли*. Таким образом, с каждой линейной группой Ли G связана матричная алгебра Ли $\mathfrak{G}$. Можно показать, что эта алгебра Ли определяет группу G с точностью до локального изоморфизма. Иными словами, пусть две группы Ли G и H имеют одну и ту же алгебру Ли. Тогда в них можно выделить окрестности единицы U и V соответственно и установить взаимно однозначное отображение $v = \varphi(u)$ U на V так, что

$$\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2).$$

Пусть $g(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы Ли G, $T(g)$ — представление этой группы и A — инфинитезимальный оператор представления $T(g)$, соответствующий подгруппе $g(t)$. Сопоставим касательной матрице a подгруппы $g(t)$ оператор $A = \left.\frac{dT(g(t))}{dt}\right|_{t=0}$. Можно показать, что это соответствие является линейным отображением алгебры Ли группы G на пространство инфинитезимальных операторов представления $T(g)$, при котором коммутатор матриц переходит в коммутатор операторов: если $a \to A$ и $b \to B$, то $[a, b] \to [A, B]$, (где $[A, B] = AB - BA$). Иными словами, *представление $T(g)$ группы G задает инфинитезимальное представление $a \to A$ ее алгебры Ли*. В случае конечномерных представлений инфинитезимальное представление однозначно определяет представление $T(g)$. Именно, пусть матрицы $a_1, \ldots, a_n$ образуют базис алгебры Ли группы G и

$$g = \exp[t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n],$$

где $t_1, \ldots, t_n$ — вещественные числа. Обозначим через A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ инфинитезимальные операторы представления $T(g)$, соответствующие однопараметрическим подгруппам e^{ta_k}. Можно показать, что тогда имеет место равенство

$$T(g) = \exp[t_1 A_1 + \ldots + t_n A_n].$$

В бесконечномерном случае дело обстоит несколько сложнее, поскольку в этом случае инфинитезимальные операторы, вообще говоря, неограничены, и потому определены не на всем пространстве представления.

§ 2. Группы преобразований и их представления

В этом параграфе описаны некоторые конструкции представлений для групп преобразований. В частности, рассмотрены регулярные представления групп и представления групп, индуцированные представлениями подгрупп.

1. Группы преобразований. *Преобразованием* множества $\mathfrak{M}$ называют взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Образ элемента x из $\mathfrak{M}$ при отображении g будем обозначать через gx. Пусть G — некоторая группа. Говорят, что G является *группой преобразований* множества $\mathfrak{M}$, если каждому элементу g этой группы поставлено в соответствие преобразование $x \to gx$ в $\mathfrak{M}$, причем выполнены следующие условия:

1) Единичному элементу e из G поставлено в соответствие тождественное преобразование множества $\mathfrak{M}$: $ex \equiv x$.

2) Для любых двух элементов g_1 и g_2 из G выполнено равенство

$$(g_1 g_2)\, x = g_1 (g_2 x). \tag{1}$$

Примерами групп преобразований являются группа всех перестановок из n элементов, группа невырожденных линейных преобразований n-мерного линейного пространства, группа ортогональных преобразований евклидова пространства, группа параллельных переносов n-мерного евклидова пространства и т. д.

Группу преобразований G множества $\mathfrak{M}$ называют *эффективной*, если для любого элемента $g \neq e$ этой группы найдется такая точка x из $\mathfrak{M}$, что $gx \neq x$. В дальнейшем будем рассматривать лишь эффективные группы преобразований.

Заметим, что каждую группу G можно рассматривать как группу преобразований множества $\mathfrak{M}$, состоящего из элементов этой же группы. Именно, поставим в соответствие каждому элементу g_0 из G левый сдвиг группы, переводящий каждый элемент g в элемент $g_0 g$. Другая реализация группы G как группы преобразований получится, если каждому элементу g_0 поставить в соответствие правый сдвиг, переводящий g в $g g_0^{-1}$.

2. Транзитивные группы преобразований. Пусть G — (эффективная) группа преобразований множества $\mathfrak{M}$. Если для любых двух элементов x и y множества $\mathfrak{M}$ найдется такой элемент g из G, что $gx = y$, то G называют *транзитивной группой преобразований* множества $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$, в котором действует транзитивная группа преобразований G, называют *однородным пространством* с группой преобразований G. Например, группа вращений евклидова пространства не является транзитивной, поскольку точки, находящиеся на разных расстояниях от начала координат, не могут быть переведены друг в друга вращением (вокруг начала координат). В то же время эта группа является транзитивной группой преобразований единичной сферы в себя. Таким образом, сфера является однородным пространством относительно группы вращений евклидова пространства, а само евклидово пространство однородным пространством относительно этой группы не является.

Если группа G не является транзитивной, то множество $\mathfrak{M}$ распадается на непересекающиеся классы элементов, такие, что два элемента одного и того же класса можно перевести друг в друга преобразованием из группы G, а элементы различных классов не переводятся друг в друга такими преобразованиями. Эти классы элементов называют *классами транзитивности*. Например, сферы различных радиусов с центрами в начале координат являются классами транзитивности для группы вращений евклидова пространства.

Пусть G — транзитивная группа преобразований множества $\mathfrak{M}$, и a — некоторая фиксированная точка этого множества. Рассмотрим все элементы h группы G, оставляющие на месте точку a, т. е. $ha=a$. Так как из $h_1a=a$ и $h_2a=a$ вытекает, что $h_1^{-1}a=a$ и $(h_1h_2)a=a$, то множество таких элементов образует подгруппу H группы G. Ее называют *стационарной подгруппой точки* a.

Если преобразование g переводит точку a в другую точку x, то все остальные преобразования g_1, переводящие a в x, имеют вид $g_1=gh$, где $h\in H$. Иными словами, множество таких преобразований является левым смежным классом gH по подгруппе H. Поскольку группа G транзитивна, этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками x множества $\mathfrak{M}$ и левыми смежными классами по H. Преобразования $x\to gx$ при этом соответствии переходят в умножение слева на g: если точке x соответствует смежный класс g_1H, то точке gx соответствует смежный класс gg_1H.

Заметим, что стационарная подгруппа не определяется однозначно заданием однородного пространства $\mathfrak{M}$, а зависит еще и от выбора точки a. Выясним, как связаны друг с другом стационарные подгруппы различных точек. Пусть H — стационарная подгруппа точки a, и пусть преобразование g переводит точку a в точку b. Тогда преобразования вида ghg^{-1}, $h\in H$, и только такие преобразования оставляют на месте точку b. Таким образом, стационарной подгруппой точки b является подгруппа gHg^{-1}, сопряженная стационарной подгруппе H точки a. Поскольку группа G транзитивно действует на $\mathfrak{M}$, все стационарные подгруппы точек множества $\mathfrak{M}$ сопряжены между собой.

Итак, мы доказали, что *каждому однородному пространству $\mathfrak{M}$ для группы G соответствует класс сопряженных подгрупп в G — стационарных подгрупп точек множества $\mathfrak{M}$. Обратно,* *каждому классу сопряженных подгрупп соответствует некоторое однородное пространство.* Чтобы построить это пространство, возьмем одну из сопряженных между собой подгрупп H и обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство левых смежных классов по H. Каждому элементу g из G поставим в соответствие преобразование в $\mathfrak{M}$, переводящее смежный класс g_1H в смежный класс gg_1H. Группа G превращается при этом в транзитивную группу преобразований множества $\mathfrak{M}$, а подгруппа H — в стационарную подгруппу смежного класса $eH = H$. Мы будем писать в этом случае

$$\mathfrak{M} = G/H.$$

Другая реализация группы G как группы движений однородного пространства $\mathfrak{M}$ получается, если отождествить элементы $\mathfrak{M}$ с правыми смежными классами по H, а движения определить равенством $Hg_1 \to Hg_1g^{-1}$. Переход от одной реализации к другой осуществляется с помощью преобразования $g \to g^{-1}$.

Введем еще понятие сферы в однородном пространстве. Возьмем любую точку y из $\mathfrak{M}$ и применим к ней все движения h из стационарной подгруппы точки a. Получим множество Hg, которое будем называть *сферой с центром в точке a, проходящей через точку y*. Ясно, что при реализации $\mathfrak{M}$ в виде пространства левых классов смежности по H сфера реализуется как *двусторонний класс смежности*, т. е. как множество элементов вида HgH, где g — фиксировано.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере группы движений евклидова пространства. Стационарной подгруппой любой точки $\mathbf{a}$ являются вращения пространства вокруг этой точки. Если $\mathbf{y}$ — другая точка, то при вращениях, оставляющих точку $\mathbf{a}$ на месте, точка $\mathbf{y}$ описывает евклидову сферу с центром в точке $\mathbf{a}$, проходящую через точку $\mathbf{y}$.

Рассмотрим еще следующий пример. Пусть $G = SO(n)$ — группа вращений n-мерного евклидова пространства вокруг начала координат. Ясно, что единичная сфера S^{n-1} с центром в начале координат является однородным пространством с группой движений $SO(n)$. Возьмем на сфере точку $N(0, \ldots, 0, 1)$ (северный полюс сферы). Стационарной подгруппой для этой точки является группа $SO(n-1)$ евклидовых вращений $(n-1)$-мерного подпространства $x_n = 0$. Поэтому

$$S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1).$$

3. Инвариантные меры. Пусть на множестве $\mathfrak{M}$ с группой преобразований G задана счетно-аддитивная мера μ. Говорят, что эта мера инвариантна относительно группы G, если для любого измеримого подмножества A из $\mathfrak{M}$ и любого элемента g из G выполняется равенство

$$\mu(A)=\mu(gA)$$

(через gA обозначен образ множества A при преобразовании g). Например, лебегова мера в n-мерном евклидовом пространстве инвариантна относительно группы движений этого пространства (и даже относительно группы неоднородных линейных преобразований с определителем 1), лебегова мера на сфере инвариантна относительно группы вращений сферы вокруг центра и т. д.

В частности, мера μ на группе G называется *инвариантной слева*, если для любого измеримого подмножества $A \subset G$ и любого элемента g из G имеем

$$\mu(A)=\mu(gA)$$

(здесь gA — совокупность элементов вида ga, $a \in A$). Если же выполняется равенство

$$\nu(A)=\nu(Ag),$$

то мера ν на группе G называется *инвариантной справа*. Ясно, что если мера $\mu(A)$ на группе инвариантна слева, то мера $\nu(A)=\mu(A^{-1})$ [1]) инвариантна справа.

Если мера μ на множестве $\mathfrak{M}$ инвариантна относительно группы G, то интеграл $\int f(x)\,d\mu(x)$ по этой мере обладает следующим свойством инвариантности

$$\int f(x)\,d\mu(x)=\int f(gx)\,d\mu(x).$$

В частности, если μ — инвариантная слева мера на группе G, то интеграл по этой мере обладает следующим свойством инвариантности при левых сдвигах:

$$\int f(g)\,d\mu(g)=\int f(g_0g)\,d\mu(g).$$

Аналогично, для правоинвариантной меры ν имеем

$$\int f(g)\,d\nu(g)=\int f(gg_0)\,d\nu(g).$$

4. Представления групп операторами сдвига. Рассмотрим представления групп операторами сдвига на однородных пространствах. Пусть G — группа преобразований множества $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{L}$ — линейное пространство, состоящее из функций $\mathfrak{f}(x)$, $x \in \mathfrak{M}$, со значениями в линейном пространстве $\mathfrak{R}$. Назовем пространство $\mathfrak{L}$ *инвариантным* относительно движений из G, если вместе с любой функцией $\mathfrak{f}(x)$ оно содержит все функции $\mathfrak{f}(gx)$, $g \in G$.

---

[1]) A^{-1} — множество всех элементов вида a^{-1}, где $a \in A$.

С каждым инвариантным подпространством $\mathfrak{L}$ связано представление группы G операторами сдвига

$$T(g)\,\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(g^{-1}x), \qquad g\in G,\ \mathrm{f}\in\mathfrak{L}. \tag{1}$$

Чтобы доказать, что равенство (1) определяет представление группы G, достаточно заметить, что для любых двух элементов g_1 и g_2 из G имеем

$$T(g_1)\,T(g_2)\,\mathrm{f}(x)=T(g_1)\,\mathrm{f}(g_2^{-1}x)=$$
$$=\mathrm{f}(g_2^{-1}g_1^{-1}x)=\mathrm{f}((g_1g_2)^{-1}x)=T(g_1g_2)\,\mathrm{f}(x).$$

Если в пространстве $\mathfrak{M}$ есть мера μ, инвариантная относительно группы G, то в качестве $\mathfrak{L}$ можно взять пространство скалярных функций $f(x)$, имеющих интегрируемый квадрат по этой мере. В этом случае представление $T(g)$ унитарно относительно скалярного произведения

$$(f_1,\ f_2)=\int_{\mathfrak{M}} f_1(x)\,\overline{f_2(x)}\,d\mu(x).$$

В самом деле,

$$(T(g)f_1,\ T(g)f_2)=\int_{\mathfrak{M}} T(g)f_1(x)\,\overline{T(g)f_2(x)}\,d\mu(x)=$$
$$=\int_{\mathfrak{M}} f_1(g^{-1}x)\,\overline{f_2(g^{-1}x)}\,d\mu(x).$$

Сделаем в этом интеграле подстановку $g^{-1}x=y$ и воспользуемся инвариантностью меры μ. Мы получим

$$(T(g)f_1,\ T(g)f_2)=\int_{\mathfrak{M}} f_1(y)\,\overline{f_2(y)}\,d\mu(y)=(f_1,\ f_2).$$

Тем самым унитарность $T(g)$ доказана.

Описанная конструкция применима, в частности, к пространствам функций на самой группе G, рассматриваемой как группа сдвигов. Если взять левые сдвиги $g\to g_0g$, то операторы представления имеют вид

$$L(g_0)f(g)=f(g_0^{-1}g). \tag{2}$$

Если же взять правые сдвиги, то они имеют вид

$$R(g_0)f(g)=f(gg_0). \tag{3}$$

В случае, когда на группе G есть инвариантная слева мера, за $\mathfrak{L}$ принимают обычно пространство функций с интегрируемым квадратом по этой мере. В этом случае представление $L(g)$ называют *левым регулярным представлением* группы G. Аналогично, если $\mathfrak{L}$ — пространство функций с интегрируемым квадратом по инвариантной справа мере, то $R(g)$ называют *правым регулярным представлением* G.

Докажем, что *любое неприводимое представление $T(g)$ группы G эквивалентно представлению операторами сдвига в некотором пространстве скалярных функций на этой группе.* Для этого выберем любой вектор $\mathbf{a}$ в пространстве $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ и каждому вектору $\mathbf{f}$ из $\mathfrak{L}$ поставим в соответствие скалярную функцию $f(g)$ на группе G:

$$f(g) = (T(g)\mathbf{f},\ \mathbf{a})^{1)}. \tag{4}$$

Равенство

$$(T(g)\,T(g_0)\,\mathbf{f},\ \mathbf{a}) = (T(gg_0)\,\mathbf{f},\ \mathbf{a}) = f(gg_0)$$

показывает, что при замене $\mathbf{f}$ на $T(g_0)\mathbf{f}$ функция $f(g)$ переходит в

$$Q(g_0)f(g) = f(gg_0).$$

Чтобы доказать, что представление $Q(g)$ эквивалентно представлению $T(g)$, надо доказать, что ядро отображения $\mathbf{f} \to f(g)$ равно нулю. Но если $f(g) \equiv 0$, то для всех g_0 имеем $f(gg_0) = 0$. Поэтому если вектор $\mathbf{f}$ принадлежит ядру $\mathfrak{L}_1$ отображения $\mathbf{f} \to f(g)$ (т. е. переходит при этом отображении в нуль), то и вектор $T(g_0)\mathbf{f}$ принадлежит этому ядру. Но тогда $\mathfrak{L}_1$ является инвариантным подпространством в $\mathfrak{L}$. Оно не может совпадать со всем пространством $\mathfrak{L}$, поскольку $a(e) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$. Следовательно, в силу неприводимости $T(g)$ подпространство $\mathfrak{L}_1$ является нулевым. Тем самым доказана эквивалентность представлений $T(g)$ и $Q(g)$.

Если функции $f(g) \in \mathfrak{L}^2(G)$, т. е. если они имеют интегрируемый квадрат относительно инвариантной справа меры, а отображение $\mathbf{f} \to f(g)$ взаимно непрерывно относительно сходимости в $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^2(G)$, то представление $T(g)$ эквивалентно неприводимой части регулярного представления группы G. Для многих групп (в частности, для всех компактных групп; см. § 4) все неприводимые представления получаются при разложении регулярного представления на неприводимые компоненты.

Обозначим образ пространства $\mathfrak{L}$ при отображении $\mathbf{f} \to f(g)$ через $\mathfrak{M}$. В качестве базиса в $\mathfrak{M}$ естественно выбрать образы базисных векторов $\{\mathbf{e}_i\}$ из $\mathfrak{L}$. Будем считать, что базис $\{\mathbf{e}_i\}$ выбран так, что инвариантный вектор $\mathbf{a}$ является одним из базисных векторов, скажем, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$. В этом случае базисные векторы $\mathbf{e}_j$ переходят в матричные элементы первой строки представления $T(g)$. В самом деле,

$$e_j(g) = (T(g)\,\mathbf{e}_j,\ \mathbf{a}) = (T(g)\,\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_1) = t_{1j}(g),$$

откуда и следует наше утверждение. Из

$$Q(g_0)\,t_{1j}(g) = t_{1j}(gg_0) = \sum_k t_{kj}(g_0)\,t_{1k}(g)$$

[1]) $(\mathbf{f}, \mathbf{a})$ — некоторое скалярное произведение в пространстве представления.

видно, что в базисе $\{t_{1j}(g)\}$ представление $Q(g)$ задается той же матрицей, что и представление $T(g)$ в базисе $\{\mathbf{e}_j\}$.

5. Представления класса 1. Сферические функции. Пусть $T(g)$ — неприводимое представление группы G в пространстве $\mathfrak{L}$, а H — подгруппа этой группы. Вектор $\mathbf{a}$ в пространстве $\mathfrak{L}$ называют *инвариантным относительно подгруппы* H, если для всех $h \in H$ имеем $T(h)\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Представление $T(g)$ называют *представлением класса* 1 *относительно подгруппы* H, если в его пространстве есть ненулевые векторы, инвариантные относительно H, причем сужение представления $T(g)$ на подгруппу H унитарно:

$$(T(h)\mathbf{x},\ T(h)\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{y}), \qquad h \in H. \tag{1}$$

Если в пространстве $\mathfrak{L}$ любого представления класса 1 относительно H есть лишь один нормированный инвариантный вектор $\mathbf{a}$, назовем подгруппу H *массивной*.

Пусть $T(g)$ — представление группы G класса 1 относительно массивной подгруппы H и $\mathbf{a}$ — нормированный инвариантный вектор в пространстве $\mathfrak{L}$ этого представления. Применим к вектору $\mathbf{a}$ конструкцию из п. 4, т. е. каждому вектору $\mathbf{f}$ из $\mathfrak{L}$ поставим в соответствие функцию

$$f(g) = (T(g)\mathbf{f},\ \mathbf{a}) \tag{2}$$

на группе G. Эти функции называют *сферическими функциями представления* $T(g)$ *относительно подгруппы* H. Как было показано в п. 4, представление $T(g)$ эквивалентно представлению

$$Q(g_0)f(g) = f(gg_0) \tag{3}$$

в пространстве сферических функций.

Сферические функции можно рассматривать как функции на однородном многообразии $\mathfrak{M}$ с группой движений G и стационарной подгруппой H. В самом деле, из того, что сужение $T(g)$ на подгруппу H унитарно, следует равенство

$$f(hg) = (T(hg)\mathbf{f},\ \mathbf{a}) = (T(h)\,T(g)\mathbf{f},\ \mathbf{a}) =$$
$$= (T(g)\mathbf{f},\ T(h^{-1})\mathbf{a}) = (T(g)\mathbf{f},\ \mathbf{a}) = f(g), \qquad h \in H.$$

Таким образом, *сферические функции представления* $T(g)$ *постоянны на правых классах смежности* Hg *по подгруппе* H. Но множество правых классов смежности по подгруппе H образует однородное пространство с группой движений G и стационарной подгруппой H:

$$Hg \to Hgg_0^{-1}.$$

Поэтому $f(g)$ можно рассматривать как функцию на $\mathfrak{M} = G/H$.

Среди сферических функций представления $T(g)$ класса 1 наиболее интересной является *зональная сферическая функция*, соответствующая инвариантному вектору $\mathbf{a}$:

$$a(g) = (T(g)\mathbf{a},\ \mathbf{a}). \tag{4}$$

Эта функция постоянна на двусторонних классах смежности HgH по подгруппе H.

В самом деле, по уже доказанному, $a(h_1gh_2) = a(gh_2)$, где $h_1, h_2 \in H$. Но $T(h_2)\mathbf{a} = \mathbf{a}$ и потому

$$a(gh_2) = (T(gh_2)\mathbf{a},\ \mathbf{a}) = (T(g)\,T(h_2)\mathbf{a},\ \mathbf{a}) = (T(g)\mathbf{a},\ \mathbf{a}) = a(g).$$

Таким образом,

$$a(h_1gh_2) = a(g). \tag{5}$$

Как было отмечено в п. 2 § 2, двусторонние классы смежности по H соответствуют сферам в однородном пространстве. Следовательно, *зональные сферические функции постоянны на сферах.*

Если в пространстве $\mathfrak{L}$ выбрать базис так, чтобы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, то зональная сферическая функция является не чем иным, как матричным элементом $t_{11}(g)$. Остальные матричные элементы $t_{1j}(g)$ первой строки называют обычно *присоединенными* сферическими функциями. Они, как мы говорили, постоянны на правых классах смежности по H.

Иногда называют присоединенными сферическими функциями и матричные элементы первого столбца:

$$t_{i1}(g) = (T(g)\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_i) \equiv (T(g)\mathbf{a},\ \mathbf{e}_i). \tag{6}$$

Эти функции постоянны на левых классах смежности по H:

$$t_{i1}(gh) = t_{i1}(g). \tag{7}$$

Можно показать, что если G — группа вращений трехмерного евклидова пространства, а H — подгруппа вращений плоскости, то сферическими функциями неприводимых унитарных представлений группы G являются классические сферические функции $Y_l^n(\varphi, \theta)$. При этом зональными сферическими функциями являются многочлены Лежандра $P_l(\cos\theta)$. Если же G — группа вращений n-мерного евклидова пространства, а H — подгруппа вращений $(n-1)$-мерного евклидова пространства, то сферические функции выражаются через многочлены Гегенбауэра[1]).

6. Индуцированные представления. Регулярное представление является частным случаем индуцированных представлений. Они строятся следующим образом. Возьмем некоторую подгруппу H группы G и ее представление $Q(h)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{L}$

---

[1]) См. главу IX.

множество вектор-функций $\mathfrak{f}(g)$, заданных на группе G, принимающих значения в $\mathfrak{H}$ и обладающих следующими свойствами:

1) Для любого элемента $\mathbf{a}$ из $\mathfrak{H}$ скалярная функция $\varphi(g)=(\mathfrak{f}(g), \mathbf{a})$ на группе G измерима относительно инвариантной слева меры dg на G, равно как и $(\mathfrak{f}(g), \mathfrak{f}(g))$, причем

$$\int (\mathfrak{f}(g), \mathfrak{f}(g))\, dg < +\infty. \tag{1}$$

2) Для любого элемента h из подгруппы H выполняется равенство

$$\mathfrak{f}(gh)=Q(h)\,\mathfrak{f}(g). \tag{2}$$

Покажем, что это пространство инвариантно относительно операторов левого сдвига

$$T(g_0)\,\mathfrak{f}(g)=\mathfrak{f}(g_0^{-1}g). \tag{3}$$

Выполнение условия 1) для $\mathfrak{f}(g_0^{-1}g)$ очевидно, условие же 2) выполняется, поскольку

$$T(g_0)\,\mathfrak{f}(gh)=\mathfrak{f}(g_0^{-1}gh)=Q(h)\,\mathfrak{f}(g_0^{-1}g)=Q(h)\,T(g_0)\,\mathfrak{f}(g).$$

Из инвариантности $\mathfrak{L}$ следует, что $T(g)$ является представлением группы G. Его называют *представлением, индуцированным представлением $Q(h)$ подгруппы H.*

Рассмотренное выше регулярное представление группы G индуцировано тривиальным представлением единичной подгруппы $\{e\}$. Далее, тривиальное представление любой подгруппы H: $Q(h)=E$ индуцирует представление

$$T(g)\,\mathfrak{f}(x)=\mathfrak{f}(g^{-1}x), \qquad x\in\mathfrak{M}$$

в пространстве функций на однородном пространстве $\mathfrak{M}=G/H$.

7. Представления групп с операторным множителем. Рассмотрим теперь более общую конструкцию представлений для групп преобразований, в которой сдвиги комбинируются с умножениями на операторную функцию $A(x, g)$, зависящую от точки $x\in\mathfrak{M}$ и элемента g из группы преобразований G множества $\mathfrak{M}$.

Предположим, что $\mathfrak{L}$ — линейное пространство функций, заданных на множестве $\mathfrak{M}$ и принимающих значения в линейном пространстве $\mathfrak{N}$. Пусть каждому элементу x из $\mathfrak{M}$ и каждому элементу g из G поставлен в соответствие невырожденный оператор $A(x, g)$ в пространстве $\mathfrak{N}$, причем для каждой функции $\mathfrak{f}(x)$ из $\mathfrak{L}$ функция

$$T(g)\,\mathfrak{f}(x)=A(x, g)\,\mathfrak{f}(g^{-1}x) \tag{1}$$

принадлежит $\mathfrak{L}$ (очевидно, что при фиксированном g функция $T(g)\,\mathfrak{f}(x)$ задана на $\mathfrak{M}$ и принимает значения в $\mathfrak{N}$).

Выясним, какой должна быть функция $A(x, g)$, чтобы $T(g)$ было представлением группы G, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$T(g_1)\,T(g_2)=T(g_1g_2). \tag{2}$$

Из формулы (1) видно, что

$$T(g_1g_2)\,\mathfrak{f}(x)=A(x, g_1g_2)\,\mathfrak{f}((g_1g_2)^{-1}x)=A(x, g_1g_2)\,\mathfrak{f}(g_2^{-1}g_1^{-1}x),$$

а

$$T(g_1)\,T(g_2)\,\mathfrak{f}(x)=T(g_1)\,A(x, g_2)\,\mathfrak{f}(g_2^{-1}x)=A(x, g_1)\,A(g_1^{-1}x, g_2)\,\mathfrak{f}(g_2^{-1}g_1^{-1}x).$$

Поэтому, для того чтобы равенство (1) задавало представление группы G, функция $A(x, g)$ должна удовлетворять функциональному уравнению

$$A(x, g_1g_2) = A(x, g_1) A(g_1^{-1}x, g_2). \tag{3}$$

Справедливо и обратное утверждение: если операторная функция $A(x, g)$ удовлетворяет условию (3), то равенство (1) определяет представление группы G.

Отметим некоторые свойства функции $A(x, g)$, вытекающие из равенства (3). Полагая $g_1 = e$, $g_2 = g$, получаем

$$A(x, g) = A(x, e) A(x, g).$$

Поэтому $A(x, e)$ — единичный оператор. Далее, полагая $g_1 = g$, $g_2 = g^{-1}$, получаем

$$E = A(x, g) A(g^{-1}x, g^{-1}),$$

т. е.

$$A^{-1}(x, g) = A(g^{-1}x, g^{-1}). \tag{4}$$

Так как множество $\mathfrak{M}$ однородно относительно группы преобразований G, то $A(x, g)$ можно выразить через функцию вида $B(g)$. Выберем некоторую точку a в $\mathfrak{M}$. В силу однородности $\mathfrak{M}$ для любой другой точки x найдется такое g_x, что $g_x^{-1}a = x$. Положив в равенстве (3) $g_1 = g_x$, $g_2 = g$, получим

$$A(x, g) \equiv A(g_x^{-1}a, g) = A^{-1}(a, g_x) A(a, g_xg).$$

Полагая $A(a, g) = B(g)$, имеем

$$A(x, g) = B^{-1}(g_x) B(g_xg), \tag{5}$$

где, напомним, $g_x^{-1}a = x$.

Из равенства (3) следует, что если h — элемент стационарной подгруппы H элемента a, то

$$A(a, hg) = A(a, h) A(h^{-1}a, g) = A(a, h) A(a, g).$$

Это означает, что

$$B(hg) = B(h) B(g). \tag{6}$$

В частности, если h_1 и h_2 принадлежат H, то

$$B(h_1h_2) = B(h_1) B(h_2). \tag{7}$$

Таким образом, $B(h)$ является представлением подгруппы H.

Мы доказали следующее утверждение.

Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное пространство с группой преобразований G. Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное пространство вектор-функций на $\mathfrak{M}$, инвариантное относительно операторов вида

$$T(g)\mathbf{f}(x) = A(x, g)\mathbf{f}(g^{-1}x). \tag{8}$$

Для того чтобы $T(g)$ было представлением группы G, необходимо и достаточно, чтобы $A(x, g)$ имело вид

$$A(x, g) = B^{-1}(g_x) B(g_xg), \tag{9}$$

где $g_x^{-1}a = x$ и $B(g)$ — операторная функция на G, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$B(hg) = B(h) B(g), \qquad h \in H, \quad g \in G \tag{10}$$

(H — стационарная подгруппа точки a).

Отметим, что представления (8), соответствующие различным выборам точки a, эквивалентны друг другу. Далее, пусть $C(x)$ — операторная функция на $\mathfrak{M}$, такая, что для всех x существует $C^{-1}(x)$ и $C(a)=E$. Положим

$$B_1(g_x)=B(g_x)\,C(g_x^{-1}a). \tag{11}$$

Ясно, что если $h\in H$, т. е. если $h^{-1}a=a$, то

$$B_1(hg)=B(hg)\,C(g^{-1}h^{-1}a)=B(h)\,B(g)\,C(g^{-1}a)=B(h)\,B_1(g). \tag{12}$$

В частности, $B_1(h)=B(h)\,B_1(e)=B(h)$. Поэтому равенство (12) можно переписать в виде

$$B_1(hg)=B_1(h)\,B_1(g). \tag{12'}$$

Отсюда вытекает, что $B_1(g)$ определяет представление группы G,

$$Q(g)\,\mathbf{f}(x)=A_1(x,\ g)\,\mathbf{f}(g^{-1}x),$$

где

$$A_1(x,\ g)=B_1^{-1}(g_x)\,B_1(g_xg).$$

Это представление эквивалентно представлению (8). Эквивалентность устанавливается путем замены в (8) $\mathbf{f}(x)$ на $C^{-1}(x)\,\mathbf{f}(x)$.

8. Некоторые примеры. В дальнейшем нам встретятся многочисленные примеры представлений групп преобразований — фактически этим представлениям и их матричным элементам посвящена вся книга. Приведем некоторые типичные примеры (опуская доказательства, которые будут проведены в соответствующих главах).

Начнем с одной из простейших групп преобразований — группы вращений окружности. Регулярное представление этой группы строится в пространстве функций

$$F(\varphi)\equiv f(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$$

на единичной окружности и задается формулой

$$T(g_\alpha)\,F(\varphi)=F(\varphi+\alpha) \tag{1}$$

(g_α — вращение окружности на угол α).

Возьмем теперь n-мерный аналог рассмотренной группы — группу $SO(n)$ вращений n-мерного евклидова пространства E_n. Преобразования этой группы переводят в себя единичную сферу S^{n-1}. Поэтому естественно строить представления группы $SO(n)$ в пространстве функций $f(\xi)$ на этой сфере. Операторы представления задаются при этом формулой

$$T(g)\,f(\xi)=f(g^{-1}\xi). \tag{2}$$

В главе IX будет показано, что это представление приводимо. Чтобы получить неприводимые представления, надо взять на S^{n-1} пространства функций $f(\xi)$ таких, что $r^kf(\mathbf{x}/r)$ $(r^2=x_1^2+\ldots+x_n^2)$ — однородный гармонический многочлен степени k. Представление $T(g)$ разлагается в прямую ортогональную сумму представлений в этих пространствах. Таким образом, теория представлений группы $SO(n)$ оказывается связанной с теорией гармонических многочленов от n переменных.

Рассмотрим теперь группу $SL(n, R)$ линейных преобразований n-мерного линейного пространства E_n, определитель которых равен 1. Обозначим через $\mathfrak{L}$ пространство всех функций $f(\mathbf{x})$ в E_n с интегрируемым квадратом модуля и положим

$$T(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x}). \tag{3}$$

Мы получим представление группы $SL(n, R)$. Это представление приводимо. Чтобы получить неприводимые представления, рассмотрим однородные функции. Функцию $f(\mathbf{x})$ в E_n называют *однородной со степенью однородности* $\chi=(\omega, \varepsilon)$, если для любого вещественного числа a выполняется равенство

$$f(a\mathbf{x})=|a|^{\omega}\operatorname{sign}^{\varepsilon} a\, f(\mathbf{x}).$$

Здесь ω — любое комплексное число, а ε принимает значения 0 и 1; $\operatorname{sign} a$ — знак числа a.

Легко видеть, что пространство однородных функций инвариантно относительно сдвигов; если функция $f(\mathbf{x})$ однородна, то и $f(g^{-1}\mathbf{x})$ является однородной функцией той же степени. Поэтому формула

$$T(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x}) \tag{4}$$

определяет представление группы $SL(n, R)$ в пространстве однородных функций заданной степени. Если ω — целое положительное число, то представление (4) приводимо. Инвариантным подпространством в нем является пространство однородных многочленов степени ω от n переменных.

§ 3. Инвариантные операторы и теория представлений

1. Операторы, перестановочные с представлениями. Пусть $T(g)$ и $Q(g)$ — два представления группы G в линейных пространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ соответственно. Линейный оператор A, отображающий $\mathfrak{L}_1$ в $\mathfrak{L}_2$, называют *перестановочным* с этими представлениями, если для любого элемента g из G имеем

$$AT(g)=Q(g)A. \tag{1}$$

В частности, если A — линейный оператор в пространстве $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$, такой, что

$$AT(g)=T(g)A, \tag{2}$$

то A называют *перестановочным с представлением* $T(g)$.

Пусть оператор A в пространстве $\mathfrak{L}$ перестановочен с представлением $T(g)$ группы G в $\mathfrak{L}$, и пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор этого оператора, соответствующий собственному значению λ. Тогда все векторы $T(g)\mathbf{x}$ являются собственными векторами для A, соответствующими тому же собственному значению λ.

В самом деле, по условию, имеем

$$AT(g)\,\mathbf{x} = T(g)\,A\mathbf{x}.$$

Но $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ и потому

$$AT(g)\,\mathbf{x} = \lambda T(g)\,\mathbf{x}.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Из него непосредственно вытекает, что *собственные функции оператора A, перестановочного с представлением $T(g)$, соответствующие данному собственному значению λ, образуют инвариантное подпространство в пространстве представления.*

Отсюда следует, что оператор A, перестановочный с неприводимым представлением $T(g)$, может иметь не более одного собственного значения, в противном случае подпространство собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению, было бы нетривиальным инвариантным подпространством.

Докажем более сильное утверждение:

Любой ограниченный оператор A в пространстве $\mathfrak{L}$ неприводимого представления $T(g)$, перестановочный со всеми операторами $T(g)$, кратен единичному оператору E, $A = \lambda E$.

Рассмотрим сначала случай, когда оператор A самосопряжен[1]). В этом случае он имеет спектральное разложение

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP(\lambda), \tag{3}$$

причем, как известно (см. [40]), все операторы $P(\lambda)$ перестановочны с операторами представления $T(g)$. Но операторы $P(\lambda)$ — проекционные и потому, в силу неприводимости $T(g)$, равенство

$$P(\lambda)\,T(g) = T(g)\,P(\lambda)$$

может иметь место либо если $P(\lambda) = 0$, либо если $P(\lambda) = E$. Так как $(P(\lambda)\,\mathbf{x},\ \mathbf{x})$ — неубывающая функция, то существует такое значение λ_0, что $P(\lambda) = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и $P(\lambda) = E$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$. Из равенства (2) следует, что в этом случае $A = \lambda_0 E$.

Таким образом, в случае неприводимости представления $T(g)$ любой ограниченный самосопряженный оператор A, перестановочный с операторами представления, кратен единичному оператору. Но тогда и любой ограниченный оператор B, перестановочный с операторами $T(g)$, кратен единичному. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать B в виде $B = B_1 + iB_2$, где B_1 и B_2 — самосопряженные операторы.

Введем следующее определение.

---

[1]) Напомним, что $\mathfrak{L}$ — либо конечномерное либо гильбертово пространство. Поэтому мы можем считать, что в нем есть скалярное произведение $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ (вообще говоря, неинвариантное относительно $T(g)$).

Представление $T(g)$ *операторно неприводимо*, если любой перестановочный с ним ограниченный оператор кратен единичному.

Итак, мы доказали, что *любое неприводимое представление в гильбертовом пространстве операторно неприводимо.*

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже для конечномерных представлений. Однако если представление $T(g)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ унитарно, то из его операторной неприводимости вытекает обычная неприводимость. В самом деле, пусть унитарное представление $T(g)$ операторно неприводимо и $\mathfrak{H}_1$ — его инвариантное подпространство. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{H}_1$. Поскольку ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{H}_1$ также инвариантно (см. § 1, п. 8), имеет место равенство

$$PT(g) = T(g)P.$$

Из этого равенства, в силу операторной неприводимости $T(g)$, следует, что либо $P=0$, либо $P=E$, а потому инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ тривиально.

Мы доказали, таким образом, что *для унитарных представлений понятия операторной и обычной неприводимости совпадают.*

2. Лемма Шура. Во многих вопросах теории представлений оказывается полезным следующее утверждение об операторах, перестановочных с неприводимыми конечномерными представлениями.

Лемма Шура. *Пусть $T(g)$ и $Q(g)$ — конечномерные неприводимые представления группы G в пространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ соответственно, и пусть оператор A, отображающий $\mathfrak{L}_1$ в $\mathfrak{L}_2$, перестановочен с этими представлениями. Тогда либо A является нулевым оператором, либо он имеет обратный оператор (и, следовательно, представления $T(g)$ и $Q(g)$ эквивалентны). Во втором случае оператор A однозначно определен (с точностью до умножения на скаляр).*

Для доказательства леммы рассмотрим два линейных подпространства, связанных с оператором A: подпространство $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{L}_1$, состоящее из таких векторов $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_1$, что $A\mathbf{x}=0$, и подпространство $\mathfrak{M}_2$ в $\mathfrak{L}_2$, состоящее из векторов $\mathbf{y} \in \mathfrak{L}_2$, имеющих вид $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_1$ (т. е. рассмотрим ядро $A^{-1}(0)$ отображения A и образ $A(\mathfrak{L}_1)$ пространства $\mathfrak{L}_1$ при этом отображении).

Из перестановочности оператора A с представлениями $T(g)$ и $Q(g)$ легко следует, что эти подпространства инвариантны. В самом деле, если $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_1$, то $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Но тогда

$$AT(g)\mathbf{x} = Q(g)A\mathbf{x} = Q(g)\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

и потому $T(g)\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_1$. Точно так же, если $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}_2$, то $\mathbf{y}$ имеет вид $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_1$, а тогда

$$Q(g)\mathbf{y} = Q(g)A\mathbf{x} = AT(g)\mathbf{x}.$$

Поскольку $T(g)\mathbf{x}\in\mathfrak{L}_1$, то $Q(g)\mathbf{y}\in\mathfrak{M}_2$. Тем самым доказано, что подпространство $\mathfrak{M}_1$ инвариантно относительно $T(g)$, а $\mathfrak{M}_2$ — относительно $Q(g)$.

Но представления $T(g)$ и $Q(g)$ неприводимы, а потому подпространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ либо являются нулевыми, либо совпадают соответственно с $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. При этом возможны следующие случаи:

а) Если $\mathfrak{M}_2=0$, то все пространство $\mathfrak{L}_1$ переходит при отображении A в нулевой элемент и потому $A=0$.

б) Если $\mathfrak{M}_1=0$ и $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{L}_2$, то образом пространства $\mathfrak{L}_1$ является все пространство $\mathfrak{L}_2$, причем лишь нулевой элемент переходит в нулевой элемент пространства $\mathfrak{L}_2$. В этом случае оператор A имеет обратный оператор A^{-1} и, следовательно, представления $T(g)$ и $Q(g)$ эквивалентны.

в) Наконец, случай $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{L}_2$ может иметь место, лишь если оба пространства $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ состоят только из нулевого элемента. В этом случае $A=0$.

Нам осталось показать, что в случае б) оператор A однозначно определен (с точностью до постоянного множителя). Предположим, что оператор B также перестановочен с $T(g)$ и $Q(g)$:

$$BT(g)=Q(g)B.$$

Тогда все операторы вида $A-\lambda B$, где λ — число, также перестановочны с $T(g)$ и $Q(g)$.

Выберем λ так, чтобы оператор $A-\lambda B$ был вырожденным, т. е., чтобы

$$\operatorname{Det}(A-\lambda B)=0.$$

Тогда оператор $A-\lambda B$, перестановочный с $T(g)$ и $Q(g)$, не имеет обратного. Поэтому в силу доказанного выше он является нулевым оператором, $A-\lambda B=0$. Но тогда $A=\lambda B$. Лемма доказана.

3. Следствия из леммы Шура. Пользуясь леммой Шура, можно доказать ряд важных утверждений о представлениях групп. В частности, операторная неприводимость конечномерных неприводимых представлений является непосредственным следствием леммы Шура. В самом деле, пусть представление $T(g)$ неприводимо и $AT(g)=T(g)A$. Так как по лемме Шура оператор, коммутирующий с неприводимым представлением, определен однозначно с точностью до скалярного множителя, то $A=\lambda E$.

Другим важным следствием леммы Шура является то, что *неприводимые конечномерные представления $T(g)$ коммутативных групп одномерны*. В самом деле, если группа G коммутативна, то для любых двух ее элементов g и h имеем $gh=hg$, а потому

$$T(g)T(h)=T(h)T(g).$$

При фиксированном h оператор $T(h)$ перестановочен со всеми операторами $T(g)$ и в силу неприводимости $T(g)$ имеем $T(h)=\lambda(h)E$.

Но представление такого вида может быть неприводимым лишь в случае, когда оно одномерно.

Из леммы Шура вытекает также следующая теорема, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема. *Пусть представление $T(g)$ группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых представлений $T_i(g)$ в подпространствах $\mathfrak{H}_i$, и пусть $\mathfrak{F}$ — такое инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$, что сужение $T(g)$ на $\mathfrak{F}$ вполне приводимо. Тогда $\mathfrak{F}$ является ортогональной прямой суммой некоторых из подпространств $\mathfrak{H}_i$:*

$$\mathfrak{F} = \sum_n \mathfrak{H}_{i_n}.$$

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть представление $T(g)$ группы G является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых представлений $T_i(g)$ этой группы. Тогда любое минимальное инвариантное подпространство $\mathfrak{F}$ пространства $\mathfrak{H}$ представления $T(g)$ совпадает с одним из пространств $\mathfrak{H}_i$.*

В самом деле, обозначим через P_i оператор ортогонального проектирования подпространства $\mathfrak{F}$ на подпространство $\mathfrak{H}_i$ представления $T_i(g)$. Из попарной ортогональности подпространств $\mathfrak{H}_i$ вытекает, что

$$P_i Q(g) = T_i(g) P_i,$$

где $Q(g)$ — сужение представления $T(g)$ на $\mathfrak{F}$. Так как представления $T_i(g)$ и $Q(g)$ неприводимы, то по лемме Шура получаем: если $T_i(g)$ и $Q(g)$ неэквивалентны, то $P_i = 0$. Поскольку представления $T_i(g)$ попарно неэквивалентны, то лишь один из операторов P_i может быть отличен от нуля, например, $P_j \neq 0$, а $P_i = 0$ при $i \neq j$. Но тогда $\mathfrak{F}$ должно лежать в $\mathfrak{H}_j$ и быть инвариантным подпространством в $\mathfrak{H}_j$. В силу неприводимости $T_j(g)$ подпространство $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{H}_j$.

Для доказательства теоремы достаточно разложить подпространство $\mathfrak{F}$ на минимальные инвариантные подпространства и применить к каждому из них лемму.

Наконец, пользуясь леммой Шура, легко доказать следующее утверждение:

Пусть $T(g)$ — неприводимое унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ — ограниченная эрмитова форма в $\mathfrak{H}$, инвариантная относительно $T(g)$:

$$\{T(g)\mathbf{x},\ T(g)\mathbf{y}\} = \{\mathbf{x},\ \mathbf{y}\}. \tag{1}$$

Тогда $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ отличается от скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в $\mathfrak{H}$ лишь скалярным множителем:

$$\{\mathbf{x},\ \mathbf{y}\} = \lambda(\mathbf{x},\ \mathbf{y}).$$

В самом деле, форму $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ можно представить в виде

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где A — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$. Из равенства (1) и унитарности $T(g)$ вытекает, что

$$(AT(g)\mathbf{x}, T(g)\mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (T(g)A\mathbf{x}, T(g)\mathbf{y}),$$

и потому

$$AT(g) = T(g)A.$$

Таким образом, оператор A перестановочен с $T(g)$ и поэтому в силу неприводимости $T(g)$ кратен единичному оператору: $A = \lambda E$. Следовательно,

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

4. Инвариантные операторы. Решение многих задач математической физики облегчается благодаря тому, что они обладают инвариантностью относительно тех или иных преобразований. Например, уравнения, описывающие движение тела в кулоновском поле, инвариантны при вращениях вокруг заряженной точки, оператор Лапласа $\triangle$ инвариантен относительно движений евклидова пространства, волновой оператор $\Box$ — относительно преобразований группы Лоренца и т. д. Инвариантны и многие интегральные операторы математической физики. Например, интегральный оператор с ядром

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}$$

инвариантен относительно группы движений евклидова пространства: при одновременном сдвиге точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ядро оператора не меняется.

Введем общее определение *оператора, инвариантного относительно преобразований некоторой группы.* Пусть G — группа преобразований множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ — инвариантное линейное пространство вектор-функций на $\mathfrak{M}$ со значениями в линейном пространстве $\mathfrak{N}$. Оператор A в $\mathfrak{L}$ называют *инвариантным* относительно группы G, если он перестановочен с операторами сдвига

$$T(g)\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(g^{-1}x),$$

т. е., если для любого элемента g из G имеем

$$AT(g) = T(g)A. \tag{1}$$

Например, если $K(x, y)$ — ядро, зависящее от точек x и y множества $\mathfrak{M}$, и инвариантное относительно группы G:

$$K(gx, gy) = K(x, y),$$

μ — инвариантная мера на множестве $\mathfrak{M}$, и $f(x)$ — скалярная функция, то интегральный оператор

$$Af(x) = \int K(x, y) f(y)\, d\mu(y) \tag{2}$$

инвариантен. В самом деле, $AT(g)f(x)=\int K(x, y)f(g^{-1}y)\,d\mu(y)$. Делая подстановку $g^{-1}y=z$, получаем в силу инвариантности $K(x,y)$ и μ, что

$$AT(g)f(x)=\int K(g^{-1}x, z)f(z)\,d\mu(z)=(Af)(g^{-1}x)=T(g)Af(x).$$

Из результатов п. 1 вытекает следующее утверждение:

Пространство собственных функций инвариантного оператора A, соответствующих собственному значению λ, инвариантно относительно операторов сдвига. Каждому собственному значению λ инвариантного оператора A соответствует представление $T_\lambda(g)$ группы G. Оно строится в пространстве $\mathfrak{L}_\lambda$ собственных функций оператора A, соответствующих собственному значению λ, и задается формулой

$$T_\lambda(g)f(x)=f(g^{-1}x). \tag{3}$$

В случае, когда множество $\mathfrak{M}$, на котором действует группа G, однородно, связь между собственными функциями инвариантных операторов и представлениями группы G становится особенно тесной. В этом случае элементы пространства $\mathfrak{L}_\lambda$ являются линейными комбинациями матричных элементов представления $T_\lambda(g)$. В самом деле, выберем в пространстве $\mathfrak{L}_\lambda$ базис $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x), \ldots$ и зафиксируем точку $a\in\mathfrak{M}$. Тогда имеем

$$T_\lambda(g)\varphi_m(a)\equiv\varphi_m(g^{-1}a)=\sum_k t_{km}(g)\varphi_k(a).$$

Но в силу однородности множества $\mathfrak{M}$ любая его точка может быть записана в виде $x=g_x^{-1}a$ и потому

$$\varphi_m(x)=\varphi_m(g_x^{-1}a)=\sum_k \varphi_k(a)\,t_{km}(g_x). \tag{4}$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Если представление $T_\lambda(g)$ приводимо, то точно так же доказывается, что собственные функции, принадлежащие инвариантному подпространству $\mathfrak{L}'$, являются линейными комбинациями матричных элементов сужения представления $T_\lambda(g)$ на $\mathfrak{L}'$. В частности, *если представление $T_\lambda(g)$ вполне приводимо, то любой элемент из $\mathfrak{L}_\lambda$ является линейной комбинацией матричных элементов неприводимых представлений группы G.*

§ 4. Представления компактных групп

1. Матричные группы. Компактные и локально компактные группы. Мы будем рассматривать в этой книге лишь матричные группы, т. е. группы, элементами которых являются невырожденные матрицы одного и того же порядка, а групповой операцией служит умножение матриц.

Для матриц определено понятие сходимости: последовательность матриц $g_1, \ldots, g_n, \ldots, g_n = (g_{ij}^{(n)})$ *сходится* к матрице $g = (g_{ij})$, если для любых i и j имеем $\lim\limits_{n \to \infty} g_{ij}^{(n)} = g_{ij}$. Поэтому в матричных группах можно говорить о сходимости последовательности элементов. Очевидно, что если

$$\lim_{n \to \infty} g_n = g \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} h_n = h,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} g_n h_n = gh \quad \text{и} \quad \lim g_n^{-1} = g^{-1}.$$

Таким образом, групповая операция в матричных группах непрерывна относительно выбранной топологии.

Поскольку в матричных группах определен предельный переход, естественным образом определяются понятия предела функции $f(g)$, заданной на такой группе, непрерывности функции и т. д.

Назовем матричную группу G *компактной*, если из любой последовательности $\{g_n\}$ ее элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы матричная группа G была компактной, необходимо и достаточно, чтобы

1) матричные элементы всех матриц, входящих в группу G, были ограничены в совокупности,

2) множество матриц $\{g\}$, входящих в группу G, было замкнутым в множестве всех матриц данного порядка.

Примером компактной группы является группа $SO(n)$ ортогональных матриц n-го порядка с вещественными элементами. Из ортогональности матрицы $g = (g_{ij})$ вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}^2 = 1$$

и потому все элементы ортогональной матрицы не больше по модулю, чем 1. Далее, матрица g принадлежит $SO(n)$ тогда и только тогда, когда $gg' = e$ [1]). Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} g_k = g$ и $g_k \in SO(n)$. Переходя к пределу в равенстве $g_k g_k' = e$, получим $gg' = e$, а потому $g \in SO(n)$.

Следовательно, $SO(n)$ образует замкнутое подмножество в множестве всех матриц. Компактна и группа $SU(n)$ унитарных унимодулярных матриц n-го порядка.

Матричная группа G называется *локально компактной*, если множество ее элементов $g = (g_{ij})$, удовлетворяющих условию $|g_{ij} - \delta_{ij}| \leqslant 1$, где δ_{ij} — символ Кронекера, компактно. Примером локально компактной группы является группа всех невырожденных матриц n-го порядка.

---

[1]) g' — транспонированная матрица g.

Эта группа не компактна, поскольку, например, из последовательности матриц $\{me\}$ (e — единичная матрица) нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности.

Одним из важных свойств локально компактных групп является наличие в них инвариантной (слева) меры. Точнее говоря, *в любой локально компактной группе G есть инвариантная слева мера, принимающая конечные ненулевые значения на открытых подмножествах в G, имеющих компактное замыкание.* С помощью этой меры определяем инвариантный слева интеграл на локально компактной группе G:

$$\int f(g)\,dg = \int f(g_0 g)\,dg.$$

Можно показать, что на *компактных группах* мера, инвариантная слева, инвариантна и справа:

$$\int f(g)\,dg = \int f(gg_0)\,dg.$$

При этом мера всей компактной группы G конечна. Мы не будем приводить доказательства этих утверждений, поскольку в конкретных случаях инвариантная мера строится в явном виде.

Если подгруппа H локально компактной группы G компактна, то, исходя из инвариантной слева меры dg в G, определим меру dx на однородном пространстве $\mathfrak{M} = G/H$, положив

$$\int_{\mathfrak{M}} f(x)\,dx = \int_{G} f[\varphi(g)]\,dg.$$

Здесь $\varphi(g)$ — отображение $g \to gH$ группы G на $\mathfrak{M}$. Можно показать, что мера dx инвариантна и принимает конечные ненулевые значения на открытых множествах в $\mathfrak{M}$, имеющих компактное замыкание.

2. Полная приводимость представлений компактных групп. Перейдем к рассмотрению представлений компактных групп ограниченными операторами в гильбертовом пространстве (в частности, линейными преобразованиями в конечномерном пространстве, поскольку в таком пространстве всегда можно ввести скалярное произведение). Покажем, что эти представления сводятся к унитарным. Точнее говоря, имеет место

Теорема 1. *Пусть $T(g)$ — представление компактной группы G ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда в этом пространстве можно ввести скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1$, инвариантное относительно всех операторов $T(g)$, т. е. такое, что*

$$(T(g_0)\,\mathbf{x},\ T(g_0)\,\mathbf{y})_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 \tag{1}$$

для всех векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{H}$ и всех элементов g_0 в G.

Для доказательства этой теоремы положим

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y})_1 = \int (T(g)\,\mathbf{x},\ T(g)\,\mathbf{y})\,dg, \tag{2}$$

где dg — инвариантная мера на группе G и $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Интеграл (2) сходится в силу ограниченности операторов $T(g)$ и конечности меры dg. Из инвариантности этой меры вытекает, что имеет место равенство (1).

Доказанная теорема может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 1'. *Любое представление $T(g)$ компактной группы G ограниченными операторами в гильбертовом пространстве унитарно относительно некоторого скалярного произведения в пространстве представления.*

В силу результатов п. 8 § 1 из доказанной теоремы вытекает полная приводимость всех конечномерных представлений компактных групп. Соответствующая теорема верна и для бесконечномерных унитарных представлений компактных групп: *пространство такого представления разлагается в прямую сумму конечномерных инвариантных подпространств, в которых индуцируются неприводимые представления группы G* (см. [264]).

Применим полученные результаты к представлениям компактных коммутативных групп. Так как все неприводимые представления коммутативных групп одномерны, а представления компактных групп вполне приводимы, получаем следующее утверждение:

Любое представление компактной коммутативной группы G ограниченными операторами в гильбертовом пространстве является прямой суммой одномерных представлений.

Заметим, что теорема 1' неверна, вообще говоря, для некомпактных групп. Например, если G — аддитивная группа вещественных чисел, то одномерное представление $x \to e^x$ не является унитарным относительно какого-либо скалярного произведения. Доказательство, проведенное нами для компактных групп, теряет силу для некомпактных групп, так как инвариантная мера всей некомпактной группы бесконечна, и интеграл

$$\int (T(g)\,\mathbf{x},\ T(g)\,\mathbf{y})\,dg$$

расходится.

3. Ряды Фурье на компактных группах. Мы будем изучать в этой книге ортогональные системы функций, возникающие из неприводимых представлений компактных групп. Эти системы функций связаны с матричными элементами таких представлений.

Разобьем множество всех неприводимых унитарных представлений компактной группы G на классы эквивалентных представлений и выберем из каждого класса по одному представлению. Получающаяся система представлений $\{T_\alpha(g)\}$ называется *полной системой попарно* *неэквивалентных неприводимых унитарных представлений группы G.* Множество индексов обозначим A.

Имеет место следующая основная

Теорема 1. *Пусть* $\{T_\alpha(g)\}$, $\alpha \in A$, — *полная система попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G, и пусть размерность представления* $T_\alpha(g)$ *равна* d_α, *а его матричные элементы* — $t_{ij}^\alpha(g)$, $1 \leqslant i, j \leqslant d_\alpha$. *Тогда функции*

$$\sqrt{d_\alpha}\, t_{ij}^\alpha(g), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant d_\alpha, \ \alpha \in A \tag{1}$$

образуют полную ортонормированную систему на группе G относительно нормированной инвариантной меры dg на этой группе.

Таким образом,

$$\int t_{ij}^\alpha(g)\, \overline{t_{mn}^\beta(g)}\, dg = 0, \tag{2}$$

если (α, i, j) не равно (β, m, n) и

$$\int |t_{ij}^\alpha(g)|^2\, dg = \frac{1}{d_\alpha}. \tag{3}$$

Из полноты системы $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$ следует, что *любая функция* $f(g)$ *на группе G, такая, что*

$$\int |f(g)|^2\, dg < +\infty,$$

разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по функциям $t_{ij}^\alpha(g)$:

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g). \tag{4}$$

Коэффициенты Фурье этого ряда вычисляют по формуле

$$a_{ij}^\alpha = d_\alpha \int f(g)\, \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, dg. \tag{5}$$

При этом выполняется равенство Парсеваля

$$\int |f(g)|^2\, dg = \sum_{\alpha \in A} \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} |a_{ij}^\alpha|^2. \tag{6}$$

В случае, когда G — группа вращений окружности, ее неприводимые унитарные представления имеют вид $e^{in\varphi}$ (см. главу II, п. 2 § 1). Сформулированная теорема означает для этого частного случая ортонормированность и полноту системы функций $\{e^{in\varphi}\}$ на окружности относительно меры $\frac{1}{2\pi}\, d\varphi$.

Перейдем к доказательству теоремы. Чтобы доказать ортогональность матричных элементов, соответствующих неэквивалентным представлениям $T_\alpha(g)$ и $T_\beta(g)$, рассмотрим матрицу

$$A_{ij}=\int T_\alpha(g)\,B_{ij}T_\beta(g^{-1})\,dg, \tag{7}$$

где все элементы матрицы B_{ij} равны нулю, кроме элемента b_{ij}, равного 1. Из инвариантности меры dg легко следует, что матрица A_{ij} коммутирует с представлениями $T_\alpha(g)$ и $T_\beta(g)$:

$$T_\alpha(g_0)\,A_{ij}=A_{ij}T_\beta(g_0),\quad g_0\in G. \tag{8}$$

По лемме Шура отсюда вытекает, что матрица A_{ij} равна нулю. Но элементами этой матрицы являются интегралы вида $\int t^\alpha_{ki}(g)\,t^\beta_{jp}(g^{-1})\,dg$. В силу унитарности представления $T_\beta(g)$ имеем $t^\beta_{jp}(g^{-1})=\overline{t^\beta_{pj}(g)}$, и потому матрица A_{ij} состоит из интегралов вида

$$\int t^\alpha_{ki}(g)\,\overline{t^\beta_{pj}(g)}\,dg.$$

Поэтому из равенства нулю матрицы A_{ij} вытекает, что

$$\int t^\alpha_{ki}(g)\,\overline{t^\beta_{pj}(g)}\,dg=0,\quad \alpha\neq\beta. \tag{9}$$

Аналогично доказывается, что при $(k,\ i)\neq(p,\ j)$

$$\int t^\alpha_{ki}(g)\,\overline{t^\alpha_{pj}(g)}\,dg=0. \tag{9'}$$

Для вычисления интеграла (3) рассмотрим матрицу

$$A_{ii}=\int T_\alpha(g)\,B_{ii}\,T_\alpha(g^{-1})\,dg, \tag{10}$$

где B_{ii} имеет указанный выше смысл. Легко проверить, что эта матрица коммутирует с матрицами представления $T_\alpha(g)$ и потому, по лемме Шура, является скалярной матрицей. Отсюда вытекает, что

$$\int |\,t^\alpha_{ki}(g)\,|^2\,dg=\lambda,$$

где λ не зависит от k. Чтобы найти λ, заметим, что след матрицы A_{ii} равен $d_\alpha\lambda$. С другой стороны, он равен следу матрицы B_{ii}, т. е. 1. Поэтому $\lambda=1/d_\alpha$.

Мы доказали, таким образом, ортогональность системы функций $\{t^\alpha_{ij}(g)\}$ и условие нормировки (3). Перейдем к самой трудной части теоремы — доказательству полноты этой системы (полнота системы матричных элементов неприводимых унитарных представлений компактной группы доказана Ф. Петером и Г. Вейлем [284]).

Итак, нам надо доказать, что *любая функция $f(g)$ на компактной группе G, имеющая интегрируемый квадрат и ортогональная всем функциям системы $\{t^\alpha_{ig}(g)\}$, равна нулю.*

Сначала рассмотрим случай, когда функция $f(g)$ непрерывна и обладает эрмитовой симметрией $f(g^{-1})=\overline{f(g)}$. Поставим в соответствие этой функции ядро

$$K(g,\ h)=f(gh^{-1}),\quad h,g\in G. \tag{11}$$

Оно обладает эрмитовой симметрией

$$K(g, h) = f(gh^{-1}) = \overline{f(hg^{-1})} = \overline{K(h, g)}.$$

При этом в силу непрерывности функции $f(g)$ и конечности инвариантной меры компактной группы G интегральный оператор с ядром $K(g, h)$ вполне непрерывен.

Поэтому, если функция $f(g)$ не равна тождественно нулю, существует отличное от нуля собственное значение λ интегрального оператора

$$A\varphi(g) = \int f(gh^{-1})\,\varphi(h)\,dh \tag{12}$$

с конечномерным собственным подпространством $\mathfrak{L}_\lambda$ [1]). Покажем, что существование такого подпространства несовместимо с предположением об ортогональности функции $f(g)$ всем функциям $\{t^{\alpha}_{ij}(g)\}$.

Для этого докажем сначала, что *из равенств*

$$\int f(g)\,\overline{t^{\alpha}_{ij}(g)}\,dg = 0, \qquad \alpha \in A, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant d_\alpha \tag{13}$$

вытекает ортогональность всех функций $\varphi(g)$ *из* $\mathfrak{L}_\lambda$ *функциям системы* $\{t^{\alpha}_{ij}(g)\}$.

В самом деле, так как $\lambda \neq 0$ и

$$t^{\alpha}_{ij}(gh) = \sum_k t^{\alpha}_{ik}(g)\,t^{\alpha}_{kj}(h), \tag{14}$$

то при $A\varphi(g) = \lambda\varphi(g)$ имеем:

$$\int \varphi(g)\,\overline{t^{\alpha}_{ij}(g)}\,dg = \frac{1}{\lambda}\int A\varphi(g)\,\overline{t^{\alpha}_{ij}(g)}\,dg =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int\int f(gh^{-1})\,\varphi(h)\,\overline{t^{\alpha}_{ij}(g)}\,dg\,dh =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int\int f(g)\,\varphi(h)\,\overline{t^{\alpha}_{ij}(gh)}\,dg\,dh =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\sum_k \int f(g)\,\overline{t^{\alpha}_{ik}(g)}\,dg \int \varphi(h)\,\overline{t^{\alpha}_{kj}(h)}\,dh.$$

Из равенства (13) вытекает, что все члены последней суммы равны нулю. Тем самым доказано равенство

$$\int \varphi(g)\,\overline{t^{\alpha}_{ij}(g)}\,dg = 0. \tag{15}$$

Заметим теперь, что ядро $K(g, h) = f(gh^{-1})$ оператора A инвариантно относительно правых сдвигов:

$$K(gg_0, hg_0) = f(gg_0(hg_0)^{-1}) = f(gh^{-1}) = K(g, h).$$

---

[1]) См. [34] или [1], где соответствующая теорема доказана для любого вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Следовательно, инвариантен и сам оператор A. Но тогда в силу результатов п. 4 § 3 подпространство $\mathfrak{L}_\lambda$ инвариантно относительно сдвигов и формула

$$T_\lambda(g_0) f(g) = f(gg_0).$$

задает представление группы G в $\mathfrak{L}_\lambda$.

Представление $T_\lambda(g)$ вполне приводимо, как конечномерное представление компактной группы G. Следовательно, как было показано в п. 4 § 3, любая функция $\varphi(g)$ из $\mathfrak{L}_\lambda$ является линейной комбинацией матричных элементов неприводимых представлений группы G.

Выберем в $\mathfrak{L}_\lambda$ отличную от нуля функцию $\varphi(g)$. Мы показали, что она является линейной комбинацией матричных элементов неприводимых представлений группы G. Но каждое неприводимое представление группы G эквивалентно одному из представлений $T_\alpha(g)$ и, следовательно, его матричные элементы являются линейными комбинациями функций $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$, $1 \leqslant i, j \leqslant d_\alpha$. Следовательно, и $\varphi(g)$ является линейной комбинацией функций $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$. С другой стороны, мы показали, что $\varphi(g)$ ортогональна всем функциям системы $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$. В силу ортогональности этой системы отсюда вытекает, что $\varphi(g) = 0$, вопреки условию.

Полученное противоречие показывает, что не существует отличной от нуля непрерывной эрмитово-симметричной функции, ортогональной всем матричным элементам неприводимых унитарных представлений этой группы.

Общий случай легко сводится к рассмотренному выше. Именно, если $F(g)$ — отличная от нуля функция с интегрируемым квадратом, ортогональная всем функциям $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$, то построим сначала функцию

$$\psi(g) = \int F(gh) \overline{F(h)}\, dh.$$

Она также ортогональна всем функциям $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$. В самом деле,

$$\int \psi(g) \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, dg = \int\int F(gh) \overline{F(h)}\, \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, dg\, dh =$$

$$= \int\int F(g) \overline{F(h)}\, \overline{t_{ij}^\alpha(gh^{-1})}\, dg\, dh =$$

$$= \sum_k \int F(g) \overline{t_{ik}^\alpha(g)}\, dg \int \overline{F(h)\, t_{kj}^\alpha(h^{-1})}\, dh = 0,$$

так как

$$\int F(g) \overline{t_{ik}^\alpha(g)}\, dg = 0.$$

Простая проверка показывает, что функция $\psi(g)$ непрерывна. При этом

$$\psi(e) = \int |F(h)|^2\, dh > 0.$$

Далее, построим эрмитово-симметричную функцию

$$f(g) = \psi(g) + \overline{\psi(g^{-1})}.$$

Так как $f(e)=2\psi(e)>0$, то эта функция отлична от нуля, и как легко видеть, ортогональна всем функциям $\{t_{ij}^{\alpha}(g)\}$. Но мы доказали выше, что такой функции не существует. Следовательно, всякая функция с интегрируемым квадратом, ортогональная всем функциям системы $\{t_{ij}^{\alpha}(g)\}$, равна нулю. Полнота системы $\{t_{ij}^{\alpha}(g)\}$ доказана.

4. Гармонический анализ функций на компактных группах. Результаты предыдущего пункта позволяют решить задачу о разложении на неприводимые компоненты регулярного представления компактной группы G. Напомним, что правое регулярное представление строится в пространстве $\mathfrak{L}^2(G)$ функций $f(g)$ на группе G, имеющих интегрируемый квадрат по инвариантной мере, и задается формулой

$$R(g_0)f(g)=f(gg_0). \tag{1}$$

Если G — группа вращений окружности, то ее регулярное представление имеет вид

$$T(g_\alpha)f(\varphi)=f(\varphi+\alpha)$$

(см. п. 8 § 2), а разложение регулярного представления на неприводимые сводится к разложению в ряд Фурье

$$f(\varphi)=\sum c_n e^{in\varphi}$$

по матричным элементам $e^{in\varphi}$ неприводимых унитарных представлений этой группы (в этом частном случае такие представления одномерны).

Разложение регулярного представления любой компактной группы также связано с разложением функций $f(g)$ в ряд Фурье. По аналогии с разложением функций на окружности, его называют *гармоническим анализом функций на группе G*.

Обозначим через $\mathfrak{H}_i^{\alpha}$ подпространство функций $f(g)$, являющихся линейными комбинациями функций

$$t_{ij}^{\alpha}(g), \qquad 1\leqslant j\leqslant d_\alpha. \tag{2}$$

Так как для любого j имеем

$$R(g_0)t_{ij}^{\alpha}(g)=t_{ij}^{\alpha}(gg_0)=\sum_k t_{kj}^{\alpha}(g_0)t_{ik}^{\alpha}(g)\in\mathfrak{H}_i^{\alpha}, \tag{3}$$

то это пространство инвариантно относительно $R(g)$.

Выберем в качестве базиса в пространстве $\mathfrak{H}_i^{\alpha}$ функции $t_{ij}^{\alpha}(g)$. Из формулы (3) непосредственно вытекает, что сужение представления $R(g)$ на $\mathfrak{H}_i^{\alpha}$ задается в этом базисе матрицей $(t_{ij}^{\alpha}(g))$. Следовательно, оно эквивалентно представлению $T_\alpha(g)$ и потому неприводимо.

Мы построили, таким образом, подпространства $\mathfrak{H}_i^{\alpha}$ в $\mathfrak{L}^2(G)$, инвариантные относительно операторов правого сдвига, такие, что сужение

$R_i^\alpha(g)$ представления $R(g)$ на $\mathfrak{H}_i^\alpha$ эквивалентно неприводимому унитарному представлению $T_\alpha(g)$.

Осталось показать, что пространство $\mathfrak{L}^2(G)$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{H}_i^\alpha$:

$$\mathfrak{L}^2(G)=\sum_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} \mathfrak{H}_i^\alpha,$$

т. е., что любая функция $f(g)$ из пространства $\mathfrak{L}^2(G)$ имеет однозначно определенное разложение на функции $f_i^\alpha(g)$ из подпространств $\mathfrak{H}_i^\alpha$. Для этого заметим, что по формуле (4) п. 3

$$f(g)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{i,\,j=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g). \tag{4}$$

Сгруппируем члены этого ряда, принадлежащие подпространству $\mathfrak{H}_i^\alpha$. Мы получим

$$f(g)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{i=1}^{d_\alpha} f_i^\alpha(g), \tag{5}$$

где

$$f_i^\alpha(g)\equiv\sum_{j=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g)\in\mathfrak{H}_i^\alpha. \tag{6}$$

Тем самым построено разложение функции $f(g)$ на функции $f_i^\alpha(g)$ из $\mathfrak{H}_i^\alpha$. Это разложение однозначно в силу взаимной ортогональности подпространств $\mathfrak{H}_i^\alpha$. Заметим в заключение, что представления $R_i^\alpha(g)$, $1\leqslant i\leqslant d_\alpha$ эквивалентны $T_\alpha(g)$ и, следовательно, друг другу. Таким образом, представление $T_\alpha(g)$ входит в разложение представления $R(g)$ с кратностью d_α, равной степени этого представления:

$$R(g)=\sum_\alpha d_\alpha T_\alpha(g), \tag{7}$$

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Регулярное представление компактной группы G разлагается в прямую сумму неприводимых унитарных представлений этой группы. Каждое неприводимое унитарное представление группы G входит в разложение регулярного представления с кратностью, равной степени этого представления. Инвариантные подпространства, в которых реализуются неприводимые слагаемые правого регулярного представления, состоят из функций вида*

$$f(g)=\sum_{j=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g). \tag{8}$$

Аналогичные утверждения имеют место для левого регулярного представления, причем в этом случае минимальные инвариантные подпространства состоят из функций вида

$$f(g)=\sum_{i=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g). \tag{9}$$

Заметим еще, что *всякое неприводимое представление $T(g)$ компактной группы G входит в разложение регулярного представления этой группы.*

Для доказательства этого утверждения построим согласно п. 4 § 2 отображение

$$\mathbf{f}\to f(g)\equiv(T(g)\,\mathbf{f},\ \mathbf{a}) \tag{10}$$

пространства $\mathfrak{L}$ представления $T(g)$ в пространство функций на группе G ($\mathbf{a}\neq 0$ — любой вектор из $\mathfrak{L}$). В силу непрерывности представления $T(g)$ функции $f(g)$ непрерывны на группе G. Поэтому в силу конечности инвариантной меры функции $f(g)$ имеют интегрируемый квадрат, $f(g)\in\mathfrak{L}^2(G)$.

Мы построили отображение (10) пространства $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^2(G)$. Как было показано в п. 4 § 2, при этом отображении в нуль переходит лишь нулевой элемент из $\mathfrak{L}$, а операторам представления $T(g)$ соответствуют правые сдвиги.

Таким образом, представление $T(g)$ эквивалентно сужению регулярного представления на инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_1$ — образ пространства $\mathfrak{L}$ при отображении (10). В силу полной приводимости регулярного представления компактной группы G представление $T(g)$ входит в разложение регулярного представления на неприводимые.

5. Разложение функций на однородных пространствах. В приложениях приходится разлагать не только функции, заданные на компактной группе, но и функции на однородных пространствах с компактной группой движений (например, не функции на группе вращений сферы, а функции на сфере). Мы видели в п. 2 § 2, что однородное пространство $\mathfrak{M}$ с группой движений G можно реализовать как пространство левых классов смежности по стационарной подгруппе H некоторой точки $a\in\mathfrak{M}$. При этом движения задаются формулой $g_0H\to gg_0H$. Ясно, что разложение функций на однородном пространстве $\mathfrak{M}$ сводится к разложению функций на группе, постоянных на левых классах смежности по подгруппе H, т. е. таких, что $f(g)=f(gh)$.

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая, когда подгруппа H массивна (см. п. 5 § 2). Выберем из системы попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $\{T_\alpha(g)\}$

группы G представления класса 1 относительно подгруппы H и обозначим множество этих представлений через A_0. В пространствах $\mathfrak{L}_\alpha$ представлений $T_\alpha(g)$, $\alpha \in A_0$ выберем ортонормированные базисы $\{\mathbf{e}_i^\alpha\}$ так, чтобы векторы $\mathbf{e}_1^\alpha$ были инвариантны относительно операторов $T_\alpha(h)$, $h \in H$. Ясно, что при таком выборе базиса имеем $t_{11}^\alpha(h) = 1$.

Рассмотрим матричные элементы $t_{i1}^\alpha(g)$ представлений $T_\alpha(g)$, $\alpha \in A_0$. Они постоянны на левых классах смежности по подгруппе H. В самом деле,

$$t_{i1}^\alpha(gh) = (T_\alpha(gh)\,\mathbf{e}_1^\alpha,\ \mathbf{e}_i^\alpha) = (T_\alpha(g)\,T_\alpha(h)\,\mathbf{e}_1^\alpha,\ \mathbf{e}_i^\alpha) = (T_\alpha(g)\,\mathbf{e}_1^\alpha,\ \mathbf{e}_i^\alpha) = t_{i1}^\alpha(g). \quad (1)$$

Естественно ожидать, что именно по этим матричным элементам разлагаются функции на группе G, постоянные на левых классах смежности по H. Мы докажем сейчас справедливость этого предположения.

Итак, пусть $f(g)$ — функция на компактной группе G, постоянная на левых классах смежности по массивной подгруппе H и имеющая интегрируемый квадрат.

В силу результатов п. 3 имеем

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g), \quad (2)$$

где

$$c_{ij}^\alpha = d_\alpha \int f(g)\,\overline{t_{ij}^\alpha(g)}\,dg. \quad (3)$$

Надо показать, что разложение (2) содержит лишь слагаемые, для которых $\alpha \in A_0$ и $j = 1$.

Так как, по условию, для любого $h \in H$ имеем $f(g) = f(gh^{-1})$, то

$$c_{ij}^\alpha = d_\alpha \int f(gh^{-1})\,\overline{t_{ij}^\alpha(g)}\,dg.$$

Проинтегрируем это равенство по подгруппе H:

$$c_{ij}^\alpha = d_\alpha \iint f(gh^{-1})\,t_{ij}^\alpha(g)\,dg\,dh = d_\alpha \iint f(g)\,\overline{t_{ij}^\alpha(gh)}\,dg\,dh =$$

$$= \sum_{k=1}^{d_\alpha} \int_G f(g)\,\overline{t_{ik}^\alpha(g)}\,dg \int_H \overline{t_{kj}^\alpha(h)}\,dh.$$

Рассмотрим интеграл $\int \overline{t_{kj}^\alpha(h)}\,dh$. Если $\alpha \overline{\in} A_0$, то в пространстве представления $T_\alpha(g)$ нет вектора, инвариантного относительно операторов $T_\alpha(h)$, $h \in H$. Поэтому разложение представления $T_\alpha(h)$ подгруппы H на неприводимые не содержит единичного представления.

Но тогда все матричные элементы $t^{\alpha}_{kj}(h)$ этого представления являются линейными комбинациями неприводимых представлений, отличных от единичного, и, значит ортогональны функции $t(h)=1$. Это показывает, что если $\alpha \overline{\in} A_0$, то $\int \overline{t^{\alpha}_{kj}(h)}\,dh=0$.

Пусть теперь $\alpha \in A_0$. В силу выбора базиса мы имеем $t^{\alpha}_{11}(h)=1$ и потому $t^{\alpha}_{1j}(h)=t^{\alpha}_{j1}(h)=0$ при $j\neq 1$, $h\in H$. Поскольку в пространстве $\mathfrak{L}_{\alpha}$ есть лишь один нормированный вектор, инвариантный относительно $T_{\alpha}(h)$, $h\in H$, то все остальные матричные элементы $t^{\alpha}_{kj}(h)$, $k>1$, $j>1$ являются линейными комбинациями матричных элементов неприводимых унитарных представлений, отличных от единичного. Поэтому, если $\alpha\in A_0$, но $k\neq 1$ или $j\neq 1$, то

$$\int \overline{t^{\alpha}_{kj}(h)}\,dh=0.$$

Из доказанного следует, что если $\alpha \overline{\in} A_0$ или $j\neq 1$, то $c^{\alpha}_{ij}=0$. Поэтому

$$f(g)=\sum_{\alpha\in A_0}\sum_{i=1}^{d_{\alpha}} c^{\alpha}_{i1}t^{\alpha}_{i1}(g).$$

При этом

$$c^{\alpha}_{i1}=d_{\alpha}\int f(g)\,\overline{t^{\alpha}_{i1}(g)}\,dg.$$

Разумеется, в силу того, что функция $f(g)$ и матричный элемент $t^{\alpha}_{i1}(g)$ постоянны на левых классах смежности по H, интеграл (3) можно переписать в виде интеграла по однородному пространству $\mathfrak{M}=G/H$.

Наше утверждение доказано: *функции на компактных группах, постоянные на левых классах смежности по массивным подгруппам, разлагаются в ряды вида* (2), *где A_0 — множество попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений класса* 1, *а $t^{\alpha}_{i1}(g)$ — матричные элементы столбцов, соответствующих базисным векторам $\mathbf{e}^{\alpha}_1$, таким, что $T_{\alpha}(h)\,\mathbf{e}^{\alpha}_1=\mathbf{e}^{\alpha}_1$, $h\in H$.*

Рассмотрим представление

$$T(g)f(x)=f(g^{-1}x) \tag{4}$$

в пространстве функций на однородном пространстве $\mathfrak{M}=G/H$ с компактной группой движений G и массивной стационарной подгруппой H. Из разложения (2) легко следует, что это представление разлагается в прямую сумму представлений класса 1 относительно подгруппы H, причем каждое представление класса 1 входит в разложение только один раз (поскольку в разложении (2) участвуют матричные элементы лишь одной строки матрицы $\{t^{\alpha}_{ij}(g)\}$, $\alpha\in A_0$).

Совершенно так же строится разложение функций, постоянных на правых классах смежности по массивной подгруппе H.

Объединяя полученные результаты, приходим к следующему утверждению:

Пусть H — массивная подгруппа компактной группы G. Тогда любая функция $f(g)$, постоянная на двусторонних классах смежности HgH по подгруппе H, разлагается по зональным сферическим функциям $t_{11}^{\alpha}(g)$, $\alpha \in A_0$ унитарных неприводимых представлений класса 1:

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A_0} c_\alpha t_{11}^{\alpha}(g).$$

Коэффициенты разложения задаются формулами

$$c_\alpha = d_\alpha \int f(g) \overline{t_{11}^{\alpha}(g)}\, dg. \tag{5}$$

Интегрирование в формуле (5) *сводится к интегрированию по множеству сфер в однородном пространстве* $\mathfrak{M} = G/H$.

6. Свертка функций на группе. *Сверткой* двух функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$, заданных на компактной группе G, называют функцию

$$f_1 * f_2(g) = \int f_1(gg_1^{-1}) f_2(g_1)\, dg_1. \tag{1}$$

Операция свертывания ассоциативна, но некоммутативна, т. е. имеет место равенство

$$(f_1 * f_2) * f_3(g) = f_1 * (f_2 * f_3(g)), \tag{2}$$

но, вообще говоря, $f_1 * f_2(g) \neq f_2 * f_1(g)$.

Если функции $f_1(g)$ и $f_2(g)$ непрерывны, то и их свертка является непрерывной функцией.

Найдем, как выражаются коэффициенты Фурье свертки $f(g)$ двух функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ через коэффициенты Фурье a_{ij}^{α} и b_{ij}^{α} свертываемых функций. Подставим в равенство

$$c_{ij}^{\alpha} = \int f(g) \overline{t_{ij}^{\alpha}(g)}\, dg \tag{3}$$

вместо функции $f(g)$ выражение (1). Меняя порядок интегрирования, получаем

$$c_{ij}^{\alpha} = \int\int f_1(gg_1^{-1}) f_2(g_1) \overline{t_{ij}^{\alpha}(g)}\, dg\, dg_1 = \int\int f_1(g) f_2(g_1) \overline{t_{ij}^{\alpha}(gg_1)}\, dg\, dg_1.$$

Но

$$t_{ij}^{\alpha}(gg_1) = \sum_k t_{ik}^{\alpha}(g)\, t_{kj}^{\alpha}(g_1).$$

Отсюда вытекает, что

$$c_{ij}^{\alpha} = \sum_k \int f_1(g) \overline{t_{ik}^{\alpha}(g)}\, dg \int f_2(g) \overline{t_{kj}^{\alpha}(g_1)}\, dg_1 = \sum_k a_{ik}^{\alpha} b_{kj}^{\alpha}. \tag{4}$$

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Пусть функция $f(g)$ является сверткой функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$, заданных на группе G, и пусть коэффициенты Фурье функции $f_1(g)$ равны a_{ij}^{α}, а коэффициенты Фурье функции $f_2(g)$ равны b_{ij}^{α}. Тогда коэффициенты Фурье функции $f(g)$ равны*

$$c_{ij}^{\alpha}=\sum_{k} a_{ik}^{\alpha} b_{kj}^{\alpha}. \tag{5}$$

Этой теореме можно дать более наглядную форму. Расположим коэффициенты Фурье функции $f(g)$, соответствующие одному и тому же неприводимому представлению $T^{\alpha}(g)$, в виде матрицы (C^{α}). Тогда функции $f(g)$ соответствует бесконечная совокупность матриц (C^{α}).

Теорема 1 означает, что если функции $f_1(g)$ соответствует совокупность матриц (A^{α}), а функции $f_2(g)$ — совокупность матриц (B^{α}), то их свертке $f(g)=f_1(g)*f_2(g)$ соответствует совокупность матриц

$$(C^{\alpha})=(A^{\alpha})(B^{\alpha}).$$

Иными словами, *свертке функции соответствует умножение матриц, составленных из коэффициентов Фурье свертываемых функций.*

Совокупность непрерывных функций, заданных на группе G, образует кольцо, если понимать сложение функций (и умножение функции на скаляр) обычным образом, а в качестве умножения взять свертку функций. Это кольцо называют *групповым кольцом* группы G. Поставив в соответствие каждой функции $f(g)$ из группового кольца некоторую матрицу (C^{α}) ее коэффициентов Фурье, получаем гомоморфное отображение группового кольца в кольцо матриц. Эти отображения стоят во взаимно однозначном соответствии с классами неприводимых унитарных представлений группы G.

7. Разложение центральных функций. Функцию $f(g)$ на группе G называют *центральной*, если для любых двух элементов g и g_1 этой группы выполняется равенство

$$f(gg_1)=f(g_1g) \tag{1}$$

или, что то же самое, равенство

$$f(g_1^{-1}gg_1)=f(g). \tag{1'}$$

Таким образом, *центральные функции постоянны на классах сопряженных элементов группы G.* Примерами центральных функций являются характеры $\chi(g)$ представлений $T(g)$ группы G, так как они удовлетворяют функциональному уравнению

$$\chi(g_1^{-1}gg_1)=\chi(g) \tag{2}$$

(см. п. 9 § 1).

Если $f(g)$ — центральная функция на группе G, то для любой непрерывной финитной функции $\varphi(g)$ на этой группе выполняется равенство

$$f * \varphi(g) = \varphi * f(g). \tag{3}$$

В самом деле, так как $f(g)$ — центральная функция, то $f(gg_1^{-1}) = f(g_1^{-1}g)$, и потому

$$f * \varphi(g) = \int f(gg_1^{-1})\varphi(g_1)\,dg_1 = \int f(g_1^{-1}g)\varphi(g_1)\,dg_1 = \\ = \int \varphi(gg_1^{-1}) f(g_1)\,dg_1 = \varphi * f(g).$$

Равенство (3) показывает, что центральные функции принадлежат центру группового кольца группы G, т. е. перестановочны со всеми элементами кольца.

Выясним теперь, какой вид имеет разложение центральной функции $f(g)$ по матричным элементам неприводимых унитарных представлений. Пусть

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g). \tag{4}$$

Обозначим через (C_α) матрицу, состоящую из коэффициентов c_{ij}^α функции $f(g)$. Так как $f * t_{ij}^\alpha(g) = t_{ij}^\alpha * f(g)$, то имеет место равенство

$$(C_\alpha)(A)_{ij}^\alpha = (A)_{ij}^\alpha (C_\alpha), \tag{5}$$

где $(A)_{ij}^\alpha$ — матрица коэффициентов Фурье функции $t_{ij}^\alpha(g)$ (см. п. 6). Но очевидно, что все элементы этой матрицы равны нулю, за исключением элемента a_{ij}^α, равного 1. Поскольку равенство (5) справедливо для всех i и j, то C_α — скалярная матрица, т. е. $c_{ij}^\alpha = 0$ при $i \neq j$ и $c_{11}^\alpha = \ldots = c_{d_\alpha d_\alpha}^\alpha = c_\alpha$.

Из полученных значений для коэффициентов c_{ij}^α следует, что разложение центральной функции $f(g)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} t_{ii}^\alpha(g) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_\alpha(g).$$

Итак, мы доказали, что всякая центральная функция $f(g)$ с интегрируемым квадратом может быть разложена в ряд по характерам $\chi_\alpha(g)$ неприводимых унитарных представлений группы G:

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_\alpha(g). \tag{6}$$

Коэффициенты c_α выражаются по формуле

$$c_\alpha \equiv c_{ii}^\alpha = d_\alpha \int f(g)\,\overline{t_{ii}^\alpha(g)}\,dg, \quad 1 \leqslant i \leqslant d_\alpha.$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до d_α и деля на d_α, получаем

$$c_\alpha = \int f(g)\,\overline{\chi_\alpha(g)}\,dg. \tag{7}$$

Отметим, что *характеры $\chi_\alpha(g)$ полной системы попарно не эквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G образуют ортогональную нормированную систему функций.*

В самом деле, из соотношений ортогональности для матричных элементов неприводимых унитарных представлений имеем при $\alpha \neq \beta$

$$\int \chi_\alpha(g)\overline{\chi_\beta(g)}\,dg = \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta}\int t_{ii}^\alpha(g)\overline{t_{jj}^\beta(g)}\,dg = 0. \tag{8}$$

Если же $\alpha = \beta$, то

$$\int |\chi_\alpha(g)|^2\,dg = \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\alpha}\int t_{ii}^\alpha(g)\overline{t_{jj}^\alpha(g)}\,dg.$$

Слагаемые, для которых $i \neq j$, равны нулю, а слагаемые, для которых $i = j$, равны $1/d_\alpha$. Поэтому

$$\int |\chi_\alpha(g)|^2\,dg = 1. \tag{9}$$

Формулы (6)—(9) показывают, что каждая центральная функция с интегрируемым квадратом разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по ортогональной системе $\{\chi_\alpha(g)\}$. Иными словами, *система функций $\{\chi_\alpha(g)\}$ образует ортогональный нормированный базис в гильбертовом пространстве центральных функций с интегрируемым квадратом модуля.* Отсюда вытекает, что для центральных функций справедливо следующее равенство Парсеваля:

$$\int |f(g)|^2\,dg = \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha|^2. \tag{10}$$

Разложение по системе функций $\{\chi_\alpha(g)\}$ позволяет находить кратность, с которой данное неприводимое унитарное представление $T_\alpha(g)$ компактной группы G входит в разложение приводимого представления $T(g)$. Если характер представления $T(g)$ равен $\chi(g)$, то согласно результатам п. 10 § 1

$$\chi(g) = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \chi_\alpha(g), \tag{11}$$

где a_α — кратность, с которой $T_\alpha(g)$ входит в разложение представления $T(g)$. По формуле (7) коэффициент Фурье a_α выражается равенством

$$a_\alpha = \int \chi(g)\overline{\chi_\alpha(g)}\,dg. \tag{12}$$

Отметим частный случай. Пусть $T_\alpha(g)$ и $T_\beta(g)$ — неприводимые унитарные представления группы G. Тогда характер их тензорного произведения $T_\alpha(g) \otimes T_\beta(g)$ равен $\chi_\alpha(g)\chi_\beta(g)$. Отсюда вытекает, что представление $T_\gamma(g)$ входит в разложение тензорного произведения $T_\alpha(g)\otimes T_\beta(g)$ с кратностью

$$a_{\alpha\beta\gamma}=\int \chi_\alpha(g)\chi_\beta(g)\overline{\chi_\gamma(g)}\,dg. \tag{13}$$

Обозначим через $\overline{T}(g)$ представление группы G, комплексно-сопряженное с представлением $T(g)$ (т. е. имеющее матричные элементы $\overline{t_{ij}(g)}$). Очевидно, что

$$\chi_{\overline{T}}(g)=\overline{\chi_T(g)}.$$

Из равенства (13) вытекает следующее соотношение симметрии.

Пусть $T_\alpha(g)$, $T_\beta(g)$, $T_\gamma(g)$ — неприводимые унитарные представления компактной группы G. Тогда представление $T_\gamma(g)$ входит в разложение представления $T_\alpha(g)\otimes T_\beta(g)$ с той же кратностью, с которой представление $\overline{T}_\alpha(g)$ входит в разложение $T_\beta(g)\otimes\overline{T}_\gamma(g)$ или представление $\overline{T}_\beta(g)$ в разложение $T_\alpha(g)\otimes\overline{T}_\gamma(g)$.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ I

Некоторые сведения о линейных пространствах

Мы предполагаем, что читатель владеет теорией линейных пространств в объеме книги И. М. Гельфанда «Лекции по линейной алгебре» и элементами теории гильбертовых пространств.

1. Кронекеровское или тензорное произведение линейных пространств и операторов. Пусть $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — конечномерные линейные пространства. Обозначим через $\mathfrak{L}_1'$ и $\mathfrak{L}_2'$ сопряженные с ними пространства (т. е. пространства, элементами которых являются линейные функционалы в $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$).

Кронекеровским или *тензорным произведением пространств* $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ называется линейное пространство $\mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1)$, элементами которого являются линейные отображения пространства $\mathfrak{L}_2'$ в $\mathfrak{L}_1$. Мы будем обозначать тензорное произведение пространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ через $\mathfrak{L}_1\otimes\mathfrak{L}_2$.

Каждому линейному отображению A пространства $\mathfrak{L}_2'$ в $\mathfrak{L}_1$ соответствует сопряженное с ним отображение A' пространства $\mathfrak{L}_1'$ в $\mathfrak{L}_2$. В силу конечномерности пространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ соответствие $A\to A'$ определяет изоморфное отображение $\mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1)$ на $\mathscr{L}(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2)$. Таким образом, если рассматривать линейные пространства с точностью до изоморфизма, то тензорное произведение обладает свойством коммутативности

$$\mathfrak{L}_1\otimes\mathfrak{L}_2=\mathfrak{L}_2\otimes\mathfrak{L}_1. \tag{1}$$

Кроме того, это произведение ассоциативно:

$$(\mathfrak{L}_1\otimes\mathfrak{L}_2)\otimes\mathfrak{L}_3=\mathfrak{L}_1\otimes(\mathfrak{L}_2\otimes\mathfrak{L}_3). \tag{2}$$

Каждой паре $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}\in\mathfrak{L}_1$, $\mathbf{y}\in\mathfrak{L}_2$ поставим в соответствие оператор $\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}$, определяемый равенством

$$(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})\,\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{y})\,\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\mathbf{f} \in \mathfrak{L}_2'$. Так как $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ — число, то этот оператор отображает пространство $\mathfrak{L}_2'$ в $\mathfrak{L}_1$. Таким образом,

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \in \mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1) = \mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2.$$

Имеют место очевидные соотношения

$$(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}) \tag{4}$$

и

$$\mathbf{x} \otimes (\alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2) = \alpha(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_1) + \beta(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_2). \tag{5}$$

Легко показать, что любой линейный оператор X, отображающий пространство $\mathfrak{L}_2'$ в $\mathfrak{L}_1$, может быть представлен в виде линейной комбинации операторов вида $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$. Поэтому, если $\{\mathbf{e}_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — базис в пространстве $\mathfrak{L}_1$, а $\{\mathbf{g}_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$ — базис в пространстве $\mathfrak{L}_2$, то элементы $\mathbf{h}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{g}_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ образуют базис в $\mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2$. При этом, если $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{g}_j$, то

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{g}_j). \tag{6}$$

Определим теперь кронекеровское (или тензорное) произведение операторов A и B, действующих соответственно в пространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Пусть X — линейный оператор, отображающий $\mathfrak{L}_2'$ в $\mathfrak{L}_1$. Очевидно, что оператор AXB' отображает пространство $\mathfrak{L}_2'$ в $\mathfrak{L}_1$, т. е. также принадлежит $\mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1)$. При этом отображение $X \to AXB'$ является линейным оператором в $\mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1)$. Мы назовем этот оператор *кронекеровским произведением операторов* A и B и обозначим его через $A \otimes B$. Итак,

$$(A \otimes B) X = AXB', \tag{7}$$

где $X \in \mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1)$.

Из равенства (7) вытекают следующие свойства кронекеровского произведения операторов:

$$A \otimes (\alpha B_1 + \beta B_2) = \alpha A \otimes B_1 + \beta A \otimes B_2, \tag{8}$$

$$(\alpha A_1 + \beta A_2) \otimes B = \alpha A_1 \otimes B + \beta A_2 \otimes B \tag{9}$$

и

$$A_1 A_2 \otimes B_1 B_2 = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2). \tag{10}$$

Чтобы доказать, например, равенство (10), достаточно заметить, что

$$(A_1 A_2 \otimes B_1 B_2) X = A_1 A_2 X B_2' B_1' = A_1 (A_2 X B_2') B_1' = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) X.$$

Если оператор X из $\mathscr{L}(\mathfrak{L}_2', \mathfrak{L}_1)$ имеет вид $X = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_1$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{L}_2$ (т. е. если $X\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{y})\,\mathbf{x}$, $\mathbf{f} \in \mathfrak{L}_2'$), то легко проверить, что

$$(A \otimes B) X = (A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \otimes B\mathbf{y}. \tag{11}$$

В частности,

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{g}_j) = A\mathbf{e}_i \otimes B\mathbf{g}_j.$$

Отсюда вытекает, что если матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ равна (a_{ij}), а матрица оператора B в базисе $\{\mathbf{g}_r\}$ равна (b_{rs}), то матрицей оператора $A \otimes B$ в базисе $\mathbf{h}_{ir} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{g}_r$ является

$$(c_{ir,\,js}) = (a_{ij} b_{rs}). \tag{12}$$

Элементами этой матрицы являются, таким образом, всевозможные попарные произведения элементов матриц (a_{ij}) и (b_{rs}).

Отметим еще, что если $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — унитарные линейные пространства (т. е. комплексные линейные пространства, в которых определено скалярное произведение с обычными свойствами), то их кронекеровское произведение $\mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2$ также является унитарным пространством. Скалярное произведение в $\mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2$ определяется равенством

$$(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_1 (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2, \tag{13}$$

где $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_1$ и $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2$ — скалярные произведения в пространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. При этом ортогональным нормированным базисом в $\mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2$ является $\mathbf{h}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{g}_j$, где $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{L}_1$ и $\{\mathbf{g}_j\}$ — ортогональный нормированный базис в $\mathfrak{L}_2$.

2. Операторы типа Гильберта — Шмидта. Перейдем теперь к рассмотрению бесконечномерных пространств. Оператор A, отображающий гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_2$, называется *оператором типа Гильберта — Шмидта,* если для любой ортогональной нормированной системы векторов $\{\mathbf{e}_n\}$ в $\mathfrak{H}_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A\mathbf{e}_n \|^2. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что для того, чтобы A был оператором типа Гильберта — Шмидта, достаточно выполнения условия (1) хотя бы для одного ортонормированного базиса в $\mathfrak{H}_1$.

Пусть $\mathfrak{L}^2_\sigma$ — пространство функций $f(x)$ на множестве X, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры σ, а $\mathfrak{L}^2_\rho$ — пространство функций $F(y)$ на множестве Y, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры ρ. Если функция $K(x, y)$ такова, что[1])

$$\int\int |K(x, y)|^2 \, d\sigma(x) \, d\rho(y) < +\infty,$$

то интегральный оператор

$$\int K(x, y) f(x) \, d\sigma(x)$$

есть оператор типа Гильберта — Шмидта.

Если A и B — операторы типа Гильберта — Шмидта, то $\alpha A + \beta B$, где α, β — комплексные числа, тоже является оператором типа Гильберта — Шмидта. Таким образом, операторы типа Гильберта — Шмидта образуют линейное пространство. Мы будем обозначать его через $\mathscr{H}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

Введем в пространство $\mathscr{H}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ скалярное произведение. Именно, если A и B — операторы типа Гильберта — Шмидта, отображающие пространство $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, то положим

$$(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (A\mathbf{e}_n, B\mathbf{e}_n) \equiv \operatorname{Tr}(B^*A), \tag{2}$$

где $\{\mathbf{e}_n\}$ — некоторый ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Ряд (2) сходится, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(A\mathbf{e}_n, B\mathbf{e}_n)| \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| A\mathbf{e}_n \|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \| B\mathbf{e}_n \|^2 \right) < +\infty.$$

---

[1]) Если интегрирование распространено на всю область изменения переменных, мы будем обычно опускать указание области.

Нетрудно проверить, что (A, B) не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_n\}$, обладает всеми свойствами скалярного произведения и что $\mathscr{K}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ с указанным скалярным произведением является гильбертовым пространством.

Отметим еще следующие свойства операторов типа Гильберта — Шмидта:

1) *Оператор A^*, сопряженный с оператором типа Гильберта — Шмидта, является оператором того же типа.*

2) *Если один из операторов A и B является оператором типа Гильберта — Шмидта, а другой ограничен, то их произведение AB является оператором типа Гильберта — Шмидта.*

3. Тензорное произведение гильбертовых пространств. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства. Их *тензорным произведением* назовем гильбертово пространство $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$, состоящее из антилинейных операторов [1]) типа Гильберта — Шмидта, отображающих пространство $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$. Мы будем обозначать $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$ также и через $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$. Мы уже видели, что $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ является гильбертовым пространством.

Как показывает рассмотренный в п. 2 пример, тензорным произведением пространств $\mathfrak{L}^2_\sigma$ и $\mathfrak{L}^2_\rho$ является пространство $\mathfrak{L}^2_{\sigma \otimes \rho}$, состоящее из функций $K(x, y)$, для которых

$$\int\int |K(x, y)|^2 \, d\sigma(x) \, d\rho(y) < +\infty. \tag{1}$$

Каждой паре векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{H}_1$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{H}_2$ соответствует элемент $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ пространства $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, отображающий вектор $\mathbf{z} \in \mathfrak{H}_2$ в вектор

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})\, \mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})\, \mathbf{x} \tag{2}$$

пространства $\mathfrak{H}_1$. Скалярное произведение двух элементов $\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2$ дается формулой

$$(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_1 (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2. \tag{3}$$

В самом деле, если $\{\mathbf{f}_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_2$, то

$$(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1)\, \mathbf{f}_n, (\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2)\, \mathbf{f}_n)_2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{y}_1, \mathbf{f}_n)_2\, \mathbf{x}_1, (\mathbf{y}_2, \mathbf{f}_n)_2\, \mathbf{x}_2)_1 =$$

$$= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{y}_1, \mathbf{f}_n)_2 \overline{(\mathbf{y}_2, \mathbf{f}_n)_2} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_1 (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2.$$

Из равенства (3) вытекает, что если $\{\mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_1$, а $\{\mathbf{f}_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_2$, то элементы $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$.

Определим теперь кронекеровское произведение ограниченных операторов. Пусть A (соответственно B) — ограниченный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_1$ (соответственно $\mathfrak{H}_2$), а X — элемент пространства $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, т. е. антилинейный оператор типа Гильберта — Шмидта, отображающий $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$. Тогда оператор AXB^* также отображает $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ и является оператором типа

[1]) Оператор A, отображающий пространство $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$, называется *антилинейным*, если для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ из $\mathfrak{H}_2$ и любых комплексных чисел α, β имеем

$$A(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \bar{\alpha} A\mathbf{x} + \bar{\beta} A\mathbf{y}.$$

Гильберта — Шмидта. Следовательно, отображение $X \to AXB^*$ является (линейным) оператором в пространстве $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$. Мы будем обозначать его через $A \otimes B$ и называть *кронекеровским произведением* операторов A и B.

Если $\mathbf{x} \in \mathfrak{H}_1$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{H}_2$, то

$$(A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \otimes B\mathbf{y}. \tag{4}$$

В самом деле, для любого элемента $\mathbf{z}$ из $\mathfrak{H}_2$ имеем в силу равенства (2)

$$(A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})\mathbf{z} = A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})B^*\mathbf{z} = A(\mathbf{y}, B^*\mathbf{z})\mathbf{x} = (B\mathbf{y}, \mathbf{z})A\mathbf{x} = (A\mathbf{x} \otimes B\mathbf{y})\mathbf{z}.$$

Тем самым равенство (4) доказано.

Тензорное произведение операторов в гильбертовых пространствах обладает свойствами, аналогичными свойствам тензорного произведения операторов в конечномерных пространствах. Именно,

$$(\alpha A_1 + \beta A_2) \otimes B = \alpha(A_1 \otimes B) + \beta(A_2 \otimes B), \tag{5}$$

$$A \otimes (\alpha B_1 + \beta B_2) = \alpha(A \otimes B_1) + \beta(A \otimes B_2), \tag{6}$$

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1A_2 \otimes B_1B_2. \tag{7}$$

Эти свойства доказываются точно так же, как и в конечномерном случае.

Найдем теперь матричные элементы оператора $A \otimes B$. Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_1$, $\{\mathbf{f}_m\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_2$. Тогда, как отмечалось выше, $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m\}$ является ортонормированным базисом в пространстве $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$. Матричные элементы оператора $C = A \otimes B$ выражаются в этом базисе формулой

$$c_{im,\,jn} = ((A \otimes B)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_n),\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m)).$$

Но по равенствам (3) и (4) имеем

$$((A \otimes B)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_n),\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m)) = ((A\mathbf{e}_j \otimes B\mathbf{f}_n),\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m)) = \\ = (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)_1 (B\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_m)_2 = a_{ij}b_{mn}.$$

Таким образом,

$$c_{im,\,jn} = a_{ij}b_{mn}. \tag{8}$$

Мы показали, что матричные элементы оператора $A \otimes B$ в базисе $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m\}$ являются произведениями матричных элементов операторов A и B в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_m\}$ соответственно.

Наконец, покажем, что кронекеровское произведение двух унитарных операторов является унитарным оператором. Поскольку операторы $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_n$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, нам достаточно показать, что если операторы U и V в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно унитарны, то

$$((U \otimes V)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m),\ (U \otimes V)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_n)) = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m,\ \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_n). \tag{9}$$

Но по равенствам (3) и (4) имеем

$$((U \otimes V)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m),\ (U \otimes V)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_n)) = (U\mathbf{e}_i \otimes V\mathbf{f}_m,\ U\mathbf{e}_j \otimes V\mathbf{f}_n) = \\ = (U\mathbf{e}_i,\ U\mathbf{e}_j)_1 (V\mathbf{f}_m,\ V\mathbf{f}_n)_2.$$

В силу унитарности операторов U и V

$$(U\mathbf{e}_i,\ U\mathbf{e}_j)_1 (V\mathbf{f}_m,\ V\mathbf{f}_n)_2 = (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)_1 (\mathbf{f}_m,\ \mathbf{f}_n)_2.$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_m,\ \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_n) = (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)_1 (\mathbf{f}_m,\ \mathbf{f}_n)_2.$$

Тем самым равенство (9), а с ним и унитарность оператора $U \otimes V$, доказаны.

4. Счетно-гильбертовы пространства. Ядерные пространства. Пусть в линейном пространстве Φ задана счетная система скалярных произведений $(\varphi, \psi)_k$, $1 \leqslant k < \infty$, такая, что для любого элемента φ из Φ имеем

$$(\varphi, \varphi)_1 \leqslant (\varphi, \varphi)_2 \leqslant \ldots \leqslant (\varphi, \varphi)_k \leqslant \ldots \tag{1}$$

Положим для любого k, что $\|\varphi\|_k^2 = (\varphi, \varphi)_k$. Назовем последовательность элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ из Φ *фундаментальной*, если для любого k имеем $\lim\limits_{m, n \to \infty} \|\varphi_m - \varphi_n\|_k = 0$. Пространство Φ называется *полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ найдется такой элемент $\varphi \in \Phi$, что при всех k $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi - \varphi_n\|_k = 0$. Линейное пространство Φ, в котором задана система скалярных произведений с указанными свойствами, называется *счетно-гильбертовым*, если оно полно.

Пополняя счетно-гильбертово пространство Φ по норме $\|\varphi\|_k$, мы получим гильбертово пространство Φ_k. При этом из неравенства $\|\varphi\|_m \leqslant \|\varphi\|_n$, $m < n$ вытекает, что при $n > m$ существует непрерывное линейное отображение T_m^n пространства Φ_n в пространство Φ_m, оставляющее на месте элементы из Φ.

Назовем счетно-гильбертово пространство Φ *ядерным*, если для любого m найдется такое n, что отображение T_m^n является оператором типа Гильберта — Шмидта. Примером ядерного счетно-гильбертова пространства является пространство $K(a, b)$ всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Скалярные произведения $(\varphi, \psi)_n$ определяются в этом пространстве формулами

$$(\varphi, \psi)_n = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \varphi^{(k)}(x) \overline{\psi^{(k)}(x)}\, dx. \tag{2}$$

Нам понадобится в дальнейшем одно свойство ядерных пространств, связанное с реализацией этих пространств как пространств функций. Известно, что гильбертово пространство может быть реализовано в виде пространства функций. Эти реализации строятся следующим образом. Выберем положительную меру σ в некотором множестве X (например, на вещественной прямой) и обозначим через $\mathfrak{L}_\sigma^2$ пространство всех функций $\varphi(x)$, для которых сходится интеграл

$$\int |\varphi(x)|^2\, d\sigma(x).$$

Введя в пространстве $\mathfrak{L}_\sigma^2$ скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, d\sigma(x),$$

мы получим гильбертово пространство. Точнее говоря, элементами пространства $\mathfrak{L}_\sigma^2$ являются не отдельные функции $\varphi(x)$, а классы функций, отличающихся друг от друга лишь на множестве нулевой σ-меры.

Недостатком указанной реализации является то, что, сопоставляя с функцией $\varphi(x)$ из $\mathfrak{L}_\sigma^2$ ее значение в некоторой точке x_0, мы не получаем, вообще говоря, непрерывного линейного функционала в этом пространстве (исключение составляют те точки, в которых сосредоточена ненулевая мера). Более того, поскольку функции $\varphi(x)$ из пространства $\mathfrak{L}_\sigma^2$ определены лишь с точностью до их значений на множестве нулевой σ-меры, мы лишены возможности говорить об их значениях в фиксированной точке x_0. Однако во многих вопросах, связанных с разложением представлений групп, представляется желательным рассматривать значение функции в точке как линейный функционал. Рассмотренный выше пример ядерного пространства бесконечно дифференцируемых функций на отрезке подсказывает, как это сделать — для пространства бесконечно дифференцируемых функций значение в точке является непрерывным линейным функционалом.

В общем случае рассмотрим ядерное пространство Φ. Пусть в этом пространстве задано еще одно скалярное произведение (φ, ψ), и для некоторого n $(\varphi, \varphi) \leqslant (\varphi, \varphi)_n$ при всех $\varphi \in \Phi$. Пополним пространство Φ по норме $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$. Мы получим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. При этом существует непрерывное отображение пространства Φ в $\mathfrak{H}$. Если пространство $\mathfrak{H}$ реализовано в виде пространства функций, то тем самым задается и реализация пространства Φ в виде пространства функций. В этом случае имеет место (см. [14])

Теорема 1. *Пусть $\varphi \to \varphi(x)$ — реализация ядерного пространства Φ в виде пространства функций, индуцированная соответствующей реализацией гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \supset \Phi$ в виде пространства $\mathfrak{L}^2_\sigma$. Тогда каждому значению x можно поставить в соответствие линейный функционал λ_x в пространстве Φ так, чтобы для любого элемента из этого пространства равенство $\lambda_x \varphi = \varphi(x)$ выполнялось почти при всех значениях x (относительно меры σ).*

5. Ортогональная прямая сумма гильбертовых пространств. Пусть даны гильбертовы пространства $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n, \ldots$ *Ортогональной прямой суммой* этих пространств называется гильбертово пространство

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_n,$$

элементами которого являются последовательности

$$\xi = (\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n, \ldots), \ \mathfrak{h}_n \in \mathfrak{H}_n.$$

При этом берутся лишь такие последовательности ξ, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathfrak{h}_n\|_n^2 < +\infty$, где $\|\mathfrak{h}\|_n$ — норма в H_n.

Линейные операции в пространстве определяются покоординатно; если $\xi = (\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n, \ldots)$, $\eta = (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots)$, то $\xi + \eta = (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n + \mathfrak{g}_n, \ldots)$ и $\alpha\xi = (\alpha\mathfrak{h}_1, \ldots, \alpha\mathfrak{h}_n, \ldots)$. Скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ определяется равенством

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{h}_n, \mathfrak{g}_n)_n,$$

где $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})_n$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}_n$.

Если A_n, $n = 1, 2, \ldots$, — операторы в пространствах $\mathfrak{H}_n$, причем нормы этих операторов ограничены в совокупности, то им соответствует оператор A в $\mathfrak{H}$, определяемый формулой $A\xi = (A_1\mathfrak{h}_1, \ldots, A_n\mathfrak{h}_n, \ldots)$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n, \ldots$ его подпространства, такие, что

1) подпространства $\mathfrak{H}_n$ попарно ортогональны,

2) наименьшее замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, содержащее все подпространства $\mathfrak{H}_n$, совпадает с $\mathfrak{H}$.

Тогда говорят, что $\mathfrak{H}$ является *ортогональной прямой суммой своих подпространств* $\mathfrak{H}_n$ и пишут

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_n.$$

Очевидна связь между введенными двумя понятиями ортогональной прямой суммы.

6. Непрерывная прямая сумма гильбертовых пространств. Понятие ортогональной прямой суммы гильбертовых пространств можно несколько обобщить, рассматривая прямые суммы гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n, \ldots$, взятых с положительными весами $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$. В этом случае скалярное произведение определяется формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\mathbf{h}_n, \mathbf{g}_n)_n. \tag{1}$$

Это равенство можно записать в виде

$$(\xi, \eta) = \int\limits_X (\mathbf{h}(x), \mathbf{g}(x))_x \, d\mu(x), \tag{2}$$

где через X обозначено множество, состоящее из точек $1, 2, \ldots, n, \ldots$, а через $\mu(x)$ — мера на этом множестве, равная μ_n в точке n. В соответствии с этим ортогональную прямую сумму гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n, \ldots$, взятых с весами $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$, можно записать в виде

$$\mathfrak{H} = \int\limits_X \oplus \mathfrak{H}(x) \, d\mu(x). \tag{3}$$

Обобщим теперь понятие ортогональной прямой суммы гильбертовых пространств, взятых с заданными весами, отказавшись от требования счетности числа слагаемых. Иными словами, рассмотрим некоторое множество X, на котором задана положительная мера μ. Пусть каждой точке этого множества поставлено в соответствие гильбертово пространство $\mathfrak{H}(x)$. Мы будем считать все эти пространства имеющими одну и ту же размерность. В этом случае все пространства $\mathfrak{H}(x)$ можно отождествить с одним и тем же гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$ той же размерности.

Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство, элементами которого являются вектор-функции $\xi = \mathbf{h}(x)$ на множестве X, принимающие значения в пространстве $\mathfrak{H}$, такие, что

1) для любого элемента $\mathbf{h}$ из $\mathfrak{H}$ числовая функция $(\mathbf{h}(x), \mathbf{h})$ измерима по мере μ;

2) числовая функция $\|\mathbf{h}(x)\|$ имеет интегрируемый квадрат модуля по мере μ:

$$\int \|\mathbf{h}(x)\|^2 \, d\mu(x) < +\infty. \tag{4}$$

Определим в пространстве $\mathcal{H}$ линейные операции, положив для вектор-функций $\xi = \mathbf{h}(x)$, $\eta = \mathbf{g}(x)$,

$$\left.\begin{aligned} \xi + \eta &= \mathbf{h}(x) + \mathbf{g}(x), \\ \alpha\xi &= \alpha\mathbf{h}(x) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и введем скалярное произведение, положив

$$(\xi, \eta) = \int \mathbf{h}(x) \overline{\mathbf{g}(x)} \, d\mu(x). \tag{6}$$

Из условий (1) и (2) легко вытекает, что это произведение определено для любых двух элементов ξ и η из $\mathcal{H}$. Легко проверить, далее, что пространство $\mathcal{H}$ удовлетворяет всем аксиомам гильбертова пространства. В частности, оно полно. Мы будем называть пространство $\mathcal{H}$ *непрерывной прямой суммой пространств* $\mathfrak{H}(x)$ *относительно меры* μ и писать

$$\mathcal{H} = \int \oplus \mathfrak{H}(x) \, d\mu(x). \tag{7}$$

Ограничение, что все пространства $\mathfrak{H}(x)$ имеют одну и ту же размерность, несущественно. Достаточно предположить, что размерность $n(x)$ пространства $\mathfrak{H}(x)$ является измеримой функцией. В этом случае множество

X разбивается на измеримые множества $X_\infty, X_1, \ldots, X_n, \ldots$, такие, что на X_n имеем $n(x)=n$ (n может принимать и значение ∞). Полагая

$$\int\limits_X \oplus \mathfrak{H}(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{X_n} \oplus \mathfrak{H}(x)\,d\mu(x), \tag{8}$$

получим определение непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств и в этом случае.

Пусть Φ — ядерное счетно-гильбертово пространство и (φ, ψ) — скалярное произведение в нем, такое, что для всех элементов φ из Φ $(\varphi, \varphi) < (\varphi, \varphi)_n$ для некоторого n. Обозначим через $\mathfrak{H}$ пополнение пространства Φ по норме $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$. Имеет место следующая теорема, обобщающая теорему 1 из п. 4.

Теорема 1. *Пусть Φ, $\Phi \subset \mathfrak{H}$ — ядерное пространство и*

$$\mathfrak{h} \to \xi = \mathfrak{h}(x) -$$

изометрическое вложение пространства $\mathfrak{H}$ в пространство

$$\mathscr{H} = \int\limits_X \oplus \mathfrak{H}(x)\,d\mu(x).$$

Тогда для любого x существует такой ядерный оператор T_x, отображающий пространство Φ в $\mathscr{H}$, что для $\varphi \in \Phi$ функции $\varphi(x)$ и $T_x(\varphi)$ отличаются лишь на множестве меры нуль.

Доказательство этой теоремы читатель также найдет в книге [14] (на стр. 151—153).

Рассмотрим некоторые примеры непрерывных прямых сумм гильбертовых пространств. Если множество X дискретно, то непрерывная прямая сумма превращается в ортогональную прямую сумму гильбертовых пространств с заданными весами. Если же все пространства $\mathfrak{H}(x)$ одномерны, то $\int \oplus \mathfrak{H}(x)\,d\mu(x)$ есть не что иное, как пространство $\mathfrak{L}^2_\mu$ функций на множестве X, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры μ.

7. Разложение операторов в непрерывную прямую сумму операторов. Пусть гильбертово пространство $\mathscr{H}$ является непрерывной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}(x)$,

$$\mathscr{H} = \int\limits_X \oplus \mathfrak{H}(x)\,d\mu(x) \tag{1}$$

и пусть $\varphi \to \varphi(x)$ — вложение ядерного пространства Φ в $\mathscr{H}$. По теореме 1 п. 6 для всех $x \in X$ существует такой оператор T_x, что для любого $\varphi \in \Phi$ почти при всех x имеем $\varphi(x) = T_x(\varphi)$.

Пусть A — оператор в пространстве $\mathscr{H}$, оставляющий инвариантным Φ. Мы будем говорить, что пространства $\mathfrak{H}(x)$ инвариантны относительно этого оператора, если почти при всех x имеем

$$AT_x = T_x A. \tag{2}$$

Обозначим AT_x через A_x. Тогда для любого элемента $\varphi \in \Phi$ имеем

$$(A_x\varphi)(x) = A\varphi(x). \tag{3}$$

Мы будем говорить в этом случае, что оператор A разлагается в непрерывную прямую сумму операторов $A(x)$.

Если все операторы представления $A(g)$ разлагаются в непрерывную прямую сумму операторов $A_x(g)$ в соответствии с разложением (1), то говорят, что *представление $A(g)$ разложено в непрерывную прямую сумму представлений $A_x(g)$.*

ГЛАВА II

АДДИТИВНАЯ ГРУППА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Мы начнем изучение связи между теорией представлений и специальными функциями с разбора двух модельных примеров: аддитивной группы вещественных чисел R и группы $SO(2)$ вращений плоскости. Представления первой из них связаны с показательной функцией, а второй — с тригонометрическими функциями.

§ 1. Показательная и тригонометрические функции

1. Неприводимые унитарные представления группы R. Обозначим через R группу, элементами которой являются вещественные числа, а групповой операцией — сложение чисел. Найдем неприводимые унитарные представления этой группы. При этом, разумеется, мы ограничиваемся непрерывными представлениями.

В п. 3 § 3 главы I было показано, что все неприводимые унитарные представления коммутативной группы одномерны. Поэтому надо найти непрерывные функции вещественного переменного, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(x)f(y)=f(x+y) \tag{1}$$

и условию унитарности

$$|f(x)|=1. \tag{2}$$

Хорошо известно, что все непрерывные решения уравнения (1) имеют вид

$$f(x)=e^{ax}.$$

Приведем для полноты доказательство этого утверждения. Сначала покажем, что любое непрерывное решение функционального уравнения (1) дифференцируемо. Для этого возьмем такую бесконечно дифференцируемую финитную функцию $\varphi(x)$, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0$ (такая функция существует, если $f(x) \not\equiv 0$). Умножим обе части равенства (1) на $\varphi(y)$ и проинтегрируем по y от $-\infty$ до ∞:

$$f(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\varphi(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\,\varphi(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\varphi(y-x)\,dy$$

(интеграл сходится в силу финитности $\varphi(y)$). В силу бесконечной дифференцируемости функции $\varphi(x)$ правая часть этого равенства бесконечно дифференцируема по x. Следовательно, бесконечно дифференцируема и левая часть этого равенства, т. е. функция $f(x)$.

Продифференцируем обе части равенства (1) по y и положим $y=0$. Получим дифференциальное уравнение

$$f'(0)\,f(x)=f'(x). \tag{3}$$

Далее, из равенства (1) имеем $f(0)=1$. Но решения уравнения (3), такие, что $f(0)=1$, имеют вид

$$f(x)=e^{ax},$$

где $a=f'(0)$. Тем самым наше утверждение доказано.

Итак, все одномерные непрерывные представления группы R имеют вид $f(x)=e^{ax}$, где a — некоторое, вообще говоря, комплексное число. Найдем, при каких значениях a эти представления унитарны, т. е. когда $|e^{ax}|=1$. Продифференцируем равенство $e^{ax}\overline{e^{ax}}=1$ по x и положим $x=0$. Мы получим $a+\bar{a}=0$, т. е. a — чисто мнимое число. Итак, представление e^{ax} *группы* R *унитарно тогда и только тогда, когда* a — *чисто мнимое число,* $a=bi$.

Заметим, что степенная функция

$$y=t^{a},\quad t>0 \tag{4}$$

связана с представлениями группы R_{+} положительных чисел, где групповой операцией является умножение чисел. Отображение $t=e^{x}$ устанавливает изоморфизм между группами R и R_{+}. При этом отображении представлениям e^{ax} группы R соответствуют представления t^{a} группы R_{+}. При чисто мнимом a эти представления унитарны.

2. Группа вращений плоскости и тригонометрические функции. Перейдем к рассмотрению неприводимых унитарных представлений группы $SO(2)$ вращений евклидовой плоскости вокруг начала координат, т. е. группы однородных линейных преобразований двух переменных, сохраняющих квадратичную форму x^2+y^2 и имеющих положительный определитель.

Хорошо известно, что вращение плоскости задается вещественным числом φ — углом поворота, причем матрица соответствующего линейного преобразования имеет вид

$$g(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ — *тригонометрические функции*, связанные с показательной функцией формулами Эйлера

$$e^{\pm i\varphi}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi, \tag{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{4}$$

При умножении вращений углы поворота складываются, и потому

$$g(\varphi)g(\psi)=g(\varphi+\psi) \tag{5}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi)\\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi)\end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение матриц, и сравнивая матричные элементы слева и справа, получаем формулы сложения для тригонометрических функций:

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi, \tag{6}$$

$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi. \tag{7}$$

Позже таким же путем будут выведены формулы сложения для неэлементарных функций.

Найдем теперь *неприводимые* унитарные представления группы $SO(2)$. Для этого заметим, что в силу равенства (5) отображение $\varphi\to g(\varphi)$ является гомоморфным отображением аддитивной группы R вещественных чисел на группу $SO(2)$. Ядро этого отображения состоит из чисел вида $\varphi=2\pi k$, где k — целое число; этим и только этим числам соответствуют тождественные вращения плоскости. Таким образом, группа $SO(2)$ является фактор-группой группы R по подгруппе $Z_{2\pi}$ чисел вида $2\pi k$:

$$SO(2)=R/Z_{2\pi}.$$

Это замечание позволяет свести разыскание неприводимых унитарных представлений группы $SO(2)$ к той же задаче для группы R. Именно, если $f(\varphi)$ — неприводимое унитарное представление группы $SO(2)$, то равенство

$$F(\varphi+2\pi k)=f(\varphi),\qquad 0\leqslant\varphi<2\pi \tag{8}$$

определяет неприводимое унитарное представление группы R. При этом, однако, получаются не любые представления группы R, а лишь такие, что $F(2\pi)=f(0)=1$.

Таким образом, в силу результатов п. 1 все неприводимые унитарные представления группы $SO(2)$ должны иметь вид $f(\varphi)=e^{ai\varphi}$. Нам осталось выяснить, при каких значениях a будет выполняться условие

$$f(2\pi)=e^{2ai\pi}=1.$$

В силу формул Эйлера имеем

$$e^{2ai\pi}=\cos 2a\pi+i\sin 2a\pi.$$

Поэтому должны выполняться равенства

$$\cos 2a\pi=1,$$
$$\sin 2a\pi=0.$$

Отсюда следует, что a — целое число.

Итак, мы доказали, что неприводимые унитарные представления группы $SO(2)$ имеют вид $e^{in\varphi}$, где n — целое число.

Заметим, что группа $SO(2)$ компактна, и потому в силу п. 2 § 4 главы I любое ее конечномерное представление унитарно. Поэтому доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом:

Любое конечномерное неприводимое представление группы $SO(2)$ унитарно, одномерно и имеет вид

$$f(\varphi)=e^{in\varphi}, \tag{9}$$

где n — целое число.

Выше мы рассмотрели двумерное представление

$$g(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

группы $SO(2)$. Чтобы разложить его на неприводимые, заменим представление $g(\varphi)$ эквивалентным представлением $a^{-1}g(\varphi)a$, где $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$. Простой подсчет показывает, что

$$a^{-1}g(\varphi)a=\begin{pmatrix}\cos\varphi+i\sin\varphi & 0\\ 0 & \cos\varphi-i\sin\varphi\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Применяя формулу Эйлера, можно равенство (10) записать в следующем виде:

$$a^{-1}g(\varphi)a=\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Итак, *представление $g(\varphi)$ является прямой суммой одномерных представлений $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$.*

3. Группа гиперболических вращений плоскости и гиперболические функции. *Гиперболическим вращением плоскости* называют однородное линейное преобразование плоскости, оставляющее инвариантной форму x^2-y^2 и переводящее в себя квадранты $-x\leqslant y\leqslant x$ и $-y\leqslant x\leqslant y$. Совокупность всех гиперболических вращений образует группу, которую будем обозначать $SH(2)$.

При повороте осей координат на $-\pi/4$ форма x^2-y^2 переходит в $-2xy$, и мы получаем линейные преобразования, сохраняющие форму xy и переводящие в себя квадранты $x>0$, $y>0$ и $x>0$, $y<0$. Ясно, что такие преобразования имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x}{a}, \\ y' &= ay, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

гда $a>0$.

Положим $a=e^t$. При изменении a от 0 до $+\infty$ параметр t изменяется от $-\infty$ до ∞. Матрица преобразования

$$x'=e^{-t}x,$$
$$y'=e^{t}y$$

имеет вид

$$g(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Так как

$$g(t_1+t_2)=g(t_1)\,g(t_2),$$

то группа $SH(2)$ изоморфна аддитивной группе вещественных чисел R.

В исходной системе координат гиперболический поворот задается матрицей вида $h(t)=s^{-1}g(t)\,s$, где

$$s=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Мы имеем

$$h(t)=s^{-1}g(t)\,s=\begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\operatorname{ch} t, \qquad \frac{e^t-e^{-t}}{2}=\operatorname{sh} t \tag{4}$$

и назовем $\operatorname{ch} t$ *гиперболическим косинусом* t, а $\operatorname{sh} t$ — *гиперболическим синусом* t. Формула (3) имеет вид

$$h(t)=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из равенства (3) видно, что $h(t)$ является двумерным представлением группы $SH(2)$, эквивалентным $g(t)$. Поэтому

$$h(t_1)\,h(t_2)=h(t_1+t_2). \tag{6}$$

Подставим в равенство (6) вместо $h(t_1)$, $h(t_2)$ и $h(t_1+t_2)$ их выражения (5), перемножим матрицы в левой части равенства (6) и сравним соответствующие матричные элементы слева и справа. Мы получим формулы сложения для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}(t_1+t_2)=\operatorname{ch}t_1\operatorname{ch}t_2+\operatorname{sh}t_1\operatorname{sh}t_2,$$
$$\operatorname{sh}(t_1+t_2)=\operatorname{sh}t_1\operatorname{ch}t_2+\operatorname{ch}t_1\operatorname{sh}t_2.$$

Впрочем, эти формулы можно получить и из формул сложения для тригонометрических функций, если заметить, что в силу формул Эйлера имеем

$$\operatorname{ch}t=\cos it,$$
$$\operatorname{sh}t=\frac{1}{i}\sin it.$$

4. Комплексная форма группы $SO(2)$. Различие между группами $SO(2)$ и $SH(2)$ состоит лишь в том, что первая из них состоит из преобразований, сохраняющих форму x^2+y^2, а вторая — форму x^2-y^2. Ясно, что при переходе от вещественного линейного пространства к комплексному это различие стирается. Говорят, что группы $SO(2)$ и $SH(2)$ являются двумя *вещественными формами* одной и той же комплексной группы.

Эта комплексная группа $SO(2, C)$ состоит из матриц вида

$$g(z)=\begin{pmatrix}\cos z & -\sin z\\ \sin z & \cos z\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где z пробегает комплексную плоскость. Иными словами, она получается из группы $SO(2)$ заменой вещественного параметра φ комплексным числом z.

Группа $SO(2)$ является подгруппой группы $SO(2, C)$, соответствующей вещественным значениям z. Поэтому ее и называют *вещественной формой* группы $SO(2, C)$, а группу $SO(2, C)$ — *комплексной формой* группы $SO(2)$ или, иначе, *комплексификацией* группы $SO(2)$.

Группа $SH(2)$ является другой вещественной формой группы $SO(2, C)$. Она получается при чисто мнимых значениях z (т. е. при вещественных значениях параметра $w=iz$). Именно, если $z=ti$, то

$$g(ti)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t & -i\operatorname{sh}t\\ i\operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Заменим каждую матрицу (2) матрицей $a^{-1}g(ti)\,a$, где $a=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$. При этом получатся матрицы вида

$$\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t & \operatorname{sh}t\\ \operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix}, \tag{3}$$

т. е. матрицы из группы $SH(2)$.

Остановимся на связи между представлениями групп $SO(2)$ и $SO(2, C)$. Неприводимые унитарные представления группы $SO(2)$ имеют, как мы видели выше, вид $e^{in\varphi}$. Но $e^{in\varphi}$ — аналитические функции от φ, и потому их можно рассматривать и при комплексных значениях φ. Таким образом, получаем представления e^{inz} группы $SO(2, C)$, являющиеся «аналитическими продолжениями» представлений $e^{in\varphi}$ с подгруппы $SO(2)$ на всю группу $SO(2, C)$. Поскольку эти представления одномерны, они неприводимы. Однако они не являются унитарными, так как, вообще говоря, $|e^{inz}|\neq 1$.

§ 2. Ряды Фурье

1. Инвариантное интегрирование на группе $SO(2)$. Мы будем изучать функции на группе $SO(2)$. Каждый элемент g этой группы задается вещественным числом φ (углом поворота), определенным с точностью до кратного 2π. Поэтому функции на группе $SO(2)$ можно отождествить с функциями на вещественной оси, имеющими период 2π (или, что то же, с функциями на окружности).

Определим интегрирование на группе $SO(2)$ формулой

$$\int f(g)\,dg = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi. \tag{1}$$

Множитель $\frac{1}{2\pi}$ поставлен здесь для того, чтобы мера всей группы $SO(2)$ была нормирована, т. е. равнялась единице. Интеграл (1) обладает следующим свойством *инвариантности*:

$$\int f(gg_0)\,dg = \int f(g)\,dg.$$

В самом деле, элемент gg_0 группы $SO(2)$ задается числом $\varphi+\varphi_0$. Поэтому

$$\int f(gg_0)\,dg = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi+\varphi_0)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

В силу периодичности $f(\varphi)$ отсюда вытекает, что

$$\int f(gg_0)\,dg = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \int f(g)\,dg.$$

2. Тригонометрическая система функций. Ряды Фурье. Мы доказали выше, что функции

$$\{e^{in\varphi}\}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, и n пробегает все целые числа, образуют полную систему попарно неэквивалентных унитарных представлений группы $SO(2)$. Поэтому в силу результатов п. 3 § 4 главы I эти функции образуют полную ортогональную нормированную систему функций на группе $SO(2)$ $\left(\text{относительно инвариантной нормированной меры } \frac{1}{2\pi}\,d\varphi\right)$. Иными словами,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\varphi}\overline{e^{in\varphi}}\,d\varphi = \delta_{mn}, \tag{2}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Кроме того, любая функция $f(\varphi)$ с интегрируемым квадратом на группе $SO(2)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}, \tag{3}$$

коэффициенты которого выражаются через $f(\varphi)$ по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi \tag{4}$$

(см. формулы (4) и (5) п. 3 § 4 главы I). Ряд (3) называют *рядом Фурье* функции $f(\varphi)$, а числа c_n — *коэффициентами Фурье* этой функции.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ пространство всех функций $f(\varphi)$ на группе $SO(2)$, имеющих интегрируемый квадрат.

Из полноты системы $\{e^{in\varphi}\}$ вытекает, что *для каждой функции* $f(\varphi)$ *из* $\mathfrak{H}$ *имеет место равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2\, d\varphi=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{5}$$

Таким образом, *пространство* $\mathfrak{H}$ *является прямой суммой одномерных пространств* $\mathfrak{H}_n$, *состоящих из функций вида* $\{a_n e^{in\varphi}\}$.

3. Разложение регулярного представления группы $SO(2)$. Рассмотрим теперь регулярное представление группы $SO(2)$. Согласно п. 4 § 2 главы I, это представление строится в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, с интегрируемым квадратом модуля, и задается формулой

$$R(g(\alpha))f(\varphi)=f(\varphi+\alpha). \tag{1}$$

Как было показано выше, пространство $\mathfrak{H}$ является прямой суммой одномерных пространств $\mathfrak{H}_n$, состоящих из функций вида $\{a_n e^{in\varphi}\}$. Легко видеть, что эти пространства инвариантны относительно операторов $R(g)$. В самом деле,

$$R(g(\alpha))\, e^{in\varphi}=e^{in(\varphi+\alpha)}=e^{in\alpha}e^{in\varphi}. \tag{2}$$

Кроме того, из равенства (2) следует, что оператор $R(g)$ индуцирует в каждом из пространств $\mathfrak{H}_n$ оператор $e^{in\alpha}$ унитарного неприводимого представления группы $SO(2)$. Тем самым нами доказана

Теорема 1. *Регулярное представление* $R(g)$ *группы* $SO(2)$ *является прямой суммой неприводимых унитарных представлений* $T_n(g)=e^{in\alpha}$ *этой группы, причем каждое из этих представлений входит в разложение регулярного представления по* *одному разу*:

$$R(g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(g). \tag{3}$$

4. Разложение бесконечно дифференцируемых функций. Во многих случаях недостаточно знать, что ряд Фурье функции $f(\varphi)$ сходится к ней в среднем, а надо иметь более сильные утверждения (например, об абсолютной и равномерной сходимости этого ряда). Такие утверждения справедливы, например, если функция $f(\varphi)$ бесконечно дифференцируема. Мы называем функцию $f(\varphi)$ на группе $SO(2)$ *бесконечно дифференцируемой*, если бесконечно дифференцируема соответствующая ей периодическая функция на вещественной оси. В частности, для таких функций при любом k должно выполняться равенство

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi). \tag{1}$$

Лемма 1. *Если функция $f(\varphi)$ на группе $SO(2)$ бесконечно дифференцируема, то ее коэффициенты Фурье быстро убывают, т. е. для всех k выполняется соотношение*

$$\lim_{|n| \to \infty} n^k c_n = 0. \tag{2}$$

В самом деле, интегрируя $k+1$ раз по частям формулу

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

получаем

$$c_n = \frac{i^{k+1}}{2\pi n^{k+1}} \int_0^{2\pi} f^{(k+1)}(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

(проинтегрированные члены обращаются в нуль в силу того, что $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi)$. Из бесконечной дифференцируемости функции $f(\varphi)$ вытекает существование интеграла в правой части этого равенства. Поэтому

$$\lim_{|n| \to \infty} n^k c_n = 0.$$

Из доказанной леммы следует

Теорема 1. *Если функция $f(\varphi)$ на группе $SO(2)$ бесконечно дифференцируема, то ряд Фурье этой функции абсолютно и равномерно сходится к $f(\varphi)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что для любого k имеем $c_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$. Поэтому ряд Фурье функции $f(\varphi)$ равномерно и абсолютно сходится. Так как он сходится в среднем к $f(\varphi)$, то его сумма равна $f(\varphi)$.

Существует много весьма тонких теорем о сходимости рядов Фурье. Нам, однако, понадобятся только теорема о сходимости в среднем и теорема о сходимости разложения бесконечно дифференцируемой функции.

Разумеется, если функция $f(\varphi)$ бесконечно дифференцируема, то абсолютно и равномерно сходятся и ряды Фурье всех ее производных. При этом коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(\varphi)$ равны $(in)^k c_n$, где c_n — коэффициенты Фурье для $f(\varphi)$.

Мы доказали, что коэффициенты Фурье бесконечно дифференцируемых функций быстро убывают. Справедливо и обратное утверждение.

Если коэффициенты Фурье c_n функции $f(\varphi)$ быстро убывают, то функция $f(\varphi)$ бесконечно дифференцируема.

В самом деле, из быстрого убывания коэффициентов Фурье вытекает, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k c_n e^{in\varphi}$$

абсолютно и равномерно сходится для всех k. Поэтому разложение Фурье $f(\varphi)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$ можно почленно дифференцировать любое число раз.

§ 3. Интеграл Фурье

1. Регулярное представление группы *R*. Вернемся к изучению представлений группы R — аддитивной группы вещественных чисел. В § 1 мы рассмотрели одномерные представления этой группы. Эти представления задавались комплексным параметром a и имели вид $T_a(g)\equiv T_a(x)=e^{ax}$. При чисто мнимом a, $a=i\lambda$ представление $T_a(x)$ унитарно. Здесь будет рассмотрено регулярное представление группы R и дано разложение этого представления на неприводимые унитарные представления $T_{i\lambda}(x)$.

Напомним, что согласно п. 4 § 2 главы I регулярное представление группы R строится в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(x)$, заданных на группе R (т. е. на вещественной оси $-\infty<x<\infty$), и таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx<+\infty. \tag{1}$$

Каждому элементу группы R, т. е. вещественному числу x_0, соответствует оператор $R(x_0)$, переводящий функцию $f(x)$ в

$$R(x_0)f(x)=f(x+x_0). \tag{2}$$

Как говорилось в главе I, $R(x)$ является регулярным представлением группы R.

Из-за того, что группа R некомпактна, разложение представления $R(x)$ на неприводимые сложнее, чем в случае группы $SO(2)$. Именно, получим не разложение пространства $\mathfrak{H}$ в ортогональную прямую сумму инвариантных подпространств, а лишь разложение $\mathfrak{H}$ в непрерывную прямую сумму. Иными словами, мы покажем, что каждая функция $f(x)$ из пространства $\mathfrak{H}$ может быть представлена в виде «непрерывной линейной комбинации» функций $e^{i\lambda x}$:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda, \quad -\infty<x<\infty. \tag{3}$$

Сравнивая эту запись с разложением в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}, \qquad 0\leqslant x<2\pi \tag{4}$$

видим, что $F(\lambda)$ аналогично коэффициенту Фурье c_n.

Из равенства (3) видно, что разложение функции $R(x_0)f(x)=$ $=f(x+x_0)$ имеет вид

$$R(x_0)f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{\lambda(x+x_0)}\, d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_0} F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{5}$$

Таким образом, при сдвиге $f(x)\to f(x+x_0)$ каждый «коэффициент Фурье» $F(\lambda)$ умножается на $e^{i\lambda x_0}$. Иными словами, при фиксированном λ оператору $R(x_0)$ соответствует оператор умножения на $e^{i\lambda x_0}$, т. е. оператор неприводимого унитарного представления группы R. Таким образом, разложение (3) дает разложение регулярного представления в непрерывную прямую сумму неприводимых унитарных представлений

$$R(x)=\int_{-\infty}^{\infty} T_{i\lambda}(x)\, d\lambda. \tag{6}$$

2. Преобразование Фурье и его свойства. В этом и следующих пунктах мы докажем возможность разложения функций $f(x)$ из пространства $\mathfrak{H}$, задаваемого формулой (3) п. 1. Пусть $F(\lambda)$ — непрерывная абсолютно интегрируемая функция. Назовем ее *преобразованием Фурье* функцию

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{1}$$

Интеграл (1) абсолютно сходится в силу абсолютной интегрируемости функции $F(\lambda)$.

Вообще говоря, преобразованием Фурье непрерывной абсолютно интегрируемой функции может оказаться неинтегрируемая функция. Для того чтобы получить симметричную теорию, надо ограничить класс изучаемых функций.

Назовем функцию $F(\lambda)$ *быстро убывающей* при $|\lambda|\to\infty$, если для любого n выполняется условие

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |\lambda|^n F(\lambda)=0. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на прямой, производные всех порядков которых быстро убывают при $|\lambda|\to\infty$. Примером функции из пространства $\mathfrak{S}$ является $e^{-\lambda^2}$.

Мы докажем сейчас, что преобразованием Фурье функции из пространства $\mathfrak{S}$ является функция того же пространства. Для этого докажем следующие две леммы.

Лемма 1. *Если функция $F(\lambda)$ быстро убывает, то ее преобразование Фурье бесконечно дифференцируемо.*

В самом деле, пусть

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{3}$$

Так как функция $F(\lambda)$ быстро убывает, то при любом k интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k F(\lambda)\, d\lambda$$

абсолютно сходится. Поэтому в правой части равенства (3) можно дифференцировать по x под знаком интеграла:

$$f^{(k)}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^k F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{4}$$

Тем самым доказана бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$.

Лемма 2. *Если функция $F(\lambda)$ бесконечно дифференцируема, причем все производные этой функции абсолютно интегрируемы и стремятся к нулю при $|\lambda|\to\infty$, то преобразование Фурье $f(x)$ функции $F(\lambda)$ быстро убывает при $|x|\to\infty$.*

В самом деле, интегрируя по частям $n+1$ раз равенство (3), получаем

$$f(x)=\frac{i^{n+1}}{x^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty} F^{(n+1)}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda \tag{5}$$

(проинтегрированные члены обращаются в нуль, поскольку, по условию, $\lim\limits_{|x|\to\infty} F^{(k)}(\lambda)=0$). По условию теоремы интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^{(n+1)}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

абсолютно сходится, следовательно,

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^n f(x) = 0.$$

Поэтому функция $f(x)$ быстро убывает при $|x| \to \infty$.

Из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 1. *Преобразование Фурье $f(x)$ функции $F(\lambda)$ из пространства $\mathfrak{S}$ является функцией того же пространства.*

3. Формула обращения. Нашей целью является теперь вывод формулы, позволяющей восстановить функцию $F(\lambda)$ по ее преобразованию Фурье $f(x)$. Сведем этот вопрос к аналогичному вопросу для рядов Фурье.

Функцию $\varphi(\lambda)$, заданную на вещественной оси, назовем *условно периодической* (с параметром t), если

$$\varphi(\lambda+1) = e^{-it}\varphi(\lambda). \tag{1}$$

При $t=0$ условно периодические функции переходят в обыкновенные периодические функции ($\varphi(\lambda+1) = \varphi(\lambda)$); при $t=\pi$ эти функции можно назвать *антипериодическими* ($\varphi(\lambda+1) = -\varphi(\lambda)$).

Пусть $F(\lambda)$ — функция пространства $\mathfrak{S}$ (т. е. пусть функция $F(\lambda)$ быстро убывает вместе с производными всех порядков). Положим

$$F_t(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda+n)\, e^{int}. \tag{2}$$

Из быстрого убывания функции $F(\lambda)$ вытекает, что ряд (2) абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$. При этом

$$F_t(\lambda+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda+n+1)\, e^{int} =$$

$$= e^{-it} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda+n)\, e^{int} = e^{-it} F_t(\lambda). \tag{3}$$

Поэтому функция $F_t(\lambda)$ является условно периодической (с параметром t). Далее очевидно, что ряды, полученные из ряда (2) почленным дифференцированием по t и по λ, также сходятся равномерно и абсолютно:

$$F_t^{(k)}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^{(k)}(\lambda+n)\, e^{int}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^k F_t(\lambda)}{\partial t^k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k F(\lambda+n)\, e^{int}. \tag{5}$$

Основную роль в выводе формулы обращения играет тот факт, что каждая функция $F(\lambda)$ из пространства $\mathfrak{S}$ может быть разложена по условно периодическим функциям, т. е. представлена в виде

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_t(\lambda)\,dt, \tag{6}$$

где $F_t(\lambda)$ — бесконечно дифференцируемые по λ и t условно периодические функции с периодом 1:

$$F_t(\lambda+1)=e^{-it}F_t(\lambda). \tag{7}$$

В самом деле, определим функции $F_t(\lambda)$ в соотношении (6) формулой (2). Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_t(\lambda)\,dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[F(\lambda+n)\int_0^{2\pi} e^{int}dt\right]=F(\lambda).$$

Таким образом, формулу (2) можно рассматривать как «формулу обращения» для даваемого формулой (6) разложения функции $F(\lambda)$ из пространства $\mathfrak{S}$ по условно периодическим функциям.

Воспользуемся теперь тем, что функции $F_t(\lambda)\,e^{it\lambda}$ являются бесконечно дифференцируемыми по λ периодическими функциями (с периодом 1). В силу теоремы 1 п. 4 § 2 их можно разложить в ряд Фурье

$$e^{it\lambda}F_t(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)\,e^{-2\pi in\lambda}, \tag{8}$$

причем этот ряд равномерно и абсолютно сходится к $e^{it\lambda}F_t(\lambda)$. Отсюда следует, что

$$F_t(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)\,e^{-i\lambda(t+2\pi n)}. \tag{9}$$

Коэффициенты $a_n(t)$ ряда (9) вычисляются по формулам Фурье

$$a_n(t)=\int_0^1 F_t(\lambda)\,e^{i\lambda(t+2\pi n)}d\lambda. \tag{10}$$

Покажем, что $a_n(t)=f(t+2\pi n)$, где $f(x)$ — преобразование Фурье функции $F(\lambda)$. Для этого подставим в равенство (10) вместо $F_t(\lambda)$ ряд (2) и изменим порядок интегрирования и суммирования (что возможно в силу быстрого убывания функции $F(\lambda)$). Получим

$$a_n(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 F(\lambda+m)\,e^{i(\lambda+m)(t+2\pi n)}d\lambda \tag{11}$$

(ради симметрии под знак интеграла введен множитель $e^{2\pi inm}$, равный 1). Если в равенстве (11) положить $\lambda+m=\mu$, то оно примет вид

$$a_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} F(\mu)\, e^{i\mu(t+2\pi n)} d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{i\mu(t+2\pi n)} d\mu = f(t+2\pi n). \quad (12)$$

Мы можем теперь доказать формулу обращения для преобразования Фурье, т. е. получить выражение функции $F(\lambda)$ через ее преобразование Фурье $f(x)$. Подставим выражение (9) для условно периодических функций в интеграл (6). Учитывая формулу (12), получим

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)\, e^{-i\lambda(t+2\pi n)} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+2\pi n)\, e^{-i\lambda(t+2\pi n)} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t+2\pi n)\, e^{-i\lambda(t+2\pi n)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx$$

(возможность изменения порядка интегрирования и суммирования вытекает из абсолютной сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$). Тем самым вывод формулы обращения для преобразования Фурье окончен.

Отметим, что формула обращения

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx \quad (13)$$

лишь несущественно отличается от формулы самого преобразования Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (14)$$

Отсюда сразу вытекает, что *образом пространства* $\mathfrak{S}$ *при отображении* $F(\lambda) \to f(x)$ *является все пространство* $\mathfrak{S}$. Именно, если $f(x)$ — функция из пространства $\mathfrak{S}$, она является преобразованием Фурье функции $2\pi\varphi(-\lambda)$, где $\varphi(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

4. Формула Планшереля. Докажем, что преобразование Фурье является (с точностью до постоянного множителя 2π) изометрическим отображением пространства $\mathfrak{S}$ на себя относительно нормы

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \, d\lambda.$$

Иными словами, покажем, что если $f(x)$ — преобразование Фурье функции $F(\lambda)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{1}$$

Для этого заметим, что в силу равенства Парсеваля имеет место соотношение

$$\int_0^1 |F_t(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(t)|^2. \tag{2}$$

Проинтегрируем это равенство по t от 0 до 2π (что возможно, так как сходящиеся к непрерывной функции ряды, состоящие из положительных функций, равномерно сходятся). Мы получим

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |F_t(t)|^2 d\lambda \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |a_n(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(t+2\pi n)|^2 \, dt =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx. \tag{3}$$

Нам осталось показать, что интеграл в левой части этого равенства совпадает (с точностью до множителя 2π) с $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \, d\lambda$, т. е. что для разложения (6) из п. 3 справедлива «формула Планшереля»:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |F_t(\lambda)|^2 dt \, d\lambda. \tag{4}$$

В самом деле, по формуле (2) п. 3 функции $F(\lambda+n)$ суть коэффициенты Фурье для $F_t(\lambda)$ (как функции от t) и, следовательно, в силу равенства Парсеваля,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_t(\lambda)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(\lambda+n)|^2.$$

Проинтегрируем это равенство по λ от 0 до 1. Мы получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|F_t(\lambda)|^2\,dt\,d\lambda=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1|F(\lambda+n)|^2\,d\lambda=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1}|F(\lambda)|^2\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

Тем самым равенство (4) доказано.

Из равенств (3) и (4) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2\,dy, \tag{5}$$

т. е. наше утверждение доказано.

5. Преобразование функций с интегрируемым квадратом. Мы можем теперь определить преобразование Фурье для функций $F(\lambda)$ с интегрируемым квадратом модуля. Для этого заметим сначала, что функции пространства $\mathfrak{S}$ всюду плотны в пространстве $\mathfrak{H}$ функций с интегрируемым квадратом. В самом деле, пусть $\varphi(\lambda)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная финитная функция, такая, что $\varphi(0)=1$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda=1$. Положим

$$F_n(\lambda)=n\varphi\left(\frac{\lambda}{n}\right)\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda-\tau)\,\varphi(n\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что все функции $F_n(\lambda)$ бесконечно дифференцируемы, финитны, и что последовательность функций $F_n(\lambda)$ сходится в среднем к функции $F(\lambda)$.

Итак, мы доказали, что функции пространства $\mathfrak{S}$ всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Но преобразование Фурье является изометрическим $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{2\pi}\right)$ отображением пространства $\mathfrak{S}$ на себя. Отсюда следует, что это преобразование можно продолжить по непрерывности на все пространство $\mathfrak{H}$.

Таким образом, каждой функции $F(\lambda)$ из пространства $\mathfrak{H}$ соответствует функция $f(x)$ из того же пространства — преобразование Фурье функции $F(\lambda)$. Эту функцию можно найти следующим образом: пусть $F_n(\lambda)$ — последовательность функций из пространства $\mathfrak{S}$, сходящаяся в среднем к функции $F(\lambda)$,

$$F(\lambda)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,F_n(\lambda)\,[1].$$

[1]) l. i. m. — предел в среднем.

Обозначим через $f_n(x)$ преобразование Фурье функции $F_n(\lambda)$. Тогда последовательность функций $f_n(x)$ сходится в среднем. Ее пределом и является $f(x)$.

Нетрудно доказать, что

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{n}^{n} F(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda \tag{2}$$

и

$$F(\lambda) = \text{l. i. m.} \int_{-n}^{n} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx. \tag{3}$$

Кроме того, для любой функции $F(\lambda)$ из $\mathfrak{H}$ имеет место равенство Планшереля,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \tag{4}$$

где оба интеграла понимаются в смысле сходимости в среднем.

6. Интеграл Фурье для функций нескольких переменных. Рассмотрим n-мерное линейное пространство R^n. Это пространство является прямой суммой n экземпляров группы R. Его неприводимые представления — это кронекеровские произведения неприводимых представлений $e^{\lambda x}$ группы R. Иными словами, любое неприводимое представление группы R^n задается n комплексными числами $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и имеет вид

$$T_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = e^{\lambda_1 x_1} \ldots e^{\lambda_n x_n} = e^{(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})}, \tag{1}$$

где

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n. \tag{2}$$

Если все числа λ_k чисто мнимые, то представление $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ унитарно.

Регулярное представление группы R^n разлагается на неприводимые точно так же, как в одномерном случае. Это разложение связано с интегралом Фурье для функций от n переменных.

Если $F(\boldsymbol{\lambda})$ — функция из пространства $\mathfrak{S}$ (т. е. бесконечно дифференцируемая функция на R^n, производные любого порядка которой быстро убывают), то интеграл

$$f(\mathbf{x}) = \int F(\boldsymbol{\lambda})\, e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda} \tag{3}$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вещественны) сходится для всех $\mathbf{x}$. Функция $f(\mathbf{x})$ называется *преобразованием Фурье* для $F(\boldsymbol{\lambda})$ и также принадлежит пространству $\mathfrak{S}$.

Формула обращения для преобразования (3) имеет вид

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\mathbf{x})\, e^{-i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}. \tag{4}$$

При этом выполняется равенство Планшереля:

$$\int |F(\boldsymbol{\lambda})|^2 d\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \tag{5}$$

С помощью этого равенства легко распространить преобразование Фурье на все функции $F(\boldsymbol{\lambda})$, имеющие интегрируемый квадрат модуля.

§ 4. Преобразование Фурье в комплексной области

1. Определение. Если функция $F(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathfrak{S}$, то ее преобразование Фурье

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda z} d\lambda \tag{1}$$

определено, вообще говоря, лишь для вещественных значений z. Однако, если функция $F(\lambda)$ экспоненциально убывает на бесконечности, интеграл (1) имеет смысл и для некоторых комплексных значений z.

В самом деле, пусть при $\lambda \to +\infty$ имеем $F(\lambda)=O(e^{-a\lambda})$, где a — некоторое фиксированное число. Тогда интеграл (1) сходится в полосе $-a<\operatorname{Im} z \leqslant 0$. Именно, если $z=x+iy$, где $-a<y\leqslant 0$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что $|e^{i\lambda z}|<e^{(a-\varepsilon)\lambda}$, а тогда при $-a<y\leqslant 0$, $\lambda>0$ имеем

$$|F(\lambda)\, e^{i\lambda z}|<Ce^{-\varepsilon\lambda}.$$

Следовательно, интеграл (1) сходится на положительной полуоси. Сходимость же на отрицательной полуоси вытекает из того, что при $F(\lambda)\in\mathfrak{S}$, $\lambda<0$, $\operatorname{Im} z\leqslant 0$ функция $F(\lambda)\, e^{i\lambda z}$ быстро убывает.

Точно так же, если при $\lambda\to-\infty$ имеем $F(\lambda)=O(e^{b\lambda})$, то интеграл (1) сходится для значений z, принадлежащих полосе $0\leqslant \operatorname{Im} z<b$. Итак, мы доказали, что если $F(\lambda)\in\mathfrak{S}$ и

$$F(\lambda)=\begin{cases} O(e^{-a\lambda}), & \lambda\to+\infty, \quad a>0,\\ O(e^{b\lambda}), & \lambda\to-\infty, \quad b>0,\end{cases} \tag{2}$$

то интеграл (1) определен в полосе $-a<\operatorname{Im} z<b$. В этом случае говорят, что преобразование Фурье $f(z)$ функции $F(\lambda)$ определено в указанной полосе. Ясно, что оно является в этой полосе аналитической функцией от z.

Если бесконечно дифференцируемая функция $F(\lambda)$ финитна, т. е. равна нулю при $|\lambda|>a$, интеграл (1) сходится во всей комплексной плоскости, а потому функция $f(z)$ является целой аналитической функцией. Для любого $b>a$ выполняется при этом неравенство

$$|f(x+iy)|<Ce^{b|y|}. \tag{3}$$

В самом деле, так как при $|\lambda|>a$ имеем $F(\lambda)=0$, то

$$|f(x+iy)|\leqslant\int_{-a}^{a}|F(\lambda)|\, e^{-\lambda y}d\lambda=e^{b|y|}\int_{-a}^{a}|F(\lambda)|e^{-b|y|-\lambda y}\,d\lambda.$$

Так как $b>a\geqslant|\lambda|$, то $e^{-b|y|-\lambda y}\leqslant 1$, и потому

$$|f(x+iy)|<Ce^{b|y|}.$$

Целые аналитические функции, удовлетворяющие при некотором $b>0$ неравенству вида (3), называются *целыми аналитическими функциями экспоненциального типа.*

Мы доказали, таким образом, что *преобразование Фурье бесконечно дифференцируемой финитной функции является целой аналитической функцией экспоненциального типа.* При этом, поскольку $F(\lambda)\in\mathfrak{S}$, *функция $f(z)$, рассматриваемая на вещественной оси, принадлежит пространству $\mathfrak{S}$* (см. п. 3 § 3).

Можно доказать справедливость обратного утверждения:

Если $f(z)$ — целая аналитическая функция экспоненциального типа, причем функция $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, принадлежит пространству $\mathfrak{S}$, то $f(z)$ является преобразованием Фурье бесконечно дифференцируемой финитной функции (см. [18]).

Покажем теперь, что если функция $F(\lambda)$ удовлетворяет условиям (2), то контур интегрирования в формуле обращения Фурье

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{-i\lambda z}\,dz$$

можно заменить любым параллельным ему контуром, лежащим в полосе $-a<\operatorname{Im} z<b$, т. е. имеет место формула

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ci}^{\infty+ci} f(z)\,e^{-i\lambda z}dz, \tag{4}$$

где $-a<c<b$.

В самом деле, из условия (2) вытекает, что при $-a<c<b$ функция $e^{-\lambda c}F(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathfrak{S}$. Преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$f_c(z)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,e^{-\lambda c+i\lambda z}\,d\lambda=f(z+ic).$$

В силу формулы обращения Фурье имеем

$$e^{-\lambda c}F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z+ic)\,e^{-i\lambda z}dz.$$

Сделав в этом интеграле подстановку $w=z+ic$, мы получим доказываемое равенство (4).

Для финитных функций $\Phi(\lambda)$ мы будем часто писать преобразование Фурье в виде

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)\,e^{\lambda z}d\lambda. \tag{5}$$

В этом случае формула обращения пишется так:

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\varphi(z)\,e^{-\lambda z}dz. \tag{6}$$

2. Преобразование функций с интегрируемым квадратом. Как и в случае вещественных переменных, преобразование Фурье в комплексной области можно распространить на класс функций с интегрируемым квадратом. Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $F(\lambda)$ — измеримая функция, имеющая суммируемый квадрат на каждом конечном отрезке, и такая, что*

$$F(\lambda)=\begin{cases} O(e^{-a\lambda}), & \lambda\to\infty,\\ O(e^{b\lambda}), & \lambda\to-\infty.\end{cases} \tag{1}$$

Тогда интеграл

$$f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,e^{i\lambda z}d\lambda \tag{2}$$

абсолютно и равномерно сходится в каждой полосе $a+\varepsilon<y<b-\varepsilon$, $z=x+iy$, $\varepsilon>0$.

Функция $f(z)$ аналитически зависит от z в полосе $-a<y<b$, причем в каждой полосе $-a+\varepsilon<y<b-\varepsilon$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx \tag{3}$$

ограничен.

Абсолютная и равномерная сходимость интеграла (2) и, следовательно, аналитичность функции $f(z)$ непосредственно вытекают из оценок (1). Чтобы доказать ограниченность интеграла (3) в полосе $-a+\varepsilon<y<b-\varepsilon$, применим формулу Планшереля к функции $F(\lambda)\,e^{-\lambda y}$. Преобразование Фурье $f(x, y)$ этой функции имеет вид

$$f(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,e^{-\lambda y}e^{i\lambda x}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,e^{i\lambda(x+iy)}\,d\lambda=f(x+iy).$$

Поэтому при $-a+\varepsilon<y<b-\varepsilon$ имеем в силу оценок (1)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x, y)|^2\,dx=$$

$$=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)\,e^{-\lambda y}|^2\,d\lambda\leqslant C_1\int\limits_{0}^{\infty}e^{-2\varepsilon\lambda}d\lambda+C_2\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2\varepsilon\lambda}d\lambda<C.$$

Теорема обращения в рассматриваемом случае формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в полосе $-a\leqslant y\leqslant b$ и на ее границе, где $a>0$, $b>0$, и пусть*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx<C,\qquad -a\leqslant y\leqslant b. \tag{4}$$

Тогда функция $f(z)$ ограничена в каждой внутренней полосе $-a+\varepsilon \leqslant \leqslant y \leqslant b-\varepsilon$ и существует такая функция $F(\lambda)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)e^{a\lambda}|^2 d\lambda < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)e^{-b\lambda}|^2 d\lambda < +\infty.$$

При этом на отрезке $-a \leqslant y \leqslant b$ имеем

$$f(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda(x+iy)} d\lambda, \tag{5}$$

где интеграл понимается в смысле сходимости в среднем. Функция $F(\lambda)$ выражается через $f(z)$ по формуле

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx, \tag{6}$$

где интеграл также понимается в смысле сходимости в среднем.

Доказательство этой теоремы лишь немногим сложнее доказательства теоремы 1.

Исследуем теперь преобразования Фурье функций, заданных на полупрямой $0 \leqslant \lambda < \infty$. Из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)e^{-\lambda y}|^2 d\lambda \tag{7}$$

вытекает, что функция $f(x+iy)$ аналитична в верхней полуплоскости и имеет интегрируемый квадрат модуля для всех $y \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда для всех $y \geqslant 0$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)e^{-\lambda y}|^2 d\lambda.$$

При этом интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx$ ограничен по y тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)e^{-\lambda y}|^2 d\lambda \tag{8}$$

ограничен на полупрямой $0 \leqslant y < +\infty$.

Но интеграл (7) ограничен на полупрямой $0 \leqslant y < +\infty$ тогда и только тогда, когда $F(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$ и $\int_0^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda < +\infty$. В самом деле, если эти условия выполнены, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)e^{-\lambda y}|^2 d\lambda \leqslant \int_0^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

С другой стороны, если $F(\lambda)$ не равно нулю на множестве положительной меры, лежащем на полупрямой $-\infty < \lambda \leqslant 0$, то найдется отрезок

$[-a, -b]$, $b>0$, такой, что

$$\int_{-a}^{-b} |F(\lambda)|^2 \, d\lambda = l > 0.$$

В этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda) e^{-\lambda y}|^2 \, d\lambda > \int_{-a}^{-b} |F(\lambda) e^{-\lambda y}|^2 \, d\lambda >$$
$$> e^{2by} \int_{-a}^{-b} |F(\lambda)|^2 \, d\lambda = e^{2by} l \to \infty \qquad \text{при } b \to \infty,$$

что противоречит ограниченности интеграла (8). Чтобы доказать сходимость $\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, d\lambda$, достаточно положить в равенстве (7) $y=0$.

Мы доказали, таким образом, следующую теорему:

Теорема 3. *Класс функций $f(x+iy)$, аналитических при $y>0$ и таких, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dx < C, \qquad y>0, \tag{9}$$

совпадает с классом функций, представимых в виде

$$f(z) = \int_0^\infty F(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda, \tag{10}$$

где интеграл сходится в среднем и

$$\int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty. \tag{11}$$

При этом

$$\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{y \to +0} f(x+iy) = \int_0^\infty F(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda, \tag{12}$$

где интеграл понимается в смысле сходимости в среднем.

При дополнительных условиях гладкости и быстрого убывания, накладываемых на функцию $F(\lambda)$, предел в среднем в равенствах (10) и (12) может быть заменен обычным пределом.

3. Преобразование Меллина. Сопоставим с каждой функцией $F(\lambda)$ на оси $-\infty<\lambda<\infty$ функцию $\Phi(t)=F(\ln t)$, заданную на полуоси $0<t<\infty$. Выясним, что̀ соответствует при таком отображении преобразованию Фурье. Для этого сделаем в формуле

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda z} \, d\lambda \tag{1}$$

подстановку $\lambda = \ln t$. Мы получим

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) t^{iz-1} \, dt. \tag{2}$$

Формула обращения примет при этом вид

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, t^{-ix}\, dx. \tag{3}$$

Если функция $F(\lambda)$ такова, что ее преобразование Фурье можно продолжить в комплексную область, то и преобразование (2) можно продолжить в комплексную область и формула обращения принимает вид

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ci}^{\infty+ci} f(z)\, t^{-iz}\, dz. \tag{4}$$

Предположим теперь, что функция $\Phi(t)$ бесконечно дифференцируема на полуоси $0<t<\infty$, причем функции $t^{c_1-1}\Phi(t)$ и $t^{-c_2-1}\Phi(t)$, $c_1>0$, $c_2>0$, суммируемы. Тогда функция $f(z)$, $z=x+iy$, определена в полосе $-c_1<y<c_2$. Обозначим iz через w, $w=u+iv$, и положим $f(-iw)=\mathfrak{F}(w)$. Тогда преобразование (2) примет следующий вид:

$$\mathfrak{F}(w)=\int_{0}^{\infty}\Phi(t)\, t^{w-1}\, dt. \tag{5}$$

Формула же обращения запишется в виде

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\mathfrak{F}(w)\, t^{-w}\, dw. \tag{6}$$

При этом вместо мнимой оси можно интегрировать по любой прямой, параллельной этой оси и проходящей в полосе $-c_2<u<c_1$. Иными словами,

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{F}(w)\, t^{-w}\, dw, \quad -c_2<c<c_1. \tag{7}$$

Формулу (5) называют *преобразованием Меллина*, а (6) — *формулой обращения* для этого преобразования. Это преобразование связано с представлениями группы R_+ положительных чисел, в которой групповой операцией является умножение чисел.

Из теоремы Планшереля для преобразования Фурье без труда вытекает следующее равенство для преобразования Меллина:

$$\int_{0}^{\infty}|\Phi(t)|^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{F}(iy)|^2\, dy. \tag{8}$$

Мы будем называть его *аналогом формулы Планшереля* для этого преобразования.

Формула (8) позволяет распространить преобразование Меллина на все функции $\Phi(t)$, для которых сходится интеграл

$$\|\Phi\|^2 = \int_0^\infty |\Phi(t)|^2 \frac{dt}{t}. \tag{9}$$

При этом интегралы в формулах (5), (6) надо понимать в смысле сходимости в среднем.

С преобразованием Меллина связано следующее интегральное преобразование. Предположим, что в формулах Меллина функция $\Phi(t)$ аналитична в точке $t=0$ и в области, содержащей положительную вещественную полуось. Рассмотрим интеграл

$$\int_\Gamma \Phi(z)(-z)^{w-1}\,dz, \tag{10}$$

где $(-z)^{w-1}$ определено как $e^{(w-1)\ln(-z)}$, причем $\ln(-z)$ принимает вещественные значения на отрицательной вещественной полуоси, а Γ — контур, идущий из бесконечности параллельно положительной вещественной оси, обходящий точку $z=0$ в положительном направлении и затем снова возвращающийся в бесконечность параллельно положительной вещественной полуоси. Будем стягивать Γ к вещественной оси. Часть контура Γ, лежащая над вещественной осью, даст

$$\int_{-\infty}^\infty \Phi(t)\,e^{(w-1)(\ln t - i\pi)}\,dt = e^{-iw\pi}\int_0^\infty \Phi(t)\,t^{w-1}\,dt,$$

а часть, лежащая под вещественной осью, даст

$$\int_0^\infty \Phi(t)\,e^{(w-1)(\ln t + i\pi)}\,dt = -e^{iw\pi}\int_0^\infty \Phi(t)\,t^{w-1}\,dt.$$

Поэтому

$$\int_\Gamma \Phi(z)(-z)^{w-1}\,dz = -2i\sin w\pi\mathfrak{F}(w). \tag{11}$$

Полагая

$$\pi\chi(w) = \mathfrak{F}(w)\sin\pi w,$$

мы получаем двойственные формулы:

$$\chi(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Phi(z)(-z)^{w-1}\,dz, \tag{12}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\chi(w)\,z^{-w}}{\sin\pi w}\,dw. \tag{13}$$

ГЛАВА III

ГРУППА УНИТАРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА И МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА И ЯКОБИ

В этой главе будут рассмотрены представления группы $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц второго порядка, тесно связанной с группой вращений трехмерного евклидова пространства. Мы увидим, что при соответствующем выборе базиса в пространстве представления матричные элементы представлений этой группы выражаются через многочлены Якоби. При этом зональные сферические функции (см. п. 5 § 2 главы I) выражаются через многочлены Лежандра, а присоединенные сферические функции — через присоединенные многочлены Лежандра. Исходя из связи между матричными элементами представлений группы $SU(2)$ и ортогональными многочленами Якоби и Лежандра, будет выведен ряд свойств этих многочленов.

§ 1. Группа $SU(2)$

1. Параметризация. Обозначим через $SU(2)$ множество унитарных унимодулярных матриц второго порядка. Иными словами, $SU(2)$ состоит из таких матриц $u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, что $u^*=u^{-1}$ и $\operatorname{Det} u=1$ (через u^* обозначена матрица, эрмитово сопряженная с матрицей u). Если $u_1 \in SU(2)$ и $u_2 \in SU(2)$, то

$$(u_1u_2)^*=u_2^*u_1^*=u_2^{-1}u_1^{-1}=(u_1u_2)^{-1}$$

и

$$\operatorname{Det}(u_1u_2)=1.$$

Поэтому $u_1u_2 \in SU(2)$. Легко показать, что и $u_1^{-1} \in SU(2)$. Отсюда следует, что *множество матриц $SU(2)$ является группой.*

Пусть матрица $u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ принадлежит группе $SU(2)$. Поскольку $u^*=\begin{pmatrix}\bar\alpha & \bar\gamma\\ \bar\beta & \bar\delta\end{pmatrix}$ и $u^{-1}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$, то равенство $u^*=u^{-1}$ равносильно соотношениям $\delta = \bar{\alpha}$ и $\gamma = -\bar{\beta}$. Таким образом, любая матрица u из $SU(2)$ имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Так как $\operatorname{Det} u = 1$, то $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Обратно, если u — матрица вида (1), причем $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, то u принадлежит группе $SU(2)$.

Итак, *каждый элемент u группы $SU(2)$ однозначно определяется парой комплексных чисел* (α, β), *таких, что* $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Если положить $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, то из равенства $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ следует $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 = 1$. Отсюда получаем, что *группа $SU(2)$, как топологическое пространство, гомеоморфна сфере в четырехмерном вещественном пространстве.*

Комплексные числа (α, β), такие, что $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, задаются тремя параметрами. В качестве этих параметров можно взять, например, $|\alpha|$, $\arg\alpha$ и $\arg\beta$. Если $\alpha\beta \neq 0$, то вместо этих параметров удобнее взять другие, называемые *углами Эйлера*. Параметры φ, θ, ψ связаны с $|\alpha|$, $\arg\alpha$, $\arg\beta$ следующими соотношениями:

$$|\alpha| = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \operatorname{Arg}\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}\beta = \frac{\varphi - \psi + \pi}{2}. \tag{2}$$

Значения параметров φ, θ, ψ не определены однозначно равенствами (2). Мы потребуем дополнительно, чтобы эти параметры принадлежали области

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad -2\pi \leqslant \psi < 2\pi. \tag{3}$$

Легко проверить, что каждым двум комплексным числам (α, β), таким, что $\alpha\beta \neq 0$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, соответствует одна и только одна точка (φ, θ, ψ) этой области, для которой выполняются равенства (2).

Углы Эйлера φ, θ, ψ аналогичны географическим координатам на сфере трехмерного евклидова пространства. Подобно тому как на этой сфере географические координаты неоднозначно определены в северном и южном полюсах, параметры φ, θ, ψ неоднозначно определены, если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Однако множество матриц, для которых введенная параметризация неоднозначна, имеет меньшую размерность, чем вся группа $SU(2)$.

Из формул (2) вытекает, что $|\beta| = \sin\frac{\theta}{2}$, и что матрица $u = u(\varphi, \theta, \psi)$ с заданными углами Эйлера имеет следующий вид:

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\psi-\varphi)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из соотношений (1) и (4) непосредственно следует, что

$$\cos\theta = 2|\alpha|^2 - 1, \tag{5}$$

$$e^{i\varphi} = -\frac{\alpha\beta i}{|\alpha||\beta|}, \tag{5'}$$

$$e^{\frac{i\psi}{2}} = \frac{\alpha e^{-\frac{i\varphi}{2}}}{|\alpha|}. \tag{5''}$$

В дальнейшем важную роль будет играть следующее разложение унитарных матриц, непосредственно вытекающее из равенства (4):

$$u(\varphi,\ \theta,\ \psi) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv u(\varphi,\ 0,\ 0)\, u(0,\ \theta,\ 0)\, u(0,\ 0,\ \psi)\,^{1)}. \tag{6}$$

Диагональные матрицы $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$ образуют однопараметрическую подгруппу в группе $SU(2)$. Таким образом, каждая матрица u из $SU(2)$ лежит в двустороннем классе смежности по этой подгруппе, содержащем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Заметим, что матрицы вида (7) также образуют однопараметрическую подгруппу в $SU(2)$.

2. Углы Эйлера произведения двух матриц. Пусть $u = u_1 u_2$ — произведение двух матриц u_1 и u_2 из $SU(2)$. Обозначим углы Эйлера матрицы u через φ, θ, ψ, матрицы u_1 через φ_1, θ_1, ψ_1, и матрицы u_2 через φ_2, θ_2, ψ_2. Выразим углы Эйлера матрицы u через углы Эйлера сомножителей.

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = 0$. В этом случае имеем

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & i\sin\frac{\theta_1}{2} \\ i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i\varphi_2}{2}} & i\sin\frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i\varphi_2}{2}} \\ i\sin\frac{\theta_2}{2} e^{-\frac{i\varphi_2}{2}} & \cos\frac{\theta_2}{2} e^{-\frac{i\varphi_2}{2}} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) Заметим, что $u(\psi,\ 0,\ 0) = u(0,\ 0,\ \psi)$.

Перемножив матрицы в правой части равенства и применив формулы (5) и (5′) п. 1, получим

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2, \tag{2}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 + i\sin\theta_2\sin\varphi_2}{\sin\theta}, \tag{2′}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\varphi_2}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{2″}$$

Из равенств (2′) и (2″) после несложных преобразований, вытекает, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta_2\sin\varphi_2}{\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2}, \tag{3′}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\theta_1\sin\varphi_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\varphi_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}. \tag{3″}$$

Однако равенства (3′) и (3″) не определяют однозначно φ и ψ в области $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-2\pi \leqslant \psi < 2\pi$.

Итак, поставленная задача решена в частном случае, когда $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = 0$. Переход к общему случаю не составляет труда. В самом деле, в силу равенства (6) из п. 1 имеем

$$u(\varphi_1, \theta_1, \psi_1)\,u(\varphi_2, \theta_2, \psi_2) =$$
$$= u(\varphi_1, 0, 0)\,u(0, \theta_1, 0)\,u(0, 0, \psi_1)\,u(\varphi_2, 0, 0)\,u(0, \theta_2, 0)\,u(0, 0, \psi_2). \tag{4}$$

Но очевидно, что

$$u(0, 0, \psi_1)\,u(\varphi_2, 0, 0) = u(\varphi_2 + \psi_1, 0, 0). \tag{5}$$

Кроме того, при умножении матрицы $u(\varphi, \theta, \psi)$ слева на матрицу $u(\varphi_1, 0, 0)$ угол Эйлера φ увеличивается на φ_1, а остальные углы Эйлера остаются неизменными. Аналогично, при умножении матрицы $u(\varphi, \theta, \psi)$ на $u(0, 0, \psi_2)$ справа увеличивается на ψ_2 угол Эйлера ψ.

Отсюда вытекает, что в общем случае формулы для углов Эйлера имеют тот же вид, что и формулы (2)—(2″) с той лишь разницей, что угол φ_2 надо заменить на $\varphi_2 + \psi_1$, а углы φ и ψ на $\varphi - \varphi_1$ и $\psi - \psi_2$. Предоставляем читателю выписать окончательные формулы.

3. Алгебра Ли. Поскольку каждый элемент группы $SU(2)$ задается тремя параметрами φ, θ, ψ, эта группа является трехмерным многообразием в линейном пространстве всех матриц второго порядка $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Построим касательное пространство к $SU(2)$ в точке $e = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Для этого проведем через точку e три кривые и найдем касательные векторы к этим кривым. Если кривые выбраны так, что касательные векторы к ним линейно независимы, то эти касательные векторы и дадут базис касательного пространства к $SU(2)$ в точке e.

В качестве кривых, проходящих через точку e, удобнее всего выбрать однопараметрические подгруппы, т. е. выбрать такие кривые $g(t)$, что

$$g(t+s)=g(t)\,g(s), \qquad -\infty<t,s<\infty. \tag{1}$$

Возьмем следующие три однопараметрические подгруппы: совокупность Ω_1 матриц вида

$$\omega_1(t)=\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \tag{1'}$$

совокупность Ω_2 матриц вида

$$\omega_2(t)=\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

и совокупность Ω_3 диагональных матриц

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Простой подсчет показывает, что касательные матрицы a_1, a_2, a_3 этих подгрупп имеют следующий вид:

$$a_1=\left.\frac{d\omega_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$a_2=\left.\frac{d\omega_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$a_3=\left.\frac{d\omega_3(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрицы a_1, a_2, a_3 линейно независимы и, следовательно, образуют базис алгебры Ли группы $SU(2)$. Алгебра Ли этой группы состоит, таким образом, из матриц $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$, где x_1, x_2, x_3 — вещественные числа.

Соотношения коммутации для матриц a_1, a_2, a_3 имеют следующий вид:

$$[a_1,\ a_2]=a_3, \tag{7}$$

$$[a_2,\ a_3]=a_1, \tag{7'}$$

$$[a_3,\ a_1]=a_2. \tag{7''}$$

Соотношения (7), (7′), (7″) допускают простое геометрическое истолкование: они совпадают с формулами для векторного произведения координатных ортов трехмерного евклидова пространства. Отсюда следует, что если

$$a = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \quad \text{и} \quad b = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3 \text{ —}$$

две матрицы из алгебры Ли группы $SU(2)$, то

$$[a, b] = z_1a_1 + z_2a_2 + z_3a_3,$$

где вектор (z_1, z_2, z_3) — векторное произведение векторов (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3).

4. Комплексификация. Рассмотрим теперь комплексификацию алгебры Ли группы $SU(2)$, т. е. комплексное линейное пространство, натянутое на матрицы a_1, a_2, a_3. Поскольку следы матриц a_1, a_2, a_3 равны нулю, то все матрицы из этого линейного пространства также имеют нулевые следы. С другой стороны, очевидно, что любая матрица второго порядка с нулевым следом является линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) матриц a_1, a_2, a_3. Таким образом, *комплексификацией алгебры Ли группы $SU(2)$ является пространство комплексных матриц второго порядка, след которых равен нулю.* Но след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей, а потому след коммутатора любых двух матриц равен нулю. Отсюда вытекает, что комплексные матрицы, след которых равен нулю, образуют вещественную алгебру Ли. Базисом этой алгебры являются матрицы a_1, a_2, a_3, ia_1, ia_2, ia_3.

Покажем, что построенная алгебра является касательным пространством в точке $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к группе $SL(2, C)$ всех унимодулярных комплексных матриц второго порядка. В самом деле, пусть

$$g(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

— однопараметрическая подгруппа группы $SL(2, C)$. Тогда для всех t имеем

$$\alpha(t)\,\delta(t) - \beta(t)\,\gamma(t) = 1.$$

Продифференцируем это тождество по t и положим $t = 0$. Так как $g(0) = e$ и потому $\alpha(0) = \delta(0) = 1$, $\beta(0) = \gamma(0) = 0$, то $\alpha'(0) + \delta'(0) = 0$. Таким образом, *касательные матрицы к однопараметрическим подгруппам группы $SL(2, C)$ имеют нулевой след.*

Чтобы завершить доказательство нашего утверждения, осталось показать, что размерность алгебры Ли группы $SL(2, C)$ совпадает с размерностью пространства матриц с нулевым следом. Но матрицы с нулевым следом являются линейными комбинациями матриц a_1, a_2, a_3 и потому комплексная размерность пространства таких матриц равна 3. С другой стороны, в силу соотношения $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ каждый элемент группы $SL(2, C)$ определяется тремя комплексными параметрами (например, при $\gamma \neq 0$ параметрами α, γ, δ), а потому комплексная размерность алгебры Ли этой группы также равна 3. Тем самым наше утверждение полностью доказано: *алгеброй Ли группы $SL(2, C)$ является пространство всех комплексных матриц второго порядка, след которых равен нулю.*

Группа $SL(2, C)$ называется *комплексификацией* группы $SU(2)$, а группа $SU(2)$ — одной из вещественных форм группы $SL(2, C)$. Укажем непосредственный переход от группы $SU(2)$ к группе $SL(2, C)$. Как было показано выше, каждый элемент u группы $SU(2)$ определяется тремя вещественными параметрами φ, θ, ψ — углами Эйлера. При этом матрица с углами

Эйлера φ, θ, ψ имеет вид (4) из п. 1. Придадим углам Эйлера φ, θ, ψ комплексные значения. Нетрудно показать, что тогда матрицы вида (4) из п. 1 будут унимодулярными комплексными матрицами второго порядка. При этом любая матрица из $SL(2, C)$ может быть представлена в таком виде. Это представление однозначно почти для всех элементов группы $SL(2, C)$, если ограничиться значениями параметров φ, θ, ψ, принадлежащими области

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \operatorname{Re}\theta \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \operatorname{Re}\varphi < 2\pi, \\ -2\pi \leqslant \operatorname{Re}\psi < 2\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Иными словами, когда φ, θ, ψ меняются в этой области, матрица $g(\varphi, \theta, \psi)$ пробегает всю группу $SL(2, C)$, причем почти все (т. е. все с точностью до множества меньшей размерности) матрицы g из $SL(2, C)$ встречаются только один раз.

Мы будем называть числа φ, θ, ψ *комплексными углами Эйлера матрицы* g. Разумеется, выведенные в п. 2 формулы для вычисления углов Эйлера произведения двух матриц сохраняют силу и после комплексификации группы $SU(2)$.

5. Связь с группой вращений. *Вращением* g трехмерного евклидова пространства называют линейное преобразование этого пространства, сохраняющее расстояние между точками пространства и началом координат и не меняющее ориентацию этого пространства. Множество $SO(3)$ всех вращений является группой. Очевидно, что группа $SO(3)$ изоморфна группе вещественных ортогональных матриц третьего порядка, определитель которых равен 1.

Установим связь между группами $SU(2)$ и $SO(3)$. С этой целью поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ трехмерного евклидова пространства комплексную матрицу второго порядка вида

$$h_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Пространство матриц вида (1) состоит из всех эрмитовых матриц g, след которых равен нулю.

Далее, поставим в соответствие каждой матрице u из группы $SU(2)$ преобразование $T(u)$, переводящее матрицу $h_{\mathbf{x}}$ вида (1) в матрицу

$$T(u)\, h_{\mathbf{x}} = u h_{\mathbf{x}} u^*. \qquad (2)$$

Поскольку для унитарных матриц $u^* = u^{-1}$, то следы матриц $h_{\mathbf{x}}$ и $T(u)\, h_{\mathbf{x}} = u h_{\mathbf{x}} u^{-1}$ совпадают, а потому след матрицы $T(u)\, h_{\mathbf{x}}$ равен нулю. Кроме того,

$$(T(u)\, h_{\mathbf{x}})^* = (u h_{\mathbf{x}} u^*)^* = u h_{\mathbf{x}}^* u^* = u h_{\mathbf{x}} u^* = T(u)\, h_{\mathbf{x}}, \qquad (3)$$

и потому матрица $T(u)\, h_{\mathbf{x}}$ эрмитова. Следовательно, эта матрица имеет вид

$$T(u)\, h_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} y_3 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & -y_3 \end{pmatrix} = h_{\mathbf{y}}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ — вектор из трехмерного евклидова пространства.

Из равенства (2) видно, что координаты вектора **y** являются линейными комбинациями координат вектора **x**, а потому $T(u)$ можно рассматривать как линейное преобразование в трехмерном евклидовом пространстве. Покажем, что это преобразование является вращением евклидова пространства. Для этого заметим, что $\operatorname{Det} h_{\mathbf{x}} = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, и потому $-\operatorname{Det} h_{\mathbf{x}}$ равен расстоянию точки $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ от начала координат. Но $u^* = u^{-1}$, и потому

$$\operatorname{Det} T(u) h_{\mathbf{x}} = \operatorname{Det}(u h_{\mathbf{x}} u^*) = \operatorname{Det} h_{\mathbf{x}}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что преобразование $T(u)$ не меняет $\operatorname{Det} h_{\mathbf{x}}$ и, следовательно, оставляет неизменным расстояние точек евклидова пространства от начала координат. Наконец, нетрудно проверить, что определитель преобразования $T(u)$ в евклидовом пространстве равен 1, и потому это преобразование не меняет ориентации.

Итак, каждой унитарной унимодулярной матрице u мы поставили в соответствие вращение $T(u)$ в трехмерном евклидовом пространстве. Легко показать, что $T(u)$ является гомоморфным отображением группы $SU(2)$ на всю группу $SO(3)$, причем ядро гомоморфизма состоит из двух матриц e и $-e$.

Поскольку отображение $T(u)$ взаимно однозначно на достаточно малой окрестности единицы группы $SU(2)$, говорят, что группы $SU(2)$ и $SO(3)$ *локально изоморфны*.

Установленная выше связь групп $SU(2)$ и $SO(3)$ допускает простое геометрическое истолкование. Именно, рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве сферу

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{4}. \tag{6}$$

Каждой точке этой сферы поставим в соответствие ее образ $M\left(x_1, x_2, -\frac{1}{2}\right)$ при стереографической проекции сферы на плоскость $x_3 = -\frac{1}{2}$ из точки $N\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ или, что то же, комплексное число $w = x_1 + ix_2$. Можно показать, что дробно-линейному преобразованию

$$\hat{w} = \frac{\alpha w - \bar{\beta}}{\beta w + \bar{\alpha}}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{7}$$

плоскости $z = -\frac{1}{2}$ соответствует при этом вращение g сферы, причем

$$g = T(u), \quad u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

6. Углы Эйлера вращений. Из установленного выше локального изоморфизма групп $SU(2)$ и $SO(3)$ вытекает, что вращения трехмерного евклидова пространства можно задавать тремя углами Эйлера φ, θ, ψ. При этом, в отличие от группы $SU(2)$, угол Эйлера ψ

меняется в пределах от 0 до 2π (а не от -2π до 2π). Это связано с тем, что матрицам u и $-u$ соответствует одно и то же вращение трехмерного пространства.

Выясним геометрический смысл углов Эйлера для вращений трехмерного пространства. Легко проверить, что матрицам вида

$$\omega_1(t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix} \tag{1}$$

соответствуют вращения трехмерного евклидова пространства на угол t вокруг оси Ox_1, матрицам

$$\omega_2(t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix} \tag{2}$$

— вращения на угол t вокруг оси Ox_2 и, наконец, матрицам

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix}e^{\frac{it}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix} \tag{3}$$

— вращения на угол t вокруг оси Ox_3.

Но в п. 1 было показано, что матрица u из $SU(2)$, соответствующая углам Эйлера φ, θ, ψ, имеет вид

$$u(\varphi,\ \theta,\ \psi)=u(\varphi,\ 0,\ 0)\,u(0,\ \theta,\ 0)\,u(\psi,\ 0,\ 0),$$

где $u(\varphi, 0, 0)$ и $u(\psi, 0, 0)$ — матрицы вида (3), и $u(0, \theta, 0)$ — матрица вида (1). Отсюда вытекает, что вращение g трехмерного евклидова пространства E_3, задаваемое углами Эйлера φ, θ, ψ, является произведением вращения на угол ψ вокруг оси Ox_3, вращения на угол θ вокруг оси Ox_1, и второго вращения на угол φ вокруг оси Ox_3. Отсюда вытекает, что матрица вращения $g(\varphi, \theta, \psi)$ имеет вид

$$g(\varphi,\ \theta,\ \psi)=g(\varphi,\ 0,\ 0)\,g(0,\ \theta,\ 0)\,g(\psi,\ 0,\ 0)=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Остановимся еще на геометрической интерпретации касательных матриц для однопараметрических подгрупп группы $SO(3)$. Геометрически очевидно, что любая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы $SO(3)$ является подгруппой вращений вокруг фиксированной оси $\mathbf{l}$ в E_3, причем t пропорционально углу поворота. Поэтому естественно задавать однопараметрическую подгруппу $g(t)$ вектором $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$, направленным по оси вращения, длина которого равна угловой скорости вращения. При таком соответствии однопараметрическим подгруппам $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ (см. п. 3) соответствуют орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координатных осей.

Нетрудно показать, что если однопараметрической подгруппе $g(t)$ соответствует вектор $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$, то касательная матрица a этой подгруппы имеет вид $a=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$, где a_1, a_2, a_3 — касательные матрицы подгрупп $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$. Мы опускаем это доказательство.

Пользуясь геометрической интерпретацией касательных матриц однопараметрических подгрупп, легко выразить касательную матрицу подгруппы $\tilde{g}(t)=g_0g(t)g_0^{-1}$ через касательную матрицу подгруппы $g(t)$. Для этого заметим, что если вращения $g(t)$ оставляют неподвижной ось $\mathbf{l}$, то вращения $g_0g(t)g_0^{-1}$ оставляют неподвижной ось $g_0\mathbf{l}$ (получающуюся из $\mathbf{l}$ вращением g_0). В самом деле, из $g(t)\mathbf{l}=\mathbf{l}$ следует:

$$g_0g(t)g_0^{-1}(g_0\mathbf{l})=g_0\mathbf{l}.$$

Скорости же вращений $g(t)$ и $g_0g(t)g_0^{-1}$ одинаковы.

Отсюда получаем следующий вывод: *если однопараметрическая подгруппа $g(t)$ имеет касательную матрицу*

$$a=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3,$$

то касательная матрица подгруппы $g_0g(t)g_0^{-1}$ имеет вид

$$b=y_1a_1+y_2a_2+y_3a_3,$$

где

$$\mathbf{y}=g_0\mathbf{x},\qquad \mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3),\qquad \mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3).$$

7. Сфера как однородное пространство. Группа $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства является транзитивной группой преобразований единичной сферы S^2 в этом пространстве. При этом стационарной подгруппой некоторой точки сферы является подгруппа вращений вокруг оси, проходящей через эту точку. Стационарной подгруппой точки $M(0,\ 0,\ 1)$ является подгруппа вращений вокруг оси Oz. Мы видели в предыдущем пункте, что этим вращениям соответствуют диагональные матрицы из группы $SU(2)$, т. е. матрицы вида

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что единичная сфера S^2 является однородным пространством с группой движений $SU(2)$ и стационарной подгруппой Ω, состоящей из матриц вида (1). В силу п. 3 § 1 главы I это означает, что сферу S^2 можно отождествить с пространством левых классов смежности группы $SU(2)$ по подгруппе Ω. Таким образом, функции $f(\xi)$, заданные на сфере S^2, можно рассматривать как функции $f(u)$ на группе $SU(2)$, постоянные на левых смежных классах по подгруппе Ω, т. е. такие, что

$$f(uh)=f(u), \qquad h\in\Omega.$$

Легко проверить, что если углы Эйлера матрицы u равны φ, θ, ψ, то ей соответствует точка M сферы с декартовыми координатами

$$M(\sin\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta\cos\varphi,\ \cos\theta).$$

Очевидно, что сферические координаты точки M равны $-\frac{\pi}{2}+\varphi$ и θ.

§ 2. Неприводимые унитарные представления $T_l(u)$

В этом параграфе будут описаны неприводимые унитарные представления группы $SU(2)$. Поскольку группа $SU(2)$ компактна, эти представления конечномерны. Чтобы построить их, рассмотрим сначала один класс представлений группы $SL(2, C)$ унимодулярных комплексных матриц второго порядка. Сужая эти представления на подгруппу $SU(2)$, получим ее неприводимые унитарные представления.

1. Представления в пространствах однородных многочленов. Каждой унимодулярной комплексной матрице второго порядка $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ соответствует линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} w_1&=\alpha z_1+\gamma z_2,\\ w_2&=\beta z_1+\delta z_2\end{aligned}\right\}\quad\cdot \tag{1}$$

двумерного линейного комплексного пространства. Этому преобразованию отвечает оператор

$$T(g)f(z_1, z_2)=f(\alpha z_1+\gamma z_2,\ \beta z_1+\delta z_2) \tag{2}$$

в пространстве функций от двух комплексных переменных.

Очевидно, что $T(g_1g_2)=T(g_1)T(g_2)$, и потому $T(g)$ является представлением группы $SL(2, C)$. Это представление приводимо, поскольку в пространстве функций от двух комплексных переменных есть подпространства, инвариантные относительно преобразований $T(g)$. Например, любой однородный многочлен от двух переменных переходит при преобразовании $T(g)$ в однородный многочлен той же степени.

Пусть l — целое или полуцелое число. Обозначим через $\mathfrak{H}_l$ пространство всех однородных многочленов

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} z_2^{l+n} \tag{3}$$

степени $2l$ и через $T_l(g)$ — сужение представления $T(g)$ на пространство $\mathfrak{H}_l$. Мы увидим ниже, что $T_l(g)$ является неприводимым представлением группы $SL(2, C)$. Более того, это представление остается неприводимым, если сузить его на подгруппу $SU(2)$ группы $SL(2, C)$ (см. п. 3).

В дальнейшем будет удобно пользоваться другими реализациями представлений $T_l(g)$. Чтобы получить эти реализации, заметим, что однородный многочлен $f(z_1, z_2)$ однозначно определяется своими значениями на любом «контуре» Г, пересекающем любую комплексную прямую $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ в одной точке. Поэтому $\mathfrak{H}_l$ можно задавать не как пространство однородных многочленов двух комплексных переменных, а как пространство функций на контуре Г.

Рассмотрим комплексную прямую $z_2 = 1$ в двумерном комплексном пространстве. Эта прямая пересекает каждую прямую, проходящую через начало координат (кроме прямой $z_2 = 0$) в одной и только одной точке. Поэтому каждый многочлен $f(z_1, z_2)$ однозначно определяется своими значениями на прямой $z_2 = 1$. Поставим в соответствие каждому многочлену $f(z_1, z_2)$ из $\mathfrak{H}_l$ многочлен степени $2l$ от одного переменного:

$$\varphi(z_1) = f(z_1, 1) = \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n}. \tag{4}$$

Очевидно, что многочлен $f(z_1, z_2)$ определяется по $\varphi(z_1)$ следующим образом:

$$f(z_1, z_2) = z_2^{2l} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right). \tag{5}$$

Будем обозначать пространство многочленов степени $2l$ от одного переменного той же буквой $\mathfrak{H}_l$. Найдем операторы в этом пространстве, соответствующие операторам представления $T_l(g)$. Для этого заметим, что многочлену $\varphi(z)$ соответствует однородный многочлен $f(z_1, z_2)$ от двух переменных, задаваемый формулой (5). Оператор $T_l(g)$ переводит этот многочлен в многочлен

$$f_g(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2). \tag{6}$$

В силу однородности многочлена $f(z_1, z_2)$ имеем

$$f_g(z_1, z_2) = (\beta z_1 + \delta z_2)^{2l} f\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma z_2}{\beta z_1 + \delta z_2}, 1\right) =$$
$$= (\beta z_1 + \delta z_2)^{2l} \varphi\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma z_2}{\beta z_1 + \delta z_2}\right). \tag{7}$$

Поэтому многочлен $\varphi_g(z)=f_g(z, 1)$, соответствующий $f_g(z_1, z_2)$, выражается через многочлен $\varphi(z)$ по формуле

$$\varphi_g(z)=(\beta z+\delta)^{2l}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right).$$

Итак, если реализовать $\mathfrak{H}_l$ как пространство многочленов степени $2l$ от одного переменного, то оператор представления $T_l(g)$ задается в этой реализации формулой

$$T_l(g)\varphi(z)=(\beta z+\delta)^{2l}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right). \tag{8}$$

Укажем еще реализацию представления $T_l(g)$ в пространстве тригонометрических многочленов порядка l. Для этого каждому многочлену $F(z)$ степени $2l$ поставим в соответствие тригонометрический многочлен

$$\Phi(e^{i\varphi})=e^{-il\varphi}F(e^{i\varphi}). \tag{9}$$

Иными словами, положим

$$\Phi(e^{i\varphi})=\sum_{n=-l}^{l}a_n e^{-in\varphi}. \tag{9'}$$

Рассуждая точно так же, как и выше, получаем, что при реализации пространства $\mathfrak{H}_l$ как пространства тригонометрических многочленов порядка l операторы $T_l(g)$ реализуются следующим образом:

$$T_l(g)\Phi(e^{i\varphi})=e^{-il\varphi}(\alpha e^{i\varphi}+\gamma)^l(\beta e^{i\varphi}+\delta)^l\,\Phi\left(\frac{\alpha e^{i\varphi}+\gamma}{\beta e^{i\varphi}+\delta}\right). \tag{10}$$

Итак, мы построили представление $T_l(g)$ группы $SL(2, C)$ и указали различные реализации этого представления. Сузим теперь это представление на подгруппу $SU(2)$ группы $SL(2, C)$. Это означает, что в формулах (8) и (10) надо положить $\delta=\bar{\alpha}$, $\gamma=-\bar{\beta}$. При этом получается представление группы $SU(2)$. Мы будем обозначать его так же, как и представление группы $SL(2, C)$, т. е. писать $T_l(u)$, $u\in SU(2)$:

$$T_l(u)\varphi(z)=(\beta z+\bar{\alpha})^{2l}\varphi\left(\frac{\alpha z-\bar{\beta}}{\beta z+\bar{\alpha}}\right),\quad u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}.$$

2. Инфинитезимальные операторы представления $T_l(u)$. В следующем пункте будет доказано, что построенное выше представление $T_l(u)$ группы $SU(2)$ неприводимо. Для этого нам понадобится выражение инфинитезимальных операторов представления $T_l(u)$. Воспользуемся реализацией этого представления в пространстве многочленов степени $2l$ от одного переменного.

Матрице

$$\omega(t)=\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix} \tag{1}$$

из подгруппы Ω_1 (см. п. 3 § 1) соответствует оператор $T_l[\omega(t)]$, переводящий многочлен $\varphi(x)$ в

$$T_l[\omega(t)]\varphi(x)=\left(ix\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^{2l}\varphi\left(\frac{x\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}}{ix\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}\right).$$

Продифференцируем это равенство по t и положим $t=0$. Мы получим, что подгруппе Ω_1 соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_1=ilx+\frac{i}{2}(1-x^2)\frac{d}{dx}. \tag{2}$$

Точно так же доказывается, что однопараметрическим подгруппам Ω_2 и Ω_3 соответствуют инфинитезимальные операторы

$$A_2=-lx+\frac{1}{2}(1+x^2)\frac{d}{dx} \tag{3}$$

и

$$A_3=i\left(x\frac{d}{dx}-l\right). \tag{4}$$

Применим инфинитезимальные операторы A_1, A_2, A_3 к базисным одночленам x^{l-n}, $-l\leqslant n\leqslant l$:

$$A_1x^{l-n}=\frac{i}{2}(l-n)x^{l-n-1}+\frac{i}{2}(l+n)x^{l-n+1}, \tag{5}$$

$$A_2x^{l-n}=\frac{1}{2}(l-n)x^{l-n-1}-\frac{1}{2}(l+n)x^{l-n+1}, \tag{6}$$

$$A_3x^{l-n}=-inx^{l-n}. \tag{7}$$

Таким образом, инфинитезимальные операторы A_1 и A_2 переводят базисные одночлены x^{l-n} в линейные комбинации «соседних» одночленов x^{l-n-1} и x^{l-n+1}. Нетрудно написать операторы H_+ и H_-, переводящие x^{l-n} в одночлены, пропорциональные x^{l-n-1} и x^{l-n+1}. Именно, положим $H_+=iA_1-A_2$ и $H_-=iA_1+A_2$. Иными словами, положим

$$H_+=-\frac{d}{dx}, \tag{8}$$

$$H_-=-2lx+x^2\frac{d}{dx}. \tag{9}$$

Кроме того, введем оператор H_3, положив

$$H_3=iA_3=l-x\frac{d}{dx}. \tag{10}$$

Из формул (5) — (7) непосредственно вытекает:

$$H_+x^{l-n}=(n-l)\,x^{l-n-1}, \tag{11}$$

$$H_-x^{l-n}=-(n+l)\,x^{l-n+1}, \tag{12}$$

$$H_3x^{l-n}=nx^{l-n}. \tag{13}$$

Из этих формул видно, что x^{l-n} является собственной функцией оператора H_3, соответствующей собственному значению n. Оператор H_+ переводит эту функцию в собственную функцию оператора H_3, соответствующую собственному значению $n+1$. Оператор же H_- переводит x^{l-n} в собственную функцию, соответствующую собственному значению $n-1$. При этом оператор H_+ обращает в нуль функцию 1, соответствующую наибольшему собственному значению l, а оператор H_- — функцию x^{2l}, соответствующую наименьшему собственному значению $-l$.

3. Неприводимость. Докажем, что представления $T_l(u)$ группы $SU(2)$ неприводимы. Для этого достаточно показать, что в пространстве $\mathfrak{H}_l$ нет нетривиального подпространства, инвариантного относительно операторов A_1, A_2, A_3 (см. гл. I, § 1, п. 10). Поскольку операторы A_1, A_2, A_3 являются линейными комбинациями операторов H_+, H_-, H_3, то достаточно показать отсутствие нетривиального подпространства, инвариантного относительно операторов H_+, H_-, H_3.

Обозначим через $\mathfrak{H}_{ln}$ подпространство в $\mathfrak{H}_l$, состоящее из одночленов a_nx^{l-n}. Из формулы (13) п. 2 следует, что это подпространство инвариантно относительно оператора H_3, причем различным значениям n соответствуют различные собственные значения оператора H_3 в $\mathfrak{H}_{ln}$.

Предположим, что подпространство $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{H}_l$ инвариантно относительно операторов H_+, H_-, H_3. В силу п. 3 § 3 главы I из инвариантности подпространства $\mathfrak{T}$ относительно H_3, следует, что оно является прямой суммой некоторых из подпространств $\mathfrak{H}_{ln}$, т. е.

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{H}_{ln_1}\dot{+}\ldots\dot{+}\mathfrak{H}_{ln_s}. \tag{1}$$

Поэтому, если $\mathfrak{T}\neq 0$, то оно содержит один из одночленов x^{l-n}.

Воспользуемся теперь инвариантностью подпространства $\mathfrak{T}$ относительно операторов H_+ и H_-. Из этой инвариантности вытекает, что $\mathfrak{T}$ содержит все функции вида $H_+^sx^{l-n}$ и $H_-^sx^{l-n}$. Если $0\leqslant s\leqslant l-n$, то в силу формулы (11) из п. 2 имеем

$$H_+^sx^{l-n}=\alpha x^{l-n-s}, \tag{2}$$

где $\alpha\neq 0$. Аналогично, если $0\leqslant s\leqslant l+n$, то имеем

$$H_-^sx^{l-n}=\beta x^{l-n+s}, \tag{3}$$

где $\beta\neq 0$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{T}$ содержит все одночлены x^{l-m}, $-l\leqslant m\leqslant l$ и потому совпадает с $\mathfrak{H}_l$. Тем самым неприводимость представления $T_l(u)$ группы $SU(2)$ доказана. Тем более неприводимо представление $T_l(g)$ группы $SL(2, C)$.

Отметим, что построенные нами неприводимые представления $T_l(u)$ группы $SU(2)$ попарно неэквивалентны. В самом деле, представления с различными значениями l имеют различную размерность.

4. Инвариантное скалярное произведение. Поскольку группа $SU(2)$ компактна, в пространстве $\mathfrak{H}_l$ ее конечномерного представления $T_l(u)$ существует инвариантное скалярное произведение (см. гл. I, § 4, п. 2). Чтобы получить его явное выражение, достаточно вычислить скалярные произведения (x^{l-k}, x^{l-m}), где $-l \leqslant k \leqslant l$, $-l \leqslant m \leqslant l$.

Покажем сначала, что при $k \neq m$ имеем $(x^{l-k}, x^{l-m}) = 0$. Для этого воспользуемся инвариантностью скалярного произведения относительно операторов $T_l(h)$, где

$$h = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $T_l(h)$ переводит x^{l-k} в $e^{-ikt}x^{l-k}$. Поэтому

$$(x^{l-k}, x^{l-m}) = (T_l(h)x^{l-k}, T_l(h)x^{l-m}) = e^{-i(k-m)t}(x^{l-k}, x^{l-m}).$$

Из этого соотношения вытекает, что если $k \neq m$, то $(x^{l-k}, x^{l-m}) = 0$.

Нам осталось, таким образом, вычислить (x^{l-k}, x^{l-k}), $-l \leqslant k \leqslant l$. Для этого воспользуемся равенством

$$(x^{l-k}, x^{l-k+1}) = (T_l(u)x^{l-k}, T_l(u)x^{l-k+1}), \tag{1}$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства по t и положим $t = 0$ (т. е. перейдем к инфинитезимальным операторам). Мы получим

$$0 = (A_2x^{l-k}, x^{l-k+1}) + (x^{l-k}, A_2x^{l-k+1}).$$

В силу формулы (6) п. 2 отсюда имеем

$$0 = -(l+k)(x^{l-k+1}, x^{l-k+1}) + (l-k+1)(x^{l-k}, x^{l-k}). \tag{2}$$

Инвариантное скалярное произведение определено с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы имело место равенство $(1, 1) = 2l!$ Тогда из рекуррентного соотношения (2) получаем

$$(x^{l-k}, x^{l-k}) = (l-k)!\,(l+k)!, \quad -l \leqslant k \leqslant l. \tag{3}$$

Тем самым найдено инвариантное скалярное произведение. Из формулы (3) следует, что система функций

$$\psi_k(x) = \frac{x^{l-k}}{\sqrt{(l-k)!\,(l+k)!}}, \quad -l \leqslant k \leqslant l \tag{4}$$

образует ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_l$. Этот базис состоит из собственных функций операторов $T_l(h)$, где

$$h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, имеем

$$(\varphi,\ x^{l-k})=(l-k)!\,(l+k)!\,a_k, \tag{5}$$

где

$$\varphi(x)=\sum_{k=-l}^{l} a_k x^{l-k}.$$

В заключение заметим, что из формул п. 2 вытекают равенства

$$\left.\begin{aligned} H_+\psi_n(x) &= -\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,\psi_{n+1}(x), \\ H_-\psi_n(x) &= -\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,\psi_{n-1}(x), \\ H_3\psi_n(x) &= n\psi_n(x). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

5. Полнота системы представлений $T_l(u)$. Мы построили систему $T_l(u)$ попарно неэквивалентных унитарных неприводимых представлений группы $SU(2)$. Оказывается, что этими представлениями исчерпываются все (с точностью до эквивалентности) неприводимые унитарные представления группы $SU(2)$. Иными словами, имеет место

Теорема 1. *Каждое неприводимое унитарное представление $T(u)$ группы $SU(2)$ эквивалентно одному из представлений $T_l(u)$, $l=0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$*

Мы опускаем доказательство этой теоремы, отсылая читателя к книге [16], где в п. 3 § 2 главы I эта теорема доказана для группы $SO(3)$. Доказательство без изменений переносится на группу $SU(2)$. Число l называют *весом* представления $T(u)$.

Пусть $T(u)$ — неприводимое унитарное представление веса l группы $SU(2)$ в пространстве $\mathfrak{H}$.

Из теоремы 1 вытекает, что в пространстве $\mathfrak{H}$ существует такой ортогональный нормированный базис $\mathfrak{f}_{-l}, \ldots, \mathfrak{f}_l$, что операторы $T(u)$ задаются в этом базисе теми же матрицами, что и операторы $T_l(u)$ в базисе $\{\psi_k(x)\}$. Этот базис в $\mathfrak{H}$ будем называть *каноническим*. Легко видеть, что канонический базис однозначно определен с точностью до общего скалярного множителя λ, такого, что $|\lambda|=1$. Именно, канонический базис состоит из нормированных собственных векторов операторов $T(h)$, где

$$h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}.$$

§ 3. Матричные элементы представлений $T_l(g)$. Многочлены Лежандра и Якоби

В этом параграфе будут вычислены матричные элементы неприводимых унитарных представлений $T_l(u)$ группы $SU(2)$. Сначала мы вычислим матричные элементы для представлений $T_l(g)$ группы $SL(2, C)$, получающейся при комплексификации группы $SU(2)$, а потом, перейдя к вещественным значениям параметров, получим матричные элементы представлений $T_l(u)$. Будет показано, что эти матричные элементы выражаются через показательную функцию и через многочлены $P^l_{mn}(z)$, тесно связанные с классическими многочленами Якоби и Лежандра. На основе этой связи будут установлены многие свойства многочленов Якоби и Лежандра.

1. Вычисление матричных элементов. В § 2 были построены представления $T_l(g)$ группы $SL(2, C)$. Они задаются формулой

$$T_l(g)\varphi(x)=(\beta x+\delta)^{2l}\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — многочлен степени $2l$ от x, $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Выберем в пространстве $\mathfrak{H}_l$ таких многочленов базис, состоящий из одночленов

$$\psi_n(x)=\frac{x^{l-n}}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}, \qquad -l\leqslant n\leqslant l. \tag{2}$$

В п. 4 § 2 было показано, что этот базис ортогонален и нормирован относительно скалярного произведения в $\mathfrak{H}_l$, инвариантного при действии операторов $T_l(u)$, $u\in SU(2)$. Отсюда следует, что операторам $T_l(u)$ неприводимых унитарных представлений группы $SU(2)$ соответствуют в этом базисе унитарные матрицы.

Для вычисления матричных элементов воспользуемся формулой

$$a_{ij}=(A\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_i), \tag{3}$$

где $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис. В нашем случае эта формула принимает вид

$$t^l_{mn}(g)=(T_l(g)\psi_n,\ \psi_m)=\frac{(T_l(g)\,x^{l-n},\ x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-n)!\,(l+n)!}}. \tag{4}$$

Но

$$T_l(g)\,x^{l-n}=(\alpha x+\gamma)^{l-n}(\beta x+\delta)^{l+n}. \tag{5}$$

Поэтому из формулы (4) вытекает, что

$$t^l_{mn}(g)=\frac{((\alpha x+\gamma)^{l-n}(\beta x+\delta)^{l+n},\ x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-n)!\,(l+n)!}}, \tag{6}$$

Раскроем скобки в полученном выражении и примем во внимание, что $(x^{l-k},\ x^{l-m})=0$ при $k\neq m$ и $(x^{l-m},\ x^{l-m})=(l-m)!\,(l+m)!$. Мы

получим

$$t_{mn}^{l}(g)=\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\sum_{j=M}^{N}C_{l-n}^{l-m-j}C_{l+n}^{j}\alpha^{l-m-j}\beta^{j}\gamma^{m+j-n}\delta^{l+n-j}=$$
$$=\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-n)!\,(l+n)!}\,\alpha^{l-m}\gamma^{m-n}\delta^{l+n}\times$$
$$\times\sum_{j=M}^{N}\frac{1}{j!\,(l-m-j)!\,(l+n-j)!\,(m-n+j)!}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\right)^{j},\qquad (7)$$

где $M=\max(0,\ n-m)$, $N=\min(l-m,\ l+n)$.

Итак, мы нашли выражение матричных элементов представления $T_l(g)$ через матричные элементы матрицы g. Отметим, что это выражение фактически не зависит от β, так как в силу унимодулярности матрицы g имеем $\beta\gamma=\alpha\delta-1$.

2. Различные выражения матричных элементов. Выведем другие выражения для матричных элементов $t_{mn}^{l}(g)$ представлений $T_l(g)$. Первое из них связано с разложением матриц в произведение верхней и нижней треугольных матриц. Именно, если $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и $\delta\neq 0$, то $g=kz$, где $k=\begin{pmatrix}\delta^{-1} & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ и $z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma/\delta & 1\end{pmatrix}$.

Из равенства $g=kz$ следует, что $T_l(g)=T_l(k)\,T_l(z)$. Поскольку умножению операторов соответствует умножение их матриц, то

$$t_{mn}^{l}(g)=\sum_{j=-l}^{l}t_{mj}^{l}(k)\,t_{jn}^{l}(z).\qquad (1)$$

Полученное равенство сводит задачу вычисления матричных элементов $t_{mn}^{l}(g)$ к вычислению этих элементов для треугольных матриц k и z. Но для матрицы k имеем $\gamma=0$. Поэтому из равенства (7) предыдущего пункта вытекает, что при $m>n$ $t_{mn}^{l}(k)$ обращается в нуль, а при $m\leqslant n$ остается лишь слагаемое, для которого $j=n-m$:

$$t_{mn}^{l}(k)=\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+n)!}{(l+m)!\,(l-n)!}}\,\frac{\beta^{n-m}\delta^{m+n}}{(n-m)!}.\qquad (2)$$

Точно так же при $m<n$ имеем $t_{mn}^{l}(z)=0$, а при $m\geqslant n$

$$t_{mn}^{l}(z)=\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-n)!}{(l-m)!\,(l+n)!}}\,\frac{\gamma^{m-n}}{(m-n)!\,\delta^{m-n}}.\qquad (3)$$

Подставив в формулу (1) выражения матричных элементов $t_{mj}^{l}(k)$ и $t_{jn}^{l}(z)$, вытекающие из равенств (2) и (3), получим

$$t_{mn}^{l}(g)=\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l-n)!}{(l+m)!\,(l+n)!}}\,\frac{\delta^{m+n}}{\beta^{m}\gamma^{n}}\sum_{j=\max(m,\,n)}^{l}\frac{(l+j)!}{(l-j)!\,(j-m)!\,(j-n)!}(\beta\gamma)^{j}.$$
$$(4)$$

Выведенная формула годится для матричных элементов $t^l_{mn}(g)$, $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, таких, что $\delta\neq 0$. При $\delta=0$, т. е. $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -1/\beta & 0\end{pmatrix}$, матричные элементы $t^l_{mn}(g)$ непосредственно вычисляются по формуле (7) п. 1. Мы получаем

$$t^l_{mn}(g)=\begin{cases} 0 & \text{при } m+n>0,\\ \sqrt{\dfrac{(l-m)!\,(l-n)!}{(l+m)!\,(l+n)!}}\,\dfrac{(-1)^{l+m}\beta^{n-m}}{(-m-n)!\,\alpha^{m+n}} & \text{при } m+n\leqslant 0.\end{cases} \tag{5}$$

Если $\alpha=\delta=0$, то по формуле (7) из п. 1 получаем, что $t^l_{mn}(g)=0$ при $m+n\neq 0$ и

$$t^l_{m,\,-m}(g)=(-1)^{l-m}\gamma^{2m}. \tag{6}$$

В частности, если $g=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$, то $t^l_{mn}(g)=0$ при $m+n\neq 0$, а $t^l_{m,\,-m}(g)=i^{2l}$.

Еще одно выражение для матричных элементов оператора $T_l(g)$ получается следующим образом. Из определения матричных элементов следует, что

$$T_l(g)\,\psi_n(x)=\sum_{m=-l}^{l} t^l_{mn}(g)\,\psi_m(x), \tag{7}$$

где, напомним,

$$\psi_n(x)=\frac{x^{l-n}}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}. \tag{8}$$

Так как

$$T_l(g)\,\psi_n(x)=\frac{(\alpha x+\gamma)^{l-n}\,(\beta x+\delta)^{l+n}}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}, \tag{9}$$

то $t^l_{mn}(g)$ равно коэффициенту при x^{l-m} в разложении выражения (9) по степеням x, умноженному на $\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}$. По формуле Тейлора имеем

$$t^l_{mn}(g)=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!\,(l-m)!}}\,\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left[(\alpha x+\gamma)^{l-n}(\beta x+\delta)^{l+n}\right]_{x=0}. \tag{10}$$

Чтобы упростить это выражение, сделаем в нем подстановку $y=\alpha(\beta x+\delta)$. Из равенства $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ вытекает, что $\alpha x+\gamma=\dfrac{y-1}{\beta}$, и потому

$$t^l_{mn}(g)=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!\,(l-m)!}}\,\frac{\beta^{n-m}}{\alpha^{m+n}}\,\frac{d^{l-m}}{dy^{l-m}}\left[y^{l+n}(y-1)^{l-n}\right]_{y=\alpha\delta}.$$

Заменяя здесь y на $z+1$ и принимая во внимание, что $\alpha\delta-1=\beta\gamma$, получаем

$$t^l_{mn}(g)=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!\,(l-m)!}}\,\frac{\beta^{n-m}}{\alpha^{n+m}}\,\frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}}\left[z^{l-n}(z+1)^{l+n}\right]_{z=\beta\gamma}. \quad (11)$$

Выведем, наконец, интегральное представление матричных элементов $t^l_{mn}(g)$. Для этого удобно воспользоваться реализацией представления в пространстве тригонометрических многочленов порядка $2l$. В силу формулы (10) п. 1 § 2 имеем

$$T_l(g)\,e^{-in\varphi}=(\alpha e^{i\varphi}+\gamma)^{l-n}(\beta e^{i\varphi}+\delta)^{l+n}e^{-il\varphi}. \quad (12)$$

Поэтому

$$t^l_{mn}(g)=\frac{(T_l(g)\,e^{-in\varphi},\ e^{-im\varphi})}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-n)!\,(l+n)!}}=$$
$$=\frac{((\alpha e^{i\varphi}+\gamma)^{l-n}(\beta e^{i\varphi}+\delta)^{l+n}e^{-il\varphi},\ e^{-im\varphi})}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-n)!\,(l+n)!}}. \quad (13)$$

Чтобы представить это выражение в виде интеграла, заметим, что при $k\neq m$

$$(e^{-ik\varphi},\ e^{-im\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}e^{im\varphi}\,d\varphi=0,$$

а при $k=m$

$$(e^{-im\varphi},\ e^{-im\varphi})=(l-m)!\,(l+m)!=\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}e^{im\varphi}\,d\varphi.$$

Поэтому для любого тригонометрического многочлена $\Phi(e^{i\varphi})$ из $\mathfrak{H}_l$ выполняется равенство

$$(\Phi(e^{i\varphi}),\ e^{-im\varphi})=\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(e^{i\varphi})\,e^{im\varphi}\,d\varphi.$$

Применив эту формулу к соотношению (13), получим

$$t^l_{mn}(g)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\int_0^{2\pi}(\alpha e^{i\varphi}+\gamma)^{l-n}(\beta e^{i\varphi}+\delta)^{l+n}e^{i(m-l)\varphi}\,d\varphi. \quad (14)$$

Интеграл (14) с помощью подстановки $e^{i\varphi}=z$ можно записать в виде контурного интеграла:

$$t^l_{mn}(g)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\oint_\Gamma(\alpha z+\gamma)^{l-n}(\beta z+\delta)^{l+n}z^{m-l-1}\,dz, \quad (15)$$

где Γ — единичная окружность, пробегаемая против часовой стрелки. Заметим, что, вычисляя интеграл (15) с помощью вычетов, мы снова придем к формуле (10).

3. Выражение через углы Эйлера. В этом пункте мы получим выражение матричных элементов $t^l_{mn}(g)$ через углы Эйлера φ, θ, ψ матрицы g. По формуле (6) п. 1 § 1

$$g(\varphi, \theta, \psi)=g(\varphi, 0, 0)\,g(0, \theta, 0)\,g(0, 0, \psi). \tag{1}$$

Поэтому

$$T_l[g(\varphi, \theta, \psi)]=T_l[g(\varphi, 0, 0)]\,T_l[g(0, \theta, 0)]\,T_l[g(0, 0, \psi)]. \tag{2}$$

Таким образом, разыскание матрицы оператора $T_l(g)$ в общем случае сводится к разысканию этой матрицы для операторов $T_l[g(\varphi, 0, 0)]$, $T_l[g(0, \theta, 0)]$ и $T_l[g(0, 0, \psi)]$. Но $g(\varphi, 0, 0)$ — диагональная матрица

$$g(\varphi, 0, 0)=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Для таких матриц по формуле (1) п. 1

$$T_l[g(\varphi, 0, 0)]\,x^{l-n}=e^{-in\varphi}x^{l-n}. \tag{2'}$$

Поэтому матрица оператора $T_l[g(\varphi, 0, 0)]$ является диагональной матрицей, на главной диагонали которой стоят выражения $e^{-in\varphi}$, $-l\leqslant n\leqslant l$. Аналогичный вид имеет матрица оператора $T_l[g(0, 0, \psi)]$.

Обозначим матричные элементы оператора $T_l[g(0, \theta, 0)]$ через $t^l_{mn}(\theta)$. Тогда в силу диагональности матриц операторов $T_l[g(\varphi, 0, 0)]$ и $T_l[g(0, 0, \psi)]$ имеет место формула

$$t^l_{mn}(g)=t^l_{nm}[g(\varphi, 0, 0)]\,t^l_{mn}(\theta)\,t^l_{nn}[g(0, 0, \psi)]=e^{-i(m\varphi+n\psi)}t^l_{mn}(\theta). \tag{3}$$

Нам осталось получить явное выражение для $t^l_{mn}(\theta)$. Матрица $g(0, \theta, 0)$ имеет вид

$$g(0, \theta, 0)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0\leqslant \operatorname{Re}\theta<\pi.$$

Поэтому для вычисления $t^l_{mn}(\theta)$ надо подставить в формулу (4) из п. 2 $\alpha=\delta=\cos\frac{\theta}{2}$, $\beta=\gamma=i\sin\frac{\theta}{2}$. Мы получим

$$t^l_{mn}(\theta)=i^{-m-n}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l-n)!}{(l+m)!\,(l+n)!}}\operatorname{ctg}^{m+n}\frac{\theta}{2}\times$$
$$\times\sum_{j=\max(m, n)}^{l}\frac{(l+j)!\,i^{2j}}{(l-j)!\,(j-m)!\,(j-n)!}\sin^{2j}\frac{\theta}{2}. \tag{4}$$

Как отмечалось в п. 4 § 1, параметр θ изменяется в области $0\leqslant\operatorname{Re}\theta<\pi$. Но в этой области различным значениям θ отвечают различные значения $z=\cos\theta$. Поэтому $t^l_{mn}(\theta)$ можно рассматривать как функцию от $\cos\theta$. В соответствии с этим мы положим

$$t^l_{mn}(\theta)=P^l_{mn}(\cos\theta), \qquad 0\leqslant \operatorname{Re}\theta<\pi \tag{5}$$

и запишем формулу (3) в следующем виде:

$$t^l_{mn}(g)=e^{-i(m\varphi+n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta). \tag{6}$$

4. Различные выражения функций $P^l_{mn}(z)$. Мы ввели в предыдущем пункте функции $P^l_{mn}(z)$, через которые выражаются матричные элементы неприводимых представлений $T_l(g)$ группы $SL(2, C)$. Изучим свойства этих функций. Получим сначала явное выражение функции $P^l_{mn}(z)$. Из равенств (4) и (5) п. 3 вытекает, что

$$P^l_{mn}(z)=i^{-m-n}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l-n)!}{(l+m)!\,(l+n)!}}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m+n}{2}}\times$$
$$\times\sum_{j=\max(m,\,n)}^{l}\frac{(l+j)!\,i^{2j}}{(l-j)!\,(j-m)!\,(j-n)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^j. \tag{1}$$

Входящее в эту формулу выражение $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m+n}{2}}$ двузначно (напомним, что m и n либо одновременно являются целыми числами, либо полуцелыми). Чтобы однозначно определить $P^l_{mn}(z)$, вспомним, что параметр θ изменяется в области $0\leqslant\operatorname{Re}\theta<\pi$. Отображение $z=\cos\theta$ переводит эту область в плоскость z, разрезанную вдоль вещественной оси по лучам $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Но в разрезанной таким образом плоскости функция $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m+n}{2}}$ однозначна.

Выберем ветвь этой функции, принимающую положительные значения на отрезке $(-1, 1)$ вещественной оси.

Используя доказанные в пп. 1 и 2 формулы для $t^l_{mn}(g)$, легко получить другие выражения для $P^l_{mn}(z)$. Применив, например, формулу (7) из п. 1 к матрице

$$g(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2}\\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

получим

$$P^l_{mn}(z)=i^{m-n}\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-n)!\,(l+n)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m-n}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^l\times$$
$$\times\sum_{j=M}^{N}\frac{(-1)^j}{j!\,(l-m-j)!\,(l+n-j)!\,(m-n+j)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^j, \tag{2}$$

где $M=\max(0,\ n-m)$, $N=\min(l+n,\ l-m)$.

Далее применим к матрице $g(\theta)$ формулу (11) п. 2. Заменяя z на $\frac{z-1}{2}$, получаем после простых преобразований

$$P^l_{mn}(z)=\frac{(-1)^{l-n}i^{n-m}}{2^l}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!\,(l-m)!}}\times$$
$$\times(1+z)^{\frac{-m-n}{2}}(1-z)^{\frac{n-m}{2}}\frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}}[(1-z)^{l-n}(1+z)^{l+n}]. \qquad (3)$$

Наконец, из формул интегральных представлений (14) и (15) п. 2 для $t^l_{mn}(g)$ находим:

$$P^l_{mn}(z)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l-n}\left(i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l+n}e^{im\varphi}d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\oint\limits_{\Gamma}\left(t\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n}\times$$
$$\times\left(it\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n}t^{m-l-1}dt, \qquad (4)$$

где $z=\cos\theta$, $|t|=1$.

5. Частные значения $P^l_{mn}(z)$. Вычислим значение $P^l_{mn}(z)$ при $z=1$ (т. е. при $\theta=0$). Если $\theta=0$, то $g(0)$ — единичная матрица. Поэтому и матрица оператора $T_l(g(\theta))$ при $\theta=0$ является единичной. Поскольку $t^l_{mn}(\theta)\equiv P^l_{mn}(\cos\theta)$, то

$$P^l_{mn}(0)=\delta_{mn}, \qquad (1)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Далее, пусть $z=-1$, т. е. $\theta=\pi$. В этом случае матрица $g(\theta)$ принимает вид

$$g(\pi)=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Как было показано в п. 2, для этой матрицы $t^l_{mn}(g)=0$ при $m+n\neq 0$ и $t^l_{m,-m}(g)=i^{2l}$. Таким образом, $P^l_{mn}(-1)=0$ при $m+n\neq 0$ и $P^l_{m,-m}(-1)=i^{2l}$.

Теперь рассмотрим функцию $P^l_{mn}(z)$ при $m=l$. В этом случае сумма в формуле (1) п. 4 содержит лишь одно слагаемое, соответствующее значению $j=l$, и потому

$$P^l_{ln}(z)=\frac{i^{l-n}}{2^l}\sqrt{\frac{(2l)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}(1-z)^{\frac{l-n}{2}}(1+z)^{\frac{l+n}{2}}. \qquad (2)$$

В частности,

$$P^l_{ll}(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^l, \tag{3}$$

$$P^l_{l,\,-l}(z)=i^{2l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l, \tag{4}$$

$$P^l_{l0}(z)=\frac{i^l\sqrt{(2l)!}}{2^l l!}(1-z^2)^{\frac{l}{2}}. \tag{5}$$

Формулы (2) — (5), можно записать так:

$$P^l_{ln}(\cos\theta)=i^{l-n}\sqrt{\frac{(2l)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\sin^{l-n}\frac{\theta}{2}\cos^{l+n}\frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

$$P^l_{ll}(\cos\theta)=\cos^{2l}\frac{\theta}{2}, \tag{7}$$

$$P^l_{l,\,-l}(\cos\theta)=i^{2l}\sin^{2l}\frac{\theta}{2}, \tag{8}$$

$$P^l_{l0}(\cos\theta)=\frac{i^l\sqrt{(2l)!}}{2^l l!}\sin^l\theta. \tag{9}$$

Мы не будем вычислять значений $P^l_{ml}(z)$ и т. д., так как в следующем пункте будет показано, что функция $P^l_{mn}(z)$ симметрична относительно индексов m и n.

6. Соотношения симметрии. Функции $P^l_{mn}(z)$ зависят не только от аргумента z, но и от индексов l, m, n. Рассмотрим свойства симметрии $P^l_{mn}(z)$ относительно индексов m и n. Покажем сначала, что функция $P^l_{mn}(z)$ не меняется при изменении знаков обоих индексов m и n. Для этого воспользуемся равенством

$$g(\pi)\,g(\theta)=g(\theta)\,g(\pi),$$

где для краткости положено

$$g(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2}\\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$T_l(\pi)\,T_l(\theta)=T_l(\theta)\,T_l(\pi). \tag{1}$$

Но матричные элементы оператора $T_l(\theta)$ равны $P^l_{mn}(\cos\theta)$. Матричные же элементы для $T_l(\pi)$ были нами найдены в предыдущем пункте. Там было показано, что $t^l_{mn}(\pi)=0$ при $m+n\neq 0$ и $t^l_{m,\,-m}(\pi)=i^{2l}$.

Заменив в равенстве (1) операторы $T_l(\pi)$ и $T_l(\theta)$ соответствующими матрицами, перемножив их и сравнив соответствующие элементы,

получим

$$P^l_{m,\,-n}(\cos\theta)=P^l_{-m,\,n}(\cos\theta).$$

Но отсюда непосредственно вытекает соотношение

$$P^l_{mn}(z)=P^l_{-m,\,-n}(z). \tag{2}$$

Докажем теперь, что функции $P^l_{mn}(z)$ не меняются при перестановке индексов m и n. Для этого воспользуемся формулой (1) п. 4, дающей явное выражение для $P^l_{mn}(z)$. Поскольку эта формула симметрична относительно m и n, имеем

$$P^l_{mn}(z)=P^l_{nm}(z). \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) показывают, что функции $P^l_{mn}(z)$ зависят фактически не от m и n, а от $|m+n|$ и $|m-n|$.

Соотношение (3) можно получить также из формулы (2) п. 4, используя следующие соображения. Обратной к матрице

$$g(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2}\\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

является матрица

$$g(-\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2}\\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

углы Эйлера для которой равны π, θ, $-\pi$. Отсюда следует, что матричные элементы оператора $T^l_{mn}(-\theta)$ имеют вид

$$t^l_{mn}(-\theta)=(-1)^{n-m}P^l_{mn}(\cos\theta). \tag{4}$$

Но при вещественных значениях θ матрица $g(\theta)$ унитарна. Поскольку $T_l(u)$ является унитарным представлением группы $SU(2)$, то имеет место равенство $T_l(-\theta)=T^*_l(\theta)$. Отсюда следует, что $t^l_{mn}(-\theta)=\overline{t^l_{nm}(\theta)}$ и, в силу равенства (4), что

$$(-1)^{n-m}P^l_{mn}(\cos\theta)=\overline{P^l_{nm}(\cos\theta)}.$$

Но $\overline{P^l_{nm}(\cos\theta)}=(-1)^{n-m}P^l_{nm}(\cos\theta)$, так как $P^l_{nm}(\cos\theta)$ содержит множитель i^{n-m}. Отсюда и вытекает справедливость равенства

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=P^l_{nm}(\cos\theta) \tag{5}$$

при вещественных значениях θ или, что то же самое, справедливость равенства $P^l_{mn}(x)=P^l_{nm}(x)$ при $-1<x<1$. Поскольку функция $P^l_{mn}(z)$ аналитически зависит от z в плоскости, разрезанной вдоль лучей $-\infty<x<-1$ и $1<x<\infty$, равенство (5) справедливо во всей этой плоскости.

Наконец, отметим соотношение

$$P^l_{mn}(-z) = i^{2l-2m-2n} P^l_{m,\,-n}(z), \tag{6}$$

непосредственно вытекающее из формулы (3) п. 4.

7. Матрицы $T_l(\theta)$. Пользуясь формулой (4) п. 4, находим, что матрицы $T_l(\theta)$ при $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ имеют следующий вид:

$$T_0(\theta) = 1,$$

$$T_{\frac{1}{2}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$T_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \frac{i\sin\theta}{\sqrt{2}} & -\sin^2\frac{\theta}{2} \\ \frac{i\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \frac{i\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ -\sin^2\frac{\theta}{2} & \frac{i\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$T_{\frac{3}{2}}(\theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^3\frac{\theta}{2} & i\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sqrt{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -i\sin^3\frac{\theta}{2} \\ i\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos^3\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} & 2i\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - i\sin^3\frac{\theta}{2} & -\sqrt{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2i\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - i\sin^3\frac{\theta}{2} & \cos^3\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} & i\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\ -i\sin^3\frac{\theta}{2} & -\sqrt{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & i\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos^3\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

8. Соотношения обхода. Функции $P^l_{mn}(z)$ определены в комплексной плоскости, разрезанной вдоль лучей $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. На берегах разрезов эти функции принимают различные значения. Из формулы (3) п. 4 вытекает, что если $x > 1$, то

$$P^l_{mn}(x + i0) = (-1)^{m-n} P^l_{mn}(x - i0). \tag{1}$$

Аналогично, если $x < -1$, то

$$P^l_{mn}(x + i0) = (-1)^{m+n} P^l_{mn}(x - i0). \tag{2}$$

9. Связь с классическими ортогональными многочленами. Мы ввели функции $P^l_{mn}(z)$ и получили для них различные представления. Установим теперь связь функций $P^l_{mn}(z)$ с некоторыми классическими ортогональными многочленами — многочленами Якоби, присоединенными многочленами Лежандра и многочленами Лежандра. Эта связь позволяет из каждого свойства функций $P^l_{mn}(z)$ получать соответствующие свойства многочленов Якоби и Лежандра.

Многочлены Якоби определяются формулой

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^k}{2^k k!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^k}{dz^k}[(1-z)^{\alpha+k}(1+z)^{\beta+k}]. \quad (1)$$

Сравнив эту формулу с формулой (3) п. 4, получим

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(z)=2^m i^{n-m}\sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+n)!}{(l-m)!\,(l+m)!}}(1-z)^{\frac{n-m}{2}}(1+z)^{\frac{-n-m}{2}}P^l_{mn}(z), \quad (2)$$

где

$$l=k+\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad m=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad n=\frac{\beta-\alpha}{2}. \quad (3)$$

Из формул (3) видно, что $\alpha=m-n$ и $\beta=m+n$ являются целыми числами. Таким образом, функции $P^l_{mn}(z)$ приводят к частному случаю многочленов Якоби, для которых α и β — целые числа.

Остановимся теперь на важных частных случаях многочленов Якоби — многочленах Лежандра и присоединенных функциях Лежандра. *Многочлены Лежандра* определяют равенством

$$P_l(z)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(1-z^2)^l. \quad (4)$$

Иными словами, $P_l(z)=P_l^{(0,0)}(z)$. Сравнивая формулу (4) с формулой (3) п. 4, получаем

$$P_l(z)=P^l_{00}(z). \quad (5)$$

Аналогично *присоединенные функции Лежандра* $P_l^m(z)$, $m\geqslant 0$ определяют формулой (l, m — целые)

$$P_l^m(z)=\frac{(-1)^{m+l}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{m+l}}{dz^{m+l}}(1-z^2)^l, \quad (6)$$

т. е.

$$P_l^m(z)=\frac{2^m(l+m)!}{l!}(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}P_{l+m}^{(-m,-m)}. \quad (7)$$

Сравнение с формулой (3) п. 4 приводит к равенству

$$P_l^m(z)=i^m\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}P^l_{-m,0}(z). \quad (8)$$

Мы видели в п. 6, что $P^l_{-m,0}(z)=P^l_{m,0}(z)$. Поэтому равенство (8) можно переписать в следующей форме:

$$P_l^m(z)=i^m\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}P^l_{m0}(z), \qquad m\geqslant 0. \quad (9)$$

При $m<0$ определим $P_l^m(z)$ той же формулой (9). Тогда

$$P_l^{-m}(z)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(z). \tag{10}$$

Из формул (1)—(4) п. 4 вытекают следующие представления функций $P_l^m(z)$:

$$P_l^m(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{j=\max(m,\,0)}^{l}\frac{(-1)^j(l+j)!}{(l-j)!\,(j-m)!\,j!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^j; \tag{11}$$

$$P_l^m(z)=(-1)^m l!\,(l+m)!\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^l\times$$
$$\times\sum_M^N\frac{(-1)^j}{j!\,(l-m-j)!\,(l-j)!\,(m+j)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^j, \tag{12}$$

где $M=\max(0,\,-m)$, $N=\min(l,\,l-m)$;

$$P_l^m(\cos\theta)=\frac{i^m(l+m)!}{2\pi l!}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^l e^{im\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{i^{m+l}(l+m)!\sin^l\theta}{2^{l+1}\pi i l!}\oint_\Gamma(z^2-2iz\operatorname{ctg}\theta+1)^l z^{m-l-1}\,dz; \tag{13}$$

$$P_l^m(z)=\frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}}(1-z^2)^l=$$
$$=\frac{(-1)^l(l+m)!}{2^l l!\,(l-m)!}(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}}(1-z^2)^l. \tag{14}$$

Полагая $m=0$, получаем соответствующие формулы для многочленов Лежандра:

$$P_l(z)=\sum_{j=0}^{l}\frac{(-1)^j(l+j)!}{(l-j)!\,(j!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^j=$$
$$=(l!)^2\left(\frac{1+z}{2}\right)^l\sum_{j=0}^{l}\frac{(-1)^j}{(j!)^2((l-j)!)^2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^j; \tag{15}$$

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^l\,d\varphi=$$
$$=\frac{i^l\sin^l\theta}{2^{l+1}\pi i}\oint_\Gamma(z^2-2iz\operatorname{ctg}\theta+1)^l z^{-l-1}\,dz. \tag{16}$$

Сравнивая формулы (4) и (6), получаем при $m\geqslant 0$

$$P_l^m(z)=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l(z)}{dz^m}, \tag{17}$$

Укажем еще некоторые представления функций $P_l^m(z)$ и $P_l(z)$. Разложим в формуле (13) $(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^l$ по биному Ньютона. Так как при целых k и m, $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi e^{im\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2^{k+1}\pi}\int_0^{2\pi}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^k e^{im\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } k \text{ и } m \text{ имеют различную четность, или } k < m, \\ \dfrac{(m+2r)!}{2^{m+2r}r!\,(m+r)!}, \text{ если } k = m+2r, \quad r \geqslant 0, \end{cases} \tag{18}$$

то при $m \geqslant 0$

$$P_l^m(z) = (-1)^m (l+m)! \left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}\right)^m \cos^l\theta \times \\ \times \sum_{r=0}^{\left[\frac{l-m}{2}\right]} \frac{(-1)^r}{r!\,(m+r)!\,(l-m-2r)!}\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}\right)^{2r}. \tag{19}$$

В частности,

$$P_l(z) = l!\cos^l\theta \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{(-1)^r}{(r!)^2\,(l-2r)!}\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}\right)^{2r}. \tag{20}$$

Далее заметим, что

$$P_l^m(z) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l}(1-z^2)^{\frac{m}{2}} \sum_k \frac{(-1)^k (2k)!\, z^{2k-l-m}}{k!\,(l-k)!\,(2k-l-m)!} = \\ = \frac{(-1)^l (l+m)!}{2^l (l-m)!}(1-z^2)^{-\frac{m}{2}} \sum_k \frac{(-1)^k (2k)!\, z^{2k-l+m}}{k!\,(l-k)!\,(2k-l+m)!}, \tag{21}$$

где суммирование ведется по целым значениям k, таким, что $0 \leqslant k \leqslant l$ и $2k \geqslant l+m$ (соответственно $2k \geqslant l-m$). Для доказательства этого равенства достаточно разложить в формуле (14) $(1-z^2)^l$ по биному Ньютона и почленно продифференцировать полученное выражение.

В частности, из формулы (21) вытекает, что

$$P_l(z) = \frac{(-1)^l}{2^l}\sum_{2k \geqslant l}^{k=l} \frac{(-1)^k (2k)!\, z^{2k-l}}{k!\,(l-k)!\,(2k-l)!}. \tag{22}$$

В заключение получим разложение многочлена Лежандра $P_l(\cos\theta)$ в ряд Фурье. Для этого перепишем формулу (16) в виде

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{-i\theta}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^l d\varphi. \tag{16'}$$

Разложим $\left[e^{i\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2}+e^{-i\theta}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^l$ по формуле бинома Ньютона и примем во внимание, что при $0\leqslant k\leqslant l$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2k}\frac{\varphi}{2}\sin^{2l-2k}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l-k+\frac{1}{2}\right)}{l!\,\pi} \tag{23}$$

(см. п. 7 § 1 главы V). Мы получим равенство

$$P_l(\cos\theta)=\frac{e^{-il\theta}}{\pi}\sum_{k=0}^{l}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l-k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,(l-k)!}e^{2ik\theta}. \tag{24}$$

Так как

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=z+\sqrt{z^2-1},$$

то равенство (24) дает разложение $P_l(z)$ по степеням $z+\sqrt{z^2-1}$.

10. Многочлены Лежандра как зональные сферические функции. Мы определили многочлены Лежандра с помощью равенства

$$P_l(\cos\theta)=P^l_{00}(\cos\theta)=t^l_{00}(g),\qquad g=g(0,\,\theta,\,0), \tag{1}$$

где l — целое число. Но базисная функция

$$\psi_0(x)=\frac{x^l}{l!}$$

инвариантна относительно всех операторов вида $T_l(h)$, где

$$h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Согласно п. 6 § 2 главы I матричный элемент $t^l_{00}(g)$ в этом случае называется зональной сферической функцией представления $T_l(g)$ относительно подгруппы матриц вида (2). Таким образом, $P_l(\cos\theta)$ является *зональной сферической функцией представления* $T_l(g)$. Из свойств зональных сферических функций следует, что при $g=g(\varphi,\,\theta,\,\psi)$

$$t^l_{00}(g)=P_l(\cos\theta).$$

Рассмотрим теперь присоединенные сферические функции $t^l_{k0}(g)$ (см. п. 5 § 2 главы I). Из формулы (6) п. 3 следует, что

$$t^l_{k0}(g)=e^{-ik\varphi}P^l_{k0}(\cos\theta)$$

или, в силу равенства (9) п. 9

$$t^l_{k0}(g)=i^{-k}\sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}}\,e^{-ik\varphi}P^k_l(\cos\theta),\qquad -l\leqslant k\leqslant l.$$

В п. 5 § 2 главы I было отмечено, что присоединенные сферические функции можно рассматривать как функции на однородном пространстве $\mathfrak{M}=G/H$. В нашем случае это однородное пространство можно отождествить со сферой S^2 (см. п. 7 § 1). Поэтому $t^l_{k0}(g)$ — функции на сфере S^2.

Принято обозначать функции $t^l_{k0}(g)$, рассматриваемые как функции на сфере, через

$$Y_{lk}(\varphi, \theta), \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta < \pi.$$

В этом случае φ и θ являются не чем иным, как географическими координатами на сфере, причем широта отсчитывается не от экватора, а от полюса.

Ниже будет показано, что присоединенные сферические функции $Y_{lk}(\varphi, \theta)$, $l=0, 1, \ldots, \; -l \leqslant k \leqslant l$, образуют полную ортогональную систему функций на сфере S^2.

§ 4. Функциональные соотношения для функций $P^l_{mn}(z)$

1. Теорема сложения. Многие важные свойства функций $P^l_{mn}(z)$ связаны с теоремой сложения для этих функций. Чтобы вывести ее, воспользуемся соотношением

$$T_l(g_1g_2) = T_l(g_1)\, T_l(g_2). \tag{1}$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$t^l_{mn}(g_1g_2) = \sum_{k=-l}^{l} t^l_{mk}(g_1)\, t^l_{kn}(g_2). \tag{2}$$

Применим равенство (2) к матрицам g_1 и g_2, углы Эйлера которых равны соответственно $0, \theta_1, 0$ и $\varphi_2, \theta_2, 0$. Для этих матриц

$$t^l_{mk}(g_1) = P^l_{mk}(\cos\theta_1) \tag{3}$$

и

$$t^l_{kn}(g_2) = e^{-ik\varphi_2} P^l_{kn}(\cos\theta_2) \tag{4}$$

(см. формулу (6) п. 3 § 3).

Матричный же элемент $t^l_{mn}(g_1g_2)$ имеет вид

$$t^l_{mn}(g_1g_2) = e^{-i(m\varphi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta), \tag{5}$$

где φ, θ, ψ — углы Эйлера матрицы g_1g_2. Согласно п. 2 § 1 эти углы Эйлера выражаются через углы Эйлера $\theta_1, \varphi_2, \theta_2$ сомножителей по формулам

$$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_2, \tag{6}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_2 + i\sin\theta_2 \sin\varphi_2}{\sin\theta}, \tag{6'}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\, e^{\frac{i\varphi_2}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\, e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}, \tag{6''}$$

где, напомним,

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\theta < \pi,$$
$$0 \leqslant \operatorname{Re}\varphi < 2\pi,$$
$$-2\pi \leqslant \operatorname{Re}\psi < 2\pi.$$

Подставим значения $t^l_{mn}(g_1g_2)$, $t^l_{mk}(g_1)$ и $t^l_{kn}(g_2)$ в равенство (2). Мы получим тогда, что функции $P^l_{mn}(z)$ удовлетворяют следующей теореме сложения:

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta) = \sum_{k=-l}^{l} e^{-ik\varphi_2} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2), \tag{7}$$

где углы φ, ψ, θ, θ_1, φ_2, θ_2 связаны соотношениями (6) — (6″).

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы сложения. Пусть $\varphi_2 = 0$. Тогда, если $\operatorname{Re}(\theta_1+\theta_2) < \pi$, имеем $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\varphi = \psi = 0$, и поэтому формула (7) принимает следующий вид:

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1+\theta_2)] = \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{8}$$

Если же $\operatorname{Re}(\theta_1+\theta_2) > \pi$, то $\theta = 2\pi - \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \pi$ и $\psi = \pi$. Поэтому формула (7) принимает вид

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1+\theta_2)] = (-1)^{m+n} \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{9}$$

Пусть теперь $\varphi_2 = \pi$. Если $\operatorname{Re}\theta_1 \geqslant \operatorname{Re}\theta_2$, то $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = 0$, $\psi = \pi$, и поэтому получаем

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1-\theta_2)] = \sum_{k=-l}^{l} (-1)^{n-k} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{10}$$

В частности, при $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ имеем

$$\sum_{k=-l}^{l} (-1)^{n-k} P^l_{mk}(\cos\theta) P^l_{kn}(\cos\theta) = \delta_{mn}. \tag{11}$$

При **вещественных** значениях θ имеет место равенство

$$\overline{P^l_{mn}(\cos\theta)} = (-1)^{n-m} P^l_{mn}(\cos\theta)$$

(см. п. 6 § 3). Поэтому при вещественных θ_1 и θ_2 формулу (10) можно переписать следующим образом:

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1-\theta_2)]=\sum_{k=-l}^{l}P^l_{mk}(\cos\theta_1)\overline{P^l_{nk}(\cos\theta_2)}, \tag{10'}$$

где $\theta_1 \geqslant \theta_2$. При $\theta_1=\theta_2$ получаем

$$\sum_{k=-l}^{l}P^l_{mk}(\cos\theta_1)\overline{P^l_{nk}(\cos\theta_1)}=P^l_{mn}(1)=\delta_{mn}. \tag{11'}$$

Равенство (11') имеет простой групповой смысл. При вещественных θ матрица $g(0, \theta, 0)$ принадлежит подгруппе $SU(2)$. Но $T_l(u)$ является унитарным представлением этой подгруппы и, следовательно, матрица с элементами $P^l_{mn}(\cos\theta)$ унитарна.

Нам понадобится в дальнейшем еще случай, когда $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$. В этом случае формулы (6) — (6'') принимают следующий вид:

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{12}$$

$$e^{i\varphi}=\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2+i\sin\theta_2}{\sin\theta}, \tag{12'}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}=\frac{\sqrt{2}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+i\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right]}{2\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{12''}$$

Вместо формул (12') — (12'') удобнее взять формулы

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2}, \tag{13'}$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1\sin\theta_2}, \tag{13''}$$

непосредственно вытекающие из формул (3'), (3'') п. 2 § 1. Таким образом,

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)=\sum_{k=-l}^{l}i^{-k}P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^l_{kn}(\cos\theta_2), \tag{14}$$

где φ, ψ, θ, θ_1, θ_2 связаны соотношениями (12) — (12'').

2. Теорема сложения для многочленов Лежандра. Из доказанной теоремы сложения для функций $P^l_{mn}(z)$ вытекают, как частные случаи, теоремы сложения для многочленов Лежандра и присоединенных функций Лежандра. Мы определили эти многочлены формулами

$$P_l(z)=P^l_{00}(z) \tag{1}$$

и

$$P^m_l(z)=i^m\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}P^l_{m0}(z) \tag{2}$$

(см. п. 9 § 3).

Положив в формуле (7) п. 1 $n=0$ и воспользовавшись соотношениями (1) и (2), получаем

$$e^{-im\varphi}P^m_l(\cos\theta)=$$

$$=i^m\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\sum_{k=-l}^{l}i^{-k}\sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}}e^{-ik\varphi_2}P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^k_l(\cos\theta_2), \tag{3}$$

где числа φ, θ, φ_2, θ_1, θ_2 связаны соотношениями (6) — (6″) п. 1.

Если же положить $m=0$, $n=0$, то имеем

$$P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)=$$

$$=\sum_{k=-l}^{l}(-1)^k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}e^{-ik\varphi_2}P^k_l(\cos\theta_1)P^k_l(\cos\theta_2). \tag{4}$$

Это равенство можно упростить следующим образом. В силу соотношения симметрии $P^l_{m0}(z)=P^l_{-m,0}(z)$ и формулы (2) имеем

$$P^{-m}_l(z)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P^m_l(z).$$

Поэтому из равенства (4) следует, что многочлены Лежандра $P_l(z)$ удовлетворяют следующей теореме сложения:

$$P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)=$$

$$=\sum_{k=-l}^{l}e^{-ik\varphi_2}P^k_l(\cos\theta_1)P^{-k}_l(\cos\theta_2). \tag{5}$$

3. Формула умножения. Пусть в формуле сложения (7) п. 1 угол Эйлера φ_2 вещественный. Тогда равенство (7) п. 1 можно рассматривать как разложение в ряд Фурье функции $e^{-i(m\varphi+n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)$ (где φ, ψ и θ зависят от φ_2 по равенствам (6) — (6″) п. 1). Поэтому

$$P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^l_{kn}(\cos\theta_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k\varphi_2-m\varphi-n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)d\varphi_2. \tag{1}$$

Мы будем называть это равенство *формулой умножения* для функций $P^l_{mn}(z)$.

Отметим частный случай формулы (1). Положим в ней $m=n=0$. В силу соотношения (2) из п. 2 имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik\varphi_2} P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)\,d\varphi_2=$$

$$=(-1)^k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}P_l^k(\cos\theta_1)P_l^k(\cos\theta_2)=P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2). \quad (2)$$

Так как $P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)$ — четная функция от φ_2, то это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)\cos k\varphi_2\,d\varphi_2=$$

$$=P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2). \quad (2')$$

Если положить и $k=0$, то получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)\,d\varphi_2=$$

$$=P_l(\cos\theta_1)P_l(\cos\theta_2). \quad (3)$$

Геометрический смысл формулы (2) состоит в следующем. Выберем на единичной сфере точку A такую, что $\smile AN=\theta_1$ (N — северный полюс сферы), и проведем на сфере окружность с центром в точке A и сферическим радиусом θ_2. Обозначим через θ полярное расстояние точки B этой окружности, такой, что дуга AB большого круга образует угол φ_2 с меридианом AN. Формула (2) означает, что $P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2)$ является средним значением $P_l(\cos\theta)e^{ik\varphi_2}$ по этой окружности. В частности, $P_l(\cos\theta_1)\times$ $\times P_l(\cos\theta_2)$ — среднее значение для $P_l(\cos\theta)$.

Преобразуем формулу (2'). Будем считать θ_1, θ_2, φ_2 вещественными числами, такими, что $0\leqslant\theta_1<\pi$, $0\leqslant\theta_2<\pi$, $0\leqslant\theta_1+\theta_2<\pi$[1]), и сделаем замену переменной

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2. \quad (4)$$

Обозначим через $T_n(x)$ функцию $\cos(n\arccos x)$. Она называется *многочленом Чебышева первого рода.* Из равенства (4) вытекает, что

$$\cos k\varphi_2=T_k\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\right). \quad (5)$$

Кроме того, из равенства (4) следует, что

$$d\varphi_2=\frac{-\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{[\cos\theta-\cos(\theta_1+\theta_2)][\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta]}}. \quad (6)$$

Так как при изменении φ_2 от 0 до π переменная θ меняется от $\theta_1+\theta_2$ до $|\theta_1-\theta_2|$, то указанная выше замена переменной преобразует

[1]) Если последнее условие не выполнено, то надо заменить θ_1 и θ_2 на $\pi-\theta_1$, $\pi-\theta_2$.

интеграл (2′) к следующему виду:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\theta_1-\theta_2|}^{\theta_1+\theta_2} P_l(\cos\theta)\, T_k\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\right)\times$$
$$\times\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{[\cos\theta-\cos(\theta_1+\theta_2)]\,[\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta]}}=$$
$$=P_l^k(\cos\theta_1)\,P_l^{-k}(\cos\theta_2). \qquad (7)$$

Выражение, стоящее в знаменателе этой формулы, имеет простой геометрический смысл: оно равно площади сферического треугольника со сторонами θ_1, θ_2, θ, деленной на $4\pi^2$.

4. Рекуррентные формулы. Мы выведем сейчас формулы, связывающие функции $P^l_{mn}(z)$, нижние индексы которых отличаются друг от друга на 1. Эти формулы, называемые *рекуррентными формулами* для функций $P^l_{mn}(z)$, могут рассматриваться как инфинитезимальная форма теоремы сложения. Они получаются из теоремы сложения при бесконечно малом θ_2. Чтобы получить их, надо продифференцировать обе части формулы (7) из п. 1 по θ_2 и положить $\theta_2=0$. Нам будет удобнее вместо общей формулы (7) п. 1 использовать ее частные случаи, соответствующие значениям $\varphi_2=0$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ (см. формулы (8) и (14) из п. 1).

Предварительно найдем значения $\frac{d}{d\theta}[P^l_{mn}(\cos\theta)]$ при $\theta=0$. Для этого продифференцируем по θ обе части формулы (4), п. 4 § 3 и положим $\theta=0$. Мы получим

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{mn}(\cos\theta)]_{\theta=0}=\frac{i}{4\pi}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}[(l-n)\,e^{-i(n+1)\varphi}+(l+n)\,e^{-i(n-1)\varphi}]\,e^{im\varphi}\,d\varphi. \qquad (1)$$

Очевидно, что правая часть этого равенства равна нулю, если m отлично от $n+1$ или $n-1$. Если же $m=n+1$, то из формулы (1) вытекает, что

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{n+1,\,n}(\cos\theta)]_{\theta=0}=\frac{i}{2}\sqrt{(l-n)(l+n+1)}. \qquad (2)$$

Точно так же получаем

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{n-1,\,n}(\cos\theta)]_{\theta=0}=\frac{i}{2}\sqrt{(l+n)(l-n+1)}. \qquad (2')$$

Перейдем теперь к выводу рекуррентных соотношений. Продифференцируем обе части равенства (8) из п. 1 по θ_2, положим $\theta_2=0$ и используем соотношения (2) и (2′). Заменяя $\cos\theta_1$ на z, получим искомое рекуррентное соотношение

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}=-\frac{i}{2}\Big[\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z)+\\+\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(z)\Big]. \qquad (3)$$

Чтобы вывести второе рекуррентное соотношение, используем частный случай теоремы сложения, соответствующий $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$. Продифференцируем обе части формулы (14) п. 1 по θ_2, положим $\theta_2=0$ и используем соотношения (12) — (12″) п. 1. Получим после простых преобразований

$$i\left[m\frac{d\varphi}{d\theta_2}+n\frac{d\psi}{d\theta_2}\right]_{\theta_2=0}P^l_{mn}(\cos\theta_1)-\frac{dP^l_{mn}(\cos\theta_1)}{d\theta_1}\,\frac{d\theta}{d\theta_2}\Big|_{\theta_2=0}=\\=\frac{1}{2}\Big[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(\cos\theta_1)-\\-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(\cos\theta_1)\Big], \qquad (4)$$

где θ, φ, ψ выражаются через θ_1 и θ_2 по формулам (12) — (12″) п. 1.

Нам осталось найти значения производных $\frac{d\varphi}{d\theta_2}$, $\frac{d\psi}{d\theta_2}$, $\frac{d\theta}{d\theta_2}$ при $\theta_2=0$. Для этого продифференцируем равенство (12) из п. 1 по θ_2 и положим $\theta_2=0$. Так как при $\theta_2=0$ имеем $\theta=\theta_1$, $\varphi=0$, $\psi=\varphi_2=\pi/2$, то получаем $\frac{d\theta}{d\theta_2}\Big|_{\theta_2=0}=0$. Точно так же из формул (12′) и (12″) п. 1 выводится, что

$$\frac{d\varphi}{d\theta_2}\Big|_{\theta_2=0}=\frac{1}{\sin\theta_1}\quad\text{и}\quad\frac{d\psi}{d\theta_2}\Big|_{\theta_2=0}=-\operatorname{ctg}\theta_1.$$

Подставляя найденные значения производных в формулу (4) и заменяя $\cos\theta_1$ на z, получаем

$$i\left[\frac{m-nz}{\sqrt{1-z^2}}\right]P^l_{mn}(z)=\\=\frac{1}{2}\Big[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(z)-\\-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z)\Big]. \qquad (5)$$

Из рекуррентных формул (3) и (5) легко вытекают рекуррентные формулы

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{1-z^2}}P^l_{mn}(z)=\\=-i\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z) \qquad (6)$$

и

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}-\frac{nz-m}{\sqrt{1-z^2}}P^l_{mn}(z)=\\=-i\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(z). \qquad (7)$$

В силу соотношений симметрии из формул (6) и (7) следует, что

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{mz-n}{\sqrt{1-z^2}}P^l_{mn}(z)=$$
$$=-i\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,P^l_{m+1,\,n}(z) \quad (8)$$

и

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}-\frac{mz-n}{\sqrt{1-z^2}}P^l_{mn}(z)=$$
$$=-i\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,P^l_{m-1,\,n}(z). \quad (9)$$

Вычитая из формулы (6) формулу (7), получаем рекуррентное соотношение, связывающее три функции $P^l_{mn}(z)$ со смежными индексами:

$$2\frac{nz-m}{\sqrt{1-z^2}}P^l_{mn}(z)=$$
$$=i\left[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(z)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z)\right]. \quad (10)$$

Складывая же равенства (6) и (7), получаем

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}=$$
$$=-\frac{i}{2}\left[\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(z)\right]. \quad (11)$$

Положим в рекуррентных соотношениях (6) и (7) $m=0$ и воспользуемся равенством

$$P^l_{0n}(z)=i^{-n}\sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}}\,P^n_l(z).$$

Мы получим, что присоединенные функции Лежандра $P^m_l(z)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^n_l(z)}{dz}+\frac{nz}{\sqrt{1-z^2}}P^n_l(z)=-P^{n+1}_l(z) \quad (12)$$

и

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^n_l(z)}{dz}-\frac{nz}{\sqrt{1-z^2}}P^n_l(z)=(l+n)(l-n+1)\,P^{n-1}_l(z). \quad (13)$$

5. Дифференциальное уравнение. Из формулы (6) п. 4 вытекает, что дифференциальный оператор

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{d}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{1-z^2}} \quad (1)$$

переводит $P^l_{mn}(z)$ в $-i\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z)$. Из формулы же (7) п. 4 следует, что оператор

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{d}{dz}-\frac{(n+1)z-m}{\sqrt{1-z^2}} \tag{2}$$

переводит $P^l_{m,\,n+1}(z)$ в $-i\sqrt{(l+n+1)(l-n)}\,P^l_{mn}(z)$. Отсюда следует, что дифференциальный оператор

$$\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{d}{dz}-\frac{(n+1)z-m}{\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{d}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{1-z^2}}\right) \tag{3}$$

переводит $P^l_{mn}(z)$ в функцию $-(l-n)(l+n+1)\,P^l_{mn}(z)$. Иными словами, мы доказали, что функция $P^l_{mn}(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{d}{dz}-\frac{(n+1)z-m}{\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{d}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{1-z^2}}\right)P^l_{mn}(z)=$$
$$=-(l-n)(l+n+1)\,P^l_{mn}(z). \tag{4}$$

Раскроем в этом уравнении скобки и упростим его. Мы получим тогда уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2P^l_{mn}(z)}{dz^2}-2z\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}-\frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2}\,P^l_{mn}(z)=$$
$$=-l(l+1)\,P^l_{mn}(z). \tag{5}$$

Итак, *функции $P^l_{mn}(z)$ являются собственными функциями дифференциального оператора второго порядка,*

$$(1-z^2)\,\frac{d^2}{dz^2}-2z\,\frac{d}{dz}-\frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2}, \tag{6}$$

соответствующими собственному значению $-l(l+1)$. Эти функции принимают в точках $z=\pm 1$ конечные значения.

Можно показать, что этими условиями функции $P^l_{mn}(z)$ определяются однозначно, с точностью до постоянного множителя. Иными словами, любая собственная функция оператора (6), соответствующая собственному значению $-l(l+1)$ и принимающая конечные значения в точках $z=\pm 1$, пропорциональна $P^l_{mn}(z)$.

Можно доказать, что если m и n одновременно целые или полуцелые числа, то собственные функции оператора (6), конечные при $z=\pm 1$, существуют лишь для собственных чисел вида $\lambda=-l(l+1)$. Здесь l является целым или полуцелым числом одновременно с m и n.

Из дифференциального уравнения (5) в качестве частного случая при $n=0$ получаем дифференциальное уравнение для присоединенных функций Лежандра:

$$(1-z^2)\,\frac{d^2P^m_l(z)}{dz^2}-2z\,\frac{dP^m_l(z)}{dz}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]P^m_l(z)=0. \tag{7}$$

Если же положить не только $n=0$, но и $m=0$, то получим дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра:

$$(1-z^2)\frac{d^2P_l(z)}{dz^2}-2z\frac{dP_l(z)}{dz}+l(l+1)P_l(z)=0. \qquad (8)$$

6. Инфинитезимальные операторы регулярного представления. Рекуррентные соотношения для функций $P^l_{mn}(z)$ связаны с инфинитезимальными операторами регулярного представления.

Пусть $\omega(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы $SU(2)$. Операторы правого регулярного представления, соответствующие элементам этой подгруппы, переводят функции $f(u)$ в $R(\omega(t))f(u)=f(u\omega(t))$. Поэтому инфинитезимальный оператор представления $R(u)$, соответствующий однопараметрической подгруппе $\omega(t)$, переводит функцию $f(u)$ в значение функции $\frac{df(u\omega(t))}{dt}$ при $t=0$. Этот оператор определен, во всяком случае, в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на группе $SU(2)$.

Обозначим через $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ углы Эйлера элемента $u\omega(t)$. Тогда имеет место равенство

$$\left.\frac{df(u\omega(t))}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\varphi'(0)+\frac{\partial f}{\partial\theta}\theta'(0)+\frac{\partial f}{\partial\psi}\psi'(0). \qquad (1)$$

Итак, инфинитезимальный оператор $\hat{A}_\omega$, соответствующий подгруппе $\omega(t)$, имеет вид

$$\hat{A}_\omega=\varphi'(0)\frac{\partial}{\partial\varphi}+\theta'(0)\frac{\partial}{\partial\theta}+\psi'(0)\frac{\partial}{\partial\psi}. \qquad (2)$$

Поэтому вычисление оператора $\hat{A}_\omega$ сводится к вычислению производных $\varphi'(t)$, $\theta'(t)$, $\psi'(t)$ при $t=0$.

Вычислим инфинитезимальные операторы $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, соответствующие однопараметрическим подгруппам Ω_1, Ω_2, Ω_3 (см. п. 3, § 1). Напомним, что подгруппа Ω_3 состоит из матриц вида

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть $u=u(\varphi,\theta,\psi)$ — матрица с углами Эйлера φ, θ, ψ. Тогда углы Эйлера матрицы $u\omega_3(t)$ равны φ, θ, $\psi+t$. Отсюда вытекает, что

$$\varphi'(0)=0,\quad \theta'(0)=0,\quad \psi'(0)=1.$$

Итак, мы доказали, что инфинитезимальный оператор $\hat{A}_3$, соответствующий подгруппе Ω_3, имеет вид

$$\hat{A}_3=\frac{\partial}{\partial\psi}. \qquad (3)$$

Перейдем к вычислению инфинитезимального оператора $\hat{A}_1$, соответствующего подгруппе Ω_1. Эта подгруппа состоит из матриц вида

$$\omega_1(t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix},$$

углы Эйлера которых равны 0, t, 0. Применяя формулы, (2)—(2″) из п. 2 § 1, получаем, что углы Эйлера $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ матрицы $u\omega(t)$ связаны с углами Эйлера φ, θ, ψ матрицы u соотношениями

$$\cos\theta(t)=\cos\theta\cos t-\sin\theta\sin t\cos\psi, \tag{4}$$

$$e^{i\varphi(t)}=e^{i\varphi}\frac{\sin\theta\cos t+\cos\theta\sin t\cos\psi+i\sin t\sin\psi}{\sin\theta(t)}, \tag{4'}$$

$$e^{\frac{i[\varphi(t)+\psi(t)]}{2}}=e^{\frac{i\varphi}{2}}\frac{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{t}{2}e^{\frac{i\psi}{2}}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{t}{2}e^{-\frac{i\psi}{2}}}{\cos\frac{\theta(t)}{2}}. \tag{4''}$$

Для вычисления производных $\varphi'(t)$, $\theta'(t)$, $\psi'(t)$ при $t=0$ продифференцируем по t обе части каждого из равенств (4)—(4″) и положим $t=0$. Так как

$$\varphi(0)=\varphi,\quad \theta(0)=\theta,\quad \psi(0)=\psi,$$

то

$$\theta'(0)=\cos\psi,\quad \varphi'(0)=\frac{\sin\psi}{\sin\theta},\quad \psi'(0)=-\operatorname{ctg}\theta\sin\psi.$$

Отсюда вытекает, что инфинитезимальный оператор $\hat{A}_1$, соответствующий подгруппе Ω_1, имеет вид

$$\hat{A}_1=\cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\operatorname{ctg}\theta\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{5}$$

Оператор $\hat{A}_2$, соответствующий подгруппе Ω_2 матриц

$$\omega_2(t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix},$$

вычисляется точно так же. В результате получаем

$$\hat{A}_2=-\sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\operatorname{ctg}\theta\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{6}$$

Вместо операторов $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ удобно брать их линейные комбинации

$$\hat{H}_+=i\hat{A}_1-\hat{A}_2,\quad \hat{H}_-=i\hat{A}_1+\hat{A}_2,\quad \hat{H}_3=i\hat{A}_3.$$

Из формул (3), (5) и (6) вытекает, что эти операторы задаются равенствами:

$$\hat{H}_+ = e^{-i\psi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{7}$$

$$\hat{H}_- = e^{i\psi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{8}$$

$$\hat{H}_3 = i\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{9}$$

7. Инфинитезимальные операторы и рекуррентные формулы. Мы дадим сейчас другой вывод рекуррентных соотношений для функций $P^l_{mn}(z)$, основанный на реализации представлений $T_l(u)$ в пространстве функций на группе $SU(2)$. В п. 5 § 2 главы I было показано, что если $T(g)$ — представление группы G в пространстве $\mathfrak{H}$ и $\mathbf{a}$ — вектор из $\mathfrak{H}$, то равенство

$$R(g_0)f(g) = f(gg_0),$$

где

$$f(g) = (T(g)\mathbf{f},\ \mathbf{a}), \qquad \mathbf{f}\in\mathfrak{H}, \quad g\in G,$$

задает представление группы G, эквивалентное $T(g)$. При этом матрица представления $T(g)$ в базисе $\{\mathbf{e}_n\}$ совпадает с матрицей представления $R(g)$ в базисе

$$\varphi_n(g) = (T(g)\mathbf{e}_n,\ \mathbf{a}).$$

Применим эти результаты к группе $SU(2)$ и ее неприводимым представлениям $T_l(u)$. В качестве базиса в $\mathfrak{H}_l$ выберем базис

$$\psi_n(x) = \frac{x^{l-n}}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}, \qquad -l\leqslant n\leqslant l,$$

а в качестве вектора $\mathbf{a}$ — базисную функцию $\psi_m(x)$. При отображении $\mathbf{f}\to f(u)$ выбранному базису соответствует базис, состоящий из функций $(T_l(u)\psi_n,\ \psi_m)$, т. е. из элементов $t^l_{mn}(u)$ m-й строки матрицы представления $T_l(u)$ в базисе $\{\psi_n(x)\}$. Обозначим представление группы $SU(2)$ в пространстве $\mathfrak{H}_{lm}$ функций $f(u)$ через $R_{lm}(u)$. В силу сказанного выше *матрица представления $R_{lm}(u)$ в базисе $\{t^l_{mn}(u)\}$, $-l\leqslant n\leqslant l$ совпадает с матрицей представления $T_l(u)$ в базисе $\{\psi_n(x)\}$, $-l\leqslant n\leqslant l$.*

Но если совпадают матрицы представления, то совпадают и матрицы инфинитезимальных операторов, поскольку они однозначно определяются операторами представления. Обозначим инфинитезимальные операторы представления $R_{lm}(u)$ через A^{lm}_k, $1\leqslant k\leqslant 3$. Принимая во внимание формулы (6) п. 3 § 2 и сделанное замечание о совпадении матриц, получаем

$$H_+^{lm} t^l_{mn}(u) = -\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\, t^l_{m,\,n+1}(u), \tag{1}$$

$$H_-^{lm} t^l_{mn}(u) = -\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\, t^l_{m,\,n-1}(u), \tag{2}$$

$$H_3^{lm} t^l_{mn}(u) = n t^l_{mn}(u), \tag{3}$$

где $H_+^{lm} = iA_1^{lm} - A_2^{lm}$, $H_-^{lm} = iA_1^{lm} + A_2^{lm}$, $H_3^{lm} = iA_3^{lm}$.

Чтобы получить искомые рекуррентные соотношения, нам осталось вычислить инфинитезимальные операторы A_k^{lm} и подставить их выражения, равно как и выражения для $t^l_{mn}(u)$, в формулы (1)—(3). Для вычисления инфинитезимальных операторов заметим, что представление $R_{lm}(u)$ является сужением на подпространство $\mathfrak{H}_{lm}$ правого регулярного представления

$$R(u_0) f(u) = f(uu_0).$$

Поэтому операторы H_+^{lm}, H_-^{lm} и H_3^{lm} задаются теми же формулами, что и операторы $\hat{H}_+$, $\hat{H}_-$, $\hat{H}_3$ (см. формулы (7)—(9) п. 6). Подставим выражения для H_+^{lm} и H_-^{lm} и выражение (6) п. 3 § 3 для $t^l_{mn}(u)$ в формулы (1)—(3). После простых преобразований получим рекуррентные формулы для $P^l_{mn}(z)$:

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz} - \frac{m-nz}{\sqrt{1-z^2}}\,P^l_{mn}(z) = \\ = -i\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,\,n+1}(z)$$

и

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz} + \frac{m-nz}{\sqrt{1-z^2}}\,P^l_{mn}(z) = \\ = -i\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,\,n-1}(z)$$

8. Оператор Лапласа. Найденные выражения операторов A_k^{lm} $k = 1, 2, 3$ позволяют дать новый вывод дифференциального уравнения для функций $P^l_{mn}(z)$. С этой целью рассмотрим оператор

$$\Delta_{lm} = (A_1^{lm})^2 + (A_2^{lm})^2 + (A_3^{lm})^2.$$

Так как операторы A_k^{lm} задаются теми же матрицами, что и операторы A_k, $k = 1, 2, 3$, то матрица оператора Δ_{lm} совпадает с матрицей оператора $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$. Но из формул (5)—(7) п. 2 § 2 находим после несложных преобразований, что

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = -l(l+1)E.$$

Следовательно, и

$$\Delta_{lm} = -l(l+1)E \qquad (\text{в пространстве } \mathfrak{H}_{lm}). \tag{1}$$

Чтобы получить явное выражение оператора Δ_{lm} через углы Эйлера, воспользуемся выражениями (3), (5) и (6) п. 6. Мы получим

$$\Delta_{lm}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2\cos\theta\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right). \tag{2}$$

Поскольку матричные элементы $t^l_{mn}(u)$, $-l\leqslant n\leqslant l$ принадлежат пространству $\mathfrak{H}_{lm}$, для них выполняется равенство

$$\Delta_{lm}t^l_{mn}(u)=-l(l+1)\,t^l_{mn}(u).$$

Подставляя в это равенство вместо Δ_{lm} выражение (2), а вместо $t^l_{mn}(u)$ выражение (6) п. 3 § 3, получаем после несложных преобразований дифференциальное уравнение для функций $P^l_{mn}(z)$:

$$(1-z^2)\,\frac{d^2P^l_{mn}(z)}{dz^2}-2z\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}-\\ -\frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2}P^l_{mn}(z)=-l(l+1)\,P^l_{mn}(z). \tag{3}$$

Заметим, что операторы A^{mn}_k являются сужением на подпространство $\mathfrak{H}_{lm}$ инфинитезимальных операторов $\hat{A}_k$, $k=1, 2, 3$ правого регулярного представления $R(g)$. Поэтому и оператор Δ_{lm} — сужение на $\mathfrak{H}_{lm}$ оператора

$$\Delta=\hat{A}_1^2+\hat{A}_2^2+\hat{A}_3^2. \tag{4}$$

Этот оператор называется *оператором Лапласа на группе* $SU(2)$ и выражается через углы Эйлера той же формулой, что и Δ_{lm} (см. (2)):

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2\cos\theta\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right). \tag{5}$$

Замечательным свойством оператора Лапласа Δ является его перестановочность с операторами правого сдвига:

$$\Delta R(u)=R(u)\,\Delta, \tag{6}$$

где

$$R(u_0)f(u)=f(uu_0).$$

Это утверждение можно доказать, например, разложив правое регулярное представление $R(g)$ на неприводимые, и заметив, что сужение Δ на подпространства $\mathfrak{H}_{lm}$ кратно единичному оператору (см. формулу (1)). Следовательно, оператор Δ перестановочен со всеми неприводимыми компонентами $R_{lm}(g)$, а тогда он перестановочен и с операторами $R(g)$.

Другой путь доказательства, не использующий формулу (1), заключается в следующем. Покажем сначала, что оператор Δ перестановочен с инфинитезимальными операторами $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$. Как было отмечено в п. 10 § 1 главы I, инфинитезимальные операторы представления удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и соответствующие элементы алгебры Ли данной группы. Но в п. 3 § 1 было показано, что касательные матрицы a_1, a_2, a_3 к однопараметрическим подгруппам Ω_1, Ω_2, Ω_3 удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[a_1,\ a_2]=a_3,$$
$$[a_2,\ a_3]=a_1,$$
$$[a_3,\ a_1]=a_2.$$

Поэтому имеют место равенства:

$$[\hat{A}_1,\ \hat{A}_2]=\hat{A}_3,$$
$$[\hat{A}_2,\ \hat{A}_3]=\hat{A}_1,$$
$$[\hat{A}_3,\ \hat{A}_1]=\hat{A}_2.$$

Пользуясь этими равенствами, находим

$$[\hat{A}_2^2,\ \hat{A}_1]=\hat{A}_2\hat{A}_2\hat{A}_1-\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_2=\hat{A}_2\hat{A}_2\hat{A}_1-\hat{A}_2\hat{A}_1\hat{A}_2-\hat{A}_3\hat{A}_2=$$
$$=\hat{A}_2[\hat{A}_2,\ \hat{A}_1]-\hat{A}_3\hat{A}_2=-\hat{A}_2\hat{A}_3-\hat{A}_3\hat{A}_2.$$

Аналогично доказывается, что

$$[\hat{A}_3^2,\ A_1]=\hat{A}_2\hat{A}_3+\hat{A}_3\hat{A}_2.$$

Наконец, $[\hat{A}_1^2,\ \hat{A}_1]=0$. Из полученных равенств вытекает, что

$$[\Delta,\ \hat{A}_1]=[\hat{A}_1^2+\hat{A}_2^2+\hat{A}_3^2,\ \hat{A}_1]=0.$$

Точно так же доказывается, что $[\Delta,\ \hat{A}_2]=0$ и $[\Delta,\ \hat{A}_3]=0$.

Согласно п. 10 § 1 главы I операторы представления $R(u)$ выражаются через инфинитезимальные операторы $\hat{A}_k$, $k=1,\ 2,\ 3$ по формулам

$$R(u)=\exp(t_1\hat{A}_1+t_2\hat{A}_2+t_3\hat{A}_3),$$

где

$$u=\exp(t_1a_1+t_2a_2+t_3a_3).$$

Поэтому из равенств $[\Delta,\ \hat{A}_k]=0$ следует, что операторы $R(u)$ перестановочны с оператором Лапласа Δ.

Можно показать, что оператор Лапласа Δ на группе $SU(2)$ перестановочен не только с правыми, но и с левыми сдвигами:

$$\Delta L(u)=L(u)\Delta,$$

где

$$L(u_0)f(u)=f(u_0^{-1}u).$$

Сузим оператор Δ на подпространство $\mathfrak{H}_0$ функции $f(u)$, постоянных на правых классах смежности по подгруппе Ω, состоящей из матриц $\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}$, или, что то же, на пространство функций, заданных на единичной сфере S^2. Ясно, что функции $f(u)$ из $\mathfrak{H}_0$ не зависят от угла Эйлера φ и потому оператор Лапласа на единичной сфере S^2 имеет вид

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}.$$

Через ψ, θ здесь обозначены географические координаты на сфере. Оператор Δ_0 — это угловая часть оператора Лапласа в трехмерном евклидовом пространстве.

9. Дальнейшие рекуррентные соотношения. Рекуррентные соотношения иного типа можно получить, если воспользоваться доказанным в п. 6 § 1 свойством касательных матриц однопараметрических подгрупп. Именно, мы доказали, что если $a = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ — касательная матрица подгруппы $g(t)$, то касательная матрица подгруппы $g_0g(t)g_0^{-1}$, $g_0 \in SO(3)$ имеет вид $b = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3$, где $\mathbf{y} = g_0\mathbf{x}$. Отсюда вытекает, что для любого представления $T(g)$ имеет место равенство

$$T(g_0)A_{\mathbf{x}}T(g_0^{-1}) = A_{\mathbf{y}},$$

где $A_{\mathbf{x}}$ — инфинитезимальный оператор, соответствующий однопараметрической подгруппе $g(t)$ и $A_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y} = g_0\mathbf{x}$ — инфинитезимальный оператор, соответствующий подгруппе $g_0g(t)g_0^{-1}$. Таким образом,

$$T(g_0)A_{\mathbf{x}} = A_{g_0\mathbf{x}}T(g_0). \tag{1}$$

Положим в равенстве (1) $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$. Компоненты вектора $g_0\mathbf{x}$ будут элементами первого столбца матрицы вращения g_0 с углами Эйлера φ, θ, ψ (см. п. 6 § 1). Из равенства (1) получаем, таким образом, при $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} T(g_0)A_1 = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)A_1T(g_0) + \\ + (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)A_2T(g_0) + \sin\psi\sin\theta A_3T(g_0). \end{aligned}$$

Перейдем от матриц A_1, A_2, A_3 к H_+, H_-, H_3 по формулам

$$\begin{aligned} H_+ &= iA_1 - A_2, \\ H_- &= iA_1 + A_2, \\ H_3 &= iA_3. \end{aligned}$$

Сделав это и собрав коэффициенты при H_+ и H_- в правой части, получим соотношение

$$\begin{aligned} T(g_0)(H_+ + H_-) = e^{-i\varphi}(\cos\psi - i\sin\psi\cos\theta)H_+T(g_0) + \\ + e^{i\varphi}(\cos\psi + i\sin\psi\cos\theta)H_-T(g_0) + 2\sin\psi\sin\theta H_3T(g_0), \end{aligned}$$

где $g_0 = g(\varphi, \theta, \psi)$.

Применим преобразования, стоящие в обеих частях равенства, к вектору $\mathbf{f}_n$ канонического базиса и сравним коэффициенты при $\mathbf{f}_m$ в полученных выражениях. Мы имеем

$$T(g_0)\,\mathbf{f}_n=\sum_m t_{mn}(g_0)\,\mathbf{f}_m,$$
$$H_+\mathbf{f}_n=-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,\mathbf{f}_{n+1},$$
$$H_-\mathbf{f}_n=-\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,\mathbf{f}_{n-1},$$
$$H_3\mathbf{f}_n=n\mathbf{f}_n.$$

Учитывая эти соотношения, а также выражение матричных элементов $t^l_{mn}(g_0)$ через углы Эйлера φ, θ, ψ, получаем

$$\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,e^{-i\psi}P^l_{m,n+1}(\cos\theta)+\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,e^{i\psi}P^l_{m,n-1}(\cos\theta)=$$
$$=\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,(\cos\psi-i\sin\psi\cos\theta)\,P^l_{m-1,n}(\cos\theta)+\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,(\cos\psi+i\sin\psi\cos\theta)\,P^l_{m+1,n}(\cos\theta)-$$
$$-2m\sin\psi\sin\theta P^l_{mn}(\cos\theta).$$

Это равенство имеет место при всех значениях ψ. Положим в нем $\cos\psi=\frac{e^{i\psi}+e^{-i\psi}}{2}$ и $\sin\psi=\frac{e^{i\psi}-e^{-i\psi}}{2i}$ и приравняем коэффициенты при $e^{i\psi}$ и $e^{-i\psi}$ в левых и правых частях. Мы получим искомые рекуррентные формулы

$$\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,n-1}(\cos\theta)=\frac{1}{2}\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\times(1-\cos\theta)\,P^l_{m-1,n}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\times(1+\cos\theta)\,P^l_{m+1,n}(\cos\theta)+mi\sin\theta P^l_{mn}(\cos\theta) \tag{2}$$

и

$$\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,n+1}(\cos\theta)=\frac{1}{2}\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\times(1+\cos\theta)\,P^l_{m-1,n}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\times(1-\cos\theta)\,P^l_{m+1,n}(\cos\theta)-mi\sin\theta P^l_{mn}(\cos\theta). \tag{3}$$

Эти формулы связывают три соседних элемента n-го столбца с элементами $(n-1)$-го или $(n+1)$-го столбца. Воспользовавшись соотношениями симметрии для функций $P^l_{mn}(z)$, получаем аналогичные формулы, связывающие три соседних элемента строки с элементом выше или ниже расположенной строки. Предоставляем читателю выписать эти формулы.

Если в равенстве (1) взять $\mathbf{x}=(0,\ 1,\ 0)$, то получатся те же самые рекуррентные формулы. При $\mathbf{x}=(0,\ 0,\ 1)$ получаем формулы из п. 4.

§ 5. Производящие функции для $P^l_{mn}(z)$

В этом параграфе будет указан новый способ вывода рекуррентных формул, основанный на использовании производящих функций. Функция $f(z, h)$ называется *производящей* для функций $\varphi_k(z)$, если ее разложение по степеням h имеет вид

$$f(z, h)=\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(z) h^k.$$

Мы рассмотрим два вида производящих функций для $P^l_{mn}(z)$. Один из них дает функции $P^l_{mn}(z)$ с фиксированными значениями l и n, а второй — с фиксированными значениями m и n.

1. Случай фиксированных l и n. Чтобы получить производящую функцию для $P^l_{mn}(z)$ при фиксированных значениях l и n, перепишем равенство (4) п. 4 § 3 в виде

$$\frac{P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l-n}\times$$
$$\times\left(i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l+n}e^{im\varphi}\,d\varphi. \qquad (1)$$

Эта формула означает, что функции $\dfrac{P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}$ являются коэффициентами Фурье для

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l-n}\times$$
$$\times\left(i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l+n}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l-n}\times$$
$$\times\left(i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l+n}=$$
$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}e^{-im\varphi}. \qquad (2)$$

Умножив обе части этого равенства на $e^{il\varphi}$ и заменив $e^{i\varphi}$ на w, получим

$$F(w)\equiv\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n}\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n}=$$
$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}w^{l-m}. \qquad (3)$$

Итак, $F(w)$ является производящей функцией для $P^l_{mn}(\cos\theta)$.

Из равенства (3) можно вывести некоторые любопытные тождества для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$. Например, полагая $w=1$, получаем

$$\sum_{m=-l}^{l}\frac{P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}=\frac{e^{il\theta}}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}. \qquad (4)$$

Полагая же $w=-1$, получаем

$$\sum_{m=-l}^{l}\frac{(-1)^{n-m}P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}=\frac{e^{-il\theta}}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}. \qquad (4')$$

Наконец, полагая $n=0$ и $w=\pm i$, имеем

$$\sum_{m=-l}^{l}\frac{i^{\pm m}P^l_{m0}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}=\frac{\cos^l\theta}{l!}. \qquad (5)$$

Принимая во внимание равенство (9) из п. 9 § 3, можно переписать формулу (5) в следующем виде:

$$\sum_{m=-l}^{l}\frac{(\pm 1)^m P^m_l(\cos\theta)}{(l+m)!}=\frac{\cos^l\theta}{l!}. \qquad (6)$$

Покажем теперь, как вывести из разложения (3) рекуррентные формулы для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$. Продифференцировав обе части этого разложения по θ, получим

$$\frac{i\sqrt{l-n}}{2\sqrt{(l-n-1)!\,(l+n)!}}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n-1}\times$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n+1}+\frac{i\sqrt{l+n}}{2\sqrt{(l-n)!\,(l+n-1)!}}\times$$
$$\times\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n+1}\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n-1}=$$
$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{\frac{d}{d\theta}[P^l_{mn}(\cos\theta)]}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}w^{l-m}.$$

Левая часть этого равенства является линейной комбинацией выражений того же типа, что и левая часть равенства (3), с той лишь разницей, что в одном слагаемом n заменено на $n+1$, а в другом — на $n-1$. Применяя к этим выражениям разложение (3) и сравнивая коэффициенты при w^{l-m}, получаем

$$\frac{d}{d\theta}\left[P^l_{mn}(\cos\theta)\right]=\frac{i}{2}\left[\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,n+1}(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,n-1}(\cos\theta)\right]. \quad (7)$$

Иными словами,

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}=-\frac{i}{2}\left[\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,n+1}(z)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,n-1}(z)\right]. \quad (7')$$

Мы снова вывели, таким образом, формулу (11) из п. 4 § 4.

Для того чтобы вывести формулу (10) из п. 4 § 4, умножим обе части разложения (3) на соответствующие части тождества

$$\cos\frac{\theta}{2}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\frac{\theta}{2}\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=w$$

и продифференцируем по w. Мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left[(l+1-n\cos\theta)\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n}\times\right.$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n}+\frac{i(l+n)\sin\theta}{2}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n+1}\times$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n-1}-\frac{i(l-n)\sin\theta}{2}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n-1}\times$$
$$\left.\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n+1}\right]=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m+1)\,P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}\,w^{l-m}.$$

Выражение в квадратных скобках является линейной комбинацией выражений, аналогичных левой части разложения (3) с той лишь разницей, что в некоторых слагаемых n заменено на $n-1$ или $n+1$. Разлагая эти выражения по формуле (3) и сравнивая коэффициенты при w^{l-m}, приходим к равенству

$$l(m-n\cos\theta)\,P^l_{mn}(\cos\theta)=$$
$$=\frac{\sin\theta}{2}\left[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,P^l_{m,n+1}(\cos\theta)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,P^l_{m,n+1}(\cos\theta)\right]. \quad (8)$$

Заменяя здесь $\cos\theta$ на z, получаем формулу (10) из п. 4 § 4.

2. Рекуррентные формулы при различных значениях l. С помощью производящей функции, выведенной в предыдущем пункте.

легко получить рекуррентные формулы, связывающие функции $P^l_{mn}(z)$ с различными значениями l. Например, продифференцировав обе части разложения (3) из п. 1 по w, получим

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left[(l-n)\cos\frac{\theta}{2}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n-1}\times\right.$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n}+i(l+n)\sin\frac{\theta}{2}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n}\times$$
$$\left.\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n-1}\right]=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)\,P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}w^{l-m-1}. \quad (1)$$

Применим к обоим слагаемым в левой части этого равенства разложение (3) п. 1 $\left(\text{с заменой } l \text{ на } l-\frac{1}{2}\right)$ и сравним коэффициенты при одинаковых степенях w:

$$\sqrt{l-n}\cos\frac{\theta}{2}P^{l-1/2}_{m+1/2,\,n+1/2}(\cos\theta)+$$
$$+i\sqrt{l+n}\sin\frac{\theta}{2}P^{l-1/2}_{m+1/2,\,n-1/2}(\cos\theta)=\sqrt{l-m}\,P^l_{mn}(\cos\theta). \quad (2)$$

Затем, умножив обе части равенства (3) из п. 1 на выражение $w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n+1}\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n}=$$
$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{\cos\frac{\theta}{2}P^l_{mn}(\cos\theta)\,w^{l-m+1}+i\sin\frac{\theta}{2}P^l_{mn}(\cos\theta)\,w^{l-m}}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}.$$

Левая часть этого равенства имеет тот же вид, что и левая часть равенства (3) с заменой l на $l+\frac{1}{2}$ и n на $n-\frac{1}{2}$. Сравнивая коэффициенты при w^{l-m+1}, находим

$$\sqrt{l-n+1}\,P^{l+1/2}_{m-1/2,\,n-1/2}(\cos\theta)=$$
$$=\sqrt{l-m+1}\cos\frac{\theta}{2}P^l_{mn}(\cos\theta)+i\sqrt{l+m}\sin\frac{\theta}{2}P^l_{m-1,\,n}(\cos\theta). \quad (3)$$

Аналогично, умножая обе части равенства (3) из п. 1 на выражение $iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$, получаем

$$\sqrt{l+n+1}\,P^{l+1/2}_{m-1/2,\,n+1/2}(\cos\theta)=$$
$$=i\sqrt{l-m+1}\sin\frac{\theta}{2}P^l_{mn}(\cos\theta)+\sqrt{l+m}\cos\frac{\theta}{2}P^l_{m-1,\,n}(\cos\theta). \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) непосредственно следует, что

$$-i\sqrt{l-n+1}\sin\frac{\theta}{2}P^{l+1/2}_{m+1/2,\,n-1/2}(\cos\theta)+$$
$$+\sqrt{l+n+1}\cos\frac{\theta}{2}P^{l+1/2}_{m+1/2,\,n+1/2}(\cos\theta)=\sqrt{l+m+1}\,P^l_{mn}(\cos\theta). \tag{5}$$

и

$$\sqrt{l-n+1}\cos\frac{\theta}{2}P^{l+1/2}_{m-1/2,\,n-1/2}(\cos\theta)-$$
$$-i\sqrt{l+n+1}\sin\frac{\theta}{2}P^{l+1/2}_{m-1/2,\,n+1/2}(\cos\theta)=$$
$$=\sqrt{l-m+1}\,P^l_{mn}(\cos\theta). \tag{6}$$

Связь между функциями $P^l_{mn}(\cos\theta)$, верхние индексы которых отличаются на 1, выводится точно так же. Например, умножим обе части равенства (3) из п. 1 на соответствующие части тождества

$$\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{i(w^2+1)}{2}\sin\theta+w\cos\theta.$$

После простых преобразований находим

$$\sqrt{(l-n+1)(l+n+1)}\,P^{l+1}_{mn}(\cos\theta)=$$
$$=\sqrt{(l-m+1)(l+m+1)}\cos\theta\,P^l_{mn}(\cos\theta)+$$
$$+\frac{i\sin\theta}{2}\Big[\sqrt{(l-m)(l-m+1)}\,P^l_{m+1,\,n}(\cos\theta)+$$
$$+\sqrt{(l+m)(l+m+1)}\,P^l_{m-1,\,n}(\cos\theta)\Big], \tag{7}$$

Другие соотношения получаются путем двукратного применения соотношения (3) или (4):

$$\sqrt{(l-n)(l-n+1)}\,P^{l+1}_{mn}(\cos\theta)=$$
$$=\sqrt{(l-m)(l-m+1)}\cos^2\frac{\theta}{2}P^l_{m+1,\,n+1}(\cos\theta)+$$
$$+i\sqrt{(l-m+1)(l+m+1)}\sin\theta\,P^l_{m,\,n+1}(\cos\theta)-$$
$$-\sqrt{(l+m)(l+m+1)}\sin^2\frac{\theta}{2}P^l_{m-1,\,n+1}(\cos\theta) \tag{8}$$

и

$$\sqrt{(l+n)(l+n+1)}\,P^{l+1}_{mn}(\cos\theta)=$$
$$=-\sqrt{(l-m)(l-m+1)}\sin^2\frac{\theta}{2}P^l_{m+1,\,n-1}(\cos\theta)+$$
$$+i\sqrt{(l-m+1)(l+m+1)}\sin\theta\,P^l_{m,\,n-1}(\cos\theta)+$$
$$+\sqrt{(l+m)(l+m+1)}\cos^2\frac{\theta}{2}P^l_{m-1,\,n-1}(\cos\theta). \tag{9}$$

Дальнейшие соотношения, связывающие функции $P^l_{mn}(z)$ с разными значениями l, получаем, рассмотрев два разложения:

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!}}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l-n}\times$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+n}=\sum_{m=-l}^{l}\frac{P^l_{mn}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}\,w^{l-m}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{(s-r)!\,(s+r)!}}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{s-r}\times$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{s+r}=\sum_{q=-s}^{s}\frac{P^s_{qr}(\cos\theta)}{\sqrt{(s-q)!\,(s+q)!}}\,w^{s-q}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{(l-n)!\,(l+n)!\,(s-r)!\,(s+r)!}}\left(w\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l+s-n-r}\times$$
$$\times\left(iw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l+s+n+r}=$$
$$=\sum_{q=-l-s}^{l+s}\left[\sum_{m=L}^{M}\frac{P^l_{mn}(\cos\theta)\,P^s_{q-m,\,r}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!\,(s-q+m)!\,(s+q-m)!}}\right]w^{l+s-q},$$

где $L=\max(-l,\ q-s)$, $M=\min(l,\ s+q)$. Применяя к левой части этого равенства разложение (3) п. 1 и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, находим

$$P^{l+s}_{q,\,n+r}(\cos\theta)=A^{ls}_{nr}\sum_{m=L}^{M}B^{ls}_{mqr}P^l_{mn}(\cos\theta)\,P^s_{q-m,\,r}(\cos\theta),\qquad(10)$$

где L и M имеют указанный выше смысл, и

$$A^{ls}_{nr}=\sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+n)!}{(l+s-n-r)!\,(l+s+n+r)!}},$$
$$B^{ls}_{mqr}=\sqrt{\frac{(s-r)!\,(s+r)!\,(l+s-q)!\,(l+s+q)!}{(l-m)!\,(l+m)!\,(s-q+m)!\,(s+q-m)!}}.$$

Для получения дальнейших формул воспользуемся доказанным в п. 1 § 4 равенством

$$\sum_{n=-l}^{l}(-1)^{k-n}P^l_{mn}(\cos\theta)\,P^l_{nk}(\cos\theta)=\delta_{mk}.$$

Умножим обе части равенства (10) на $(-1)^{k-n}P^l_{nk}/A^{ls}_{nr}$ и просуммируем получающиеся при этом соотношения по n от $-l$ до l. Мы получим, что при $L \leqslant k \leqslant M$

$$P^s_{q-k,\ r}(\cos\theta) = \frac{1}{B^{ls}_{kqr}} \sum_{n=-l}^{l} \frac{(-1)^{k-n} P^l_{nk}(\cos\theta)\, P^{l+s}_{q,\ n+r}(\cos\theta)}{A^{ls}_{nr}}, \tag{11}$$

а при остальных k эта сумма равна нулю.

Укажем в заключение еще одно выражение для $P^l_{m0}(\cos\theta)$, где l — целое число. Имеет место тождество

$$\left(w\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)^l \left(iw\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^l = w^l\left(\cos\theta + i\,\frac{w^2+1}{2w}\sin\theta\right)^l.$$

Применив к обеим частям этого тождества соотношение (3) п. 1, получим

$$\sum_{m=-l}^{l} \frac{l!\, P^l_{m0}(\cos\theta)}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}\, w^{l-m} =$$

$$= \sum_{s=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{l!}{\left(\frac{l}{2}-s\right)!\,\left(\frac{l}{2}+s\right)!}}\; P^{\frac{l}{2}}_{s,\ -\frac{l}{2}}(\cos 2\theta)\, w^{\frac{l}{2}+s} \left(\frac{w^2+1}{2}\right)^{\frac{l}{2}-s}.$$

Раскроем далее скобки в $\left(\frac{w^2+1}{2}\right)^{\frac{l}{2}-s}$ и примем во внимание выражение (6) из п. 5 § 3 для $P^{\frac{l}{2}}_{s,\ -\frac{l}{2}}(\cos 2\theta)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, получим

$$P^l_{m0}(\cos\theta) = \sum_{s=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{i^{\frac{l}{2}+s} \sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}\, \cos^{\frac{l}{2}-s}\theta\, \sin^{\frac{l}{2}+s}\theta}{2^{\frac{l}{2}-s} \left(\frac{l}{2}+s\right)!\, m!\, \left(\frac{l}{2}-s-m\right)!}. \tag{12}$$

Отсюда в силу формулы (9) п. 9 § 4 имеем

$$P^m_l(\cos\theta) = \sum_{s=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{i^{\frac{l}{2}+s+m} (l+m)!\, \cos^{\frac{l}{2}-s}\theta\, \sin^{\frac{l}{2}+s}\theta}{2^{\frac{l}{2}-s} \left(\frac{l}{2}+s\right)!\ m!\left(\frac{l}{2}-s-m\right)!}. \tag{13}$$

3. Случай фиксированных m и n. Чтобы вывести производящую функцию для $P^l_{mn}(\cos\theta)$ при фиксированных значениях m и n, нам понадобится новое интегральное представление для этих функций. Оно получается из интегрального представления (4) п. 4 § 3 путем замены переменной интегрирования. Именно, запишем это интегральное представление в виде

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\times$$
$$\times\oint\limits_{|t|=1}\left[\cos\theta+\frac{i}{2}\sin\theta\,(t+t^{-1})\right]^{l-n}\left(it\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n}t^{m-n-1}dt$$

и предположим, что $m\geqslant n\geqslant 0$ [1]). В силу теоремы Коши мы можем заменить путь интегрирования контуром Γ': $|t|=a$, где $a>1$. Сделаем теперь замену переменной

$$w=\cos\theta+\frac{i}{2}\sin\theta\,(t+t^{-1}).$$

Когда t пробегает контур Γ', переменная w пробегает контур Γ'', охватывающий отрезок $[e^{-i\theta}, e^{i\theta}]$, против часовой стрелки. Переменная t однозначно определяется переменной w, если разрезать плоскость w вдоль отрезка $[e^{-i\theta}, e^{i\theta}]$.

Именно, мы имеем

$$t=\frac{w-\cos\theta+\sqrt{w^2-2w\cos\theta+1}}{i\sin\theta}, \tag{1}$$

где знак корня выбирается из условия $|t|>1$.

Не теряя общности, можно считать, что контур Γ'' — это окружность $|w|=b$, где $b>1$.

После замены переменной получаем

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\times$$
$$\times\oint\limits_{\Gamma''}w^{l-n}t^{m-n}\left(\cos\frac{\theta}{2}+it\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n}\frac{dw}{\sqrt{w^2-2w\cos\theta+1}}, \tag{2}$$

где t задается формулой (1), а знак корня выбран так, что $|t|>1$.

---

[1]) Это ограничение несущественно, поскольку в силу соотношений симметрии (см. п. 6 § 3),

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=P^l_{nm}(\cos\theta)=P^l_{-m,\,-n}(\cos\theta)=P^l_{-n,\,-m}(\cos\theta)$$

и

$$P^l_{mn}(-z)=i^{2l-2m-2n}P^l_{m,\,-n}(z).$$

В частности, если $m=n=0$, то получаем интегральное представление многочленов Лежандра:

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma''}\frac{w^l\,dw}{\sqrt{w^2-2w\cos\theta+1}}. \tag{2'}$$

Чтобы получить производящую функцию для $P^l_{mn}(\cos\theta)$, сделаем в интеграле (2) подстановку $w=1/h$ и используем формулы Коши для коэффициентов ряда Тейлора (см. [35]):

$$\sum_{l=n}^{\infty}\sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+n)!}{(l-m)!\,(l+m)!}}\,P^l_{mn}(\cos\theta)\,h^{l-n}=\frac{t^{m-n}\left(it\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}, \tag{3}$$

где

$$t=\frac{1-h\cos\theta+\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}{i\,h\sin\theta}, \tag{4}$$

и знак корня выбран так, что $|t|>1$.

Если n — целое отрицательное число, $m\geqslant|n|$, то получаем сходную формулу:

$$\sum_{l=-n}^{\infty}\sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+n)!}{(l-m)!\,(l+m)!}}\,P^l_{mn}(\cos\theta)\,h^{l+n}=\frac{t^{m+n}\left(t\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2n}}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}, \tag{5}$$

где t имеет то же самое значение.

Формулы (3) и (5) сохраняют силу и в случае, когда l — полуцелое число, с той лишь разницей, что суммирование надо вести не по целым, а по полуцелым значениям l.

Особенно простой вид принимает формула (3) при $m=n=0$. В этом случае получаем производящую функцию для многочленов Лежандра:

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\,h^l=\frac{1}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}. \tag{6}$$

Эта формула часто принимается за определение многочленов Лежандра. Последние называют поэтому также *коэффициентами Лежандра.*

При $n=0$ получаем, используя равенство

$$P^m_l(z)=i^m\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\,P^l_{m0}(z),$$

производящую функцию для присоединенных функций Лежандра:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l!}{(l+m)!}\,P^m_l(\cos\theta)h^l=\frac{(it)^m}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}, \tag{7}$$

где t задается формулой (4).

4. Интегральные представления Дирихле—Мерфи. В предыдущем пункте было доказано, что

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma''}\frac{z^l dz}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}, \tag{1}$$

где Γ'' — окружность радиуса $a>1$ с центром в начале координат и

$$|\cos\theta-z+\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}|>\sin\theta. \tag{2}$$

Функция $\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}$ имеет две точки ветвления $\alpha=e^{-i\theta}$ и $\beta=e^{i\theta}$, лежащие внутри окружности Γ'' (напомним, что мы рассматриваем сейчас значения θ, лежащие на отрезке $[0, \pi]$). Стянем окружность к линии ветвления — отрезку, соединяющему точки α и β. Интегралы по бесконечно малым окружностям, окружающим точки α и β, дают нулевой вклад, а вклады от отрезков $[\alpha+0, \beta+0]$ и $[\beta-0, \alpha-0]$ одинаковы, так как $\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}$ имеет противоположные знаки в соответствующих друг другу точках этих отрезков. Отсюда вытекает, что

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha+0}^{\beta+0}\frac{z^l dz}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}=\frac{1}{\pi i}\int_{\beta-0}^{\alpha-0}\frac{z^l dz}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}. \tag{3}$$

Из формулы (2) вытекает, что в первом интеграле вещественная часть корня положительна, а во втором — отрицательна.

Деформируем теперь отрезки $[\alpha+0, \beta+0]$ и $[\alpha-0, \beta-0]$ в дуги единичной окружности, соединяющие точки α и β. Из равенства (3) вытекает, что

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i(l+1)\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{1-2e^{i\varphi}\cos\theta+e^{2i\varphi}}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\theta}\frac{\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}} \tag{4}$$

и

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{2\pi-\theta}\frac{e^{i(l+1)\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{1-2e^{i\varphi}\cos\theta+e^{2i\varphi}}}=\frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}. \tag{5}$$

В самом деле, в силу неравенства (2) при $-\theta<\varphi<\theta$ имеем

$$\sqrt{1-2e^{i\varphi}\cos\theta+e^{2i\varphi}}=e^{\frac{i\varphi}{2}}\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)},$$

а при $\theta<\varphi<2\pi-\theta$ имеем

$$\sqrt{1-2e^{i\varphi}\cos\theta+e^{2i\varphi}}=ie^{\frac{i\varphi}{2}}\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)},$$

где корни в правых частях понимаются в смысле арифметического значения.

Итак, мы доказали, что

$$P_l(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}},$$

где корни понимаются в арифметическом смысле. Эти формулы были установлены Дирихле и Мерфи.

5. Рекуррентные формулы для многочленов Лежандра. Выведем рекуррентные формулы, связывающие многочлены Лежандра $P_l(z)$ с различными индексами l. Продифференцируем обе части равенства

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(z)h^l \tag{1}$$

по h и умножим получившееся равенство на $1-2hz+h^2$. Мы получим

$$(z-h)(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-2hz+h^2)\sum_{l=1}^{\infty}lP_l(z)h^{l-1}, \tag{2}$$

т. е.

$$(z-h)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(z)h^l=(1-2hz+h^2)\sum_{l=1}^{\infty}lP_l(z)h^{l-1}. \tag{3}$$

Сравним коэффициенты при h^{l-1}. После простых преобразований получим

$$lP_l(z)-(2l-1)zP_{l-1}(z)+(l-1)P_{l-2}(z)=0. \tag{4}$$

Пользуясь формулой (4), легко вычислить многочлены $P_l(z)$, отправляясь от $P_0(z)=1$ и $P_1(z)=z$.

Равенство (4) показывает, что многочлены Лежандра обладают теми же свойствами, что и многочлены Штурма. Никакие два следующие друг за другом многочлена Лежандра не обращаются одновременно в нуль. Если один из многочленов Лежандра равен нулю при некотором z, то при этом значении z соседние с ним многочлены имеют различные знаки. С помощью тех же соображений, что и в теореме Штурма, мы получаем, что между двумя соседними корнями многочлена $P_{l+1}(z)$ лежит один и только один корень многочлена $P_l(z)$. Отсюда вытекает, что все корни многочлена $P_l(z)$ вещественны. Нетрудно показать, что они лежат между -1 и 1. Для этого достаточно воспользоваться выражением (4) п. 9 § 3 для многочленов Лежандра и использовать теорему Ролля.

Продифференцируем теперь обе части равенства (1) по z и сравним получаемое равенство

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{l=1}^{\infty}h^{l-1}\frac{dP_l(z)}{dz} \tag{5}$$

с равенством

$$(z-h)(1-2hz+h^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{l=1}^{\infty} lh^{l-1}P_l(z)$$

(см. формулу (2)). Мы получим

$$(z-h)\sum_{l=1}^{\infty} h^{l-1}\frac{dP_l(z)}{dz}=\sum_{l=1}^{\infty} lh^{l-1}P_l(z). \tag{6}$$

Сравнивая коэффициенты при h^{l-1}, получаем рекуррентную формулу

$$lP_l(z)=z\frac{dP_l(z)}{dz}-\frac{dP_{l-1}(z)}{dz}. \tag{7}$$

Далее воспользуемся тождеством

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-2hz+h^2)^{-\frac{3}{2}}(1-hz)-$$
$$-h(z-h)(1-2hz+h^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Применяя соотношения (1), (2) и (5), получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(z)h^l=(1-hz)\sum_{l=1}^{\infty} h^{l-1}\frac{dP_l(z)}{dz}-\sum_{l=1}^{\infty} lh^lP_l(z). \tag{8}$$

Сравнивая коэффициенты при h^l, получаем

$$(l+1)P_l(z)=\frac{dP_{l+1}(z)}{dz}-z\frac{dP_l(z)}{dz}. \tag{9}$$

Складывая формулы (7) и (9), получаем

$$(2l+1)P_l(z)=\frac{d}{dz}[P_{l+1}(z)-P_{l-1}(z)]. \tag{10}$$

Исключая же $P_l(z)$ из соотношений (7) и (9), находим

$$(2l+1)z\frac{dP_l(z)}{dz}=l\frac{dP_{l+1}(z)}{dz}+(l+1)\frac{dP_{l-1}(z)}{dz}. \tag{11}$$

Отметим еще равенство

$$(1-z^2)\frac{dP_l(z)}{dz}=l[P_{l-1}(z)-zP_l(z)]=(l+1)[zP_l(z)-P_{l+1}(z)], \tag{12}$$

вытекающее из равенств (7) и (9), и уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_l(z)}{dz}\right]+l(l+1)P_l(z)=0$$

(см. п. 5 § 4, формула (8)).

§ 6. Разложение функций на группе $SU(2)$

В этом параграфе будут изучены разложения функций $f(u)$ на группе $SU(2)$ в ряды по матричным элементам $t^l_{mn}(u)$. Как частный случай этих результатов, будут получены разложения функций и векторных полей на сфере трехмерного евклидова пространства.

1. Инвариантная мера. Так как группа $SU(2)$ компактна, то на ней существует инвариантная мера du. Иными словами, существует такая мера du, что

$$\int f(u)\,du = \int f(u_0u)\,du = \int f(uu_0)\,du = \int f(u^{-1})\,du \tag{1}$$

для всех непрерывных функций $f(u)$ и всех элементов u_0 из $SU(2)$. Найдем выражение этой меры через параметры группы $SU(2)$.

Рассмотрим сначала группу G, состоящую из невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Ее элементы задаются любыми парами (α, β) комплексных чисел. При умножении справа элемента группы G на элемент $u_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\bar{\beta}_0 & \bar{\alpha}_0 \end{pmatrix}$ из $SU(2)$ параметры α, β претерпевают линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_0\alpha - \bar{\beta}_0\beta, \\ \beta' &= \beta_0\beta + \bar{\alpha}_0\beta, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

определитель которого равен единице. Отсюда следует, что мера $dg = d\alpha\, d\bar{\alpha}\, d\beta\, d\bar{\beta}$ [1]) на группе G инвариантна относительно умножения справа на элементы из $SU(2)$.

Введем вместо параметров $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ параметры r, φ, θ, ψ, связанные с α и β равенствами

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= r \cos \frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, \\ \beta &= ir \sin \frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из равенства (4) п. 1 § 1 следует, что при $r = 1$ матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ принадлежит подгруппе $SU(2)$, причем φ, θ, ψ — углы Эйлера этой матрицы. Простой подсчет показывает, что

$$d\alpha\, d\bar{\alpha}\, d\beta\, d\bar{\beta} = \frac{1}{2} r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, d\psi. \tag{4}$$

---

[1] При $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ мы полагаем $d\alpha\, d\bar{\alpha} = -2i\, d\alpha_1\, d\alpha_2$.

Но элементы группы $SU(2)$ характеризуются условием $r=1$. Поэтому инвариантный интеграл на группе $SU(2)$ задается в углах Эйлера формулой

$$\int\limits_{SU(2)} f(u)\,du = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} f(\varphi,\ \theta,\ \psi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \tag{5}$$

(множитель $1/16\pi^2$ выбран так, что мера всей группы $SU(2)$ равна 1). Отметим, что в силу компактности группы $SU(2)$ интеграл (5) инвариантен не только справа, но и слева:

$$\int f(u)\,du = \int f(uu_0)\,du = \int f(u_0u)\,du = \int f(u^{-1})\,du. \tag{6}$$

Выражение

$$\frac{1}{16\pi^2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \tag{7}$$

для инвариантной меры на группе $SU(2)$ имеет простой геометрический смысл. Оно лишь множителем $\frac{1}{2}$ отличается от произведения нормированной евклидовой меры $\frac{1}{4\pi^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ на двумерной сфере и нормированной евклидовой меры $\frac{1}{2\pi}\,d\psi$ на окружности.

2. Соотношения ортогональности для функций $P^l_{mn}(z)$. В этом пункте мы применим к группе $SU(2)$ теоремы ортогональности и полноты системы матричных элементов попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы (см. п. 3 § 4 главы I). Поскольку размерность представления $T_l(u)$ группы $SU(2)$ равна $2l+1$, то из этих теорем вытекает, что *функции* $\sqrt{2l+1}\,t^l_{mn}(u)$ *образуют полную ортогональную нормированную систему функций относительно инвариантной меры* du *на этой группе*. При этом индекс l пробегает всевозможные целые и полуцелые неотрицательные значения, а индексы m и n пробегают значения $-l,\ -l+1,\ \ldots,\ l-1,\ l$.

Иными словами, функции $t^l_{mn}(u)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_{SU(2)} t^l_{mn}(u)\,\overline{t^s_{pq}(u)}\,du = \frac{1}{2l+1}\,\delta_{ls}\,\delta_{mp}\delta_{nq}. \tag{1}$$

Подставим в формулу (1) выражение

$$t^l_{mn}(\varphi,\ \theta,\ \psi) = e^{-i(m\varphi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta) \tag{2}$$

для матричных элементов, и вспомним, что инвариантная мера du на группе $SU(2)$ задается формулой

$$du = \frac{1}{16\pi^2}\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi. \tag{3}$$

Мы получим, что если $l \neq s$, или $m \neq p$, или $n \neq q$, то

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P^l_{mn}(\cos\theta)\, \overline{P^s_{pq}(\cos\theta)} \sin\theta\, e^{i(p-m)\varphi} e^{i(q-n)\psi}\, d\theta\, d\varphi\, d\psi = 0. \qquad (4)$$

В случаях, когда $p \neq m$ или $q \neq n$, из соотношения (4) нельзя сделать каких-либо выводов о функциях P^l_{mn}, поскольку обращение в нуль имеет место за счет показательных функций. Пусть теперь $p = m$ и $q = n$. Тогда из равенства (4) следует, что при $l \neq s$

$$\int_0^{\pi} P^l_{mn}(\cos\theta)\, \overline{P^s_{mn}(\cos\theta)} \sin\theta\, d\theta = 0. \qquad (5)$$

Аналогично, из равенства (1) следует, что

$$\int_0^{\pi} |P^l_{mn}(\cos\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2l+1}. \qquad (6)$$

Полагая в полученных равенствах $\cos\theta = x$, получаем соотношения ортогональности для функций $P^l_{mn}(x)$:

$$\int_{-1}^{1} P^l_{mn}(x)\, \overline{P^s_{mn}(x)}\, dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ls}. \qquad (7)$$

Из выведенных формул вытекает следующий результат: *при фиксированных значениях* l и n, $l \geqslant n \geqslant 0$, *последовательность функций*

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P^l_{ln}(x),\ \sqrt{\frac{2l+3}{2}} P^{l+1}_{ln}(x), \ldots, \sqrt{\frac{2l+2k+1}{2}} P^{l+k}_{ln}(x), \ldots \qquad (8)$$

ортогональна и нормирована на отрезке $[-1, 1]$ *относительно меры* dx.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $n = 0$ получаем, что последовательность функций

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P^l_{l0}(x), \ \ldots, \ \sqrt{\frac{2l+2k+1}{2}} P^{l+k}_{l0}(x), \ \ldots \qquad (9)$$

ортогональна и нормирована. Но

$$P^l_{l+k}(x) = i^l \sqrt{\frac{(2l+k)!}{k!}} P^{l+k}_{l0}(x), \qquad (10)$$

где $P^m_l(x)$ — присоединенная функция Лежандра. Отсюда вытекает, что последовательность функций

$$\sqrt{\frac{(2l+2k+1)\,k!}{2\,(2l+k)!}} P^l_{l+k}(x), \qquad k = 0, 1, \ldots \qquad (11)$$

ортогональна и нормирована на отрезке $[-1, 1]$.

В частности, при $l=0$ получаем, что последовательность многочленов Лежандра

$$\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,P_k(x), \qquad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{12}$$

ортогональна и нормирована на отрезке $[-1,\ 1]$.

В заключение рассмотрим вопрос об ортогональности многочленов Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$. Как было показано в п. 9 § 4, эти многочлены связаны с функциями $P_{mn}^l(x)$ соотношением

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,i^{-\alpha}\sqrt{\frac{(k+\alpha)!\,(k+\beta)!}{k!\,(k+\alpha+\beta)!}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}}P^{k+\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\frac{\alpha+\beta}{2},\,\frac{\beta-\alpha}{2}}(x), \tag{13}$$

где α, β, k — целые числа.

Но, как было показано выше, функции

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta+2k+1}{2}}\,P^{k+\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\frac{\alpha+\beta}{2},\,\frac{\beta-\alpha}{2}}(x), \qquad k=0,\ 1,\ \ldots$$

образуют ортонормированную систему на отрезке $[-1,\ 1]$. Отсюда вытекает, что многочлены

$$2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\,i^{\alpha}\sqrt{\frac{k!\,(k+\alpha+\beta)!\,(\alpha+\beta+2k+1)}{(k+\alpha)!\,(k+\beta)!}}\,P_k^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{14}$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

образуют ортонормированную систему на отрезке $[-1,\ 1]$ относительно веса $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ [1]).

Применим полученные результаты для вычисления в конечном виде одной суммы, содержащей присоединенные функции Лежандра. Из ортогональности многочленов Лежандра и формулы (6) п. 3 § 4 вытекает, что $\frac{2l+1}{2}P_l^k(\cos\theta_1)\,P_l^{-k}(\cos\theta_2)$ является коэффициентом при разложении функции

$$f(\theta;\ \theta_1,\ \theta_2)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}T_k\left(\dfrac{\cos\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\right)\times\\[2mm] \quad\times\{[\cos\theta-\cos(\theta_1+\theta_2)]\,[\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta]\}^{-\frac{1}{2}},\\ \qquad\qquad\qquad\text{если } |\theta_1-\theta_2|\leqslant\theta\leqslant\theta_1+\theta_2,\\ 0,\ \text{если } \theta \text{ — точка отрезка } [0,\ \pi], \text{ не принадлежащая отрезку}\\ \quad [|\theta_1-\theta_2|,\ \ \theta_1+\theta_2].\end{cases}$$

[1]) Система функций $f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$ называется ортонормированной относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, если

$$\int_a^b f_m(x)\overline{f_n(x)}\,p(x)\,dx=\delta_{mn}.$$

по многочленам Лежандра $P_l(\cos\theta)$. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l^k(\cos\theta_1) P_l^{-k}(\cos\theta_2) P_l(\cos\theta) = f(\theta;\ \theta_1,\ \theta_2). \tag{15}$$

В частности,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos\theta_1) P_l(\cos\theta_2) P_l(\cos\theta) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left\{[\cos\theta - \cos(\theta_1+\theta_2)]\,[\cos(\theta_1-\theta_2) - \cos\theta]\right\}^{-\frac{1}{2}}, \\ \qquad\qquad \text{если } |\theta_1-\theta_2| \leqslant \theta \leqslant \theta_1+\theta_2, \\ 0, \text{ если } \theta \text{ — точка на } [0,\ \pi], \text{ не принадлежащая отрезку } \\ \qquad [|\theta_1-\theta_2|,\ \theta_1+\theta_2]. \end{cases}$$

3. Разложения в ряды по функциям $P_{mn}^l(x)$. Пусть $f(u)$ — любая функция на группе $SU(2)$, для которой сходится интеграл $\int |f(u)|^2 du$. Мы доказали выше, что функции $\sqrt{2l+1}\,t_{mn}^l(u)$ образуют полную ортонормированную систему относительно инвариантной меры du. Отсюда следует, что функцию $f(u)$ можно разложить в ряд Фурье по функциям $t_{mn}^l(u)$, причем этот ряд сходится в среднем.

Ряд Фурье функции $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} \sum_{n=-l}^{l} \alpha_{mn}^l t_{mn}^l(u), \tag{1}$$

где $l = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \ldots$ и коэффициенты Фурье α_{mn}^l задаются формулами

$$\alpha_{mn}^l = (2l+1)\int f(u)\,\overline{t_{mn}^l(u)}\,du. \tag{2}$$

Перейдем к параметрам Эйлера. Пользуясь соотношениями (2) и (3) из п. 2, получаем следующий результат:

Любая функция $f(\varphi, \theta, \psi)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta < \pi$, $-2\pi < \psi < 2\pi$, *принадлежащая пространству* $\mathfrak{L}^2$, *т. е. такая, что*

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |f(\varphi,\ \theta,\ \psi)|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi < +\infty, \tag{3}$$

разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(\varphi,\ \theta,\ \psi) = \sum \sum_{m=-l}^{l} \sum_{n=-l}^{l} \alpha_{mn}^l e^{-i(m\varphi+n\psi)} P_{mn}^l(\cos\theta), \tag{4}$$

где[1])

$$\alpha_{mn}^{l}=\frac{(-1)^{m-n}(2l+1)}{16\pi^2}\times$$
$$\times\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(\varphi,\ \theta,\ \psi)\,e^{i(m\varphi+n\psi)}P_{mn}^{l}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\psi. \quad (5)$$

Из равенства Парсеваля вытекает, что при этом

$$\sum_{l}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=-l}^{l}|\alpha_{mn}^{l}|^2=\frac{2l+1}{16\pi^2}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}|f(\varphi,\ \theta,\ \psi)|^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\psi. \quad (6)$$

4. Некоторые подпространства функций. Обозначим через $\mathfrak{L}_n^2$ подпространство в $\mathfrak{L}^2$, состоящее из таких функций $f(u)$, что для всех диагональных матриц

$$h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

из $SU(2)$ выполняется равенство

$$f(uh)=e^{-int}f(u). \quad (2)$$

Если углы Эйлера матрицы g равны φ, θ, ψ, то $g(\varphi,\ \theta,\ \psi)=$ $=g(\varphi,\ \theta,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \psi)$, где $g(0,\ 0,\ \psi)=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix}$ — диагональная матрица. Поэтому для функций $f(g)$ из $\mathfrak{L}_n^2$ имеем

$$f(g)\equiv f(\varphi,\ \theta,\ \psi)=e^{-in\psi}f(\varphi,\theta,\ 0). \quad (3)$$

Обратно, если функция $f(g)$ на группе $SU(2)$ имеет вид (3), она принадлежит $\mathfrak{L}_n^2$.

В частности, подпространству $\mathfrak{L}_n^2$ принадлежат все матричные элементы $t_{mn}^{l}(g)$ при заданном n:

$$t_{mn}^{l}(g)=e^{-in\psi}e^{-im\varphi}P_{mn}^{l}(\cos\theta), \quad (4)$$
$$l=|n|,\ |n|+1,\ \ldots,\ |n|+k,\ \ldots,\quad -l\leqslant m\leqslant l.$$

---

[1]) Напомним, что $\overline{P_{mn}^{l}(\cos\theta)}=(-1)^{m-n}P_{mn}^{l}(\cos\theta)$.

Покажем, что эти функции образуют ортогональный базис пространства $\mathfrak{L}_n^2$. Иными словами, будет показано, что любая функция $f(u)$ из подпространства $\mathfrak{L}_n^2$ разлагается в ряд Фурье вида

$$f(u)=\sum_{l=|n|}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\alpha_m^l t_{mn}^l(u)=e^{-in\psi}\sum_{l=|n|}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\alpha_m^l e^{-im\varphi}P_{mn}^l(\cos\theta), \quad (5)$$

где коэффициенты Фурье задаются формулами

$$\alpha_m^l=\frac{(-1)^{m-n}(2l+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\ \theta,\ 0)\,e^{im\varphi}P_{mn}^l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \quad (6)$$

Для доказательства достаточно показать, что при $k\neq n$ имеем

$$\int f(u)\,\overline{t_{mk}^l(u)}\,du=0.$$

Сделаем в этом интеграле подстановку $u=vh$, где $h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix}$.

В силу инвариантности меры du получим

$$\alpha_m^l=\int f(vh)\,\overline{t_{mk}^l(vh)}\,dv.$$

Но в силу принадлежности $f(u)$ подпространству $\mathfrak{L}_n^2$

$$f(vh)=e^{-int}f(v),$$

а в силу формулы (4)

$$t_{mk}^l(vh)=e^{-ikt}t_{mk}^l(v).$$

Поэтому

$$\alpha_m^l=e^{i(k-n)t}\alpha_m^l.$$

Так как при $k\neq n$ $e^{i(k-n)t}\not\equiv 1$, то отсюда и следует равенство $\alpha_m^l=0$. Тем самым наше утверждение доказано.

В частности, функции $f(u)$ на группе $SU(2)$, не зависящие от угла Эйлера ψ (т. е. такие, что $f(uh)=f(u)$ при $h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix}$, разлагаются в ряды вида

$$f(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\alpha_m^l e^{-im\varphi}P_{m0}^l(\cos\theta), \quad (7)$$

где

$$\alpha_m^l=\frac{(-1)^m(2l+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\ \theta,\ 0)\,e^{im\varphi}P_{m0}^l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \quad (8)$$

Принимая во внимание равенство (9) из п. 9 § 3, получаем, что такие функции разлагаются в ряд вида

$$f(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\beta_l^m e^{-im\varphi}P_l^m(\cos\theta), \tag{9}$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра. Коэффициенты Фурье равны

$$\beta_l^m=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\ \theta,\ 0)\,e^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{10}$$

Совершенно так же решается вопрос о разложении функций, удовлетворяющих при $h=\begin{pmatrix}e^{\frac{it}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix}$ функциональному уравнению

$$f(hu)=e^{-imt}f(u). \tag{11}$$

Мы обозначим подпространство таких функций через ${}_m\mathfrak{L}^2$. Как и выше, доказываем, что любая функция $f(u)$ из ${}_m\mathfrak{L}^2$ разлагается в ряд вида

$$f(u)=e^{-im\varphi}\sum_{l=|m|}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}\alpha_n^l e^{-in\psi}P_{mn}^l(\cos\theta), \tag{12}$$

где

$$\alpha_n^l=\frac{(-1)^{m-n}(2l+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(0,\ \theta,\ \psi)\,e^{in\psi}P_{mn}^l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{13}$$

В частности, функции $f(u)$, не зависящие от угла Эйлера φ, раскладываются в ряд вида

$$f(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}\beta_l^n e^{-in\psi}P_l^n(\cos\theta), \tag{14}$$

где

$$\beta_l^n=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(0,\ \theta,\ \psi)\,e^{in\psi}P_l^n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\psi. \tag{15}$$

Обозначим через ${}_m\mathfrak{L}_n^2$ пересечение подпространств $\mathfrak{L}_n^2$ и ${}_m\mathfrak{L}^2$. Это подпространство состоит из таких функций $f(u)$, что

$$f(h_1uh_2)=e^{-i(mt_1+nt_2)}f(u) \tag{16}$$

для любых двух матриц

$$h_1=\begin{pmatrix} e^{\frac{it_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it_1}{2}} \end{pmatrix} \text{ и } h_2=\begin{pmatrix} e^{\frac{it_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it_2}{2}} \end{pmatrix}.$$

В силу полученных выше результатов имеем:

Любая функция $f(u)$ из подпространства ${}_m\mathfrak{L}^2_n$ разлагается в ряд Фурье вида

$$f(u)=e^{-i(m\varphi+n\psi)} \sum_{l=\max(|m|,\,|n|)}^{\infty} \alpha_l P^l_{mn}(\cos\theta), \tag{17}$$

где коэффициенты Фурье задаются формулами

$$\alpha_l=\frac{(-1)^{m-n}(2l+1)}{2}\int_0^{\pi} f(0,\ \theta,\ 0)\,P^l_{mn}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta. \tag{18}$$

В частности, отсюда вытекает, что любая функция $f(u)$ на группе $SU(2)$, не зависящая от углов Эйлера φ и ψ, разлагается в ряд вида

$$f(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l P^l_{00}(\cos\theta), \tag{19}$$

где

$$\alpha_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} f(0,\ \theta,\ 0)\,P^l_{00}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta. \tag{20}$$

Поскольку $P^l_{00}(\cos\theta)\equiv P_l(\cos\theta)$, то этот ряд можно переписать так:

$$f(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l P_l(\cos\theta), \tag{21}$$

где $P_l(x)$ — многочлены Лежандра, а

$$\alpha_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta. \tag{22}$$

5. Разложение функций на сфере. Мы построили в предыдущем пункте разложение функций $f(u)$ на группе $SU(2)$ постоянных на левых смежных классах по подгруппе Ω диагональных матриц. Но в п. 7 § 1 было показано, что пространство таких смежных классов можно отождествить с единичной сферой S^2 в трехмерном евклидовом пространстве. При этом смежному классу $u\Omega$, где $u=u(\varphi,\ \theta,\ \psi)$, соответствует точка ξ сферы со сферическими координатами $-\frac{\pi}{2}+\varphi$ и θ.

Применим полученное в п. 4 разложение к функциям на сфере. Мы получим следующий результат:

Пусть $f(\xi)$ — *функция на единичной сфере* S^2, *такая, что*

$$\int |f(\xi)|^2 d\xi < \infty \tag{1}$$

(через $d\xi$ здесь обозначена нормированная евклидова мера на S^2, $d\xi = \frac{1}{4\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$). *Тогда*[1])

$$f(\xi) \equiv f(\varphi,\ \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \beta_l^m e^{-im\varphi} P_l^m(\cos\theta), \tag{2}$$

где

$$\beta_l^m = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi,\ \theta)\, e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{3}$$

При этом

$$(2l+1) \int |f(\xi)|^2 d\xi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} |\beta_l^m|^2. \tag{4}$$

Полученное разложение показывает, что функции

$$\sqrt{\frac{(2l+1)(l-k)!}{(l+k)!}} P_l^k(\cos\theta)\, e^{-ik\varphi} \equiv i^k \sqrt{2l+1}\, Y_{kl}(\varphi,\ \theta), \tag{5}$$
$$l = 0,\ 1,\ \ldots;\quad -l \leqslant k \leqslant l$$

образуют ортогональный нормированный базис на сфере (относительно нормированной евклидовой меры).

Разложение функций на сфере по базису (5) удобно, поскольку присоединенные сферические функции весьма просто преобразуются при вращениях сферы (напомним, что они лишь несущественно отличаются от матричных элементов неприводимых унитарных представлений этой группы).

6. Разложение полей величин на сфере. В прикладных задачах возникает необходимость раскладывать не только скалярные функции на сфере, но и такие объекты, как векторные, тензорные и иные поля. При этом, разумеется, требуется, чтобы компоненты, на которые разлагаются эти поля, достаточно просто преобразовывались при вращениях сферы. Мы покажем сейчас, как выполняются такие разложения.

Введем сначала понятие *поля величины на сфере*. Пусть $T_l(u)$ — неприводимое унитарное представление группы $SU(2)$ и $\mathfrak{F}$ — простран-

---

[1]) Здесь φ и θ — сферические координаты точки $\xi\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$:

$$\xi_1 = \sin\varphi\sin\theta,\quad \xi_2 = \cos\varphi\sin\theta,\quad \xi_3 = \cos\theta.$$

ство вектор-функций $\mathbf{f}(\xi)$ на сфере S^2, принимающих значения в пространстве $\mathfrak{H}_l$ представления $T_l(u)$. Каждому элементу u из $SU(2)$ поставим в соответствие оператор

$$V(u)\,\mathbf{f}(\xi) = T_l(u)\,\mathbf{f}(u^{-1}\xi) \tag{1}$$

(напомним, что сфера S^2 является однородным пространством с группой движений $SU(2)$ и стационарной подгруппой Ω, состоящей из диагональных матриц $h = \left(\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}\right)$.

Легко проверить, что $V(u)$ является представлением группы. Пространство $\mathfrak{F}$ с заданным в нем представлением $V(u)$ группы $SU(2)$ назовем *полем величин на сфере, преобразующихся по неприводимому унитарному представлению* $T_l(u)$ (например, при $l=1$ получаем векторное поле на сфере).

Чтобы разложить представление $V(u)$ на неприводимые, перейдем от функции $\mathbf{f}(\xi)$ на сфере к функциям $\varphi(u)$ на группе $SU(2)$ по формулам

$$\varphi(u) = V(u^{-1})\,\mathbf{f}(\xi_0) \tag{2}$$

(через ξ_0 здесь обозначена точка сферы $\xi_0(0,\ 0,\ 1)$).

Легко показать, что функции $\varphi(u)$ удовлетворяют уравнению

$$\varphi(uh) = T_l(h^{-1})\varphi(u), \qquad h \in \Omega. \tag{3}$$

При этом операторам $V(u_0)$ соответствуют операторы

$$\hat{V}(u_0)\,\varphi(u) = \varphi(u_0^{-1}u). \tag{4}$$

Пространство функций $\varphi(u)$ мы будем также обозначать через $\mathfrak{F}$.

Разложим пространство $\mathfrak{F}$ в прямую сумму одномерных подпространств $\mathfrak{F}_k$, $-l \leqslant k \leqslant l$, инвариантных относительно операторов $\varphi(u) \to \varphi(uh)$, $h \in \Omega$. Для этого функции $\varphi(u)$ из $\mathfrak{F}$ поставим в соответствие функции $\varphi_k(u)$, $-l \leqslant k \leqslant l$, определяемые формулой

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,[uh(t)]\,e^{-ikt}\,dt, \tag{5}$$

где

$$h(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Ясно, что

$$\varphi_k[uh(a)] = e^{ika}\varphi_k(u) \tag{7}$$

и потому пространство $\mathfrak{F}_k$ функций вида (5) инвариантно при преобразованиях $\varphi(u) \to \varphi(uh)$, $h \in \Omega$. При этом выполняется равенство

$$\varphi(u) = \sum_{k=-l}^{l} \varphi_k(u) \tag{8}$$

и

$$[\hat{V}(u_0)\varphi]_k(u) = \varphi_k(u_0^{-1}u). \tag{9}$$

Эти равенства показывают, что представление $\hat{V}(u)$ является прямой суммой представлений $\hat{V}_k(u)$ группы $SU(2)$, индуцированных представлениями $h(t) \to e^{ikt}$ подгруппы Ω. Представления такого вида мы уже умеем разлагать на неприводимые (см. п. 4). Тем самым решена и задача о разложении представления $V(u)$.

§ 7. Характеры представлений $T_l(u)$

1. Вычисление характеров. Перейдем к рассмотрению характеров представлений $T_l(u)$. Согласно п. 9 § 1 главы I характером представления $T_l(u)$ группы $SU(2)$ называют след матрицы этого представления. Таким образом, характер $\chi_l(u)$ представления $T_l(u)$ задается формулой

$$\chi_l(u) = \sum_{m=-l}^{l} t^l_{mm}(u) \tag{1}$$

или, в углах Эйлера, формулой

$$\chi_l(\varphi, \theta, \psi) = \sum_{m=-l}^{l} e^{-im(\varphi+\psi)} P^l_{mm}(\cos\theta). \tag{2}$$

Эта формула неудобна, поскольку в ней характер выражен как функция трех переменных φ, ψ, θ. Фактически же, как сейчас будет показано, характер $\chi_l(u)$ является функцией лишь одного переменного. В самом деле, согласно п. 9 § 1 главы I характер представления является функцией на группе, постоянной на классах сопряженных элементов. В нашем случае это означает, что для любых двух элементов u_1 и u группы $SU(2)$ выполняется равенство

$$\chi_l(u_1uu_1^{-1}) = \chi_l(u). \tag{3}$$

Для того чтобы показать, что $\chi_l(u)$ является функцией одного переменного, достаточно доказать, что классы сопряженных элементов в $SU(2)$ задаются одним параметром. Но из линейной алгебры известно, что любая унитарная унимодулярная матрица u может быть записана в виде $u = u_1\delta u_1^{-1}$, где $u_1 \in SU(2)$, а δ — диагональная матрица вида

$$\delta=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Числа $\lambda=e^{\frac{it}{2}}$ и $\frac{1}{\lambda}=e^{-\frac{it}{2}}$ являются *собственными числами* матрицы u. При этом среди матриц, эквивалентных u, есть лишь еще одна диагональная матрица, а именно, матрица δ', получающаяся из δ перестановкой диагональных элементов.

Отсюда следует, что *каждый класс сопряженных элементов в $SU(2)$ задается одним параметром t, меняющимся в пределах $-2\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, причем параметры t и $-t$ задают один и тот же класс*. Поэтому мы можем считать, что характеры $\chi_l(u)$ являются функциями одного переменного t, меняющегося от 0 до 2π.

Параметр t имеет простой геометрический смысл — он равен углу вращения, которое соответствует матрице u. Таким образом, класс сопряженных элементов в $SU(2)$ состоит из матриц, которым соответствуют вращения на один и тот же угол в трехмерном евклидовом пространстве.

Выведем теперь явное выражение для $\chi_l(u)$ как функции t. Для этого заметим, что при представлении $T_l(u)$ диагональной матрице δ соответствует диагональная матрица $T_l(\delta)$ порядка $2l+1$, на главной диагонали которой стоят числа e^{-ikt}, $-l\leqslant k\leqslant l$.

Пусть $u=u_1\delta u_1^{-1}$. Так как характеры постоянны на классах сопряженных элементов, то

$$\chi_l(u)=\chi_l(\delta)=\operatorname{Tr}[T_l(\delta)]=\sum_{k=-l}^{l} e^{-ikt}. \tag{5}$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\chi_l(u)=\frac{e^{i(l+1)t}-e^{-ilt}}{e^{it}-1}=\frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}, \tag{5'}$$

где, напомним, $e^{\frac{it}{2}}$ и $e^{-\frac{it}{2}}$ — собственные числа матрицы u.

Как известно, собственные числа матрицы являются корнями ее характеристического уравнения. Для матрицы

$$u=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \alpha + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения выражаются формулой

$$\lambda_{1,2} \equiv e^{\pm \frac{it}{2}} = \operatorname{Re} \alpha \pm i\sqrt{1 - (\operatorname{Re} \alpha)^2}.$$

Отсюда

$$\cos \frac{t}{2} = \operatorname{Re} \alpha. \tag{6}$$

Если углы Эйлера матрицы u равны φ, θ, ψ, то

$$\alpha = \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}$$

и потому

$$\operatorname{Re} \alpha = \cos \frac{t}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}. \tag{7}$$

Поэтому

$$\chi_l(u) = \frac{\sin\left(l + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}}, \tag{8}$$

где $\cos \frac{t}{2}$ выражается через углы Эйлера по формуле (7). Выше мы получили другое выражение для $\chi_l(u)$ через углы Эйлера (см. формулу (2)). Сравнивая два полученных выражения, получаем равенство

$$\sum_{m=-l}^{l} e^{-im(\varphi+\psi)} P^l_{mm}(\cos \theta) = \frac{\sin\left(l + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}}, \tag{9}$$

где $\cos \frac{t}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi+\psi}{2}$. В частности, при $\varphi = \psi = 0$ имеем

$$\sum_{m=-l}^{l} P^l_{mm}(\cos \theta) = \frac{\sin\left(l + \frac{1}{2}\right) \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \tag{10}$$

2. Ортогональность характеров. Как было показано в п. 7 § 4 главы I, характеры неприводимых унитарных представлений компактной группы образуют ортонормированную систему функций. Поэтому для группы $SU(2)$ имеем

$$\int \chi_m(u) \overline{\chi_n(u)}\, du = \delta_{mn}. \tag{1}$$

В п. 1 было показано, что

$$\chi_m(u) = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}}, \tag{2}$$

где $e^{\pm \frac{it}{2}}$ — собственное значение матрицы u. Чтобы получить из формулы (1) соотношение ортогональности для функций $\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t$, надо выразить инвариантную меру du в новых параметрах, одним из которых является t.

Сначала запишем интеграл в параметрах α, β, где $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Из формулы (5) п. 1 § 6 легко следует, что

$$\int f(u)\, du = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \tau, \sigma)\, d\sigma\, d\tau\, dr, \tag{3}$$

где $r = |\alpha|^2$, $\tau = \arg \alpha$, $\sigma = \arg \beta$. Перейдем в этом интеграле от переменных r, τ к переменным α_1, α_2, где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Мы получим

$$\int f(u)\, du = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^{1} d\alpha_1 \int_{-\sqrt{1-\alpha_1^2}}^{\sqrt{1-\alpha_1^2}} d\alpha_2 \int_0^{2\pi} f(u)\, d\sigma. \tag{4}$$

Так как $\alpha_1 = \cos \frac{t}{2}$, то эту формулу можно представить в следующем виде:

$$\int f(u)\, du = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt \int_{-\sin \frac{t}{2}}^{\sin \frac{t}{2}} d\alpha_2 \int_0^{2\pi} f(u)\, d\sigma. \tag{5}$$

Мы выразили инвариантный интеграл по группе $SU(2)$ в параметрах t, α_2, σ.

Если функция $f(u)$ постоянна на классах сопряженных элементов, т. е. зависит только от параметра t, $f(u) = F(t)$, то из формулы (5) вытекает

$$\int f(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin^2 \frac{t}{2}\, dt. \tag{6}$$

3. Разложение центральных функций. Согласно п. 7 § 4 главы I функция $\varphi(u)$ на группе $SU(2)$ называется *центральной*, если она постоянна на классах сопряженных элементов в $SU(2)$. Мы показали в п. 1, что классы сопряженных элементов в $SU(2)$ определяются одним параметром t. Поэтому центральные функции являются функциями одного переменного t:

$$\varphi(u) = F(t). \tag{1}$$

В п. 7 § 4 главы I было показано, что характеры неприводимых унитарных представлений компактной группы образуют полную ортонормированную систему в пространстве центральных функций на этой группе.

Применяя это утверждение к группе $SU(2)$ и к функции $f(t) = F(t)\sin\frac{t}{2}$, получаем следующий результат.

Пусть $f(t)$ — *функция на отрезке* $[0, 2\pi]$, *такая, что*

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt < +\infty. \tag{2}$$

Тогда эта функция разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(t) = \sum a_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t, \tag{3}$$

где n *пробегает значения* $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, *и*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{4}$$

Отсюда легко следует, что система функций $\{\sin kx\}$, $k = 1, 2, \ldots$ полна на отрезке $[0, \pi]$.

§ 8. Коэффициенты Клебша — Гордана

1. Кронекеровское произведение представлений $T_l(u)$. Пусть $T_{l_1}(u)$ — неприводимое унитарное представление веса l_1 группы $SU(2)$, а $T_{l_2}(u)$ — неприводимое унитарное представление веса l_2 той же группы. Рассмотрим их кронекеровское произведение

$$T(u) = T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u). \tag{1}$$

Наша цель — разложить это представление на неприводимые.

В первую очередь выясним, какие представления входят в разложение представления $T(u)$ и с какой кратностью они входят. В силу п. 7 § 4 главы I для этого надо разложить произведение характеров представлений $T_{l_1}(u)$ и $T_{l_2}(u)$ в сумму характеров неприводимых представлений.

Пусть $e^{\frac{it}{2}}$ и $e^{-\frac{it}{2}}$ — собственные числа матрицы u. Как было показано в п. 1 § 7,

$$\chi_{l_1}(u) = \sum_{k=-l_1}^{l_1} e^{-ikt} \quad \text{и} \quad \chi_{l_2}(u) = \sum_{m=-l_2}^{l_2} e^{-imt}.$$

Поэтому при $l_1 \geqslant l_2$

$$\chi_{l_1}(u)\chi_{l_2}(u) = \sum_{m=-l_2}^{l_2} \varepsilon^m \frac{\varepsilon^{l_1+1} - \varepsilon^{-l_1}}{\varepsilon - 1}, \tag{2}$$

где для краткости положено $e^{-it} = \varepsilon$. Таким образом,

$$\chi_{l_1}(u)\chi_{l_2}(u) = \sum_{m=-l_2}^{l_2} \frac{\varepsilon^{l_1+m+1} - \varepsilon^{m-l_1}}{\varepsilon - 1} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon - 1}\left[\varepsilon^{l_1+l_2+1} + \ldots + \varepsilon^{l_1-l_2+1} - \varepsilon^{l_2-l_1} - \ldots - \varepsilon^{-l_1-l_2}\right]. \tag{3}$$

Скомбинировав попарно положительные и отрицательные слагаемые, сумма показателей которых равна единице, получим

$$\chi_{l_1}(u)\chi_{l_2}(u) = \sum_{l=l_1-l_2}^{l_1+l_2} \frac{\varepsilon^{l+1} - \varepsilon^{-l}}{\varepsilon - 1} = \sum_{l=l_1-l_2}^{l_1+l_2} \chi_l(u).$$

При $l_2 \geqslant l_1$ суммирование ведется от $l = l_2 - l_1$. Итак, доказано, что

$$\chi_{l_1}(u)\chi_{l_2}(u) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \chi_l(u). \tag{4}$$

Это равенство означает, что *в разложение представления $T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u)$ входят все представления $T_l(u)$, для которых $|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2$, и l является целым или полуцелым числом одновременно с $l_1 + l_2$, причем каждое по одному разу.*

Иными словами,

$$T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} T_l(u). \tag{5}$$

Будем в дальнейшем обозначать через $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ пространства представлений $T_{l_1}(u)$, $T_{l_2}(u)$, а через $\mathfrak{F}_l$ — инвариантные подпространства в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, в которых реализуются представления $T_l(u)$, $|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2$. Ясно, что

$$\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2 = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \mathfrak{F}_l. \tag{6}$$

Формула (13) п. 7 § 4 главы I дает выражение кратности, с которой представление $T_l(u)$ входит в $T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u)$, через характеры этих представлений. Подставляя в эту формулу выражение (5) из п. 1 § 7 для $\chi_l(u)$ и выражение (3) из п. 2 § 6 для du, приходим к следующему выводу: *интеграл*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(l_1+\frac{1}{2}\right)t \sin\left(l_2+\frac{1}{2}\right)t \frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

где l_1, l_2, l — целые или полуцелые числа, равен единице в случае, когда $2(l_1+l_2+l)$ — четное число, причем существует треугольник со сторонами $2l_1$, $2l_2$, $2l$, и равен нулю в противном случае.

2. Базисы в пространстве $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$. В пространстве $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ представления $T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u)$ есть два интересующих нас базиса. Первый из них образован попарными произведениями

$$\mathbf{f}_j \otimes \mathbf{h}_k, \qquad -l_1 \leq j \leq l_1, \quad -l_2 \leq k \leq l_2 \tag{1}$$

векторов канонических базисов пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ ($\mathbf{f}_j$, $-l_1 \leq j \leq l_1$ — канонический базис в $\mathfrak{H}_1$, а $\mathbf{h}_k$, $-l_2 \leq k \leq l_2$ — канонический базис в $\mathfrak{H}_2$). Согласно Дополнению к главе I этот базис ортонормирован в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$.

Базис $\mathbf{f}_j \otimes \mathbf{h}_k$ в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ удобен тем, что матричные элементы оператора $T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u)$ в этом базисе являются произведениями матричных элементов операторов $T_{l_1}(u)$ и $T_{l_2}(u)$ в базисах $\mathbf{f}_j$ и $\mathbf{h}_k$ соответственно. Мы будем обозначать эти матричные элементы через $\alpha_{(jk),\,(j'k')}(u)$. Таким образом,

$$\alpha_{(jk),\,(j'k')}(u) = t^{l_1}_{jj'}(u)\, t^{l_2}_{kk'}(u). \tag{2}$$

Второй ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ состоит из векторов канонических базисов неприводимых подпространств $\mathfrak{F}_l$, на которые разлагается $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ (см. формулу (6) п. 1). Будем обозначать эти векторы через

$$\mathbf{a}^l_m, \quad |l_1-l_2| \leq l \leq l_1+l_2, \quad -l \leq m \leq l. \tag{3}$$

Этот базис удобен тем, что в нем матрица оператора $T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u)$ клеточно-диагональна, причем на главной диагонали стоят матрицы неприводимых унитарных представлений $T_l(u)$, $|l_1-l_2| \leq l \leq l_1+l_2$ группы $SU(2)$. Обозначим элементы матрицы оператора $T_{l_1}(u) \otimes T_{l_2}(u)$ в базисе $\mathbf{a}^l_m$ через $\beta_{(lm),\,(l'm')}(u)$. Из клеточной диагональности этой матрицы вытекает, что $\beta_{(lm),\,(l'm')} = 0$, если $l \neq l'$. Если же $l = l'$, то имеем $\beta_{(lm),\,(l'm')} = t^l_{mm'}(u)$. Таким образом,

$$\beta_{(lm),\,(l'm')}(u) = \delta_{ll'} t^l_{mm'}(u). \tag{4}$$

Поскольку базисы $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{a}^l_m$ канонические, матричные элементы $t^{l_1}_{jj'}(u)$, $t^{l_2}_{kk'}(u)$, $t^l_{mm'}(u)$ в формулах (2) и (4) выражаются через углы Эйлера по формуле (6) п. 3 § 3:

$$t^{l_1}_{j'}(\varphi,\ \theta,\ \psi)=e^{-i(j\varphi+j'\psi)}P^{l_1}_{jj'}(\cos\theta), \tag{5}$$

и т. д. Так как $\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k$ и $\mathbf{a}^l_m$ являются ортонормированными базисами в одном и том же пространстве $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$, существует унитарная матрица C, переводящая базис $\mathbf{a}^l_m$ в базис $\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k$. Строки этой матрицы обозначаются парой индексов (l, m), а столбцы — парой индексов (j, k) (эти индексы меняются в различных пределах: $-l_1\leqslant j\leqslant l_1$, $-l_2\leqslant k\leqslant l_1$ и $|l_1-l_2|\leqslant l\leqslant|l_1+l_2|$, $-l\leqslant m\leqslant l$). Таким образом,

$$\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k=\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\sum_{m=-l}^{l}C_{(lm),\,(jk)}\,\mathbf{a}^l_m. \tag{6}$$

Из унитарности матрицы C вытекает, что

$$\mathbf{a}^l_m=\sum_{j=-l_1}^{l_1}\sum_{k=-l_2}^{l_2}\overline{C_{(lm),\,(jk)}}\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k. \tag{7}$$

Во многих случаях бывает полезно явно отметить зависимость матрицы C от параметров l_1 и l_2. Поэтому вместо $C_{(lm),\,(jk)}$ пишут $C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ m)$ или, короче, $C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})$, где $\mathbf{l}=(l_1,\ l_2,\ l)$, $\mathbf{j}=(j,\ k, m)$,

$$C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})\equiv C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ m)\equiv C_{(lm),\,(jk)}. \tag{8}$$

Числа $C(l_1,\ l_2,\ l; j, k, m)$ называются *коэффициентами Клебша — Гордана* (в работах по физике их часто неправильно называют коэффициентами Клебша — Жордана).

Коэффициенты Клебша — Гордана определены неоднозначно. Дело в том, что векторы канонического базиса определены лишь с точностью до общего множителя, равного по модулю единице (после умножения на такой множитель базис остается ортонормированным и каноническим). Поэтому коэффициенты $C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ m)$ разложения (6) определены с точностью до множителя α_l такого, что $|\alpha_l|=1$. Воспользовавшись этой неопределенностью, можно добиться, чтобы выполнялось соотношение

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ l_1,\ -l_2,\ l_1-l_2)\geqslant 0. \tag{9}$$

Ниже будет показано, что из выполнения этого соотношения вытекает вещественность всех коэффициентов $C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})$.

3. Вычисление коэффициентов Клебша — Гордана. Из того, что базисы $\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k$ и $\mathbf{a}^l_m$ связаны соотношениями (6) и (7) п. 2, вытекает, что матрицы оператора $T_{l_1}(u)\otimes T_{l_2}(u)$ в этих базисах связаны соотношением

$$(\alpha_{(jk),\,(j'k')}(u))=C^*(\beta_{(lm),\,(l'm')}(u))\,C. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{(jk),\,(j'k')}(u)=\sum_{l,\,l',\,m,\,m'}\overline{C_{(lm),\,(jk)}}\,\beta_{(lm),\,(l'm')}(u)\,C_{(l'm'),\,(j'k')}. \tag{2}$$

Суммирование в этой формуле распространено на такие значения l, l', m, m', что $|l_1-l_2|\leqslant l,\ l'\leqslant l_1+l_2;\ -l\leqslant m\leqslant l;\ -l'\leqslant m'\leqslant l'$.

Принимая во внимание формулы (2) и (4) п. 2, перепишем это равенство в следующем виде:

$$t^{l_1}_{jj'}(u)\,t^{l_2}_{kk'}(u)=\sum_{l,\ m,\ m'} C(\mathbf{l},\ \mathbf{j}')\,\overline{C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})}\,t^l_{mm'}(u), \tag{3}$$

где $\mathbf{l}=(l_1,\ l_2,\ l)$, $\mathbf{j}=(j,\ k,\ m)$, $\mathbf{j}'=(j',\ k',\ m')$. Суммирование в равенстве (3) распространено на значения $l,\ m,\ m'$, такие, что $|l_1-l_2|\leqslant \leqslant l\leqslant l_1+l_2,\ -l\leqslant m,\ m'\leqslant l$.

Умножим обе части равенства (3) на $\overline{t^l_{mm'}(u)}$ и проинтегрируем по всей группе $SU(2)$. В силу ортонормированности системы функций $\sqrt{2l+1}\,t^l_{mm'}(u)$ (см. § 6, п. 2), получаем

$$C(\mathbf{l},\ \mathbf{j}')\,\overline{C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})}=(2l+1)\int t^{l_1}_{jj'}(u)\,t^{l_2}_{kk'}(u)\,\overline{t^l_{mm'}(u)}\,du. \tag{4}$$

Принимая во внимание выражение (5) п. 2 для матричных элементов $t^{l_1}_{jj'}(u)$ и т. д., а также выражение

$$du=\frac{1}{16\pi^2}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\psi \tag{5}$$

для инвариантной меры, получаем, что интеграл (4) отличен от нуля лишь, если $j+k=m,\ j'+k'=m'$ (в противном случае интегрирование по φ или ψ даст нуль). Поэтому коэффициенты Клебша — Гордана $C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ m)$ отличны от нуля, лишь если $j+k=m$ [1]).

В дальнейшем будем считать, что в равенстве (4) имеем $j+k=m$, $j'+k'=m'$. Подставляя в это равенство явные выражения матричных элементов и меры du, делая подстановку $\cos\theta=x$ и выполняя интегрирование по φ и ψ, получаем

$$C(\mathbf{l},\ \mathbf{j}')\,\overline{C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})}=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} P^{l_1}_{jj'}(x)\,P^{l_2}_{kk'}(x)\,\overline{P^l_{j+k,\ j'+k'}(x)}\,dx, \tag{6}$$

где $\mathbf{l}=(l_1,\ l_2,\ l)$, $\mathbf{j}=(j,\ k,\ j+k)$, $\mathbf{j}'=(j',\ k',\ j'+k')$.

Положим в этом равенстве $j'=l_1$ и $k'=-l_2$. По формулам (6) п. 5 § 3 и (6) п. 6 § 3 имеем

$$P^{l_1}_{jl_1}(x)=\frac{i^{l_1-j}}{2^{l_1}}\sqrt{\frac{(2l_1)!}{(l_1-j)!\,(l_1+j)!}}\,(1-x)^{\frac{l_1-j}{2}}(1+x)^{\frac{l_1+j}{2}} \tag{7}$$

и

$$P^{l_2}_{k,\ -l_2}(x)=\frac{i^{l_2+k}}{2^{l_2}}\sqrt{\frac{(2l_2)!}{(l_2+k)!\,(l_2-k)!}}\,(1-x)^{\frac{l_2+k}{2}}(1+x)^{\frac{l_2-k}{2}}. \tag{8}$$

---

[1]) Этот результат можно получить также, применив к обеим частям равенства (6) п. 2 оператор $T_{l_1}(u)\otimes T_{l_2}(u)$, где $u=u(\varphi,\ 0,\ 0)$. При этом левая часть равенства умножится на $e^{-i(j+k)\varphi}$, а члены, содержащие $\mathbf{a}^l_m$, на $e^{-im\varphi}$. Из линейной независимости базисов мы и получим, что в равенство (6) п. 2 входят лишь члены, для которых $m=j+k$.

Кроме того, по формуле (3) п. 4 § 3

$$P^l_{j+k,\, l_1-l_2}(x)=\frac{i^{-j-k-l_1+l_2+2l}}{2^l}\sqrt{\frac{(l+j+k)!}{(l-j-k)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!}}\times$$
$$\times(1-x)^{-\frac{j+k+l_2-l_1}{2}}(1+x)^{\frac{l_2-l_1-j-k}{2}}\times$$
$$\times\frac{d^{l-j-k}}{dx^{l-j-k}}\left[(1-x)^{l-l_1+l_2}(1+x)^{l+l_1-l_2}\right]. \qquad (9)$$

Подставив эти выражения в формулу (6), получим

$$C(l_1,\, l_2,\, l;\, l_1,\, -l_2,\, l_1-l_2)\overline{C(l_1,\, l_2,\, l;\, j,\, k,\, j+k)}=$$
$$=\frac{(-1)^{-l+l_1+k}(2l+1)}{2^{l+l_1+l_2+1}}\sqrt{\frac{(2l_1)!\,(2l_2)!\,(l+j+k)!}{(l_1-j)!\,(l_1+j)!\,(l_2-k)!\,(l_2+k)!}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{(l-j-k)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!}}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{l_1-j}(1+x)^{l_2-k}\frac{d^{l-j-k}}{dx^{l-j-k}}\left[(1-x)^{l-l_1+l_2}(1+x)^{l+l_1-l_2}\right]dx. \qquad (10)$$

Чтобы найти из этого равенства $C(l_1,\, l_2,\, l;\, l_1,\, -l_2,\, l_1-l_2)$, положим в нем $j=l_1$, $k=-l_2$:

$$|C(l_1,\, l_2,\, l;\, l_1,\, -l_2,\, l_1-l_2)|^2=\frac{(2l+1)(-1)^{-l+l_1-l_2}}{2^{l+l_1+l_2+1}(l-l_1+l_2)!}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1+x)^{2l_2}\frac{d^{l-l_1+l_2}}{dx^{l-l_1+l_2}}\left[(1-x)^{l-l_1+l_2}(1+x)^{l+l_1-l_2}\right]dx.$$

Проинтегрируем по частям $l-l_1+l_2$ раз. Поскольку при подстановке пределов интегрирования проинтегрированные члены обращаются в нуль,

$$|C(l_1,\, l_2,\, l;\, l_1,\, -l_2,\, l_1-l_2)|^2=$$
$$=\frac{2l+1}{2^{l+l_1+l_2+1}}\frac{(2l_2)!}{(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2-l)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2l_1}(1-x)^{l-l_1+l_2}\,dx=$$
$$=\frac{(2l+1)(2l_1)!\,(2l_2)!}{(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!} \qquad (11)$$

(ср. ниже формулы (1) и (3)) п. 7 § 1 главы V).

Поскольку коэффициенты Клебша — Гордана нормированы так, чтобы выполнялось неравенство $C(l_1,\, l_2,\, l;\, l_1,\, -l_2,\, l_1-l_2)\geqslant 0$, то из формулы (11) следует, что

$$C(l_1,\, l_2,\, l;\, l_1,\, -l_2,\, l_1-l_2)=\sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1)!\,(2l_2)!}{(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!}}. \qquad (12)$$

Подставив выражение (12) в формулу (10), получим

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=\frac{(-1)^{-l+l_1+k}}{2^{l+l_1+l_2+1}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2l+1)(l+j+k)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{(l_1-j)!\,(l_1+j)!\,(l_2-k)!\,(l_2+k)!\,(l-j-k)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!}}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{l_1-j}(1+x)^{l_2-k}\frac{d^{l-j-k}}{dx^{l-j-k}}\left[(1-x)^{l-l_1+l_2}(1+x)^{l+l_1-l_2}\right]dx. \tag{13}$$

Из этого выражения видно, что при выбранной нами нормировке все коэффициенты Клебша — Гордана вещественны.

Другое выражение для $C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)$ можно получить, заметив, что $P^l_{j+k,\ l_1-l_2}(x)=P^l_{l_1-l_2,\ j+k}(x)$, и подставив в формулу (6) соответствующее выражение. В результате получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=\frac{(-1)^{-l+l_1+k}}{2^{l+l_1+l_2+1}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{(l_1-j)!\,(l_1+j)!\,(l_2-k)!\,(l_2+k)!\,(l+j+k)!\,(l-j-k)!\,(l-l_1+l_2)!}}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{l_2+k}(1+x)^{l_2-k}\frac{d^{l-l_1+l_2}}{dx^{l-l_1+l_2}}\left[(1-x)^{l-j-k}(1+x)^{l+j+k}\right]dx\cdot \tag{13'}$$

Из полученных выражений для коэффициентов Клебша — Гордана легко вывести выражение этих коэффициентов в виде сумм. Для этого достаточно применить к подынтегральной функции формулу Лейбница и почленно проинтегрировать полученное выражение. В результате преобразований получим

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=(-1)^{-l+l_1+k}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2l+1)(l+j+k)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l-j-k)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l+l_1-l_2)!}{(l_1+l_2+l+1)!\,(l_1-j)!\,(l_1+j)!\,(l_2-k)!\,(l_2+k)!}}\times$$

$$\times\sum_{s=M}^{N}\frac{(-1)^s(l+l_2-j-s)!\,(l_1+j+s)!}{s!\,(l-j-k-s)!\,(l-l_1+l_2-s)!\,(l_1-l_2+j+k+s)!}, \tag{14}$$

где $M=\max(0,\ l_2-l_1-j-k)$, $N=\max(l-j-k,\ l-l_1+l_2)$.

Другое представление $C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})$ в виде суммы получается, если проинтегрировать в формуле (13) $l-j-k$ раз по частям и принять во внимание, что все проинтегрированные члены обращаются в нуль.

Применяя формулу Лейбница и почленно интегрируя, находим

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=(-1)^{l_1-j}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(2l+1)(l+j+k)!\,(l-j-k)!\,(l_1-j)!\,(l_2-k)!\,(l_1+l_2-l)!}{(l_1+j)!\,(l_2+k)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2+l+1)!}}\times$$
$$\times\sum_{s=M_1}^{N_1}\frac{(-1)^s(l_1+j+s)!\,(l+l_2-j-s)!}{s!\,(l-j-k-s)!\,(l_1-j-s)!\,(l_2-l+j+s)!},\tag{14'}$$

где $M_1=\max(0,\ l-l_2-j)$, $N=\min(l-j-k,\ l_1-j)$.

Еще одно представление $C(\mathbf{l},\ \mathbf{j})$ в виде суммы получается, если положить в формуле (6) $j'=l_1$, $k'=l_2$, подставить разложение $P^l_{j+k,\ l_1-l_2}(z)$ по (1) п. 4 § 3 и выполнить почленное интегрирование:

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=$$
$$=\sqrt{\frac{(2l+1)(l_1+j)!\,(l-j-k)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{(l_1-j)!\,(l_2+k)!\,(l_2-k)!\,(l+j+k)!\,(l+l_1-l_2)!}}\times$$
$$\times\sum_{s=\max(j+k,\ l_1-l_2)}^{l}\frac{(-1)^{l_1+k-s}(l+s)!\,(l_2+s-j)!}{(l-s)!\,(s-j-k)!\,(s-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2+s+1)!}.\tag{14''}$$

Если l_1-l_2 — целое число, то суммирование в этой формуле ведется по целым значениям s, а если l_1-l_2 — полуцелое число, то суммирование ведется по полуцелым значениям s.

4. Соотношения симметрии. Как и функции $P^l_{mn}(x)$, коэффициенты Клебша—Гордана обладают рядом соотношений симметрии. Покажем сначала, что

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=$$
$$=(-1)^{l-l_1-l_2}C(l_1,\ l_2,\ l;\ -j,\ -k,\ -j-k).\tag{1}$$

Для этого достаточно заменить в формуле (13′) п. 3 j на $-j$ и k на $-k$, сделать подстановку $x=-y$ и принять во внимание, что $k+l_2$ — целое число.

Аналогично доказывается, что

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=(-1)^{l-l_1-l_2}C(l_2,\ l_1,\ l;\ k,\ j,\ j+k).\tag{2}$$

Для этого надо воспользоваться формулой (13) п. 3, поменять в ней местами $(l_1,\ j)$ и $(l_2,\ k)$ и сделать замену переменной $x=-y$.

Чтобы получить следующее соотношение симметрии, сделаем в формуле (13) п. 3 замену параметров:

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\frac{l_1'+l_2'+j'+k'}{2}, & l_2&=\frac{l_1'+l_2'-j'-k'}{2},\\ j&=\frac{l_1'-l_2'+j'-k'}{2}, & k&=\frac{l_1'-l_2'-j'+k'}{2}. \end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Сравнивая результат с формулой (13′) п. 3, получим

$$C\left(\frac{l_1+l_2+j+k}{2},\ \frac{l_1+l_2-j-k}{2},\ l;\ \frac{l_1-l_2+j-k}{2},\ \frac{l_1-l_2-j+k}{2},\ l_1-l_2\right)=$$
$$=C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k). \tag{4}$$

Далее, проинтегрируем в формуле (13) п. 3 $l-j-k$ раз по частям и сделаем подстановку

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\frac{l'+l_1'-k'}{2}, & l_2&=\frac{l'+l_1'+k'}{2}, & l&=l_2',\\ j&=\frac{l_1'-l'+k'}{2}+j', & k&=\frac{l_1'-l'-k'}{2}-j'. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Сравнивая результат с формулой (13′) п. 3, получим следующее соотношение симметрии:

$$C\left(\frac{l+l_1-k}{2},\ \frac{l+l_1+k}{2},\ l_2;\ \frac{l_1-l+k}{2}+j,\ \frac{l_1-l-k}{2}-j,\ l_1-l\right)=$$
$$=(-1)^{l_1-j}\sqrt{\frac{2l_1+1}{2l+1}}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k, j+k). \tag{6}$$

Комбинируя соотношения (4) и (6), получаем

$$C(l_1, l_2, l; j, k, j+k)=(-1)^{l_1-j}\sqrt{\frac{2l+1}{2l_2+1}}\,C(l_1, l, l_2;\ j, -j-k, -k). \tag{7}$$

Далее, комбинируя равенство (7) с соотношениями (1) и (2), получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=$$
$$=(-1)^{l-l_1-k}\left(\frac{2l+1}{2l_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}C(l_2,\ l,\ l_1;\ k,\ -j-k,\ -j)=$$
$$=(-1)^{l-l_2+j}\left(\frac{2l+1}{2l_2+1}\right)^{\frac{1}{2}}C(l, l_1,\ l_2;\ -j-k, j, -k)=$$
$$=(-1)^{l_2+k}\left(\frac{2l+1}{2l_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}C(l,\ l_2,\ l_1;\ -j-k,\ k,\ -j). \tag{7′}$$

Выведенные соотношения симметрии для коэффициентов Клебша — Гордана удобно представить с помощью введенного Вигнером символа $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$, где

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=(-1)^{l_1-l_2+j+k}\sqrt{2l+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ j & k & -j-k\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Соотношения симметрии для символа Вигнера формулируются следующим образом: поставим в соответствие этому символу матрицу третьего порядка

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -j_1+j_2+j_3 & j_1-j_2+j_3 & j_1+j_2-j_3 \\ j_1-m_1 & j_2-m_2 & j_3-m_3 \\ j_1+m_1 & j_2+m_2 & j_3+m_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

При четной перестановке строк или столбцов этой матрицы или при транспонировании символ Вигнера не меняется, а при нечетной перестановке строк или столбцов он меняет знак.

5. Некоторые частные значения. Укажем некоторые случаи, когда коэффициенты Клебша — Гордана состоят из одного слагаемого. Пусть $l_1=j$. Тогда в формуле (14′) п. 3 остается лишь слагаемое, для которого $s=0$, и мы получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ l_1,\ k,\ l_1+k)= \\ =\sqrt{\frac{(2l+1)(l+l_1+k)!\,(l_2-k)!\,(2l_1)!\,(l+l_2-l_1)!}{(l-l_1-k)!\,(l_2-l+l_1)\,(l_2+k)!\,(l-l_2+l_1)!\,(l+l_2+l_1+1)!}}. \quad (1)$$

Используя соотношения симметрии п. 4, получаем одночленные выражения в случаях:

а) $j=\pm l_1$, б) $k=\pm l_2$, в) $j+k=\pm l$.

Например,

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ l-j,\ l)=(-1)^{l_1-j}\times \\ \times\sqrt{\frac{(2l+1)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l_1+j)!\,(l_2+l-j)!}{(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2+l+1)!\,(l_1-j)!\,(l_2-l+j)!\,(l+l_1-l_2)!}}. \quad (2)$$

Далее рассмотрим случай, когда $l=l_1+l_2$. В этом случае в формуле (14′) п. 3 остается лишь слагаемое, для которого $s=l_1-j$. Мы получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l_1+l_2;\ j,\ k,\ j+k)= \\ =\sqrt{\frac{(l_1+l_2+j+k)!\,(l_1+l_2-j-k)!\,(2l_1)!\,(2l_2)!}{(l_1-j)!\,(l_2-k)!\,(l_1+j)!\,(l_2+k)!\,(2l_1+2l_2)!}}. \quad (3)$$

С помощью соотношений симметрии п. 4 отсюда получаем одночленные выражения в случаях $l=l_2-l_1$ и $l=l_1-l_2$.

Например, при $l_1\geqslant l_2$ имеем

$$C(l_1,\ l_2,\ l_1-l_2;\ j,\ k,\ j+k)=(-1)^{l_2+k}\times \\ \times\sqrt{\frac{(2l_1-2l_2+1)!\,(2l_2)!\,(l_1-j)!\,(l_1+j)!}{(l_1-l_2+j+k)!\,(l_1-l_2-j-k)!\,(2l_1+1)!\,(l_2-k)!\,(l_2+k)!}}. \quad (4)$$

Одночленное выражение для коэффициентов Клебша — Гордана получается еще в случае, когда $j=k=0$. Из формулы (13′) п. 3 следует, что

$$C(l_1, l_2, l; 0, 0, 0)=\frac{(-1)^{l_1-l}}{2^{l+l_1+l_2+1}\, l_1!\, l_2!\, l!}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{(l-l_1+l_2)!}}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{l_2}\frac{d^{l-l_1+l_2}}{dx^{l-l_2+l_2}}(1-x^2)^l\,dx.$$

Ясно, что этот интеграл равен нулю, если $l+l_1+l_2$ нечетное число (в этом случае подынтегральная функция нечетна). Пусть теперь $l+$ $+l_1+l_2=2g$, где g — целое число. Легко показать, что

$$J(p, s, q)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^p\frac{d^{2s}}{dx^{2s}}(1-x^2)^q\,dx=$$
$$=\frac{(-1)^s\,2^{2p+2q-2s+1}\,p!\,q!\,(2s)!\,(p+q-2s)!\,(p+q-s)!}{s!\,(p-s)!\,(q-s)!\,(2p+2q-2s+1)!}. \qquad (5)$$

В самом деле, при $s=0$ значение интеграла (5) дается равенством

$$J(p, 0, q)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{p+q}dx=\frac{2^{2p+2q+1}\,[(p+q)!]^2}{(2p+2q+1)!} \qquad (6)$$

в соответствии с формулой (5). Так как

$$\frac{d^{2s}}{dx^{2s}}(1-x^2)^q=\frac{d^{2s-2}}{dx^{2s-2}}\left[2q(2q-2)(1-x^2)^{q-2}-2q(2q-1)(1-x^2)^{q-1}\right],$$

то

$$J(p, s, q)=2q(2q-2)\,J(p, s-1, q-2)-2q(2q-1)\,J(p, s-1, q-1). \qquad (7)$$

Рекуррентное соотношение (7) с начальным условием (6) имеет, очевидно, единственное решение. Подстановка показывает, что этим решением является выражение (5).

Из равенства (5) следует, что

$$C(l_1, l_2, l; 0, 0, 0)=$$
$$=(-1)^{g-l}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l-l_1+l_2)!}{(l_1+l_2+l+1)!}}\times$$
$$\times\frac{g!}{(g-l_1)!\,(g-l_2)!\,(g-l)!}, \qquad (8)$$

где $2g=l+l_1+l_2$.

В силу соотношения симметрии (4) п. 4 получаем отсюда, что если $2g = l + 2l_1$ — четное число, то

$$C(l_1, l_1, l; j, j, 2j) = \\ = (-1)^{g-l} \sqrt{\frac{(2l+1)(2j+l)!\,(2l_1-l)!\,(l-2j)!}{(2l_1+l+1)!}} \times \\ \times \frac{g!}{(g-l_1-j)!\,(g-l_1+j)!\,(g-l)!}. \quad (9)$$

Если же $2g$ — нечетное число, то $C(l_1, l_1, l; j, j, 2j) = 0$.

6. Разложение произведений функций $P^l_{mn}(z)$. В п. 3 было показано, что

$$t^{l_1}_{jj'}(u)\,t^{l_2}_{kk'}(u) = \\ = \sum_{l=|l_2-l_1|}^{l_1+l_2} C(l_1, l_2, l; j, k, j+k)\,C(l_1, l_2, l; j'; k'; j'+k')\,t^l_{j+k,\,j'+k'}(u) \quad (1)$$

(напомним, что коэффициенты Клебша — Гордана в выбранной нами нормировке вещественны).

Подставим в это равенство выражения функций $t^{l_1}_{jj'}(u)$, $t^{l_2}_{kk'}(u)$, $t^l_{j+k,\,j'+k'}(u)$ через углы Эйлера (см. формулы (6) п. 3 § 3). После сокращения на $e^{-i[(j+k)\varphi + (j'+k')\psi]}$ получаем равенство

$$P^{l_1}_{jj'}(z)\,P^{l_2}_{kk'}(z) = \\ = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} C(l_1, l_2, l; j, k, j+k)\,C(l_1, l_2, l; j', k', j'+k') \times \\ \times P^l_{j+k,\,j'+k'}(z). \quad (2)$$

Эта формула позволяет разложить произведение двух функций $P^{l_1}_{jj'}(z)$ и $P^{l_2}_{kk'}(z)$ по функциям $P^l_{j+k,\,j'+k'}(z)$. В разложение входят функции $P^l_{j+k,\,j'+k'}(z)$, для которых $|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2$ и $2l$ имеет ту же четность, что и $2l_1 + 2l_2$. Разложение (2) называется *рядом Клебша — Гордана.*

Положим в формуле (2) $j = k = j' = k' = 0$. Так как $P^l_{00}(z) = P_l(z)$, а значения $C(l_1, l_2, l; 0, 0, 0)$ даются формулой (6) п. 5, то

$$P_{l_1}(z)\,P_{l_2}(z) = \\ = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l-l_1+l_2)!\,(g!)^2}{(l_1+l_2+l+1)!\,[(g-l_1)!\,(g-l_2)!\,(g-l)!]^2} P_l(z), \quad (3)$$

где $g = \frac{l_1+l_2+l}{2}$ и суммирование распространяется на значения l, имеющие ту же четность, что и $l_1 + l_2$.

Формула (3) позволяет вывести разложение функций $P^{l_1}_{jj'}(z)$ по присоединенным функциям Лежандра. Пусть $j \geqslant |j'|$. Положив в формуле (1) $l_2=j$, $k=-j$, $k'=j$, получим

$$P^{l_1}_{jj'}(z)\,P^{j}_{-j,\,j}(z)= \\ =\sum_{l=|l_1-j|}^{l_1+j} C(l_1,\ j,\ l;\ j,\ -j,\ 0)\,C(l_1,\ j,\ l;\ j',\ j,\ j'+j)\,P^{l}_{0,\ j'+j}(z). \tag{4}$$

Так как

$$P^{j}_{-j,\,j}(z)=i^{2j}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{j},$$

$$P^{l}_{0,\ j'+j}(z)=i^{-j-j'}\sqrt{\frac{(l-j-j')!}{(l+j+j')!}}\,P^{j+j'}_{l}(z),$$

$$C(l_1,\ j,\ l;\ j,\ -j,\ 0)= \\ =\sqrt{\frac{(2l+1)\,(l+l_1-j)!\,2j!\,(l_1+j)!}{(l_1-j)!\,(l-l_1+j)!\,(l_1-l+j)!\,(l_1+l+j+1)!}}$$

и

$$C(l_1,\ j,\ l;\ j',\ j,\ j'+j)=(-1)^{-l+l_1+j}\times \\ \times\sqrt{\frac{(2l+1)\,(l+j+j')!\,(l_1-j')!\,(l+l_1-j)\,2j!}{(l+l_1+j+1)!\,(l-l_1+j)!\,(l_1-l+j)!\,(l-j-j')!\,(l_1+j')!}},$$

то

$$\left(\frac{1-z}{2}\right)^{j}P^{l_1}_{jj'}(z)=i^{2l_1-j-j'}\,(2j)!\,\sqrt{\frac{(l_1+j)!\,(l_1-j')!}{(l_1-j)!\,(l_1+j')!}}\times \\ \times\sum_{l=l_1-j}^{l_1+j}(-1)^{l}\,\frac{(2l+1)\,(l+l_1-j)!}{(l+l_1+j+1)!\ (l-l_1+j)!\,(l_1-l+j)!}\,P^{j+j'}_{l}(z). \tag{5}$$

Если положить в равенстве (2) $l_2=j$, $k=-j$, $k'=-j'$, то точно так же получим разложение $P^{l_1}_{jj'}(z)$ по $P_l(z)$:

$$P^{l_1}_{jj}(z)=2^{j}\,i^{j'-j}\sqrt{\frac{(j-j')!\,(j+j')!}{(2j)!}}\,(1-z)^{\frac{j-j'}{2}}\,(1+z)^{\frac{-j+j'}{2}}\times \\ \times\sum_{l=l_1-j}^{l_1+j}C(l_1,\ j,\ l;\ j,\ -j,\ 0)\,C(l_1,\ j,\ l;\ j',\ -j',\ 0)\,P_l(z). \tag{6}$$

Однако в этом случае второй коэффициент Клебша — Гордана не сводится к одному слагаемому.

Формула (2) приводит также к многочисленным рекуррентным соотношениям для функций $P^{l}_{mn}(z)$. Чтобы получить их, надо придать l_2 в формуле (2) значения $l_2=1/2$ или 1.

Положим $l_2 = {}^1/_2$, $k = k' = {}^1/_2$ и примем во внимание, что $P^{1/2}_{1/2,\,1/2}(\cos\theta) = \cos\theta/2$, и что по формуле (14′) п. 3

$$C\left(l_1, \frac{1}{2}, l_1 - \frac{1}{2};\ j, \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{l_1 - j}{2l_1 + 1}},$$

$$C\left(l_1, \frac{1}{2}, l_1 + \frac{1}{2};\ j, \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{l_1 + j + 1}{2l_1 + 1}}.$$

Поэтому мы имеем рекуррентное соотношение

$$\cos\frac{\theta}{2} P^{l_1}_{jj'}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{(l_1 - j)(l_1 - j')}}{2l_1 + 1} P^{l_1 - 1/2}_{j + 1/2,\, j' + 1/2}(\cos\theta) + \\ + \frac{\sqrt{(l_1 + j + 1)(l_1 + j' + 1)}}{2l_1 + 1} P^{l_1 + 1/2}_{j + 1/2,\, j' + 1/2}(\cos\theta).$$

Точно так же, полагая $l_2 = k = {}^1/_2$, $k' = -{}^1/_2$, получаем

$$i\sin\frac{\theta}{2} P^{l_1}_{jj'}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{(l_1 - j)(l_1 + j')}}{2l_1 + 1} P^{l_1 - 1/2}_{j + 1/2,\, j' - 1/2}(\cos\theta) + \\ + \frac{\sqrt{(l_1 + j + 1)(l_1 - j' + 1)}}{2l_1 + 1} P^{l_1 + 1/2}_{j + 1/2,\, j' - 1/2}(\cos\theta).$$

При $l_2 = 1$ получаем девять рекуррентных соотношений. Выпишем лишь одно из них, получающееся при $j' = k' = 0$:

$$\frac{\sqrt{(l_1 + k + 1)(l_1 - k + 1)(l_1 + j + 1)(l_1 - j + 1)}}{(2l_1 + 1)(l_1 + 1)} P^{l_1 + 1}_{jk}(\cos\theta) + \\ + \frac{kj}{l_1(l_1 + 1)} P^{l}_{jk}(\cos\theta) + \frac{\sqrt{(l_1 + k)(l_1 - k)(l_1 + j)(l_1 - j)}}{l_1(2l_1 + 1)} P^{l_1 - 1}_{jk}(\cos\theta) = \\ = \cos\theta\, P^{l_1}_{jk}(\cos\theta).$$

7. Связь с многочленами Якоби. В этом пункте будет показано, что коэффициенты Клебша — Гордана являются конечно-разностным аналогом многочленов Якоби. Для этого понадобится конечно-разностный аналог степени, так называемая символическая степень. Пусть n — целое число и a — любое комплексное число. Назовем *символической n-й степенью* числа a и обозначим через $a^{(n)}$ выражение

$$a^{(n)} = \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a - n + 1)}. \qquad (1)$$

Далее, введем конечно-разностный аналог производной — оператор

$$\Delta f(a) = f(a + 1) - f(a). \qquad (2)$$

Легко проверить, что

$$\Delta a^{(n)} = n a^{(n-1)}, \qquad (3)$$

$$\Delta^k f(a) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \frac{k!}{s!\,(k - s)!} f(a + s). \qquad (4)$$

С помощью формулы (4) и равенства (14′) п. 3 получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=$$
$$=(-1)^{l_1-l+k}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+j+k)!\,(l_1+l_2-l)!}{(l-j-k)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l+l_1+l_2+1)!}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(l_1-j)^{(l_1-l_2-j-k)}}{(l_1+j)^{(l_1-l_2+j+k)}}}\,\Delta^{l-j-k}\left[\frac{(l_1+j)^{(l+l_1-l_2)}}{(l_1-j)^{(l_1-l-l_2)}}\right].$$

Эта формула является конечно-разностным аналогом формулы (3) п. 4 § 3 для функций $P^l_{mn}(z)$.

Итак, мы доказали, что коэффициенты Клебша — Гордана являются конечно-разностным аналогом функций $P^l_{mn}(z)$ — матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SU(2)$.

Указанная аналогия делает естественным предположение, что коэффициенты Клебша — Гордана обладают свойствами, аналогичными соответствующим свойствам функций $P^l_{mn}(z)$. Ниже указан ряд таких свойств.

8. Рекуррентные формулы. Установим рекуррентные формулы для коэффициентов Клебша — Гордана. Для этого воспользуемся равенством

$$\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k=\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)\,\mathbf{a}^l_{j+k},\tag{1}$$

где, напомним, $\{\mathbf{f}_j\}$ и $\{\mathbf{h}_k\}$ — канонические базисы в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, а $\{\mathbf{a}^l_m\}$ — канонические базисы в пространствах $\mathfrak{F}$, на которые разлагается $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$. Применим к обеим частям этого равенства инфинитезимальный оператор H_+. Так как

$$H_+(\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k)=H_+\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k+\mathbf{f}_j\otimes H_+\mathbf{h}_k,\tag{2}$$

а $\{\mathbf{f}_j\}$ и $\{\mathbf{h}_k\}$ — канонические базисы, то

$$H_+(\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_k)=-\sqrt{(l_1-j)(l_1+j+1)}\,\mathbf{f}_{j+1}\otimes\mathbf{h}_k-$$
$$-\sqrt{(l_2-k)(l_2+k+1)}\,\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_{k+1}\tag{3}$$

(см. формулу (6) п. 4 § 2). Точно так же имеем

$$H_+\mathbf{a}^l_{j+k}=-\sqrt{(l-j-k)(l+j+k+1)}\,\mathbf{a}^l_{j+k+1}.$$

Подставим полученные результаты в формулу (2) и разложим $\mathbf{f}_{j+1}\otimes\mathbf{h}_k$, $\mathbf{f}_j\otimes\mathbf{h}_{k+1}$ по формуле, аналогичной равенству (1). Сравнивая коэффициенты при $\mathbf{a}^l_{j+k+1}$, получим

$$\sqrt{(l_1-j)(l_1+j+1)}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j+1,\ k,\ j+k+1)+$$
$$+\sqrt{(l_2-k)(l_2+k+1)}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k+1,\ j+k+1)=$$
$$=\sqrt{(l-j-k)(l+j+k+1)}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k).\tag{4}$$

Точно так же, применяя к обеим частям разложения оператор H_-, находим

$$\sqrt{(l_1+j)(l_1-j+1)}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j-1,\ k,\ j+k-1)+ \\ +\sqrt{(l_2+k)(l_2-k+1)}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k-1,\ j+k-1)= \\ =\sqrt{(l+j+k)(l-j-k+1)}\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k). \qquad (5)$$

Применение оператора H_-H_+ приводит к разностному уравнению для коэффициентов Клебша — Гордана

$$[(l_1-j)(l_1+j+1)+(l_2-k)(l_2+k+1)- \\ -(l-j-k)(l+j+k+1)]\,C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k;\ j+k)+ \\ +\sqrt{(l_1-j)(l_1+j+1)(l_2+k)(l_2-k+1)}\times \\ \times C(l_1,\ l_2,\ l;\ j+1,\ k-1;\ j+k)+ \\ +\sqrt{(l_1+j)(l_1-j+1)(l_2-k)(l_2+k+1)}\times \\ \times C(l_1,\ l_2,\ l;\ j-1,\ k+1,\ j+k)=0. \qquad (6)$$

Это уравнение является аналогом дифференциального уравнения второго порядка для функций $P^l_{mn}(z)$ (см. п. 5 § 4).

Выведем теперь рекуррентные соотношения для коэффициентов Клебша — Гордана, связывающие коэффициенты с различными значениями l_1, l_2 и l. Для этого воспользуемся тождеством

$$\frac{d^s}{dx^s}[(1-x)^p(1+x)^q]= \\ =q\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}[(1-x)^p(1+x)^{q-1}]-p\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}[(1-x)^{p-1}(1+x)^q].$$

Применим это тождество к равенству (13) п. 3. После простых преобразований получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=\sqrt{\frac{2l+1}{2l(l-j-k)(l_1+l_2-l+1)}}\times \\ \times\left[\sqrt{(l-l_1+l_2)(l_1+j+1)}\,C\left(l_1+\frac{1}{2},\,l_2,\,l-\frac{1}{2};\ j+\frac{1}{2},\ k,\ j+k+\frac{1}{2}\right)-\right. \\ \left.-\sqrt{(l+l_1-l_2)(l_2+k+1)}\,C\left(l_1,\ l_2+\frac{1}{2},\ l-\frac{1}{2};\,j,\,k+\frac{1}{2},\,j+k+\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (7)$$

Точно так же из формулы (13′) п. 3 получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=\sqrt{\frac{2l+1}{2l(l_1+l_2-l+1)(l-l_1+l_2)}}\times \\ \times\left[\sqrt{(l-j-k)(l_1+j+1)}\,C\left(l_1+\frac{1}{2},\ l_2,\,l-\frac{1}{2};\ j+\frac{1}{2},\ k,\,j+k+\frac{1}{2}\right)-\right. \\ \left.-\sqrt{(l+j+k)(l_1-j+1)}\,C\left(l_1+\frac{1}{2},\,l_2,\,l-\frac{1}{2};\,j-\frac{1}{2},\,k,\,j+k-\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (8)$$

9. Производящая функция. Ряд новых свойств коэффициентов Клебша — Гордана вытекает из тождества

$$A \equiv (u_1v_2 - u_2v_1)^{l_1+l_2-l}(u_1x_1+u_2x_2)^{l_1-l_2+l}(v_1x_1+v_2x_2)^{-l_1+l_2+l} =$$
$$= \sqrt{\frac{(l_1+l_2+l+1)!\,(l_1+l_2-l)!\,(l_1-l_2+l)!\,(l+l_2-l_1)!}{2l+1}} \times$$
$$\times \sum_{j=-l_1}^{l_1} \sum_{k=-l_2}^{l_2} C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)\, U_j^{l_1} V_k^{l_2} X_{j+k}^{l},$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} U_j^{l_1} &= \frac{u_1^{l_1-j}u_2^{l_1+j}}{\sqrt{(l_1+j)!(l_1-j)!}}; \qquad V_k^{l_2} = \frac{v_1^{l_2-k}v_2^{l_2+k}}{\sqrt{(l_2+k)!\,(l_2-k)!}}; \\ X_m^l &= \frac{x_1^{l-m}x_2^{l+m}}{\sqrt{(l+m)!\,(l-m)!}}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Это тождество доказывается следующим образом.

Реализуем представление $T_{l_1}(g)$ в пространстве $\mathfrak{H}_{l_1}$ однородных многочленов степени $2l_1$ от двух переменных[1]). Одночлены $U_j^{l_1}$ образуют канонический базис в этом пространстве. Точно так же одночлены $V_k^{l_2}$ образуют канонический базис в пространстве $\mathfrak{H}_{l_2}$ представления $T_{l_2}(g)$. Отсюда вытекает, что одночлены $U_j^{l_1}V_k^{l_2}$, $-l_1 \leqslant j \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant k \leqslant l_2$ образуют ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_{l_1} \otimes \mathfrak{H}_{l_2}$ представления $T_{l_1}(g) \otimes T_{l_2}(g)$. Представление $T_{l_1}(g) \otimes T_{l_2}(g)$ группы $SU(2)$ в пространстве $\mathfrak{H}_{l_1} \otimes \mathfrak{H}_{l_2}$ связано с преобразованиями переменных

$$\left.\begin{aligned} u_1 &\to \alpha u_1 - \bar\beta u_2, \\ u_2 &\to \beta u_1 + \bar\alpha u_2; \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &\to \alpha v_1 - \bar\beta v_2, \\ v_2 &\to \beta v_1 + \bar\alpha v_2. \end{aligned}\right\} \tag{2''}$$

Введем переменные x_1 и x_2, преобразующиеся по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\to \bar\alpha x_1 - \beta x_2, \\ x_2 &\to \bar\beta x_1 + \alpha x_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(т. е. контрагредиентные переменным u_1 и u_2), и рассмотрим тождество

$$(u_1x_1+u_2x_2)^{2l} = (2l)! \sum_{m=-l}^{l} U_m^l X_m^l, \tag{4}$$

---

[1]) См. формулы (4) п. 4 § 2 и (5) п. 1 § 2.

где

$$U_s^l = \frac{u_1^{l-s} u_2^{l+s}}{\sqrt{(l+s)!\,(l-s)!}}.$$

Левая часть этого выражения инвариантна относительно преобразований (2') и (3). Поэтому при указанных преобразованиях величины U_m^l преобразуются контрагредиентно величинам X_m^l.

С другой стороны, выражение A также инвариантно относительно преобразований (2'), (2) и (3). Поэтому если представить A в виде

$$A = \sum_{m=-l}^{l} W_m^l X_m^l, \tag{5}$$

то коэффициенты W_m^l (зависящие от u_1, u_2, v_1, v_2) при преобразованиях (2'), (2'') преобразуются контрагредиентно с X_m^l. Но тогда они преобразуются так же, как и U_m^l, т. е. по представлению $T_l(g)$.

Это означает, что коэффициенты W_m^l в разложении (5) преобразуются по представлению $T_l(g)$. Поэтому многочлены W_m^l могут отличаться от элементов канонического базиса в неприводимом инвариантном подпространстве $\mathfrak{H}_l$ пространства $\mathfrak{H}_{l_1} \otimes \mathfrak{H}_{l_2}$ лишь общим скалярным множителем.

Принимая во внимание равенство (7) п. 2, выводим отсюда, что[1])

$$W_m^l = \rho(l_1, l_2, l) \sum_{j=-l_1}^{l_1} \sum_{k=-l_2}^{l_2} C(l_1, l_2, l; j, k, m)\, U_j^{l_1} V_k^{l_2},$$

и потому

$$A \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{l_1+l_2-l} (u_1 x_1 + u_2 x_2)^{l_1-l_2+l} (v_1 x_1 + v_2 x_2)^{-l_1+l_2+l} =$$
$$= \rho(l_1, l_2, l) \sum_{j=-l_1}^{l_1} \sum_{k=-l_2}^{l_2} C(l_1, l_2, l; j, k, j+k)\, U_j^{l_1} V_k^{l_2} X_{j+k}^l. \tag{6}$$

Раскрывая скобки в левой части этого равенства, получаем после несложных преобразований

$$\rho(l_1, l_2, l)\, C(l_1, l_2, l; j, k, j+k) =$$
$$= (l_1+l_2-l)!\,(l_1-l_2+l)!\,(l+l_2-l_1)! \times$$
$$\times \sum_{s=T}^{Q} \frac{(-1)^s \sqrt{(l_1+j)!\,(l_1-j)!\,(l_2+k)!(l_2-k)!\,(l+j+k)!\,(l-j-k)!}}{(l_1-j-s)!\,(l-l_2+j+s)!\,(l_2+k-s)!\,(l-l_1-k+s)!\,s!\,(l_1+l_2-l-s)!}, \tag{7}$$

где

$$T = \max(0,\ k+l_1-l,\ l_2-l-j),\quad Q = \min(l_1-j,\ l_2+k,\ l_1+l_2-l).$$

[1]) Напомним, что в выбранной нами нормировке коэффициенты Клебша—Гордана, действительны, а также, что отличны от нуля лишь коэффициенты, для которых $m = j+k$.

Чтобы найти нормирующий множитель $\rho(l_1, l_2, l)$, положим в равенстве (7) $j=l_1$, $k=-l_2$ и используем формулу (12) п. 3. При выбранных значениях j и k в сумме (7) остается лишь слагаемое, для которого $s=0$, и мы получаем равенство

$$\rho(l_1, l_2, l)\sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1)!\,(2l_2)!}{(l_1+l_2-l)!\,(l_1+l_2+l+1)!}}=$$
$$=\sqrt{(2l_1)!\,(2l_2)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!}.$$

Отсюда имеем

$$\rho(l_1, l_2, l)=\sqrt{\frac{(l_1+l_2-l)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{2l+1}}. \tag{8}$$

Следовательно, из формулы (6) получаем

$$(u_1v_2-u_2v_1)^{l_1+l_2-l}(u_1x_2+u_2x_1)^{l_1-l_2+l}(v_1x_1+v_2x_2)^{-l_1+l_2+l}=$$
$$=\sqrt{\frac{(l_1+l_2-l)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{2l+1}}\times$$
$$\times\sum_{j=-l_1}^{l_1}\sum_{k=-l_2}^{l_2}C(l_1, l_2, l;\, j, k, j+k)\,U_j^{l_1}U_k^{l_2}X_{j+k}^{l}, \tag{9}$$

где $U_j^{l_1}$, $V_k^{l_2}$ и X_{j+k}^{l} задаются формулами (1).

Тем самым наше утверждение доказано. Попутно мы получили новое разложение для коэффициентов Клебша—Гордана:

$$C(l_1, l_2, l;\, j, k, j+k)=$$
$$=\sqrt{\frac{(2l+1)(l_1+l_2-l)!\,(l_1-l_2+l)!\,(l+l_2-l_1)!}{(l_1+l_2+l+1)!}}\times$$
$$\times\sum_s\frac{(-1)^s\sqrt{(l_1+j)!\,(l_1-j)!\,(l_2+k)!\,(l_2-k)!\,(l+j+k)!\,(l-j-k)!}}{(l_1-j-s)!\,(l-l_2+j+s)!\,(l_2+k-s)!\,(l-l_1-k+s)!\,s!\,(l_1+l_2-l-s)!}. \tag{10}$$

Тождество (9) и дает производящую функцию для коэффициентов Клебша—Гордана. Как и производящую функцию для $P^l_{mn}(x)$, ее можно использовать, чтобы получить ряд новых свойств указанных коэффициентов.

Пусть $l_1=l_1'+l_1''$, $l_2=l_2'+l_2''$, $l=l'+l''$. Тогда имеет место тождество

$$(u_1v_2-u_2v_1)^{l_1+l_2-l}(u_1x_1+u_2x_2)^{l_1-l_2+l}(v_1x_1+v_2x_2)^{-l_1+l_2+l}=$$
$$=[(u_1v_2-u_2v_1)^{l_1'+l_2'-l'}(u_1x_1+u_2x_2)^{l_1'-l_2'+l'}(v_1x_1+v_2x_2)^{-l_1'+l_2'+l'}]\times$$
$$\times[(u_1v_2-u_2v_1)^{l_1''+l_2''-l''}(u_1x_1+u_2x_2)^{l_1''-l_2''+l''}(v_1x_1+v_2x_2)^{-l_1''+l_2''+l''}]. \tag{11}$$

Применим к обеим частям полученного равенства разложение (9), подставим выражения (1) для $U_j^{l_1}$ и т. д., после чего сравним коэффициенты слева и справа. Мы получим

$$\alpha C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)= \\ =\sum_{\substack{j'+j''=j\\ k'+k''=k}} \alpha'\alpha'' C(l_1',\ l_2',\ l';\ j',\ k',\ j'+k')\, C(l_1'',\ l_2'',\ l'';\ j'',\ k'',\ j''+k''). \tag{12}$$

Здесь для краткости положено

$$\alpha=\sqrt{\frac{(l_1+l_2-l)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2+l+1)!}{(2l+1)\,(l_1+j)!\,(l_1-j)!\,(l_2+k)!\,(l_2-k)!\,(l+j+k)!\,(l-j-k)!}}$$

и аналогичный смысл имеют α' и α'' (с заменой $l_1,\ l_2,\ l,\ j,\ k$ на $l_1',\ l_2',\ l',\ j',\ k'$ или $l_1'',\ l_2'',\ l'',\ j'',\ k''$).

Положим в тождестве (12) $l_1''=\frac{1}{2}$, $l_2''=\frac{1}{2}$, $l''=0$. В этом случае j'' и k'' могут принимать лишь значения $j''=\frac{1}{2}$, $k''=-\frac{1}{2}$ или $j''=-\frac{1}{2}$, $k''=\frac{1}{2}$. Из формул (1) п. 5 и (1) п. 4 следует, что

$$C\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0;\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)=-C\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0;\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

и потому получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=\sqrt{\frac{1}{(l_1+l_2-l)\,(l_1+l_2+l+1)}}\times \\ \times\left[\sqrt{(l_1+j)(l_2-k)}\,C\left(l_1-\frac{1}{2},\ l_2-\frac{1}{2},\ l;\ j-\frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2},\ j+k\right)-\right. \\ \left.-\sqrt{(l_1-j)(l_2+k)}\,C\left(l_1-\frac{1}{2},\ l_2-\frac{1}{2},\ l;\ j+\frac{1}{2},\ k-\frac{1}{2},\ j+k\right)\right]. \tag{13}$$

Аналогично, полагая $l_1''=\frac{1}{2}$, $l_2''=0$, $l''=\frac{1}{2}$, получаем

$$C(l_1,\ l_2,\ l;\ j,\ k,\ j+k)=\sqrt{\frac{2l+1}{2l\,(l+l_1-l_2)\,(l_1+l_2+l+1)}}\times \\ \times\left[\sqrt{(l_1+j)\,(l+k+j)}\,C\left(l_1-\frac{1}{2},\ l_2,\ l-\frac{1}{2};\ j-\frac{1}{2},\ k,\ k+j-\frac{1}{2}\right)+\right. \\ \left.+\sqrt{(l_1-j)(l-k-j)}\,C\left(l_1-\frac{1}{2},\ l_2,\ l-\frac{1}{2};\ j+\frac{1}{2},\ k,\ k+j+\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{14}$$

ГЛАВА IV

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

В этой главе будут изучены функции Бесселя. Подобно тому как изучение многочленов Лежандра и Якоби оказалось связано с представлениями группы вращений трехмерного евклидова пространства, изучение функций Бесселя связано с представлениями группы $M(2)$ движений евклидовой плоскости. При этом возникают осложнения, вызванные некомпактностью группы движений плоскости.

§ 1. Группа $M(2)$

1. Определение. *Движениями* евклидовой плоскости называются преобразования этой плоскости в себя, сохраняющие расстояния между точками и не меняющие ориентации плоскости. Примерами движений являются параллельные переносы плоскости и вращения плоскости вокруг некоторой точки. Множество всех движений плоскости образует группу. Мы будем обозначать ее через $M(2)$.

Выберем на плоскости систему декартовых координат. Из аналитической геометрии известно, что каждое движение плоскости задается в этой системе координат следующим образом: движение g переводит точку $P(x, y)$ в точку $P'(x', y')$, где

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Очевидно, что числа a, b, α однозначно определяют движение g и однозначно определяются этим движением (параметр α — с точностью до слагаемого, кратного 2π). Поэтому каждый элемент g группы $M(2)$ задается тремя параметрами, a, b, α, где

$$\left.\begin{aligned} -\infty < a &< \infty, \\ -\infty < b &< \infty, \\ 0 \leqslant \alpha &< 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Будем обозначать элемент g группы $M(2)$, задаваемый параметрами a, b, α, через $g(a, b, \alpha)$.

Укажем некоторые другие реализации группы $M(2)$. Каждому движению $g(a, b, \alpha)$ поставим в соответствие матрицу

$$T(g)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & a\\ \sin\alpha & \cos\alpha & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Простой подсчет показывает, что

$$T(g_1)\,T(g_2)=T(g_1g_2).$$

Поэтому $T(g)$ является представлением группы $M(2)$. Это представление точно, т. е. $T(g_1)\neq T(g_2)$, если $g_1\neq g_2$. Таким образом, группа $M(2)$ реализуется как группа вещественных матриц третьего порядка, имеющих вид (3).

Группу $M(2)$ можно реализовать и с помощью комплексных матриц второго порядка. Именно, движению $g(a, b, \alpha)$ поставим в соответствие матрицу

$$Q(g)=\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $z=a+bi$. Легко проверить, что $Q(g_1)\,Q(g_2)=Q(g_1g_2)$ и $Q(g_1)\neq Q(g_2)$, если $g_1\neq g_2$.

2. Параметризации. Одну из параметризаций группы $M(2)$ мы уже указали выше. Именно, было показано, что каждый элемент g этой группы задается тремя числами, a, b, α. Найдем, как выражаются параметры произведения двух элементов группы через параметры сомножителей. Пусть $g_1=g(a_1, b_1, \alpha_1)$ и $g_2=g(a_2, b_2, \alpha_2)$. Перемножая матрицы $T(g_1)$ и $T(g_2)$, получаем

$$T(g_1g_2)=T(g_1)\,T(g_2)=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha_1+\alpha_2) & -\sin(\alpha_1+\alpha_2) & a_1+a_2\cos\alpha_1-b_2\sin\alpha_1\\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cos(\alpha_1+\alpha_2) & b_1+a_2\sin\alpha_1+b_2\cos\alpha_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Отсюда следует, что параметры a, b, α элемента $g=g_1g_2$ выражаются следующими формулами:

$$a=a_1+a_2\cos\alpha_1-b_2\sin\alpha_1, \tag{2}$$
$$b=b_1+a_2\sin\alpha_1+b_2\cos\alpha_1, \tag{2'}$$
$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2. \tag{2''}$$

Полученные формулы можно записать в следующем виде. Обозначим вектор (a_1, b_1) через $\mathbf{x}$, а вектор (a_2, b_2) через $\mathbf{y}$. Далее, обозначим через $\mathbf{y}_\alpha$ вектор, получающийся из вектора $\mathbf{y}$ вращением на угол α. В этих обозначениях равенства (2) — (2″) принимают вид

$$g(\mathbf{x}, \alpha) g(\mathbf{y}, \beta) = g(\mathbf{x} + \mathbf{y}_\alpha, \alpha + \beta). \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что если $g = g(\mathbf{x}, \alpha)$, то

$$g^{-1} = g(-\mathbf{x}_{-\alpha}, 2\pi - \alpha). \tag{4}$$

Группа $M(2)$ является примером широкого класса групп — скрещенных произведений коммутативных групп и их групп автоморфизмов. Именно, пусть B — некоторая коммутативная группа и A — группа, элементами которой являются автоморфизмы группы B. Рассмотрим пары вида (b, a), где $b \in B$, $a \in A$, и определим умножение этих пар формулой

$$(b_1, a_1)(b_2, a_2) = (b_1 + a_1 b_2, a_1 a_2)$$

($a_1 b_2$ — элемент, в который переходит элемент b_2 группы B при автоморфизме a_1). Легко проверить, что множество G пар (b, a), $a \in A$, $b \in B$ образует группу относительно этого умножения. Элементы вида (b, e), где e — тождественный автоморфизм, образуют нормальный делитель в G, изоморфный группе B, а элементы вида $(0, a)$ — подгруппу, изоморфную группе A.

Группу G называют *скрещенным* (или *полупрямым*) *произведением групп* B и A и обозначают $G = B \ast A$. Группа $M(2)$ евклидовых движений плоскости является скрещенным произведением двумерного вещественного линейного пространства и группы евклидовых вращений этого пространства:

$$M(2) = E_2 \ast SO(2). \tag{5}$$

Наряду с параметрами a, b, α в группе $M(2)$ удобно применять другие параметры, аналогичные углам Эйлера для группы вращений трехмерного евклидова пространства. Эти параметры определяют следующим образом. Зададим вектор $\mathbf{x} = (a, b)$ полярными координатами, т. е. положим $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. В качестве параметров, определяющих движение $g(a, b, \alpha)$, примем числа r, φ, α. Мы будем писать $g(a, b, \alpha) = g(r, \varphi, \alpha)$, и надеемся, что это не приведет к недоразумениям. Очевидно, что параметры r, φ, α изменяются в следующих пределах:

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leqslant r < \infty, \\ 0 &\leqslant \varphi < 2\pi, \\ 0 &\leqslant \alpha < 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Аналогом разложения (6) из п. 1 § 1 главы III является для группы $M(2)$ разложение вида

$$g(r, \varphi, \alpha) = g(0, 0, \varphi) g(r, 0, 0) g(0, 0, \alpha - \varphi). \tag{7}$$

Движения $g(0, 0, \varphi)$ и $g(0, 0, \alpha - \varphi)$ являются вращениями вокруг начала координат, а $g(r, 0, 0)$ — параллельным переносом на $r > 0$ вдоль оси Ox.

Если $g_1 = g(r_1, 0, \alpha_1)$ и $g_2 = g(r_2, 0, 0)$, то из формул (2) — (2″) легко вытекает, что $g_1 g_2 = g(r, \varphi, \alpha)$, где

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\alpha_1}, \tag{8}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{r_1 + r_2 e^{i\alpha_1}}{r}, \tag{8′}$$

$$\alpha = \alpha_1. \tag{8″}$$

Геометрический смысл этих формул ясен из рис. 1.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. Именно, чтобы найти параметры произведения $g_1 g_2$ движений $g_1 = g(r_1, \varphi_1, \alpha_1)$ и $g_2(r_2, \varphi_2, \alpha_2)$, надо в формулах (8) — (8″) заменить α_1 на $\alpha_1 + \varphi_2 - \varphi_1$, φ на $\varphi - \varphi_1$ и α на $\alpha - \alpha_2$. В самом деле, из разложения (7) и равенства

$$g(0, 0, \alpha_1 - \varphi_1) g(0, 0, \varphi_2) = g(0, 0, \alpha_1 + \varphi_2 - \varphi_1) \tag{9}$$

вытекает, что

$$g_1 g_2 = g(0, 0, \varphi_1) g(r_1, 0, 0) \times g(0, 0, \alpha_1 + \varphi_2 - \varphi_1) \times g(r_2, 0, 0) g(0, 0, \alpha_2 - \varphi_2). \tag{10}$$

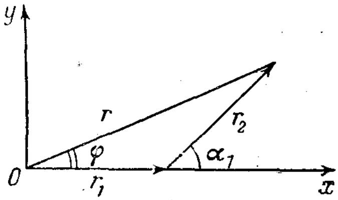

Рис. 1.

Параметры движения $g' = g(r_1, 0, 0) g(0, 0, \alpha_1 + \varphi_2 - \varphi_1) g(r_2, 0, 0)$ могут быть вычислены по формулам (8) — (8″) (с заменой α_1 на $\alpha_1 + \varphi_2 - \varphi_1$). Но при умножении движения g' на $g(0, 0, \varphi_1)$ слева и на $g(0, 0, \alpha_2 - \varphi_2)$ справа параметр φ увеличивается на φ_1, а параметр α — на $\alpha_2 + \varphi_1 - \varphi_2$. Отсюда легко вытекает наше утверждение.

3. Алгебра Ли. Вычислим теперь алгебру Ли группы $M(2)$. Рассмотрим в группе $M(2)$ три однопараметрические подгруппы: подгруппу Ω_1, состоящую из матриц вида

$$\omega_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

подгруппу Ω_2, состоящую из матриц вида

$$\omega_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1′}$$

и подгруппу Ω_3, состоящую из матриц вида

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1″}$$

Очевидно, что касательная матрица $a_1 = \left.\frac{d\omega_1(t)}{dt}\right|_{t=0}$ для подгруппы Ω_1 имеет вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Точно так же касательная матрица для подгруппы Ω_2 имеет вид

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2'}$$

а для подгруппы Ω_3 — вид

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2''}$$

Поскольку группа $M(2)$ задается тремя параметрами, а матрицы a_1, a_2, a_3 линейно независимы, то они образуют базис в алгебре Ли группы $M(2)$.

Соотношения коммутации для матриц a_1, a_2, a_3 имеют следующий вид:

$$[a_1,\ a_2] = 0, \tag{3}$$

$$[a_2,\ a_3] = a_1, \tag{3'}$$

$$[a_3,\ a_1] = a_2, \tag{3''}$$

где, напомним, $[a,\ b] = ab - ba$.

Мы видим, что эти соотношения напоминают приведенные в п. 3 § 1 главы III соотношения коммутации для алгебры Ли группы $SU(2)$ (или, что то же, для алгебры Ли группы $SO(3)$, локально изоморфной $SU(2)$). Различие состоит лишь в том, что в первом из этих соотношений a_3 заменено нулем. Алгебра Ли группы $M(2)$ может быть получена путем предельного перехода из алгебры Ли группы $SO(3)$. Для этого надо заменить в алгебре Ли группы $SO(3)$ a_1 на Ra_1 и a_2 на Ra_2, а после этого устремить R к бесконечности. В п. 1 § 7 будет показано, что и сама группа $M(2)$ получается путем аналогичного предельного перехода из группы $SO(3)$.

4. Комплексификация. Построим комплексную группу Ли, одной из вещественных форм которой является группа M (2). Для этого будем считать в группе $M(2)$ параметры a, b, α комплексными числами. Очевидно, что параметр α определен при этом с точностью до кратного 2π. Поэтому указанные параметры изменяются в следующих областях: a и b пробегают всю комплексную плоскость, а α — полосу $0 \leqslant \operatorname{Re} \alpha < 2\pi$.

Очевидно, что параметрические уравнения (2) — (2″) из п. 2 сохраняют свой вид и при переходе к комплексным значениям параметров. Обозначим построенную группу через $M(2, C)$. Группа $M(2)$ является подгруппой группы $M(2, C)$, соответствующей вещественным значениям параметров a, b, α.

Наряду с параметрами a, b, α в группе $M(2, C)$ можно использовать параметры r, φ, α, связанные с a, b, α равенствами $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Эти параметры изменяются в следующей области:

$$\operatorname{Re} r > 0, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 2\pi;$$

для них сохраняют силу параметрические уравнения (8) — (8″) из п. 2.

Заметим еще, что алгебра Ли группы $M(2, C)$ состоит из линейных комбинаций матриц a_1, a_2, a_3 (см. п. 3) с комплексными коэффициентами.

§ 2. Неприводимые унитарные представления группы $M(2)$

1. Описание представлений. Дадим описание неприводимых представлений группы $M(2)$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(\mathbf{x})$ на окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Зафиксируем комплексное число R и поставим в соответствие каждому элементу $g(\mathbf{a}, \alpha)$ группы $M(2)$ оператор $T_R(g)$, переводящий функцию $f(\mathbf{x})$ в функцию

$$T_R(g) f(\mathbf{x}) = e^{R(\mathbf{a}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}_{-\alpha}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x}_{-\alpha}$ — вектор, в который переходит $\mathbf{x}$ при вращении на угол $-\alpha$, и $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

Покажем, что $T_R(g)$ является представлением группы $M(2)$. Пусть $g_1 = g(a, \alpha)$ и $g_2 = g(b, \beta)$. Тогда

$$T_R(g_1)\, T_R(g_2) f(\mathbf{x}) = T_R(g_1)\, e^{R(\mathbf{b}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}_{-\beta}) = e^{R(\mathbf{a}, \mathbf{x})} e^{R(\mathbf{b}, \mathbf{x}_{-\alpha})} f(\mathbf{x}_{-\alpha-\beta}).$$

Так как $(\mathbf{b}, \mathbf{x}_{-\alpha}) = (\mathbf{b}_\alpha, \mathbf{x})$, то

$$T_R(g_1)\, T_R(g_2) f(\mathbf{x}) = e^{R(\mathbf{a} + \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}_{-\alpha-\beta}).$$

С другой стороны, по формуле (3) п. 2 § 1 имеем

$$g_1 g_2 = g(\mathbf{a}, \alpha)\, g(\mathbf{b}, \beta) = g(\mathbf{a} + \mathbf{b}_\alpha, \alpha + \beta)$$

и потому

$$T_R(g_1 g_2) f(\mathbf{x}) = e^{R(\mathbf{a} + \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}_{-\alpha-\beta}).$$

Поэтому $T_R(g_1 g_2) = T_R(g_1)\, T_R(g_2)$. Тем самым доказано, что $T_R(g)$ является представлением группы $M(2)$.

Параметрические уравнения окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\psi, \\ x_2 &= \sin\psi, \end{aligned} \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi. \right\} \tag{2}$$

Поэтому мы можем считать функции $f(\mathbf{x})$ из пространства $\mathfrak{D}$ функциями от ψ:

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(\psi).$$

Операторы $T_R(g)$ записываются при этом так:

$$T_R(g) f(\psi) = e^{Rr\cos(\psi - \varphi)} f(\psi - \alpha), \tag{3}$$

где $\mathbf{a} = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$, $g = g(\mathbf{a}, \alpha)$.

Введем в пространство $\mathfrak{D}$ скалярное произведение, положив

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\psi)\overline{f_2(\psi)}\, d\psi. \tag{4}$$

Пополнив $\mathfrak{D}$ по этому скалярному произведению, получим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Ясно, что представление $T_R(g)$ унитарно относительно скалярного произведения (4) тогда и только тогда, когда $R = i\rho$ — чисто мнимое число.

2. Инфинитезимальные операторы. Вычислим инфинитезимальные операторы представлений $T_R(g)$. Оператор $T_R(\omega_1(t))$, где

$$\omega_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

переводит функцию $f(\psi)$ в

$$T_R(\omega_1(t)) f(\psi) = e^{Rt\cos\psi} f(\psi).$$

Отсюда вытекает, что

$$A_1 = \left.\frac{dT_R(\omega_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = R\cos\psi, \tag{2}$$

т. е. A_1 — оператор умножения на $R\cos\psi$.

Точно так же доказывается, что инфинитезимальный оператор A_2, соответствующий подгруппе Ω_2 матриц вида

$$\omega_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

задается формулой

$$A_2 = R\sin\psi. \tag{4}$$

Оператор же A_3, соответствующий подгруппе Ω_3 матриц вида

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

задается формулой

$$A_3 = -\frac{d}{d\psi}. \tag{6}$$

3. Неприводимость представлений. Докажем, что при $R \neq 0$ представления $T_R(g)$ неприводимы. Заметим сначала, что сужение представления $T_R(g)$ задает представление

$$T_R(\omega_3(\alpha)) f(\psi) = f(\psi - \alpha) \tag{1}$$

подгруппы Ω_3 вращений плоскости. Но это представление является не чем иным, как регулярным представлением группы вращений плоскости. В п. 3 § 2 главы II было показано, что инвариантными подпространствами в $\mathfrak{H}$ относительно представления (1) являются одномерные подпространства $\mathfrak{H}_n$, состоящие из функций вида $a_n e^{in\psi}$. При этом сужения представления $T_R(\omega_3(\alpha))$ на различные подпространства $\mathfrak{H}_n$ не эквивалентны между собой.

Пусть $\mathfrak{T}$ — ненулевое подпространство в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех операторов $T_R(g)$. Тогда, в частности, $\mathfrak{T}$ инвариантно и относительно всех операторов $T_R(\omega_3(\alpha))$. Следовательно, в силу п. 3 § 3 главы I оно должно быть ортогональной прямой суммой некоторых из пространств $\mathfrak{H}_n$:

$$\mathfrak{T} = \sum_k \mathfrak{H}_{n_k}. \tag{2}$$

Поэтому $\mathfrak{T}$ содержит по крайней мере одну из функций $e^{in\psi}$.

Нам осталось показать, что если инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ содержит одну из функций $e^{in\psi}$, то оно содержит и остальные функции $e^{ik\psi}$, $-\infty < k < \infty$. Но если пространство $\mathfrak{T}$ инвариантно относительно всех операторов $T_R(g)$, то оно инвариантно и относительно инфинитезимальных операторов A_1, A_2, A_3. Выясним, как действуют эти операторы на базисные функции $e^{ik\psi}$. Из формул (2), (4) и (6) п. 2 вытекает, что

$$A_1 e^{ik\psi} = R \cos\psi e^{ik\psi}, \tag{3}$$

$$A_2 e^{ik\psi} = R \sin\psi e^{ik\psi}, \tag{3'}$$

$$A_3 e^{ik\psi} = -ike^{ik\psi}. \tag{3''}$$

Введем линейные комбинации $H_+ = A_1 + iA_2$, $H_- = A_1 - iA_2$ операторов A_1 и A_2. Подпространство $\mathfrak{T}$ инвариантно относительно этих операторов. Но оператор H_+ переводит функцию $e^{ik\psi}$ в функцию

$$H_+ e^{ik\psi} = R e^{i(k+1)\psi}. \tag{4}$$

Оператор же H_- переводит $e^{ik\psi}$ в

$$H_- e^{ik\psi} = R e^{i(k-1)\psi}. \tag{4'}$$

Отсюда следует, что если инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ содержит одну из функций $e^{in\psi}$, то оно содержит и все функции $e^{ik\psi}$,

$-\infty < k < \infty$, т. е. совпадает с $\mathfrak{H}$. Тем самым доказано, что любое ненулевое инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$ совпадает с $\mathfrak{H}$, т. е. доказана неприводимость представления $T_R(g)$ при $R \neq 0$.

Если $R = 0$, то представление $T_R(g)$ принимает вид

$$T_0(g) f(\psi) = f(\psi - \alpha), \quad g = (x, \alpha). \tag{5}$$

Это представление, как уже отмечалось выше, приводимо. Оно распадается в прямую сумму одномерных представлений

$$T_{0n}(g) = e^{in\alpha}. \tag{6}$$

Можно доказать, что представлениями $T_R(g)$, $R \neq 0$ и $T_{0n}(g)$, $-\infty < n < \infty$ исчерпываются все неприводимые представления группы $M(2)$ (см. [297]).

4. Представления скрещенных произведений. Описанная выше конструкция представлений $T_R(g)$ группы $M(2)$ является частным случаем общей конструкции представлений скрещенных произведений. Пусть $G = B \circledast A$ — скрещенное произведение коммутативной группы B и группы ее автоморфизмов A. Обозначим через X группу, элементами которой являются одномерные представления группы B, т. е. такие скалярные функции $\chi(b)$, $b \in B$, что

$$\chi(b_1 + b_2) = \chi(b_1)\chi(b_2). \tag{1}$$

Каждому автоморфизму a группы B соответствует автоморфизм $\hat{a}$ группы X, определяемый формулой

$$\hat{a}\chi(b) = \chi(a^{-1}b), \tag{2}$$

причем $\hat{a}_1\hat{a}_2 = (a_1a_2)\hat{}$. Поэтому группа A изоморфна группе автоморфизмов $\hat{A}$ для X.

Разложим группу X на классы транзитивности относительно преобразований $\hat{A}$. Пусть Φ — один из этих классов, и $f(\varphi)$ — функция, заданная на Φ. Каждому элементу $g = (b, a)$ группы G поставим в соответствие оператор $T(g)$, определяемый формулой

$$T(g) f(\varphi) = \varphi(b) f(\hat{a}^{-1}\varphi)\ ^{1)}. \tag{3}$$

Так как при $g_1 = (b_1, a_1)$, $g_2 = (b_2, a_2)$

$$T(g_1)T(g_2)f(\varphi) = T(g_1)\varphi(b_2)f(\hat{a}_2^{-1}\varphi) = \varphi(b_1)\hat{a}_1^{-1}\varphi(b_2)f_2(\hat{a}_2^{-1}\hat{a}_1^{-1}\varphi) =$$
$$= \varphi(b_1 + a_1b_2) f[(\hat{a}_1\hat{a}_2)^{-1}\varphi]$$

и

$$(b_1, a_1)(b_2, a_2) = (b_1 + a_1b_2, a_1a_2),$$

то $T(g)$ является представлением группы G в пространстве функций на Φ.

Выберем в качестве группы B двумерное вещественное линейное пространство, а в качестве A — группу евклидовых вращений. Одномерные представления группы B имеют вид

$$\chi(b) = \exp[\chi_1 b_1 + \chi_2 b_2],$$

где χ_1 и χ_2 — любые комплексные числа и $b = (b_1, b_2)$. Поэтому X является

---

[1]) Напомним, что $\varphi \in \Phi \subset X$, и потому является функцией на B.

двумерным комплексным линейным пространством. Классы транзитивности относительно группы A состоят из пар комплексных чисел вида $(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ (R — комплексное число). Легко проверить, что формула (3) приведет в этом случае к рассмотренным выше представлениям $T_R(g)$ группы $M(2)$.

§ 3. Матричные элементы представлений $T_R(g)$ и функции Бесселя

1. Вычисление матричных элементов. В этом параграфе мы вычислим матричные элементы $t^R_{mn}(g)$ неприводимых представлений $T_R(g)$ группы $M(2)$ движений евклидовой плоскости. Согласно § 2 эти представления строятся в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(\psi)$, заданных на окружности, и таких, что

$$(f, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\psi)|^2\,d\psi<\infty. \tag{1}$$

Представления $T_R(g)$ задаются формулой

$$T_R(g)f(\psi)=e^{Rr\cos(\psi-\varphi)}f(\psi-\alpha), \tag{2}$$

где $g=g(r, \varphi, \alpha)$ и $R\neq 0$.

Очевидно, что операторы $T_R(g)$ унитарны в $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда R — чисто мнимое число, $R=i\rho$.

Выберем в пространстве $\mathfrak{H}$ ортонормированный базис, состоящий из функций $\{e^{in\psi}\}$ — собственных функций операторов $T_R(\omega)$, $\omega\in\Omega_3$, где Ω_3 — подгруппа вращений плоскости. Матричные элементы $t^R_{mn}(g)$ задаются в этом базисе формулой

$$t^R_{mn}(g)=(T_R(g)\,e^{in\psi},\ e^{im\psi}). \tag{3}$$

Принимая во внимание выражение (4) п. 1 § 2 для скалярного произведения в $\mathfrak{H}$ и равенство (2), получаем

$$t^R_{mn}(g)=\frac{e^{-in\alpha}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{Rr\cos(\psi-\varphi)}e^{i(n-m)\psi}\,d\psi. \tag{4}$$

Пусть $r=\varphi=0$, т. е. движение g является вращением на угол α вокруг начала координат. В силу ортогональности функций $e^{in\psi}$ в этом случае

$$t^R_{mn}(g)\equiv t^R_{mn}(\alpha)=e^{-in\alpha}\delta_{mn}. \tag{5}$$

Таким образом, вращению на угол α вокруг начала координат соответствует диагональная матрица $T_R(\alpha)$, на главной диагонали которой стоят функции $e^{-in\alpha}$, $-\infty<n<\infty$.

Пусть теперь $\varphi=\alpha=0$. В этом случае g является сдвигом на $r>0$ вдоль оси Ox и формула (4) принимает вид

$$t_{mn}^R(g)\equiv t_{mn}^R(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{Rr\cos\psi+i(n-m)\psi}\,d\psi. \tag{6}$$

Подстановка $\psi=\frac{\pi}{2}-\theta$ приводит равенство (6) к следующей форме:

$$t_{mn}^R(r)=\frac{i^{n-m}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{Rr\sin\theta-i(n-m)\theta}\,d\theta. \tag{7}$$

Введем обозначение

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta-in\theta}\,d\theta, \tag{8}$$

где n — целое число, и назовем $J_n(x)$ *n-й функцией Бесселя* от x. Пользуясь этим обозначением, можно переписать формулу (7) следующим образом:

$$t_{mn}^R(r)=i^{n-m}J_{n-m}(-iRr). \tag{9}$$

Итак, матричный элемент $t_{mn}^R(r)$ матрицы $T_R(r)$, соответствующей сдвигу на $r>0$ вдоль оси Ox, зависит от Rr и разности индексов $n-m$, и лишь несущественным множителем i^{n-m} отличается от $(n-m)$-й функции Бесселя аргумента $-iRr$.

Чтобы получить теперь выражение для $t_{mn}^R(g)$ в общем случае, $g=g(r,\ \varphi,\ \alpha)$, достаточно сделать в интеграле (4) подстановку $\psi-\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$. Мы получим

$$t_{mn}^R(g)=i^{n-m}e^{-i[n\alpha+(m-n)\varphi]}J_{n-m}(-iRr). \tag{10}$$

Впрочем, формула (10) непосредственно следует также из разложения (7) п. 2 § 1. В силу этого разложения

$$T_R(g)=T_R(\varphi)\,T_R(r)\,T_R(\alpha-\varphi). \tag{11}$$

Поскольку матрицы $T_R(\varphi)$ и $T_R(\alpha-\varphi)$ диагональны, и на их главных диагоналях стоят функции $e^{-in\varphi}$ и $e^{-in(\alpha-\varphi)}$, а $t_{mn}^R(r)=$ $=i^{n-m}J_{n-m}(-irR)$, мы приходим к формуле (10).

Как отмечалось выше, при чисто мнимых значениях R, $R=i\rho$ представления $T_R(g)$ унитарны. Матричные элементы этих представлений выражаются через функции Бесселя вещественного аргумента

$$t_{mn}^{i\rho}(g)=i^{n-m}e^{-i[n\alpha+(m-n)\varphi]}J_{n-m}(\rho r).$$

Если g — тождественное преобразование, $g=g(0, 0, 0)$, то оператор $T_R(g)$ единичен и ему соответствует единичная матрица. Отсюда следует, что $J_{n-m}(0)=\delta_{mn}$, $J_0(0)=1$ и $J_n(0)=0$ при $n\neq 0$.

2. Связь функций Бесселя с противоположными индексами. Докажем, что имеет место формула

$$J_n(z)=(-1)^n J_{-n}(z). \tag{1}$$

Для этого введем в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(\psi)$ на окружности оператор Q[1]), определяемый формулой

$$Qf(\psi)=f(-\psi). \tag{2}$$

Этот оператор коммутирует с оператором $T_R(g)\equiv T_R(r)$, где $g=g(r, 0, 0)$ — сдвиг вдоль оси Ox. В самом деле,

$$QT_R(r)f(\psi)=Qe^{Rr\cos\psi}f(\psi)=e^{Rr\cos\psi}f(-\psi)$$

и

$$T_R(r)\,Qf(\psi)=T_R(r)f(-\psi)=e^{Rr\cos\psi}f(-\psi),$$

а поэтому

$$QT_R(r)=T_R(r)\,Q. \tag{3}$$

Оператор Q переводит базисный элемент $e^{in\psi}$ в $e^{-in\psi}$, а потому матрица оператора Q имеет вид (q_{mn}), где $q_{m,-m}=1$ и $q_{mn}=0$, если $m+n\neq 0$. Но тогда из равенства (3) получаем

$$t^R_{-m,n}(r)=t^R_{m,-n}(r). \tag{4}$$

Принимая во внимание формулу (9) п. 1, получаем отсюда

$$i^{n+m}J_{n+m}(-iRr)=i^{-n-m}J_{-n-m}(-iRr).$$

Положим в полученном равенстве $m=0$, $-iRr=z$. Мы имеем тогда

$$J_n(z)=(-1)^n J_{-n}(z).$$

Равенство (1) доказано.

3. Разложение функций Бесселя в степенные ряды. Выведем теперь разложение функций Бесселя в ряды по степеням x. Для этого воспользуемся интегральным представлением этих функций (см. формулу (8) п. 1). Разлагая в этом представлении $e^{ix\sin\psi}$ по степеням $ix\sin\psi$ и почленно интегрируя, получаем

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi k!}\int_0^{2\pi} e^{-in\psi}(i\sin\psi)^k\,d\psi. \tag{1}$$

[1]) Группа $M(2)$ является подгруппой в группе движений и отражений плоскости. Оператор Q является оператором в представлении этой более широкой группы, соответствующим отражению в оси Ox.

Но по формуле Эйлера

$$(i \sin \psi)^k = \frac{(e^{\psi i} - e^{-\psi i})^k}{2^k} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m e^{(k-2m)\psi i}}{2^k}. \tag{2}$$

Подставим это выражение в формулу (1). Мы получим, что a_k отлично от нуля лишь, если $k-n$ — четное неотрицательное число, $k-n=2m$, $m \geqslant 0$. Если $k=n+2m$, то

$$a_k = \frac{(-1)^m}{2^k m!\,(k-m)!} = \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m!\,(n+m)!}.$$

Поэтому

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m!\,(n+m)!}. \tag{3}$$

Разложение (3), очевидно, сходится для всех комплексных значений z. Функции Бесселя являются целыми функциями от z. Из формулы (3) видно, что при вещественных значениях x функция $J_n(x)$ принимает вещественные значения.

§ 4. Функциональные соотношения для функций Бесселя

1. Теорема сложения. Теорема сложения для функций Бесселя выводится аналогично тому, как это было сделано в п. 1 § 4 главы III для функции $P^l_{mn}(\cos\theta)$. Мы будем исходить из равенства $T_R(g_1 g_2) = T_R(g_1) T_R(g_2)$. Это равенство записывается через матричные элементы следующим образом:

$$t^R_{mn}(g_1 g_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^R_{mk}(g_1)\, t^R_{kn}(g_2). \tag{1}$$

Положим в этом соотношении $g_1 = g(r_1, 0, 0)$ и $g_2 = g(r_2, \varphi_2, 0)$. Тогда параметры r, φ, α, определяющие движение $g = g_1 g_2$, выражаются через параметры r_1, r_2, φ_2 по следующим формулам:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varphi_2}, \tag{2}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{r_1 + r_2 e^{i\varphi_2}}{r}, \tag{2'}$$

$$\alpha = 0 \tag{2''}$$

(см. § 1 п. 2).

Подставим в равенство (1) выражение матричных элементов, даваемое формулой (10) п. 1 § 3, и положим $m=0$, $R=l$. После простых преобразований получим

$$e^{in\varphi} J_n(r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi_2} J_{n-k}(r_1)\, J_k(r_2), \tag{3}$$

где r, r_1, r_2, φ, φ_2 связаны соотношениями (2)—(2″). Графически связь величин r, r_1, r_2, φ, φ_2 дана на рис. 2. Формула (3) называется *формулой сложения* для функций Бесселя. В частности, при $n=0$ получаем из нее

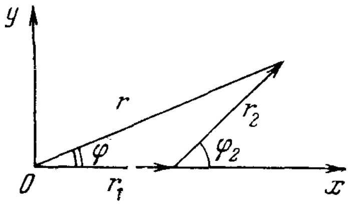

Рис. 2.

$$J_0(r)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{ik\varphi_2}J_k(r_1)\,J_k(r_2). \tag{4}$$

Отметим еще следующие частные случаи формулы (3). При $\varphi_2=0$ имеем $r=r_1+r_2$, $\varphi=0$, и потому

$$J_n(r_1+r_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n-k}(r_1)\,J_k(r_2). \tag{5}$$

Далее, при $\varphi_2=\pi$, $r_1\geqslant r_2$ имеем $r=r_1-r_2$, $\varphi=0$. Поэтому при $r_1\geqslant r_2$

$$J_n(r_1-r_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k J_{n-k}(r_1)\,J_k(r_2). \tag{6}$$

Наконец, если $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, то из формулы (3) вытекает, что

$$\left(\frac{r_1+ir_2}{r_1-ir_2}\right)^{\frac{n}{2}}J_n\left(\sqrt{r_1^2+r_2^2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}i^kJ_{n-k}(r_1)\,J_k(r_2). \tag{7}$$

Положим в равенстве (6) $r_1=r_2=r$. Мы получим, принимая во внимание формулу (1) п. 2 § 3,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n+k}(r)\,J_k(r)=J_n(0)=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 0 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}$$

(ф о р м у л а Х а н с е н а). Формулу Хансена можно вывести также из того, что матрица $(t^i_{mn}(r))$ унитарна, а потому $(t^i_{mn}(r))(t^i_{mn}(r))^*=e$, где e — единичная матрица.

2. Формула умножения. Умножим обе части формулы сложения (3) из п. 1 на $e^{-im\varphi_2}/2\pi$ и проинтегрируем по φ_2 от 0 до 2π. В силу ортогональности функций $e^{in\varphi_2}$ все слагаемые обратятся в нуль, за исключением слагаемого, для которого $k=m$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n\varphi-m\varphi_2)}J_n(r)\,d\varphi_2=J_{n-m}(r_1)\,J_m(r_2), \tag{1}$$

где φ, r_1, r_2, r связаны соотношениями (2) — (2″) п. 1. Будем называть равенство (1) *формулой умножения* для функции Бесселя.

Отметим геометрический смысл формулы (1). При фиксированных r_1 и r_2 точка с полярными координатами (r, φ) описывает при изменении φ_2 от 0 до 2π окружность, центр которой находится в точке $A(r_1, 0)$, а радиус равен r_2. Таким образом, выражение в правой части формулы (1) есть не что иное, как среднее значение функции $e^{i(n\varphi - m\varphi_2)} J_n(r)$ по этой окружности.

Укажем частный случай формулы (1). При $r_1 = r_2 = R$ имеем $r = 2R \cos \frac{\varphi_2}{2}$, $\varphi = \frac{\varphi_2}{2}$, и поэтому

$$J_{n-m}(R) J_m(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i(n-2m)\varphi} J_n(2R \cos \varphi)\, d\varphi. \tag{2}$$

Сделаем в формуле (1) замену переменной, приняв за переменную интегрирования r. При изменении φ_2 от 0 до π переменная r меняется от $r_1 + r_2$ до $|r_1 - r_2|$, а при изменении φ_2 от π до 2π меняется от $|r_1 - r_2|$ до $r_1 + r_2$. Кроме того,

$$\frac{dr}{d\varphi_2} = \mp \frac{\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}}{2r},$$

где при $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi$ берем знак $-$, а при $\pi \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$ знак $+$. Поэтому имеем

$$J_{n-m}(r_1) J_m(r_2) = \frac{2}{\pi} \int_{|r_1 - r_2|}^{r_1 + r_2} e^{i(n\varphi - m\varphi_2)} \frac{r J_n(r)\, dr}{\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}}, \tag{3}$$

где φ и φ_2 связаны с r формулами (2)—(2″) п. 1.

Особенно простой вид принимает равенство (3) при $m = n = 0$. Именно, мы имеем

$$J_0(r_1) J_0(r_2) = \frac{2}{\pi} \int_{|r_1 - r_2|}^{r_1 + r_2} \frac{r J_0(r)\, dr}{\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}}. \tag{4}$$

Выражение в знаменателе подынтегральной функции равно учетверенной площади треугольника со сторонами r_1, r_2, r.

3. Рекуррентные формулы. Как и для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$, рекуррентные формулы для функций Бесселя вытекают из формулы сложения. Именно, если считать в этой формуле r_2 бесконечно малой величиной, то формула сложения приведет к рекуррентным соотношениям.

Сначала найдем значения производных функций Бесселя при $x = 0$. Продифференцировав формулу (8) из п. 1 § 3 по x и положив $x = 0$,

получим

$$J'_n(0)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[e^{-(n-1)i\theta}-e^{-(n+1)i\theta}\right]d\theta. \qquad (1)$$

Этот интеграл отличен от нуля лишь при $n=\pm1$. При этом

$$J'_1(0)=-J'_{-1}(0)=\frac{1}{2}.$$

Продифференцируем теперь обе части равенства (5) п. 1 по r_2 и положим $r_2=0$. Используя найденные значения $J'_n(0)$ и заменяя r_1 на x, получаем рекуррентную формулу

$$2J'_n(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x). \qquad (2)$$

Точно так же, дифференцируя обе части формулы (7) из п. 1 по r_2 и полагая $r_2=0$, $r_1=x$, получаем

$$\frac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x). \qquad (3)$$

Складывая и вычитая формулы (2) и (3), находим

$$J_{n-1}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)+J'_n(x), \qquad (4)$$

$$J_{n+1}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J'_n(x). \qquad (5)$$

Эти формулы можно записать также в виде

$$\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(x)\}=x^nJ_{n-1}(x), \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\}=-x^{-n}J_{n+1}(x), \qquad (7)$$

или же в виде

$$J_{n-1}(x)=\left(\frac{n}{x}+\frac{d}{dx}\right)J_n(x), \qquad (8)$$

$$J_{n+1}(x)=\left(\frac{n}{x}-\frac{d}{dx}\right)J_n(x). \qquad (9)$$

4. Дифференциальное уравнение. Из рекуррентных формул (8) и (9) п. 3 сразу вытекает дифференциальное уравнение для функций Бесселя. Применим к обеим частям равенства (8) п. 3 дифференциальный оператор $\frac{n-1}{x}-\frac{d}{dx}$. В силу равенства (9) п. 3 получим тогда

$$J_n(x)=\left(\frac{n-1}{x}-\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{n}{x}+\frac{d}{dx}\right)J_n(x) \qquad (1)$$

или же

$$x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0. \qquad (1')$$

Уравнение (1′), которому удовлетворяет функция $J_n(x)$, называют *дифференциальным уравнением Бесселя*. Ниже мы дадим еще один вывод этого уравнения и рекуррентных формул.

Мы доказали, таким образом, что $J_n(x)$ является собственной функцией дифференциального оператора

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2, \tag{2}$$

соответствующей собственному значению n^2 при граничных условиях: $J_n(x)$ конечна при $x=0$. Можно доказать, что этим исчерпываются все (с точностью до постоянного множителя) собственные функции оператора (2), конечные при $x=0$.

5. Производящая функция. Другой путь вывода рекуррентных соотношений для функций Бесселя основан на применении производящей функции. Чтобы получить эту функцию, воспользуемся интегральным представлением

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}\, d\theta \tag{1}$$

этих функций. Формула (1) означает, что $J_n(x)$ является n-м коэффициентом Фурье функции $f(\theta) = e^{ix\sin\theta}$. Поэтому имеет место равенство

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\theta}. \tag{2}$$

Таким образом, $e^{ix\sin\theta}$ является производящей функцией для $J_n(x)$.

Из равенства (2) вытекает ряд соотношений для функций Бесселя. Положив в этом равенстве $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) = e^{ix}. \tag{3}$$

Точно так же, полагая $\theta = -\frac{\pi}{2}$, находим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(x) = e^{-ix}. \tag{4}$$

Наконец, полагая $\theta = 0$, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) = 1. \tag{5}$$

6. Рекуррентные соотношения. Воспользуемся производящей функцией, выведенной в п. 5, чтобы получить новый вывод рекуррентных соотношений для функций Бесселя. Продифференцируем равенство (2) п. 5 по x. В силу формулы Эйлера находим

$$\frac{1}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\,e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)\,e^{in\theta}. \tag{1}$$

Применим к выражению в левой части разложение (2) п. 5 и сравним коэффициенты при $e^{in\theta}$ слева и справа:

$$J_n'(x)=\frac{1}{2}(J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)). \tag{2}$$

Далее продифференцируем обе части разложения (2) п. 5 по θ и применим формулу Эйлера:

$$\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\,xe^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)\,e^{in\theta}. \tag{3}$$

Разложив выражение в левой части по формуле (2) п. 5 и сравнив коэффициенты при $e^{in\theta}$, получаем рекуррентную формулу:

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x). \tag{4}$$

Мы получили, таким образом, новый вывод формул (2) и (3) п. 3.

§ 5. Разложения представлений группы $M(2)$ и преобразование Фурье — Бесселя

Подобно тому как функции на сфере разлагаются в ряды по сферическим функциям, можно разлагать функции на евклидовой плоскости в ряды и интегралы по функциям Бесселя. Это связано с разложением некоторых представлений группы $M(2)$ на неприводимые и разложением пространств неприводимых представлений на подпространства, инвариантные относительно операторов $T(\omega)$, $\omega\in\Omega_3$ (Ω_3 — подгруппа вращений плоскости).

1. Квазирегулярное представление. Так как элементами группы $M(2)$ являются движения плоскости, естественно строить представления этой группы в пространстве функций $f(x,y)\equiv f(\mathbf{x})$, заданных на плоскости. Обозначим через $\mathfrak{L}^2$ пространство функций двух переменных $f(x,y)$, $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2\,dx\,dy<+\infty. \tag{1}$$

Каждому элементу g группы $M(2)$ поставим в соответствие оператор $L(g)$, переводящий функцию $f(\mathbf{x})$ в функцию

$$L(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x}). \tag{2}$$

Здесь, как обычно, через $g\mathbf{x}$ обозначена точка, в которую переходит точка плоскости $\mathbf{x}$ при движении g.

Равенство (2) можно записать также в следующем виде:

$$L(g)f(\mathbf{x})=f[(\mathbf{x}-\mathbf{a})_{-\alpha}], \tag{2'}$$

где $g=g(\mathbf{a}, \alpha)$.

Так как

$$L(g_1)L(g_2)f(\mathbf{x})=L(g_1)f(g_2^{-1}\mathbf{x})= \\ =f(g_2^{-1}g_1^{-1}\mathbf{x})=f[(g_1g_2)^{-1}\mathbf{x}]=L(g_1g_2)f(\mathbf{x}),$$

то $L(g)$ является представлением группы $M(2)$. Это представление унитарно в силу инвариантности евклидовой меры $d\mathbf{x}\equiv dx\,dy$ при сдвигах плоскости

$$\int|f(g^{-1}\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}=\int|f(\mathbf{x})|^2\,d(g\mathbf{x})=\int|f(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}.$$

Назовем представление $L(g)$ *квазирегулярным представлением* группы $M(2)$.

Нам нужно разложить это представление на неприводимые. Воспользуемся для этого преобразованием Фурье. Каждой функции $f(\mathbf{x})$ из $\mathfrak{L}^2$ поставим в соответствие ее преобразование Фурье

$$F(\mathbf{y})=\int f(\mathbf{x})\,e^{i(\mathbf{x},\,\mathbf{y})}\,d\mathbf{x},$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=x_1y_1+x_2y_2$.

Найдем, как преобразуются при переходе от $f(\mathbf{x})$ к $F(\mathbf{y})$ операторы $L(g)$ квазирегулярного представления. Преобразованием Фурье функции $L(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x})$ является

$$F_g(\mathbf{y})=\int f(g^{-1}\mathbf{x})\,e^{i(\mathbf{x},\,\mathbf{y})}\,d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Из инвариантности меры $d\mathbf{x}$ относительно сдвигов вытекает

$$F_g(\mathbf{y})=\int f(\mathbf{x})\,e^{i(g\mathbf{x},\,\mathbf{y})}\,d\mathbf{x}. \tag{3'}$$

Если $g=g(\mathbf{b}, \alpha)$ (см. § 1 п. 1), то движение g переводит вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{x}_\alpha+\mathbf{b}$, где $\mathbf{x}_\alpha$ — вектор, в который переходит $\mathbf{x}$ при вращении на угол α. Поэтому

$$F_g(\mathbf{y})=\int f(\mathbf{x})\,e^{i(\mathbf{x}_\alpha+\mathbf{b},\,\mathbf{y})}\,d\mathbf{x}= \\ =e^{i(\mathbf{b},\,\mathbf{y})}\int f(\mathbf{x})\,e^{i(\mathbf{x},\,\mathbf{y}_{-\alpha})}\,d\mathbf{x}=e^{i(\mathbf{b},\,\mathbf{y})}F(\mathbf{y}_{-\alpha}). \tag{4}$$

Итак, мы доказали, что при преобразовании Фурье оператор $L(g)$ переходит в оператор $\hat{L}(g)$:

$$\hat{L}(g)F(\mathbf{y})=e^{i(\mathbf{b},\,\mathbf{y})}F(\mathbf{y}_{-\alpha}), \tag{5}$$

где $g=g(\mathbf{b}, \alpha)$.

Представление $\hat{L}(g)$ группы $M(2)$ эквивалентно представлению $L(g)$, так как $\hat{L}(g)=QL(g)Q^{-1}$, где Q — оператор преобразования Фурье.

Поэтому задача о разложении квазирегулярного представления равносильна задаче о разложении представления $\hat{L}(g)$. Перейдем к решению этой задачи.

Функции $F(\mathbf{y})$, являющиеся преобразованиями Фурье функций $f(\mathbf{x})$ из $\mathfrak{L}^2$, образуют гильбертово пространство $\hat{\mathfrak{L}}^2$, состоящее из функций, для которых

$$\|F\|^2 = \int |F(\mathbf{y})|^2 \, dy < \infty. \tag{6}$$

Мы разложим сейчас это гильбертово пространство в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств $\hat{\mathfrak{H}}_R$, таких, что операторам $\hat{L}(g)$ соответствуют в $\hat{\mathfrak{H}}_R$ операторы неприводимых унитарных представлений группы $M(2)$.

Обозначим через $\hat{\mathfrak{H}}_R$ гильбертово пространство функций $\Phi(\psi)$, заданных на окружности $|\mathbf{y}| = R$, и таких, что

$$\|\Phi\|_R^2 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\psi)|^2 \, d\psi < +\infty. \tag{7}$$

Положим $F_R(\psi) = F(R\cos\psi,\ R\sin\psi)$. Равенство

$$\int |F(y)|^2 \, dy = \int_0^\infty R\,dR \int_0^{2\pi} |F(R\cos\psi,\ R\sin\psi)|^2 \, d\psi = 2\pi \int_0^\infty \|F_R\|_R^2 \, R\,dR \tag{8}$$

показывает, что пространство $\hat{\mathfrak{L}}^2$ является непрерывной прямой суммой пространств $\hat{\mathfrak{H}}_R$:

$$\hat{\mathfrak{L}}^2 = 2\pi \int_0^\infty \hat{\mathfrak{H}}_R \, R\,dR. \tag{9}$$

Поскольку функции $F(\mathbf{y})$ из пространства $\hat{\mathfrak{L}}^2$ могут, вообще говоря, не иметь значений в отдельных точках, следует уточнить наше утверждение. Сначала рассмотрим пространство $\hat{\mathfrak{S}}$ бесконечно дифференцируемых функций $F(\mathbf{y})$, быстро убывающих вместе со всеми производными при $|\mathbf{y}| \to \infty$. Для каждой такой функции значение $F_R(\psi) = F(R\cos\psi,\ R\sin\psi)$ определено. Этим определяется разложение предгильбертова пространства $\hat{\mathfrak{S}}$ в непрерывную прямую сумму пространств $\hat{\mathfrak{S}}_R$, состоящих из бесконечно дифференцируемых функций на окружностях. Пополняя потом эти пространства по соответствующим нормам, мы и получим разложение (9).

Выясним теперь, как разлагаются операторы представления $\hat{L}(g)$. Для этого достаточно заметить, что операторы $\hat{L}(g)$ сводятся к вращениям вокруг начала координат и умножению на функцию $e^{iRr\cos(\psi-\varphi)}$. Поэтому они оставляют инвариантными пространства $\hat{\mathfrak{H}}_R'$

функций, заданных на окружностях радиуса R. Отсюда сразу следует, что оператору $\hat{L}(g)$ соответствуют операторы $\hat{L}_R(g)$ в пространствах $\hat{\mathfrak{H}}_R$, имеющие вид

$$\hat{L}_R(g)F_R(\psi)=e^{iRr\cos(\psi-\varphi)}F_R(\psi-\alpha), \tag{10}$$

где

$$g=g(\mathbf{a},\alpha),\quad \mathbf{a}=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi).$$

При этом из равенства (5) следует, что

$$[\hat{L}(g)F(\mathbf{g})]_R=\hat{L}_R(g)F_R(\mathbf{g}). \tag{11}$$

Таким образом, $\hat{L}(g)$ является непрерывной прямой суммой представлений $\hat{L}_R(g)$:

$$\hat{L}(g)=2\pi\int_0^\infty \hat{L}_R(g)R\,dR. \tag{12}$$

Представления $\hat{L}_R(g)$, определяемые формулой (10), совпадают с построенными в п. 1 § 2 неприводимыми унитарными представлениями $T_{iR}(g)$ группы $M(2)$. Поэтому равенство (12) дает разложение представления $\hat{L}(g)$ в непрерывную прямую сумму неприводимых унитарных представлений. Поскольку представления $\hat{L}(g)$ и $L(g)$ эквивалентны, то это равенство дает и разложение квазирегулярного представления. Ниже мы уточним это утверждение.

2. Преобразование Фурье — Бесселя. Рассмотрим в пространстве $\mathfrak{L}^2$ функций $f(x, y)$ с интегрируемым квадратом подпространства $\mathfrak{L}^2_n$, состоящие из функций вида

$$f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)=\varphi(r)e^{in\alpha}, \tag{1}$$

где

$$\int_0^\infty |\varphi(r)|^2 r\,dr<+\infty.$$

Выясним, какой вид принимает преобразование Фурье для функций из пространства $\mathfrak{L}^2_n$.

Подставим в формулу (2) п. 1 вместо $f(\mathbf{x})$ выражение $\varphi(r)e^{in\alpha}$ и положим $F(\mathbf{y})=F(R\cos\psi,\ R\sin\psi)$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$F(R\cos\psi,\quad R\sin\psi)=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \varphi(r)e^{i[Rr\cos(\alpha-\psi)+n\alpha]}r\,dr\,d\alpha=$$

$$=e^{in\psi}\int_0^\infty \varphi(r)r\left[\int_0^{2\pi}e^{i[Rr\cos\alpha+n\alpha]}d\alpha\right]dr.$$

Так как по формуле (8) п. 1 § 3

$$\int_0^{2\pi} e^{i[Rr\cos\alpha+n\alpha]}\,d\alpha=2\pi i^n J_n(Rr),$$

то это равенство можно записать в виде

$$F(R\cos\psi,\ R\sin\psi)=2\pi i^n e^{in\psi}\int_0^\infty f(r)\,J_n(Rr)\,r\,dr. \tag{2}$$

Итак, *преобразованием Фурье функции*

$$f(\mathbf{x})=\varphi(r)\,e^{in\alpha},\quad \mathbf{x}=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$$

является функция

$$F(\mathbf{y})=2\pi i^n\Phi(R)\,e^{in\psi},\quad \mathbf{y}=(R\cos\psi,\ R\sin\psi),$$

где

$$\Phi(R)=\int_0^\infty \varphi(r)\,J_n(Rr)\,r\,dr. \tag{3}$$

Преобразование (3) называют *преобразованием Фурье — Бесселя*. Мы доказали, таким образом, что *при преобразовании Фурье на плоскости над «радиальной частью»* $\varphi(r)$ *функций из подпространства* $\mathfrak{L}_n^2$ *выполняется преобразование Фурье — Бесселя.*

Применяя обратное преобразование Фурье на плоскости, получаем формулу обращения для преобразования Фурье — Бесселя:

$$\varphi(r)=\int_0^\infty \Phi(R)\,J_n(Rr)\,R\,dR. \tag{4}$$

Нетрудно показать, используя формулу Планшереля для преобразования Фурье, что функции $\varphi(r)$ и $\Phi(R)$ связаны равенством

$$\int_0^\infty |\varphi(r)|^2\,r\,dr=\int_0^\infty |\Phi(R)|^2\,R\,dR. \tag{5}$$

Его называют *аналогом формулы Планшереля для преобразования Фурье — Бесселя.*

Равенство (5) показывает, что преобразование Фурье — Бесселя является изометрическим отображением функций из пространства $\mathfrak{L}_n^2$ на функции пространства $\hat{\mathfrak{L}}_n^2$, т. е. на функции вида $e^{in\psi}\,\Phi(R)$, где

$$\int_0^\infty |\Phi(R)|^2 R\,dr<+\infty.$$

3. Разложение квазирегулярного представления. Мы получили в п. 1 разложение квазирегулярного представления группы $M(2)$ на неприводимые. Однако это разложение было слишком сложным, так как мы дважды использовали преобразование Фурье. Найдем непосредственное разложение квазирегулярного представления.

Пространство $\mathfrak{L}^2$ является ортогональной прямой суммой подпространств $\mathfrak{L}^2_n$:

$$\mathfrak{L}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}^2_n.$$

В самом деле, любую функцию $f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ из $\mathfrak{L}^2$ можно записать в виде ряда Фурье по α:

$$f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r)\, e^{in\alpha}, \tag{1}$$

где

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)\, e^{-in\alpha}\, d\alpha. \tag{2}$$

Применим к слагаемым разложения (1) формулу (4) п. 2 — преобразование Фурье — Бесселя. Мы получим

$$f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha}\int_0^{\infty} \Phi_n(R)\, J_n(Rr)\, R\, dR, \tag{3}$$

где в силу формул (3) п. 2 и (2)

$$\Phi_n(R) = \int_0^{\infty} \varphi_n(\rho)\, J_n(R\rho)\, \rho\, d\rho =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\, e^{-in\theta} J_n(R\rho)\, \rho\, d\theta\, d\rho. \tag{4}$$

Подставим в формулу (3) выражение (4) для $\Phi_n(R)$ и изменим порядок суммирования и интегрирования. Принимая во внимание теорему сложения для функций Бесселя $J_0(R)$ (см. формулу (4) п. 1 § 4), получаем

$$f(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} R\, dR \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\, J_0\left(R\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\right) \rho\, d\theta\, d\rho. \tag{5}$$

Полученное равенство можно переписать в виде

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} f_R(\mathbf{x})\, R\, dR, \tag{6}$$

где

$$f_R(r\cos\alpha, r\sin\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\, J_0\left(R\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\right)\rho\,d\theta\,d\rho. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что пространство $\mathfrak{H}_R$ функций $f_R(\mathbf{x})$, выражаемых формулой (7), инвариантно относительно сдвигов плоскости. Эти сдвиги задают представление $L_R(g)$ группы $M(2)$:

$$L_R(g) f_R(\mathbf{x}) = f_R(g^{-1}\mathbf{x}). \quad (8)$$

При этом

$$[L(g) f(\mathbf{x})]_R = L_R(g) f_R(\mathbf{x}) = f_R(g^{-1}x). \quad (9)$$

Поэтому равенство (6) определяет разложение квазирегулярного представления в непрерывную прямую сумму неприводимых унитарных представлений $L_R(g)$:

$$L(g)=\int_0^\infty L_R(g)\, R\,dR. \quad (10)$$

Это разложение дает явную форму для преобразования Фурье разложения (12) п. 1.

Приведем пример использования преобразования Фурье — Бесселя. Применим формулы (3) и (4) п. 2 к равенству (3) п. 2 § 4, записав его в виде

$$J_{n-m}(Rr_1)\, J_m(Rr_2)=\frac{2}{\pi}\int_{|r_1-r_2|}^{r_1+r_2} \frac{e^{i(n\varphi-m\varphi_2)} J_n(Rr)\, r\,dr}{\sqrt{4r_1^2r_2^2-(r^2-r_1^2-r_2^2)^2}},$$

где

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\varphi_2 \quad (11)$$

и

$$e^{i\varphi}=\frac{r_1+r_2e^{i\varphi_2}}{r}. \quad (11')$$

В силу формул (3) и (4) п. 2 отсюда следует:

$$\int_0^\infty J_{n-m}(Rr_1)\, J_m(Rr_2)\, J_n(Rr)\, R\,dR=$$
$$=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{e^{i(n\varphi-m\varphi_2)}}{\sqrt{4r_1^2r_2^2-(r^2-r_1^2-r_2^2)^2}}, \\ \text{если } |r_1-r_2|<r<r_1+r_2, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

Здесь φ_2 и φ связаны с r_1, r_2, r формулами (11).

4. Инфинитезимальные операторы. Вычислим теперь инфинитезимальные операторы квазирегулярного представления $L(g)$ группы $M(2)$. Начнем с вычисления инфинитезимального оператора, соответствующего однопараметрической подгруппе Ω_1, состоящей из элементов вида

$$g = \omega_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Движение g^{-1} переводит вектор $\mathbf{x}(x, y)$ в вектор $g^{-1}\mathbf{x} = (x - t, y)$. Поэтому оператор $L(\omega_1(t))$ переводит функцию $f(x, y)$ в

$$L(\omega_1(t)) f(x, y) = f(x - t, y). \tag{2}$$

Значит,

$$A_1 = \left.\frac{dL(\omega_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3}$$

Точно так же доказывается, что

$$A_2 = -\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4}$$

Наконец, оператор $L(\omega_3(t))$, где

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

переводит функцию $f(x, y)$ в

$$L(\omega_3(t) f(x, y)) = f(x \cos t + y \sin t, \quad - x \sin t + y \cos t).$$

Поэтому

$$A_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{5}$$

В полярных координатах операторы A_1, A_2, A_3 записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\cos\alpha\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \\ A_2 &= -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Разумеется, точно такой же вид имеют инфинитезимальные операторы и для представления $L_R(g)$ в пространстве $\mathfrak{H}_R$, поскольку оно получается путем сужения квазирегулярного представления. Из формул (6) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} H_+ = A_1 + iA_2 = -e^{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right), \\ H_- = A_1 - iA_2 = -e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

С помощью формул (7) можно дать новый вывод рекуррентных соотношений для функций Бесселя. Для этого заметим, что канонический базис в пространстве $\mathfrak{H}_R$ состоит из функций

$$(-i)^n J_n(Rr)\, e^{in\alpha}.$$

В самом деле, в пространстве $\hat{\mathfrak{H}}_R$ канонический базис состоит из функций $e^{in\psi}$. Но при обратном преобразовании Фурье функции $e^{in\psi}\delta(|\mathbf{y}|-R)$ переходят в

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{in\psi}\delta(|\mathbf{y}|-R)\,e^{-i(\mathbf{x},\,\mathbf{y})}\,d\mathbf{y} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} e^{-iRr\cos(\psi-\alpha)}\,e^{in\psi}\,d\psi = \frac{1}{2\pi}(-i)^n J_n(Rr)\;e^{in\alpha}$$

(см. п. 1 § 3). Отсюда и следует наше утверждение.

Но, как было показано в формулах (4) и (4′) п. 3 § 2, для векторов $\mathbf{f}_n \equiv e^{in\psi}$ канонического базиса выполняются соотношения

$$H_+\mathbf{f}_n = iR\mathbf{f}_{n+1}, \tag{8′}$$

$$H_-\mathbf{f}_n = iR\mathbf{f}_{n-1} \tag{8″}$$

(в формулах (4) и (4′) п. 3 § 2 мы заменили R' на iR, поскольку $\hat{L}_R(g) \sim T_{iR}(g)$; см. стр. 221). Те же соотношения должны выполняться и для векторов $(-i)^n e^{in\alpha} J_n(Rn)$ канонического базиса в $\mathfrak{H}_R$. Таким образом, мы получаем из (8′)

$$-e^{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left[(-i)^n e^{in\alpha} J_n(Rr)\right] = R(-i)^n e^{i(n+1)\alpha} J_{n+1}(Rr).$$

Раскрывая скобки и полагая $R=1$, получаем

$$rJ_{n+1}(r) = nJ_n(r) - rJ_n'(r). \tag{9}$$

Точно так же из (8″) получаем

$$rJ_{n-1}(r) = nJ_n(r) + rJ_n'(r).$$

Из формул (8′) — (8″) вытекает, что для векторов канонического базиса выполняется равенство

$$H_+H_-\mathbf{f}_n = -R^2\mathbf{f}_n. \tag{10}$$

Подставим в это равенство вместо операторов H_+ и H_- выражения (7), а вместо $\mathbf{f}_n$ — функции $(-i)^n e^{in\alpha} J_n(Rr)$. Мы получим, что функции

Бесселя удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$e^{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)e^{in\alpha}J_n(Rr)=-R^2e^{in\alpha}J_n(Rr).$$

Преобразуя его и полагая $R=1$, получим уравнение Бесселя

$$J_n''(r)+\frac{1}{r}J_n'(r)+\left(1-\frac{n^2}{r^2}\right)J_n(r)=0$$

для функций $J_n(r)$.

Отметим в заключение, что оператор H_+H_- совпадает с оператором Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, записанным в полярных координатах. Поэтому из равенства (10) вытекает, что функции $e^{in\alpha}J_n(Rr)$ являются собственными функциями оператора Лапласа, соответствующими собственному значению $-R^2$.

5. Разложение регулярного представления. Перейдем, наконец, к разложению регулярного представления

$$T(g_0)f(g)=f(g_0^{-1}g) \tag{1}$$

группы $M(2)$. Здесь $f(g)$ — функция на $M(2)$, такая, что

$$\int|f(g)|^2\,dg<+\infty. \tag{2}$$

Обозначим пространство таких функций через $\mathfrak{H}$. Покажем, что регулярное представление является прямой суммой счетного множества представлений, эквивалентных квазирегулярному представлению.

Согласно п. 2 § 1 элементы g группы $M(2)$ можно задавать вектором $\mathbf{x}$ параллельного переноса и углом φ поворота вокруг начала координат, $g=g(\mathbf{x},\varphi)$. Разложим функции $f(\mathbf{x},\varphi)$ из $\mathfrak{H}$ в ряд Фурье по φ:

$$f(\mathbf{x},\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(\mathbf{x})\,e^{in\varphi}. \tag{3}$$

Из этого разложения следует, что $\mathfrak{H}$ является прямой ортогональной суммой пространств $\mathfrak{H}_n$, состоящих из функций вида $f_n(\mathbf{x})\,e^{in\varphi}$, где

$$\|f_n\|=\int|f_n(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}<+\infty. \tag{4}$$

При этом

$$f_n(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathbf{x},\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi. \tag{5}$$

Покажем, что подпространства $\mathfrak{H}_n$ инвариантны относительно операторов $T(g)$. В самом деле, оператор $T(g_0)$, $g_0=g(\mathbf{b},\alpha)$ переводит функцию $f(\mathbf{x},\varphi)$ в $f[(\mathbf{x}-\mathbf{b})_{-\alpha},\ \varphi-\alpha]$ (см. формулу (3) п. 2 § 1).

Ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$f_n^{(g_0)}(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[(\mathbf{x}-\mathbf{b})_{-\alpha},\ \varphi-\alpha]\,e^{-in\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{e^{-in\alpha}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[(\mathbf{x}-\mathbf{b})_{-\alpha},\ \varphi]\,e^{-in\varphi}\,d\varphi=e^{-in\alpha}f_n\,[(\mathbf{x}-\mathbf{b})_{-\alpha}].$$

Следовательно, оператор $T(g_0)$ переводит $\mathfrak{H}_n$ в себя и задает в $\mathfrak{H}_n$ представление

$$T_n(g_0)f_n(\mathbf{x})=e^{-in\alpha}f_n[(\mathbf{x}-\mathbf{b})_{-\alpha}]. \tag{6}$$

Таким образом, имеем

$$\mathfrak{H}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{H}_n, \tag{7}$$

причем

$$T(g)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}T_n(g). \tag{8}$$

Покажем, что представление $T_n(g)$ эквивалентно квазирегулярному представлению. Если сделать преобразование Фурье функции $f_n(\mathbf{x})$, то представление $T_n(g_0)$ перейдет в

$$\hat{L}_n(g_0)F_n(\mathbf{y})=e^{-in\alpha}\,e^{i(\mathbf{b},\,\mathbf{y})}F_n(\mathbf{y}_{-\alpha}).$$

Определим оператор Q формулой

$$\Phi(y)=QF_n(\mathbf{y})=e^{in\varphi}F_n(\mathbf{y}),$$

где φ — полярный угол точки $\mathbf{y}$. Простой подсчет показывает, что

$$Q\hat{L}_n(g_0)\,Q^{-1}\,\Phi(\mathbf{y})=\hat{L}(g_0)\,\Phi(\mathbf{y}),$$

где $\hat{L}(g)$ — образ квазирегулярного представления при преобразовании Фурье. Тем самым доказана эквивалентность представления $\hat{L}_n(g)$ квазирегулярному представлению.

Итак, равенство (8) дает разложение регулярного представления группы $M(2)$ на представления $T_n(g)$, эквивалентные квазирегулярному представлению той же группы. Поскольку мы уже умеем разлагать квазирегулярное представление на неприводимые, задача о разложении регулярного представления решена.

§ 6. Произведение представлений

1. Кронекеровское произведение представлений $T_R(g)$. Пусть

$$T_{iR_1}(g)f(\psi)=e^{iR_1r\cos(\psi-\varphi)}f(\psi-\alpha) \tag{1}$$

и

$$T_{iR_2}(g)f(\psi)=e^{iR_2r\cos(\psi-\varphi)}f(\psi-\alpha) \tag{2}$$

— неприводимые унитарные представления группы $M(2)$. Построим кронекеровское произведение $T(g)$ этих представлений. Согласно Добавлению к главе I, такое произведение строится в пространстве $\mathfrak{H}$ функций двух переменных $f(\psi_1, \psi_2)$, $0 \leqslant \psi_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \psi_2 < 2\pi$, таких, что

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\psi_1, \psi_2)|^2 \, d\psi_1 \, d\psi_2 < +\infty.$$

Представление $T(g)$ задается формулой

$$T(g) f(\psi_1, \psi_2) = e^{ir[R_1 \cos(\psi_1 - \varphi) + R_2 \cos(\psi_2 - \varphi)]} f(\psi_1 - \alpha, \psi_2 - \alpha). \tag{3}$$

Разложим это представление в непрерывную прямую сумму неприводимых представлений. Заметим сначала, что формулу (3) можно переписать в виде

$$T(g) f(\psi_1, \psi_2) = e^{irR \cos(\psi_1 - \varphi + \beta)} f(\psi_1 - \alpha, \varphi_2 - \alpha), \tag{3'}$$

где

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) \tag{4}$$

и

$$e^{i\beta} = \frac{R_1 + R_2 e^{i(\psi_2 - \psi_1)}}{R}. \tag{4'}$$

Здесь как R, так и β зависят от R_1, R_2 и $\psi_2 - \psi_1$.

Разложим теперь гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств, инвариантных относительно операторов $T(g)$. Для этого рассмотрим в $\mathfrak{H}$ подпространство $\mathfrak{S}$, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций $f(\psi_1, \psi_2)$. Каждой функции $f(\psi_1, \psi_2)$ из $\mathfrak{S}$ и каждому числу μ, $0 \leqslant \mu < 2\pi$ поставим в соответствие функцию

$$f_\mu(\psi) = f(\psi, \psi + \mu) \tag{5}$$

и обозначим множество всех функций $f_\mu(\psi)$, соответствующих при фиксированном μ функциям из $\mathfrak{S}$, через $\mathfrak{S}_\mu$.

Пространства $\mathfrak{S}_\mu$ являются предгильбертовыми пространствами относительно нормы

$$\|f_\mu\|_\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_\mu(\psi)|^2 \, d\mu.$$

Для любой функции $f(\psi_1, \psi_2)$ из $\mathfrak{H}$ имеем

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\psi_1, \psi_2)|^2\, d\psi_1\, d\psi_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\psi, \psi+\mu)|^2\, d\psi\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\mu(\psi)|^2\, d\psi\, d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f_\mu\|_\mu^2\, d\mu.$$

Поэтому пространство $\mathfrak{H}$ является непрерывной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}_\mu$ — пополнений $\mathfrak{S}_\mu$:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\mu\, d\mu. \tag{6}$$

Далее,

$$[T(g)f(\psi_1, \psi_2)]_\mu = [e^{iRr\cos(\psi_1-\varphi+\beta)} f(\psi_1-\alpha, \psi_2-\alpha)]_\mu =$$
$$= e^{iRr\cos(\psi_1-\varphi+\beta)} f(\psi_1-\alpha, \psi_2+\mu-\alpha),$$

где R и β определяются формулами (4) и (4′) при $\psi_2-\psi_1=\mu$. Это равенство можно переписать так:

$$[T(g)f(\psi_1, \psi_2)]_\mu = T_\mu(g) f_\mu(\psi_1), \tag{7}$$

где при $g=g(r, \varphi, \alpha)$ имеем

$$T_\mu(g) f_\mu(\psi) = e^{iRr\cos(\psi-\varphi+\beta)} f_\mu(\psi-\alpha) \tag{8}$$

(R и β зависят от μ по формулам (4) и (4′) при $\psi_2-\psi_1=\mu$). Отсюда следует, что $T(g)$ является непрерывной прямой суммой представлений $T_\mu(g)$;

$$T(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_\mu(g)\, d\mu. \tag{9}$$

Формула (8) показывает, что представление $T_\mu(g)$ эквивалентно представлению $T_{iR}(g)$ группы $M(2)$ и потому унитарно и неприводимо. Таким образом, мы разложили представление $T(g)$ в непрерывную прямую сумму унитарных неприводимых представлений.

2. Кронекеровское произведение и формула умножения. Покажем, что из полученного разложения кронекеровского произведения вытекает новый вывод формулы умножения для функций Бесселя.

В самом деле, из формул (7) и (9) п. 1 вытекает, что

$$(T(g)f_1,\ f_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}([T(g)f_1]_\mu,\ f_{2\mu})_\mu\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(T_\mu(g)f_{1\mu},\ f_{2\mu})_\mu\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}T_\mu(g)f_{1\mu}(\psi)\overline{f_{2\mu}(\psi)}\,d\mu\,d\psi. \qquad (1)$$

Применим эту формулу к функциям

$$f_1(\psi_1,\ \psi_2)=1,\ f_2(\psi_1,\ \psi_2)=e^{in\psi_1}e^{im\psi_2}.$$

Для этих функций имеем

$$f_{1\mu}(\psi)=1,$$

$$T_\mu(g)f_{1\mu}(\psi)=e^{iRr\cos(\psi-\varphi+\beta)}$$

и

$$f_{2\mu}(\psi)=e^{im\mu}e^{i(n+m)\psi}.$$

Поэтому по формуле (1)

$$(T(g)f_1,\ f_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i[Rr\cos(\psi-\varphi+\beta)-m\mu-(n+m)\psi]}\,d\psi\,d\mu=$$

$$=\frac{e^{-i(n+m)\varphi}}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}e^{-i[m\mu-(n+m)\beta]}\,d\mu\int_0^{2\pi}e^{i[Rr\cos\psi-(n+m)\psi]}\,d\psi=$$

$$=\frac{e^{-i(n+m)\varphi}i^{n+m}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i[m\mu-(n+m)\beta]}J_{n+m}(Rr)\,d\mu, \qquad (2)$$

где, напомним,

$$R^2=R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos\mu,$$

$$e^{i\beta}=\frac{R_1+R_2e^{i\mu}}{R}.$$

Но $(T(g)f_1,\ f_2)$ является матричным элементом $t_{nm,00}(g)$ представления $T(g)$. Матричные элементы кронекеровского произведения равны произведениям матричных элементов сомножителей и потому

$$t_{nm,00}(g)=t_{n0}^{iR_1}(g)\,t_{m0}^{iR_2}(g).$$

Подставляя значения матричных элементов $t_{n0}^{iR_1}(g)$ и $t_{m0}^{iR_2}(g)$ (см. формулу (10) п. 1 § 3), получаем после несложных преобразований

$$J_n(R_1)\,J_m(R_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i[m\mu-(n+m)\beta]}\,J_{n+m}(R)\,d\mu,$$

где β и R выражаются через R_1, R_2, ψ по формулам (4) — (4″) п. 1. Это равенство лишь обозначениями отличается от формулы умножения для бесселевых функций (см. п. 2 § 4).

§ 7. Функции Бесселя и функции $P^l_{mn}(x)$

1. Группа движений плоскости и группа вращений сферы. Евклидову плоскость можно в известном смысле слова рассматривать как сферу бесконечного радиуса: если увеличивать радиус сферы и соответственно смещать ее центр в бесконечность, сфера перейдет в пределе в плоскость. В соответствии с этим и группу $M(2)$ движений плоскости можно рассматривать как предел группы $SO(3)$ вращений сферы.

Точнее это означает следующее. Умножение элементов в группе $SO(3)$ определяется формулами (2) п. 2 § 1 главы III. Заменим в этих формулах углы φ, θ, ψ, θ_1, θ_2, φ_2 соответственно на φ, $\frac{r}{R}$, α, $\frac{r_1}{R}$, $\frac{r_2}{R}$, α_1 и возьмем главные члены при $R\to\infty$. Несложная выкладка показывает, что при этом получим формулы (8) п. 2 § 1, задающие умножение элементов в группе $M(2)$.

Итак, группу $M(2)$ можно рассматривать как вырожденную группу $SO(3)$ при стремлении R к ∞. В том же самом можно убедиться, рассматривая алгебры Ли этих групп. Для группы $SO(3)$ соотношения коммутации в алгебре Ли имеют следующий вид:

$$[a_1,\ a_2]=a_3,$$
$$[a_2,\ a_3]=a_1,$$
$$[a_3,\ a_1]=a_2.$$

Если заменить параметр t в однопараметрических подгруппах Ω_1 и Ω_2 на t/R, и устремить R к бесконечности, то получим в пределе соотношения коммутации

$$[a_1,\ a_2]=0,$$
$$[a_2,\ a_3]=a_1,$$
$$[a_3,\ a_1]=a_2,$$

определяющие алгебру Ли группы $M(2)$.

2. Функции Бесселя и многочлены Якоби. Связь между группами $SO(3)$ и $M(2)$, установленная в предыдущем пункте, делает естественным наличие связи между матричными элементами неприводимых унитарных представлений этих групп. Таким образом, функции Бесселя — матричные элементы представлений $T_{i\rho}(g)$ группы $M(2)$, должны возникать путем предельного перехода из функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$ — матричных элементов представлений $T_l(g)$ группы $SO(3)$. Оказывается, при этом предельном переходе не только R, но и l должно стремиться к бесконечности.

Чтобы получить соответствующие формулы, заметим, что функции $P^l_{mn}(\cos\theta)$ определяются с помощью интегрального представления

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+m)!}{(l-n)!\,(l+n)!}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}+i\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\right)^{l-n}\times$$
$$\times\left(i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}+\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\right)^{l+n}e^{im\varphi}\,d\varphi.$$

Положим здесь $\theta=\frac{r}{l}$ и перейдем к пределу при $l\to\infty$. Мы получим

$$\lim_{l\to\infty}P^l_{mn}\left(\cos\frac{r}{l}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\frac{ir}{2l}e^{-i\varphi}\right)^{l-n}\left(1+\frac{ir}{2l}e^{i\varphi}\right)^{l+n}e^{i(m-n)\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{ir\cos\varphi}e^{i(m-n)\varphi}d\varphi.$$

Но в силу интегрального представления функций Бесселя (см. формулу (8) п. 1 § 3) полученное равенство можно переписать следующим образом:

$$\lim_{l\to\infty}P^l_{mn}\left(\cos\frac{r}{l}\right)=i^{m-n}J_{m-n}(r). \tag{1}$$

Отметим частный случай выведенной формулы. При $m=n=0$ имеем

$$\lim_{l\to\infty}P_l\left(\cos\frac{r}{l}\right)=J_0(r).$$

Таким образом, $J_0(r)$ получается путем предельного перехода из многочленов Лежандра.

Заметим еще, что оператор Лапласа на группе $M(2)$ получается из оператора Лапласа на группе $SU(2)$ путем аналогичного предельного перехода. Мы опускаем детали этой выкладки.

3. Асимптотическая формула для коэффициентов Клебша — Гордана. Установленная связь между функциями $P^l_{mn}(z)$ и функциями Бесселя позволяет установить асимптотическую формулу для коэффициентов Клебша—Гордана в случае больших значений l_1, l_2, l. Воспользуемся для этого формулой (6) п. 3 § 8 главы III. Полагая в этой формуле $j'=j$, $k'=k$ и учитывая, что коэффициенты Клебша—Гордана действительны, получаем при натуральном N

$$[C(Nl_1,\ Nl_2,\ Nl;\ j;\ k;\ j+k)]^2 = \frac{2Nl+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} P^{Nl_1}_{jj}(x)\,P^{Nl_2}_{kk}(x)\,\overline{P^{Nl}_{j+k,\,j+k}(x)}\,dx.$$

Сделаем подстановку $x=\cos\frac{y}{N}$ и перейдем к пределу при $N\to\infty$. В силу формул (1) п. 2 и (12) п. 3 § 5 мы получим

$$\lim_{N\to\infty} N[C(Nl_1,\ Nl_2,\ Nl;\ j,\ k,\ j+k)]^2 = l\int\limits_0^\infty J_0(yl_1)\,J_0(yl_2)\,J_0(yl)\,y\,dy = \begin{cases} \dfrac{2l}{\pi\sqrt{4l_1^2l_2^2-(l^2-l_1^2-l_2^2)^2}}, \\ \text{если } |l_1-l_2|<l<l_1+l_2, \\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Полученное выражение не зависит от j и k. Ясно, что знак $C(Nl_1,\ Nl_2,\ Nl;\ j,\ k,\ j+k)$ совпадает при больших значениях N со знаком $C(Nl_1,\ Nl_2,\ Nl;\ 0,\ 0,\ 0)$, т. е. со знаком $(-1)^{N(g-l)}$, где $l+l_1+l_2=2g$. Отсюда вытекает, что

$$C(Nl_1,\ Nl_2,\ Nl;\ j,\ k,\ j+k) \sim \begin{cases} (-1)^{N(g-l)}\left[\dfrac{2l}{\pi N\sqrt{4l_1^2l_2^2-(l^2-l_1^2-l_2^2)^2}}\right]^{1/2}, \\ \text{если } |l_1-l_2|<l<l_1+l_2, \\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases} \tag{1}$$

ГЛАВА V

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ФУНКЦИИ ГАНКЕЛЯ И МАКДОНАЛЬДА

В предыдущей главе было показано, что многие свойства функций Бесселя с целым индексом связаны с представлениями группы движений евклидовой плоскости. Чтобы перейти к функциям Бесселя с произвольным индексом, нам придется заменить евклидову плоскость псевдоевклидовой, для которой подгруппа вращений не является компактной. Покажем, что представления группы движений псевдоевклидовой плоскости задаются интегральными операторами, ядра которых выражаются через функции Ганкеля и Макдональда, тесно связанные с функциями Бесселя с произвольным индексом. Отсюда будет выведен ряд свойств этих функций. В начале главы будут рассмотрены представления группы линейных преобразований прямой линии — одномерного аналога группы движений псевдоевклидовой плоскости.

§ 1. Представления группы линейных преобразований прямой линии и Г-функция

1. Группа линейных преобразований прямой линии. Изучим представления группы G линейных преобразований прямой линии, сохраняющих ориентацию, т. е. преобразований вида $y=ax+b$, где $a>0$. Каждый элемент g группы G определяется двумя вещественными числами, $a>0$ и b. Элементы группы G будем обозначать через $g(a, b)$.

Если $y=a_2x+b_2$ и $z=a_1y+b_1$, то

$$z=a_1a_2x+a_1b_2+b_1.$$

Поэтому групповая операция в группе G задается формулой

$$g(b_1, a_1)\,g(b_2, a_2)=g(b_1+a_1b_2, a_1a_2). \tag{1}$$

Из формулы (1) видно, что элементы вида $g(b, 1)$ образуют в группе G подгруппу, изоморфную аддитивной группе R вещественных чисел:

$$g(b_1, 1)\, g(b_2, 1) = g(b_1 + b_2, 1).$$

Элементы же вида $g(0, a)$ образуют подгруппу A в G, изоморфную мультипликативной группе R_+ положительных чисел:

$$g(0, a_1)\, g(0, a_2) = g(0, a_1 a_2).$$

Группа G изоморфна группе матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Это непосредственно вытекает из равенства

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа G является скрещенным произведением аддитивной группы R вещественных чисел и группы R_+ ее автоморфизмов $x \to ax$, $a > 0$.

2. Неприводимые представления группы G. Построим неприводимые представления группы G. С этой целью рассмотрим представления группы G, индуцированные одномерными представлениями $e^{\lambda b}$ подгруппы B элементов вида $g(b, 1)$. Согласно п. 6 § 2 главы I индуцированные представления строятся в пространстве $\mathfrak{D}_\lambda$ функций $f(g)$ на группе G, таких, что

$$f(g(b_0, 1)\, g(b, a)) = e^{\lambda b_0} f(g(b, a)). \tag{1}$$

Если положить $f(g) \equiv f(b, a)$, то равенство (1) записывается так:

$$f(b + b_0, a) = e^{\lambda b_0} f(b, a). \tag{2}$$

Поэтому функции $f(b, a)$ из пространства $\mathfrak{D}_\lambda$ имеют вид

$$f(b, a) = e^{\lambda b} f(0, a) = e^{\lambda b} \varphi(a), \tag{3}$$

где $\varphi(a) \equiv f(0, a)$ — функция на подгруппе A (или, что то же, на луче $0 < a < \infty$).

Операторы индуцированного представления выражаются формулой

$$R_\lambda(g_0) f(g) = f(g g_0), \qquad f(g) \in \mathfrak{H}_\lambda. \tag{4}$$

Выясним, как записываются эти операторы при переходе от функций $f(g)$ к функциям $\varphi(a)$. Так как

$$g(0, a)\, g(b_0, a_0) = g(a b_0, a_0 a),$$

то

$$R_\lambda(g_0)\, \varphi(a) = f(a b_0, a_0 a) = e^{\lambda a b_0} \varphi(a_0 a).$$

Итак, *представление $R_\lambda(g)$ группы G, индуцированное представлением $e^{\lambda b}$ подгруппы B, строится в пространстве функций на полуоси $0 < x < \infty$ и задается формулой*

$$R_\lambda(g)\, \varphi(x) = e^{\lambda b x} \varphi(ax) \tag{5}$$

(мы заменили a на x и a_0, b_0 на a, b).

Очевидно, что операторы $R_\lambda(g)$ оставляют инвариантным пространство $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых финитных функций на полуоси, обращающихся в нуль в некоторой окрестности точки $x=0$. В дальнейшем будем рассматривать операторы $R_\lambda(g)$ в этом пространстве.

Найдем инфинитезимальные операторы представления $R_\lambda(g)$, соответствующие однопараметрическим подгруппам A и B. Элементам $g(0, e^t)$ подгруппы A соответствуют операторы

$$R_\lambda(g(0, e^t))\,\varphi(x) = \varphi(e^t x). \tag{6}$$

Продифференцируем обе части этого равенства по t и положим $t=0$. Мы получим, что инфинитезимальный оператор a_λ имеет вид

$$a_\lambda \varphi(x) = x\varphi'(x). \tag{7}$$

Иными словами,

$$a_\lambda = x\frac{d}{dx}. \tag{7'}$$

Точно так же из равенства

$$R_\lambda(g(t, 1))\,\varphi(x) = e^{\lambda t x}\varphi(x)$$

вытекает, что инфинитезимальный оператор представления $R_\lambda(g)$, соответствующий подгруппе B, имеет вид

$$b_\lambda \varphi(x) = \lambda x\varphi(x). \tag{8}$$

Поэтому

$$b_\lambda = \lambda x. \tag{8'}$$

Операторы a_λ и b_λ определены во всем пространстве $\mathfrak{D}$. Соотношение коммутации для операторов a_λ и b_λ имеет вид

$$[a_\lambda, b_\lambda] \equiv a_\lambda b_\lambda - b_\lambda a_\lambda = b_\lambda. \tag{9}$$

Покажем, что при $\lambda \neq 0$ представления $R_\lambda(g)$ группы G операторно неприводимы, т. е. что любой оператор Q, перестановочный с операторами $R_\lambda(g)$, кратен единичному. Из перестановочности оператора Q с операторами представления R_λ вытекает его перестановочность с инфинитезимальными операторами a_λ и b_λ. Но оператор b_λ лишь постоянным множителем отличается от оператора умножения на x. Отсюда вытекает, что оператор Q, перестановочный со всеми операторами $R_\lambda(g)$, должен быть перестановочен и со всеми операторами умножения на многочлены, а потому и со всеми операторами умножения на функцию (напомним, что операторы действуют в пространстве финитных функций).

Известно, что единственными операторами в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций, перестановочными со всеми операторами умножения на функцию, являются операторы умножения на функцию. Поэтому оператор Q имеет вид

$$Q\varphi(x)=q(x)\varphi(x). \tag{10}$$

Чтобы вычислить функцию $q(x)$, используем перестановочность оператора Q с операторами

$$R_\lambda(g(0, a))\varphi(x)=\varphi(ax). \tag{11}$$

Равенство $QR_\lambda(g(0, a))=R_\lambda(g(0, a))Q$ означает, что

$$q(x)\varphi(ax)=q(ax)\varphi(ax)$$

и потому $q(x)=q(ax)$. Следовательно, $q(x)$ — постоянная. Тем самым доказано, что любой оператор Q, перестановочный со всеми операторами $R_\lambda(g)$, кратен единичному оператору, а следовательно, *представление $R_\lambda(g)$ операторно неприводимо.*

При $\lambda=0$ представление $R_\lambda(g)$ принимает вид

$$R_0(g)\varphi(x)=\varphi(ax). \tag{12}$$

Это представление является не чем иным, как регулярным представлением подгруппы A, и потому приводимо. Неприводимыми компонентами представления $R_0(g)$ являются унитарные одномерные представления

$$g(b, a)\to a^{i\rho} \tag{13}$$

группы G.

Мы построили, таким образом, серию $R_\lambda(g)$ неприводимых представлений группы G. Покажем теперь, что если $\lambda=t\mu$, где $t>0$ — положительное число, то представления $R_\lambda(g)$ и $R_\mu(g)$ эквивалентны. В самом деле, обозначим через S оператор

$$S\varphi(x)=\varphi(tx) \tag{14}$$

в пространстве $\mathfrak{D}$. Легко проверить, что

$$S^{-1}R_\lambda(g)S=R_\mu(g) \tag{15}$$

и, следовательно, представления $R_\lambda(g)$ и $R_\mu(g)$ эквивалентны.

До сих пор мы рассматривали представления $R_\lambda(g)$ в пространстве $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых финитных функций на полуоси $0<x<\infty$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности точки $x=0$. Введем теперь в это пространство скалярное произведение, положив

$$(\varphi, \psi)=\int_0^\infty \varphi(x)\overline{\psi(x)}\frac{dx}{x} \tag{16}$$

(мера $\frac{dx}{x}$ инвариантна относительно преобразований подобия $x\to ax$ на прямой: $\frac{d(ax)}{ax}=\frac{dx}{x}$). Найдем, при каких значениях λ представление $R_\lambda(g)$ унитарно относительно этого скалярного произведения. Имеем

$$(R_\lambda(g)\varphi, R_\lambda(g)\psi) = \\ = \int_0^\infty e^{(\lambda+\bar\lambda)bx}\varphi(ax)\overline{\psi(ax)}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty e^{\frac{(\lambda+\bar\lambda)bx}{a}}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\frac{dx}{x}.$$

Ясно, что для выполнения равенства

$$(R_\lambda(g)\varphi, \quad R_\lambda(g)\psi) = (\varphi, \psi) \tag{17}$$

при всех $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}$ и $g \in G$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda + \bar\lambda = 0$, т. е. чтобы λ было чисто мнимым числом. Поэтому *при чисто мнимых значениях λ представления $R_\lambda(g)$ продолжаются до унитарных представлений в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$*. Легко видеть, что при остальных значениях λ операторы $R_\lambda(g)$ неограничены в $\mathfrak{H}$ и потому представление $R_\lambda(g)$ не продолжается до представления в $\mathfrak{H}$. Однако если $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то представление (5) можно продолжить до представления в $\mathfrak{H}$ полугруппы $g(a, b)$, $b > 0$. При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ продолжается представление полугруппы $g(a, b)$, $b < 0$.

Поскольку при $t > 0$ представления $R_\lambda(g)$ и $R_{t\lambda}(g)$ эквивалентны, неприводимые унитарные представления $R_{\rho i}(g)$ группы G эквивалентны одному из двух представлений:

$$R_-(g)\varphi(x) = e^{ibx}\varphi(ax)$$

и

$$R_+(g)\varphi(x) = e^{-ibx}\varphi(ax).$$

Можно показать, что этими представлениями и одномерными представлениями $g(a, b) \to a^{i\rho}$ исчерпываются все, с точностью до эквивалентности, унитарные неприводимые представления группы G (см. [145]).

3. Приведение операторов $R_\lambda(g(0, a))$ к диагональному виду. В построенной выше реализации представлений $R_\lambda(g)$ (см. формулу (5) п. 2) элементам $g(b, 1)$ подгруппы B соответствуют операторы умножения на $e^{\lambda bx}$. Если рассматривать значения функции в точке как «координаты» этой функции, то оператор умножения на функцию является аналогом диагональной матрицы (каждая «координата» умножается на некоторое число). Поэтому можно сказать, что при выбранной реализации представлений $R_\lambda(g)$ операторы $R_\lambda(g(b, 1))$ приведены к диагональному виду.

Построим теперь другую реализацию представлений $R_\lambda(g)$, при которой диагональный вид имеют операторы, соответствующие элементам $g(0, a)$ подгруппы A. Для этого перейдем от функций $\varphi(x)$ к их преобразованиям Меллина

$$\mathfrak{F}(w) = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^{w-1}\,dx. \tag{1}$$

Нетрудно показать (ср. п. 1 § 4), что функциям $\varphi(x)$ из пространства $\mathfrak{D}$[1]) соответствуют при этом преобразовании целые аналитические функции от $w=u+iv$, быстро убывающие на мнимой оси:

$$\lim_{v\to\infty} |v|^n \mathfrak{F}(iv)=0, \tag{2}$$

и такие, что при некотором $c>0$ выполняется неравенство

$$\max_v |\mathfrak{F}(u+iv)| \leqslant |u|^c \max_v |\mathfrak{F}(iv)|. \tag{3}$$

Найдем, как преобразуются при переходе от $\varphi(x)$ к $\mathfrak{F}(w)$ операторы $R_\lambda(g)$. Обозначим через $\mathfrak{F}_g(w)$ преобразование Меллина функции $R_\lambda(g)\varphi(x)$:

$$\mathfrak{F}_g(w)=\int_0^\infty e^{\lambda bx}\varphi(ax)\,x^{w-1}\,dx=a^{-w}\int_0^\infty e^{\frac{\lambda bx}{a}}\varphi(x)\,x^{w-1}\,dx. \tag{4}$$

При $b=0$ эта формула принимает вид

$$\mathfrak{F}_g(w)=a^{-w}\int_0^\infty \varphi(x)\,x^{w-1}\,dx=a^{-w}\mathfrak{F}_g(w). \tag{5}$$

Таким образом, *элементам* $g(0, a)$ *подгруппы* A *соответствует оператор умножения на* a^{-w}:

$$R_\lambda(g(0, a))\,\mathfrak{F}(w)=a^{-w}\,\mathfrak{F}(w). \tag{6}$$

Выясним теперь, какой вид имеют операторы $R_\lambda(g)$, соответствующие $g(a, b)$ при $b\neq 0$. По формуле обращения для преобразования Меллина имеем

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z}\mathfrak{F}(z)\,dz, \tag{7}$$

где c — любое вещественное число. Поэтому

$$\mathfrak{F}_g(w)=\frac{a^{-w}}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{\lambda bx}{a}}x^{w-z-1}\mathfrak{F}(z)\,dz\,dx. \tag{8}$$

Пусть $b>0$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda<0$, $\operatorname{Re}w>c$, интеграл (8) абсолютно сходится, и поэтому можно изменить порядок интегрирования. Мы получим

$$\mathfrak{F}_g(w)\equiv R_\lambda(g)\,\mathfrak{F}(w)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K(w, z; g)\,\mathfrak{F}(z)\,dz, \tag{9}$$

где

$$K(w, z; g)=\frac{a^{-w}}{2\pi i}\int_0^\infty e^{\frac{\lambda bx}{a}}x^{w-z-1}\,dx. \tag{10}$$

[1]) То есть бесконечно дифференцируемым финитным функциям, равным нулю в некоторой окрестности точки $x=0$.

Пользуясь формулами (6) и (10), легко найти инфинитезимальные операторы представления $R_\lambda(g)$. Пусть $g=g(0, e^t)$. Тогда из равенства (6) следует, что

$$R_\lambda(g)\mathfrak{F}(w)=e^{-tw}\mathfrak{F}(w).$$

Дифференцируя это равенство по t и полагая $t=0$, получаем

$$\hat{a}_\lambda\mathfrak{F}(w)\equiv\left.\frac{dR_\lambda(g(0, e^t))}{dt}\right|_{t=0}\mathfrak{F}(w)=-w\mathfrak{F}(w). \tag{11}$$

Точно так же из равенства

$$R_\lambda(g(t, 0))\mathfrak{F}(w)=\int_0^\infty e^{\lambda tx}\varphi(x)\,x^{w-1}\,dx$$

получаем

$$\hat{b}_\lambda=\left.\frac{dR_\lambda(g(t, 0))}{dt}\right|_{t=0}\mathfrak{F}(w)=\lambda\int_0^\infty\varphi(x)\,x^w\,dx=\lambda\mathfrak{F}(w+1).$$

Поэтому инфинитезимальный оператор, соответствующий подгруппе B, имеет вид

$$\hat{b}_\lambda\mathfrak{F}(w)=\lambda\mathfrak{F}(w+1). \tag{12}$$

4. Выражение ядра $K(w, z; g)$ через Г-функцию. Мы получили выражение операторов представления $R_\lambda(g)$ в виде интегральных операторов с ядром $K(w, z; g)$. Это ядро может быть выражено через степенную функцию и специальную функцию $\Gamma(z)$, называемую *гамма-функцией.*

Определим сначала $\Gamma(z)$ лишь при $\operatorname{Re} z>0$ формулой

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx. \tag{1}$$

Пусть в интеграле (10) п. 3 $\lambda<0$ и $b>0$. Сделаем в этом интеграле подстановку $\frac{\lambda bx}{a}=-t$:

$$K(w, z; g)=\frac{a^{-w}\left(-\frac{\lambda b}{a}\right)^{z-w}}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-t}t^{w-z-1}\,dt=\frac{\Gamma(w-z)a^{-w}}{2\pi i}\left(-\frac{\lambda b}{a}\right)^{z-w}.$$

Итак, доказано, что *при* $\lambda<0$, $b>0$, $\operatorname{Re} w>\operatorname{Re} z$, *ядро* $K(w, z; g)$ *выражается формулой*

$$K(w, z; g)=\frac{\Gamma(w-z)\,a^{-w}}{2\pi i}\left(-\frac{\lambda b}{a}\right)^{z-w}. \tag{2}$$

Распространим теперь формулу (2) на комплексные значения λ и b. Для этого заметим, что согласно формуле (1) ядро $K(w, z; g)$ является аналитической функцией от $-\lambda b$ в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной полуоси. С другой стороны, из формулы (4) п. 3 видно, что $\mathfrak{F}_g(w)$ также является аналитической функцией от $-\lambda b$. Так как при $0 < -\lambda b < \infty$ имеет место доказанное нами равенство

$$R_\lambda(g)\mathfrak{F}(w) = \frac{a^{-w}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-z)\left(-\frac{\lambda b}{a}\right)^{z-w}\mathfrak{F}(z)\,dz, \tag{3}$$

то оно справедливо для всех значений λ и b, таких, что $-\lambda b$ не лежит на отрицательной полуоси.

В частности, имеют место формулы

$$R_+(g)\mathfrak{F}(w) = \frac{a^{-w}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-z)\left(-\frac{bi}{a}\right)^{z-w}\mathfrak{F}(z)\,dz \tag{4}$$

и

$$R_-(g)\mathfrak{F}(w) = \frac{a^{-w}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-z)\left(\frac{bi}{a}\right)^{z-w}\mathfrak{F}(z)\,dz. \tag{4'}$$

5. Свойства Г-функции. Функция $\Gamma(z)$ определена формулой (1) п. 4 лишь при $\operatorname{Re} z > 0$. Очевидно, что в этой области она аналитически зависит от z. Определим ее при $\operatorname{Re} z < 0$ с помощью аналитического продолжения. Покажем, что это продолжение однозначно определено. Для этого установим функциональное уравнение, которому удовлетворяет Г-функция.

Из формул (12) п. 3 и (2) п. 4 вытекает, что оператор $\hat{b}_\lambda R_\lambda(t, 1)$ является интегральным оператором с ядром

$$\frac{\Gamma(w-z+1)}{2\pi i}(-\lambda t)^{z-w-1}. \tag{1}$$

С другой стороны, из равенства

$$\hat{b}_\lambda R_\lambda(t, 1) = \frac{dR_\lambda(s, 1)}{ds}R_\lambda(t, 1)\Big|_{s=0} = \frac{dR_\lambda(s+t, 1)}{ds}\Big|_{s=0}$$

вытекает, что ядро этого оператора равно

$$\frac{dK(w, z; t+s, 1)}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{\lambda(w-z)\Gamma(w-z)}{2\pi i}(-\lambda t)^{z-w-1}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получаем

$$\Gamma(w-z+1) = (w-z)\Gamma(w-z).$$

Заменяя в этом равенстве $w-z$ на z и учитывая, что $\operatorname{Re}(w-z)>0$, получаем следующий результат:

В полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ *функция* $\Gamma(z)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{3}$$

Так как

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1,$$

то из равенства (3) вытекает, что при целых значениях n имеем

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\ldots 1=n!.$$

Иными словами, $\Gamma(z+1)$ является обобщением факториала на нецелые значения z. Ясно, что, полагая

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}, \tag{4}$$

мы получаем аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} z>-1$ (из которой исключена точка $z=0$). Точно так же равенство

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \tag{5}$$

задает аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re}(z)>-n-1$ с исключенными точками $z=0,\ -1,\ \ldots,\ -n$.

Покажем, что в точке $z=-n$ функция $\Gamma(z)$ имеет простой полюс с вычетом

$$\underset{z=-n}{\text{Выч}}\ \Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}. \tag{6}$$

В самом деле, по формуле (5)

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}=\frac{(-1)^n\Gamma(1)}{n!}. \tag{7}$$

Но $\Gamma(1)=1$ и потому

$$\underset{z=-n}{\text{Выч}}\ \Gamma(z)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Укажем другой способ аналитического продолжения функции $\Gamma(z)$. Разобьем интеграл (1) п. 4 на интегралы по отрезкам $[0, 1]$ и $[1, \infty)$:

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-x}x^{z-1}dx+\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx.$$

Отсюда получаем

$$\Gamma(z)=\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx+\int_0^1 x^{z-1}\left[e^{-x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\right]dx+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^{k+z-1}dx=\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx+$$
$$+\int_0^1 x^{z-1}\left[e^{-x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\right]dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)}. \tag{8}$$

Очевидно, что интегралы в правой части равенства (8) сходятся при $\operatorname{Re} z>-n-1$ и потому формула (8) задает аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} z>-n-1$. Аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на всю плоскость задается формулой

$$\Gamma(z)=\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)}. \tag{9}$$

Итак, мы доказали, что $\Gamma(z)$ — *аналитическая функция во всей комплексной плоскости, за исключением точек* $z=0,\ -1,\ \ldots$ $\ldots,\ -n,\ \ldots$, *где она имеет простые полюсы с вычетами:*

$$\underset{z=-n}{\text{Выч}}\ \Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Покажем теперь, что *если* $c>0$, *то функция* $\Gamma(c+it)$ *быстро убывает при* $|t|\to\infty$, т. е. что для любого $n>0$

$$\lim_{|t|\to\infty}|t|^n\,\Gamma(c+it)=0. \tag{10}$$

Для этого в интеграле (1) п. 4 положим $z=c+it$ и $x=e^s$. Мы получим

$$\Gamma(c+it)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^s+cs}e^{its}ds. \tag{11}$$

Таким образом, $\Gamma(c+it)$ является преобразованием Фурье функции e^{-e^s+cs}. Но эта функция бесконечно дифференцируема и при $|s|\to\infty$ быстро убывает вместе со всеми производными. Иными словами, e^{-e^s+cs} — функция из пространства $\mathfrak{S}$ (см. п. 2 § 4). Но тогда, согласно п. 3 § 4, и преобразование Фурье $\Gamma(c+it)$ этой функции принадлежит пространству $\mathfrak{S}$ и, значит, быстро убывает при $|t|\to\infty$.

6. Теорема сложения для Г-функции и ее следствия. Выведем теперь теорему сложения для Г-функции. Для этого используем равенство

$$g(b,\ 1)\,g(1,\ 1)=g(b+1,\ 1). \tag{1}$$

Из равенства (1) вытекает, что

$$R_\lambda(b,\ 1)\,R_\lambda(1,\ 1)=R_\lambda(b+1,\ 1) \tag{2}$$

и потому для любой функции $\mathfrak{F}(z)$ из $\mathfrak{S}$ имеем (при $\lambda=1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\Gamma(w-u)\,b^{u-w}du\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(u-z)\,\mathfrak{F}(z)\,dz=$$
$$=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-z)\,(b+1)^{z-w}\mathfrak{F}(z)\,dz, \tag{3}$$

где $\operatorname{Re} w>c_1>c$. В силу доказанного выше быстрого убывания $\Gamma(c-z+it)$ и $\Gamma(w-c-it)$ при $|t|\to\infty$, можно изменить порядок интегрирования и получить

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-z)\,(b+1)^{z-w}\mathfrak{F}(z)\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{F}(z)\,dz\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\Gamma(w-u)\,\Gamma(u-z)\,b^{u-w}du. \tag{4}$$

Поскольку равенство (4) имеет место для всех функций $\mathfrak{F}(z)$, то из него следует, что

$$\Gamma(w-z)\left(\frac{b+1}{b}\right)^{z-w}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\Gamma(w-u)\,\Gamma(u-z)\,b^{u-z}\,du, \tag{5}$$

где $\operatorname{Re} w>c_1>\operatorname{Re} z$. Заменив b на t, $u-z$ на u и $w-z$ на w, получим

$$\Gamma(w)\left(\frac{t}{t+1}\right)^{w}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\Gamma(w-u)\,\Gamma(u)\,t^u du, \tag{5'}$$

где $\operatorname{Re} w>c_1>0$. Назовем это равенство *формулой сложения для Г-функции*. При $t=1$ получаем частный случай формулы сложения

$$2^{-w}\,\Gamma(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\Gamma(w-u)\,\Gamma(u)\,du. \tag{6}$$

Заменив в формуле (5′) u на $-u$, убедимся в том, что функция $\Gamma(w)\left(\frac{t}{t+1}\right)^{w}$ является обратным преобразованием Меллина для функции $\Gamma(w+u)\Gamma(-u)$. Поэтому в силу двойственного преобразования Меллина имеем

$$\frac{\Gamma(w+u)\Gamma(-u)}{\Gamma(w)}=\int_0^\infty t^{w+u-1}(1+t)^{-w}\,dt, \tag{7}$$

где $\operatorname{Re} u<0$, $\operatorname{Re}(w+u)>0$.

Положим в формуле (7) $w=1$. Так как $\Gamma(1)=1$, то получим

$$\Gamma(1+u)\Gamma(-u)=\int_0^\infty t^u(1+t)^{-1}\,dt, \tag{8}$$

где $-1<\operatorname{Re} u<0$. Вычислим интеграл в правой части равенства (8). Для этого сделаем в нем подстановку $t=x^2$; получим

$$\Gamma(1+u)\Gamma(-u)=2\int_0^\infty \frac{x^{2u+1}}{1+x^2}\,dx.$$

Заменим интегрирование по полуоси $0<x<\infty$ интегрированием по всей вещественной оси $-\infty<x<\infty$, причем точку $x=0$ будем обходить в верхней полуплоскости. Тогда на отрицательной полуоси имеем $x^{2u+1}=|x|^{2u+1}e^{(2u+1)\pi i}$ и потому

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2u+1}dx}{1+x^2}=(1-e^{2u\pi i})\int_0^\infty \frac{x^{2u+1}}{1+x^2}\,dx.$$

Следовательно,

$$\Gamma(1+u)\Gamma(-u)=\frac{2}{1-e^{2u\pi i}}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2u+1}dx}{1+x^2}, \tag{9}$$

где, напомним, $-1<\operatorname{Re} u<0$, и точка $x=0$ обходится в верхней полуплоскости.

Дополним вещественную ось полуокружностью в верхней полуплоскости бесконечно большого радиуса. Интеграл по этой полуокружности дает нулевой вклад, поскольку $\operatorname{Re} u<0$. Контур же, состоящий из этой полуокружности и вещественной оси, охватывает единственную особую точку $x=e^{\frac{\pi i}{2}}$ подынтегральной функции. Поэтому, применяя формулы Коши и Эйлера, получаем

$$\Gamma(1+u)\Gamma(-u)=\frac{2\pi e^{u\pi i}}{1-e^{2u\pi i}}=-\frac{\pi}{\sin \pi u}.$$

Иными словами,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{10}$$

Формула (10) называется *формулой дополнения* для гамма-функции. Полагая в формуле (10) $x={}^1/_2$, находим, что $\Gamma^2({}^1/_2)=\pi$ и потому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{11}$$

Далее, полагая в формуле (10) $x={}^1/_2+it$, получаем

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+it\pi\right)}=\frac{\pi}{\operatorname{ch} t\pi}. \tag{12}$$

7. Бета-функция и формула удвоения для $\Gamma(x)$. С функцией $\Gamma(x)$ тесно связана функция $B(x, y)$, называемая *бета-функцией*. Она определяется равенством

$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} x>0, \\ \operatorname{Re} y>0. \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы установить связь между $\Gamma(x)$ и $B(x, y)$, сделаем в интеграле (7) п. 6 подстановку $\dfrac{t}{1+t}=s$. Мы получим

$$\frac{\Gamma(w+u)\,\Gamma(-u)}{\Gamma(w)}=\int_0^1 s^{u+w-1}(1-s)^{-u-1}\,ds. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), убеждаемся, что

$$B(u+w, -u)=\frac{\Gamma(u+w)\,\Gamma(-u)}{\Gamma(w)}$$

или, иными словами,

$$B(x, y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{3}$$

Чтобы вывести формулу удвоения для $\Gamma(x)$, положим в формуле (3) $x=y$. Мы получим

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)}=B(x, x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^{x-1}du=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^{x-1}du.$$

Сделаем подстановку $4u^2 = t$. Мы получим

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = 2^{-2x+1}\int\limits_0^1 (1-t)^{x-1}t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= 2^{-2x+1}\,\mathrm{B}\left(x, \ \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{-2x+1}\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

Так как $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то из этого равенства следует, что

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

8. Преобразование Фурье функций x_+^u и x_-^u. Мы определили функцию $\Gamma(u)$ при $\operatorname{Re} u > 0$ формулой

$$\Gamma(u) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{u-1}\,dx, \tag{1}$$

из которой непосредственно вытекает, что если $t > 0$, то

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx}x^{u-1}dx = \Gamma(u)\,t^{-u}. \tag{2}$$

Докажем, что эта формула остается справедливой и при комплексных t, таких, что $\operatorname{Re} t > 0$. Для этого сделаем в интеграле (2) подстановку $tx = z$. Если $\arg t = \alpha$, то получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx}x^{u-1}\,dx = t^{-u}\int\limits_0^{\infty e^{-i\alpha}} e^{-z}z^{u-1}dz.$$

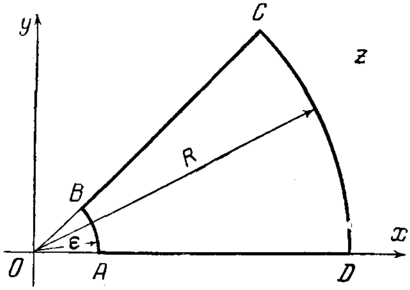

Рис. 3.

Подынтегральная функция не имеет особенностей в секторе, ограниченном осью Ox и лучом $(0, \infty e^{-i\alpha})$. Поэтому

$$\int\limits_L e^{-z}z^{u-1}dz = 0,$$

где через L обозначен контур, изображенный на рис. 3. Легко проверить, что если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то при $\varepsilon \to 0$ интеграл по дуге AB стремится к нулю, а при $R \to \infty$ стремится к нулю интеграл по дуге CD. Отсюда вытекает, что при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\infty e^{-i\alpha}} e^{-z}z^{u-1}dz=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{u-1}dx=\Gamma(u),$$

и потому при $-\frac{\pi}{2}<\arg t<\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}x^{u-1}dx=\Gamma(u)\,t^{-u}.$$

Тем самым доказана справедливость формулы (2) при условии $-\frac{\pi}{2}<\arg t<\frac{\pi}{2}$.

Формула (2) остается справедливой и при $\arg t=\pm\frac{\pi}{2}$; если $0<\operatorname{Re} u<1$, то

$$\int_0^{\infty} e^{-itx}x^{u-1}dx=\Gamma(u)\,t^{-u}e^{-\frac{\pi ui}{2}} \tag{3}$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{itx}x^{u-1}dx=\Gamma(u)\,t^{-u}e^{\frac{\pi ui}{2}}. \tag{3'}$$

Формулы (3) и (3′) можно рассматривать как формулы для преобразования Фурье функций x_-^{u-1} и x_+^{u-1}, определяемых равенствами

$$x_-^{u-1}=\begin{cases} 0 & \text{при } x>0,\\ |x|^{u-1} & \text{при } x<0\end{cases}$$

и

$$x_+^{u-1}=\begin{cases} x^{u-1} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

9. Представления группы линейных преобразований прямой, индуцированные одномерными представлениями подгруппы A. Мы рассмотрели в п. 2 неприводимые представления группы G, индуцированные одномерными представлениями подгруппы B элементов вида $g(b,1)$. Рассмотрим теперь неприводимые представления этой группы, индуцированные одномерными представлениями подгруппы A элементов вида $g(0,a)$. Эти одномерные представления имеют вид $g(0,a)\to a^\sigma$. Поэтому индуцированные ими представления реализуются в пространствах $\mathfrak{H}^\sigma$ функций $f(g)$ на группе G, таких, что

$$f(g(0,a_0)\,g(b,a))=a_0^\sigma f(g(b,a)). \tag{1}$$

Оператор представления задается формулой

$$R^\sigma(g_0)f(g)=f(gg_0). \tag{2}$$

Так как $g(0, a_0)g(b, a) = g(a_0b, a_0a)$, то из равенства (1) вытекает, что функции $f(g)$ пространства $\mathfrak{H}^\sigma$ имеют вид

$$f(g(b, a)) = f\left(g(0, a)g\left(\frac{b}{a}, 1\right)\right) = a^\sigma\varphi\left(\frac{b}{a}\right), \tag{3}$$

где $\varphi(x) \equiv f(g(x, 1))$ — функция на вещественной прямой. Выясним, как преобразуются функции $\varphi(x)$ при сдвигах $g \to gg_0$. Пусть $\varphi(x) = f(g(x, 1))$. Обозначим через $\varphi_{g_0}(x)$ функцию, соответствующую $f(gg_0)$. Так как $g(x, 1)g(b_0, a_0) = g(x + b_0, a_0)$, то

$$\varphi_{g_0}(x) = a_0^\sigma f\left(g\left(\frac{x + b_0}{a_0}, 1\right)\right) = a_0^\sigma\varphi\left(\frac{x + b_0}{a_0}\right).$$

Таким образом, операторы $R^\sigma(g)$ реализуются в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $\varphi(x)$ в виде

$$R^\sigma(g)\varphi(x) = a^\sigma\varphi\left(\frac{x + b}{a}\right), \quad g = g(b, a). \tag{4}$$

Разложим представление $R^\sigma(g)$ на неприводимые. Для этого сделаем преобразование Фурье

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\lambda x} dx. \tag{5}$$

Обозначим через $F_g(\lambda)$ преобразование Фурье функции $R^\sigma(g)\varphi(x)$. Из формулы (4) вытекает, что

$$F_g(\lambda) = a^\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x + b}{a}\right) e^{i\lambda x} dx = a^{\sigma+1}e^{-i\lambda b} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\lambda a x} dx = a^{\sigma+1}e^{-i\lambda b}F(a\lambda).$$

Таким образом, операторы $R^\sigma(g)$ при преобразовании Фурье переходят в операторы

$$R^\sigma(g)\,F(\lambda) = a^{\sigma+1}e^{-i\lambda b}F(a\lambda). \tag{6}$$

Если положить $F(\lambda) = \lambda^{\sigma+1}\Phi(\lambda)$, то представление (6) запишется следующим образом:

$$R^\sigma(g)\,\Phi(\lambda) = e^{-i\lambda b}\Phi(a\lambda). \tag{7}$$

Представление (7) приводимо. Именно, операторы (7) оставляют инвариантными подпространства $\mathfrak{H}_+$ и $\mathfrak{H}_-$, состоящие из функций $\Phi(\lambda)$, обращающихся в нуль соответственно при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. На подпространстве $\mathfrak{H}_+$ представление (7) совпадает с построенным в п. 2 неприводимым унитарным представлением $R_+(g)$, а на подпространстве $\mathfrak{H}_-$ — с неприводимым унитарным представлением $R_-(g)$.

Итак, мы доказали, что *представления группы G, индуцированные одномерными представлениями подгруппы A, распадаются в прямую сумму неприводимых унитарных представлений* (и, следовательно, все эти представления эквивалентны друг другу).

Пользуясь полученными результатами, легко разложить регулярное представление группы G. Именно, пусть $f(b, a) \equiv f(g)$ — функция на группе G. Обозначим через $f^\sigma(g)$ функцию

$$f^\sigma(g) = \int_0^\infty f(tb, ta)\, t^{-\sigma-1} dt. \tag{8}$$

Покажем, что эта функция принадлежит пространству $\mathfrak{H}^\sigma$, т. е., что

$$f^\sigma(g(0, a_0)\, g(b, a)) = a_0^\sigma f^\sigma(g). \tag{9}$$

В самом деле, $g(0, a_0)\, g(b, a) = g(a_0 b, a_0 a)$ и потому

$$f^\sigma(g(0, a_0)\, g(b, a)) = \int_0^\infty f(ta_0 b, ta_0 a)\, t^{-\sigma-1} dt = a_0^\sigma \int_0^\infty f(tb, ta)\, t^{-\sigma-1} dt = a_0^\sigma f^\sigma(g).$$

Оператору

$$R(g_0) f(g) = f(gg_0) \tag{10}$$

регулярного представления соответствует оператор

$$R^\sigma(g_0) f^\sigma(g) = f^\sigma(gg_0) \tag{11}$$

в пространстве функций $f^\sigma(g)$.

Мы видели выше, что представление $R^\sigma(g)$ распадается в прямую сумму двух неприводимых унитарных представлений, эквивалентных представлениям $R_+(g)$ и $R_-(g)$. Чтобы закончить разложение регулярного представления, нам осталось выразить функцию $f(g)$ через ее компоненты $f^\sigma(g)$. Делается это с помощью формулы обращения для преобразования Меллина. Именно, из равенства (8) вытекает, что

$$f(tb, ta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^\sigma(b, a)\, t^\sigma\, d\sigma.$$

Полагая здесь $t = 1$, находим

$$f(b, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^\sigma(b, a)\, d\sigma. \tag{12}$$

Итак, мы доказали, что *регулярное представление группы G линейных преобразований прямой распадается в непрерывную прямую сумму представлений $R^\sigma(g)$, каждое из которых является прямой суммой двух неприводимых унитарных представлений группы G.*

§ 2. Группа $MH(2)$ движений псевдоевклидовой плоскости

1. Псевдоевклидова плоскость. Назовем *псевдоевклидовой плоскостью* двумерное вещественное линейное пространство, в котором задана неопределенная билинейная форма

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2). \tag{1}$$

Расстояние r между точками $M(x_1, x_2)$ и $N(y_1, y_2)$ псевдоевклидовой плоскости определяется формулой

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 \equiv [\mathbf{x} - \mathbf{y},\ \mathbf{x} - \mathbf{y}]. \tag{2}$$

Эта формула определяет расстояние лишь с точностью до знака.

В отличие от случая евклидовой плоскости, на псевдоевклидовой плоскости расстояние между двумя точками может быть не только вещественным, но и чисто мнимым. В частности, расстояние между двумя различными точками $M(x_1, x_2)$ и $N(y_1, y_2)$ псевдоевклидовой плоскости может равняться нулю. Это будет, если

$$x_1 - y_1 = \pm (x_2 - y_2).$$

Введем на псевдоевклидовой плоскости *аналог полярной системы координат.* Прямые $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$, точки которых отстоят от начала координат на нулевое расстояние, разбивают плоскость на четыре квадранта. В первом из них имеем $-x_1 < x_2 < x_1$, и потому $r^2 = x_1^2 - x_2^2 > 0$, $x_1 > 0$. Мы будем считать, что в этом квадранте $r > 0$. Так как $r^2 = x_1^2 - x_2^2$, то мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \operatorname{ch} \theta, \\ x_2 &= r \operatorname{sh} \theta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Когда r изменяется от 0 до ∞, а θ — от $-\infty$ до ∞, точка (x_1, x_2) пробегает весь квадрант. Точно так же во втором квадранте $-x_2 < x_1 < x_2$ и $r^2 = x_1^2 - x_2^2 < 0$. Поэтому в нем можно положить

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -ir \operatorname{sh} \theta, \\ x_2 &= -ir \operatorname{ch} \theta, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

где $r \equiv i|r|$ — чисто мнимое число. Аналогично, в третьем квадранте $x_1 < x_2 < -x_1$ имеем $r^2 = x_1^2 - x_2^2 > 0$, $x_1 < 0$, и мы полагаем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -r \operatorname{ch} \theta, \\ x_2 &= -r \operatorname{sh} \theta, \end{aligned}\right\} \tag{3''}$$

а в четвертом, $x_2 < x_1 < -x_2$; имеем $r^2 = x_1^2 - x_2^2 < 0$, $x_2 < 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -ir \operatorname{sh} \theta, \\ x_2 &= ir \operatorname{ch} \theta. \end{aligned}\right\} \tag{3'''}$$

Ясно, что задание вещественного или чисто мнимого числа r и вещественного числа θ однозначно определяет точку псевдоевклидовой плоскости.

2. Группа $MH(2)$. Назовем *движением* псевдоевклидовой плоскости неоднородное линейное преобразование двух переменных, не меняющее ориентации, сохраняющее расстояние между точками этой плоскости и переводящее точки одного из квадрантов в точки того же квадранта. Очевидно, что движения псевдоевклидовой плоскости образуют группу. Мы будем обозначать ее через $MH(2)$. Как и для евклидовой плоскости, устанавливается, что такие преобразования задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \operatorname{ch}\varphi + x_2 \operatorname{sh}\varphi + a_1, \\ x_2' &= x_1 \operatorname{sh}\varphi + x_2 \operatorname{ch}\varphi + a_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} -\infty < a_1 < \infty, \\ -\infty < a_2 < \infty, \\ -\infty < \varphi < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Таким образом, каждое движение g псевдоевклидовой плоскости задается тремя вещественными числами a_1, a_2, φ. Мы будем обозначать его через $g = g(a_1, a_2, \varphi)$.

Из формулы (1) непосредственно вытекает, что

$$g(a_1, a_2, \varphi)\, g(b_1, b_2, \psi) = g(c_1, c_2, \theta), \tag{3}$$

где

$$c_1 = b_1 \operatorname{ch}\varphi + b_2 \operatorname{sh}\varphi + a_1, \tag{4}$$

$$c_2 = b_1 \operatorname{sh}\varphi + b_2 \operatorname{ch}\varphi + a_2, \tag{4'}$$

$$\theta = \varphi + \psi. \tag{4''}$$

Эти формулы можно истолковать так: обозначим через $\mathbf{a}$ вектор (a_1, a_2) и через $\mathbf{a}_\varphi$ вектор, в который переходит $\mathbf{a}$ при гиперболическом вращении на «угол» φ:

$$\mathbf{a}_\varphi = (a_1 \operatorname{ch}\varphi + a_2 \operatorname{sh}\varphi,\ a_1 \operatorname{sh}\varphi + a_2 \operatorname{ch}\varphi).$$

Тогда

$$g(\mathbf{a}, \varphi)\, g(\mathbf{b}, \psi) = g(\mathbf{a} + \mathbf{b}_\varphi, \varphi + \psi). \tag{5}$$

Легко видеть, что параметры $a_1 = a_2 = \varphi = 0$ задают тождественное движение и что движением, обратным $g(\mathbf{a}, \varphi)$, является $g(-\mathbf{a}_{-\varphi}, -\varphi)$.

Группу $MH(2)$ можно реализовать как группу матриц третьего порядка. Для этого каждому движению вида (1) поставим в соответствие матрицу

$$A(g) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi & a_1 \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Непосредственная проверка показывает, что это соответствие является представлением группы $MH(2)$, т. е., что

$$A(g_1 g_2) = A(g_1)\, A(g_2). \tag{7}$$

Представление $A(g)$ приводимо, но не вполне приводимо.

Отметим две подгруппы группы $MH(2)$. Первая из них состоит из движений псевдоевклидовой плоскости, оставляющих неподвижной точку (0, 0). Эти движения называются *гиперболическими вращениями*. Они задаются формулами

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ x_2' &= x_1 \operatorname{sh} \varphi + x_2 \operatorname{ch} \varphi. \end{aligned} \tag{8}$$

Иными словами, для гиперболических вращений имеем $g = g(0,\ 0,\ \varphi)$ При гиперболических вращениях каждая точка псевдоевклидовой плоскости движется по линии $r^2 = \mathrm{const}$, т. е. по гиперболе $x_1^2 - x_2^2 = r^2$. Если $r^2 > 0$, то точки гиперболы имеют координаты $x_1 = r \operatorname{ch} \theta$, $x_2 = r \operatorname{sh} \theta$. Из формулы (8) видно, что гиперболическое вращение переводит точку $M(x_1,\ x_2)$ в точку $N(x_1',\ x_2')$, где

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= r \operatorname{ch}(\varphi + \theta), \\ x_2' &= r \operatorname{sh}(\varphi + \theta). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Отсюда следует, что мера $d\theta$ на гиперболе инвариантна относительно гиперболических вращений. Будем обозначать подгруппу гиперболических вращений через Ω.

Вторая подгруппа состоит из параллельных переносов:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + a_1, \\ x_2' &= x_2 + a_2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для параллельных переносов $g = g(a_1,\ a_2,\ 0)$.

Элементы подгруппы A параллельных переносов находятся во взаимно однозначном соответствии с точками псевдоевклидовой плоскости. Поэтому элементы подгруппы Ω гиперболических вращений можно рассматривать как автоморфизмы подгруппы A. Равенство

$$g(\mathbf{a},\ \varphi)\, g(\mathbf{b},\ \psi) = g(\mathbf{a} + \mathbf{b}_\varphi,\ \varphi + \psi)$$

показывает, что группа $MH(2)$ является скрещенным произведением подгруппы B и группы ее автоморфизмов Ω.

3. Параметризация группы $MH(2)$. Каждый элемент g группы $MH(2)$ может быть задан тремя вещественными числами φ, a_1, a_2, изменяющимися от $-\infty$ до ∞. Во многих случаях удобнее другая параметризация этой группы, основанная на следующем предложении:

Каждый элемент $g = g(a_1,\ a_2,\ \varphi)$ группы $MH(2)$ может быть представлен в виде

$$g = g(0,\ 0,\ \psi)\, hg(0,\ 0,\ \varphi - \psi), \tag{1}$$

где h — параллельный перенос одного из следующих видов:

$$\left.\begin{aligned} g&=g(\pm r,\ 0,\ 0), && r>0,\\ g&=g(0,\ \pm r,\ 0), && r>0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

или

$$g=(\pm 1,\ \pm 1,\ 0) \tag{3}$$

(в последнем случае возможны все четыре комбинации знаков).

В самом деле, пусть, например, $-a_1<a_2<a_1$. Положим

$$a_1=r\operatorname{ch}\psi,$$
$$a_2=r\operatorname{sh}\psi,$$

где $r^2=a_1^2-a_2^2$, $r>0$. Тогда

$$g(0,\ 0,\ \psi)\,g(r,\ 0,\ 0)=g(r\operatorname{ch}\psi,\ r\operatorname{sh}\psi,\ \psi)\equiv g(\mathbf{a},\ \psi),$$

и потому

$$g(0,\ 0,\ \psi)\,g(r,\ 0,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \varphi-\psi)=$$
$$=g(\mathbf{a},\ \psi)\,g(\mathbf{0},\ \varphi-\psi)=g(\mathbf{a},\ \varphi)\equiv g(a_1,\ a_2,\ \varphi).$$

Аналогично проводится доказательство в остальных случаях. В частности, при $r>0$.

$$g(\pm r,\ \pm r,\ \varphi)=g(0,\ 0,\ \psi)\,g(\pm 1,\ \pm 1,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \varphi-\psi), \tag{4}$$

где $e^{\psi}=r$.

Построенная параметризация группы $MH(2)$ аналогична параметризации группы $M(2)$, рассмотренной в п. 2 § 1 главы IV.

Движения вида

$$g(0,\ 0,\ \psi)\,g(r,\ 0,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \varphi-\psi),\qquad r>0, \tag{5}$$

переводят точки квадранта $-x_1<x_2<x_1$ в точки того же квадранта. Следовательно, эти движения образуют *полугруппу* в группе $MH(2)$ [1]). Аналогичное утверждение справедливо для движений вида

$$g(0,\ 0,\ \psi)\,g(-r,\ 0,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \varphi-\psi) \tag{6}$$

и т. д.

Каждая из этих подгрупп состоит из движений, переводящих точки некоторого квадранта в точки того же квадранта.

4. Алгебра Ли группы $MH(2)$. Построим *алгебру Ли* группы $MH(2)$. В качестве базиса этой алгебры выберем касательные матрицы к одно-

---

[1]) Множество элементов группы образует *полугруппу*, если вместе с любыми двумя элементами ему принадлежит их произведение.

параметрическим подгруппам Ω_1, Ω_2, Ω_3, состоящим из матриц вида

$$\omega_1(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\omega_2(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

и

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0\\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Мы имеем

$$a_1=\left.\frac{d\omega_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Точно так же находим

$$a_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

и

$$a_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Соотношения коммутации для матриц a_1, a_2, a_3 имеют следующий вид:

$$[a_1,\ a_2]=0, \tag{7}$$

$$[a_2,\ a_3]=-a_1, \tag{7'}$$

$$[a_3,\ a_1]=a_2. \tag{7''}$$

Во многих случаях вместо матриц a_1 и a_2 удобнее использовать их линейные комбинации:

$$h_+=a_1-a_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

и

$$h_-=a_1+a_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8'}$$

Они являются касательными матрицами к однопараметрическим подгруппам Ξ_+ и Ξ_-, состоящим соответственно из матриц

$$\xi_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

и

$$\xi_-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9'}$$

Соотношения коммутации для матриц h_+, h_-, a_3 имеют следующий вид:

$$[h_+,\ h_-] = 0, \tag{10}$$

$$[h_+,\ a_3] = h_+, \tag{10'}$$

$$[h_-,\ a_3] = h_-. \tag{10''}$$

§ 3. Представления группы $MH(2)$

1. Неприводимые представления. Неприводимые представления группы $MH(2)$ аналогичны представлениям группы $M(2)$ движений евклидовой плоскости, которые были описаны в п. 1 § 2 главы IV. Каждое такое представление задается комплексным числом R, отличным от нуля. Представление $T_R(g)$ группы $MH(2)$ строится в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(\mathbf{x})$ на гиперболе $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Пусть $g = g(a_1, a_2, \varphi)$ — элемент группы $MH(2)$. Обозначим через $h(-\varphi)$ гиперболическое вращение

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \operatorname{ch} \varphi - x_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ x_2' &= -x_1 \operatorname{sh} \varphi + x_2 \operatorname{ch} \varphi \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и через $\mathbf{a}$ — вектор (a_1, a_2). Оператор представления $T_R(g)$ зададим формулой

$$T_R(g) f(\mathbf{x}) = e^{-R[\mathbf{a},\ \mathbf{x}]} f(h(-\varphi)\mathbf{x}) \tag{2}$$

(напомним, что гиперболическое вращение $h(-\varphi)$ переводит точки гиперболы в точки той же гиперболы).

Не составляет труда проверить, что

$$T_R(g_1)\, T_R(g_2) = T_R(g_1 g_2), \tag{3}$$

и потому $T_R(g)$ является представлением группы $MH(2)$. Точки гиперболы $x_1^2 - x_2^2 = 1$ можно записать в виде $x_1 = \operatorname{ch}\theta$, $x_2 = \operatorname{sh}\theta$. Каждой функции $f(\mathbf{x})$ на гиперболе поставим в соответствие функцию

$$\hat{f}(\theta) = f(\operatorname{ch}\theta,\ \operatorname{sh}\theta) \tag{4}$$

вещественного переменного θ. В пространстве этих функций представление $T_R(g)$ задается следующим образом:

$$T_R(g)\hat{f}(\theta)=e^{R(-a_1\operatorname{ch}\theta+a_2\operatorname{sh}\theta)}\hat{f}(\theta-\varphi). \tag{5}$$

Введем в пространстве функций $\hat{f}(\theta)$ скалярное произведение, положив

$$(\hat{f}_1, \hat{f}_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(\theta)\overline{\hat{f}_2(\theta)}\,d\theta. \tag{6}$$

Очевидно, что представление $T_R(g)$ унитарно относительно этого скалярного произведения тогда и только тогда, когда R — чисто мнимое число.

2. Другая реализация представлений $T_R(g)$ группы $MH(2)$. Опишем другую реализацию представлений $T_R(g)$ группы $MH(2)$. При этой реализации гиперболическим вращениям будут соответствовать операторы умножения на функцию. Она строится следующим образом.

Каждой функции

$$\hat{f}(\theta)=f(\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta) \tag{1}$$

из пространства представления поставим в соответствие ее преобразование Фурье $F(\lambda)$:

$$F(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\theta)\,e^{\lambda\theta}\,d\theta. \tag{2}$$

Интеграл (2) сходится при всех комплексных значениях λ, поскольку функции $\hat{f}(\theta)$ по условию финитны и бесконечно дифференцируемы. При этом функция $F(\lambda)$ аналитична во всей комплексной области, удовлетворяет неравенству вида

$$|F(\lambda_1+i\lambda_2)|<Ce^{a|\lambda_1|} \tag{3}$$

и быстро убывает на каждой прямой, параллельной мнимой оси (ср. п. 1 § 4 главы II).

Как было показано в п. 1 § 4 главы II, формула обращения имеет вид

$$\hat{f}(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(\mu)\,e^{-\mu\theta}\,d\mu. \tag{4}$$

Обозначим через $Q_R(g)$ оператор в пространстве функций $F(\lambda)$, соответствующий оператору $T_R(g)$ в пространстве функций $\hat{f}(\theta)$. Операторы $Q_R(g)$ задают другую реализацию представления $T_R(g)$ группы $MH(2)$.

Найдем вид оператора $Q_R(g)$ для элементов вида $g(0, 0, \varphi)$. По формуле (5) п. 1 оператор $T_R(g(0, 0, \varphi))$ переводит $\hat{f}(\theta)$ в $\hat{f}(\theta-\varphi)$. Поэтому при $g=g(0, 0, \varphi)$

$$Q_R(g)F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\theta-\varphi)e^{\lambda\theta}\,d\theta=e^{\lambda\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\theta)e^{\lambda\theta}\,d\theta=e^{\lambda\varphi}F(\lambda). \quad (5)$$

Итак, *гиперболическим вращениям соответствуют операторы умножения на* $e^{\lambda\varphi}$.

По формуле (1) п. 3 § 1 любой элемент группы $MH(2)$ может быть представлен в виде произведения гиперболических вращений и параллельного переноса на векторы вида $(\pm r, 0)$, $(0, \pm r)$ или $(\pm 1, \pm 1)$. Поскольку операторы, соответствующие гиперболическим вращениям, нами уже найдены, осталось найти операторы, соответствующие параллельным переносам указанного вида.

Пусть $g=g(r, 0, 0)$, $r>0$. Тогда по формуле (5) п. 1

$$T_R(g)\hat{f}(\theta)=e^{-Rr\operatorname{ch}\theta}\hat{f}(\theta), \quad (6)$$

и потому

$$Q_R(g)F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Rr\operatorname{ch}\theta+\lambda\theta}\hat{f}(\theta)\,d\theta. \quad (7)$$

В силу формулы обращения (4) имеем

$$\hat{f}(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(\mu)e^{-\mu\theta}\,d\mu$$

и потому

$$Q_R(g)F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Rr\operatorname{ch}\theta}\,d\theta\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(\mu)e^{(\lambda-\mu)\theta}\,d\mu. \quad (8)$$

Если $\operatorname{Re}R>0$, то интеграл (8) абсолютно сходится при всех λ. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования. Следовательно,

$$Q_R(g)F(\lambda)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K(\lambda, \mu; R; r)F(\mu)\,d\mu, \quad (9)$$

где положено

$$K(\lambda, \mu; R; r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Rr\operatorname{ch}\theta+(\lambda-\mu)\theta}\,d\theta. \quad (10)$$

Тем самым доказано, что *при* $g=g(r, 0, 0)$, $r>0$, $\operatorname{Re}R>0$ *оператор* $Q_R(g)$ *является интегральным преобразованием с ядром*

$K(\lambda, \mu; R; r)$. Ниже это ядро будет выражено через так называемые функции Макдональда, тесно связанные с функциями Бесселя.

Аналогичный вид имеет $Q_R(g)F(\lambda)$ и в случае, когда $\operatorname{Re} R < 0$ и $g = g(-r, 0, 0)$, $r > 0$. В этом случае в формуле (10) надо заменить r на $-r$.

Пользуясь полученными формулами, легко получить выражение оператора $Q_R(g)$ для любого элемента $g = g(a_1, a_2, \varphi)$, такого, что $-a_1 < a_2 < a_1$ (как было отмечено в п. 3 § 1, такие элементы образуют полугруппу в группе $MH(2)$). Если $-a_1 < a_2 < a_1$, то элемент $g = g(a_1, a_2, \varphi)$ можно представить в виде

$$g = g(0, 0, \psi)\, g(r, 0, 0)\, g(0, 0, \varphi - \psi), \tag{11}$$

где $r > 0$ (см. п. 3 § 1). Элементу $g(r, 0, 0)$ соответствует интегральный оператор с ядром $K(\lambda, \mu; R; r)$, а элементам $g(0, 0, \varphi - \psi)$ и $g(0, 0, \psi)$ — операторы умножения на $e^{\mu(\varphi-\psi)}$ и $e^{\lambda\psi}$ соответственно. Поэтому

$$Q_R(g)F(\lambda) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \mu; R; g)\, F(\mu)\, d\mu, \tag{12}$$

где

$$K(\lambda, \mu; R; g) = e^{(\lambda-\mu)\psi + \mu\varphi} K(\lambda, \mu; R; r). \tag{13}$$

Аналогично записываются при $\operatorname{Re} R < 0$ операторы $Q_R(g(a_1, a_2, \varphi))$ в случае $a_1 < a_2 < -a_1$.

Однако для элементов вида $g(0, \pm r, 0)$ при $\operatorname{Re} R \neq 0$ выражение в виде интегрального оператора не получается, поскольку в этом случае мы приходим к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm Rr \operatorname{sh} \theta + (\lambda - \mu)\theta}\, d\theta, \tag{14}$$

который расходится при $\operatorname{Re} R \neq 0$ для всех значений λ и μ. Случай $\operatorname{Re} R = 0$ будет изучен ниже.

Особенно простой вид принимают ядра операторов $Q_R(g)$, если g является параллельным переносом в направлении прямых $x_1 = \pm x_2$.

Если $\operatorname{Re} R > 0$, то интегралы для элементов $g = g(r, -r, 0)$ и $g = g(r, r, 0)$, $r > 0$ сходятся. Именно, при $g = g(r, -r, 0)$

$$K(\lambda, \mu; R; g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-Rre^{\theta} + (\lambda - \mu)\theta}\, d\theta.$$

Подстановка $e^{\theta} = t$ преобразует этот интеграл к виду

$$K(\lambda, \mu; R; g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-Rt} t^{\lambda - \mu - 1}\, dt. \tag{15}$$

Как было показано в п. 4 § 1, этот интеграл сходится при $\operatorname{Re}(\lambda-\mu)>0$ и равен $\frac{\Gamma(\lambda-\mu)}{2\pi i}(Rr)^{\mu-\lambda}$. Поэтому при $g=g(r, -r, 0)$, $r>0$,

$$\left.\begin{aligned} K(\lambda, \mu; R; g)=\frac{\Gamma(\lambda-\mu)}{2\pi i}(Rr)^{\mu-\lambda}, \\ \operatorname{Re}R>0, \quad \operatorname{Re}(\lambda-\mu)>0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Точно так же доказывается, что если $g=g(r, r, 0)$, то

$$\left.\begin{aligned} K(\lambda, \mu; R; g)=\frac{\Gamma(\mu-\lambda)}{2\pi i}(Rr)^{\lambda-\mu}, \\ \operatorname{Re}R>0, \quad \operatorname{Re}(\mu-\lambda)>0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

если $g=g(-r, r, 0)$, то

$$\left.\begin{aligned} K(\lambda, \mu; R; g)=\frac{\Gamma(\lambda-\mu)}{2\pi i}(-Rr)^{\mu-\lambda}, \\ \operatorname{Re}R<0, \quad \operatorname{Re}(\lambda-\mu)>0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и если $g=g(-r, -r, 0)$, то

$$\left.\begin{aligned} K(\lambda, \mu; R; g)=\frac{\Gamma(\mu-\lambda)}{2\pi i}(-Rr)^{\lambda-\mu}, \\ \operatorname{Re}R<0, \quad \operatorname{Re}(\mu-\lambda)>0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

3. Унитарный случай. Нам осталось рассмотреть случай, когда R — чисто мнимое число, т. е. когда представление $Q_R(g)$ унитарно (см. п. 1). Пусть $R=\rho i$, $\rho>0$. Тогда элементу $g=g(r, 0, 0)$ соответствует оператор

$$Q_{\rho i}(g)F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-r\rho i\operatorname{ch}\theta}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(\mu)e^{(\lambda-\mu)\theta}\,d\mu. \tag{1}$$

Интеграл (1) не является абсолютно сходящимся, но можно доказать, что при $-1<\operatorname{Re}(\lambda-\mu)<1$ перестановка порядка интегрирования допустима, и потому

$$Q_{\rho i}(g)F(\lambda)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}K(\lambda, \mu; \rho i; g)F(\mu)\,d\mu, \tag{2}$$

где

$$K(\lambda, \mu; \rho i; g)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-r\rho i\operatorname{ch}\theta+(\lambda-\mu)\theta}\,d\theta, \tag{3}$$

$$-1<\operatorname{Re}(\lambda-\mu)<1.$$

Аналогичный вид имеет оператор $Q_{\rho l}(g)$ при $g=g(0, \pm r, 0)$. В этом случае ядро задается интегралом

$$K(\lambda, \mu; \rho l; g)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm r\rho l \operatorname{sh}\theta+(\lambda-\mu)\theta}\,d\theta. \tag{4}$$

4. Функции Макдональда и Ганкеля. Введем новую специальную функцию $K_\nu(z)$, положив при любом комплексном значении ν и $\operatorname{Re} z>0$,

$$K_\nu(z)=\int\limits_0^{\infty} e^{-z\operatorname{ch} t}\operatorname{ch}\nu t\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z\operatorname{ch} t\pm\nu t}\,dt. \tag{1}$$

Очевидно, что $K_\nu(z)$ является аналитической функцией от ν и z, если z изменяется в указанной полуплоскости. При $\operatorname{Re} z\leqslant 0$ определим $K_\nu(z)$ с помощью аналитического продолжения по z. Тем самым $K_\nu(z)$ однозначно определено в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $-\infty<z<0$. Функция $K_\nu(z)$ называется *функцией Макдональда* от z с индексом ν. Из равенства (1) следует, что

$$K_\nu(z)=K_{-\nu}(z). \tag{2}$$

Функции Макдональда тесно связаны с так называемыми *функциями Ганкеля* первого и второго рода. Эти функции при $x>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$ определяются формулами

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\operatorname{ch} t-\nu t}\,dt \tag{3}$$

и

$$H_\nu^{(2)}(x)=-\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\operatorname{ch} t-\nu t}\,dt \tag{3'}$$

(нетрудно показать, что при указанных условиях эти интегралы сходятся). Сравнивая формулы (3) и (3′) с формулой (1), убеждаемся, что

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{2e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}K_\nu\left(e^{-\frac{\pi i}{2}}x\right) \tag{4}$$

и

$$H_\nu^{(2)}(x)=-\frac{2e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}K_\nu\left(e^{\frac{\pi i}{2}}x\right). \tag{4'}$$

Иными словами, функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ с точностью до числового множителя совпадают со значениями функции Макдональда на отрицательной и положительной мнимой полуосях.

Пользуясь формулами (4) и (4′), можно продолжить функции Ганкеля на всю комплексную плоскость. При этом для функции $H_\nu^{(1)}(z)$ плоскость надо разрезать вдоль луча $-\infty < \operatorname{Im} z < 0$, а для функции $H_\nu^{(2)}(z)$ — вдоль луча $0 < \operatorname{Im} z < \infty$.

Нам понадобится в дальнейшем еще интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \operatorname{sh} t - \nu t}\, dt, \qquad \text{где } x > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1. \tag{5}$$

Для вычисления указанного интеграла сделаем замену переменной $t = u + \frac{\pi}{2} i$. Так как $\operatorname{sh}\left(u + \frac{\pi}{2} i\right) = i \operatorname{ch} u$, то получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \operatorname{sh} t - \nu t}\, dt = e^{-\frac{\pi \nu i}{2}} \int_{-\infty - \frac{\pi}{2} i}^{\infty - \frac{\pi}{2} i} e^{-x \operatorname{ch} u - \nu u}\, du.$$

Сдвинем контур интегрирования на $\frac{\pi}{2} i$ и используем формулу (1). Мы получим при $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \operatorname{sh} t - \nu t}\, dt = 2e^{-\frac{\pi \nu i}{2}} K_\nu(x) \equiv \pi i H_\nu^{(1)}(ix). \tag{6}$$

Точно так же доказывается, что при $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix \operatorname{sh} t - \nu t}\, dt = 2e^{\frac{\pi \nu i}{2}} K_\nu(x) \equiv -\pi i H_\nu^{(2)}(-ix) = \pi i H_{-\nu}^{(1)}(ix). \tag{7}$$

Из формул (4) и (4′) вытекает, что

$$H_\nu^{(2)}(x) = -e^{\nu \pi i} H_\nu^{(1)}(e^{\pi i} x). \tag{8}$$

В силу аналитичности функций Ганкеля эта формула верна во всей плоскости, разрезанной вдоль луча $0 < \operatorname{Im} z < \infty$.

Из равенства $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ и формул (4) и (4′) следует, что

$$H_\nu^{(2)}(z) = -H_{-\nu}^{(1)}(e^{\pi i} z) = e^{\nu \pi i} H_{-\nu}^{(2)}(z). \tag{9}$$

Аналогично,

$$H_\nu^{(1)}(z) = -H_{-\nu}^{(2)}(e^{-\pi i} z) = e^{-\nu \pi i} H_{-\nu}^{(1)}(z). \tag{9′}$$

5. Выражение ядер представления $Q_R(g)$ через функцию Макдональда. Из формул (9), (10) п. 2 и (1) п. 4 вытекает, что при $g = g(r, 0, 0)$, $\operatorname{Re} R > 0$ оператор $Q_R(g)$ является интегральным оператором, ядро которого выражается следующим образом через функцию Макдональда:

$$K(\lambda,\ \mu;\ R;\ r)=\frac{1}{\pi i}K_{\lambda-\mu}(Rr). \tag{1}$$

В п. 3 было показано, что при $\operatorname{Re} R=0$ *все* операторы $Q_R(g)$ являются интегральными операторами. В этом случае удобно выражать ядра операторов через функции Ганкеля. Пусть $R=i\rho$, $\rho>0$. Тогда по формуле (7) п. 4 для элемента $g=g(r,\ 0,\ 0)$ имеем

$$K(\lambda,\ \mu;\ i\rho;\ g)=-\frac{e^{\frac{(\lambda-\mu)\pi i}{2}}}{2}H^{(2)}_{\mu-\lambda}(r\rho), \tag{2}$$

где $-1<\operatorname{Re}(\lambda-\mu)<1$.

Аналогично, для элемента $g=g(-r,\ 0,\ 0)$ получаем

$$K(\lambda,\ \mu;\ i\rho;\ g)=\frac{e^{\frac{(\mu-\lambda)\pi i}{2}}}{2}H^{(1)}_{\mu-\lambda}(r\rho), \tag{2'}$$

для элемента $g=g(0,\ r,\ 0)$

$$K(\lambda,\ \mu;\ i\rho;\ g)=\frac{1}{2}H^{(1)}_{\mu-\lambda}(ir\rho)=\frac{1}{\pi i}e^{\frac{(\lambda-\mu)\pi i}{2}}K_{\mu-\lambda}(r\rho) \tag{2''}$$

и для элемента $g=g(0,\ -r,\ 0)$

$$K(\lambda,\ \mu;\ i\rho;\ g)=\frac{1}{2}H^{(1)}_{\lambda-\mu}(ir\rho)=\frac{1}{\pi i}e^{\frac{(\mu-\lambda)\pi i}{2}}K_{\lambda-\mu}(r\rho). \tag{2'''}$$

Для элементов вида $g=g(\pm r,\ \pm r,\ 0)$ справедливы формулы (16) — (19) п. 2, в которых надо заменить R на $i\rho$.

6. Инфинитезимальные операторы представлений $T_R(g)$ и $Q_R(g)$. Вычислим инфинитезимальные операторы представлений $T_R(g)$ и $Q_R(g)$. Сначала найдем оператор, соответствующий однопараметрической подгруппе Ξ_+:

$$\xi_+(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Оператор $T_R(\xi_+(t))$ переводит функцию $\hat{f}(\theta)$ в функцию

$$T_R(\xi_+(t))\hat{f}(\theta)=e^{-Rte^{\theta}}\hat{f}(\theta). \tag{2}$$

Продифференцировав это равенство по t и положив $t=0$, получим

$$A_+\hat{f}(\theta)\equiv\left.\frac{dT_R(\xi_+(t))\hat{f}(\theta)}{dt}\right|_{t=0}=-Re^{\theta}\hat{f}(\theta). \tag{3}$$

Точно так же доказывается, что подгруппе Ξ_-:

$$\xi_-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

соответствует при представлении $T_R(g)$ инфинитезимальный оператор

$$A_-\hat{f}(\theta) = -Re^{-\theta}\hat{f}(\theta), \tag{5}$$

а подгруппе Ω_3 гиперболических вращений — оператор

$$A_3\hat{f}(\theta) = -\frac{d\hat{f}(\theta)}{d\theta}. \tag{6}$$

Выясним, во что переходят эти операторы при замене $\hat{f}(\theta)$ на $F(\lambda)$. Для этого надо найти преобразования Фурье функций $A_+\hat{f}(\theta)$, $A_-\hat{f}(\theta)$, $A_3\hat{f}(\theta)$. Мы имеем

$$H_+F(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A_+\hat{f}(\theta)\, e^{\lambda\theta}\, d\theta = -R\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)\, e^{(\lambda+1)\theta}\, d\theta = -RF(\lambda+1). \tag{7}$$

Точно так же доказывается, что

$$H_-F(\lambda) = -RF(\lambda-1). \tag{8}$$

Наконец, интегрируя по частям, получаем

$$H_3F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A_3\hat{f}(\theta)\, e^{\lambda\theta}\, d\theta =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{f}(\theta)}{d\theta}\, e^{\lambda\theta}\, d\theta = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)\, e^{\lambda\theta}\, d\theta = \lambda F(\lambda). \tag{9}$$

7. Неприводимость представлений $T_R(g)$. Пользуясь полученными выражениями для инфинитезимальных операторов представлений $T_R(g)$, легко доказать, что при $R \neq 0$ эти представления неприводимы. Мы ограничимся доказательством операторной неприводимости этих представлений. Итак, пусть S — оператор, перестановочный со всеми операторами представления $T_R(g)$. Тогда он должен быть перестановочным и с операторами A_+, A_-, A.

Оператор H_+ является оператором умножения на $-Re^{\theta}$ в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций на прямой. Пусть оператор S перестановочен с A_+. Тогда он перестановочен и со всеми операторами $A_+^n = -R^n e^{n\theta}$. Но на любом конечном отрезке линейными комбинациями функций $e^{n\theta}$ можно равномерно аппроксимировать любую непрерывную функцию. Поэтому S

перестановочен со всеми операторами умножения на непрерывные функции и, следовательно, является оператором умножения на бесконечно дифференцируемую функцию

$$S\hat{f}(\theta)=s(\theta)\hat{f}(\theta). \tag{1}$$

Из перестановочности S с $A_3=-\frac{d}{d\theta}$ получаем $s'(\theta)=0$ и потому $s(\theta)=\text{const}$.

Итак, мы доказали, что любой оператор, перестановочный со всеми операторами $T_R(g)$, является оператором умножения на постоянное число, и потому представление $T_R(g)$ операторно неприводимо. Можно доказать, что эти представления и пространственно неприводимы.

В случае $R=0$ представление $T_R(g)$ имеет вид

$$T_0(g)\hat{f}(\theta)=\hat{f}(\theta-\varphi), \tag{2}$$

т. е. сводится к регулярному представлению аддитивной группы вещественных чисел. Преобразование Фурье по θ задает разложение этого представления в непрерывную прямую сумму одномерных представлений.

§ 4. Рекуррентные формулы и дифференциальное уравнение для функций Макдональда и Ганкеля

1. Соотношения между инфинитезимальными операторами и операторами представления. Положим для определенности, что $R=1$. Рассмотрим элемент

$$g=g(r,\ 0,\ 0)\,g(t,\ t,\ 0)=g(r+t,\ t,\ 0), \tag{1}$$

$r>0$, $t>0$, группы $MH(2)$. Как было показано в п. 3 § 1, этот элемент можно представить в виде

$$g=g(0,\ 0,\ \psi)\,g(\rho,\ 0,\ 0)\,g(0,\ 0,\ -\psi), \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\rho\,\mathrm{ch}\,\psi&=r+t,\\ \rho\,\mathrm{sh}\,\psi&=t\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и потому

$$\left.\begin{aligned}\rho^2&=r^2+2rt,\\ \mathrm{th}\,\psi&=\frac{t}{r+t}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что [1])

$$Q(r,\ 0,\ 0)\,Q(t,\ t,\ 0)=Q(0,\ 0,\ \psi)\,Q(\rho,\ 0,\ 0)\,Q(0,\ 0,\ -\psi). \tag{5}$$

[1]) Для краткости мы пишем $Q(a,\ b,\ \varphi)$ вместо $Q_R(g(a,\ b,\ \varphi))$.

Продифференцируем обе части равенства (5) по t и положим $t=0$. Из формул (4) при $t=0$ имеем $\rho=r$, $\psi=0$ и

$$\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{t=0}=1, \quad \left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{r}. \tag{6}$$

Далее, $Q(0, 0, 0)$ — единичный оператор и

$$\left.\frac{dQ(t, t, 0)}{dt}\right|_{t=0}=H_-, \tag{7}$$

а

$$\left.\frac{dQ(0, 0, \psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0}=H_3. \tag{8}$$

Поэтому в результате дифференцирования равенства (5) получим

$$Q(r, 0, 0)H_-=\frac{dQ(r, 0, 0)}{dr}+\frac{1}{r}\left(H_3Q(r, 0, 0)-Q(r, 0, 0)H_3\right). \tag{9}$$

Точно так же доказывается равенство

$$Q(r, 0, 0)H_+=\frac{dQ(r, 0, 0)}{dr}-\frac{1}{r}\left(H_3Q(r, 0, 0)-Q(r, 0, 0)H_3\right). \tag{10}$$

2. Рекуррентные формулы. Чтобы получить рекуррентные формулы для функций Макдональда, надо сравнить ядра операторов в правой и левой частях в формулах (9) и (10) п. 1.

При $R=1$ оператор H_- переводит функцию $F(\mu)$ в $-F(\mu-1)$. Оператор же $Q(r, 0, 0)$, $r>0$ при $R=1$ является интегральным оператором с ядром $\frac{1}{\pi i}K_{\lambda-\mu}(r)$. Поэтому $Q(r, 0, 0)H_-$ переводит $F(\mu)$ в

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{\lambda-\mu}(r)F(\mu-1)\,d\mu.$$

Заменяя $\mu-1$ на μ, убеждаемся, что $Q(r, 0, 0)H_-$ является интегральным оператором с ядром

$$-\frac{1}{\pi i}K_{\lambda-\mu-1}(r). \tag{1}$$

Точно так же доказывается, что ядро оператора в правой части формулы (9) п. 1 имеет вид

$$\frac{1}{\pi i}\left[\frac{dK_{\lambda-\mu}(r)}{dr}+\frac{\lambda-\mu}{r}K_{\lambda-\mu}(r)\right]. \tag{2}$$

Отсюда вытекает равенство

$$-K_{\lambda-\mu-1}(r)=\frac{dK_{\lambda-\mu}(r)}{dr}+\frac{\lambda-\mu}{r}K_{\lambda-\mu}(r). \tag{3}$$

Заменяя $\lambda-\mu$ на ν, получим

$$K_{\nu-1}(r)=-\frac{dK_\nu(r)}{dr}-\frac{\nu}{r}K_\nu(r). \tag{4}$$

Из аналитичности $K_\nu(z)$ в разрезанной плоскости вытекает, что это соотношение справедливо при всех z, не принадлежащих отрицательной полуоси

$$K_{\nu-1}(z)=-\frac{dK_\nu(z)}{dz}-\frac{\nu}{z}K_\nu(z). \tag{5}$$

Точно так же из формулы (10) получаем

$$K_{\nu+1}(z)=-\frac{dK_\nu(z)}{dz}+\frac{\nu}{z}K_\nu(z). \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$\frac{dK_\nu(z)}{dz}=-\frac{1}{2}[K_{\nu+1}(z)+K_{\nu-1}(z)] \tag{7}$$

и

$$\frac{\nu}{z}K_\nu(z)=\frac{1}{2}[K_{\nu+1}(z)-K_{\nu-1}(z)]. \tag{8}$$

Пользуясь формулами (4) и (4′) п. 4 § 3, получаем рекуррентные соотношения для функции Ганкеля:

$$\frac{dH_\nu^{(1,\,2)}(z)}{dz}=\frac{1}{2}[H_{\nu-1}^{(1,\,2)}(z)-H_{\nu+1}^{(1,\,2)}(z)] \tag{9}$$

и

$$\frac{\nu}{z}H_\nu^{(1,\,2)}(z)=\frac{1}{2}[H_{\nu-1}^{(1,\,2)}(z)+H_{\nu+1}^{(1,\,2)}(z)]. \tag{9′}$$

Ясно, что эти формулы верны и для любой линейной комбинации функций $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. Будем в дальнейшем обозначать такие линейные комбинации через $Z_\nu(z)$ и называть их *цилиндрическими функциями* от *z с индексом* ν. Таким образом,

$$\frac{dZ_\nu(z)}{dz}=\frac{1}{2}[Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)] \tag{10}$$

и

$$\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)=\frac{1}{2}[Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)]. \tag{10′}$$

3. Дифференциальные уравнения для функций Макдональда и Ганкеля. В п. 2 было показано, что

$$\left(-\frac{d}{dz}+\frac{\nu}{z}\right)K_\nu(z)=K_{\nu+1}(z) \tag{1}$$

и

$$\left(-\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z}\right)K_\nu(z)=K_{\nu-1}(z) \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{\nu+1}{z}\right)\left(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z}\right)K_\nu(z)=K_\nu(z). \tag{3}$$

Раскрывая скобки, получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка для функций Макдональда:

$$\frac{d^2K_\nu(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\,\frac{dK_\nu(z)}{dz}-\frac{z^2+\nu^2}{z^2}K_\nu(z)=0. \tag{4}$$

В силу инвариантности уравнения (4) относительно замены z на $-z$, функция $K_\nu(-z)$ также является решением уравнения (4).

Из соотношений (10) и (10′) п. 2 аналогичным путем получаем дифференциальное уравнение второго порядка для цилиндрических функций

$$\frac{d^2Z_\nu(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\,\frac{dZ_\nu(z)}{dz}+\frac{z^2-\nu^2}{z^2}Z_\nu(z)=0. \tag{5}$$

Частными решениями этого уравнения являются функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, а также функции $H_\nu^{(1)}(-z)$ и $H_\nu^{(2)}(-z)$.

4. Связь между функциями Ганкеля и функциями Бесселя. В п. 4 § 4 главы IV было показано, что функции Бесселя $J_n(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$y''+\frac{1}{z}y'+\frac{z^2-n^2}{z^2}y=0 \tag{1}$$

и, следовательно, являются цилиндрическими функциями от z с индексом n. Поэтому они являются линейными комбинациями функций $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(2)}(z)$. Покажем, что имеет место равенство

$$J_n(z)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(z)+H_n^{(2)}(z)]. \tag{2}$$

Сначала покажем, что

$$J_0(x)=\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(x)+H_0^{(2)}(x)]. \tag{3}$$

В п. 4 § 1 главы IV было отмечено, что уравнение Бесселя (1) имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, решение, ограниченное при $x=0$. Поэтому для доказательства равенства (3) достаточно показать, что

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}[H_0^{(1)}(x)+H_0^{(2)}(x)]=J_0(0)=1. \tag{4}$$

Но по формулам (4) и (4′) п. 4 § 3 имеем

$$\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(x)+H_0^{(2)}(x)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{ix\operatorname{ch}t}-e^{-ix\operatorname{ch}t}]\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(x\operatorname{ch}t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_x^{\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dy. \qquad (5)$$

Так как $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}$, то из равенства (5) вытекает равенство (4). Тем самым доказано соотношение (3).

Так как функции $J_n(x)$ и $\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(x)+H_n^{(2)}(x)]$ удовлетворяют одинаковым рекуррентным соотношениям (см. формулы (9) и (9′) п. 2 и формулы (2) и (3) п. 3 § 4 главы IV), то из равенства (3) вытекает, что

$$J_n(x)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(x)+H_n^{(2)}(x)] \qquad (6)$$

при всех целых значениях n.

Исходя из формулы (6), определим функцию Бесселя $J_\nu(z)$ при всех значениях ν формулой

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)]. \qquad (7)$$

Эта функция является одним из частных решений уравнения (5) п. 3. Отметим еще одно частное решение этого уравнения, называемое *функцией Неймана*. Оно определяется равенством

$$N_\nu(z)=\frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)]. \qquad (8)$$

Таким образом, имеют место формулы

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z) \qquad (9)$$

и

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z). \qquad (9')$$

§ 5. Функциональные соотношения для функций Ганкеля и Макдональда

1. Вводные замечания. В основе дальнейших рассмотрений лежит следующее замечание. Если $Q_R(g_i)$, $i=1, 2$, являются интегральными операторами с ядрами $K(\lambda, \mu; R, g_i)$, то в силу

$$Q_R(g_1g_2)=Q_R(g_1)\,Q_R(g_2) \qquad (1)$$

имеет место равенство

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} K(\lambda,\ \mu;\ R;\ g_1 g_1) F(\mu)\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} K(\lambda,\ \nu;\ R;\ g_1)\, d\nu \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\nu,\ \mu;\ R;\ g_2) F(\mu)\, d\mu. \quad (2)$$

Поэтому, при условии абсолютной сходимости интегралов, входящих в равенство (2), имеем

$$K(\lambda,\ \mu;\ R;\ g_1 g_2) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda,\ \nu;\ R;\ g_1) K(\nu,\ \mu;\ R;\ g_2)\, d\nu. \quad (3)$$

При различном выборе элементов g_1 и g_2 группы $MH(2)$ мы получим из равенства (3) различные соотношения для функций Макдональда и Ганкеля.

2. Интегральное представление. Имеет место следующее равенство:

$$g(r,\ -r,\ 0)\, g(r,\ r,\ 0) = g(2r,\ 0,\ 0). \quad (1)$$

В силу формулы (3) п. 1 из этого равенства при $\operatorname{Re} R > 0$ имеем

$$K(\lambda,\ \mu;\ R;\ g(2r,\ 0,\ 0)) =$$

$$= \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda,\ \nu;\ R;\ g(r,\ -r,\ 0)) K(\nu,\ \mu;\ R;\ g(r,\ r,\ 0))\, d\nu. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) выражения для ядер, полученные в п. 5 § 3, получим

$$K_{\lambda-\mu}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\lambda-\nu)\, \Gamma(\mu-\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu-\lambda-\mu} d\nu, \quad (3)$$

где $\operatorname{Re} z \equiv \operatorname{Re} 2Rr > 0$. При этом из условий сходимости интегралов, выражающих ядра операторов $Q_R(g(r,\ -r,\ 0))$ и $Q_R(g(r,\ r,\ 0))$ (см. п. 2 § 2) имеем $\operatorname{Re}\lambda > a$, $\operatorname{Re}\mu > a$.

Заменяя в равенстве (3) $\lambda-\mu$ на λ и $\lambda-\nu$ на ν, получаем

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\nu)\, \Gamma(\nu-\lambda) \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-2\nu} d\nu, \quad (3')$$

где $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\lambda$.

Чтобы получить интегральные представления функций $H_\lambda^{(1)}(z)$ и $H_\lambda^{(2)}(z)$, используем соотношения (4) и (4′) п. 4 § 3:

$$H_\lambda^{(1)}(z) = -\frac{e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}}}{2\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu-\lambda)\left[\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}z}{2}\right]^{\lambda-2\nu} d\nu, \tag{4}$$

где $\operatorname{Im} z > 0$, $a > 0$, $a > \operatorname{Re}\lambda$, и

$$H_\lambda^{(2)}(z) = \frac{e^{\frac{\lambda\pi i}{2}}}{2\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu-\lambda)\left[\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}z}{2}\right]^{\lambda-2\nu} d\nu, \tag{4′}$$

где $\operatorname{Im} z < 0$, $a > 0$, $a > \operatorname{Re}\lambda$.

Формулы (4) и (4′) сохраняют силу при $\operatorname{Im} z = 0$, $z \neq 0$. Поэтому при $x > 0$ имеем

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2}\left[H_\lambda^{(1)}(x) + H_\lambda^{(2)}(x)\right] =$$

$$= \frac{-i}{2\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu-\lambda)\sin(\nu-\lambda)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-2\nu} d\nu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-2\nu} d\nu, \tag{5}$$

где $x > 0$, $a > 0$, $a > \operatorname{Re}\lambda$.

3. Разложение в степенные ряды. Дополним в формуле (5) п. 2 контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в левой полуплоскости. Простая оценка показывает, что интеграл по этой полуокружности равен нулю.

Вычислим полученный интеграл с помощью вычетов. Согласно п. 5 § 1 функция $\Gamma(x)$ имеет полюсы в точках $x = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, причем

$$\underset{x=-n}{\text{Выч}}\ \Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Поэтому получаем

$$J_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2n}. \tag{1}$$

Точно так же из формул (3′), (4) и (4′) п. 2 получаем[1])

$$H_\lambda^{(1,2)}(z) = \\ = \pm\frac{1}{\pi i}\left[e^{\mp\lambda\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-k-\lambda)}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda-k)}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda+2k}\right], \quad (2)$$

$$K_\lambda(z) = \\ = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(-k-\lambda)}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\lambda-k)}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda+2k}\right]. \quad (3)$$

Из равенства (2) следует, что

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}\left[H_\lambda^{(1)}(z) - H_\lambda^{(2)}(z)\right] = \\ = -\frac{1}{\pi}\left[\cos\lambda\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-k-\lambda)}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda-k)}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda+2k}\right]. \quad (4)$$

Формулы (1)—(4) показывают, что единственной особой точкой для цилиндрических функций является точка ветвления $z=0$.

Разложения (2)—(4) верны лишь при нецелых значениях λ. Если $\lambda = n$ — целое число, то подынтегральная функция в интегралах (3′)—(5) п. 2 имеет полюсы второго порядка.

4. Преобразования Меллина. В формуле (3′) п. 2 заменим z на $2z$ и 2ν на ν, сравним ее с формулой обратного преобразования Меллина (см. п. 2 § 4 главы II). Мы получим, что функция $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda\right)$ является преобразованием Меллина для $x^{-\lambda}K_\lambda(2x)$, и потому

$$\int_0^\infty x^{\nu-\lambda-1}K_\lambda(x)\,dx = 2^{\nu-\lambda-2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda\right). \quad (1)$$

Аналогично, из формулы (5) п. 2 вытекает, что

$$\int_0^\infty x^{\nu-\lambda-1}J_\lambda(x)\,dx = \frac{2^{\nu-\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda-\frac{\nu}{2}+1\right)}. \quad (2)$$

---

[1]) В формуле (2) верхний знак относится к $H_\lambda^{(1)}(z)$, а нижний — к $H_\lambda^{(2)}(z)$.

Более общие формулы получаются следующим образом. Рассмотрим равенство

$$g(r_1, r_1, 0)\, g(r_2, 0, 0) = g(r_1+r_2, r_1, 0).$$

Если $r_1>0$, $r_2>0$, то

$$g(r_1+r_2, r_1, 0) = g(0, 0, \theta)\, g(r, 0, 0)\, g(0, 0, -\theta),$$

где

$$\operatorname{th}\theta = \frac{r_1}{r_1+r_2} \tag{3}$$

и

$$r^2 = r_2^2 + 2r_1 r_2 \tag{3'}$$

(см. п. 2, § 2).

Поскольку гиперболическому вращению на угол θ соответствует оператор умножения на $e^{\lambda\theta}$, то при $\operatorname{Re} R>0$ получаем

$$e^{(\lambda-\mu)\theta} K(\lambda, \mu; R; g(r, 0, 0)) =$$
$$= \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \nu; R; g(r_1, r_1, 0))\, K(\nu, \mu; R; g(r_2, 0, 0))\, d\nu, \tag{4}$$

где $a>\operatorname{Re}\lambda$. Подставим в эту формулу значения ядер, вычисленные в п. 5 § 3, и заменим $\lambda-\mu$ на λ, $\nu-\mu$ на ν, Rr_1 на z_1 и Rr_2 на z_2. Мы получим

$$e^{\lambda\theta} K_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\nu-\lambda)\, z_1^{\lambda-\nu} K_\nu(z_2)\, d\nu, \tag{5}$$

где $a>\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Re} z_1>0$, $\operatorname{Re} z_2>0$ и

$$\operatorname{th}\theta = \frac{z_1}{z_1+z_2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}\theta < \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

$$z^2 = z_2^2 + 2z_1 z_2, \qquad \operatorname{Re} z>0 \tag{6'}$$

(эти условия определяют z и θ однозначно).

В частности, при $z_1=z_2$ получаем

$$3^{\frac{\lambda}{2}} K_\lambda(z\sqrt{3}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\nu-\lambda)\, z^{\lambda-\nu} K_\nu(z)\, d\nu. \tag{7}$$

Формула (5) сохраняет силу при чисто мнимых значениях z_1 и z_2. Поэтому, полагая $z_1=\pm ix_1$, $z_2=\pm ix_2$, находим

$$e^{\lambda\theta} H_\lambda^{(1,2)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\nu-\lambda)\, x_1^{\lambda-\nu} H_\nu^{(1,2)}(x_2)\, d\nu, \tag{8}$$

где

$$\operatorname{th}\theta = \frac{x_1}{x_1+x_2}, \quad x^2 = x_2^2 + 2x_1 x_2, \tag{9}$$

$$x_1>0, \quad x_2>0, \quad a>\operatorname{Re}\lambda, \quad -1<a<1, \quad -1<\operatorname{Re}\lambda<1.$$

Формулу (8) можно вывести также, рассматривая движение

$$g(r_1,\ r_1,\ 0)\,g(r_2,\ 0,\ 0),\quad r_1>0,\quad r_2>0,$$

при чисто мнимом значении $R=\pm i\rho$ и используя формулы п. 5 § 3.

Аналогичные формулы возникают при рассмотрении движения

$$g(r_1,\ r_1,\ 0)\,g(-r_2,\ 0,\ 0)=g(r_1-r_2,\ r_1,\ 0),$$

где $r_1>0$, $r_2>0$. При $r_2<2r_1$ имеем

$$g(r_1-r_2,\ r_1,\ 0)=g(0,\ 0,\ \theta)\,g(0,\ r,\ 0)\,g(0,\ 0,\ -\theta),$$

где $\operatorname{th}\theta=\frac{r_1-r_2}{r_1}$, $r^2=2r_1r_2-r_2^2$. Полагая $R=i\rho$ и используя формулы п. 5 § 3, легко получаем отсюда

$$J_1\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\lambda+\nu)\,x_1^{-\nu}H_\nu^{(1)}(x_2)\,d\nu=\frac{2}{\pi i}\,e^{-\lambda\theta}x_1^{\lambda}K_\lambda(x),\tag{10}$$

где x_1, x_2, x, θ связаны формулами

$$\operatorname{th}\theta=\frac{x_1-x_2}{x_1},\quad x^2=2x_1x_2-x_2^2,\tag{11}$$

$$x_1>0,\quad 0<x_2<2x_1;\quad x>0,\quad a>-\operatorname{Re}\lambda,\quad -1<a<1.$$

Если же $x_2>2x_1>0$, то получаем равенство

$$J_1=e^{-\lambda\theta}x_1^{\lambda}H_{-\lambda}^{(1)}(x),\tag{12}$$

где

$$\operatorname{th}\theta=\frac{x_1}{x_1-x_2},\qquad x^2=-2x_1x_2+x_2^2,\tag{13}$$

$x>0$, а $a>-\operatorname{Re}\lambda$.

Наконец, при $x_2=2x_1$ получаем

$$J_1=\frac{\Gamma(-\lambda)}{\pi i}\,x_1^{2\lambda},\tag{14}$$

где $\operatorname{Re}\lambda<0$, $a>-\operatorname{Re}\lambda$.

Рассмотрим теперь движение

$$g(r_1,\ r_1,\ 0)\,g(0,\ -r_2,\ 0)=g(r_1,\ r_1-r_2,\ 0).$$

При $0<x_2<2x_1$ и $a>-\operatorname{Re}\lambda$, $-1<a<1$, $-1<\operatorname{Re}\lambda<1$ находим аналогично

$$J_2\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\lambda+\nu)\,x_1^{-\nu}e^{-\nu\pi i}K_\nu(x_2)\,d\nu=-\frac{\pi i}{2}\,e^{-\lambda\theta}x_1^{\lambda}H_\lambda^{(2)}(x),\tag{15}$$

где

$$\operatorname{th}\theta=\frac{x_1-x_2}{x_1},\qquad x^2=2x_1x_2-x_2^2,\qquad x>0.\tag{16}$$

При $0<2x_1<x_2$, $a>-\operatorname{Re}\lambda$, $-1<a<1$, $-1<\operatorname{Re}\lambda<1$ имеем

$$J_2=e^{-\lambda(\theta-\pi i)}x_1^{\lambda}K_{\lambda}(x), \tag{17}$$

где

$$\operatorname{th}\theta=\frac{x_1}{x_1-x_2},\qquad x^2=-2x_1x_2+x_2^2,\qquad x>0. \tag{18}$$

Наконец, при $x_2=2x_1$ получаем

$$J_2=\frac{\Gamma(-\lambda)\,e^{\lambda\pi i}}{2}\,x_1^{2\lambda}, \tag{19}$$

где $\operatorname{Re}\lambda<0$, $a>-\operatorname{Re}\lambda$, $-1<a<1$.

5. Преобразования Меллина (продолжение). Сравним формулу (5) п. 4 с формулой обращения для преобразования Меллина (см. п. 2 § 4 главы II). Мы видим, что $\Gamma(\nu-\lambda)K_\nu(x_2)$ является преобразованием Меллина для $x_1^{-\lambda}e^{\lambda\theta}K_\lambda(x)$ (как функции от x_1), т. е.

$$\int_0^\infty x_1^{\nu-\lambda-1}e^{\lambda\theta}K_\lambda(x)\,dx_1=\Gamma(\nu-\lambda)\,K_\nu(x_2), \tag{1}$$

где x_1, x_2, θ и x связаны соотношениями (6)—(6′) п. 4 и $\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\lambda$.

Точно так же доказывается, исходя из формул (10) и (12), что

$$\int_0^{\frac{1}{2}x_2} e^{-\lambda\theta}x_1^{\lambda+\nu-1}H_{-\lambda}^{(1)}(x)\,dx_1+\frac{2}{\pi i}\int_{\frac{1}{2}x_2}^{\infty} e^{-\lambda\hat{\theta}}x_1^{\lambda+\nu-1}K_\nu(\hat{x})\,dx=$$

$$=\Gamma(\lambda+\nu)\,H_\nu^{(1)}(x_2), \tag{2}$$

где

$$\operatorname{th}\theta=\frac{x_1}{x_1-x_2},\qquad x^2=-2x_1x_2+x_2^2,\qquad x>0, \tag{3}$$

$$\operatorname{th}\hat{\theta}=\frac{x_1-x_2}{x_1},\qquad \hat{x}^2=2x_1x_2-x_2^2,\qquad \hat{x}>0, \tag{3′}$$

и $\operatorname{Re}\nu>-\operatorname{Re}\lambda$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$, $-1<\operatorname{Re}\lambda<1$.

Из формул же (15) и (17) вытекает, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}x_2} e^{-\lambda(\theta-\pi i)}x_1^{\lambda+\nu-1}K_\lambda(x)\,dx_1-\frac{\pi i}{2}\int_{\frac{1}{2}x_2}^{\infty} e^{-\lambda\hat{\theta}}x_1^{\lambda+\nu-1}H_\lambda^{(2)}(\hat{x})\,dx_1=$$

$$=\Gamma(\lambda+\nu)\,e^{-\nu\pi i}K_{-\nu}(x_2), \tag{4}$$

где

$$\operatorname{th}\theta=\frac{x_1}{x_1-x_2},\quad x^2=-2x_1x_2+x_2^2,\qquad x>0, \tag{5}$$

$$\operatorname{th}\hat\theta=\frac{x_1-x_2}{x_1},\quad \hat x^2=2x_1x_2-x_2^2,\qquad \hat x>0 \tag{5'}$$

и $\operatorname{Re}\nu>-\operatorname{Re}\lambda$, $-1<\operatorname{Re}\lambda<1$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$.

Далее, дополним в формуле (5) п. 4 контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в левой полуплоскости. Вычисляя интеграл с помощью вычетов, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z_1^nK_{\lambda-n}(z_2)=e^{\lambda\theta}K_\lambda(z), \tag{6}$$

где $\operatorname{Re}z_1>0$, $\operatorname{Re}z_2>0$, а z_1, z_2, θ, z связаны формулами (6) и (6′) п. 4.

Аналогично, из формулы (10) и (12) п. 4 получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x_1^nH_{-\lambda-n}^{(1)}(x_2)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi i}e^{-\lambda\hat\theta}K_\lambda(\hat x), & \text{если } 0<x_2<2x_1,\\ e^{-\lambda\theta}H_{-\lambda}^{(1)}(x), & \text{если } 0<2x_1<x_2.\end{cases} \tag{7}$$

Значения θ, x, $\hat\theta$, $\hat x$ даются формулами (3) и (3′).

Наконец,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x_1^nK_{\lambda+n}(x_2)=\begin{cases}-\dfrac{\pi i}{2}e^{-\lambda\hat\theta}H_\lambda^{(2)}(\hat x), & \text{если } 0<x_2<2x_1,\\ e^{-\lambda(\theta-\pi i)}K_\lambda(x), & \text{если } 0<2x_1<x_2.\end{cases} \tag{8}$$

6. Теоремы сложения. Выведем теперь формулы, аналогичные формуле сложения для функций Бесселя (см. п. 1 § 4 главы IV). С этой целью рассмотрим движение

$$g=g(r_1,\ 0,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \theta)\,g(r_2,\ 0,\ 0),$$

где $r_1>0$, $r_2>0$. Это движение можно представить в виде

$$g=g(0,\ 0,\ \varphi)\,g(r,\ 0,\ 0)\,g(0,\ 0,\ \theta-\varphi),$$

где

$$\operatorname{th}\varphi=\frac{r_2\operatorname{sh}\theta}{r_2\operatorname{ch}\theta+r_1},\qquad r^2=r_1^2+2r_1r_2\operatorname{ch}\theta+r_2^2,\qquad r>0.$$

Так как гиперболическому вращению на угол θ соответствует оператор умножения на $e^{\lambda\theta}$, то

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K(\lambda,\ \nu;\ R;\ g(r_1,\ 0,\ 0))\,K(\nu,\ \mu;\ R;\ g(r_2(0,\ 0))\,e^{(\nu-\mu)\theta}\,d\nu=$$
$$=e^{(\lambda-\mu)\varphi}K(\lambda,\ \mu;\ R;\ g(r,\ 0,\ 0)). \tag{1}$$

Подставим в эту формулу значения ядер. Тогда при $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$ будет выполняться равенство

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\lambda-\nu}(z_1) K_\nu(z_2) e^{\nu\theta} d\nu = \pi i e^{\lambda\varphi} K_\lambda(z), \tag{2}$$

где

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{z_2 \operatorname{sh}\theta}{z_2 \operatorname{ch}\theta + z_1}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}\varphi < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

$$z^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 \operatorname{ch}\theta + z_2^2, \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{3'}$$

При чисто мнимых значениях z_1 и z_2, $z_1 = \pm i x_1$, $z_2 = \pm i x_2$, $x > 0$, $x_2 > 0$, получаем

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} H_{\lambda-\nu}^{(1,2)}(x_1) H_\nu^{(1,2)}(x_2) e^{\nu\theta} d\nu = \pm 2 e^{\lambda\varphi} H_\lambda^{(1,2)}(x), \tag{4}$$

где $-1 < a < 1$, $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 1$, $a - 1 < \operatorname{Re}(\lambda - \nu) < a + 1$,

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_2 \operatorname{sh}\theta}{x_2 \operatorname{ch}\theta + x_1}, \tag{5}$$

$$x^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 \operatorname{ch}\theta + x_2^2, \quad x > 0, \tag{5'}$$

причем верхний знак относится к функции $H_\lambda^{(1)}(x)$, а нижний — к $H_\lambda^{(2)}(x)$.

Рассматривая другие комбинации движений (например, $g(-r_1, 0, 0) g(0, 0, \theta) g(r_2, 0, 0)$, $g(r_1, 0, 0) g(0, 0, \theta) g(0, r_2, 0)$ и т. д.), получим ряд новых формул, аналогичных установленным. Опуская их подробный вывод, укажем окончательные результаты.

При $x_1 > x_2 > 0$ и $\frac{x_2}{x_1} < e^\theta < \frac{x_1}{x_2}$

$$J_1 \equiv \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\nu\theta} H_{\nu+\mu}^{(1)}(x_1) H_\nu^{(2)}(x_2) d\nu = -2 e^{\mu\varphi} H_\mu^{(1)}(x), \tag{6}$$

где $-1 < \operatorname{Re}\mu < 1$, $-1 < a < 1$, $-a - 1 < \operatorname{Re}\mu < 1 - a$, и

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_2 \operatorname{sh}\theta}{x_2 \operatorname{ch}\theta - x_1}, \tag{7}$$

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \operatorname{ch}\theta, \quad x > 0. \tag{7'}$$

При $x_1 > x_2 > 0$ и $e^\theta > \frac{x_1}{x_2}$

$$J_1 = \frac{4i}{\pi} e^{\mu\varphi} K_\mu(x), \tag{8}$$

где $-1 < a < 1$, $-a - 1 < \operatorname{Re}\mu < 1 - a$ и

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_2 \operatorname{ch}\theta - x_1}{x_2 \operatorname{sh}\theta}, \tag{9}$$

$$x^2 = 2x_1 x_2 \operatorname{ch}\theta - x_1^2 - x_2^2, \qquad x > 0. \tag{9'}$$

При $e^{\theta}<\frac{x_2}{x_1}$, $-1<a<1$, $-a-1<\operatorname{Re}\mu<1-a$,

$$J_1=\frac{4i}{\pi}e^{\mu(\varphi-\pi i)}K_{\mu}(x) \tag{10}$$

со значениями φ и x, даваемыми формулами (9) и (9′).

При $e^{\theta}=\frac{x_1}{x_2}$, $-1<a<1$, $-a-1<\operatorname{Re}\mu<1-a$, $\operatorname{Re}\mu>0$

$$J_1=\frac{2i}{\pi}\Gamma(\mu)\left(\frac{2x_1}{x_1^2-x_2^2}\right)^{\mu}. \tag{11}$$

При $e^{\theta}=\frac{x_2}{x_1}$, $-1<a<1$, $-a-1<\operatorname{Re}\mu<1-a$, $\operatorname{Re}\mu<0$

$$J_1=\frac{2ie^{-\mu\pi i}}{\pi}\Gamma(-\mu)\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1}\right)^{\mu}. \tag{12}$$

Далее, при $x_1>x_2>0$ и $\frac{x_2}{x_1}<e^{\theta}<\frac{x_1}{x_2}$

$$J_2\equiv\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-\nu(\theta+\pi i)}K_{\nu-\mu}(x_1)K_{\nu}(x_2)\,d\nu=\pi ie^{-\mu\varphi}K_{\mu}(x), \tag{13}$$

где x и φ задаются формулами (7) и (7′).

При $x_1>x_2>0$, $e^{\theta}>\frac{x_1}{x_2}$, $-1<\operatorname{Re}\mu<1$

$$J_2=\frac{\pi^2}{2}e^{-\mu\varphi}H_{-\mu}^{(2)}(x). \tag{14}$$

При $x_1>x_2>0$, $e^{\theta}<\frac{x_2}{x_1}$, $-1<\operatorname{Re}\mu<1$

$$J_2=-\frac{\pi^2}{2}e^{-\mu\varphi}H_{\mu}^{(1)}(x), \tag{15}$$

где x и φ задаются формулами (9) и (9′).

При $e^{\theta}=\frac{x_1}{x_2}$, $\operatorname{Re}\mu<0$

$$J_2=\frac{\pi i}{2}\Gamma(-\mu)\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1}\right)^{\mu}. \tag{16}$$

При $e^{\theta}=\frac{x_2}{x_1}$, $\operatorname{Re}\mu>0$

$$J_2=\frac{\pi i}{2}\Gamma(\mu)\left(\frac{2x_1}{x_1^2-x_2^2}\right)^{\mu}. \tag{17}$$

При $x_1>0$, $x_2>0$ и $e^{\theta}<\frac{x_2}{x_1}$, $a-1<\operatorname{Re}\mu<a+1$

$$J_3\equiv\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-\nu\theta}H_{\mu-\nu}^{(1)}(x_1)K_{\nu}(x_2)\,d\nu=2e^{-\mu\varphi}K_{\mu}(x), \tag{18}$$

где

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_1 + x_2 \operatorname{sh}\theta}{x_2 \operatorname{ch}\theta}, \tag{19}$$

$$x^2 = x_2^2 - 2x_1x_2 \operatorname{sh}\theta - x_1^2, \quad x > 0. \tag{19'}$$

При $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $e^\theta > \frac{x_2}{x_1}$, $a - 1 < \operatorname{Re}\mu < a + 1$, $-1 < \operatorname{Re}\mu < 1$

$$J_3 = \pi i e^{-\mu\varphi} H_\mu^{(1)}(x), \tag{20}$$

где

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_2 \operatorname{ch}\theta}{x_1 + x_2 \operatorname{sh}\theta}, \tag{21}$$

$$x^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 \operatorname{sh}\theta - x_2^2. \tag{21'}$$

При $e^\theta = \frac{x_2}{x_1}$, $a - 1 < \operatorname{Re}\mu < a + 1$, $\operatorname{Re}\mu > 0$

$$J_3 = \Gamma(\mu)\left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)^\mu. \tag{22}$$

При $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $e^\theta > \frac{x_1}{x_2}$, $a - 1 < \operatorname{Re}\mu < a + 1$

$$J_4 \equiv \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\nu\theta} H_{\mu-\nu}^{(2)}(x_1) K_\nu(x_2)\,d\nu = -2e^{\mu\varphi} K_\mu(x), \tag{23}$$

где

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_2 \operatorname{sh}\theta - x_1}{x_2 \operatorname{ch}\theta}, \tag{24}$$

$$x^2 = x_2^2 + 2x_1x_2 \operatorname{sh}\theta - x_1^2, \quad x > 0. \tag{24'}$$

При $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $e^\theta < \frac{x_1}{x_2}$, $a - 1 < \operatorname{Re}\mu < a + 1$, $-1 < \operatorname{Re}\mu < 1$

$$J_4 = \pi i e^{\mu\varphi} H_\mu^{(2)}(x), \tag{25}$$

где

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x_2 \operatorname{ch}\theta}{x_2 \operatorname{sh}\theta - x_1}, \tag{26}$$

$$x^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 \operatorname{sh}\theta - x_2^2, \quad x > 0. \tag{26'}$$

При $e^\theta = \frac{x_1}{x_2}$, $a - 1 < \operatorname{Re}\mu < a + 1$, $\operatorname{Re}\mu > 0$

$$J_4 = -\Gamma(\mu)\left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)^\mu. \tag{27}$$

7. Теоремы умножения. Применим к равенству (2) п. 6 формулу обращения Фурье. Мы получим

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\varphi - \nu\theta} K_\lambda(z)\,d\theta = K_{\lambda-\nu}(z_1) K_\nu(z_2), \tag{1}$$

где φ, z, θ, z_1, z_2 связаны формулами (3) и (3′) п. 6.

В частности, при $\lambda=0$ получаем равенство

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu\theta}K_0\left(\sqrt{z_1^2+2z_1z_2\operatorname{ch}\theta+z_2^2}\right)d\theta=K_\nu(z_1)K_\nu(z_2). \tag{2}$$

Напомним, что в этих формулах $\operatorname{Re} z_1>0$, $\operatorname{Re} z_2>0$ и $\operatorname{Re} z>0$, где $z=\sqrt{z_1^2+2z_1z_2\operatorname{ch}\theta+z_2^2}$.

Аналогично, из формулы (4) п. 6 получаем

$$\pm\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\varphi-\nu\theta}H_\lambda^{(1,\,2)}(x)\,d\theta=H_{\lambda-\nu}^{(1,\,2)}(x_1)\,H_\nu^{(1,\,2)}(x_2), \tag{3}$$

где φ, x, θ, x_1, x_2 связаны формулами (5) и (5) п. 6, $x_1>0, x_2>0$, $x>0$. Верхний знак в этом равенстве относится к $H_\nu^{(1)}(x)$, а нижний — к $H_\nu^{2}(x)$.

8. Взаимно обратные интегральные преобразования. Так как $Q_R(g)\,Q_R(g^{-1})=E$, то интегральные преобразования

$$\Phi(\lambda)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda,\ \mu;\ R;\ g)\,F(\mu)\,d\mu \tag{1}$$

и

$$F(\lambda)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda,\ \mu;\ R;\ g^{-1})\,\Phi(\mu)\,d\mu \tag{2}$$

взаимно обратны. Но операторы $Q_R(g)$ и $Q_R(g^{-1})$ одновременно являются интегральными лишь в унитарном случае (см. п. 3 § 3), т. е. при $R=\rho l$. Используя результаты п. 3 § 3, получаем следующие утверждения.

Интегральные преобразования

$$\Phi(\lambda)=-\frac{1}{2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{(\lambda-\mu)\pi i}{2}}H_{\mu-\lambda}^{(2)}(x)\,F(\mu)\,d\mu \tag{3}$$

и

$$F(\lambda)=\frac{1}{2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\frac{(\mu-\lambda)\pi i}{2}}H_{\mu-\lambda}^{(1)}(x)\,\Phi(\mu)\,d\mu, \tag{4}$$

где $-1<\operatorname{Re}(\lambda-\mu)<1$, взаимно обратны при всех $x>0$.

Интегральные преобразования

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{(\lambda-\mu)\pi i}{2}} K_{\mu-\lambda}(x) F(\mu)\, d\mu \tag{5}$$

и

$$F(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{(\mu-\lambda)\pi i}{2}} K_{\lambda-\mu}(x) \Phi(\mu)\, d\mu, \tag{6}$$

где $-1<\operatorname{Re}(\lambda-\mu)<1$, взаимно обратны при всех $x>0$.

Из формул (17) и (19) п. 2 § 3 вытекает, наконец, что взаимно обратны интегральные преобразования

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\mu-\lambda)(ix)^{\lambda-\mu} F(\mu)\, d\mu, \tag{7}$$

где $a>\operatorname{Re}\lambda$, $x>0$ и

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(\mu-\lambda)(-ix)^{\lambda-\mu} \Phi(\mu)\, d\mu, \tag{8}$$

где $b>\operatorname{Re}\lambda$, $x>0$. Эти преобразования устанавливают связь между функциями $F(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<a$.

Точно так же из формул (16) — (18) п. 2 § 3 следует, что взаимно обратны интегральные преобразования

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\lambda-\mu)(ix)^{\mu-\lambda} F(\mu)\, d\mu, \tag{9}$$

где $a<\operatorname{Re}\lambda$, $x>0$, и

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(\lambda-\mu)(-ix)^{\mu-\lambda} F(\mu)\, d\mu, \tag{10}$$

где $b>\operatorname{Re}\lambda$, $x>0$.

§ 6. Разложение квазирегулярного представления группы $MH(2)$

1. Квазирегулярное представление группы $MH(2)$. Обозначим через $\mathfrak{L}^2$ пространство функций $f(x)$ на псевдоевклидовой плоскости, для которых

$$\|f\|^2\equiv\int|f(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}<+\infty, \tag{1}$$

где $d\mathbf{x}=dx\,dy$ при $\mathbf{x}=(x, y)$. Полагая

$$L(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $g \in MH(2)$, мы получаем квазирегулярное представление группы $MH(2)$. Это представление унитарно относительно нормы (1).

Чтобы разложить представление $L(g)$ на неприводимые, сделаем преобразование Фурье функции $f(\mathbf{x})$, записав его в виде

$$F(\mathbf{y}) = \int f(\mathbf{x}) e^{i[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Легко показать, что при этом операторы квазирегулярного представления $L(g)$ переходят в операторы вида

$$\hat{L}(g) F(\mathbf{y}) = e^{i[\mathbf{b}, \mathbf{y}]} F(\mathbf{y}_{-\alpha}), \tag{4}$$

где $g = g(\mathbf{b}, \alpha)$ и $\mathbf{y}_{-\alpha}$ — точка, в которую переходит точка $\mathbf{y}$ при гиперболическом вращении:

$$y_1' = y_1 \operatorname{ch} \alpha - y_2 \operatorname{sh} \alpha,$$
$$y_2' = -y_1 \operatorname{sh} \alpha + y_2 \operatorname{ch} \alpha.$$

Представление $\hat{L}(g)$ разлагается на неприводимые точно так же, как это было сделано в § 5 главы IV для группы евклидовых движений. Только вместо пространств функций на окружностях с центром в начале координат мы рассмотрим пространства функций на гиперболах $[\mathbf{y}, \mathbf{y}] = C$. Именно, обозначим через $\mathfrak{H}_R^{(1)}$ пространство функций

$$F_R^{(1)}(\psi) = F(R \operatorname{ch} \psi, R \operatorname{sh} \psi), \qquad -\infty < R < \infty, R \neq 0,$$

таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(R \operatorname{ch} \psi, R \operatorname{sh} \psi)|^2 d\psi < +\infty,$$

а через $\mathfrak{H}_R^{(2)}$ обозначим пространство функций вида

$$F_R^{(2)}(\psi) = F(R \operatorname{sh} \psi, R \operatorname{ch} \psi), \quad -\infty < R < \infty, \quad R \neq 0. \tag{5}$$

Легко видеть, что все эти пространства инвариантны относительно операторов (4). В соответствии с этим мы получаем разложение представления $\hat{L}(g)$ на неприводимые представления вида

$$\hat{L}_R^{(1)}(g) F_R^{(1)}(\psi) = e^{iR(b_1 \operatorname{ch} \psi - b_2 \operatorname{sh} \psi)} F_R^{(1)}(\psi - \alpha), \tag{6}$$

$$\hat{L}_R^{(2)}(g) F_R^{(2)}(\psi) = e^{iR(b_1 \operatorname{sh} \psi - b_2 \operatorname{ch} \psi)} F_R^{(2)}(\psi - \alpha), \tag{7}$$

где R пробегает лучи $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$ и

$$y = g(\mathbf{b}, \alpha) = g(b_1, b_2, \alpha).$$

Мы имеем

$$\hat{L}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} L_R^{(1)}(g) R\, dR + \int_{-\infty}^{\infty} L_R^{(2)}(g) R\, dR. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\|F\|^2=\int|F(y)|^2\,dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}R\,dR\int_{-\infty}^{\infty}|F(R\operatorname{ch}\psi,\ R\operatorname{sh}\psi)|^2\,d\psi+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}R\,dR\int_{-\infty}^{\infty}|F(R\operatorname{sh}\psi,\ R\operatorname{ch}\psi)|^2\,d\psi. \tag{9}$$

Если строить представление $\hat{L}(g)$ не в пространстве функций с интегрируемым квадратом, а в пространстве обобщенных функций, то помимо компонент (6) и (7) в разложение войдут еще компоненты, соответствующие пространствам функций на лучах (y, y), $(y, -y)$, $(-y, y)$, $(-y, -y)$ и в точке $N(0, 0)$. Эти компоненты являются приводимыми представлениями. Разложение их на неприводимые осуществляется с помощью преобразования Меллина.

2. Интегральные преобразования. Пусть $f(\mathbf{x})$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция и $F(\mathbf{y})$ — ее преобразование Фурье:

$$F(\mathbf{y})=\int f(\mathbf{x})\,e^{i[\mathbf{x},\,\mathbf{y}]}\,d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Положим

$$\begin{aligned}
f_1(r,\ \varphi)&=f(r\operatorname{ch}\varphi,\ r\operatorname{sh}\varphi),\\
f_2(r,\ \varphi)&=f(r\operatorname{sh}\varphi,\ r\operatorname{ch}\varphi),\\
f_3(r,\ \varphi)&=f(-r\operatorname{ch}\varphi,\ -r\operatorname{sh}\varphi),\\
f_4(r,\ \varphi)&=f(-r\operatorname{sh}\varphi,\ -r\operatorname{ch}\varphi),
\end{aligned}$$

где $0<r<\infty$, $-\infty<\varphi<\infty$.

Аналогичными формулами определяются функции $F_k(R,\ \psi)$, $1\leqslant k\leqslant 4$. Таким образом, функции $f_j(r,\ \varphi)$ совпадают с $f(\mathbf{x})$ в одном из квадрантов и равны нулю вне его. Аналогичный смысл имеют функции $F_j(R,\ \psi)$.

Из формулы (1) вытекает, что

$$F_j(R,\ \psi)=\sum_{k=1}^{4}\int_0^{\infty}r\,dr\int_{-\infty}^{\infty}f_k(r,\ \varphi)\,e^{iRra_{jk}(\psi-\varphi)}\,d\varphi, \tag{2}$$

где

$$a_{11}(\alpha)=-a_{13}(\alpha)=-a_{22}(\alpha)=a_{24}(\alpha)=$$
$$=-a_{31}(\alpha)=a_{33}(\alpha)=a_{42}(\alpha)=-a_{44}(\alpha)=\operatorname{ch}\alpha$$

и

$$-a_{12}(\alpha)=a_{14}(\alpha)=a_{21}(\alpha)=-a_{23}(\alpha)=a_{32}(\alpha)=$$
$$=-a_{34}(\alpha)=-a_{41}(\alpha)=a_{43}(\alpha)=\operatorname{sh}\alpha.$$

Точно так же из формулы обращения для преобразования Фурье

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int F(y)\,e^{-i[\mathbf{x},\,\mathbf{y}]}\,d\mathbf{y} \tag{3}$$

следует, что

$$f_k(r,\ \varphi)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{j=1}^{4}\int_0^\infty r\,dr\int_{-\infty}^{\infty}F_j(R,\ \psi)\,e^{-iRra_{jk}(\psi-\varphi)}\,d\psi. \tag{4}$$

Мы видели в п. 1 § 3, что каждому значению R и индексу j соответствует неприводимое представление группы $MH(2)$, реализуемое в пространстве функций $F_j(R,\ \psi)$ (при заданном R). При этом, чтобы получить операторы представления в виде интегральных операторов, надо перейти от функций $F_j(R,\ \psi)$ к их преобразованиям Фурье по ψ.

$$\Phi_j(R,\ \lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F_j(R,\ \psi)\,e^{i\lambda\psi}\,d\psi. \tag{5}$$

Выразим функции $\Phi_j(R,\ \lambda)$ непосредственно через функцию $f(x)$. Для этого подставим в формулу (5) выражение (2) для $F_j(R,\ \psi)$ и изменим порядок интегрирования. Мы получим, используя результаты п. 4 § 3,

$$\Phi_j(R,\ \lambda)=\sum_{k=1}^{4}\int_0^\infty r\,dr\int_{-\infty}^{\infty}f_k(r,\ \varphi)\,e^{i\lambda\varphi}A_{jk}(Rr,\ \lambda)\,d\varphi, \tag{6}$$

где

$$A_{11}(\rho,\ \lambda)=A_{24}(\rho,\ \lambda)=A_{33}(\rho,\ \lambda)=A_{42}(\rho,\ \lambda)=\pi ie^{\frac{\lambda\pi}{2}}H^{(1)}_{-i\lambda}(\rho), \tag{7'}$$

$$A_{13}(\rho,\ \lambda)=A_{22}(\rho,\ \lambda)=A_{31}(\rho,\ \lambda)=A_{44}(\rho,\ \lambda)=-\pi ie^{-\frac{\lambda\pi}{2}}H^{(2)}_{i\lambda}(\rho), \tag{7''}$$

$$A_{14}(\rho,\ \lambda)=A_{21}(\rho,\ \lambda)=A_{32}(\rho,\ \lambda)=A_{43}(\rho,\ \lambda)=2e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}K_{i\lambda}(\rho), \tag{7'''}$$

$$A_{12}(\rho,\ \lambda)=A_{23}(\rho,\ \lambda)=A_{34}(\rho,\ \lambda)=A_{41}(\rho,\ \lambda)=2e^{\frac{\lambda\pi}{2}}K_{i\lambda}(\rho). \tag{7$^{\rm IV}$}$$

Выражение $f_k(r,\ \varphi)$ через $\Phi_y(R,\ \lambda)$ получается точно так же с помощью формулы обращения (3) и формулы обращения

$$F_j(R,\ \psi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(R,\ \lambda)\,e^{-i\lambda\psi}\,d\lambda \tag{8}$$

для преобразования Фурье (5). В результате получим

$$f_k(r,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{4}\int_0^\infty R\,dR\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(R,\lambda)\,e^{-i\lambda\varphi}A_{kj}(Rr,\lambda)\,d\lambda, \tag{9}$$

где $A_{kj}(\rho,\lambda)$ задаются формулами (7′) — (7$^{(IV)}$).

Мы получили, таким образом, взаимно обратные интегральные преобразования (6) и (9), связывающие функции $f_k(r,\varphi)$, $1\leqslant k\leqslant 4$ с функциями $\Phi_j(R,\lambda)$, $1\leqslant j\leqslant 4$. Из этих преобразований легко получить преобразования для функций одного переменного. Именно, введем функцию

$$P_k(r,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(r,\varphi)\,e^{i\lambda\varphi}\,d\varphi \tag{10}$$

— преобразование Фурье для $f_k(r,\varphi)$ по φ. Из формулы (6) вытекает

$$\Phi_j(R,\lambda)=\sum_{k=1}^{4}\int_0^\infty A_{jk}(Rr,\lambda)\,P_k(r,\lambda)\,r\,dr, \tag{11}$$
$$1\leqslant j\leqslant 4.$$

С другой стороны, если рассматривать формулу (9) как формулу обратного преобразования Фурье, по λ, то

$$P_k(r,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{j=1}^{4}\int_0^\infty A_{kj}(Rr,\lambda)\,\Phi_j(R,\lambda)\,R\,dR, \tag{12}$$
$$1\leqslant k\leqslant 4.$$

Мы доказали, таким образом, что если

$$\Phi_j(R)=\sum_{k=1}^{4}\int_0^\infty A_{jk}(Rr,\lambda)\,P_k(r)\,r\,dr, \tag{13}$$

где $-\infty<\lambda<\infty$, $1\leqslant j\leqslant 4$, то

$$P_k(r)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{j=1}^{4}\int_0^\infty A_{kj}(Rr,\lambda)\,\Phi_j(R)\,R\,dR, \tag{14}$$

где $1\leqslant k\leqslant 4$. При $P_1(r)=P_2(r)=P_3(r)=P_4(r)=P(r)$ получаем

$$\Phi_1(R)=\Phi_2(R)=\Phi_3(R)=\Phi_4(R)=\Phi(R).$$

В этом случае из формул (13) и (14) вытекает, что если

$$\Phi(R)=\int_0^\infty A(Rr,\lambda)\,P(r)\,dr, \tag{15}$$

то

$$P(r)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty A(Rr, \lambda)\,\Phi(R)\,R\,dR, \tag{16}$$

где

$$A(\rho, \lambda)=\pi i e^{\frac{\lambda\pi}{2}}\left[H_{-i\lambda}^{(1)}(\rho)-H_{i\lambda}^{(2)}(\rho)\right]+4\operatorname{ch}\frac{\lambda\pi}{2}K_{i\lambda}(\rho). \tag{17}$$

Используя результаты п. 4 § 3, легко показать, что ядро $A(\rho, \lambda)$ можно представить в следующем виде:

$$A(\rho, \lambda)=\frac{\pi i}{\operatorname{sh}\frac{\lambda\pi}{2}}\left[J_{i\lambda}(\rho)+e^{\frac{\lambda\pi}{2}}J_{i\lambda}(i\rho)-J_{-i\lambda}(\rho)-e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}J_{-i\lambda}(i\rho)\right]=$$

$$=\frac{\pi i}{\operatorname{sh}\frac{\lambda\pi}{2}}\left[J_{i\lambda}(\rho)+I_{i\lambda}(\rho)-J_{-i\lambda}(\rho)-I_{-i\lambda}(\rho)\right].$$

Другой частный случай преобразований (13) и (14) получается, если взять $P_1(r, \lambda)=P_3(r, \lambda)\equiv P(r, \lambda)$, $P_2(r)=P_4(r)=0$. Мы получаем при этом, что если

$$\Phi_1(R, \lambda)=\pi i e^{\frac{\lambda\pi}{2}}\int_0^\infty\left[H_{-i\lambda}^{(1)}(Rr)-H_{i\lambda}^{(2)}(Rr)\right]P(r, \lambda)\,r\,dr, \tag{18}$$

$$\Phi_2(R, \lambda)=4\operatorname{ch}\frac{\lambda\pi}{2}\int_0^\infty K_{i\lambda}(Rr)\,P(r, \lambda)\,r\,dr, \tag{19}$$

то

$$P(r, \lambda)=\pi i e^{\frac{\lambda\pi}{2}}\int_0^\infty\left[H_{-i\lambda}^{(1)}(Rr)-H_{i\lambda}^{(2)}(Rr)\right]\Phi_1(R, \lambda)\,R\,dR+$$

$$+4\operatorname{ch}\frac{\lambda\pi}{2}\int_0^\infty K_{i\lambda}(Rr)\,\Phi_2(R, \lambda)\,R\,dR, \tag{20}$$

причем

$$0=4\operatorname{ch}\frac{\lambda\pi}{2}\int_0^\infty K_{i\lambda}(Rr)\,\Phi_1(R, \lambda)\,R\,dR+$$

$$+\pi i e^{\frac{\lambda\pi}{2}}\int_0^\infty\left[H_{-i\lambda}^{(1)}(Rr)-H_{i\lambda}^{(2)}(Rr)\right]\Phi_2(R, \lambda)\,R\,dR. \tag{21}$$

ГЛАВА VI

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $QU(2)$ УНИМОДУЛЯРНЫХ КВАЗИУНИТАРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА И ЯКОБИ

В этой главе будут рассмотрены представления группы $QU(2)$ унимодулярных квазиунитарных матриц, во многом сходной с группой $SU(2)$. Однако, в отличие от группы $SU(2)$, группа квазиунитарных матриц некомпактна. Из-за этого она обладает непрерывной серией унитарных представлений. Специальные функции, к которым приводит рассмотрение этой группы, родственны изученным в главе III многочленам Лежандра и Якоби. Мы будем называть их *функциями Лежандра* и *функциями Якоби*.

§ 1. Группа $QU(2)$

1. Описание. Назовем *квазиунитарными унимодулярными матрицами второго порядка* матрицы вида $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$, где $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$.

Легко видеть, что эти матрицы образуют группу. Обозначим ее через $QU(2)$. Очевидно, что если матрица g принадлежит группе $QU(2)$, то $gsg^*=s$, где $s=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, а $g^*=\begin{pmatrix}\bar{\alpha} & \beta\\ \bar{\beta} & \alpha\end{pmatrix}$ — эрмитово-сопряженная с g матрица. Обратно, если $gsg^*=s$ и $\operatorname{Det} g=1$, то g принадлежит группе $QU(2)$. Таким образом, $QU(2)$ можно определить как группу матриц g, таких, что $gsg^*=s$ и $\operatorname{Det} g=1$.

Покажем, что группа $QU(2)$ изоморфна группе $SL(2, R)$ вещественных унимодулярных матриц второго порядка. В самом деле, каждой матрице $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ из группы $SL(2, R)$ поставим в соответствие матрицу $h=t^{-1}gt$, где $t=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$. Тогда

$$h=\begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}, \qquad |a|^2-|b|^2=1, \tag{1}$$

где

$$a=\frac{1}{2}[\alpha+\delta+i(\beta-\gamma)], \tag{2}$$

$$b=\frac{1}{2}[\beta+\gamma+i(\alpha-\delta)]. \tag{2'}$$

Поэтому матрица h принадлежит группе $QU(2)$.

Тем самым установлено отображение группы $SL(2, R)$ в группу $QU(2)$. Простой подсчет показывает, что это отображение является изоморфизмом. Однако при $n>2$ группы $SL(n, R)$ и $QU(n)$ уже не являются изоморфными.

Укажем еще одну реализацию группы $QU(2)$ (точнее, ее фактор-группы по центру).

Рассмотрим в трехмерном линейном пространстве E_3 неопределенную квадратичную форму

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=x_1^2-x_2^2-x_3^2. \tag{3}$$

Уравнение $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$ определяет конус в пространстве E_3 с вершиной в начале координат. Он разбивает пространство E_3 на три области: внутренность верхней полы конуса, внутренность нижней полы конуса и внешнюю область конуса.

Обозначим через $SH(3)$ группу линейных преобразований пространства E_3, переводящих каждую из этих областей в себя. Такие преобразования являются аналогами вращений трехмерного пространства с той лишь разницей, что они транзитивно действуют не на сферах, а на гиперболоидах и конусах $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$. Поэтому такие преобразования называют *гиперболическими вращениями*.

Связь между группами $QU(2)$ и $SH(3)$ такая же, как и между группами $SU(2)$ и $SO(3)$. Именно, каждой точке $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ пространства E_3 поставим в соответствие квазиунитарную матрицу

$$h=\begin{pmatrix}x_1 & x_2+ix_3\\ x_2-ix_3 & x_1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

левый верхний элемент которой веществен.

Если g — любая матрица из группы $QU(2)$, то ghg^* — квазиунитарная матрица, левый верхний элемент которой — вещественное число. Поэтому матрица ghg^* имеет вид

$$ghg^*=\begin{pmatrix}y_1 & y_2+iy_3\\ y_2-iy_3 & y_1\end{pmatrix} \tag{5}$$

и ей соответствует точка $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ пространства E_3. Преобразование $g\mathbf{x}=\mathbf{y}$ является линейным, поскольку элементы матрицы ghg^* линейно выражаются через элементы матрицы h.

Итак, каждой матрице g из $QU(2)$ поставлено в соответствие линейное преобразование в пространстве E_3. Так как матрица g унимодулярна, то

$$\operatorname{Det} ghg^* = \operatorname{Det} h.$$

Но если $h=\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & x_1 \end{pmatrix}$, то $\operatorname{Det} h=[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$. Таким образом, линейное преобразование сохраняет квадратичную форму $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$. Легко проверить, что если $x_1>0$, то и $y_1>0$, а потому верхняя пола конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$ переходит в верхнюю полу. Следовательно, линейное преобразование $\mathbf{y}=g\mathbf{x}$, соответствующее матрице g из $QU(2)$, принадлежит группе $SH(3)$.

Мы установили отображение группы $QU(2)$ в группу $SH(3)$. Это отображение гомоморфно, причем ядром гомоморфизма является центр группы $QU(2)$, состоящий из матриц $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $-e=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Отметим еще реализацию групп $QU(2)$ и $SL(2, R)$ в виде групп дробно-линейных преобразований комплексной плоскости. Каждой матрице второго порядка $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ поставим в соответствие дробно-линейное преобразование

$$w=gz=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

Простой подсчет показывает, что

$$(g_1g_2)z=g_1(g_2z)$$

и потому группа дробно-линейных преобразований является гомоморфным образом группы $SL(2, C)$ комплексных унимодулярных матриц второго порядка. Ядро этого гомоморфизма состоит из матриц $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $-e=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

При этом гомоморфизме матрицам вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2-|\beta^2|=1$, т. е. элементам группы $QU(2)$, соответствуют дробно-линейные преобразования, переводящие в себя единичный круг и его дополнение. Матрицам же из подгруппы $SL(2, R)$ соответствуют дробно-линейные преобразования, переводящие в себя верхнюю и нижнюю полуплоскости. Изоморфизм между $QU(2)$ и $SL(2, R)$ связан с существованием дробнолинейного преобразования $w=\frac{z-i}{z+i}$, отображающего верхнюю полуплоскость на единичный круг.

2. Подгруппы группы $SL(2, R)$. Рассмотренные в предыдущих главах представления групп $SU(2)$, $M(2)$ и $MH(2)$ обладали следующим важным свойством: операторы представлений, соответствующие элементам некоторых подгрупп, задавались в выбранных реализациях диагональными матрицами. В группе $SU(2)$ такой подгруппой была подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}$, в группе $M(2)$ — подгруппа вращений вокруг начала координат, и в группе $MH(2)$ — подгруппа гиперболических вращений. Именно благодаря такому выбору реализации удалось выразить матричные элементы представлений в виде произведения трех функций, каждая из которых зависела лишь от одного переменного.

В группе $SL(2, R)$ есть три однопараметрические подгруппы, такие, что любая другая однопараметрическая подгруппа сопряжена с одной из них. Этими подгруппами являются подгруппа $SO(2)$ ортогональных вещественных матриц $\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, подгруппа $SH(2)$ диагональных матриц $\begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}$ и подгруппа Z треугольных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

Каждой из этих подгрупп соответствует реализация представлений группы $SL(2, R)$, при которой элементы этой подгруппы изображаются диагональными матрицами (или операторами умножения на функцию — «континуальными диагональными матрицами»).

В этой главе рассмотрим реализацию, при которой диагональными матрицами изображаются элементы компактной подгруппы $SO(2)$. Для изучения этой реализации удобнее саму группу рассматривать как группу $QU(2)$ матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha^2|-|\beta^2|=1$. При установленном выше изоморфизме групп $SL(2, R)$ и $QU(2)$ подгруппе $SO(2)$ соответствует в $QU(2)$ подгруппа диагональных матриц вида $\begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}$.

Таким образом, мы будем изучать в этой главе представления группы $QU(2)$, при которых элементы диагональной подгруппы изображаются диагональными матрицами. При такой реализации матричные элементы выражаются через функции, близкие к изученным в главе III функциям Якоби и Лежандра.

3. Параметризации группы $QU(2)$. Каждую матрицу $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$ группы $QU(2)$ можно задавать двумя комплексными числами α и β, такими, что $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$. Во многих случаях удобнее заменить эти параметры углами Эйлера. Напомним, что согласно п. 4 § 1 главы III каждая комплексная унимодулярная матрица $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ задается тремя комплексными числами φ, θ, ψ — углами Эйлера этой матрицы. Матрица с углами Эйлера φ, θ, ψ имеет вид

$$g=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}\\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\psi-\varphi)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Выясним, какие ограничения на углы Эйлера налагает принадлежность матрицы $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ подгруппе $QU(2)$. Для этого должны выполняться равенства $\delta=\bar\alpha$ и $\gamma=\bar\beta$, т. е.

$$\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}=\overline{\cos\frac{\theta}{2}}\,e^{-\frac{i(\bar\varphi+\bar\psi)}{2}} \tag{2}$$

и

$$\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\psi-\varphi)}{2}}=-\overline{\sin\frac{\theta}{2}}\,e^{\frac{i(\bar\psi-\bar\varphi)}{2}}. \tag{3}$$

Перепишем эти равенства в виде

$$\cos\frac{\theta}{2}=\overline{\cos\frac{\theta}{2}}\,e^{\frac{i(\varphi-\bar\varphi+\psi-\bar\psi)}{2}} \tag{2'}$$

и

$$\sin\frac{\theta}{2}=-\overline{\sin\frac{\theta}{2}}\,e^{\frac{i(\bar\psi-\varphi+\psi-\bar\varphi)}{2}}. \tag{3'}$$

Но $\frac{i}{2}(\varphi-\bar\varphi+\psi-\bar\psi)$ и $\frac{i}{2}(\bar\psi-\psi+\varphi-\bar\varphi)$ — вещественные числа. Поэтому, если матрица $g=g(\varphi, \theta, \psi)$ принадлежит подгруппе $QU(2)$, то $\cos\frac{\theta}{2}$ — вещественное число, а $\sin\frac{\theta}{2}$ — чисто мнимое число. Следовательно, угол Эйлера θ является чисто мнимым, а потому $\tau=\theta i$ — вещественное число.

Из равенств (2) и (3) следует далее, что $\varphi+\psi$ и $\varphi-\psi$ — вещественные числа, а потому углы Эйлера φ и ψ вещественны. Таким образом, *углы Эйлера матрицы* $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$ *из подгруппы* $QU(2)$ *имеют* *вид* $\varphi, -\tau l, \psi$, *где* φ, τ, ψ — *вещественные числа*. Принимая во внимание ограничения на углы Эйлера матриц группы $SL(2, C)$, получаем, что параметры φ, τ, ψ изменяются в следующих пределах:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 < \tau < \infty, \\ -2\pi \leqslant \psi < 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Легко показать, что различным точкам области, задаваемой неравенствами (4), соответствуют различные матрицы g группы $QU(2)$. При этом матрица, соответствующая значениям параметров φ, τ, ψ, имеет следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}} \\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} e^{\frac{i(\psi-\varphi)}{2}} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} e^{-\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, группа $QU(2)$ также является одной из вещественных форм группы $SL(2, C)$.

В дальнейшем удобнее использовать в группе $QU(2)$ вместо углов Эйлера φ, θ, ψ соответствующие вещественные параметры φ, τ, ψ. В этой главе под углами Эйлера будем понимать вещественные числа φ, τ, ψ. Найдем закон преобразования этих параметров при умножении элементов группы $QU(2)$. Пусть $g_1 = (0, \tau_1, 0)$, $g_2 = (\varphi_2, \tau_2, 0)$ и $g_1g_2 = (\varphi, \tau, \psi)$. Используя формулы (2) — (2″) из п. 2 § 1 главы III, получаем

$$\operatorname{ch}\tau = \operatorname{ch}\tau_1 \operatorname{ch}\tau_2 + \operatorname{sh}\tau_1 \operatorname{sh}\tau_2 \cos\varphi_2, \tag{6}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\operatorname{sh}\tau_1 \operatorname{ch}\tau_2 + \operatorname{ch}\tau_1 \operatorname{sh}\tau_2 \cos\varphi_2 + i \operatorname{sh}\tau_2 \sin\varphi_2}{\operatorname{sh}\tau}, \tag{6'}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\operatorname{ch}\frac{\tau_1}{2} \operatorname{ch}\frac{\tau_2}{2} e^{\frac{i\varphi_2}{2}} + \operatorname{sh}\frac{\tau_1}{2} \operatorname{sh}\frac{\tau_2}{2} e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}}. \tag{6''}$$

Из этих формул следует

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sh}\tau_2 \sin\varphi_2}{\operatorname{ch}\tau_1 \operatorname{sh}\tau_2 \cos\varphi_2 + \operatorname{sh}\tau_1 \operatorname{ch}\tau_2}, \tag{7'}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{sh}\tau_1 \sin\varphi_2}{\operatorname{sh}\tau_1 \operatorname{ch}\tau_2 \cos\varphi_2 + \operatorname{ch}\tau_1 \operatorname{sh}\tau_2}. \tag{7''}$$

Общий случай без труда сводится к разобранному (ср. п. 2 § 1 главы III).

Простая проверка показывает, что элемент $g(\varphi, \tau, \psi)$ обратен элементу $g(\pi-\psi, \tau, -\pi-\varphi)$.

4. Инвариантное интегрирование. Поскольку группа $QU(2)$ локально компактна, на ней существует инвариантная мера dg, т. е. такая мера, что для любой финитной непрерывной функции $f(g)$ имеем

$$\int f(g)\,dg = \int f(gg_0)\,dg.$$

Дословно повторяя рассуждения из п. 1 § 6 главы III, убеждаемся, что выражение меры dg в параметрах Эйлера имеет вид

$$dg = \operatorname{sh}\tau\,d\tau\,d\varphi\,d\psi. \tag{1}$$

Легко проверить, что она инвариантна не только при преобразованиях $g\to gg_0$, но и при преобразованиях $g\to g_0g$ и $g\to g^{-1}$. Таким образом, инвариантное интегрирование на группе $QU(2)$ задается следующим образом:

$$\int f(g)\,dg = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(\varphi,\tau,\psi)\operatorname{sh}\tau\,d\psi\,d\varphi\,d\tau. \tag{2}$$

Иначе можно представить формулу (2) в виде

$$\int f(g)\,dg = \int f(\alpha,\beta)\,\delta(|\alpha|^2-|\beta|^2-1)\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\beta_1\,d\beta_2, \tag{2'}$$

где $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, $\beta=\beta_1+i\beta_2$ $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$.

5. Алгебра Ли. Найдем алгебру Ли группы $QU(2)$. Рассмотрим три однопараметрические подгруппы этой группы. Подгруппа Ω_1 состоит из матриц вида

$$\omega_1(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{t}{2} & \operatorname{sh}\frac{t}{2}\\ \operatorname{sh}\frac{t}{2} & \operatorname{ch}\frac{t}{2}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

подгруппа Ω_2 — из матриц вида

$$\omega_2(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{t}{2} & i\operatorname{sh}\frac{t}{2}\\ -i\operatorname{sh}\frac{t}{2} & \operatorname{ch}\frac{t}{2}\end{pmatrix} \tag{1'}$$

и подгруппа Ω_3 — из матриц вида

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix}e^{\frac{it}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix}. \tag{1''}$$

Касательные матрицы к этим подгруппам имеют следующий вид:

$$a_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$a_2=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{2'}$$

$$a_3=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{2''}$$

Поскольку эти матрицы линейно независимы, они образуют базис алгебры Ли группы $QU(2)$.

Коммутационные соотношения для матриц a_1, a_2, a_3 таковы:

$$[a_1,\ a_2]=-a_3, \tag{3}$$

$$[a_2,\ a_3]=a_1, \tag{3'}$$

$$[a_3,\ a_1]=a_2. \tag{3''}$$

Они отличаются от коммутационных соотношений для группы $SU(2)$ лишь знаком при a_3 в формуле (3) (см. п. 3 § 1 главы III).

§ 2. Неприводимые представления группы $QU(2)$

В этом параграфе мы построим серию представления $T_\chi(g)$ группы $QU(2)$. Эти представления задаются комплексным числом l и числом ε, принимающим значения 0 и 1/2, и строятся в пространствах однородных функций $f(z)$ заданной четности. Будет показано, что представления $T_\chi(g)$ приводимы тогда и только тогда, когда $2l$ и 2ε — целые числа одинаковой четности, и будут указаны условия эквивалентности и унитарности этих представлений.

1. Пространство $\mathfrak{D}_\chi$. Обозначим через χ совокупность $\chi=(l,\ \varepsilon)$ комплексного числа l и числа ε, принимающего значения 0 и $\frac{1}{2}$. Каждой такой совокупности поставим в соответствие пространство $\mathfrak{D}_\chi$ функций $\varphi(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, таких, что:

1) функции $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируемы по x и y во всех точках $z=x+iy$, кроме точки $z=0$;

2) для любого положительного числа a выполняется равенство

$$\varphi(az)=a^{2l}\varphi(z); \tag{1}$$

3) функции $\varphi(z)$ имеют заданную четность: при $\varepsilon=0$ они четны, а при $\varepsilon={}^1/_2$ нечетны:

$$\varphi(-z)=(-1)^{2\varepsilon}\varphi(z). \tag{2}$$

Если Γ — некоторая кривая на комплексной плоскости, пересекающая в одной и только одной точке любую прямую, проходящую через точку $z=0$, то функция $\varphi(z)$ из пространства $\mathfrak{D}_\chi$ однозначно определяется своими значениями на этой кривой. Именно, если z — точка комплексной плоскости и z_0 — точка пересечения прямой, соединяющей эту точку с началом координат и кривой Γ, то

$$\varphi(z)=\left|\frac{z}{z_0}\right|^{2l}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{2\varepsilon}\varphi(z_0). \tag{3}$$

Поэтому пространство $\mathfrak{D}_\chi$ можно рассматривать как пространство функций на кривой Γ.

Если кривая Γ пересекает прямые, выходящие из начала координат, в нескольких точках, то $\mathfrak{D}_\chi$ реализуется как пространство функций, заданных на кривой Γ и удовлетворяющих некоторым добавочным условиям, вытекающим из однородности и четности функции $\varphi(z)$.

Например, если Γ — единичная окружность, то при $\varepsilon=0$ пространство $\mathfrak{D}_\chi$ реализуется как пространство бесконечно дифференцируемых четных функций на окружности, а при $\varepsilon={}^1/_2$ — как пространство бесконечно дифференцируемых нечетных функций на окружности [1]).

Нам будет удобно иным образом реализовать пространство $\mathfrak{D}_\chi$ на окружности. Именно, при $\varepsilon=0$ каждой функции $\varphi(z)$ поставим в соответствие функцию $f(e^{i\theta})$, определяемую равенством

$$f(e^{i\theta})=\varphi\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right). \tag{4}$$

В силу четности функции $\varphi(z)$ функция $f(e^{i\theta})$ однозначно определена. Если же $\varepsilon=\frac{1}{2}$, то положим

$$f(e^{i\theta})=e^{\frac{i\theta}{2}}\varphi\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right). \tag{5}$$

Эта функция однозначно определена в силу нечетности $\varphi(z)$. Таким образом, *при любом $\chi=(l, \varepsilon)$ пространство $\mathfrak{D}_\chi$ можно реализовать как пространство $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций на окружности.*

2. Представления $T_\chi(g)$. Каждому элементу $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$ группы $QU(2)$ поставим в соответствие оператор $T_\chi(g)$ в пространстве $\mathfrak{D}_\chi$, определяемый формулой

$$T_\chi(g)\varphi(z)=\varphi(\alpha z+\overline{\beta z}). \tag{1}$$

---

[1]) Мы называем функцию, заданную на окружности, *четной*, если она принимает в диаметрально противоположных точках одинаковые значения, и *нечетной*, если ее значения в диаметрально противоположных точках отличаются только знаком.

Очевидно, что функция $T_\chi(g)\varphi(z)$ имеет ту же степень однородности $2l$ и четность 2ε, что и функция $\varphi(z)$, а потому оператор $T_\chi(g)$ переводит функции пространства $\mathfrak{D}_\chi$ в функции того же пространства. Далее, простой подсчет показывает, что

$$T_\chi(g_1)\,T_\chi(g_2)=T_\chi(g_1 g_2), \tag{2}$$

а потому $T_\chi(g)$ является представлением группы $QU(2)$.

Найдем выражение для операторов представления $T_\chi(g)$ при реализации $\mathfrak{D}_\chi$ в виде пространства $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций на окружности. При $\varepsilon=0$ мы положили $f(e^{i\theta})=\varphi(e^{\frac{i\theta}{2}})$. Поэтому

$$T_\chi(g)f(e^{i\theta})=T_\chi(g)\varphi(e^{\frac{i\theta}{2}})=\varphi(\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}})=$$

$$=\left|\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}}\right|^{2l}\varphi\left(\frac{\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}}}{\left|\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}}\right|}\right).$$

Обозначим $\dfrac{\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}}}{\left|\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}}\right|}$ через $e^{\frac{i\psi}{2}}$. Тогда

$$e^{i\psi}=\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar\beta}{\beta e^{i\theta}+\bar\alpha}.$$

Так как, кроме того,

$$|\alpha e^{\frac{i\theta}{2}}+\bar\beta e^{-\frac{i\theta}{2}}|=|\beta e^{i\theta}+\bar\alpha|,$$

то

$$T_\chi(g)f(e^{i\theta})=|\beta e^{i\theta}+\bar\alpha|^{2l}\varphi\left(e^{\frac{i\psi}{2}}\right)=|\beta e^{i\theta}+\bar\alpha|^{2l}f(e^{i\psi})=$$

$$=|\beta e^{i\theta}+\bar\alpha|^{2l}f\left(\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar\beta}{\beta e^{i\theta}+\bar\alpha}\right).$$

Итак, мы доказали, что *при $\chi=(l,\,0)$ представление $T_\chi(g)$ реализуется в пространстве $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций на окружности и задается формулой*

$$T_\chi(g)f(e^{i\theta})=|\beta e^{i\theta}+\bar\alpha|^{2l}f\left(\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar\beta}{\beta e^{i\theta}+\bar\alpha}\right). \tag{3}$$

Точно так же доказывается, что *при* $\chi=(l, {}^1/_2)$ *операторы* $T_\chi(g)$ *задаются формулой*

$$T_\chi(g)f(e^{i\theta})=|\beta e^{i\theta}+\bar{\alpha}|^{2l-1}(\beta e^{i\theta}+\bar{\alpha})f\left(\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar{\beta}}{\beta e^{i\theta}+\bar{\alpha}}\right). \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно заменить единой формулой:

$$T_\chi(g)f(e^{i\theta})=(\beta e^{i\theta}+\bar{\alpha})^{l+\varepsilon}(\bar{\beta}e^{-i\theta}+\alpha)^{l-\varepsilon}f\left(\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar{\beta}}{\beta e^{i\theta}+\bar{\alpha}}\right). \qquad (5)$$

3. Инфинитезимальные операторы. Вычислим инфинитезимальный оператор A_1 представления $T_\chi(g)$, соответствующий однопараметрической подгруппе Ω_1 матриц вида

$$\omega_1(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{t}{2} & \operatorname{sh}\frac{t}{2}\\ \operatorname{sh}\frac{t}{2} & \operatorname{ch}\frac{t}{2}\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Этим матрицам соответствуют операторы

$$T_\chi(\omega_1(t))f(e^{i\theta})=\left(\operatorname{sh}\frac{t}{2}e^{i\theta}+\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)^{l+\varepsilon}\left(\operatorname{sh}\frac{t}{2}e^{-i\theta}+\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)^{l-\varepsilon}\times$$
$$\times f\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}e^{i\theta}+\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\operatorname{sh}\frac{t}{2}e^{i\theta}+\operatorname{ch}\frac{t}{2}}\right). \qquad (2)$$

Поэтому

$$A_1=\left.\frac{dT_\chi(\omega_1(t))}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}\left[(l+\varepsilon)e^{i\theta}+(l-\varepsilon)e^{-i\theta}-2\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right]. \qquad (3)$$

Точно так же подгруппе Ω_2 матриц вида

$$\omega_2(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{t}{2} & i\operatorname{sh}\frac{t}{2}\\ -i\operatorname{sh}\frac{t}{2} & \operatorname{ch}\frac{t}{2}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_2=\frac{i}{2}\left[(l+\varepsilon)e^{i\theta}-(l-\varepsilon)e^{-i\theta}+2l\cos\theta\frac{d}{d\theta}\right]. \qquad (5)$$

Подгруппе же Ω_3 диагональных матриц

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_3=-i\varepsilon+\frac{d}{d\theta}. \tag{7}$$

Вместо операторов A_1, A_2, A_3 удобнее пользоваться их линейными комбинациями H_+, H_-, H_3:

$$H_+=-A_1-iA_2, \tag{8}$$

$$H_-=-A_1+iA_2, \tag{8'}$$

$$H_3=iA_3. \tag{8''}$$

Из формул (3), (5) и (7) вытекает, что

$$H_+=ie^{-i\theta}\frac{d}{d\theta}-(l-\varepsilon)e^{-i\theta}, \tag{9}$$

$$H_-=-ie^{i\theta}\frac{d}{d\theta}-(l+\varepsilon)e^{i\theta}, \tag{9'}$$

$$H_3=\varepsilon+i\frac{d}{d\theta}. \tag{9''}$$

В пространстве $\mathfrak{D}$ существует базис $\{e^{-ik\theta}\}$, состоящий из собственных функций оператора H_3:

$$H_3e^{-ik\theta}=(\varepsilon+k)e^{-ik\theta}. \tag{10}$$

Выясним, как действуют на функции этого базиса операторы H_+ и H_-. В силу (9) и (9') имеем

$$H_+e^{-ik\theta}=(k-l+\varepsilon)e^{-i(k+1)\theta} \tag{11}$$

и

$$H_-e^{-ik\theta}=-(k+l+\varepsilon)e^{-i(k-1)\theta}. \tag{12}$$

Таким образом, оператор H_+ переводит функцию $e^{-ik\theta}$, соответствующую собственному значению $\varepsilon+k$ оператора H_3, в функцию, для которой собственное значение на единицу больше. Точно так же применение оператора H_- уменьшает на единицу собственное значение.

4. Неприводимость. Докажем, что построенные в п. 2 представления $T_\chi(g)$, $\chi=(l, \varepsilon)$ группы $QU(2)$, вообще говоря, неприводимы. Исключение составляют значения $\chi=(l, \varepsilon)$, для которых $2l$ — целое число, имеющее ту же четность, что и 2ε. В этом случае $l+\varepsilon$ и $l-\varepsilon$ — целые числа. Такие значения χ мы будем называть *целочисленными*. Итак, покажем, что *при нецелочисленных значениях χ представление $T_\chi(g)$ неприводимо.*

Сузим сначала представление $T_\chi(g)$ на подгруппу Ω_3, состоящую из диагональных матриц вида $\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}$. Мы получим представление

$$T_\chi(g)F(e^{i\theta})=e^{-\frac{i\varepsilon t}{2}}F(e^{i(\theta+t)}) \tag{1}$$

подгруппы Ω_3. Это представление эквивалентно регулярному представлению группы $SO(2)$, изоморфной подгруппе Ω_3. Поэтому оно разлагается в прямую сумму одномерных представлений, которые реализуются в подпространствах $\mathfrak{H}_k$ функций вида $c_k e^{-ik\theta}$.

Поэтому (см. п. 3, § 3 гл. I) любое инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{D}$ распадается в прямую сумму некоторых из подпространств $\mathfrak{H}_k$ и, следовательно, либо является нулевым, либо содержит одну из функций $e^{-ik\theta}$. Но в силу инвариантности $\mathfrak{T}$ оно содержит вместе с любой функцией $e^{-ik\theta}$ и все функции $H_+^m e^{-ik\theta}$, $H_-^m e^{-ik\theta}$. Формулы (11) и (12) п. 3 показывают, что

$$H_+^m e^{-ik\theta}=\alpha_{km}e^{-i(k+m)\theta}, \tag{2}$$

$$H_-^m e^{-ik\theta}=\beta_{km}e^{-i(k-m)\theta}, \tag{3}$$

где для краткости положено

$$\alpha_{km}=\prod_{n=k}^{k+m-1}(n-l+\varepsilon), \tag{4}$$

$$\beta_{km}=(-1)^m\prod_{n=k}^{k+m-1}(n+l+\varepsilon). \tag{5}$$

Очевидно, что если $\chi=(l, \varepsilon)$ не является целочисленным, то α_{km} и β_{km} не обращаются в нуль. Поэтому $\mathfrak{T}$ содержит все функции $e^{-in\theta}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{D}$. Тем самым неприводимость $T_\chi(g)$ доказана.

5. Целочисленные представления. Рассмотрим теперь случай, когда $\chi=(l, \varepsilon)$ целочисленно, т. е. случай, когда $l+\varepsilon$ и $l-\varepsilon$ — целые числа. Покажем, что в этом случае представление $T_\chi(g)$ приводимо.

Если $l+\varepsilon$ и $l-\varepsilon$ — целые числа, то функции $e^{i(l+\varepsilon)\theta}$ и $e^{-i(l-\varepsilon)\theta}$ однозначно определены. Обозначим через $\mathfrak{D}_l^+$ подпространство в $\mathfrak{D}$, состоящее из функций вида $e^{-i(l-\varepsilon)\theta}f(e^{i\theta})$, где $f(z)$ аналитична внутри единичного круга. Через $\mathfrak{D}_l^-$ обозначим пространство функций вида $e^{i(l+\varepsilon)\theta}f(e^{i\theta})$, где $f(z)$ аналитична вне единичного круга (и в бесконечно удаленной точке). Функции из пространства $\mathfrak{D}_l^+$ разлагаются в ряды

$$f(e^{i\theta})=e^{-i(l-\varepsilon)\theta}\sum_{n=-\infty}^{0}a_n e^{-in\theta}, \tag{1}$$

а функции из пространства $\mathfrak{D}_l^-$ — в ряды

$$f(e^{i\theta})=e^{i(l+\varepsilon)\theta}\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-in\theta}. \tag{2}$$

Покажем, что подпространства $\mathfrak{D}_l^+$ и $\mathfrak{D}_l^-$ в $\mathfrak{D}$ инвариантны относительно операторов $T_\chi(g)$, $\chi=(l,\ \varepsilon)$. В самом деле,

$$T_\chi(g)\left[e^{-i(l-\varepsilon)\theta}f(e^{i\theta})\right]=e^{-i(l-\varepsilon)\theta}(\beta e^{i\theta}+\bar\alpha)^{2l}f\left(\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar\beta}{\beta e^{i\theta}+\bar\alpha}\right). \tag{3}$$

Так как $2l$ — целое число и $|\alpha|>|\beta|$, то $(\beta z+\bar\alpha)^{2l}$ — аналитическая функция внутри единичного круга. Кроме того, так как преобразование $w=\dfrac{\alpha z+\bar\beta}{\beta z+\bar\alpha}$ переводит внутренность единичного круга в себя, а $f(z)$ аналитична внутри этого круга, то и функция $f\left(\dfrac{\alpha z+\bar\beta}{\beta z+\bar\alpha}\right)$ аналитична внутри этого круга. Поэтому функция $(\beta z+\bar\alpha)^{2l}f\left(\dfrac{\alpha z+\bar\beta}{\beta z+\bar\alpha}\right)$ аналитична внутри единичного круга и, следовательно,

$$T_\chi(g)\left[e^{-i(l-\varepsilon)\theta}f(e^{i\theta})\right]$$

принадлежит подпространству $\mathfrak{D}_l^+$. Тем самым инвариантность этого подпространства доказана. Точно так же доказывается инвариантность подпространства $\mathfrak{D}_l^-$.

Если $l-\varepsilon<0$, то подпространства $\mathfrak{D}_l^-$ и $\mathfrak{D}_l^+$ имеют нулевое пересечение. В этом случае инвариантными подпространствами в $\mathfrak{D}$ являются $\mathfrak{D}_l^-$, $\mathfrak{D}_l^+$ и $\mathfrak{D}_l^-+\mathfrak{D}_l^+$. Мы будем обозначать через $T_\chi^-(g)$, $T_\chi^+(g)$ и $T_\chi^0(g)$ представления, индуцированные представлением в подпространствах $\mathfrak{D}_l^+$ и $\mathfrak{D}_l^+$ и фактор-пространстве $\mathfrak{D}_l^0=\mathfrak{D}/(\mathfrak{D}_l^++\mathfrak{D}_l^-)$.

Если же $l-\varepsilon\geqslant 0$, то подпространства $\mathfrak{D}_l^-$ и $\mathfrak{D}_l^+$ имеют ненулевое пересечение $\mathfrak{D}_l^0=\mathfrak{D}_l^-\cap\mathfrak{D}_l^+$. В этом случае мы будем обозначать через $T_\chi^-(g)$, $T_\chi^+(g)$ и $T_\chi^0(g)$ представления, индуцированные представлением $T_\chi(g)$ в фактор-пространствах $\mathfrak{D}_l^-/\mathfrak{D}_l^0$ и $\mathfrak{D}_l^+/\mathfrak{D}_l^0$ и подпространстве $\mathfrak{D}_l^0$.

Таким образом, вообще говоря, в целочисленном случае представлению $T_\chi(g)$ соответствуют три представления, $T_l^-(g)$, $T_l^+(g)$ и $T_l^0(g)$.

Исключением является случай $l=-1/2$, $\varepsilon=1/2$, где мы имеем лишь два представления, поскольку в этом случае $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_l^-+\mathfrak{D}_l^+$ и потому $T_l^0(g)$ — единичное представление.

Точно так же как и в нецелочисленном случае, доказывается, что представления $T_l^-(g)$, $T_l^+(g)$, $T_l^0(g)$ неприводимы.

6. Условия эквивалентности. В этом пункте будут сформулированы условия, при которых представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ группы $QU(2)$ эквивалентны. Мы дадим лишь эскиз доказательства. Подробный вывод этих условий, равно как и результатов следующего пункта, читатель найдет в книге [15] (п. 5, § 4 главы VII).

Назовем представление $T_{\chi_1}(g)$ *частично эквивалентным* представлению $T_{\chi_2}(g)$, если в пространстве $\mathfrak{D}$ есть такой ненулевой оператор Q, что

$$QT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)\,Q. \tag{1}$$

Если оператор Q имеет непрерывный обратный оператор Q^{-1}, то частично эквивалентные представления эквивалентны.

Из равенства (1) вытекает, что для инфинитезимальных операторов $A_k^{\chi_1}$ и $A_k^{\chi_2}$ выполняется равенство

$$QA_k^{\chi_1}=A_k^{\chi_2}Q, \qquad k=1,\ 2,\ 3. \tag{2}$$

Положим $k=3$ и заметим, что в базисе $\{e^{-in\theta}\}$ матрица оператора A_3^{χ} диагональна, причем в нецелочисленном случае все диагональные элементы различны между собой. Отсюда легко следует, что матрица оператора Q тоже диагональна. Кроме того, получаем, что для существования оператора Q должно выполняться равенство $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, где $\chi_1=(l_1,\ \varepsilon_1)$, $\chi_2=(l_2,\ \varepsilon_2)$.

Из выполнения условия (2) при $k=1,\ 2$ следует, что

$$QH_+^{\chi_1}=H_+^{\chi_2}Q \quad \text{и} \quad QH_-^{\chi_1}=H_-^{\chi_2}Q.$$

Используя вид операторов H_+ и H_- (см. формулы (9) и (9′) п. 3), получаем, что диагональные элементы q_{nn} оператора Q должны удовлетворять условиям

$$(n-l_1+\varepsilon)\,q_{n+1,\,n+1}=(n-l_2+\varepsilon)\,q_{nn} \tag{3}$$

и

$$(-n-l_2-\varepsilon-1)\,q_{n+1,\,n+1}=(-n-l_1-\varepsilon-1)\,q_{nn}. \tag{4}$$

Сравнение равенств (3) и (4) приводит к выводу, что если $q_{nn}\neq 0$, то либо $l_1=l_2$, либо $l_1=-l_2-1$.

Итак, *если представления* $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(l_1,\ \varepsilon_1)$ *и* $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(l_2,\ \varepsilon_2)$ *частично эквивалентны, то* $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, *и либо* $l_1=l_2$, *либо* $l_1=-l_2-1\equiv l$.

В первом случае представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ совпадают. Во втором случае из соотношения (3) получаем

$$q_{nn}=\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}.$$

Таким образом, в случае, когда $l_1=-l_2-1\equiv l$, *матрица оператора Q в базисе $\{e^{-in\theta}\}$ диагональна, причем на главной диагонали этой матрицы стоят числа* $\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}$.

Ясно, что в нецелочисленном случае оператор Q^{-1} существует и непрерывен (его матрицей является диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят числа $\Gamma(-n-l-\varepsilon)/\Gamma(l-n-\varepsilon+1)$). Таким образом, *если $\chi_1=-\chi_2$ и представление $T_{\chi_1}(g)$ не является целочисленным, то $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ эквивалентны.*

Сложнее обстоит дело в целочисленном случае. Пусть $\chi_1=(l, \varepsilon)$ — целочисленно, причем $l-\varepsilon<0$. В этом случае представление $T_{\chi}(g)$ приводимо. Оно индуцирует неприводимые представления $T_l^+(g)$, $T_l^-(g)$ и $T_l^0(g)$ в пространствах $\mathfrak{D}_l^+$, $\mathfrak{D}_l^-$ и $\mathfrak{D}_l^0\equiv\mathfrak{D}/(\mathfrak{D}_l^++\mathfrak{D}_l^-)$ соответственно.

Так как $\chi_2=(-l-1, \varepsilon)$, то и представление $T_{\chi_2}(g)$ приводимо. Оно индуцирует неприводимые представления $T^{+}_{-l-1}(g)$, $T^{-}_{-l-1}(g)$ и $T^{0}_{-l-1}(g)$ в пространствах

$$\mathfrak{D}^{+}_{-l-1}/\mathfrak{D}^{0}_{-l-1},\quad \mathfrak{D}^{-}_{-l-1}/\mathfrak{D}^{0}_{-l-1}\ \text{ и }\ \mathfrak{D}^{0}_{-l-1}\equiv\mathfrak{D}^{+}_{-l-1}\cap\mathfrak{D}^{-}_{-l-1}.$$

Точно так же как и в нецелочисленном случае, доказывается, что представления $T_l^+(g)$, $T_l^-(g)$ и $T_l^0(g)$ соответственно эквивалентны представлениям $T^{+}_{-l-1}(g)$, $T^{-}_{-l-1}(g)$ и $T^{0}_{-l-1}(g)$.

Можно показать, что других эквивалентностей, кроме указанных здесь, между представлениями не существует.

7. Условия унитарности. Прежде чем выяснить, при каких $\chi=(l, \varepsilon)$ представление $T_{\chi}(g)$ унитарно, установим, когда в пространстве $\mathfrak{D}$ есть эрмитова форма $H(f_1, f_2)$, инвариантная относительно $T_{\chi}(g)$, т. е. такая, что

$$H(f_1, f_2)=H(T_{\chi}(g)f_1, T_{\chi}(g)f_2). \tag{1}$$

Из равенства (1) следует, что для любого инфинитезимального оператора A^{χ} представления $T_{\chi}(g)$ имеем

$$(A^{\chi}f_1, f_2)+(f_1, A^{\chi}f_2)=0. \tag{2}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно представить в (1) $g=g(t)$, продифференцировать по t и положить $t=0$.

Дальнейший ход рассуждения напоминает проведенный в предыдущем пункте. Мы приходим при этом к следующему результату:

Представление $T_\chi(g)$, $\chi=(l,\varepsilon)$ *обладает инвариантной эрмитовой формой* $H(f_1,f_2)$, *если либо* $l=\bar{l}$, *либо* $l=-\bar{l}-1$. *В первом случае* l — *вещественное число, а во втором оно имеет вид* $l=-\frac{1}{2}+i\rho$, *где* ρ — *вещественное число.*

При этом эрмитова форма, инвариантная относительно представления $T_\chi(g)$, $\chi=\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \varepsilon\right)$, имеет вид

$$(f_1,f_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\bar{b}_n. \tag{3}$$

Здесь $f_1(e^{i\theta})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in\theta}$, $f_2(e^{i\theta})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{in\theta}$. Эту форму можно записать в интегральном виде

$$(f_1,f_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(e^{i\theta})\overline{f_2(e^{i\theta})}\,d\theta. \tag{4}$$

Точно так же при вещественном l эрмитова форма, инвариантная относительно $T_\chi(g)$, $\chi=(l,\varepsilon)$, имеет вид

$$H(f_1,f_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}a_n\bar{b}_n \tag{5}$$

или, в интегральной форме

$$H(f_1,f_2)=C\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i\varepsilon(\psi-\varphi)}\left|\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\right|^{-2l-2}\times$$

$$\times\left[\operatorname{sign}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\right]^{2\varepsilon}f_1(e^{i\psi})\overline{f_2(e^{i\varphi})}\,d\psi\,d\varphi, \tag{6}$$

где

$$C=\frac{\Gamma(l-\varepsilon+1)\,\Gamma(-l+\varepsilon)\,e^{i\varepsilon\pi}}{2^{2l+4}\pi^2\Gamma(-2l-1)}.$$

Теперь уже легко установить, при каких значениях $\chi=(l,\varepsilon)$ инвариантная эрмитова форма $H(f_1,f_2)$ положительно определена, т. е. когда представление $T_\chi(g)$ унитарно.

Очевидно, что для любой функции $f(e^{i\theta})$ из $\mathfrak{D}$ имеем

$$(f,f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\geqslant 0.$$

Поэтому все представления $T_\chi(g)$, $\chi=\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \varepsilon\right)$ унитарны. Мы будем называть их *унитарными представлениями основной серии.*

При этом $T_\chi(g)$, $\chi=\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ 0\right)$ называются *унитарными представлениями первой основной серии*, а $T_\chi(g)$, $\chi=\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \frac{1}{2}\right)$ — *унитарными представлениями второй основной серии.*

Рассмотрим теперь случай, когда $\chi=(l, \varepsilon)$, где l — вещественное число. Для положительной определенности инвариантной эрмитовой формы необходимо и достаточно, чтобы при всех n выполнялось неравенство

$$\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}>0.$$

Так как

$$\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}=\frac{(l-n-\varepsilon)\,\Gamma(l-n-\varepsilon)}{(-n-l-\varepsilon-1)\,\Gamma(-n-l-\varepsilon-1)},$$

то при всех n должно выполняться неравенство

$$\frac{l-n-\varepsilon}{-n-l-\varepsilon-1}>0. \tag{7}$$

В частности, при $n=-1$ получаем $\frac{l+1-\varepsilon}{l+\varepsilon}<0$. Так как $\varepsilon=0$ или $\frac{1}{2}$, то $l+1-\varepsilon\geqslant l+\varepsilon$. Поэтому из неравенства (7) вытекает, что $l+1-\varepsilon>0$, $l+\varepsilon<0$. Отсюда получаем $\varepsilon=0$ и $-1<l<0$. Итак, если $\chi=(l, \varepsilon)$, где l — вещественное число, то представление $T_\chi(g)$ унитарно тогда и только тогда, когда $\varepsilon=0$ и $-1<l<0$. Соответствующие представления $T_\chi(g)$ называются *унитарными представлениями дополнительной серии.*

Наконец, унитарные представления группы $QU(2)$ возникают в целочисленном случае, т. е. в случае, когда $l+\varepsilon$ и $l-\varepsilon$ — целые числа. Пусть $l-\varepsilon<0$. В этом случае в пространстве $\mathfrak{D}$ есть два непересекающиеся инвариантные подпространства $\mathfrak{D}_l^+$ и $\mathfrak{D}_l^-$ (см. п. 5). Инвариантная эрмитова форма в пространстве $\mathfrak{D}_l^+$ имеет вид

$$H_l^+(f_1, f_2)=\sum_{n=-\infty}^{l-\varepsilon}\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}a_n\bar{b}_n, \tag{8}$$

а в пространстве $\mathfrak{D}_l^-$ — вид

$$H_l^-(f_1, f_2)=\sum_{n=-l-\varepsilon}^{\infty}\frac{\Gamma(1+n+l+\varepsilon)}{\Gamma(n-l+\varepsilon)}a_n\bar{b}_n. \tag{9}$$

Эти формы положительно определены. Отсюда вытекает, что при целочисленном $\chi=(l, \varepsilon)$, $l-\varepsilon<0$, представления $T_l^+(g)$ и $T_l^-(g)$ унитарны. Унитарны и эквивалентные им представления $T_{-l-1}^{\pm}$ и T_{-l-1}^{-}, действующие соответственно в фактор-пространствах $\mathfrak{D}^{\pm}_{-l-1}/\mathfrak{D}^{0}_{-l-1}$ и $\mathfrak{D}^{-}_{-l-1}/\mathfrak{D}^{0}_{-l-1}$, где $\mathfrak{D}^{0}_{-l-1}=\mathfrak{D}^{+}_{-l-1}\cap\mathfrak{D}^{-}_{-l-1}$. Для этих представлений инвариантные скалярные произведения задаются равенствами

$$H^{+}_{-l-1}(f_1, f_2)=\sum_{n=-\infty}^{-l-\varepsilon-1}\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}a_n\bar{b}_n \tag{10}$$

и

$$H^{-}_{-l-1}(f_1, f_2)=\sum_{n=l-\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+n+l-\varepsilon)}{\Gamma(n-l+\varepsilon)}a_n\bar{b}_n. \tag{11}$$

Формы (8) и (9) также можно представить в интегральном виде. Именно:

$$H^{+}_{l}(f_1, f_2)=\frac{1}{\pi\Gamma(-2l-1)}\iint\limits_{|z|<1}(1-|z|^2)^{-2l-2}\,|z|^{2l-2\varepsilon}f_1(z)\overline{f_2(z)}dx\,dy, \tag{12}$$

где $z=x+iy$. Аналогично выражается форма (9).

Заметим еще, что группа $QU(2)$ не имеет конечномерных унитарных неприводимых представлений (за исключением единичного представления). Если $\chi=(l, \varepsilon)$ — целочисленно и $l-\varepsilon<0$, то инвариантная эрмитова форма для конечномерного представления $T^0_\chi(g)$ задается равенством

$$H^0_l(f_1, f_2)=\sum_{n=l-\varepsilon+1}^{-l-\varepsilon-1}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-l+\varepsilon)\Gamma(-n-l-\varepsilon)}a_n\bar{b}_n.$$

Очевидно, что эта форма не является положительно определенной.

8. Унитарно-сопряженные представления. Назовем представления $T(g)$ и $Q(g)$ *унитарно-сопряженными* относительно некоторой эрмитовой формы $H(f_1, f_2)$, если

$$H(T(g)f_1, f_2)=H(f_1, Q(g^{-1})f_2). \tag{1}$$

Мы покажем сейчас, что представления $T_\chi(g)$, $\chi=(l, \varepsilon)$ и $T_{-\bar{\chi}}(g)$, $-\bar{\chi}=(-\bar{l}-1, \varepsilon)$ унитарно-сопряжены относительно эрмитовой формы

$$(f_1, f_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\bar{b}_n. \tag{2}$$

В самом деле, имеет место равенство

$$(f_1, f_2)=\langle f_1, e^{2i\varepsilon\theta}\overline{f_2}\rangle,$$

где

$$\langle f_1, f_2\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nb_{-2\varepsilon-n}.$$

Но в п. 5 было показано, что

$$\langle T_\chi(g) f_1, f_2\rangle = \langle f_1, T_{-\chi}(g^{-1}) f_2\rangle,$$

где $-\chi = (-l-1, \varepsilon)$. Поэтому

$$(T_\chi(g) f_1, f_2) = \langle f_1, T_{-\chi}(g^{-1}) e^{2i\varepsilon\theta} \overline{f_2}\rangle = (f_1, T_{-\bar\chi}(g^{-1}) f_2).$$

Тем самым доказано, что представления $T_\chi(g)$ и $T_{-\bar\chi}(g)$ унитарно сопряжены относительно эрмитовой формы (f_1, f_2). В частности, если $\chi = \left(-\frac{1}{2} + i\rho, \varepsilon\right)$, то $-\bar\chi = \chi$, и мы получаем ранее доказанное утверждение об инвариантности формы (f_1, f_2) относительно представлений $T_\chi(g)$, $\chi = \left(-\frac{1}{2} + i\rho, \varepsilon\right)$:

$$(T_\chi(g) f_1, T_\chi(g) f_2) = (f_1, T_\chi(g^{-1}) T_\chi(g) f_2) = (f_1, f_2).$$

§ 3. Матричные элементы представлений $T_\chi(g)$

1. Вычисление матричных элементов. В этом параграфе мы вычислим матричные элементы представлений $T_\chi(g)$ группы $QU(2)$. Выберем в пространстве $\mathfrak{D}$ представления $T_\chi(g)$ базис, состоящий из функций $\{e^{-in\theta}\}$. Так как

$$T_\chi(g) f(e^{i\theta}) = (\beta e^{i\theta} + \bar\alpha)^{l+\varepsilon} (\bar\beta e^{-i\theta} + \alpha)^{l-\varepsilon} f\left(\frac{\alpha e^{i\theta} + \bar\beta}{\beta e^{i\theta} + \bar\alpha}\right) \tag{1}$$

(см. формулу (5) п. 2 § 2), то

$$T_\chi(g) e^{-in\theta} = (\beta e^{i\theta} + \bar\alpha)^{l+n+\varepsilon} (\bar\beta e^{-i\theta} + \alpha)^{l-n-\varepsilon} e^{-in\theta}. \tag{2}$$

Матричные элементы $t^\chi_{mn}(g)$ представления $T_\chi(g)$ в базисе $\{e^{-in\theta}\}$ являются коэффициентами Фурье в разложении функции $T_\chi(g) e^{-in\theta}$ по системе $\{e^{-im\theta}\}$:

$$T_\chi(g) e^{-in\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^\chi_{mn}(g) e^{-im\theta}. \tag{3}$$

Из формулы для коэффициентов Фурье получаем

$$t^\chi_{mn}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\beta e^{i\theta} + \bar\alpha)^{l+n+\varepsilon} (\bar\beta e^{-i\theta} + \alpha)^{l-n-\varepsilon} e^{i(m-n)\theta} d\theta. \tag{4}$$

Мы получили интегральное представление для матричных элементов. С помощью подстановки $e^{i\theta} = z$ получаем представление $t^\chi_{mn}(g)$ в виде интеграла по окружности Γ: $|z| = 1$

$$t^\chi_{mn}(g) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\beta z + \bar\alpha)^{l+n+\varepsilon} (\alpha z + \bar\beta)^{l-n-\varepsilon} z^{m-l+\varepsilon-1} dz. \tag{5}$$

Подынтегральная функция в этой формуле имеет внутри контура Г две точки ветвления, $z=0$ и $z=-\frac{\overline{\beta}}{\alpha}$, с показателями $m-l+\varepsilon-1$ и $l-n-\varepsilon$ соответственно. Так как сумма этих показателей равна целому числу $m-n-1$, то подынтегральная функция однозначно определена на контуре Г.

Разложим матричные элементы по степеням α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Так как $|\alpha|>|\beta|$, то

$$(\overline{\alpha}+\beta e^{i\theta})^{l+n+\varepsilon}=\overline{\alpha}^{\,l+n+\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+n+\varepsilon+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+n-k+\varepsilon+1)}\left(\frac{\beta e^{i\theta}}{\overline{\alpha}}\right)^{k}.$$

Аналогично,

$$(\alpha+\overline{\beta}e^{-i\theta})^{l-n-\varepsilon}=\alpha^{l-n-\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l-n-k-\varepsilon+1)}\left(\frac{\overline{\beta}e^{-i\theta}}{\alpha}\right)^{k}.$$

Перемножая эти разложения и подставляя полученный ряд в интеграл (4), получаем

$$t^{\chi}_{mn}(g)=\Gamma(l+n+\varepsilon+1)\Gamma(l-n-\varepsilon+1)\alpha^{l-n-\varepsilon}\,\overline{\alpha}^{l+m+\varepsilon}\beta^{n-m}\times$$
$$\times\sum_{s=\max(0,\,m-n)}^{\infty}\frac{|\beta/\alpha|^{2s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(l-n-s-\varepsilon+1)\Gamma(n-m+s+1)\Gamma(l+m-s+\varepsilon+1)}.\tag{6}$$

2. Выражение через углы Эйлера. Выбранный нами базис $\{e^{im\theta}\}$ в пространстве $\mathfrak{D}$ удобен тем, что в нем весьма простой вид имеют матрицы операторов $T_\chi(h)$, где

$$h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{it}{2}}\end{pmatrix}\tag{1}$$

— диагональные матрицы. Из формулы (1) п. 2 видно, что оператор $T_\chi(h)$ имеет вид

$$T_\chi(h)f(e^{i\theta})=e^{-i\varepsilon}f(e^{i(\theta+t)})\tag{2}$$

и, следовательно,

$$T_\chi(h)e^{-im\theta}=e^{-i(m+\varepsilon)t}e^{-im\theta}.\tag{3}$$

Поэтому матрица оператора $T_\chi(h)$ в базисе $\{e^{-im\theta}\}$ является бесконечной диагональной матрицей, на главной диагонали которой стоят числа $e^{-i(m+\varepsilon)t}$.

В п. 2 § 1 было показано, что любой элемент g группы $QU(2)$ может быть представлен в виде

$$g=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где φ, τ, ψ — углы Эйлера матрицы g. Поскольку матрица представления $T_\chi(g)$ для диагональных матриц уже найдена, осталось найти матрицу оператора $T_\chi(g_\tau)$, соответствующего элементу

$$g_\tau=\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} \end{pmatrix}$$

группы $QU(2)$.

Подставив в формулу (4) п. 1

$$\alpha=\operatorname{ch}\frac{\tau}{2},\quad \beta=\operatorname{sh}\frac{\tau}{2},$$

получим

$$t^\chi_{mn}(g_\tau)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{i\theta}\right)^{l+n+\varepsilon}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}\right)^{l-n-\varepsilon}e^{i(m-n)\theta}\,d\theta. \tag{5}$$

Введем функцию $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$, положив

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{i\theta}\right)^{l+n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}\right)^{l-n}e^{i(m-n)\theta}\,d\theta, \tag{6}$$

где $0\leqslant\tau<\infty$, l — любое комплексное число, а m, n — либо одновременно целые числа, либо одновременно полуцелые числа. Сравнивая формулы (5) и (6), получаем выражение $t^\chi_{mn}(g_\tau)$ через $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$:

$$t^\chi_{mn}(g_\tau)=\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau),\quad \chi=(l,\varepsilon), \tag{7}$$

где $m'=m+\varepsilon$, $n'=n+\varepsilon$.

Теперь уже легко выразить $t^\chi_{mn}(g)$ через углы Эйлера матрицы g. Из разложения (4) вытекает, что

$$T_\chi(g)=T_\chi(h_\varphi)\,T_\chi(g_\tau)\,T_\chi(h_\psi), \tag{8}$$

где через h_φ и h_ψ обозначены диагональные матрицы, а g_τ — матрица $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} \end{pmatrix}$. Мы видели, что $T_\chi(h_\varphi)$ и $T_\chi(h_\psi)$ — диагональные матрицы, на главных диагоналях которых стоят соответственно элементы $e^{-i\varphi(m+\varepsilon)} \equiv e^{-im'\varphi}$ и $e^{-i\psi(n+\varepsilon)} \equiv e^{-in'\psi}$. Элементы же матрицы $T_\chi(g_\tau)$ равны $\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau)$. Поэтому элементы матрицы $T_\chi(g)$ имеют следующий вид:

$$t^\chi_{mn}(\varphi, \tau, \psi) = e^{-i(m'\varphi + n'\psi)}\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau), \tag{9}$$

где $\chi = (l, \varepsilon)$, $m' = m + \varepsilon$, $n' = n + \varepsilon$. Тем самым получено выражение $t^\chi_{mn}(\varphi, \tau, \psi)$ через углы Эйлера.

3. Различные выражения функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$. Мы доказали в предыдущем пункте, что матричные элементы представлений $T_\chi(g)$ выражаются через показательную функцию и функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$. Перейдем к изучению функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$. Поскольку эти функции играют для группы $QU(2)$ ту же роль, что функции $P^l_{mn}(z)$ для группы $SU(2)$, назовем $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$ *функцией Якоби* от z.

Из полученных в п. 1 выражений для матричных элементов $t^\chi_{mn}(g)$ вытекают соответствующие выражения для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$. Именно, полагая в формуле (5) п. 1 $\alpha = \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}$, $\beta = \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}$, имеем

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} + z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{l+n}\left(z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} + \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{l-n} z^{m-l-1}\,dz, \tag{1}$$

где Γ — окружность $|z| = 1$.

Точно так же, полагая в формуле (6) п. 1 $\alpha = \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}$, $\beta = \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}$, находим

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau) = \Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)^{2l}\left(\operatorname{th}\frac{\tau}{2}\right)^{n-m} \times$$
$$\times \sum_{s=\max(0,\, m-n)}^{\infty} \frac{\operatorname{th}^{2s}\frac{\tau}{2}}{\Gamma(n-m+s+1)\,\Gamma(l+m-s+1)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(l-n-s+1)}. \tag{2}$$

Из формулы (2) вытекает, что $\mathfrak{P}^l_{mn}(1) = \delta_{mn}$, где δ_{mn} — символ Кронекера. Это легко получить непосредственно: при $\tau = 0$ матрица g_τ является единичной и поэтому $T_\chi(g_\tau)$ — единичный оператор.

Выведем дальнейшие интегральные представления для $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$. Перепишем формулу (1) в виде

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\left(\operatorname{ch}\tau+\frac{z^2+1}{2z}\operatorname{sh}\tau\right)^{l-n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}z^{m-n-1}dz. \qquad (3)$$

При этом в силу теоремы Коши мы можем считать, что Γ — окружность $|z|=a$, где $1<a<\operatorname{cth}\frac{\tau}{2}$.

Сделав в интеграле (3) подстановку

$$w=\operatorname{ch}\tau+\frac{z^2+1}{2z}\operatorname{sh}\tau,$$

получим

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'}w^{l-n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}\frac{z^{m-n}dw}{\sqrt{w^2-2w\operatorname{ch}\tau+1}}. \qquad (4)$$

Здесь

$$z=\frac{w-\operatorname{ch}\tau\pm\sqrt{w^2-2w\operatorname{ch}\tau+1}}{\operatorname{sh}\tau}, \qquad (5)$$

причем знак корня выбирается так, чтобы выполнялись неравенства $1\leqslant|z|\leqslant\operatorname{cth}\frac{t}{2}$. Через Γ' (рис. 4) обозначен контур, охватывающий отрезок $[e^{-\tau};\ e^{\tau}]$ против часовой стрелки и пересекающий вещественную ось в промежутках $(0,\ e^{-\tau})$ и $(e^{\tau},\ \infty)$. На этом контуре подынтегральная функция однозначно определена, если выбрать знак корня в формуле (5) как указано выше, а под w^{l-n} понимать выражение $\exp[(l-n)\ln w]$, где $\ln w$ — главное значение логарифма.

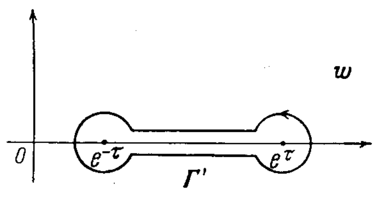

Рис. 4.

Подстановка $w=e^t$ преобразует полученное выражение в

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma''}e^{\left(l-n+\frac{1}{2}\right)t}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}\frac{z^{m-n}dt}{\sqrt{2(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\tau)}}. \qquad (6)$$

Здесь Γ'' (рис. 5) — контур, лежащий в полосе $-\pi < \operatorname{Im} t < \pi$ и охватывающий отрезок $[-\tau, \tau]$ против часовой стрелки. Значение z получается из (5) заменой $w = e^t$.

В формуле (3) в качестве Γ можно взять и окружность радиуса a, где $\operatorname{th}\frac{\tau}{2} < a < 1$. В этом случае мы получим выражение вида (4), но контур Γ' пробегается по часовой стрелке, а знак корня в (5) выбирается так, что

$$\operatorname{th}\frac{\tau}{2} < |z| < 1.$$

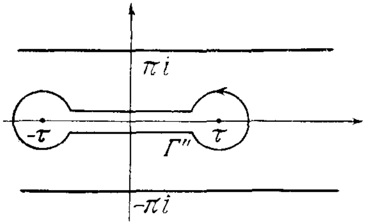

Рис. 5.

Стягивая в полученных формулах контуры интегрирования к охватываемым ими отрезкам, получаем выражения для $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ в виде обычных интегралов. Например, мы получаем

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{\left(l-n+\frac{1}{2}\right)t}}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} t)}} \times$$
$$\times \left[z_+^{m-n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} + z_+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n} + z_-^{m-n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} + z_-\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}\right] dt. \qquad (7)$$

Здесь

$$z_\pm = \frac{e^t - \operatorname{ch}\tau \pm i e^{\frac{t}{2}}\sqrt{2(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} t)}}{\operatorname{sh}\tau}. \qquad (8)$$

Полученное выражение упрощается, если $n = m$ или $n = 0$. При $n = m$ получаем после простых преобразований

$$\mathfrak{P}^l_{nn}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} \frac{\operatorname{ch}\left(l-n+\frac{1}{2}\right)t\cos 2n\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\tau}{2} - \operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}}\, dt, \qquad (9)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}}. \qquad (10)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$\mathfrak{P}^l_{nn}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\tau \frac{\operatorname{ch}\left(l-n+\frac{1}{2}\right)t\,T_{2n}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}}\right)dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\tau}{2}-\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}}, \tag{11}$$

где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

Если же $n=0$, то получаем

$$\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{e^{\left(l+\frac{1}{2}\right)t}(z_+^m+z_-^m)}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}t)}}\,dt. \tag{12}$$

Это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{e^{\left(l+\frac{1}{2}\right)t}\,T_m\left(\dfrac{e^t-\operatorname{ch}\tau}{\operatorname{sh}\tau}\right)dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\tau}{2}-\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}}. \tag{12'}$$

В частности, при $m=0$ получаем

$$\mathfrak{P}^l_{00}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\tau\frac{\operatorname{ch}\left(l+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\tau}{2}-\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}}. \tag{13}$$

Аналогичные формулы получаются, если выбрать в (3) контур Γ, изображенный на рис. 6. При преобразовании $w=\operatorname{ch}\tau+\frac{z^2+1}{2z}\operatorname{sh}\tau$ он переходит в контур Γ', изображенный на рис. 7. Если обозначить радиус окружности с центром в точке O на рис. 7 через ρ, то при $\rho\to 0$ подынтегральная функция в формуле (4) есть $O(\rho^{m-l+1})$, а радиус большой окружности есть $O(\rho^{-1})$. Поэтому при $\operatorname{Re} l<m$ интеграл по большой окружности стремится к нулю, когда $\rho\to 0$. Точно так же устанавливаем, что интеграл по малой окружности стремится к нулю, когда $\operatorname{Re} l>n-1$.

Итак, если $n-1<\operatorname{Re} l<m$, то мы получаем

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma'} w^{l-n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}\frac{z^{m-n}\,dw}{\sqrt{w^2-2w\operatorname{ch}\tau+1}},\tag{14}$$

где контур Γ' охватывает отрицательную полуось по часовой стрелке. Знак корня выбран так, чтобы значение z, определяемое формулой (5), удовлетворяло неравенствам $\operatorname{th}\frac{\tau}{2}<|z|<1$.

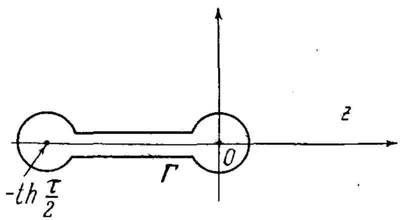

Рис. 6.

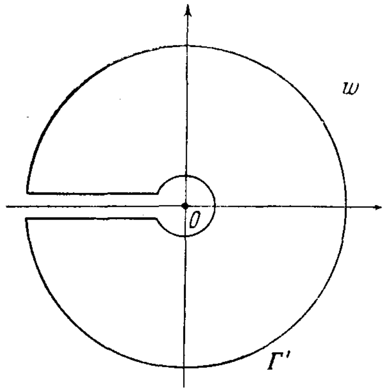

Рис. 7.

Стянем контур к отрицательной полуоси; получим

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=$$

$$=\frac{\sin(l-n)\pi}{\pi}\int_0^\infty w^{l-n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}\frac{z^{m-n}\,dw}{\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}},\tag{15}$$

где

$$z=\frac{-w-\operatorname{ch}\tau+\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}}{\operatorname{sh}\tau}.\tag{16}$$

При $n=0$ получаем

$$\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\sin l\pi}{\pi}\int_0^\infty\frac{w^l z^m\,dw}{\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}}.\tag{17}$$

В частности,

$$\mathfrak{P}^l_{00}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\sin l\pi}{\pi}\int_0^\infty\frac{w^l\,dw}{\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin l\pi}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\left(l+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}\tau}}.\tag{18}$$

4. Зональные сферические функции представлений $T_\chi(g)$ и функции Лежандра. Пусть $\varepsilon=0$, т. е. $\chi=(l,\ 0)$. Тогда в пространстве $\mathfrak{D}$ есть функция, инвариантная относительно всех операторов $T_\chi(h)$, где h — диагональная матрица из группы $QU(2)$:

$$h=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}.$$

Именно, такой функцией является базисный элемент 1. Матричный элемент $t_{00}^\chi(g)$, соответствующий такому элементу базиса, мы назвали ранее (глава I, п. 5, § 2) зональной сферической функцией представления $T_\chi(g)$ относительно подгруппы Ω диагональных матриц.

Итак, при $\varepsilon=0$ представление $T_\chi(g)$ имеет зональную сферическую функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению (см. п. 5 § 2 главы I)

$$t_{00}^\chi(h_1gh_2)=t_{00}^\chi(g), \tag{1}$$

где $h_1,\ h_2\in\Omega$. Отсюда непосредственно вытекает, что $t_{00}^\chi(g)$ зависит только от угла Эйлера τ матрицы g. Впрочем, это ясно и из формулы (9) п. 2. Полагая в этой формуле $\varepsilon=m=n=0$, получаем

$$t_{00}^\chi(g)=\mathfrak{P}_{00}^l(\operatorname{ch}\tau). \tag{2}$$

Назовем функцию $\mathfrak{P}_{00}^l(\operatorname{ch}\tau)$ *функцией Лежандра с индексом l* и обозначим ее $\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)$. Таким образом,

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=t_{00}^\chi(0,\ \tau,\ 0)=\mathfrak{P}_{00}^l(\operatorname{ch}\tau), \tag{3}$$

где $\chi=(l,\ 0)$. Полагая в формуле (6) п. 2 и формулах (1) и (2) п. 3 $m=n=0$, находим следующие выражения для функций Лежандра:

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{i\theta}\right)^l\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}\right)^l d\theta\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{ch}\tau+\operatorname{sh}\tau\cos\theta)^l\,d\theta, \tag{4}$$

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^l\left(z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^l z^{-l-1}dz\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\operatorname{ch}\tau+\frac{z^2+1}{2z}\operatorname{sh}\tau\right)^l\frac{dz}{z}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\tau\frac{\operatorname{ch}\left(l+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\tau}{2}-\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sin\pi l}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\left(l+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}\tau}}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\Gamma^2(l+1)}{2^l}(1+\operatorname{ch}\tau)^l\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{\Gamma^2(s+1)\Gamma^2(l-s+1)}\left(\frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\operatorname{ch}\tau+1}\right)^s. \tag{7}$$

Из формулы (4) видно, что если l — целое число, то функция Лежандра $\mathfrak{P}_l(z)$ совпадает с многочленом Лежандра $P_l(z)$:

$$\mathfrak{P}_l(z) = P_l(z). \tag{8}$$

Функции Лежандра $\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau)$, соответствующие основной серии неприводимых унитарных представлений группы $QU(2)$, называют *функциями конуса*.

5. Присоединенные функции Лежандра. Рассмотрим теперь присоединенные сферические функции представления $T_\chi(g)$, $\chi=(l, 0)$, т. е. матричные элементы $t^\chi_{m0}(g)$, находящиеся в одном столбце с зональной сферической функцией $t^\chi_{00}(g)$. По формуле (5) п. 2 эти элементы имеют вид

$$t^\chi_{m0}(g) = e^{-im\varphi}\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau). \tag{1}$$

Из формулы (1) видно, что они не зависят от угла Эйлера ψ, т. е. постоянны на левых классах смежности по подгруппе Ω диагональных матриц

$$t^\chi_{m0}(gh) = t^\chi_{m0}(g), \qquad h\in\Omega. \tag{2}$$

Определим *присоединенные функции Лежандра* $\mathfrak{P}^m_l(z)$ (l — комплексное число, m — целое число) формулой

$$\mathfrak{P}^m_l(z) = \frac{\Gamma(l+m+1)}{2\pi\Gamma(l+1)}\int_0^{2\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\theta)^l e^{im\theta}d\theta. \tag{3}$$

Эта формула однозначно определяет $\mathfrak{P}^m_l(z)$ в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$. Поскольку отображение $z=\operatorname{ch}\tau$ переводит полосу $0<\operatorname{Im}\tau<\pi$ в плоскость, разрезанную вдоль отрезка $[-1, 1]$, функция $\mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau)$ однозначно определена в этой полосе.

По формуле (6) п. 2 имеем

$$\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{ch}\tau+\operatorname{sh}\tau\cos\theta)^l e^{im\theta}d\theta. \tag{4}$$

Сравнивая формулы (3) и (4), получаем

$$\mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau) = \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+1)}\,\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau), \tag{5}$$

и потому при $g=g(\varphi, \tau, \psi)$ имеем

$$t^\chi_{m0}(g) = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+m+1)}e^{-im\varphi}\,\mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau). \tag{6}$$

Из формул (1) и (2) п. 3 вытекают следующие выражения для присоединенных функций Лежандра:

$$\mathfrak{P}_l^m(\operatorname{ch}\tau)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+1)}\int_\Gamma\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^l\left(z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^l z^{m-l-1}dz\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+1)}\int_\Gamma\left(\operatorname{ch}\tau+\frac{z^2+1}{2z}\operatorname{sh}\tau\right)^l z^{m-1}dz, \tag{7}$$

$$\mathfrak{P}_l^m(\operatorname{ch}\tau)=\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l+1)\operatorname{ch}^{2l}\frac{\tau}{2}\times$$
$$\times\sum_{s=\max(0,\,m)}^{\infty}\frac{\operatorname{th}^{2s-m}\frac{\tau}{2}}{\Gamma(s-m+1)\,\Gamma(l+m-s+1)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(l-s+1)}. \tag{8}$$

Если l — целое неотрицательное число и $|m|\leqslant l$, то из формул (13) п. 9 § 4 главы III и формулы (7) получаем

$$\mathfrak{P}_l^m(z)=P_l^m(z). \tag{9}$$

6. Соотношения симметрии для функций $\mathfrak{P}_{mn}^l(\operatorname{ch}\tau)$. Как и многочлены Якоби $P_{mn}^l(\cos\theta)$, функции Якоби $\mathfrak{P}_{mn}^l(\operatorname{ch}\tau)$ удовлетворяют некоторым соотношениям симметрии относительно индексов l, m, n. Покажем сначала, что эти функции не меняются при изменении знаков индексов m и n, т. е. что

$$\mathfrak{P}_{mn}^l(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}_{-m,\,-n}^l(\operatorname{ch}\tau). \tag{1}$$

Рассмотрим оператор S, переводящий $f(e^{i\theta})$ в $e^{2il\theta}f(e^{-i\theta})$. Непосредственный подсчет показывает, что оператор S перестановочен с операторами $T_\chi(g_\tau)$, где

$$g_\tau=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\end{pmatrix},$$

т. е.

$$ST_\chi(g_\tau)=T_\chi(g_\tau)\,S. \tag{2}$$

В этом можно убедиться также из следующих теоретико-групповых соображений. Представления $T_\chi(g)$ можно распространить на группу квазиунитарных матриц, определитель которых равен ± 1, не изменяя формул, задающих представления. При этом $S=T_\chi(s)$, где $s=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Но

$$sg_\tau=g_\tau s=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\\ \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\end{pmatrix},$$

и потому

$$T_\chi(s)\,T_\chi(g_\tau)=T_\chi(g_\tau)\,T_\chi(s),$$

т. е.

$$ST_\chi(g_\tau)=T_\chi(g_\tau)\,S.$$

Матричные элементы s_{mn} оператора S в базисе $\{e^{-im\theta}\}$ равны нулю, если $m+n\neq-2\varepsilon$, и равны единице, если $m+n=-2\varepsilon$. Перемножая матрицы в равенстве (2) и сравнивая соответствующие элементы слева и справа, находим

$$t^\chi_{-2\varepsilon-m,\,n}(g_\tau)=t^\chi_{m,\,-2\varepsilon-n}(g_\tau).$$

Так как $t^\chi_{mn}(g_\tau)=\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau)$, где $m'=m+\varepsilon$, $n'=n+\varepsilon$, то

$$\mathfrak{P}^l_{-m-\varepsilon,\,n+\varepsilon}(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}^l_{m+\varepsilon,\,-n-\varepsilon}(\operatorname{ch}\tau).$$

Ввиду произвольности m, n, ε, l, получаем

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}^l_{-m,\,-n}(\operatorname{ch}\tau)$$

для всех комплексных значений l и всех целых или полуцелых значений m и n.

Из соотношения симметрии (1) и формулы (5) п. 5 вытекает следующее соотношение симметрии для присоединенных функций Лежандра

$$\mathfrak{P}_l^{-m}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+m+1)}\,\mathfrak{P}_l^m(\operatorname{ch}\tau),\tag{1'}$$

где m — целое число.

Чтобы получить следующее соотношение симметрии, заметим, что выражение (2) п. 3 при замене m на $-n$, а n на $-m$ умножается на $\dfrac{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)}$. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{P}^l_{-n,\,-m}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)\tag{3}$$

или, в силу соотношения (1), что

$$\mathfrak{P}^l_{nm}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau).\tag{3'}$$

Перейдем теперь к соотношениям, связывающим функции Якоби с различными значениями l. Мы доказали в п. 5 § 2, что если χ не целочисленно, то представления $T_\chi(g)$, $\chi=(l,\ \varepsilon)$ и $T_{-\chi}(g)$, $-\chi=(-l-1,\ \varepsilon)$ эквивалентны. Именно, они связаны соотношением

$$QT_\chi(g)=T_{-\chi}(g)\,Q,\tag{4}$$

где Q — оператор, матрица которого в базисе $\{e^{-in\theta}\}$ диагональна, причем на главной диагонали стоят элементы

$$q_{nn}=\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-l-n-\varepsilon)}.\tag{5}$$

Применяя соотношение (4) к элементу

$$g_\tau=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\end{pmatrix}$$

группы $QU(2)$ и принимая во внимание, что

$$t^\chi_{mn}(g_\tau)=\mathfrak{P}^l_{m+\varepsilon,\, n+\varepsilon}(\operatorname{ch}\tau),$$

получим равенство

$$\frac{\Gamma(l-m-\varepsilon+1)}{\Gamma(-l-m-\varepsilon)}\mathfrak{P}^l_{m+\varepsilon,\, n+\varepsilon}(\operatorname{ch}\tau)=$$
$$=\frac{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(-l-n-\varepsilon)}\mathfrak{P}^{-l-1}_{m+\varepsilon,\, n+\varepsilon}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (6)$$

Заменяя $m+\varepsilon$ на m и $n+\varepsilon$ на n, и используя соотношение $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, перепишем равенство (6) в виде

$$\mathfrak{P}^{-l-1}_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=(-1)^{m-n}\frac{\Gamma(l-m+1)\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l-n+1)\Gamma(l+n+1)}\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (7)$$

В силу равенства (3′) отсюда следует, что

$$\mathfrak{P}^{-l-1}_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=(-1)^{m-n}\mathfrak{P}^l_{nm}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (7')$$

Положив в формуле (7) $n=0$ и применив соотношение (5) п. 5, получим

$$\mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}^m_{-l-1}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (8)$$

В частности,

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}_{-l-1}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (9)$$

Следующее соотношение для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ вытекает из унитарной сопряженности представлений $T_\chi(g)$ и $T_{-\bar\chi}(g)$, $-\bar\chi=(-\bar l-1,\ \varepsilon)$ (см. п. 8, § 2):

$$(T_\chi(g)e^{-in\theta},\ e^{-im\theta})=(e^{-in\theta},\ T_{-\bar\chi}(g^{-1})e^{-im\theta})=$$
$$=\overline{(T_{-\bar\chi}(g^{-1})e^{-im\theta},\ e^{-in\theta})}.$$

Иными словами,

$$t^\chi_{mn}(g)=\overline{t^{-\bar\chi}_{nm}(g^{-1})}.$$

Положим в доказанном равенстве

$$g=g_\tau\equiv\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} & \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\\ \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} & \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\end{pmatrix}.$$

Так как углы Эйлера матрицы g_τ^{-1} равны π, τ, $-\pi$, то

$$\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau)=e^{i\pi(m'-n')}\overline{\mathfrak{P}^{-\bar{l}-1}_{n'm'}(\operatorname{ch}\tau)}$$

или, иначе,

$$\overline{\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)}=(-1)^{n-m}\mathfrak{P}^{-\bar{l}-1}_{nm}(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}^{\bar{l}}_{mn}(\operatorname{ch}\tau). \tag{10}$$

Итак, мы доказали, что

$$\overline{\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)}=\mathfrak{P}^{\bar{l}}_{mn}(\operatorname{ch}\tau). \tag{10'}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$, $0\leqslant\tau<\infty$ с вещественным значком l принимает вещественные значения. Покажем что тем же свойством обладают функции

$$f(\tau)\equiv\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho-n\right)}\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mn}(\operatorname{ch}\tau).$$

В самом деле, из формул (10) и (3') следует

$$\overline{\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mn}(\operatorname{ch}\tau)}=(-1)^{n-m}\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{nm}(\operatorname{ch}\tau)=$$
$$=(-1)^{n-m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho-n\right)}\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mn}(\operatorname{ch}\tau). \tag{11}$$

Так как

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\rho-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\rho-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho+n\right)}=\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+i\rho+n\right)}{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+i\rho+m\right)}=(-1)^{m-n},$$

то из (11) вытекает, что $\overline{f(\tau)}=f(\tau)$. Тем самым вещественность $f(\tau)$ доказана. Отсюда вытекает, что функции $\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{nn}(\operatorname{ch}\tau)$ принимают лишь вещественные значения при $0\leqslant\tau<\infty$ и, в частности, что $\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau)$ — вещественная функция.

7. Функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$ в целочисленном случае. Пусть $\chi=(l,\varepsilon)$ целочисленно, т. е. пусть $l+\varepsilon$ и $l-\varepsilon$ — целые числа. Как было показано в п. 5 § 2, в этом случае представление $T_\chi(g)$ приводимо.

Если $l-\varepsilon\leqslant 0$, то при $n\geqslant -l-\varepsilon$ функция $T_\chi(g)e^{-in\theta}$ принадлежит $\mathfrak{D}_l^-$ и потому разлагается по функциям $e^{-im\theta}$, $m\geqslant -l-\varepsilon$. Поэтому при $l-\varepsilon\leqslant 0$ и $n\geqslant -l-\varepsilon$, $m<-l-\varepsilon$ имеем $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=0$.

Точно так же доказывается, что при $l-\varepsilon\leqslant 0$ и $n\leqslant l-\varepsilon$, $m>l-\varepsilon$ имеем $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=0$.

Аналогично, если $l-\varepsilon\geqslant 0$, то $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)\equiv 0$, при $n\geqslant -l-\varepsilon$, $m<-l-\varepsilon$ или при $n\leqslant l-\varepsilon$, $m>l-\varepsilon$.

В целочисленном случае функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ являются многочленами от $\operatorname{th}\frac{\tau}{2}$ и $\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}$. Рассмотрим, например, случай, когда l, m и n одновременно являются целыми или полуцелыми числами, причем $m, n>l>0$. Тогда подынтегральная функция в формуле (1) п. 3 § 3 имеет внутри контура интегрирования лишь одну особую точку $z=-\operatorname{th}\frac{\tau}{2}$. Поэтому в силу теоремы о вычетах

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{1}{\Gamma(n-l)\operatorname{ch}^{n-l}\frac{\tau}{2}}\frac{d^{n-l-1}}{dz^{n-l-1}}\left[z^{m-l-1}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{l+n}\right],$$

где после дифференцирования следует сделать подстановку $z=-\operatorname{th}\frac{\tau}{2}$. Применяя теорему Лейбница, имеем

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=(-1)^{m-n}\Gamma(l+n+1)\Gamma(m-l)\operatorname{sh}^{m-n}\frac{\tau}{2}\operatorname{ch}^{-m-n}\frac{\tau}{2}\times$$
$$\times\sum_{s=M}^{N}\frac{(-1)^s\operatorname{sh}^{2s}\frac{\tau}{2}}{s!\,\Gamma(l+n-s+1)\Gamma(n-l-s)\Gamma(m-n+s+1)},$$

где $M=\max(0,\ n-m)$, $N=\min(n-l-1,\ n+l)$.

Формулы для $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ в остальных случаях, когда $\chi=(l,\ \varepsilon)$ целочисленно, легко получаются с помощью соотношений симметрии п. 6.

Отметим, что в целочисленном случае при $l-\varepsilon<0$ функции $\{e^{-in\theta}\}$, $-\infty<n\leqslant l-\varepsilon$ образуют ортогональный, но не нормированный базис относительно инвариантного скалярного произведения в $\mathfrak{D}^+_l$ (см. п. 5 § 2). Ортонормированный базис состоит из функций

$$\left[\frac{\Gamma(-n-l-\varepsilon)}{\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-in\theta},\qquad -\infty<n\leqslant l-\varepsilon.$$

Поэтому матричные элементы *унитарной* матрицы представления $T^+_l(g)$ имеют вид

$$t^{\chi,+}_{mn}(g)=\left[\frac{\Gamma(l-m'+1)\Gamma(-l-n')}{\Gamma(l-n'+1)\Gamma(-l-m')}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-i(m'\varphi+n'\psi)}\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau),$$

где $m'=m+\varepsilon$, $n'=n+\varepsilon$, $-\infty<m,\ n\leqslant l-\varepsilon$. Заметим, что

$$t^{\chi,+}_{nn}(g)=e^{-in'(\varphi+\psi)}\mathfrak{P}^l_{n'n'}(\operatorname{ch}\tau).$$

Аналогично, матричные элементы *унитарной* матрицы представления $T_l^-(g)$ имеют вид

$$t_{mn}^{\chi,-}(g)=\left[\frac{\Gamma(-l-m')\Gamma(l-n'+1)}{\Gamma(-l-n')\Gamma(l-m'+1)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-i(m'\varphi+n'\psi)}\mathfrak{P}_{m'n'}^l(\operatorname{ch}\tau),$$

где $-l-\varepsilon\leqslant m,\ n<\infty$.

§ 4. Функциональные соотношения для $\mathfrak{P}_{mn}^l(\operatorname{ch}\tau)$

1. Теорема сложения. Теорема сложения для функций $\mathfrak{P}_{mn}^l(\operatorname{ch}\tau)$ напоминает теорему сложения для функций $P_{mn}^l(\cos\theta)$, доказанную в п. 1 § 4 главы III. Для вывода теоремы сложения воспользуемся соотношением

$$T_\chi(g_1g_2)=T_\chi(g_1)\,T_\chi(g_2), \tag{1}$$

из которого вытекает, что

$$t_{mn}^\chi(g_1g_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{mk}^\chi(g_1)\,t_{kn}^\chi(g_2). \tag{2}$$

Применим равенство (2) к матрицам $g_1=g(0,\tau_1,0)$ и $g_2=g(\varphi_2,\tau_2,0)$. Для этих матриц $t_{mk}^\chi(g_1)=\mathfrak{P}_{m'k'}^l(\operatorname{ch}\tau_1)$ и $t_{km}^\chi(g_2)=e^{-ik'\varphi_2}\mathfrak{P}_{k'n'}^l(\operatorname{ch}\tau_2)$, где $k'=k+\varepsilon$, $m'=m+\varepsilon$, $n'=n+\varepsilon$ (см. п. 2 § 3). Матричный же элемент $t_{mn}^\chi(g_1g_2)$ имеет вид

$$t_{mn}^\chi(g_1g_2)=e^{-i(m'\varphi+n'\psi)}\mathfrak{P}_{m'n'}^l(\operatorname{ch}\tau), \tag{3}$$

где φ, τ, ψ — параметры матрицы g_1g_2. Согласно п. 2 § 1 эти параметры выражаются через параметры τ_1, φ_2, τ_2 по формулам

$$\operatorname{ch}\tau=\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2+\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2, \tag{4}$$

$$e^{i\varphi}=\frac{\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2+\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2+i\operatorname{sh}\tau_2\sin\varphi_2}{\operatorname{sh}\tau}, \tag{4'}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}=\frac{\operatorname{ch}\frac{\tau_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\tau_2}{2}e^{\frac{i\varphi_2}{2}}+\operatorname{sh}\frac{\tau_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\tau_2}{2}e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}}, \tag{4''}$$

где

$$\left.\begin{aligned}0&\leqslant\varphi<2\pi,\\0&\leqslant\tau<\infty,\\-2\pi&\leqslant\psi<2\pi.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставляя значения $t^{\chi}_{mk}(g_1)$, $t^{\chi}_{kn}(g_2)$ и $t^{\chi}_{mn}(g_1g_2)$ в равенство (2) и заменяя m', k', n' на m, k, n, получаем

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)}\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-ik\varphi_2}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}^l_{kn}(\operatorname{ch}\tau_2), \tag{6}$$

где параметры τ_1, φ_2, τ_2, φ, τ, ψ *связаны соотношениями* (4) — (4″). При этом, если m и n — целые, k пробегает целые значения, а если m и n — полуцелые, k пробегает полуцелые значения. Это и есть *теорема сложения для функций* $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$.

Как и для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$, устанавливаются следующие частные случаи формулы (6):

Если $\varphi_2=0$, то $\tau=\tau_1+\tau_2$, $\varphi=\psi=0$ и потому

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}(\tau_1+\tau_2))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}^l_{kn}(\operatorname{ch}\tau_2). \tag{7}$$

При $\varphi_2=\pi$, $\tau_1\geqslant\tau_2$ имеем $\tau=\tau_1-\tau_2$, $\varphi=0$, $\psi=\pi$ и потому

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-k}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}^l_{kn}(\operatorname{ch}\tau_2). \tag{8}$$

В частности, при $\tau_1=\tau_2$ имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-k}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau)\mathfrak{P}^l_{kn}(\operatorname{ch}\tau)=\mathfrak{P}^l_{mn}(1)=\delta_{mn}. \tag{9}$$

Используя формулу (7′) п. 6 § 3, можно переписать равенство (8) в виде

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}^{-l-1}_{nk}(\operatorname{ch}\tau_2). \tag{10}$$

Если $l=-\frac{1}{2}+i\rho$, то $-l-1=\bar{l}$, и, по формуле (10) п. 6 § 3 получаем

$$\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mn}(\operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\overline{\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{nk}(\operatorname{ch}\tau_2)}. \tag{11}$$

В частности, при $\tau_1=\tau_2=\tau$ имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mk}(\operatorname{ch}\tau)\overline{\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{nk}(\operatorname{ch}\tau)}=\delta_{mn}. \tag{12}$$

Это равенство выражает унитарность представлений основной серии.

Отметим частный случай теоремы сложения при $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. В этом случае мы получаем

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)}\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ik\pi}{2}}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}^l_{kn}(\operatorname{ch}\tau_2), \tag{13}$$

где

$$\operatorname{ch}\tau = \operatorname{ch}\tau_1 \operatorname{ch}\tau_2, \tag{14}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2 + i\operatorname{sh}\tau_2}{\operatorname{sh}\tau}, \tag{14'}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{\tau_1+\tau_2}{2} + i\operatorname{ch}\frac{\tau_1-\tau_2}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}}. \tag{14''}$$

2. Целочисленный случай. Теорема сложения для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ принимает несколько более простой вид, если $\chi = (l, \varepsilon)$, т. е. $2l$ имеет ту же четность, что и 2ε. Тогда, как было показано в п. 7 § 4, $\mathfrak{P}^l_{mn}(z) \equiv 0$ в следующих случаях:

а) $l-\varepsilon \leqslant 0$ и $n \geqslant -l-\varepsilon$, $m < -l-\varepsilon$ или $n \leqslant l-\varepsilon$, $m > l-\varepsilon$;

б) $l-\varepsilon \geqslant 0$ и $n \geqslant l-\varepsilon$, $m < -l-\varepsilon$ или $n \leqslant -l-\varepsilon$, $m > l-\varepsilon$.

Поэтому, если $l-\varepsilon \leqslant 0$, то при $m, n \geqslant -l-\varepsilon$ суммирование в формуле (6) п. 1 ведется от $-l-\varepsilon$ до ∞, при $m \geqslant -l-\varepsilon$, $l-\varepsilon \leqslant n \leqslant l+\varepsilon$ от $l-\varepsilon$ до ∞, при $l-\varepsilon \leqslant m$, $n \leqslant l+\varepsilon$ от $l-\varepsilon$ до $l+\varepsilon$, при $m \leqslant l-\varepsilon$, $l-\varepsilon \leqslant n \leqslant l+\varepsilon$ — от $-\infty$ до $-l-\varepsilon$ и при $m, n \leqslant l-\varepsilon$ — от $-\infty$ до $l-\varepsilon$.

Если же $l-\varepsilon \geqslant 0$, то при $m, n \geqslant l-\varepsilon$ суммирование в формуле (6) п. 1 ведется от $l-\varepsilon$ до ∞; при $-l-\varepsilon \leqslant m \leqslant l-\varepsilon$, $n \geqslant l-\varepsilon$ — от $-l-\varepsilon$ до ∞; при $-l-\varepsilon \leqslant m$, $n \leqslant l-\varepsilon$ — от $-l-\varepsilon$ до $l-\varepsilon$; при $-l-\varepsilon \leqslant m \leqslant l-\varepsilon$, $n \leqslant -l-\varepsilon$ от ∞ до $l-\varepsilon$ и при $m, n \leqslant -l-\varepsilon$ — от $-\infty$ до $-l-\varepsilon$.

3. Теоремы сложения для функций Лежандра. Мы определили функции Лежандра и присоединенные функции Лежандра формулами

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau) = \mathfrak{P}^l_{00}(\operatorname{ch}\tau) \tag{1}$$

и

$$\mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau) = \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+1)}\mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-m+1)}\mathfrak{P}^l_{0m}(\operatorname{ch}\tau) \tag{2}$$

(см. п. 4 и 5 § 3). Положим в формуле (6) п. 1 $m=n=0$ и воспользуемся выражениями (1) и (2). Мы получаем

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(l-k+1)}{\Gamma(l+k+1)}e^{-ik\varphi_2}\mathfrak{P}^k_l(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^k_l(\operatorname{ch}\tau_2),\qquad(3)$$

где

$$\operatorname{ch}\tau=\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2+\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2.\qquad(4)$$

Используя формулу (2) п. 6 § 3, перепишем это равенство в виде

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-ik\varphi}\mathfrak{P}^k_l(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^{-k}_l(\operatorname{ch}\tau_2).\qquad(5)$$

Формула сложения для присоединенных функций Лежандра получается, если положить в равенстве (6) п. 1 $n=0$. Мы получаем

$$e^{-im\varphi}\mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+k+1)}e^{-ik\varphi_2}\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^k_l(\operatorname{ch}\tau_2),\qquad(6)$$

где числа φ, τ, φ_2, τ_1, τ_2 связаны соотношениями (4)—(4″) п. 1.

4. Формула умножения. Умножим обе части формулы (6) п. 1 на $e^{ik\varphi_2}$ и проинтегрируем по φ_2 от 0 до 2π. Мы получим

$$\mathfrak{P}^l_{mk}(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^l_{kn}(\operatorname{ch}\tau_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(k\varphi_2-m\varphi-n\psi)}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)\,d\varphi_2.\qquad(1)$$

В этой формуле параметры φ, ψ, φ_2, τ_1, τ_2, τ связаны соотношениями (4)—(4″) п. 1.

При $m=n=0$ из формулы (1) получаем, используя соотношение (2) п. 6 § 3,

$$\mathfrak{P}^k_l(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^{-k}_l(\operatorname{ch}\tau_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\varphi_2}\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2+\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2)\,d\varphi_2.\quad(2)$$

В частности,

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2+\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2)\,d\varphi_2.\qquad(3)$$

Полученные формулы имеют простой геометрический смысл, аналогичный геометрическому смыслу формул (2′)—(3) п. 3 § 4 главы III. В самом деле рассмотрим верхнюю полу двуполостного гиперболоида

$$-x_1^2-x_2^2+x_3^2=1,\qquad x_3>0.$$

Введем на этой поле метрику, приняв за расстояние между точками $M(x_1, x_2, x_3)$ и $N(y_1, y_2, y_3)$ число τ, где

$$\operatorname{ch}\tau = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3. \tag{4}$$

Наконец, введем на гиперболоиде параметры τ, φ, положив

$$x_1 = \operatorname{sh}\tau\sin\varphi,$$
$$x_2 = \operatorname{sh}\tau\cos\varphi,$$
$$x_3 = \operatorname{ch}\tau.$$

Функции $\mathfrak{P}_l^k(\operatorname{ch}\tau)$ можно рассматривать как функции на гиперболоиде.

Рассмотрим окружность с центром в точке $M(\tau_1, 0)$ и радиусом τ_2. Точки N этой окружности задаются числом φ_2 — углом между геодезическими линиями, соединяющими M с N и с точкой $O(0, 0, 1)$. Нетрудно показать, что для точки N, соответствующей значению параметра φ_2, координата τ такова, что $\operatorname{ch}\tau = \operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2 + \operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2$. Поэтому формула (3) означает, что $\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_2)$ является средним значением функции $\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)$ на указанной окружности. Аналогичный смысл имеет и формула (2), дающая значение коэффициентов Фурье для $\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)$, рассматриваемого как функция от φ_2.

Перепишем, далее, формулу (2) в виде

$$\mathfrak{P}_l^k(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}_l^{-k}(\operatorname{ch}\tau_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2 + \operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2)\cos k\varphi_2\,d\varphi_2 \tag{5}$$

и сделаем замену переменной

$$\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2 + \operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2\cos\varphi_2 = \operatorname{ch}\tau. \tag{6}$$

Мы получим

$$\mathfrak{P}_l^k(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}_l^{-k}(\operatorname{ch}\tau_2) = \frac{1}{\pi}\int_{|\tau_1-\tau_2|}^{\tau_1+\tau_2}\frac{\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)\,T_k\left[\dfrac{\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2}\right]\operatorname{sh}\tau\,d\tau}{\sqrt{[\operatorname{ch}(\tau_1+\tau_2) - \operatorname{ch}\tau][\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2)]}}. \tag{7}$$

Здесь в соответствии с п. 3 § 7 главы III положено

$$T_k(x) = \cos(k\arccos x).$$

В частности, при $k = 0$ получаем

$$\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_1)\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau_2) = \frac{1}{\pi}\int_{|\tau_1-\tau_2|}^{\tau_1+\tau_2}\frac{\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)\operatorname{sh}\tau\,d\tau}{\sqrt{[\operatorname{ch}(\tau_1+\tau_2) - \operatorname{ch}\tau][\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2)]}}. \tag{8}$$

Выражение в знаменателе формул (7) и (8) является нормированной площадью треугольника на гиперболоиде $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$ со сторонами τ_1, τ_2, τ (в указанной выше метрике).

5. Рекуррентные формулы. Рекуррентные формулы для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$ выводятся из теоремы сложения точно так же, как и рекуррентные формулы для функций $P^l_{mn}(z)$ (см. п. 4 § 7 главы III). Поэтому мы опускаем вывод, указав лишь окончательные результаты.

Имеют место равенства

$$\sqrt{z^2-1}\,\frac{d\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz}=\frac{l+n}{2}\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n-1}(z)+\frac{l-n}{2}\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n+1}(z) \qquad (1)$$

и

$$\frac{m-nz}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=-\frac{l+n}{2}\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n-1}(z)+\frac{l-n}{2}\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n+1}(z). \qquad (2)$$

Эти равенства получаются дифференцированием по τ_2 формул (7) и (13) п. 1, с последующей подстановкой $\tau_2=0$. Из них вытекает, что

$$\sqrt{z^2-1}\,\frac{d\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{m-nz}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=(l-n)\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n+1}(z) \qquad (3)$$

и

$$\sqrt{z^2-1}\,\frac{d\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=(l+n)\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n-1}(z). \qquad (4)$$

Пользуясь соотношениями симметрии (3') п. 6 § 3, получаем отсюда

$$\sqrt{z^2-1}\,\frac{d\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{n-mz}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=(l+m+1)\,\mathfrak{P}^l_{m+1,\,n}(z) \qquad (5)$$

и

$$\sqrt{z^2-1}\,\frac{d\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{mz-n}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=(l-m+1)\,\mathfrak{P}^l_{m-1,\,n}(z). \qquad (6)$$

Вычитая из формулы (3) формулу (4), получаем рекуррентное соотношение, связывающее три функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$ со смежными значками:

$$(l-n)\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n+1}(z)-(l+n)\,\mathfrak{P}^l_{m,\,n-1}(z)=2\,\frac{m-nz}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z). \qquad (7)$$

Точно так же из формул (5) и (6) вытекает, что

$$(l+m+1)\,\mathfrak{P}^l_{m+1,\,n}(z)-(l-m+1)\,\mathfrak{P}^l_{m-1,\,n}(z)=2\,\frac{n-mz}{\sqrt{z^2-1}}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(z). \qquad (8)$$

Далее, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$, выводится точно так же, как и для функций $P^l_{mn}(z)$

(см. п. 5 § 7 главы III). Оно имеет вид

$$\left(\sqrt{z^2-1}\frac{d}{dz}+\frac{(n+1)z-m}{\sqrt{z^2-1}}\right)\left(\sqrt{z^2-1}\frac{d}{dz}+\frac{m-nz}{\sqrt{z^2-1}}\right)\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=$$
$$=(l-n)(l+n+1)\mathfrak{P}^l_{mn}(z), \quad (9)$$

или, в развернутой форме,

$$(z^2-1)\frac{d^2\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz^2}+2z\frac{d\mathfrak{P}^l_{mn}(z)}{dz}-\frac{m^2+n^2-2mnz}{z^2-1}\mathfrak{P}^l_{mn}(z)=$$
$$=l(l+1)\mathfrak{P}^l_{mn}(z). \quad (9')$$

Отметим, что это уравнение совпадает с уравнением (5) для функций $P^l_{mn}(z)$ в п. 5 § 7 главы III.

Из полученных соотношений, как частный случай, получаются соотношения для присоединенных функций Лежандра. Положим в равенстве (3) $n=0$. Принимая во внимание формулу (5) п. 5 § 3, получаем

$$\sqrt{z^2-1}\frac{d\mathfrak{P}^m_l(z)}{dz}-\frac{mz}{\sqrt{z^2-1}}\mathfrak{P}^m_l(z)=\mathfrak{P}^{m+1}_l(z). \quad (10)$$

Точно так же из (4) получаем

$$\sqrt{z^2-1}\frac{d\mathfrak{P}^m_l(z)}{dz}+\frac{mz}{\sqrt{z^2-1}}\mathfrak{P}^m_l(z)=(l+m)(l-m+1)\mathfrak{P}^{m-1}_l(z). \quad (11)$$

Из уравнения (9′) получаем дифференциальное уравнение для присоединенных функций Лежандра

$$(z^2-1)\frac{d^2\mathfrak{P}^m_l(z)}{dz^2}+2z\frac{d\mathfrak{P}^m_l(z)}{dz}-\frac{m^2}{z^2-1}\mathfrak{P}^m_l(z)=l(l+1)\mathfrak{P}^m_l(z). \quad (12)$$

Для функций Лежандра имеет место дифференциальное уравнение

$$(z^2-1)\frac{d^2\mathfrak{P}_l(z)}{dz^2}+2z\frac{d\mathfrak{P}_l(z)}{dz}=l(l+1)\mathfrak{P}_l(z). \quad (13)$$

6. Производящая функция. Другой вывод рекуррентных соотношений связан с производящей функцией для $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$. Именно в силу формулы (6) п. 2 § 3 имеет место равенство

$$\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{i\theta}\right)^{l+n}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}e^{-i\theta}\right)^{l-n}e^{-in\theta}=$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)e^{-im\theta}. \quad (1)$$

Заменив в этом равенстве $e^{-i\theta}$ на z, получим

$$\Phi(z,\ \tau) \equiv \left(z \operatorname{ch}\frac{\tau}{2} + \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{l+n} \left(z \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} + \operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)^{l-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)\, z^{l+m}. \qquad (2)$$

Полученное равенство показывает, что $\Phi(z,\ \tau)$ является производящей функцией для $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$.

Полагая в формуле (2) $z=1$, получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau) = e^{l\tau}. \qquad (3)$$

Полагая же $z = e^{\pi i}$, получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n}\, \mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau) = e^{-l\tau}. \qquad (4)$$

Наконец, полагая $n=0$ и $z = e^{\frac{\pi i}{2}}$, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \mathfrak{P}^l_{m0}(\operatorname{ch}\tau) = \operatorname{ch}^l \tau. \qquad (5)$$

Равенство (5) можно переписать так:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m}{\Gamma(l+m+1)}\, \mathfrak{P}^m_l(\operatorname{ch}\tau) = \frac{\operatorname{ch}^l\tau}{\Gamma(l+1)}. \qquad (5')$$

Рекуррентные формулы для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ выводятся из разложения (2) точно так же, как и для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$. Поэтому мы не будем выводить уже полученные выше формулы, а укажем лишь еще некоторые соотношения, связывающие функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ с различными значениями l.

Продифференцируем обе части разложения (2) по z, применим к обоим слагаемым в левой части разложение (2) (с заменой l на $l-\frac{1}{2}$ и n на $n \mp \frac{1}{2}$) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях z. Мы получим

$$(l+n)\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\, \mathfrak{P}^{l-\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2},\, n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) + (l-n)\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\, \mathfrak{P}^{l-\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2},\, n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) = (l+m)\, \mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (6)$$

Далее, умножая обе части равенств (2) на $z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}$ и выполняя разложение левой части, получим

$$\mathfrak{P}^{l+\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)=\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^l_{m+1,\,n}(\operatorname{ch}\tau). \quad (7)$$

Аналогично, путем умножения на $z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}+\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}$, получаем

$$\mathfrak{P}^{l+\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)=\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)+\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^l_{m+1,\,n}(\operatorname{ch}\tau). \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) непосредственно следует, что

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^{l+\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)-\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^{l+\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) \quad (9)$$

и

$$\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=-\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^{l+\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)+\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\,\mathfrak{P}^{l+\frac{1}{2}}_{m-\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau). \quad (10)$$

Укажем еще формулу

$$\mathfrak{P}^{l+1}_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\operatorname{sh}\tau}{2}\,[\mathfrak{P}^l_{m-1,\,n}(\operatorname{ch}\tau)+\mathfrak{P}^l_{m+1,\,n}(\operatorname{ch}\tau)]+\operatorname{ch}\tau\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau), \quad (11)$$

которая получается путем умножения обеих частей равенства (2) на соответствующие части равенства

$$\left(z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)\left(z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}+\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)=\frac{z^2+1}{2}\operatorname{sh}\tau+z\operatorname{ch}\tau.$$

Формулу (11) можно также получить, применяя соотношения (7) и (8).

Аналогично,

$$\mathfrak{P}^{l-1}_{mn}(\operatorname{ch}\tau)=-\frac{\operatorname{sh}\tau}{2}\,[\mathfrak{P}^l_{m,\,n+1}(\operatorname{ch}\tau)+\mathfrak{P}^l_{m,\,n+1}(\operatorname{ch}\tau)]+\operatorname{ch}\tau\,\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau). \quad (12)$$

Наконец, рассмотрим два разложения

$$\left(z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{l_1+n_1}\left(z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}+\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)^{l_1-n_1}=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^{l_1}_{m_1n_1}(\operatorname{ch}\tau)\,z^{l_1+m_1}$$

и

$$\left(z\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{l_2+n_2}\left(z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}+\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)^{l_2-n_2}=\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^{l_2}_{m_2n_2}(\operatorname{ch}\tau)\,z^{l_2+m_2}.$$

Перемножим эти разложения почленно и применим к левой части разложение (2). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, находим

$$\mathfrak{P}^{l_1+l_2}_{m,\,n_1+n_2}(\operatorname{ch}\tau)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\mathfrak{P}^{l_1}_{m_1n_1}(\operatorname{ch}\tau)\,\mathfrak{P}^{l_2}_{m-m_1,\,n_2}(\operatorname{ch}\tau). \qquad (13)$$

7. Континуальная производящая функция. Применим к формуле (15) п. 3 § 3 формулу обращения для преобразования Меллина. Мы получим

$$F(w,\ \operatorname{ch}\tau)\equiv\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}+z\operatorname{sh}\frac{\tau}{2}\right)^{2n}z^{m-n}}{\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}}=$$

$$=-\frac{i}{2}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathfrak{P}^{l+n}_{mn}(\operatorname{ch}\tau)\,\omega^{-l-1}\,dl}{\sin l\pi}, \qquad (1)$$

где

$$z=\frac{-w-\operatorname{ch}\tau+\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}}{\operatorname{sh}\tau} \qquad (2)$$

и

$$-1<a<m-n.$$

Это равенство показывает, что функцию $F(w,\ t)$ можно рассматривать как производящую функцию для $\mathfrak{P}^l_{mn}(t)$ при фиксированных m и n. Однако в правой части равенства вместо суммы появляется интеграл по l. Поэтому будем называть функцию $F(w,\ t)$ *континуальной производящей функцией* для $\mathfrak{P}^l_{mn}(t)$ при фиксированных m и n.

Особенно простой вид принимает формула (1) при $m=n=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{w^2+2w\operatorname{ch}\tau+1}}=-\frac{i}{2}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathfrak{P}_l(\operatorname{ch}\tau)\,w^{-l-1}}{\sin l\pi}\,dl, \qquad (3)$$

где $-1<a<0$.

§ 5. Разложение регулярного представления группы $QU(2)$

В этом параграфе будет изучено разложение пространства $\mathfrak{H}$ функций $f(g)$, $g\in QU(2)$, имеющих интегрируемый квадрат, на минимальные подпространства, инвариантные относительно левых (или правых) сдвигов.

1. Регулярное представление группы $QU(2)$. Рекуррентные формулы для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ были выведены из теоремы сложения для этих функций. Как и в случае группы $SU(2)$, другой путь вывода этих формул связан с рассмотрением инфинитезимальных операторов регулярного представления группы $QU(2)$.

Согласно общему определению (см. п. 4 § 2 главы I) левое регулярное представление группы $QU(2)$ строится в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(g)$ на этой группе, таких, что

$$\int |f(g)|^2\,dg < +\infty.$$

Операторы левого регулярного представления задаются формулой

$$L(g_0)f(g) = f(g_0^{-1}g). \tag{1}$$

Аналогично операторы правого регулярного представления задаются формулой

$$R(g_0)f(g) = f(gg_0). \tag{2}$$

Инфинитезимальные операторы регулярного представления $L(g)$ для группы $QU(2)$ ищутся точно так же, как и для группы $SU(2)$ (см. п. 6 § 4 главы III). Поэтому, не проводя детальных выкладок, приведем окончательный результат.

Подгруппе Ω_1 матриц

$$\omega_1(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{t}{2} & \operatorname{sh}\frac{t}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{t}{2} & \operatorname{ch}\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

соответствует инфинитезимальный оператор $\hat{A}_1$ левого регулярного представления, имеющий в параметрах Эйлера следующий вид:

$$\hat{A}_1 = \operatorname{cth}\tau\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\sin\varphi}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{3}$$

Подгруппе Ω_2 матриц

$$\omega_2(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{t}{2} & i\operatorname{sh}\frac{t}{2} \\ -i\operatorname{sh}\frac{t}{2} & \operatorname{ch}\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

соответствует инфинитезимальный оператор

$$\hat{A}_2 = -\operatorname{cth}\tau\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{4}$$

Наконец, подгруппе Ω_3 диагональных матриц

$$\omega_3(t)=\begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}$$

соответствует инфинитезимальный оператор

$$\hat{A}_3=-\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{5}$$

Аналогично, инфинитезимальные операторы правого регулярного представления, соответствующие тем же подгруппам, имеют в параметрах Эйлера следующий вид:

$$\hat{B}_1=\frac{\sin\psi}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos\psi\frac{\partial}{\partial\tau}-\operatorname{cth}\tau\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{6}$$

$$\hat{B}_2=\frac{\cos\psi}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\sin\psi\frac{\partial}{\partial\tau}-\operatorname{cth}\tau\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{7}$$

$$\hat{B}_3=\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{8}$$

Как указывалось выше, вместо инфинитезимальных операторов $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ удобнее использовать их линейные комбинации $\hat{H}_+$, $\hat{H}_-$, $\hat{H}_3$ (см. стр. 299), которые в параметрах φ, τ, ψ имеют следующее выражение:

$$\hat{H}_+=-\hat{A}_1-i\hat{A}_2=e^{i\varphi}\left[i\operatorname{cth}\tau\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{i}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{9}$$

$$\hat{H}_-=-\hat{A}_1+i\hat{A}_2=e^{-i\varphi}\left[-i\operatorname{cth}\tau\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{i}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{10}$$

$$\hat{H}_3=i\hat{A}_3=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{11}$$

Аналогично для операторов $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, $\hat{B}_3$ имеем

$$\hat{K}_+=-\hat{B}_1-i\hat{B}_2=e^{-i\psi}\left[-\frac{i}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\tau}+i\operatorname{cth}\tau\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{12}$$

$$\hat{K}_-=-\hat{B}_1+i\hat{B}_2=e^{i\psi}\left[\frac{i}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\tau}-i\operatorname{cth}\tau\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{13}$$

$$\hat{K}_3=i\hat{B}_3=i\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{14}$$

На группе $QU(2)$ существует аналог оператора Лапласа — дифференциальный оператор второго порядка Δ, перестановочный с левыми и правыми сдвигами. Он выражается через инфинитезимальные операторы формулой

$$\Delta=-\hat{A}_1^2-\hat{A}_2^2+\hat{A}_3^2=-\hat{B}_1^2-\hat{B}_2^2+\hat{B}_3^2. \tag{15}$$

Будем называть Δ *оператором Лапласа на группе* $QU(2)$. В параметрах Эйлера он выражается следующей формулой:

$$\Delta = -\frac{1}{\operatorname{sh}\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{sh}\tau\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2\tau}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - 2\operatorname{ch}\tau\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right]. \qquad (16)$$

2. Рекуррентные соотношения и инфинитезимальные операторы. Рекуррентные соотношения для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ выводятся с помощью инфинитезимальных операторов точно так же, как и для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$ (см. гл. III, § 4, п. 7). Каждой функции $f(e^{i\theta})$ из пространства $\mathfrak{D}$ поставим в соответствие функцию

$$F(g) = (T_\chi(g)f,\ e^{-im\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_\chi(g)f(e^{i\theta})\,e^{im\theta}\,d\theta \qquad (1)$$

на группе $QU(2)$. Из формулы (1) непосредственно вытекает, что функции $T_\chi(g_0)f(e^{i\theta})$ соответствует функция $F(gg_0)$, т. е. операторы представления $T_\chi(g)$ реализуются операторами правого сдвига на группе $QU(2)$.

Обозначим пространство функций вида (1) через $\mathfrak{H}_{\chi m}$. Ясно, что матричные элементы

$$t^\chi_{mn}(g) = (T_\chi(g)\,e^{-in\theta},\ e^{-im\theta}), \qquad -\infty < n < \infty$$

образуют базис в пространстве $\mathfrak{H}_{\chi m}$, соответствующий базису $\{e^{-in\theta}\}$ в пространстве $\mathfrak{D}$. Поэтому для этих матричных элементов справедливы соотношения (11), (12) п. 3 § 2, в которых $e^{-in\theta}$ надо заменить на $t^\chi_{mn}(g)$, а H_+, H_- на $\hat{K}_+$, $\hat{K}_-$:

$$\hat{K}_+ t^\chi_{mn}(g) = (n' - l)\,t^\chi_{m,\,n+1}(g), \qquad (2)$$

$$\hat{K}_- t^\chi_{mn}(g) = -(n' + l)\,t^\chi_{m,\,n-1}(g). \qquad (3)$$

Подставим в формулы (2) и (3) вместо матричных элементов $t^\chi_{mn}(g)$ их выражение (9) из п. 2 § 3 через параметры Эйлера и заменим $\hat{K}_+$, $\hat{K}_-$ их выражениями (12) и (13) из п. 1. После несложных преобразований получим рекуррентные формулы (3) и (4) из п. 5 § 4. Аналогичные рекуррентные соотношения получаются путем реализации операторов $T_\chi(g)$ в виде операторов левого сдвига на группе $QU(2)$.

Перейдем к выводу дифференциального уравнения для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$. Покажем, что применение оператора Лапласа

$$\Delta = -\hat{A}_1^2 - \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2$$

к матричному элементу $t^\chi_{mn}(g)$ сводится к умножению на $l(l+1)$. Уже отмечалось, что матричные элементы $t^\chi_{mn}(g)$, $-\infty < n < \infty$ образуют канонический базис в пространстве $\mathfrak{H}_{\chi m}$. Поэтому $\Delta t^\chi_{mn}(g)$

является образом функции $(-A_1^2-A_2^2+A_3^2)\,e^{-in\theta}$ при отображении (1) (A_1, A_2, A_3 — инфинитезимальные операторы представления $T_\chi(g)$).

Используя формулы (3), (5) и (7) из п. 3 § 2, убеждаемся, что при всех n имеет место равенство

$$(-A_1^2-A_2^2+A_3^2)\,e^{-in\theta}=l(l+1)\,e^{-in\theta}.$$

Отсюда вытекает, что при всех n имеем

$$\Delta t^\chi_{mn}(g)=l(l+1)\,t^\chi_{mn}(g).$$

Подставим в это равенство вместо $t^\chi_{mn}(g)$ его выражение через параметры Эйлера, а вместо Δ — выражение (16) из п. 1. После простых преобразований получим искомое дифференциальное уравнение для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$ (см. уравнение (9) из п. 5 § 4).

3. Разложение функций на группе $QU(2)$. В п. 4 § 4 главы I была выяснена связь между разложением регулярного представления на неприводимые и разложением функций на группе по матричным элементам неприводимых представлений. В этом пункте будет построено разложение функций $f(g)$ на группе $QU(2)$, имеющих интегрируемый квадрат, по матричным элементам представлений $T_\chi(g)$. При этом оказывается, что в разложение входят лишь унитарные представления первой и второй основных серий и представления дискретной серии.

Итак, пусть $f(g)=f(\varphi,\ \tau,\ \psi)$ — функция из пространства $\mathfrak{H}$, т. е. функция на группе $QU(2)$, имеющая интегрируемый квадрат. Из формулы (5) п. 3 § 1 следует, что для $f(\varphi,\ \tau,\ \psi)$ выполняются равенства

$$f(\varphi,\ \tau,\ \psi)=f(\varphi+4\pi,\ \tau,\ \psi)=f(\varphi,\ \tau,\ \psi+4\pi)=f(\varphi+2\pi,\ \tau,\ \psi+2\pi). \quad (1)$$

Поэтому функцию $f(\varphi,\ \tau,\ \psi)$ можно разложить в двойной ряд Фурье по φ и ψ вида

$$f(\varphi,\ \tau,\ \psi)=\sum_{m,\ n=-\infty}^{\infty}\Phi_{mn}(\tau)\,e^{-i(m\varphi+n\psi)}, \quad (2)$$

где суммирование распространено на все пары $(m,\ n)$, такие, что m и n — одновременно целые или полуцелые числа. Коэффициенты $\Phi_{mn}(\tau)$ выражаются формулой

$$\Phi_{mn}(\tau)=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi,\ \tau,\ \psi)\,e^{i(m\varphi+n\psi)}\,d\varphi\,d\psi. \quad (3)$$

При этом выполняется аналог формулы Планшереля

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}|f(\varphi,\ \tau,\ \psi)|^2\operatorname{sh}\tau\,d\tau\,d\varphi\,d\psi=\sum_{m,\ n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}|\Phi_{mn}(\tau)|^2\operatorname{sh}\tau\,d\tau. \quad (4)$$

В п. 2 § 3 было показано, что матричные элементы представлений $T_\chi(g)$, содержащие множитель $e^{-i(m\varphi+n\psi)}$, имеют вид $e^{-i(m\varphi+n\psi)}\times\times\mathfrak{P}^l_{mn}(\operatorname{ch}\tau)$. Поэтому задача о разложении функций на группе $QU(2)$ по матричным элементам представлений $T_\chi(g)$ сводится к следующей:

Даны числа m и n, одновременно целые или полуцелые, и функция $F(x)$, такая, что

$$\int_1^\infty |F(x)|^2\,dx<+\infty.$$

Разложить функцию $F(x)$ по функциям $\mathfrak{P}^l_{mn}(x)$, где l — параметр, по которому ведется разложение, и $1\leqslant x<\infty$.

Эта задача сводится к задаче о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора. В самом деле, функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(x)$ удовлетворяют самосопряженному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{du}{dx}-\frac{m^2+n^2-2mnx}{x^2-1}u=\lambda u,$$

где $\lambda=l(l+1)$ (ср. уравнение (9′) п. 5 § 4). При этом они непрерывны в точке $x=1$ (соответствующей $\tau=0$). Иными словами, функции $\mathfrak{P}^l_{mn}(x)$ являются собственными функциями самосопряженного оператора

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx}-\frac{m^2-2mnx+n^2}{x^2-1},\qquad 1\leqslant x<\infty, \tag{5}$$

непрерывными в точке $x=1$.

Применяя обычную технику разложения по собственным функциям самосопряженных операторов (см., например, [32], [38], [51]), получаем следующий результат.

Если m и n — целые числа, то любая функция $F(x)$, такая, что $\int_1^\infty |F(x)|^2\,dx<+\infty$, имеет разложение

$$F(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty a(\rho)\,\mathfrak{P}^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{mn}(x)\,\rho\operatorname{th}\pi\rho\,d\rho+\\+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{l=1}^{M}\left(l-\frac{1}{2}\right)b(l)\,\mathfrak{P}^l_{mn}(x), \tag{6}$$

где

$$M=\begin{cases}\min(|m|,\ |n|) & \text{при } mn\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } mn<0.\end{cases}$$

Суммирование ведется по целочисленным значениям l. Коэффициенты $a(\rho)$ и $b(l)$ в этом разложении выражаются следующими формулами:

$$a(\rho)=\int_1^\infty F(x)\,\mathfrak{P}_{mn}^{-\frac{1}{2}-i\rho}(x)\,dx\equiv\int_1^\infty F(x)\,\overline{\mathfrak{P}_{mn}^{-\frac{1}{2}+i\rho}}(x)\,dx \tag{7}$$

и [1])

$$b(l)=(-1)^{m-n}\int_1^\infty F(x)\,\mathfrak{P}_{mn}^{-l-1}(x)\,dx\equiv$$

$$\equiv(-1)^{m-n}\frac{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)}\int_1^\infty F(x)\,\overline{\mathfrak{P}_{mn}^{l}(x)}\,dx. \tag{8}$$

Имеет место следующий аналог равенства Планшереля:

$$\int_1^\infty |F(x)|^2\,dx=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty |a(\rho)|^2\rho\,\mathrm{th}\,\pi\rho\,d\rho+$$

$$+\frac{(-1)^{n-m}}{4\pi^2}\sum_{l=1}^{M}\left(l-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)}{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l-m+1)}\,|b(l)|^2. \tag{9}$$

Аналогично, если m и n — полуцелые числа, то

$$F(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty a(\rho)\,\mathfrak{P}_{mn}^{-\frac{1}{2}+i\rho}(x)\,\rho\,\mathrm{cth}\,\pi\rho\,d\rho+$$

$$+\sum_{l=\frac{1}{2}}^{M}\left(l-\frac{1}{2}\right)b(l)\,\mathfrak{P}_{mn}^{l}(x), \tag{10}$$

где

$$M=\begin{cases}\min(|m|,\ |n|) & \text{при } mn>0,\\ 0 & \text{при } mn<0.\end{cases}$$

Суммирование ведется по полуцелым значениям l. Коэффициенты $a(\rho)$ и $b(l)$ выражаются теми же формулами, что и в случае целых m и n. Формула Планшереля имеет в рассматриваемом

---

[1]) Два Г-множителя обращаются в бесконечность и должны быть преобразованы по формуле $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$.

случае следующий вид:

$$\int_1^\infty |F(x)|^2 dx = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty |a(\rho)|^2 \rho \operatorname{cth}\pi\rho\, d\rho + \\ + \frac{(-1)^{m-n}}{4\pi^2}\sum_{l=\frac{1}{2}}^{M}\left(l-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(l+n+1)\Gamma(l-n+1)}{\Gamma(l+m+1)\Gamma(l-m+1)}|b(l)|^2. \quad (11)$$

Отметим, что

$$\operatorname{cth}\pi\rho = \operatorname{th}\pi\left(\rho+\frac{i}{2}\right).$$

Поэтому интегральные члены в формулах (6) и (9) — (11) можно записать единообразно, заменив $\operatorname{th}\pi\rho$ и $\operatorname{cth}\pi\rho$ на $\operatorname{th}\pi(\rho+\varepsilon l)$, где $\varepsilon=0$ в целом случае и $\varepsilon=\frac{1}{2}$ в полуцелом случае.

Применим полученные результаты к коэффициентам $\Phi_{mn}(\tau)$ разложения (2). Мы получим следующее утверждение:

Любая функция $f(g)$ на группе $QU(2)$, такая, что $\int|f(g)|^2dg<+\infty$, разлагается по матричным элементам

$$t^\chi_{mn}(g) = e^{-i(m'\varphi+n'\psi)}\mathfrak{P}^l_{m'n'}(\operatorname{ch}\tau),$$
$$\chi=(l,\ \varepsilon),\quad m'=m+\varepsilon,\quad n'=n+\varepsilon$$

неприводимых представлений этой группы. Разложение имеет вид

$$f(g) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,n,\varepsilon}\left[\int_0^\infty a^\varepsilon_{mn}(\rho)\, t_{mn}^{\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \varepsilon\right)}(g)\,\rho\operatorname{th}\pi(\rho+\varepsilon l)\,d\rho + \\ + \sum_{l=1-\varepsilon}^{\infty}\left(l-\frac{1}{2}\right) b^\varepsilon_{mn}(l)\, t^{(l,\varepsilon)}_{mn}(g)\right], \quad (12)$$

где ε, m, n, l имеют тот же смысл, что и выше.

Значения коэффициентов $a^\varepsilon_{mn}(\rho)$ и $b^\varepsilon_{mn}(l)$ выражаются формулами

$$a^\varepsilon_{mn}(\rho) = \int f(g)\,\overline{t_{mn}^{\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \varepsilon\right)}(g)}\,dg \quad (13)$$

и

$$b^\varepsilon_{mn}(l) = \frac{(-1)^{m-n}\Gamma(l+m+\varepsilon+1)\Gamma(l-m-\varepsilon+1)}{\Gamma(l+n+\varepsilon+1)\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}\int f(g)\,\overline{t^{(l,\varepsilon)}_{mn}(g)}\,dg, \quad (14)$$

где, напомним, в параметрах Эйлера

$$dg = \operatorname{sh}\tau\, d\tau\, d\varphi\, d\psi.$$

Наконец, имеет место аналог формулы Планшереля

$$\int |f(g)|^2 dg = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,\,n,\,\varepsilon} \left[\int_0^\infty |a^\varepsilon_{mn}(\rho)|^2 \rho \operatorname{th} \pi (\rho + \varepsilon i)\, d\rho + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m-n} \sum_{l=1-\varepsilon}^{M} \frac{\Gamma(l+n+\varepsilon+1)\,\Gamma(l-n-\varepsilon+1)}{\Gamma(l+m+\varepsilon+1)\,\Gamma(l-m-\varepsilon+1)} \left(l - \frac{1}{2}\right) |b^\varepsilon_{mn}(l)|^2 \right]. \tag{15}$$

Выведенные формулы упрощаются, если вместо матричных элементов $t^{(l,\,\varepsilon)}_{mn}(g)$ ввести матричные элементы соответствующих унитарных представлений дискретной серии, которые будем обозначать $t^{(l,\,\varepsilon,\,\pm)}_{mn}(g)$. Именно, мы получим

$$f(g) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,\,n,\,\varepsilon} \left[\int_0^\infty a^\varepsilon_{mn}(\rho)\, t^{\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon\right)}_{mn}(g)\, \rho \operatorname{th} \pi(\rho + \varepsilon i)\, d\rho + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1-\varepsilon}^{M} \left(l - \frac{1}{2}\right) b^{\varepsilon,\,\pm}_{mn}(l)\, t^{(l,\,\varepsilon,\,\pm)}_{mn}(g) \right], \tag{16}$$

где знак $+$ выбирается, если m и $n > 0$, и знак $-$, если m и $n < 0$. При этом выражение для $a^\varepsilon_{mn}(\rho)$ остается прежним, а коэффициенты $b^{\varepsilon,\,\pm}_{mn}(l)$ имеют вид

$$b^{\varepsilon,\,\pm}_{mn}(l) = \int f(g)\, \overline{t^{(l,\,\varepsilon,\,\pm)}_{mn}(g)}\, dg. \tag{17}$$

Формула же (15) принимает вид

$$\int |f(g)|^2 dg = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,\,n,\,\varepsilon} \left[\int_0^\infty |a^\varepsilon_{mn}(\rho)|^2 \rho \operatorname{th} \pi(\rho + \varepsilon i)\, d\rho + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1-\varepsilon}^{M} \left(l - \frac{1}{2}\right) |b^{\varepsilon,\,\pm}_{mn}(l)|^2 \right]. \tag{18}$$

Мы видим, таким образом, что в разложение функций $f(g)$ на группе $QU(2)$, имеющих интегрируемый квадрат, входят лишь матричные элементы *неприводимых унитарных* представлений этой группы. При этом входят лишь представления первой и второй основных серий, а также представления дискретных серий. Представления же дополнительной серии в разложении не участвуют. Этим группа $QU(2)$ отличается от всех ранее рассмотренных групп, для которых в разложение функций с интегрируемым квадратом входили матричные элементы всех неприводимых унитарных представлений.

Пример. В формуле (7) п. 4 § 4 положим $l=-\frac{1}{2}+i\rho$. Мы получим

$$\mathfrak{P}^{k}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^{-k}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau_2)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\tau_1-\tau_2|}^{\tau_1+\tau_2}\frac{\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau)\,T_k\left(\frac{\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2}\right)}{\sqrt{[\operatorname{ch}(\tau_1+\tau_2)-\operatorname{ch}\tau]\,[\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2)]}}\operatorname{sh}\tau\,d\tau, \qquad (19)$$

где $T_k(x)$ — многочлен Чебышева. Применяя формулы (6) и (7), выводим

$$\int\limits_0^\infty\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau)\,\mathfrak{P}^{k}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau_1)\,\mathfrak{P}^{-k}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau_2)\,\rho\operatorname{th}\pi\rho\,d\rho=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{4\pi T_k\left(\dfrac{\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}\tau_1\operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}\tau_1\operatorname{sh}\tau_2}\right)}{\sqrt{[\operatorname{ch}(\tau_1+\tau_2)-\operatorname{ch}\tau]\,[\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}(\tau_1-\tau_2)]}} \\ \text{при}\quad |\tau_1-\tau_2|<\tau<\tau_1+\tau_2, \\ 0 \qquad\qquad \text{в противном случае.}\end{cases} \qquad (20)$$

4. Разложение регулярного представления группы $QU(2)$ на неприводимые. Полученное разложение функций $f(g)$ из пространства $\mathfrak{H}$ имеет простой теоретико-групповой смысл — оно связано с разложением регулярного представления группы $QU(2)$ на неприводимые. Именно, каждому $\chi=(l,\varepsilon)$ и каждому m поставим в соответствие пространство функций $\mathfrak{H}_\chi^m$ на группе $QU(2)$, имеющих вид

$$F(g)=(T_\chi(g)\varphi,\ e^{-im\theta}),$$

где

$$\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^2\,d\theta<+\infty.$$

Пространство таких функций инвариантно относительно правых сдвигов, причем сужение регулярного представления $R(g)$ на $\mathfrak{H}_\chi^m$ эквивалентно представлению $T_\chi(g)$. Нетрудно показать, что функции $f_m^\chi(g)$ из $\mathfrak{H}_\chi^m$ можно записать в виде

$$f_m^\chi(g)=\sum_n a_{mn}(\chi)\,t_{mn}^\chi(g).$$

Пользуясь этим, выводим из разложения (12) и формулы Планшереля (15) п. 3, что

$$\mathfrak{H}=\frac{1}{4\pi^2}\Big[\sum_{\varepsilon=0,\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathfrak{H}^m_{-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon}\rho\,\mathrm{th}\,\pi(\rho+\varepsilon i)\,d\rho+$$

$$+\sum_{l=1-\varepsilon}^{|m|}\left(l-\frac{1}{2}\right)\mathfrak{H}^m_{l,\,\varepsilon,\,\pm}\Big], \quad (1)$$

причем

$$R(g)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\varepsilon=0,\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big[\int_0^{\infty}T^{(m)}_{-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon}(g)\,\rho\,\mathrm{th}\,\pi(\rho+\varepsilon i)\,d\rho+$$

$$+\sum_{l=1-\varepsilon}^{|m|}\left(l-\frac{1}{2}\right)T^{(m)}_{l,\,\varepsilon,\,\pm}(g)\Big]. \quad (2)$$

Здесь суммирование распространено на целые значения m, причем, через $T^{(m)}_{-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon}(g)$ обозначены представления, эквивалентные $T_\chi(g)$ $\chi=\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \varepsilon\right)$. Аналогично $T^{(m)}_{l,\,\varepsilon,\,\pm}(g)$ — это представления, эквивалентные представлениям $T^{\pm}_{\chi}(g)$, $\chi=(l,\ \varepsilon)$ дискретной серии.

Разложение (2) можно записать иначе, изменив порядок суммирования и интегрирования. Положим

$$X_{-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon}(g)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}T^{(m)}_{-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon}(g), \quad (3)$$

$$X_{l,\,\varepsilon,\,+}=\sum_m T^{(m)}_{l,\,\varepsilon,\,+}(g) \quad (4)$$

и

$$X_{l,\,\varepsilon,\,-}=\sum_m T^{(m)}_{l,\,\varepsilon,\,-}(g). \quad (5)$$

Тогда имеет место равенство

$$R(g)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\varepsilon=0,\frac{1}{2}}\Big[\int_0^{\infty}X_{-\frac{1}{2}+i\rho,\,\varepsilon}(g)\,\rho\,\mathrm{th}\,\pi(\rho+\varepsilon i)\,d\rho+$$

$$+\sum_{l=1-\varepsilon}^{\infty}\left(l-\frac{1}{2}\right)[X_{l,\,\varepsilon,\,+}(g)+X_{l,\,\varepsilon,\,-}(g)]\Big]. \quad (6)$$

Оно дает разложение $R(g)$ на представления, кратные неприводимым.

5. Разложение индуцированных представлений группы $QU(2)$. Обозначим через $\mathfrak{H}_m$ пространство функций $f(g)$ на группе $QU(2)$, таких, что $\int |f(g)|^2\,dg < +\infty$ и $f(hg) = e^{-imt} f(g)$, где $h = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}$. Это пространство инвариантно относительно операторов правого сдвига, и формула

$$R_m(g_0) f(g) = f(gg_0)$$

определяет представление группы $QU(2)$ (сужение правого регулярного представления на $\mathfrak{H}_m$). Согласно п. 6 § 2 главы I его называют *представлением, индуцированным представлением* e^{-imt} подгруппы Ω диагональных матриц.

Из определения пространства $\mathfrak{H}_m$ ясно, что оно состоит из функций вида

$$f(\varphi, \tau, \psi) = F(\tau, \psi)\, e^{-im\varphi},$$

где

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} |F(\tau, \psi)|^2 \operatorname{sh}\tau\, d\tau\, d\psi < +\infty.$$

Поэтому разложение пространства $\mathfrak{H}$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{H}_m$ сводится к разложению функций $f(\varphi, \tau, \psi)$ в ряд Фурье по φ:

$$f(\varphi, \tau, \psi) = \sum_m F_m(\tau, \psi)\, e^{-im\varphi},$$

где m пробегает целые и полуцелые значения, а

$$F_m(\tau, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(\varphi, \tau, \psi)\, e^{im\varphi}\, d\varphi.$$

Применяя разложение (6) п. 4, легко получаем разложение индуцированных представлений на неприводимые. Именно, если m целое число, то

$$R_m(g) = \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_0^{\infty} T_{-\frac{1}{2}+i\rho,\, 0}(g)\, \rho \operatorname{th}\pi\rho\, d\rho + \sum_{l=1}^{|m|} \left(l - \frac{1}{2}\right)\left[T_{l,\,0}^{+}(g) + T_{l,\,0}^{-}(g)\right]\right]. \quad (1)$$

Если же m — полуцелое число, то

$$R_m(g)=\frac{1}{4\pi^2}\Bigg[\int_0^\infty T_{-\frac{1}{2}+i\rho,\ \frac{1}{2}}(g)\,\rho\,\mathrm{cth}\,\pi\rho\,d\rho+\\ +\sum_{l=\frac{1}{2}}^{|m|}\left(l-\frac{1}{2}\right)[T^+_{l,\ \frac{1}{2}}(g)+T^-_{l,\ \frac{1}{2}}(g)]\Bigg]. \qquad (2)$$

Таким образом, в разложение индуцированных представлений каждое неприводимое представление входит не более одного раза.

В частности, рассмотрим представление $R_0(g)$. Будем называть это представление *квазирегулярным*. Из разложения (1) видно, что

$$R_0(g)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty T_{-\frac{1}{2}+i\rho,\ 0}(g)\,\rho\,\mathrm{th}\,\pi\rho\,d\rho. \qquad (3)$$

Таким образом, *квазирегулярное представление группы $QU(2)$ является непрерывной прямой суммой неприводимых унитарных представлений первой основной серии.*

Используя описанный в п. 1 § 1 локальный изоморфизм групп $QU(2)$ и $SH(3)$, легко получить из разложения (3) разложение представления

$$L(g)f(\xi)=f(g^{-1}\xi), \qquad [\xi,\ \xi]=-1,$$

группы $SH(3)$. Мы не будем останавливаться на этом, поскольку в главе X соответствующее исследование будет проведено для всех групп $SH(n)$.

Рассмотрим еще связь между разложениями индуцированных представлений при разных значениях m. Из формулы (12) п. 3 вытекает, что разложение функций $f(g)$ из $\mathfrak{H}_m$ имеет вид

$$f(g)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n,\ \varepsilon}\Bigg[\int_0^\infty a^\varepsilon_{mn}(\rho)\,t_{mn}^{\left(-\frac{1}{2}+i\rho,\ \varepsilon\right)}(g)\,\rho\,\mathrm{th}\,\pi(\rho+\varepsilon l)\,d\rho+\\ +\sum_{l=1-\varepsilon}^{M}\left(l-\frac{1}{2}\right)b^\varepsilon_{mn}(l)\,(t)^{(l,\ \varepsilon)}_{mn}(g)\Bigg]. \qquad (4)$$

Но легко видеть, что левый инфинитезимальный оператор $\hat{H}_+$ переводит функции из $\mathfrak{H}_m$ в функции из $\mathfrak{H}_{m+1}$, а $\hat{H}_-$ переводит функции из $\mathfrak{H}_m$ в функции из $\mathfrak{H}_{m-1}$ (см. п. 1). Поэтому, применяя к обеим частям равенства (4) оператор $\hat{H}_+$, получим разложение функции $\hat{H}_+f(g)$, принадлежащей $\mathfrak{H}_{m+1}$. Однако, вообще говоря, таким путем получаются не все функции из $\mathfrak{H}_{m+1}$, поскольку оператор $\hat{H}_+$ не является взаимно однозначным. Мы оставляем в стороне детальное рассмотрение этого вопроса.

6. Соотношения ортогональности для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(x)$. Из результатов п. 3 легко получаются соотношения ортогональности для функций $\mathfrak{P}^l_{mn}(x)$. В целочисленном случае получаем

$$\int_1^\infty \mathfrak{P}^l_{mn}(x)\overline{\mathfrak{P}^{l_1}_{mn}(x)}\,dx=0, \tag{1}$$

если l, l_1, m, n — одновременно целые или полуцелые числа, причем $l\neq l_1$. Далее, если $1-\varepsilon\leqslant l\leqslant M$, где

$$M=\begin{cases}\min(|m|,\ |n|) & \text{при } mn\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } mn<0,\end{cases}$$

то

$$\int_1^\infty |\mathfrak{P}^l_{mn}(x)|^2\,dx=\frac{(-1)^{n-m}}{4\pi^2}\left(l-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(l+n+1)\,\Gamma(l-n+1)}{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l-m+1)}. \tag{2}$$

Точно так же устанавливается, что

$$\int_1^\infty \mathfrak{P}_{mn}^{-\frac{1}{2}+i\rho}(x)\,\overline{\mathfrak{P}_{mn}^{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}\,dx=\frac{1}{4\pi^2}\,\rho\,\mathrm{th}\,\pi(\rho+\varepsilon i)\,\delta(\tau-\rho). \tag{3}$$

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

В этой главе будут рассмотрены представления группы вещественных унимодулярных матриц второго порядка, при которых диагональным матрицам соответствует оператор умножения на функцию. При этих представлениях матрицам вида $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ соответствуют интегральные операторы, ядра которых выражаются через гипергеометрическую функцию. На основе этой связи будет получен ряд свойств гипергеометрической функции.

§ 1. Гипергеометрическая функция

1. Определение. Определим *гипергеометрическую функцию* $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ при помощи интегрального представления. Разрежем комплексную плоскость вдоль луча $1 \leqslant z < \infty$ вещественной оси. При любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, функция $(1-tz)^{-\alpha}$ однозначно определена в разрезанной плоскости. Выберем ветвь этой функции, принимающую значение 1 в точке $z=0$. Далее, выберем ветви функций $t^{\beta-1}$ и $(1-t)^{\gamma-\beta-1}$, принимающие значение 1 соответственно при $t=1$ и $t=0$. Тогда функция $t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}$ однозначно определена в разрезанной плоскости.

Положим

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\, dt. \quad (1)$$

При сделанных выше предположениях этот интеграл сходится в области $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$ и определяет функцию $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, аналитически зависящую от α, β, γ. Мы назовем ее *гипергеометрической функцией*.

Для значений β, γ, не принадлежащих указанной области, определим гипергеометрическую функцию с помощью аналитического продолжения.

Для значений z, не лежащих на луче $1 \leqslant z < \infty$, выражение $1 - tz$ не обращается в нуль при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому функция $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, задаваемая интегралом (1), аналитически зависит от z в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $1 \leqslant z < \infty$. Будем полагать, что в этой плоскости имеем $|\arg(1-z)| < \pi$.

При $|z| < 1$ гипергеометрическая функция разлагается в степенной ряд. В самом деле, при $|z| < 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем по формуле бинома

$$(1-tz)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\, k!} (tz)^k.$$

Подставим это разложение в интеграл (1) и почленно проинтегрируем. Так как по формуле (2) п. 7 § 1 главы V

$$\int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\beta+k)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+k)},$$

то

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)\, k!} z^k. \tag{2}$$

Разложение (2) определяет $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ при $|z| < 1$ для всех значений α, β, γ, за исключением случая, когда $\gamma = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ Если $\gamma = -n$ и ни α, ни β не равны $-m$, где $m < n$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$, то функция $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ имеет полюс первого порядка. Найдем вычет $F(\alpha, \beta; \gamma, z)$ при $\gamma = -n$. Для этого заметим, что

$$\lim_{\gamma \to -n} \frac{1}{\Gamma(\gamma+k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \leqslant n, \\ \dfrac{1}{\Gamma(k-n)} & \text{при } k > n. \end{cases}$$

Поэтому из формулы (2) вытекает, что

$$\lim_{\gamma \to -n} \frac{F(\alpha, \beta; \gamma; z)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(k-n)\, k!} z^k =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,(n+1)!} z^{n+1} F(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; z).$$

Так как

$$\operatorname*{Выч}_{\gamma=-n} \Gamma(\gamma) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

то

$$\operatorname*{Выч}_{\gamma=-n} F(\alpha, \beta; \gamma; z) =$$

$$= \frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(n+1)!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{n+1} F(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; z). \tag{3}$$

Отметим еще, что

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-\alpha-1}\,dt=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \tag{4}$$

2. Некоторые соотношения. Отметим некоторые соотношения для гипергеометрической функции, непосредственно вытекающие из ее определения.

Из разложения (2) п. 1 следует, что параметры α и β симметрично входят в гипергеометрическую функцию:

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=F(\beta,\ \alpha;\ \gamma;\ z). \tag{1}$$

При $|z|>1$ справедливость равенства (1) следует из аналитичности $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ по z.

Далее, дифференцируя почленно разложение (2) п. 1 и заменяя k на $k+1$, получаем

$$\frac{dF(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)}{dz}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{(\gamma+k+1)\,k!}z^k.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{dF(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)}{dz}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z). \tag{2}$$

Чтобы получить следующее соотношение, сделаем в интеграле (1) п. 1 подстановку $t=1-s$. Мы получим

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 s^{\gamma-\beta-1}(1-s)^{\beta-1}(1-z+sz)^{-\alpha}\,ds=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\alpha}\int_0^1 s^{\gamma-\beta-1}(1-s)^{\beta-1}\left(1-\frac{sz}{z-1}\right)^{-\alpha}ds.$$

В силу равенства (1) п. 1 интеграл в правой части этого равенства выражается через гипергеометрическую функцию. Отсюда вытекает, что

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ \frac{z}{z-1}\right). \tag{3}$$

Используя симметричность $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ относительно α и β, получаем

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \frac{z}{z-1}\right). \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) вытекает

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ z). \tag{5}$$

3. Некоторые интегралы, выражающиеся через гипергеометрическую функцию. Через гипергеометрическую функцию выражаются некоторые часто встречающиеся интегралы. Сделаем в равенстве (1) п. 1 подстановку $t=1/s$. Мы получим

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_1^\infty s^{\alpha-\gamma}(s-1)^{\gamma-\beta-1}(s-z)^{-\alpha}\,ds. \quad (1)$$

Заменяя в этом интеграле s на $s+1$ и $1-z$ на u, находим

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1-u)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^\infty s^{\gamma-\beta-1}(1+s)^{\alpha-\gamma}(s+u)^{-\alpha}\,ds. \quad (2)$$

К интегралам вида (1) п. 1, (1) и (2) сводятся многие другие интегралы. Например, подстановка $\frac{s-a}{b-a}=t$ приводит интеграл

$$J=\int_a^b (s-a)^{\beta-1}(b-s)^{\gamma-\beta-1}(z-s)^{-\alpha}\,ds$$

к виду (1) п. 1. Мы получаем

$$J=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}(b-a)^{\gamma-1}(z-a)^{-\alpha}F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{b-a}{z-a}\right). \quad (3)$$

Заменим в равенстве (2) β на $\gamma-\lambda$. Тогда

$$\Phi(\lambda)\equiv\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\gamma-\lambda)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha, \gamma-\lambda; \gamma; 1-u)$$

явится преобразованием Меллина для $f(s)\equiv(1+s)^{\alpha-\gamma}(s+u)^{-\alpha}$. В силу формулы обращения для преобразования Меллина получаем отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\lambda)\Gamma(\gamma-\lambda)F(\alpha, \gamma-\lambda; \gamma; 1-u)\,s^{-\lambda}\,d\lambda=$$
$$=\Gamma(\gamma)(1+s)^{\alpha-\gamma}(s+u)^{-\alpha}, \quad (4)$$

где $0<a<\operatorname{Re}\gamma$.

Точно так же из формулы (1) п. 1, определяющей $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\beta+\lambda)}F(\alpha, \beta; \beta+\lambda; z)\,s^{-\lambda}\,d\lambda=\frac{(1-s)^{\beta-1}(1-z+sz)^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}, \quad (5)$$

где $a>0$, $s>0$.

4. Выражение функций и многочленов Якоби через гипергеометрическую функцию. Покажем, что введенные в главах III и VI функции $P^l_{mn}(z)$ и $\mathfrak{P}^l_{mn}(z)$ выражаются через гипергеометрическую функцию. Для этого воспользуемся разложениями этих функций в ряды.

Пусть $m \geqslant n$. Заменив в формуле (1) п. 4 § 4 главы III индекс суммирования j на $m+s$, получим

$$P^l_{mn}(z) = \frac{i^{m-n}}{2^m}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l-n)!}{(l+m)!\,(l+n)!}}(1+z)^{\frac{m+n}{2}}(1-z)^{\frac{m-n}{2}} \times \\ \times \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(-1)^s\,(l+m+s)!}{s!\,(m-n+s)!\,(l-m-s)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^s. \tag{1}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (2) п. 1, убеждаемся, что

$$P^l_{mn}(z) = \frac{i^{m-n}}{2^m\,(m-n)!}\sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+m)!}{(l-m)!\,(l+n)!}} \times \\ \times (1+z)^{\frac{m+n}{2}}(1-z)^{\frac{m-n}{2}} F\left(l+m+1,\ m-l;\ m-n+1;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{2}$$

Аналогичная формула имеет место при $n \geqslant m$

$$P^l_{mn}(z) = \frac{i^{n-m}}{2^n\,(n-m)!}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+n)!}{(l-n)!\,(l+m)!}} \times \\ \times (1+z)^{\frac{m+n}{2}}(1-z)^{\frac{n-m}{2}} F\left(l+n+1,\ n-l;\ n-m+1;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{2'}$$

Точно так же из формулы (2) п. 4 § 4 главы III следует, что при $m \geqslant n$

$$P^l_{mn}(z) = \frac{i^{m-n}}{2^l}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-n)!}{(l-m)!\,(l+n)!}} \times \\ \times (1-z)^{\frac{m-n}{2}}(1+z)^{l-\frac{m-n}{2}} F\left(m-l,\ -n-l;\ m-n+1;\ \frac{z-1}{z+1}\right). \tag{3}$$

В частности, полагая $n=0$, получаем

$$P^m_l(z) = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(1-z^2)^{\frac{m}{2}} F\left(l+m+1,\ m-l;\ m+1;\ \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^m}{m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-l,\ l+1;\ m+1;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{4}$$

Полагая же $m=n=0$, находим

$$P_l(z) = F\left(l+1,\ -l;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^l F\left(-l,\ -l;\ 1;\ \frac{z-1}{z+1}\right). \tag{5}$$

Далее, из формулы (2) п. 3 § 3 главы VI следует, что при $m \leqslant n$

$$\mathfrak{P}_{mn}^{l}(z) = \frac{\Gamma(l+n+1)}{2^l \Gamma(l+m+1)(n-m)!}(z-1)^{\frac{n-m}{2}}(z+1)^{l-\frac{n-m}{2}} \times$$
$$\times F\left(-l-m,\, n-l;\, n-m+1;\, \frac{z-1}{z+1}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(l+n+1)}{2^n \Gamma(l+m+1)(n-m)!}(z-1)^{\frac{n-m}{2}}(z+1)^{\frac{m+n}{2}} \times$$
$$\times F\left(n+l+1,\, n-l;\, n-m+1;\, \frac{1-z}{2}\right). \qquad (6)$$

В частности, при $m = 0$ получаем

$$\mathfrak{P}_{l}^{n}(z) = \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l+1)}\mathfrak{P}_{n0}^{l}(z) = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-n+1)}\mathfrak{P}_{0n}^{l}(z) =$$
$$= \frac{\Gamma(l+n+1)}{2^n \Gamma(l-n+1)\, n!}(z^2-1)^{\frac{n}{2}} F\left(n+l+1,\, n-l;\, n+1;\, \frac{1-z}{2}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l-n+1)\, n!}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{n}{2}} F\left(l+1,\, -l;\, n+1;\, \frac{1-z}{2}\right). \qquad (7)$$

Полученные выражения показывают, что изученные нами функции $P_{mn}^{l}(z)$ и $\mathfrak{P}_{mn}^{l}(z)$ сводятся к гипергеометрической функции. При этом получаются гипергеометрические функции с некоторыми условиями целочисленности на параметры, α, β, γ. Например, для функции $P_{mn}^{l}(z)$ получаем, что $\alpha = l+m+1$, $\beta = m-l$, $\gamma = m-n+1$ и потому α, β, γ — целые числа.

Чтобы получить теоретико-групповое истолкование гипергеометрической функции в общем случае, надо рассмотреть представления группы $SL(2, R)$ вещественных унимодулярных матриц второго порядка, при которых диагональным матрицам соответствуют операторы умножения на функцию.

§ 2. Группа $SL(2, R)$ вещественных унимодулярных матриц второго порядка

1. Вводные замечания. Мы рассмотрели в предыдущей главе представления группы $QU(2)$, при которых диагональные матрицы изображаются (бесконечными) диагональными же матрицами. Как уже указывалось в п. 2 § 1 главы VI, эти представления соответствуют представлениям группы $SL(2, R)$ вещественных унимодулярных матриц второго порядка, при которых элементы подгруппы $SO(2)$ матриц вида $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ изображаются диагональными матрицами (напомним, что группы $QU(2)$ и $SL(2, R)$ изоморфны).

В этой главе будет рассмотрена реализация представлений группы $SL(2, R)$, при которой особенно просто изображаются диагональные матрицы $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$. Именно, этим матрицам будут соответствовать операторы умножения на функцию. В то же время элементам подгруппы $SO(2)$, а также элементам вида $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ при такой реализации соответствуют интегральные преобразования, ядро которых выражается через гипергеометрическую функцию. Для треугольных матриц гипергеометрическая функция вырождается в степенну́ю. Исходя из этой связи представлений группы $SL(2, R)$ и гипергеометрической функции будут установлены различные свойства последней. В частности, будут получены континуальные аналоги теоремы сложения для гипергеометрической функции, а также — путем рассмотрения инфинитезимальных операторов — рекуррентные соотношения для нее.

В конце главы рассмотрим еще одну реализацию представлений группы $SL(2, R)$, а именно, реализацию, при которой операторы умножения на функцию соответствуют треугольным матрицам $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Мы увидим, что при этой реализации возникают интегральные преобразования, ядра которых выражаются через функции Ганкеля. Поэтому рассмотрение таких представлений дает новый подход к теоретико-групповой трактовке функций Ганкеля.

2. Параметризация. В качестве параметров в группе $SL(2, R)$ можно выбрать три вещественных числа α, γ, δ. Значение β определяется при $\gamma \neq 0$ из равенства $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В точках, где $\gamma = 0$, можно взять другие три элемента матрицы g (все четыре элемента α, β, γ, δ не могут обратиться в нуль, поскольку $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Во многих случаях удобна другая параметризация группы $SL(2, R)$, аналогичная параметризации группы $SU(2)$ с помощью углов Эйлера. Она основана на следующем утверждении.

Теорема 1. *Любая матрица g из группы $SL(2, R)$, все элементы которой отличны от нуля, может быть представлена в виде*

$$g = d_1 (-e)^{\varepsilon_1} s^{\varepsilon_2} p \, d_2, \tag{1}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$, d_1 и d_2 — диагональные матрицы с положительными элементами

$$d_1 = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} e^{-\psi} & 0 \\ 0 & e^{\psi} \end{pmatrix}, \quad -e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а p — матрица одного из следующих двух типов:

$$\text{а)} \quad p = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}, \qquad -\infty < \theta < \infty, \tag{2}$$

$$\text{б)} \quad p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}. \tag{3}$$

Докажем сначала следующую лемму:

Лемма. *Пусть* $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ — *матрица из группы* $SL(2, R)$, *такая, что* $|\alpha|=|\delta|$, $|\beta|=|\gamma|$, $|\alpha|\geqslant|\beta|$ *и* $\alpha>0$. *Тогда она является либо матрицей вида*

$$g=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}, \quad -\infty<\theta<\infty, \tag{4}$$

либо матрицей вида

$$g=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \qquad -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta<\frac{\pi}{4}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ и $|\alpha\delta|\geqslant|\beta\gamma|$, то $\alpha\delta>0$. Поэтому $\alpha=\delta>0$. Пусть $\alpha=\delta\geqslant 1$. Так как $\alpha\delta-1=\beta\gamma$, то $\beta\gamma\geqslant 0$ и, поскольку $|\beta|=|\gamma|$, то $\beta=\gamma$. Полагая $\beta=\operatorname{sh}\theta$, получаем $\alpha=\operatorname{ch}\theta$, следовательно, матрица g имеет вид (4).

Пусть теперь $\alpha=\delta<1$. Тогда из равенства $\alpha\delta-1=\beta\gamma$ получаем $\beta\gamma<0$ и потому $\gamma=-\beta$. При $\alpha=\cos\theta$, $\beta=-\sin\theta$ матрица g имеет вид (5). Здесь $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$, поскольку $\alpha>0$, $|\alpha|>|\beta|$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Положим

$$e^{\varphi}=\left|\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right|^{\frac{1}{2}}, \quad e^{\psi}=\left|\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}\right|^{\frac{1}{2}},$$

и обозначим через g_1 матрицу $g_1=d_1^{-1}g\,d_2^{-1}$, где

$$d_1=\begin{pmatrix}e^{-\varphi} & 0\\ 0 & e^{\varphi}\end{pmatrix}, \qquad d_2=\begin{pmatrix}e^{-\psi} & 0\\ 0 & e^{\psi}\end{pmatrix}.$$

Положим $g_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$. В силу выбора φ и ψ выполняются равенства $|\alpha_1|=|\delta_1|$ и $|\beta_1|=|\gamma_1|$. Далее, обозначим через p матрицу $p=s^{-\varepsilon_2}(-e)^{-\varepsilon_1}g_1$, $\quad p=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}$, где

а) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, если $|\alpha_1|\geqslant|\beta_1|$, $\alpha_1>0$,
б) $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, если $|\alpha_1|\geqslant|\beta_1|$, $\alpha_1<0$,
в) $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=1$, если $|\alpha_1|<|\beta_1|$, $\gamma_1>0$,
г) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, если $|\alpha_1|<|\beta_1|$, $\gamma_1<0$.

Тогда имеют место неравенства $|\alpha_2|=|\delta_2|>|\beta_2|=|\gamma_2|$, $\alpha_2>0$. Следовательно, матрица p имеет либо вид (2), либо вид (3). Но тогда

$$g=d_1g_1d_2=d_1(-e)^{\varepsilon_1}s^{\varepsilon_2}pd_2.$$

Из доказанной теоремы вытекает, что каждая матрица g из группы $SL(2, R)$ задается числами φ, θ, ψ и числами ε_1, ε_2, принимающими значения 0 и 1. Кроме того, должно быть указано, какой вид имеет матрица p: (2) или (3). Мы получаем, таким образом, восемь областей в группе $SL(2, R)$, характеризующихся значениями ε_1, ε_2 и типом матрицы p. В каждой из этих областей матрица g однозначно определяется значениями φ, θ, ψ. При этом, если g имеет вид (2), то θ изменяется от $-\infty$ до ∞, а если g имеет тип (3), то θ изменяется от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Построенная параметризация группы $SL(2, R)$ тесно связана с параметризацией группы $SL(2, C)$ при помощи углов Эйлера, однако несколько отличается от нее (из-за наличия множителей вида s^{ε}). Параметризация при помощи углов Эйлера неудобна тем, что в некоторых случаях при этой параметризации приходится разлагать вещественные матрицы в произведение матриц с комплексными элементами.

Рассмотрим теперь в группе $SL(2, R)$ матрицы, для которых один из матричных элементов равен нулю. Как и в теореме 1, убеждаемся, что любая матрица такого вида может быть записана в виде

$$g = d(-e)^{\varepsilon_1} s^{\varepsilon_2} p s^{\varepsilon_3}, \tag{6}$$

где $d = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} \end{pmatrix}$, ε_1, ε_2 и ε_3 принимают значения 0 и 1, $-e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и p — матрица вида $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$.

Например, если $g = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\gamma > 0$, то

$$g = dps,$$

где

$$d = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} \end{pmatrix}, \quad e^{\varphi} = -\gamma, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\delta}{\gamma} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Алгебра Ли. Выберем в алгебре Ли группы $SL(2, R)$ базис, состоящий из касательных матриц к однопараметрическим подгруппам

$$\omega_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\omega_-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \tag{1'}$$

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{1''}$$

Эти касательные матрицы имеют соответственно вид

$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_+, a_-] = -a_3, \tag{3}$$
$$[a_+, a_3] = 2a_+, \tag{3'}$$
$$[a_-, a_3] = -2a_-. \tag{3''}$$

Вместо матриц a_+ и a_- можно взять их линейные комбинации

$$a_1 = a_+ + a_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

и

$$a_2 = -a_+ + a_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4'}$$

Они являются касательными матрицами к подгруппам

$$\Omega_1 : \omega_1(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \tag{5}$$

и

$$\Omega_2 : \omega_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{5'}$$

соответственно.

Коммутационные соотношения для матриц a_1, a_2, a_3 имеют следующий вид:

$$[a_1, a_2] = -2a_3, \tag{6}$$
$$[a_2, a_3] = -2a_1, \tag{6'}$$
$$[a_3, a_1] = 2a_2. \tag{6''}$$

§ 3. Неприводимые представления группы $SL(2, R)$

1. Описание. Поскольку группа $SL(2, R)$ изоморфна группе $QU(2)$, то ее неприводимые представления непосредственно получаются из описанных в п. 2 § 2 главы VI неприводимых представлений группы $QU(2)$. Напомним, что эти представления строятся в пространстве $\mathfrak{D}_\chi$, $\chi = (l, \varepsilon)$ функций $\Phi(z)$, имеющих степень однородности $2l$ и четность 2ε, и задаются формулой

$$T_\chi(h)\,\Phi(z) = \Phi(az + \bar{b}\bar{z}), \tag{1}$$

где $h = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Поэтому, если $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — матрица из группы $SL(2, R)$, то соответствующий ей оператор представления задается формулой (1), где

$h = t^{-1}gt$, $t = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ (см. п. 1 § 1 главы VI). В параметрах α, β, γ, δ представление записывается в виде

$$T_\chi(g)\Phi(z) = \Phi\left[\left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\beta+\gamma}{2} + i\frac{\delta-\alpha}{2}\right)\bar{z}\right] \tag{2}$$

(см. п. 1 § 1 главы VI, формулы (2), (2')).

Более удобная запись представления получится, если перейти от комплексного числа $z = x + iy$ к паре вещественных чисел $u = x - y$, $v = x + y$, или, иначе,

$$u = \frac{\bar{z} + iz}{1+i}; \quad v = \frac{z + i\bar{z}}{1+i}.$$

Простой подсчет показывает, что оператору (2) соответствует оператор

$$T_\chi(g)\varphi(u, v) = \varphi(\alpha u + \gamma v, \beta u + \delta v) \tag{3}$$

в пространстве функций

$$\varphi(u, v) \equiv \Phi(z). \tag{4}$$

При этом функции $\varphi(u, v)$ бесконечно дифференцируемы, имеют степень однородности $2l$ и четность 2ε.

Таким образом, мы получили следующую реализацию представлений группы $SL(2, R)$. Пусть $\chi = (l, \varepsilon)$, где l — комплексное число, и $\varepsilon = 0, \frac{1}{2}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_\chi$ пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x, y)$ двух вещественных переменных x и y, таких, что для любого вещественного числа a выполняется равенство

$$\varphi(ax, ay) = |a|^{2l}(\operatorname{sign} a)^{2\varepsilon}\varphi(x, y). \tag{5}$$

Операторы $T_\chi(g)$ представления группы $SL(2, R)$ определим формулой

$$T_\chi(g)\varphi(x, y) = \varphi(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y), \tag{6}$$

где $\varphi(x, y) \in \mathfrak{D}_\chi$ и $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R)$.

Перейдем от описанной реализации представлений к реализации в пространстве функций $f(x)$, заданных на вещественной оси. Каждой функции $\varphi(x, y)$ из пространства $\mathfrak{D}_\chi$ поставим в соответствие функцию одного переменного

$$f(x) = \varphi(x, 1). \tag{7}$$

В силу соотношения однородности (5) функция $\varphi(x, y)$ выражается через $f(x)$ по формуле

$$\varphi(x, y) = |y|^{2l}(\operatorname{sign} y)^{2\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{y}, 1\right) = |y|^{2l}(\operatorname{sign} y)^{2\varepsilon}f\left(\frac{x}{y}\right). \tag{8}$$

Очевидно, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Кроме того, полагая в формуле (8) $x=1$ и учитывая бесконечную дифференцируемость функции $\varphi(1, y)$ по y, получаем, что функция

$$\hat{f}(y)=|y|^{2l}(\operatorname{sign} y)^{2\varepsilon} f\left(\frac{1}{y}\right) \tag{9}$$

бесконечно дифференцируема. Легко показать, что любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, такой, что функция $\hat{f}(x)$ также бесконечно дифференцируема, соответствует по формуле (8) функция $\varphi(x, y)$ из пространства $\mathfrak{D}_\chi$.

Пользуясь соотношениями (6) и (8), легко получить, что операторы представления $T_\chi(g)$ при переходе от $\varphi(x, y)$ к $f(x)$ принимают следующий вид:

$$T_\chi(g) f(x)=|\beta x+\delta|^{2l} \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(\beta x+\delta) f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right). \tag{10}$$

2. Другая реализация представлений $T_\chi(g)$. Перейдем к другой реализации представлений $T_\chi(g)$. Для этого каждой функции $f(x)$ из $\mathfrak{D}_\chi$ поставим в соответствие пару функций $(F_+(\lambda), F_-(\lambda))$, определяемых формулами

$$F_+(\lambda)=\int_0^\infty x^{\lambda-1} f(x)\, dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_+^{\lambda-1} f(x)\, dx \tag{1}$$

и

$$F_-(\lambda)=\int_0^\infty x^{\lambda-1} f(-x)\, dx=\int_{-\infty}^{\infty} x_-^{\lambda-1} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Иными словами, эти функции являются преобразованиями Меллина функций $f(x)$ и $f(-x)$, рассматриваемых на полуоси $0 \leqslant x<\infty$.

Выясним, при каких значениях λ интегралы (1) и (2) сходятся. Пусть $f(x) \in \mathfrak{D}_\chi$. Из равенства (1) вытекает, что при $|x| \rightarrow \infty$ имеем

$$|f(x)| \sim|\hat{f}(0)||x|^{2l}. \tag{3}$$

Поэтому интегралы (1) и (2) абсолютно сходятся на бесконечности, если $\operatorname{Re}(\lambda+2l)>0$. В нуле эти интегралы сходятся при $\operatorname{Re} \lambda>0$. Итак, интегралы (1) и (2) абсолютно сходятся в полосе $0<\operatorname{Re} \lambda< <-2 \operatorname{Re} l$. В этой полосе они определяют $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$ как аналитические функции от λ.

Далее, из результатов п. 2 § 5 главы II легко следует, что если $f(x) \in \mathfrak{D}_\chi$ и $0<a<-2 \operatorname{Re} l$, то функции $F_+(a+i\mu)$ и $F_-(a+i\mu)$ быстро убывают при $|\mu| \rightarrow \infty$.

Вне полосы $0<\operatorname{Re} \lambda<-2 \operatorname{Re} l$ функции $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$ определяются путем аналитического продолжения по λ.

Как было показано в п. 3 § 4 главы II, функция $f(x)$ выражается через функции $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$ по следующей формуле обращения:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_+(\lambda)\,x^{-\lambda}\,d\lambda, & x>0,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_-(\lambda)\,(-x)^{-\lambda}\,d\lambda, & x<0,\end{cases} \tag{4}$$

где a — любая точка промежутка $0<a<-2\operatorname{Re} l$. При этом имеет место равенство Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_+(1-\bar\lambda)\,\overline{F_+(\lambda)}\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_-(1-\bar\lambda)\,\overline{F_-(\lambda)}\,d\lambda. \tag{5}$$

При $\lambda=\frac{1}{2}+i\rho$ эти формулы принимают симметричный вид:

$$\Phi_\pm(\rho)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x_\pm^{-\frac{1}{2}+i\rho}\,dx, \tag{6}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(\rho)\,x^{-\frac{1}{2}-i\rho}\,d\rho, & x>0,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_-(\rho)\,(-x)^{-\frac{1}{2}-i\rho}\,d\rho, & x<0,\end{cases} \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_+(\rho)|^2\,d\rho+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_-(\rho)|^2\,d\rho,$$

где для краткости положено $\Phi_\pm(\rho)=F_\pm\left(\frac{1}{2}+i\rho\right)$. Мы можем поэтому распространить соответствие $f\to(F_+, F_-)$ до соответствия $f\to(\Phi_+, \Phi_-)$, где f, Φ_+, Φ_- — функции с интегрируемым квадратом модуля.

Найдем теперь, как выражаются операторы представления $T_\chi(g)$ в пространстве пар $\mathbf{F}=(F_+, F_-)$. Обозначим пару, соответствующую функции $T_\chi(g)f(x)$, через $R_\chi(g)\mathbf{F}=(R_\chi(g)F_+, R_\chi(g)F_-)$.

Пусть $d=\begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} \end{pmatrix}$ — диагональная матрица. В пространстве функций $f(x)$ ей соответствует оператор

$$T_\chi(d)f(x)=e^{2l\varphi}f(e^{-2\varphi}x). \tag{8}$$

Поэтому

$$R_\chi(d)F_+(\lambda)=e^{2l\varphi}\int_0^\infty f(e^{-2\varphi}x)\,x^{\lambda-1}\,dx=$$

$$=e^{2\varphi(\lambda+l)}\int_0^\infty f(x)\,x^{\lambda-1}\,dx=e^{2\varphi(\lambda+l)}F_+(\lambda). \tag{9}$$

Аналогично,

$$R_\chi(d)F_-(\lambda)=e^{2\varphi(\lambda+l)}F_-(\lambda) \tag{10}$$

и, следовательно,

$$R_\chi(d)\mathbf{F}(\lambda)=e^{2\varphi(\lambda+l)}\mathbf{F}(\lambda). \tag{11}$$

Таким образом, оператору $T_\chi(d)$, $d=\begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} \end{pmatrix}$ соответствует в пространстве пар $\mathbf{F}=(F_+, F_-)$ оператор умножения на функцию $e^{2\varphi(\lambda+l)}$. Иными словами, при переходе к пространству пар операторы, соответствующие матрицам d, приняли диагональную форму.

Совершенно аналогично доказывается, что матрице $s=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ соответствует оператор, переводящий пару $\mathbf{F}(\lambda)=(F_+(\lambda), F_-(\lambda))$ в пару

$$R_\chi(s)\mathbf{F}(\lambda)=(F_-(-\lambda-2l),\quad (-1)^{2\varepsilon}F_+(-\lambda-2l)). \tag{12}$$

Матрице же $-e=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ соответствует оператор, переводящий пару $\mathbf{F}=(F_+, F_-)$ в пару

$$(-1)^{2\varepsilon}\mathbf{F}=((-1)^{2\varepsilon}F_+, (-1)^{2\varepsilon}F_-). \tag{13}$$

Наконец, матрице $t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ соответствует оператор, переводящий $\mathbf{F}=(F_+, F_-)$ в

$$R_\chi(t)\mathbf{F}=((-1)^{2\varepsilon}F_-, (-1)^{2\varepsilon}F_+). \tag{14}$$

3. Операторы второй реализации представлений $T_\chi(g)$. Рассмотрим теперь матрицу $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, все элементы которой отличны от нуля, и найдем соответствующий ей оператор в пространстве пар. Так как

$$T_\chi(g) f(x) = |\beta x + \delta|^{2l} \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(\beta x + \delta) f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right), \tag{1}$$

то

$$R_\chi(g) F_+(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x_+^{\lambda-1} |\beta x + \delta|^{2l} \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(\beta x + \delta) f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) dx \tag{2}$$

и

$$R_\chi(g) F_-(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x_-^{\lambda-1} |\beta x + \delta|^{2l} \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(\beta x + \delta) f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) dx. \tag{3}$$

Сделаем в формуле (2) подстановку $\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta} = y$. Мы получаем

$$R_\chi(g) F_+(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta y - \gamma}{-\beta y + \alpha}\right)_+^{\lambda-1} |-\beta y + \alpha|^{-2l-2} \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-\beta y + \alpha) f(y)\, dy. \tag{4}$$

Используя формулу обращения (5) п. 2, можно переписать этот интеграл в следующем виде:

$$R_\chi(g) F_+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left(\frac{\delta y - \gamma}{-\beta y + \alpha}\right)_+^{\lambda-1} |-\beta y + \alpha|^{-2l-2} \times \\ \times \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-\beta y + \alpha) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-\mu} F_+(\mu)\, d\mu\, dy + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\delta y - \gamma}{-\beta y + \alpha}\right)_+^{\lambda-1} |-\beta y + \alpha|^{-2l-2} \times \\ \times \operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-\beta y + \alpha) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-\mu} F_-(\mu)\, d\mu\, dy, \tag{5}$$

где $0 < a < -2 \operatorname{Re} l$.

Покажем, что при выполнении условий

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \operatorname{Re}\lambda < -2\operatorname{Re} l, \\ -1 - 2\operatorname{Re} l < \operatorname{Re}\mu < 1 \end{array}\right\} \tag{6}$$

интегралы в формуле (5) абсолютно сходятся. Так как функции $F_+(\mu)$ и $F_-(\mu)$, $\mu = a + i\nu$ быстро убывают при $|\nu| \to \infty$, то достаточно показать сходимость интегралов по переменной y. Если все элементы матрицы $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ отличны от нуля, то особыми точками подынтегральной функции являются точки $y=0,\ \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma}{\delta}$ и ∞. Порядки функции в этих точках равны соответственно

$$-\mu,\quad -\lambda-2l-1,\quad \lambda-1\quad \text{и}\quad -\mu-2l-2.$$

Отсюда и вытекает абсолютная сходимость интегралов в области (6). Случай, когда один из элементов матрицы g обращается в нуль, будет рассмотрен ниже.

Будем считать, что условия (6) выполнены. Тогда можно изменить порядок интегрирования. Мы получим

$$R_\chi(g)F_+(\lambda)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)F_+(\mu)\,d\mu+\\ +\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)F_-(\mu)\,d\mu, \tag{7}$$

где ядра $K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$ и $K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$ задаются формулами

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)=\\ =\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)_+^{-\mu}|\beta x+\delta|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(\beta x+\delta)\,dx, \tag{8}$$

$$K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)_-^{-\mu}|\beta x+\delta|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(\beta x+\delta)\,dx \tag{8'}$$

$\left(\text{в интегралах, выражающих ядра, сделана подстановка } y=\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)$.

Аналогично доказывается, что

$$R_\chi(g)F_-(\lambda)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)F_+(\mu)\,d\mu+\\ +\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)F_-(\mu)\,d\mu, \tag{9}$$

где

$$K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)=\\ =\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\left(\frac{-\alpha x+\gamma}{-\beta x+\delta}\right)_+^{-\mu}|-\beta x+\delta|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-\beta x+\delta)\,dx, \tag{10}$$

$$K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi,\ g)=\\ =\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\left(\frac{-\alpha x+\gamma}{-\beta x+\delta}\right)_-^{-\mu}|-\beta x+\delta|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-\beta x+\delta)\,dx. \tag{10'}$$

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Если $0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re} l$, $-1-2\operatorname{Re} l<\operatorname{Re}\mu<1$, *и если все элементы матрицы* $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *отличны от нуля, то после перехода к пространству пар* $\mathbf{F}=(F_+, F_-)$ *операторы представления* $T_\chi(g)$ *переходят в операторы*

$$R_\chi(g)\mathbf{F}(\lambda)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)\,F(\mu)\,d\mu. \tag{11}$$

Здесь через $\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$ *обозначена матрица*

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}K_{++} & K_{+-}\\ K_{-+} & K_{--}\end{pmatrix}, \tag{12}$$

элементы которой даются формулами (8), (8′), (10), (10′).

Матрицу $\mathbf{K}$ будем в дальнейшем называть *ядром оператора* $R_\chi(g)$. Это ядро определено в области

$$0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re} l,$$
$$-1-2\operatorname{Re} l<\operatorname{Re}\mu<1.$$

В случае, когда один из элементов матрицы g равен нулю, соответствующий оператор $R_\chi(g)$ также задается формулой вида (11). Однако в этом случае область сходимости интегралов (8), (8′) (10) и (10′) меняется. Именно, при $\alpha=0$ эти интегралы сходятся в области

$$0<\operatorname{Re}\lambda;\quad \operatorname{Re}(\lambda+\mu)<-2\operatorname{Re} l<\operatorname{Re}\mu+1, \tag{13}$$

при $\beta=0$ — в области

$$0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\mu<1, \tag{13′}$$

при $\gamma=0$ — в области

$$-2\operatorname{Re} l-1<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re} l \tag{13″}$$

и при $\delta=0$ — в области

$$\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re} l<\operatorname{Re}(\lambda+\mu);\qquad \operatorname{Re}\mu<1. \tag{13‴}$$

4. Инфинитезимальные операторы. Вычислим инфинитезимальные операторы построенных выше представлений группы $SL(2, R)$. Операторы представления $T_\chi(g)$, соответствующие элементам

$$\omega_+(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1}$$

однопараметрической подгруппы Ω_+, имеют вид

$$T_\gamma(\omega_+(t))=|tx+1|^{2l}\operatorname{sign}(tx+1)\,f\left(\frac{x}{tx+1}\right). \tag{2}$$

Продифференцировав обе части этого равенства по t и положив $t=0$, получим

$$A_+ \equiv \frac{dT_\chi(\omega_+(t))}{dt}\bigg|_{t=0} = 2lx - x^2\frac{d}{dx}. \tag{3}$$

Точно так же инфинитезимальный оператор A_- этого представления, соответствующий подгруппе Ω_- матриц вида $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$, задается формулой

$$A_- = \frac{d}{dx}. \tag{4}$$

Подгруппе же Ω_3 матриц $\omega_3(t)=\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$ соответствует оператор

$$A_3 = 2l - 2x\frac{d}{dx}. \tag{5}$$

Так как касательная матрица к подгруппе

$$\Omega_1:\begin{pmatrix}\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t\\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t\end{pmatrix}$$

имеет вид $a_1 = a_+ + a_-$, то подгруппе Ω_1 соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_1 = A_+ + A_- = 2lx + (1-x^2)\frac{d}{dx}. \tag{6}$$

Точно так же доказывается, что подгруппе

$$\Omega_2:\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_2 = -2lx + (1+x^2)\frac{d}{dx}. \tag{7}$$

Вычислим теперь инфинитезимальные операторы для представления $R_\chi(g)$. Чтобы найти оператор, соответствующий подгруппе Ω_+, надо найти преобразования Меллина функций $A_+f(x)$, $x>0$ и $(A_+f)(-x)$, $x<0$. Преобразование Меллина для $A_+f(x)$ имеет вид

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}A_+f(x)\,dx = \int_0^\infty x^{\lambda-1}[2lxf(x) - x^2f'(x)]\,dx =$$

$$= 2l\int_0^\infty x^\lambda f(x)\,dx - \int_0^\infty x^{\lambda+1}f'(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} f(x)\,dx = F_+(\lambda),$$

получаем

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} A_+ f(x)\,dx = (2l+\lambda+1)\,F_+(\lambda+1).$$

Аналогично выводится, что

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(A_+f)(-x)\,dx = -(2l+\lambda+1)\,F_-(\lambda+1).$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор представления $R_\chi(g)$, соответствующий подгруппе Ω_+, имеет вид

$$B_+(F_+(\lambda),\ F_-(\lambda)) = \\ = ((2l+\lambda+1)\,F_+(\lambda+1),\ -(2l+\lambda+1)\,F_-(\lambda+1)). \tag{8}$$

Совершенно так же доказывается, что подгруппе Ω_- соответствует инфинитезимальный оператор

$$B_-(F_+(\lambda),\ F_-(\lambda)) = (-(\lambda-1)\,F_+(\lambda-1),\ (\lambda-1)\,F_-(\lambda-1)), \tag{9}$$

а подгруппе Ω_3 — оператор

$$B_3(F_+(\lambda),\ F_-(\lambda)) = ((2l+2\lambda)\,F_+(\lambda),\ (2l+2\lambda)\,F_-(\lambda)). \tag{10}$$

Инфинитезимальные операторы, соответствующие подгруппам Ω_1 и Ω_2, являются линейными комбинациями операторов B_+ и B_-.

$$B_1(F_+(\lambda),\ F_-(\lambda)) = ((2l+\lambda+1)\,F_+(\lambda+1) - (\lambda-1)\,F_+(\lambda-1), \\ -(2l+\lambda+1)\,F_-(\lambda+1) + (\lambda-1)\,F_-(\lambda-1)), \tag{11}$$

$$B_2(F_+(\lambda),\ F_-(\lambda)) = (-(2l+\lambda+1)\,F_+(\lambda+1) - (\lambda-1)\,F_+(\lambda-1), \\ (2l+\lambda+1)\,F_-(\lambda+1) + (\lambda-1)\,F_-(\lambda-1)). \tag{12}$$

§ 4. Вычисление ядер представления $R_\chi(g)$

1. Вычисление $K(\lambda;\ \mu;\ \chi;\ h)$ и $K(\lambda;\ \mu;\ \chi;\ u)$. В п. 2 § 2 было показано, что любая матрица g из группы $SL(2, R)$ может быть представлена в виде произведения диагональных матриц, матрицы $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и матрицы, имеющей либо вид

$$h = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}, \qquad -\infty < \theta < \infty, \tag{1}$$

либо вид

$$u = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Для диагональных матриц, а также матрицы s, мы уже нашли вид оператора представления. Поэтому достаточно вычислить ядра для операторов $R_\chi(h)$ и $R_\chi(u)$, где h и u — матрицы, имеющие соответственно вид (1) и (2). Начнем с матриц вида

$$h=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}$$

при $\theta>0$. Из формулы (8) п. 3 § 3 вытекает, что

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\left(\frac{x\operatorname{ch}\theta+\operatorname{sh}\theta}{x\operatorname{sh}\theta+\operatorname{ch}\theta}\right)_+^{-\mu}|x\operatorname{sh}\theta+\operatorname{ch}\theta|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(x\operatorname{sh}\theta+\operatorname{ch}\theta)\,dx.$$

Но при $\theta>0$, $x>0$ мы имеем $x\operatorname{ch}\theta+\operatorname{sh}\theta>0$ и $x\operatorname{sh}\theta+\operatorname{ch}\theta>0$, потому

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\lambda-1}(x\operatorname{ch}\theta+\operatorname{sh}\theta)^{-\mu}(x\operatorname{sh}\theta+\operatorname{ch}\theta)^{2l+\mu}dx. \qquad (3)$$

Сделаем в этом интеграле подстановку $x=y\operatorname{th}\theta$ и воспользуемся формулой (2) п. 3 § 1. После простых преобразований получим при $\theta>0$

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(-\lambda-2l)}{\Gamma(-2l)}\,\frac{\operatorname{sh}^{4l+\lambda+\mu}\theta}{\operatorname{ch}^{2l+\lambda+\mu}\theta}\,F\left(-2l-\lambda,\ -2l-\mu;\ -2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right) \qquad (4)$$

или, по формуле (5) п. 2 § 1,

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(-\lambda-2l)}{\Gamma(-2l)}\,\frac{\operatorname{ch}^{\lambda+\mu+2l}\theta}{\operatorname{sh}^{\lambda+\mu}\theta}\,F\left(\lambda,\ \mu;\ -2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right). \qquad (4')$$

Заметим, что интеграл (3) абсолютно сходится в области $0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l$.

Остальные элементы матрицы $\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)$ вычисляются точно так же. Приведем результаты вычисления:

$$K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=0, \qquad (5)$$

$$K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{ch}^{\lambda+\mu+2l}\theta\,\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}\operatorname{sh}^{\lambda-\mu}\theta\,F(\lambda,\ \lambda+2l+1;\ \lambda-\mu+1;\ -\operatorname{sh}^2\theta)+\right.$$
$$+(-1)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma(-\lambda-2l)\,\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}\operatorname{sh}^{\mu-\lambda}\theta\,\times$$
$$\left.\times F(\mu,\ \mu+2l+1;\ \mu-\lambda+1;\ -\operatorname{sh}^2\theta)\right], \qquad (6)$$

где $0 < \operatorname{Re}\lambda < -2\operatorname{Re} l$, $-1-2\operatorname{Re} l < \operatorname{Re}\mu < 1$,

$$K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(2l+2)}\times$$

$$\times\,\operatorname{sh}^{-\lambda-\mu-4l-2}\theta\,\operatorname{ch}^{\lambda+\mu+2l}\theta\,F\left(\lambda+2l+1,\ \mu+2l+1;\ 2l+2;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right), \quad (7)$$

где $-1-2\operatorname{Re} l < \operatorname{Re}\mu < 1$.

Из формул (4) — (7) и соотношения (5) п. 2 § 1 для гипергеометрической функции вытекает, что

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h) = K_{++}(-\lambda-2l,\ -\mu-2l;\ \chi;\ h) \quad (8)$$

и

$$K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h) = K_{--}(-\lambda-2l,\ -\mu-2l;\ \chi;\ h), \quad (9)$$

а также, что

$$K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h) = (-1)^{2\varepsilon} K_{-+}(-\lambda-2l,\ -\mu-2l;\ \chi;\ h). \quad (10)$$

Вычислим теперь ядро оператора $R_\chi(h^{-1})$, $h^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}$, $\theta > 0$. Для этого заметим, что

$$h^{-1} = shs(-e),$$

где

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$R_\chi(h^{-1}) = R_\chi(s)\,R_\chi(h)\,R_\chi(s)\ R_\chi(-e).$$

Операторы $R_\chi(s)$ и $R_\chi(-e)$ были вычислены в п. 3 § 3. Пользуясь данным там описанием и принимая во внимание соотношения (8) — (10), без труда устанавливаем, что матрица $K(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h^{-1})$ получается из матрицы $K(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)$ путем изменения обоих знаков-индексов.

Иными словами,

$$\left.\begin{aligned} K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h^{-1}) &= K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h), \\ K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h^{-1}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

и т. д.

Перейдем теперь к оператору $R_\chi(u)$, где

$$u = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}. \quad (12)$$

Совершенно так же, как и для матрицы h, получаем

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2l+1)}\times$$
$$\times\frac{\cos^{\lambda+\mu+2l}\theta}{\sin^{\lambda+\mu}\theta}F(\lambda,\ \mu;\ \lambda+\mu+2l+1;\ -\operatorname{ctg}^2\theta),\quad(13)$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda$ и $-1-2\operatorname{Re}l<\operatorname{Re}\mu$;

$$K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u)=$$
$$=\frac{(-1)^{2\varepsilon}}{2\pi i}\frac{\Gamma(-\lambda-2l)\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}\sin^{\mu-\lambda}\theta\cos^{\lambda-\mu+2l}\theta\times$$
$$\times F(-\lambda-2l,\ \mu;\ \mu-\lambda+1;\ -\operatorname{tg}^2\theta),\quad(14)$$

где $\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l$ и $-1-2\operatorname{Re}l<\operatorname{Re}\mu$;

$$K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}\times$$
$$\times\sin^{\lambda-\mu}\theta\cos^{\mu-\lambda+2l}\theta F(\lambda,\ -\mu-2l;\ \lambda-\mu+1;\ -\operatorname{tg}^2\theta),\quad(15)$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Re}\mu<1$;

$$K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(-\lambda-2l)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\lambda-\mu-2l)}\times$$
$$\times\sin^{\lambda+\mu-2}\theta\cos^{-\lambda-\mu-2l}\theta F(1-\lambda,\ 1-\mu;\ 1-\lambda-\mu-2l;\ -\operatorname{ctg}^2\theta),\quad(16)$$

где $\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l$ и $\operatorname{Re}\mu<1$.

И в этом случае при замене u на u^{-1} меняются оба знака-индекса:

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u^{-1})=K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u),\quad(17)$$
$$K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u^{-1})=K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u),\quad(17')$$

и т. д. Здесь

$$u^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\qquad 0<\theta<\frac{\pi}{4}.$$

2. Случай треугольных матриц. В случае, когда матрица g — треугольная, выражение ядра оператора $R_\chi(g)$ упрощается — гипергеометрические функции вырождаются в степенные. Пусть, например, $z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$, $\gamma>0$. В этом случае по формуле (8) п. 3 § 3 мы имеем

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}(x+\gamma)^{-\mu}\,dx.\quad(1)$$

Этот интеграл сходится в области $0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\mu$. Используя формулу (7) п. 6 § 1 главы V, находим

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu-\lambda)}{\Gamma(\mu)}\gamma^{\lambda-\mu}.\quad(2)$$

Точно так же получаем

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; z) = 0, \tag{3}$$

$$K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \gamma^{\lambda-\mu}, \tag{4}$$

где $0 < \operatorname{Re}\lambda$ и $\operatorname{Re}\mu < 1$,

$$K_{--}(\lambda, \mu; \chi; z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} \gamma^{\lambda-\mu}, \tag{5}$$

где $\operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\mu < 1$.

И здесь при замене γ на $-\gamma$ надо изменить оба знака-индекса:

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; z) = K_{--}(\lambda, \mu; \chi; z^{-1}), \tag{6}$$

и т. д.

Для других треугольных матриц ядра операторов легко получаются из ядра оператора $R_\chi(z)$. Например, пусть $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда имеет место равенство

$$\zeta = sz^{-1}s(-e),$$

где $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$R_\chi(\zeta) = R_\chi(s) R_\chi(z^{-1}) R_\chi(s) R_\chi(-e). \tag{7}$$

Используя найденные выше выражения для операторов $R_\chi(s)$ и $R_\chi(-e)$, а также найденное ядро оператора $R_\chi(z)$, получаем при $\beta > 0$

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\lambda-\mu)\Gamma(-\lambda-2l)}{\Gamma(-\mu-2l)} \beta^{\mu-\lambda}, \tag{8}$$

где $\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\lambda < -2\operatorname{Re} l$;

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; \zeta) = 0; \tag{9}$$

$$K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; \zeta) = \frac{(-1)^{2\varepsilon}}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+2l+1)\Gamma(-\lambda-2l)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)} \beta^{\mu-\lambda}, \tag{10}$$

где $\operatorname{Re}\lambda < -2\operatorname{Re} l$, $-1-2\operatorname{Re} l < \operatorname{Re}\mu$;

$$K_{--}(\lambda, \mu; \chi; \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\lambda-\mu)\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\lambda+2l+1)} \beta^{\mu-\lambda}, \tag{11}$$

где $-1-2\operatorname{Re} l < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\lambda$.

И в этом случае при переходе от матрицы ζ к матрице $\zeta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ надо изменить знаки-индексы:

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; \zeta^{-1}) = K_{--}(\lambda, \mu; \chi; \zeta), \tag{12}$$

и т. д.

Для матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ ядра вычисляются точно так же. Мы предоставляем провести это вычисление читателю.

3. Общий случай. Полученных выше результатов достаточно, чтобы вычислить ядро оператора $R_\chi(g)$ для любого элемента g группы $SL(2, R)$. Если все матричные элементы матрицы $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ отличны от нуля, то, как было показано в п. 2 § 2, эту матрицу можно записать в виде

$$g=d_1(-e)^{\varepsilon_1} s^{\varepsilon_2} p\, d_2, \tag{1}$$

где $s=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $-e=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d_1 и d_2 — диагональные матрицы, а p — матрица одного из следующих двух видов:

$$p=\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}, \qquad -\infty<\theta<\infty, \tag{2}$$

$$p=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad -\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}. \tag{3}$$

Поскольку для всех матриц указанного вида ядра операторов вычислены, мы легко найдем ядро оператора $R_\chi(g)$.

В случае, когда один из элементов матрицы g равен нулю, надо использовать разложение (6) п. 2 § 2. Наконец, в случае, когда два элемента матрицы g равны нулю, следует воспользоваться результатами п. 2 § 3.

4. Некоторые интегральные преобразования, связанные с гипергеометрической функцией. Операторы $T_\chi(g)$ и $T_\chi(g^{-1})$ взаимно обратны: если $\mathbf{F}=T_\chi(g)\mathbf{f}$, то $\mathbf{f}=T_\chi(g^{-1})\mathbf{F}$. Поэтому из

$$\mathbf{F}(\lambda)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; g)\,\mathbf{f}(\mu)\,d\mu, \tag{1}$$

где $\mathbf{f}=(f_+, f_-)$ и $\mathbf{F}=(F_+, F_-)$, следует, что

$$\mathbf{f}(\lambda)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; g^{-1})\,\mathbf{F}(\mu)\,d\mu, \tag{2}$$

где a удовлетворяет указанным в п. 3 § 3 ограничениям. Выбирая различные элементы g группы $SL(2, R)$, получаем пары взаимно обратных интегральных преобразований, связанных с гипергеометрической функцией.

Если положить $g=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}$, $\theta>0$, то получаем следующую пару интегральных преобразований, связывающих **F** и **f**. Пусть

$$F_+(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(-\lambda-2l)}{\Gamma(-2l)}(\operatorname{sh}\theta)^{-\lambda}(\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+2l}\times$$
$$\times\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\operatorname{cth}\theta)^{\mu}F\left(\lambda,\ \mu;\ -2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right)f_+(\mu)\,d\mu, \tag{3}$$

$$F_-(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\Gamma(\lambda)(\operatorname{sh}\theta)^{\lambda}(\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+2l}\times$$
$$\times\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}(\operatorname{cth}\theta)^{\mu}F(\lambda,\lambda+2l+1;\lambda-\mu+1;-\operatorname{sh}^2\theta)\,f_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{(-1)^{2\varepsilon}\Gamma(-\lambda-2l)}{2\pi i}(\operatorname{sh}\theta)^{-\lambda}(\operatorname{ch}\theta)^{-\lambda-2l}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}\times$$
$$\times(\operatorname{th}\theta)^{\mu}F(1-\lambda,\ -\lambda-2l;\ \mu-\lambda+1;\ -\operatorname{sh}^2\theta)f_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i\,\Gamma(2l+2)}(\operatorname{sh}\theta)^{-\lambda-4l-2}(\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+2l}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu+2l+1)(\operatorname{cth}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F\left(\lambda+2l+1,\ \mu+2l+1;\ 2l+2;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right)f_-(\mu)\,d\mu, \tag{4}$$

где $-1-2\operatorname{Re}l<a<1$. Тогда

$$f_+(\lambda)=\frac{1}{2\pi i\,\Gamma(2l+2)}(\operatorname{sh}\theta)^{-\lambda-4l-2}(\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+2l}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu+2l+1)\times$$
$$\times(\operatorname{cth}\theta)^{\mu}F\left(\lambda+2l+1,\ \mu+2l+1;\ 2l+2;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right)F_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\Gamma(\lambda)(\operatorname{sh}\theta)^{\lambda}(\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+2l}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}(\operatorname{cth}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(\lambda,\lambda+2l+1;\lambda-\mu+1;-\operatorname{sh}^2\theta)F_-(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{(-1)^{2\varepsilon}\Gamma(-\lambda-2l)}{2\pi i}(\operatorname{sh}\theta)^{-\lambda}(\operatorname{ch}\theta)^{-\lambda-2l}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}(\operatorname{th}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(1-\lambda,\ -\lambda-2l;\ \mu-\lambda+1;\ -\operatorname{sh}^2\theta)\,F_-(\mu)\,d\mu \tag{5}$$

и

$$f_-(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(-\lambda-2l)}{2\pi i\,\Gamma(-2l)}(\operatorname{sh}\theta)^{-\lambda}(\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+2l}\times$$
$$\times\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\operatorname{cth}\theta)^{\mu}F\left(\lambda,\ \mu;\ -2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right)F_-(\mu)\,d\mu, \tag{6}$$

где $-1-2\operatorname{Re}l<a<1$.

Аналогично, случай $g=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$, приводит к следующим преобразованиям. Пусть

$$F_+(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi i}(\sin\theta)^{-\lambda}(\cos\theta)^{\lambda+2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2l+1)}(\operatorname{ctg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(\lambda,\ \mu;\ \lambda+\mu+2l+1;\ -\operatorname{ctg}^2\theta)f_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{(-1)^{2\varepsilon}\Gamma(-\lambda-2l)}{2\pi i}(\sin\theta)^{-\lambda}(\cos\theta)^{\lambda+2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}\times$$
$$\times(\operatorname{tg}\theta)^{\mu}F(-\lambda-2l,\ \mu;\ \mu-\lambda+1;\ -\operatorname{tg}^2\theta)f_-(\mu)\,d\mu \tag{7}$$

и

$$F_-(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi i}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{-\lambda+2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}(\operatorname{ctg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(\lambda,\ -\mu-2l;\ \lambda-\mu+1;\ -\operatorname{tg}^2\theta)f_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{\Gamma(-\lambda-2l)}{2\pi i}(\sin\theta)^{\lambda-2}(\cos\theta)^{-\lambda-2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\lambda-\mu-2l)}(\operatorname{tg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(1-\lambda,\ 1-\mu;\ 1-\lambda-\mu-2l;\ -\operatorname{ctg}^2\theta)f_-(\mu)\,d\mu, \tag{8}$$

где $-1-2\operatorname{Re} l<a<1$. Тогда

$$f_+(\lambda)=\frac{\Gamma(-\lambda-2l)}{2\pi i}(\sin\theta)^{\lambda-2}(\cos\theta)^{-\lambda-2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\lambda-\mu-2l)}(\operatorname{tg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(1-\lambda,\ 1-\mu;\ 1-\lambda-\mu-2l;\ -\operatorname{ctg}^2\theta)F_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi i}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{-\lambda+2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}(\operatorname{ctg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(\lambda,\ -\mu-2l;\ \lambda-\mu+1;\ -\operatorname{tg}^2\theta)F_-(\mu)\,d\mu \tag{9}$$

и

$$f_-(\lambda)=\frac{(-1)^{2\varepsilon}}{2\pi i}\Gamma(-\lambda-2l)(\sin\theta)^{-\lambda}(\cos\theta)^{\lambda+2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}(\operatorname{tg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(-\lambda-2l,\ \mu,\ \mu-\lambda+1;\ -\operatorname{tg}^2\theta)F_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi i}(\sin\theta)^{-\lambda}(\cos\theta)^{\lambda+2l}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2l+1)}(\operatorname{ctg}\theta)^{\mu}\times$$
$$\times F(\lambda,\ \mu;\ \lambda+\mu+2l+1;\ -\operatorname{ctg}^2\theta)F_-(\mu)\,d\mu, \tag{10}$$

где $-1-2\operatorname{Re} l<a<1$.

Наконец, пусть $g=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$, $t>0$. Тогда получаем следующую пару преобразований. Пусть

$$F_+(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda)\,t^\lambda}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu-\lambda)}{\Gamma(\mu)}t^{-\mu}f_+(\mu)\,d\mu, \tag{11}$$

$$F_-(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda)\,t^\lambda}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}t^{-\mu}f_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{t^\lambda}{2\pi i\,\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(\mu-\lambda)\,t^{-\mu}f_-(\mu)\,d\mu, \tag{12}$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<a<1$. Тогда

$$f_+(\lambda)=\frac{t^\lambda}{2\pi i\,\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(\mu-\lambda)\,t^{-\mu}F_+(\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{\Gamma(\lambda)t^\lambda}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}t^{-\mu}F_-(\mu)\,d\mu \tag{13}$$

и

$$f_-(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda)\,t^\lambda}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu-\lambda)}{\Gamma(\mu)}t^{-\mu}F_-(\mu)\,d\mu, \tag{14}$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<a<1$.

§ 5. Рекуррентные формулы для гипергеометрической функции. Гипергеометрическое уравнение

1. Соотношения между инфинитезимальными операторами и операторами представления. Чтобы вывести рекуррентные формулы для гипергеометрической функции, установим сначала соотношения между операторами представления $R_\chi(g)$ и инфинитезимальными операторами этого представления.

Рассмотрим матрицу $g=h(\varphi)\,\zeta(t)$, где

$$h(\varphi)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix},\qquad \zeta(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет следующий вид:

$$g=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & t\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & t\operatorname{sh}\varphi+\operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}. \tag{1}$$

При $t>0$, $\varphi>0$ все элементы матрицы g положительны и потому в силу п. 2 § 2 ее можно представить в виде

$$g\equiv h(\varphi)\,\zeta(t)=d(t_1)\,h(\theta)\,d(t_2). \tag{2}$$

Здесь $d(t_1)$ и $d(t_2)$ — диагональные матрицы:

$$d(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix},\quad \text{а}\quad h(\theta)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}.$$

Параметры t_1, θ, t_2 связаны с параметрами φ и t формулами

$$\operatorname{ch}2\theta=\operatorname{ch}2\varphi+t\operatorname{sh}2\varphi, \tag{3}$$

$$e^{-t_1-t_2}=\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\theta}, \tag{3$'$}$$

$$e^{t_1-t_2}=\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\theta}, \tag{3$''$}$$

непосредственно вытекающими из равенств (1) и (2).

Из разложения (2) вытекает, что

$$R_\chi(h(\varphi))\,R_\chi(\zeta(t))=R_\chi(d(t_1))\,R_\chi(h(\theta))\,R_\chi(d(t_2)). \tag{4}$$

Продифференцируем обе части этого равенства по t и положим $t=0$; так как t_1, θ и t_2 зависят от t, то мы получим

$$\begin{aligned}R_\chi(h(\varphi))\left.\frac{dR_\chi(\zeta(t))}{dt}\right|_{t=0}=\Big(&\frac{dR_\chi(d(t_1))}{dt_1}\frac{dt_1}{dt}R_\chi(h(\theta))\,R_\chi(d(t_2))+\\&+R_\chi(d(t_1))\frac{dR_\chi(h(\theta))}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}R_\chi(d(t_2))+\\&+R_\chi(d(t_1))\,R_\chi(h(\theta))\frac{dR_\chi(d(t_2))}{dt}\frac{dt_2}{dt}\Big)_{t=0}.\end{aligned} \tag{5}$$

Но из формул (3) — (3$''$) следует, что при $t=0$ имеем $t_1=t_2=0$, $\theta=\varphi$, а потому операторы $R_\chi(d(t_1))$ и $R_\chi(d(t_2))$ являются единичными. Кроме того, дифференцируя равенства (3) — (3$''$) по t и полагая $t=0$, находим

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{2},\quad \left.\frac{dt_1}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2\operatorname{sh}2\varphi},\quad \left.\frac{dt_2}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\operatorname{ch}2\varphi}{2\operatorname{sh}2\varphi}. \tag{6}$$

Наконец, по определению инфинитезимальных операторов (см. § 3 п. 5) имеем

$$\left.\frac{dR_\chi(\zeta(t))}{dt}\right|_{t=0}=B_+,\quad \left.\frac{dR_\chi(d(t))}{dt}\right|_{t=0}=B_3. \tag{7}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (5), находим

$$R_\chi(h)\,B_+=-\frac{B_3}{2\operatorname{sh}2\varphi}R_\chi(h)+\frac{1}{2}\frac{dR_\chi(h)}{d\varphi}+\frac{1}{2}R_\chi(h)\,B_3\operatorname{cth}2\varphi, \tag{8}$$

где $h=h(\varphi)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}$.

Совершенно аналогично устанавливается равенство

$$R_\chi(h)B_- = \frac{B_3}{2\operatorname{sh}2\varphi}R_\chi(h) + \frac{1}{2}\frac{dR_\chi(h)}{d\varphi} - \frac{1}{2}R_\chi(h)B_3\operatorname{cth}2\varphi. \tag{9}$$

Вычитая из равенства (9) равенство (8), получаем

$$R_\chi(h)(B_- - B_+) = \frac{B_3}{\operatorname{sh}2\varphi}R_\chi(h) - R_\chi B_3\operatorname{cth}2\varphi$$

или

$$R_\chi(h)B_2 = \frac{B_3}{\operatorname{sh}2\varphi}R_\chi(h) - R_\chi(h)B_3\operatorname{cth}2\varphi. \tag{10}$$

Аналогично, рассматривая матрицы

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix},$$

получаем

$$R_\chi(u)B_+ = \frac{B_3}{2\sin 2\varphi}R_\chi(u) - \frac{1}{2}\frac{dR_\chi(u)}{d\varphi} - \frac{1}{2}R_\chi(u)B_+\operatorname{ctg}2\varphi \tag{11}$$

и

$$R_\chi(u)B_- = \frac{B_3}{2\sin 2\varphi}R_\chi(u) + \frac{1}{2}\frac{dR_\chi(u)}{d\varphi} - \frac{1}{2}R_\chi(u)B_3\operatorname{ctg}2\varphi, \tag{12}$$

где $u(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$. Отсюда следует, что

$$R_\chi(u)B_1 = \frac{B_3}{\sin 2\varphi}R_\chi(u) - R_\chi(u)B_3\operatorname{ctg}2\varphi. \tag{13}$$

2. Рекуррентные формулы. Выведем теперь из формул предыдущего пункта рекуррентные соотношения для гипергеометрической функции, т. е. соотношения, связывающие $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ с функциями $F(\alpha \pm 1, \beta \pm 1; \gamma \pm 1; x)$. Для этого заменим операторы $R_\chi(h), R_\chi(u)$ и B_+, B_-, B_3, входящие в эти формулы, их явными выражениями, и сравним ядра получающихся операторов слева и справа.

Найдем ядро оператора $R_\chi(h)B_+$. Как было показано в п. 5 § 3, оператор B_+ переводит пару $\mathbf{F}(\mu) = (F_+(\mu), F_-(\mu))$ в пару

$$B_+\mathbf{F}(\mu) = ((2l+\mu+1)F_+(\mu+1), -(2l+\mu+1)F_-(\mu+1)). \tag{1}$$

Оператор же $R_\chi(h)$ является интегральным оператором с ядром

$$\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; h) = \begin{pmatrix}K_{++}(\lambda, \mu) & 0\\ K_{-+}(\lambda, \mu) & K_{--}(\lambda, \mu)\end{pmatrix}$$

(для краткости мы опустили справа аргументы χ и h). Поэтому

$$R_\chi(h) B_+ \mathbf{F} = (\hat{F}_+(\lambda), \quad \hat{F}_-(\lambda)), \tag{2}$$

где

$$\hat{F}_+(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{++}(\lambda, \mu)(2l+\mu+1) F_+(\mu+1)\, d\mu, \tag{3}$$

$$\hat{F}_-(\lambda) = -\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{-+}(\lambda, \mu)(2l+\mu+1) F_+(\mu+1)\, d\mu - \\ - \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{--}(\lambda, \mu)(2l+\mu+1) F_-(\mu+1)\, d\mu. \tag{4}$$

Заменяя μ на $\mu - 1$, убеждаемся, что ядро оператора $R_\chi(h) B_+$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (2l+\mu) K_{++}(\lambda, \mu-1) & 0 \\ -(2l+\mu) K_{-+}(\lambda, \mu-1) & -(2l+\mu) K_{--}(\lambda, \mu-1) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Чтобы найти ядро оператора в правой части равенства (8) п. 1, достаточно заметить, что оператор B_3 сводится к умножению обеих компонент пары $(F_+(\lambda), F_-(\lambda))$ на $2(\lambda+l)$. Поэтому указанное ядро имеет вид

$$\frac{(\mu+l)\operatorname{ch} 2\varphi - (\lambda+l)}{\operatorname{sh} 2\varphi} \mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; h(\varphi)) + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; h(\varphi))}{d\varphi}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{++} & 0 \\ K_{-+} & K_{--} \end{pmatrix}.$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$(2l+\mu) K_{++}(\lambda, \mu-1) = \\ = \frac{(\mu+l)\operatorname{ch} 2\varphi - (\lambda+l)}{\operatorname{sh} 2\varphi} K_{++}(\lambda, \mu) + \frac{1}{2} \frac{dK_{++}(\lambda, \mu)}{d\varphi}. \tag{7}$$

Подставим в это равенство выражение $K_{++}(\lambda, \mu; \chi; h)$, даваемое формулой (4) п. 1 § 4. После простых преобразований, заменив $-\frac{1}{\sin^2\varphi}$ на z, λ на α, μ на β и $-2l$ на γ, получим следующее соотношение для гипергеометрической функции:

$$(\beta-\gamma) F(\alpha, \beta-1; \gamma; z) + (\gamma - \beta - \alpha z) F(\alpha, \beta; \gamma; z) + \\ + z(1-z) \frac{dF(\alpha, \beta; \gamma; z)}{dz} = 0. \tag{8}$$

Используя формулу (2) п. 2 § 1, можно переписать равенство (8) в следующем виде:

$$(\beta-\gamma)F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)+(\gamma-\beta-\alpha z)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\\+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z(1-z)F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)=0. \qquad (9)$$

В силу симметричности гипергеометрической функции относительно параметров α и β, отсюда следует, что

$$(\alpha-\gamma)F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma;\ z)+(\gamma-\alpha-\beta z)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\\+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z(1-z)F(\alpha+1;\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)=0. \qquad (10)$$

Другая рекуррентная формула получается из равенства (10) п. 1. Аналогично предыдущему устанавливаем, что ядро оператора $R_\chi(h)B_2$ имеет вид

$$-\begin{pmatrix}(2l+\mu)K_{++}(\lambda,\ \mu-1) & 0\\ -(2l+\mu)K_{-+}(\lambda,\ \mu-1) & -(2l+\mu)K_{--}(\lambda,\ \mu-1)\end{pmatrix}-\\-\begin{pmatrix}\mu K_{++}(\lambda,\ \mu+1) & 0\\ \mu K_{-+}(\lambda,\ \mu+1) & \mu K_{--}(\lambda,\ \mu+1)\end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Подставляя это выражение в формулу (10) п. 1 и заменяя затем $K_{++}(\lambda,\ \mu-1)$, $K_{++}(\lambda,\ \mu)$, $K_{++}(\lambda,\ \mu+1)$ согласно формуле (4′) п. 1 § 4, получаем рекуррентную формулу

$$(\alpha z-\beta z+2\beta-\gamma)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+(\gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)+\\+\beta(z-1)F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma;\ z)=0. \qquad (12)$$

Меняя местами α и β, получаем отсюда

$$(\beta z-\alpha z+2\alpha-\gamma)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\\+\alpha(z-1)F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma;\ z)=0. \qquad (13)$$

Аналогичные формулы получаются путем сравнения элементов K_{-+} в ядрах. После простых преобразований получаем следующие рекуррентные соотношения для гипергеометрической функции:

$$(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{\gamma}F(\alpha,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)+\\+\frac{\alpha\beta}{\gamma}(z-1)F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)=0 \qquad (14)$$

и

$$\left[1-\frac{2\gamma-\alpha-\beta-1}{\gamma-1}z\right]F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-1)}F(\alpha,\ \beta;\gamma+1;z)+\\+(z-1)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma-1;\ z)=0. \qquad (15)$$

Совершенно аналогично выводятся рекуррентные соотношения из формулы (9) п. 1. Сравнивая элементы K_{++} слева и справа, получаем

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) - F(\alpha, \beta+1; \gamma; z) + \frac{\alpha z}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0 \quad (16)$$

и, по симметрии относительно α и β,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) - F(\alpha+1, \beta; \gamma; z) + \frac{\beta z}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0. \quad (17)$$

Далее, сравнивая элементы K_{-+}, получаем

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) - F(\alpha, \beta; \gamma-1; z) + \frac{\alpha\beta z}{\gamma(\gamma-1)} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0. \quad (18)$$

Используя формулу (12) п. 1 и сравнивая элементы K_{++}, получим

$$\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z) - (\gamma-\alpha) F(\alpha, \beta+1; \gamma+1; z) - \alpha(1-z) F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0. \quad (19)$$

В силу симметрии по α и β отсюда следует

$$\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z) - (\gamma-\beta) F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z) - \beta(1-z) F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0. \quad (20)$$

Аналогично, из формулы (11) п. 1 получаем, сравнивая K_{++} в обеих частях равенства,

$$(\gamma-1) F(\alpha, \beta-1; \gamma-1; z) + (\alpha z - \gamma + 1) F(\alpha, \beta; \gamma; z) - \frac{\alpha\beta}{\gamma} z(1-z) F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0. \quad (21)$$

По симметрии относительно α и β отсюда следует

$$(\gamma-1) F(\alpha-1, \beta; \gamma-1; z) + (\beta z - \gamma + 1) F(\alpha, \beta; \gamma; z) - \frac{\alpha\beta}{\gamma} z(1-z) F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z) = 0. \quad (22)$$

Наконец, из формулы (13) п. 1, сравнивая значения K_{++}, получаем рекуррентную формулу

$$\gamma(\gamma-1) F(\alpha, \beta-1; \gamma-1; z) + \gamma[(\alpha-\beta) z - \gamma + 1] F(\alpha, \beta; \gamma; z) + \beta(\gamma-\alpha) z F(\alpha, \beta+1; \gamma+1; z) = 0, \quad (23)$$

и по симметрии относительно α и β

$$\gamma(\gamma-1) F(\alpha-1, \beta; \gamma-1; z) + \gamma[(\beta-\alpha) z - \gamma + 1] F(\alpha, \beta; \gamma; z) + \alpha(\gamma-\beta) z F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z) = 0. \quad (24)$$

Полученные 15 рекуррентных формул являются основными. Из них можно вывести ряд новых формул. Например, вычитая из равенства (10) равенство (9), получим

$$(\alpha-\gamma)F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma;\ z)+(\gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)+\\ +(\beta-\alpha)(1-z)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=0. \qquad (25)$$

Далее, умножим равенство (9) на $\alpha-\gamma$, равенство (10) на $\gamma-\beta$ и равенство (14) на $(\beta-\alpha)z$. Складывая полученные соотношения, найдем

$$F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)-F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\\ +\frac{\alpha-\beta}{\gamma}zF(\alpha,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)=0. \qquad (26)$$

Исключим из равенств (19) и (20) $F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)$. Мы получим

$$\gamma(\alpha-\beta)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\alpha(\gamma-\beta)F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)+\\ +\beta(\gamma-\alpha)F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)=0. \qquad (27)$$

Исключая же $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ и заменяя $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ на $\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1$, получим

$$(\alpha-\beta)(1-z)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+(\beta-\gamma)F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)+\\ +(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma;\ z)=0. \qquad (28)$$

Аналогично, из равенств (16) и (17) находим

$$(\beta-\alpha)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\alpha F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\\ -\beta F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma;\ z)=0. \qquad (29)$$

Из равенств (21) и (22) следует, что

$$\gamma(\alpha-\beta)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\alpha(\gamma-\beta)F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)+\\ +\beta(\gamma-\alpha)F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)=0 \qquad (30)$$

и

$$(\alpha-\beta)(1-z)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)+(\beta-\gamma)F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)+\\ +(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma;\ z)=0. \qquad (31)$$

Из равенств (9) и (21) получаем

$$\gamma F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\beta F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)+\\ +(\beta-\gamma)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)=0, \qquad (32)$$

и по симметрии относительно α и β,

$$\gamma F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\alpha F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)+\\ +(\alpha-\gamma)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)=0. \qquad (33)$$

Из равенств (23) и (21) получаем

$$(\gamma-1)\gamma[F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma-1;\ z)-F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)]+\\+\alpha(\gamma-\beta)zF(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)=0, \tag{34}$$

и, по симметрии относительно α и β,

$$(\gamma-1)\gamma[F(\alpha-1,\ \beta;\ \gamma-1;\ z)-F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)]+\\+\beta(\gamma-\alpha)zF(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)=0. \tag{35}$$

Укажем еще равенства:

$$\gamma[\alpha-(\gamma-\beta)z]F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\gamma(1-z)F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma;\ z)+\\+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)=0 \tag{36}$$

и

$$\gamma[\beta-(\gamma-\alpha)z]F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-\gamma(1-z)F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma;\ z)+\\+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\ \beta;\ \gamma+1;\ z)=0, \tag{37}$$

вытекающие из соотношений (14) — (16).

3. Гипергеометрическое уравнение. Выведем теперь дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет гипергеометрическая функция. Для этого заметим, что по формуле (8) п. 2 оператор

$$z(1-z)\frac{d}{dz}+(\gamma-\beta-\alpha z)$$

переводит $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ в $(\gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta-1;\ \gamma;\ z)$. Используя формулы (16) п. 2 и (2) п. 2 § 1, можно точно так же доказать, что оператор $z\frac{d}{dz}+\beta$ переводит $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ в $\beta F(\alpha,\ \beta+1;\ \gamma;\ z)$.

Отсюда вытекает, что

$$\left(z\frac{d}{dz}+\beta-1\right)\left[z(1-z)\frac{d}{dz}+(\gamma-\beta-\alpha z)\right]F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=\\=(\beta-1)(\gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z). \tag{1}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{d}{dz}-\alpha\beta\right]F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=0. \tag{2}$$

Итак, гипергеометрическая функция является частным решением уравнения

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0. \tag{3}$$

Это уравнение называют *гипергеометрическим дифференциальным* уравнением.

Чтобы найти второе частное решение, сделаем в уравнении (3) подстановку $y = z^{1-\gamma} w$. Мы получим уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+1)z]\frac{dw}{dz} + \\ + (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)w = 0. \quad (4)$$

Одним из решений уравнения (4) является

$$w = F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ z).$$

Поэтому второе частное решение уравнения (3) имеет вид

$$y = z^{1-\gamma} w = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ z). \quad (5)$$

Если γ не является целым числом, это решение линейно независимо от $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$. Случай, когда γ — целое число, сводится к разобранному путем предельного перехода.

§ 6. Интегральные представления и формула сложения для гипергеометрической функции

1. Вводные замечания. В основе результатов этого параграфа лежит следующее простое замечание. Так как $R_\chi(g)$ является представлением группы $SL(2, R)$, то имеет место равенство

$$R_\chi(g_1g_2) = R_\chi(g_1) R_\chi(g_2). \quad (1)$$

Запишем это равенство с помощью ядер операторов $R_\chi(g_1)$, $R_\chi(g_2)$, $R_\chi(g_1g_2)$. Мы получим, что для любой пары $\mathbf{F} = (F_+, F_-)$ из пространства $\mathfrak{D}_\chi$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; g_1g_2)\mathbf{F}(\mu)\,d\mu = \\ = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \nu; \chi; g_1) \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathbf{K}(\nu, \mu; \chi; g_2)\mathbf{F}(\mu)\,d\mu\,d\nu. \quad (2)$$

Поэтому, если допустимо изменение порядка интегрирования, ядра $\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; g)$ должны удовлетворять соотношению

$$\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; g_1g_2) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \nu; \chi; g_1)\mathbf{K}(\nu; \mu; \chi; g_2)\,d\nu \quad (3)$$

— континуальному аналогу теоремы сложения. Значение a должно быть таким, чтобы рассматриваемые интегралы абсолютно сходились при $\nu = a + it$.

Выбирая специальным образом матрицы g_1 и g_2, получим разнообразные соотношения для гипергеометрической функции. Сначала будут получены интегральные представления для этой функции.

2. Интегральные представления. Чтобы получить интегральные представления гипергеометрической функции, воспользуемся следующим тождеством:

$$h\equiv\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \operatorname{th}\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\operatorname{ch}\theta} & 0\\ 0 & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \operatorname{th}\theta & 1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Поскольку при $\theta>0$ диагональной матрице $\begin{pmatrix}\frac{1}{\operatorname{ch}\theta} & 0\\ 0 & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}$ соответствует оператор умножения на $(\operatorname{ch}\theta)^{2(l+\lambda)}$ (см. § 3 п. 3), то из равенства (1) вытекает, что

$$\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\mathbf{K}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \zeta)(\operatorname{ch}\theta)^{2(\nu+l)}\,\mathbf{K}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ z)\,d\nu, \tag{2}$$

где положено $\zeta=\begin{pmatrix}1 & \operatorname{th}\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \operatorname{th}\theta & 1\end{pmatrix}$. Значения параметров λ, μ, l и a в формуле (2) должны быть такими, чтобы соответствующие интегралы абсолютно сходились.

Согласно п. 2 § 4 имеем

$$K_{+-}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \zeta)=K_{+-}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ z)=0. \tag{3}$$

Поэтому, сравнивая матричные элементы слева и справа в формуле (2), находим

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{++}(\lambda,\ \nu,\ \chi;\ \zeta)\,K_{++}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ z)\operatorname{ch}^{2(\nu+l)}\theta\,d\nu. \tag{4}$$

Но в п. 1 и 2 § 4 мы вычислили $K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)$, $K_{++}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \zeta)$ и $K_{++}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ z)$. Подставляя найденные там значения этих функций и сокращая на общие множители, получаем

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(-2l)}\frac{\operatorname{sh}^{4l+\lambda+\mu}\theta}{\operatorname{ch}^{2l+\lambda+\mu}\theta}F\left(-2l-\lambda,\ -2l-\mu;\ -2l;-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\lambda-\nu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(-\nu-2l)\,\Gamma(\mu)}\ (\operatorname{th}\theta)^{2\nu-\lambda-\mu}\operatorname{ch}^{2(\nu+l)}\theta\,d\nu. \tag{5}$$

Применяя в левой части формулу (5) п. 2 § 1 и заменяя $\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}$ на x, $2l$ на $-\omega$, после несложных преобразований получаем равенство

$$F(\lambda,\mu;\omega;-x)=\frac{\Gamma(\omega)}{2\pi i\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu)}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\lambda-\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\omega-\nu)}x^{-\nu}\,d\nu. \tag{6}$$

Уточним теперь, какие ограничения налагаются на параметры λ, μ, l и a требованием абсолютной сходимости соответствующих интегралов. Как отмечено в п. 4 § 3, интеграл, определяющий $K_{++}(\lambda, \mu; \chi; h)$, сходится при $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < \mathrm{Re}\,\omega$ (мы заменили $2l$ на $-\omega$). Интегралы же, определяющие $K_{++}(\lambda, \nu; \chi; \zeta)$ и $K_{++}(\nu, \mu; \chi; z)$, сходятся соответственно при $\mathrm{Re}\,\nu < \mathrm{Re}\,\lambda < \mathrm{Re}\,\omega$ и $0 < \mathrm{Re}\,\nu < \mathrm{Re}\,\mu$. Так как $\mathrm{Re}\,\nu = a$, то мы получаем следующие условия справедливости равенства (6):

$$0 < a < \mathrm{Re}\,\lambda < \mathrm{Re}\,\omega \text{ и } a < \mathrm{Re}\,\mu.$$

Легко доказать, что при выполнении этих условий абсолютно сходится и интеграл (2) п. 1.

Фактически ограничение $\mathrm{Re}\,\lambda < \mathrm{Re}\,\omega$ является излишним. Условия же $0 < a < \mathrm{Re}\,\lambda$, $a < \mathrm{Re}\,\mu$ означают, что путь интегрирования отделяет полюсы функции $\Gamma(\nu)$ от полюсов функций $\Gamma(\lambda-\nu)$ и $\Gamma(\mu-\nu)$. Это замечание позволяет расширить область применимости равенства (6). Именно, подынтегральная функция в этом равенстве аналитически зависит от ν во всей комплексной плоскости, за исключением полюсов функций $\Gamma(\nu)$, $\Gamma(\lambda-\nu)$, $\Gamma(\mu-\nu)$. Поэтому путь интегрирования можно деформировать любым образом так, чтобы при этом не менялись начальная и конечная точки пути, и путь не пересекал упомянутых полюсов. После этого можно изменить значения λ, μ и ω. В результате мы убеждаемся в том, что формула (6) справедлива для всех значений λ, μ, ω, a при том лишь условии, что путь интегрирования отделяет полюсы функции $\Gamma(\nu)$ от полюсов функций $\Gamma(\lambda-\nu)$ и $\Gamma(\mu-\nu)$.

Аналогичным образом можно расширить область применения других формул этой главы. Мы не будем оговаривать это явным образом в каждом отдельном случае.

Формулы, выражающие $K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; h)$ и $K_{--}(\lambda, \mu; \chi; h)$ не дают новых интегральных представлений для гипергеометрической функции, а вновь приводят к формуле (6). К той же формуле приводят и равенства для $\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; h^{-1})$. Чтобы получить другие интегральные представления гипергеометрической функции, рассмотрим разложение

$$u \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{tg}\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из этого разложения следует, что

$$\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; u) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \nu; \chi; \zeta) \cos^{2(\nu+l)}\theta\, \mathbf{K}(\nu, \mu; \chi; z)\, d\nu, \quad (8)$$

где $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{tg}\theta & 1 \end{pmatrix}$. Согласно п. 2 § 4 при $\theta > 0$ имеем

$$K_{-+}(\lambda, \nu; \chi; \zeta) = K_{+-}(\nu, \mu; \chi; z) = 0.$$

Поэтому из равенства (8) вытекает, что

$$K_{--}(\lambda, \mu; \chi; u) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{--}(\lambda, \nu; \chi; \zeta) \cos^{2(\nu+l)}\theta K_{--}(\nu, \mu; \chi; z)\, d\nu. \quad (9)$$

Подставим в эту формулу значения $K_{--}(\lambda, \mu; \chi; u)$, $K_{--}(\lambda, \nu; \chi; \zeta)$ и $K_{--}(\nu, \mu; \chi; z)$, даваемые формулой (16) п. 1 § 4 и формулами (11) и (5) п. 2 § 4. После простых преобразований получаем

$$\frac{\operatorname{tg}^{2(\lambda+\mu+2l)}\theta}{\Gamma(1-\lambda-\mu-2l)} F(-\lambda-2l, \ -\mu-2l; \ 1-\lambda-\mu-2l; \ -\operatorname{ctg}^2\theta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\lambda-\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(-2l-\nu)\Gamma(1-\nu)} \sin^{2\nu}\theta\, d\nu,$$

где $a < \operatorname{Re}\lambda < -2\operatorname{Re} l$, $a < \operatorname{Re}\mu < 1$.

Для упрощения этой формулы применим к левой части равенство (5) п. 2 § 1 и положим $\lambda = 1-\lambda'$, $\mu = \mu'-\omega'+1$, $2l = \lambda'-\mu'-1$, $\nu = \mu'+\nu'-\omega'+1$, $\sin^2\theta = 1-x$. Мы получим после простых преобразований

$$x^{\omega-1} F(\lambda, \mu; \omega; x) = \frac{\Gamma(\omega)}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\omega-\lambda-\mu-\nu)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\omega-\lambda-\nu)\Gamma(\omega-\mu-\nu)} (1-x)^{\nu}\, d\nu, \quad (10)$$

где $a < 0 < \operatorname{Re}(\omega-\mu)$, $a < \operatorname{Re}(\omega-\lambda-\mu) < \operatorname{Re}(\omega-\lambda)$ и $0 < x < 1$.

При $x < 0$ интеграл в правой части этого равенства обращается в нуль. В этом проще всего убедиться, вычислив его с помощью вычетов.

Далее, вычисляя $K_{++}(\lambda, \mu; \chi; u)$ и заменяя $\lambda+\mu+2l+1$ на ω и $\sin^2\frac{\theta}{2}$ на x, получим

$$\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(\omega-\lambda)\Gamma(\omega-\mu)}{\Gamma(\omega)} F\left(\lambda, \ \mu; \ \omega; \ \frac{x-1}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\nu)\Gamma(\lambda-\nu)\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\omega-\lambda-\mu+\nu)\, x^{\nu}\, d\nu +$$
$$+ \frac{(-1)^{2\varepsilon}}{2\pi i} \Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)\Gamma(\omega-\mu)\Gamma(1+\mu-\omega) \times$$
$$\times \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\omega-\lambda-\mu)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)\Gamma(\nu-\mu+1)} x^{\nu}\, d\nu, \quad (11)$$

где

$$0 < a < \operatorname{Re}\mu, \quad \operatorname{Re}(\lambda+\mu-\omega) < a < \operatorname{Re}\lambda \ \text{и} \ 0 < x < 1. \quad (12)$$

Складывая и вычитая формулы, соответствующие значениям $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\frac{1}{2}$, находим, что при выполнении неравенств (12)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda-\nu)\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\omega-\lambda-\mu+\nu)x^{\nu}\,d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(\omega-\lambda)\Gamma(\omega-\mu)}{\Gamma(\omega)}F\left(\lambda,\mu;\omega;\frac{x-1}{x}\right)\tag{13}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\omega-\lambda-\mu)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}x^{\nu}\,d\nu=0.\tag{13'}$$

Чтобы вычислить интеграл (13) при $x>1$, заменим в формуле (13) x на $\frac{1}{x'}$, μ на $\omega-\mu'$ и ν на $\lambda-\nu'$. Мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda-\nu)\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\omega-\lambda-\mu+\nu)x^{\nu}\,d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(\omega-\lambda)\Gamma(\omega-\mu)}{\Gamma(\omega)}F\left(\lambda,\mu;\omega;\frac{1-x}{x}\right),\tag{14}$$

где

$$0<a<\operatorname{Re}\mu,\quad \operatorname{Re}(\lambda+\mu-\omega)<a<\operatorname{Re}\lambda \text{ и } x>1.$$

Наконец, вычисляя $K_{+-}(\lambda,\mu;\chi,u)$, приходим к формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\lambda-\nu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\omega-\nu)\Gamma(1-\mu+\nu)}x^{-\nu}\,d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\omega)\Gamma(1-\mu)}F(\lambda,\mu;\omega;x),\tag{15}$$

где

$$\operatorname{Re}\mu-1<0<a<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega \quad\text{и}\quad 0<x<1.\tag{16}$$

Из этой формулы получаем, как и в случае формулы (13), что при $x>1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\lambda-\nu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\omega-\nu)\Gamma(1-\mu+\nu)}x^{-\nu}\,d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda)(x-1)^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda-\mu+1)\Gamma(\omega-\lambda)}F\left(\lambda,\omega-\mu;\lambda-\mu+1;\frac{1}{1-x}\right),\tag{17}$$

где $\operatorname{Re}\mu-1<0<a<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega$.

3. Преобразование Меллина. Ряд формул, имеющих вид преобразования Меллина для $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, рассматриваемой как функция параметров α, β и γ, возникает из изучения произведений вида $g = h_1 z$, где

$$h_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < z < \infty, \tag{1}$$

следовательно,

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi + z\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi + z\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай $\varphi > 0$, $z > 0$. В этом случае все элементы матрицы g положительны. Поэтому, используя результаты п. 2 § 2, можно записать g в виде $g = d_1 h d_2$, где

$$d_1 = \begin{pmatrix} e^{-t_1} & 0 \\ 0 & e^{t_1} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} e^{-t_2} & 0 \\ 0 & e^{t_2} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta > 0.$$

Легко вычислить, что параметры t_1, θ, t_2 связаны с z и φ соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} 2\theta &= \operatorname{ch} 2\varphi + z\operatorname{sh} 2\varphi, \\ e^{4t_1} &= \frac{z\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi}{z\operatorname{sh}\varphi + \operatorname{ch}\varphi}\operatorname{cth}\varphi, \\ e^{4t_2} &= \frac{1}{1 + z^2 + 2z\operatorname{cth} 2\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как диагональной матрице $d = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$ соответствует оператор умножения на $e^{2t(\lambda+l)}$, то имеет место равенство

$$e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; h) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathbf{K}(\lambda, \nu; \chi; h_1)\mathbf{K}(\nu, \mu; \chi; z)\,d\nu. \tag{4}$$

Но при $\varphi > 0$, $z > 0$ имеем

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; z) = K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; h_1) = 0,$$

и потому

$$e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}K_{++}(\lambda, \mu; \chi; h) = \\ = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{++}(\lambda, \nu; \chi; h_1)K_{++}(\nu, \mu; \chi; z)\,d\nu. \tag{5}$$

Подставим в эту формулу выражения для K_{++}, даваемые равенствами (4), (4′) п. 1 § 4 и (1) п. 2 § 4. После простых преобразований получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^{\nu}\Gamma(\nu)\Gamma(\mu-\nu)\operatorname{cth}^{\lambda+\nu}\varphi\, F\left(\lambda,\ \nu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)d\nu=$$

$$=z^{\mu}\Gamma(\mu)\,e^{2t_1(\lambda-l)+2t_2(\mu-l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\theta}\right)^{2l}\operatorname{cth}^{\lambda+\mu}\theta\, F\left(\lambda,\ \mu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right),\tag{6}$$

где переменные z, φ, t_1, t_2, θ связаны соотношениями (3) и

$$0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}2l,\qquad 0<a<\operatorname{Re}\mu.$$

Положим в равенстве (6) $z=\frac{1}{x}$ и сравним полученную формулу с формулой обращения для преобразования Меллина (см. п. 2 § 5 главы II). Мы видим, что полученная формула дает обратное преобразование Меллина для функции

$$\Phi(\nu)=\Gamma(\nu)\Gamma(\mu-\nu)\operatorname{cth}^{\lambda+\nu}\varphi F\left(\lambda,\ \nu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_0^\infty z^{\mu-\nu-1}\,e^{2t_1(\lambda-l)+2t_2(\mu-l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\theta}\right)^{2l}\operatorname{cth}^{\lambda+\mu}\theta F\left(\lambda,\ \mu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right)dz=$$

$$=\Gamma^{-1}(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\mu-\nu)\operatorname{cth}^{\lambda+\nu}\varphi F\left(\lambda,\ \nu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right),\tag{7}$$

где переменные z, φ, t_1, t_2, θ связаны соотношениями (3).

Еще одна формула получается из равенства (6) следующим путем. Пусть $0<z<\operatorname{th}\varphi$. Можно показать, что тогда при $\operatorname{Re}\nu\to+\infty$ подынтегральная функция в равенстве (6) стремится к нулю. Поэтому можно дополнить контур интегрирования бесконечно большой полуокружностью, расположенной справа от контура. Полюсами, лежащими внутри получающегося контура, являются полюсы функции $\Gamma(\mu-\nu)$, т. е. значения $\nu=\mu+k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$ При этом

$$\underset{\nu=\mu+k}{\text{Выч}}\ \Gamma(\mu-\nu)=\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Вычисляя интеграл (6) по формуле вычетов, получаем при $0<z<\operatorname{tg}\varphi$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\mu+k)}{k!}(z\operatorname{cth}\varphi)^k F\left(\lambda,\ \mu+k;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu)\,e^{2t_1(\lambda-l)+2t_2(\mu-l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\theta}\right)^{2l}\left(\frac{\operatorname{cth}\theta}{\operatorname{cth}\varphi}\right)^{\lambda+\mu}F\left(\lambda,\ \mu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right),\tag{8}$$

где переменные z, φ, t_1, t_2, θ связаны соотношениями (3).

Точно так же доказывается, что при $z > \operatorname{th}\varphi$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\mu+k)}{k!\ z^{\mu+k}} \operatorname{cth}^{\lambda-k}\varphi F\left(\lambda,\ -k;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu)\, e^{2t_1(\lambda-l)+2t_2(\mu-l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\theta}\right)^{2l} \operatorname{cth}^{\lambda+\mu}\theta F\left(\lambda,\ \mu;\ 2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right). \qquad (9)$$

Формулы (6) — (9) получились из рассмотрения матричного элемента $K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$. Рассмотрение других элементов матрицы $\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$ не приводит к новым формулам.

Изучим теперь случай, когда $\varphi>0$, $z=-z_1<0$. В этом случае мы получаем три различных ответа, в зависимости от значений z_1 и φ. Пусть $0<z_1<\operatorname{th}\varphi$. Тогда все элементы матрицы (2) положительны. Поэтому $g=d_1hd_2$, где d_1, d_2 и h имеют тот же смысл, что и выше. При этом

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{ch}2\theta=\operatorname{ch}2\varphi-z_1\operatorname{sh}2\varphi, \qquad \theta>0,\\ &e^{4t_1}=\frac{z_1\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi}{z_1\operatorname{sh}\varphi-\operatorname{ch}\varphi}\operatorname{cth}\varphi,\\ &e^{4t_2}=\frac{1}{1+z_1^2-2z_1\operatorname{cth}2\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Кроме того, в рассматриваемом случае имеем

$$K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ z)=K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h_1)=0.$$

Вычисляя $K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}(z_1\operatorname{cth}\varphi)^{\lambda+\nu} F\left(\lambda,\ \nu;\ -2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)d\nu=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\varphi}\right)^{2l}(z_1\operatorname{cth}\theta)^{\lambda+\mu}F\left(\lambda,\mu;-2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right), \qquad (11)$$

где $a<\operatorname{Re}\mu<1$ и $0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l$. Точно так же, вычисляя $K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$, убеждаемся, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}(z_1\operatorname{cth}\varphi)^{\lambda+\nu}F\left(\lambda,\ \nu;\ -2l;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)d\nu=0, \qquad (12)$$

где $\operatorname{Re}\mu<0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l$, $a>0$.

Далее, вычисляя $K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; g)$, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(l-\nu)}(z_1\operatorname{ch}\varphi)^{\lambda+\nu}\left[\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\lambda-\nu+l)}\operatorname{sh}^{\lambda-\nu}\varphi\times\right.$$
$$\times F(\lambda, \lambda+2l+1; \quad \lambda-\nu+1; -\operatorname{sh}^2\varphi)+$$
$$+(-1)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma(-\lambda-2l)\Gamma(\nu+2l+1)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)}\operatorname{sh}^{\nu-\lambda}\varphi\times$$
$$\left.\times F(\nu, \nu+2l+1; \nu-\lambda+1; -\operatorname{sh}^2\varphi)\right]d\nu=$$
$$=e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}(z_1\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+\mu}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\varphi}\right)^{2l}\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}\operatorname{sh}^{\lambda-\mu}\theta F(\lambda, \lambda+2l+1; \lambda-\mu+1; -\operatorname{sh}^2\theta)+\right.$$
$$+(-1)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma(-\lambda-2l)\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)\Gamma(1-\mu)}\operatorname{sh}^{\mu-\lambda}\theta\times$$
$$\left.\times F(\mu, \mu+2l+1; \mu-\lambda+1; -\operatorname{sh}^2\theta)\right], \qquad (13)$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l<a+1<1+\operatorname{Re}\mu<2$.

Положим в этом равенстве $\varepsilon=0$, $\varepsilon={}^1/_2$ и возьмем полусумму и полуразность возникающих формул. Мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)}(z_1\operatorname{ch}\varphi)^{\lambda+\mu}\operatorname{sh}^{\lambda-\nu}\varphi\times$$
$$\times F(\lambda, \lambda+2l+1; \lambda-\nu+1; -\operatorname{sh}^2\varphi)\,d\nu=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\varphi}\right)^{2l}(z_1\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+\mu}\operatorname{sh}^{\lambda-\mu}\theta\times$$
$$\times F(\lambda, \lambda+2l+1; \lambda-\mu+1; -\operatorname{sh}^2\theta) \qquad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\nu+2l+1)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu-\lambda+1)}(z_1\operatorname{ch}\varphi)^{\lambda+\mu}\operatorname{sh}^{\nu-\lambda}\varphi\times$$
$$\times F(\nu, \nu+2l+1; \nu-\lambda+1; -\operatorname{sh}^2\varphi)\,d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)\Gamma(1-\mu)}e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\varphi}\right)^{2l}(z_1\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+\mu}\operatorname{sh}^{\mu-\lambda}\theta\times$$
$$\times F(\mu, \mu+2l+1; \mu-\lambda+1; -\operatorname{sh}^2\theta). \qquad (15)$$

Точно так же, вычисляя $K_{--}(\lambda, \mu; \chi; g)$, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)(z_1\operatorname{ch}\varphi)^{\lambda+\nu}\left[\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}\operatorname{sh}^{\lambda-\nu}\varphi\times\right.$$
$$\times F(\lambda, \lambda+2l+1; \lambda-\nu+1; -\operatorname{sh}^2\varphi)+$$
$$+\frac{\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\nu+2l+1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)\Gamma(2l+2)}\operatorname{sh}^{-\lambda-\nu-4l-2}\varphi\times$$
$$\left.\times F\left(\lambda+2l+1; \nu+2l+1; \quad 2l+2; \quad -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)\right]d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(\mu+2l+1)}{\Gamma(2l+2)}e^{2t_1(\lambda+l)+2t_2(\mu+l)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\varphi}\right)^{2l}(z_1\operatorname{ch}\theta)^{\lambda+\mu}\operatorname{sh}^{-\lambda-\mu-4l-2}\theta\times$$
$$\times F\left(\lambda+2l+1, \mu+2l+1; 2l+2; -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\right), \qquad (16)$$

где $0<a<\operatorname{Re}\mu<1$ и $0<\operatorname{Re}\lambda<-2\operatorname{Re}l<1+a<2$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+2l+1)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}(z_1\operatorname{ch}\varphi)^{\lambda+\nu}\operatorname{sh}^{\nu-\lambda}\varphi\times$$
$$\times F(\nu,\ \nu+2l+1;\ \nu-\lambda+1;\ -\operatorname{sh}^2\varphi)\,d\nu=0 \qquad (17)$$

при тех же ограничениях на параметры.

Мы предоставляем читателю разбор случаев $\varphi>0,\ z=-z_1<0$, $\operatorname{th}\varphi<z_1<\operatorname{cth}\varphi$ и $\varphi>0,\ z=-z_1<0,\ z_1>\operatorname{cth}\varphi$. В этих случаях левая часть формул (11)—(17) остается той же самой, правая же меняется, так как матрица g имеет другой канонический вид. Например, при $\operatorname{th}\varphi<z_1<\operatorname{cth}\varphi$ имеем $g=d_1ud_2$, где d_1 и d_2 — диагональные матрицы,

$$d_1=\begin{pmatrix}e^{-t_1} & 0\\ 0 & e^{t_1}\end{pmatrix},\ d_2=\begin{pmatrix}e^{-t_2} & 0\\ 0 & e^{t_2}\end{pmatrix}\ \text{ и }\ u=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\left.\begin{aligned}&\cos 2\theta=\operatorname{ch}2\varphi-z_1\operatorname{sh}2\varphi, \qquad \theta<0,\\ &e^{4t_1}=\frac{z_1\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi-z_1\operatorname{sh}\varphi}\operatorname{cth}\varphi,\\ &e^{4t_2}=\frac{1}{2z_1\operatorname{cth}2\varphi-1-z_1^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Если же $z_1>\operatorname{cth}\varphi$, то $g=d_1h(-s)d_2$, где d_1 и d_2 имеют тот же смысл, что и выше, $h=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{pmatrix}$ и $s=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. При этом

$$\left.\begin{aligned}&\cos 2\theta=z_1\operatorname{sh}2\varphi-\operatorname{ch}2\varphi, \qquad \theta>0,\\ &e^{4t_1}=\frac{z_1\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi}{z_1\operatorname{sh}\varphi-\operatorname{ch}\varphi}\operatorname{cth}\varphi,\\ &e^{4t_2}=\frac{1}{1+z_1^2-2z_1\operatorname{cth}2\varphi}.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Укажем, наконец, что аналогичные формулы возникают из рассмотрения матриц вида $g=uz$, где $u=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}$. Здесь также приходится рассматривать различные случаи, в зависимости от значений θ и z. Относительно формул такого типа см. [122], п. 6.

4. Теоремы сложения. Применим теперь равенство (3) п. 1 к матрицам

$$g_1=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta_1 & \operatorname{sh}\theta_1\\ \operatorname{sh}\theta_1 & \operatorname{ch}\theta_1\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad g_2=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta_2 & \operatorname{sh}\theta_2\\ \operatorname{sh}\theta_2 & \operatorname{ch}\theta_2\end{pmatrix}.$$

Мы имеем

$$g_1g_2=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2) & \operatorname{sh}(\theta_1+\theta_2)\\ \operatorname{sh}(\theta_1+\theta_2) & \operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$K(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1+\theta_2)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\mathrm{K}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \theta_1)\,\mathrm{K}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ \theta_2)\,d\nu,\tag{1}$$

где значение a выбрано соответствующим образом.

Сравним в равенстве (1) матричные элементы слева и справа. Пусть $\theta_1>0$, $\theta_2>0$. Тогда

$$K_{+-}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \theta_1)=K_{+-}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ \theta_2)=K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1+\theta_2)=0.$$

Поэтому из равенства (1) вытекает, что

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1+\theta_2)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_{++}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \theta_1)\,K_{++}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ \theta_2)\,d\nu.\tag{2}$$

Подставим в это равенство выражение для $K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)$, даваемое формулой (4) п. 1 § 4. После простых преобразований получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(\nu)\,\Gamma(\omega-\nu)\,(\operatorname{cth}\theta_1\operatorname{cth}\theta_2)^{\nu}\times$$
$$\times F\left(\lambda,\ \nu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_1}\right)F\left(\nu,\ \mu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_2}\right)d\nu=$$
$$=\Gamma(\omega)\,\frac{\operatorname{th}^{\lambda}\theta_1\operatorname{th}^{\mu}\theta_2}{\operatorname{th}^{\lambda+\mu}(\theta_1+\theta_2)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2}{\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)}\right)^{\omega}F\left(\lambda,\ \mu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\theta_1+\theta_2)}\right),\tag{3}$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega$, $0<a<\operatorname{Re}\omega$. Рассмотрение других элементов матрицы $\mathrm{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ h)$ не приводит к новым соотношениям для гипергеометрической функции.

Рассмотрим теперь случай, когда $\theta_1>0$ и $\theta_2\equiv-\theta_3<0$, $0<\theta_3<\theta_1$. В этом случае $\theta_1+\theta_2>0$ и потому

$$K_{+-}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ \theta_1)=K_{-+}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ -\theta_3)=K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1-\theta_3)=0.$$

Поэтому равенство (2) остается справедливым и в этом случае. Теперь подстановка значений K_{++} приводит к соотношению

$$J_1 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{\operatorname{th}\theta_3}{\operatorname{th}\theta_1}\right)^{\nu} F\left(\lambda,\ \nu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_1}\right)\times$$
$$\times F\left(1-\nu,\ 1-\mu;\ 2-\omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_3}\right)d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu-\omega+1)}\frac{\operatorname{th}^{\lambda}\theta_1}{\operatorname{th}^{\mu}\theta_3\operatorname{th}^{\lambda+\mu}(\theta_1-\theta_3)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta_1}{\operatorname{ch}\theta_3\operatorname{ch}(\theta_1-\theta_3)}\right)^{\omega}\operatorname{sh}^2\theta_3\times$$
$$\times F\left(\lambda,\ \mu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\theta_1-\theta_3)}\right), \tag{4}$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega<\operatorname{Re}\mu+1<2$. Точно так же, вычисляя значение $K_{+-}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1-\theta_3)$, мы получаем равенства:

$$J_2' \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(\frac{\operatorname{th}\theta_3}{\operatorname{th}\theta_1}\right)^{\nu} F\left(\lambda,\ \nu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_1}\right)\times$$
$$\times F(1-\mu,\ \omega-\mu;\ \nu-\mu+1;\ -\operatorname{sh}^2\theta_3)\,d\nu=0, \tag{5}$$

$$J_2'' \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\omega-\nu)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(\operatorname{cth}\theta_1\operatorname{cth}\theta_3)^{\nu}\times$$
$$\times F\left(\lambda,\ \nu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_1}\right)F(\mu,\ \mu-\omega+1;\ \mu-\nu+1;\ -\operatorname{sh}^2\theta_3)\,d\nu=0, \tag{6}$$

в которых $0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega<\operatorname{Re}\mu+1<2$, $0<a<\operatorname{Re}\omega$ (при вычислении интегралов мы берем полусумму и полуразность формул, соответствующих значениям $\varepsilon=0$ и $\varepsilon={}^1/_2$).

Точно так же получаем, вычисляя $K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1-\theta_3)$,

$$J_3' = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)}(\operatorname{cth}\theta_1\operatorname{th}\theta_3)^{\nu}\times$$
$$\times F(\lambda,\ \omega-\nu;\ \lambda-\nu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_1)F\left(1-\nu,\ 1-\mu;\ 2-\omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_3}\right)d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(\mu-\omega+1)\Gamma(\lambda-\mu+1)}\frac{\operatorname{cth}^{\lambda}\theta_1\operatorname{cth}^{\mu}\theta_3}{\operatorname{cth}^{\mu-\lambda}(\theta_1-\theta_3)}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta_1}{\operatorname{ch}\theta_3\operatorname{ch}(\theta_1-\theta_3)}\right)^{\omega}\operatorname{sh}^2\theta_3\times$$
$$\times F(\lambda,\ \omega-\mu,\ \lambda-\mu+1;\ \operatorname{th}^2(\theta_1-\theta_3)), \tag{7}$$

$$J_3'' \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\nu-\omega+1)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)}(\operatorname{th}\theta_1\operatorname{th}\theta_3)^{\nu}\times$$
$$\times F(\nu,\ \omega-\lambda;\ \nu-\lambda+1;\ \operatorname{th}^2\theta_1)F\left(1-\nu,\ 1-\mu;\ 2-\omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_3}\right)d\nu=$$
$$=\frac{\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu-\lambda+1)}\frac{\operatorname{th}^{\mu-\lambda}(\theta_1-\theta_3)}{\operatorname{th}^{\lambda}\theta_1\operatorname{th}^{\mu}\theta_3}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta_1}{\operatorname{ch}\theta_3\operatorname{ch}(\theta_1-\theta_3)}\right)^{\omega}\operatorname{sh}^2\theta_3\times$$
$$\times F(\mu,\ \omega-\lambda,\ \mu-\lambda+1;\ \operatorname{th}^2(\theta_1-\theta_3)), \tag{8}$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega<\operatorname{Re}\mu+1<2$, $0<a<\operatorname{Re}\omega<a+1<2$.

Наконец, вычисляя $K_{--}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ \theta_1-\theta_3)$, получаем:

$$J_4'\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\operatorname{th}\theta_1\operatorname{cth}\theta_3)^{\nu}\left[\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}(\operatorname{cth}\theta_1\operatorname{th}\theta_3)^{2\nu}\times\right.$$

$$\times F(\lambda,\ \omega-\nu;\ \lambda-\nu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_1)F(\nu,\ \omega-\mu;\ \nu-\mu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_3)+$$

$$+\frac{\Gamma(\omega-\lambda)\Gamma(\mu-\omega-1)\Gamma(\omega-\nu)\Gamma(\nu-\omega+1)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}\operatorname{cth}^{2\lambda}\theta_1\operatorname{th}^{2\mu}\theta_3\times$$

$$\times F(\nu,\ \omega-\lambda,\ \nu-\lambda+1;\ \operatorname{th}^2\theta_1)F(\mu,\ \omega-\nu;\ \mu-\nu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_3)+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu-\omega+1)\Gamma(\nu)\Gamma(\omega-\nu)}{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)}\operatorname{sh}^{-2}\theta_1\times$$

$$\left.\times F\left(-\lambda-1,\ -\nu-1;\ 2-\omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_1}\right)F\left(\nu,\ \mu;\ \omega;\ -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_3}\right)\right]d\nu=$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}\frac{\operatorname{th}^{\lambda-\mu}(\theta_1-\theta_3)}{\operatorname{th}^{\lambda}\theta_1\operatorname{cth}^{\mu}\theta_3}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta_3}{\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}(\theta_1-\theta_3)}\right)^{\omega}\times$$

$$\times F(\lambda,\ \omega-\mu;\ \lambda-\mu+1;\ \operatorname{th}^2(\theta_1-\theta_3)),\qquad(9)$$

и

$$J_4''=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\nu)\Gamma(\omega-\nu)}{\Gamma(\omega-\lambda)\Gamma(\lambda-\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}\operatorname{th}^{\lambda-\nu}\theta_1\operatorname{th}^{\mu-\nu}\theta_3\times\right.$$

$$\times F(\lambda,\ \omega-\nu;\ \lambda-\nu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_1)F(\mu,\ \omega-\nu;\ \mu-\nu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_3)+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\nu-\omega+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu-\omega+1)\Gamma(\nu-\lambda+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}\operatorname{th}^{\nu-\lambda}\theta_1\operatorname{th}^{\nu-\mu}\theta_3\times$$

$$\left.\times F(\nu,\ \omega-\lambda;\ \nu-\lambda+1;\ \operatorname{th}^2\theta_1)F(\nu,\ \omega-\mu;\ \nu-\mu+1;\ \operatorname{th}^2\theta_3)\right]d\nu=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu-\lambda+1)}\operatorname{th}^{\mu-\lambda}(\theta_1-\theta_3)\left(\frac{\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_3}{\operatorname{ch}(\theta_1-\theta_3)}\right)^{\omega}\times$$

$$\times F(\mu,\ \omega-\lambda;\ \mu-\lambda+1;\ \operatorname{th}^2(\theta_1-\theta_3)),\qquad(10)$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\omega<\operatorname{Re}\mu+1<2,\ 0<a<\operatorname{Re}\omega<a+1<2$.

Случай $\theta_1>0,\ \theta_2>0,\ |\theta_2|>\theta_1$ не приводит к новым формулам для гипергеометрической функции.

Новые формулы того же типа получаются из равенства

$$\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}.\qquad(11)$$

Из него следует, что

$$\tilde{\mathbf{K}}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ u(\theta_1+\theta_2))=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\mathbf{K}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ u(\theta_1))\,\mathbf{K}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ u(\theta_2))\,d\nu.\qquad(12)$$

Рассмотрим случай, когда $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$, $0<\theta_2<\frac{\pi}{2}$ и $0<\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$. Подставим вместо матриц $\mathbf{K}(\lambda, \nu; \chi; u(\theta_1))$ и т. д. их выражения, полученные в п. 1 § 4 и сравним соответствующие матричные элементы в левой и правой частях равенства. Мы получим следующие соотношения:

$$J_5' \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\nu+\omega+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda+\nu+\omega+1)\Gamma(\mu+\nu+\omega+1)} (\operatorname{ctg}\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_2)^\nu \times$$
$$\times F(\lambda, \nu; \lambda+\nu+\omega+1; -\operatorname{ctg}^2\theta_1) F(\nu, \mu; \mu+\nu+\omega+1; -\operatorname{ctg}^2\theta_2)\, d\nu =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu+\omega+1)} \frac{\operatorname{tg}^\lambda\theta_1 \operatorname{tg}^\mu\theta_2}{\operatorname{tg}^{\lambda+\mu}(\theta_1+\theta_2)} \left(\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\right)^\omega \times$$
$$\times F(\lambda, \mu; \lambda+\mu+\omega+1; -\operatorname{ctg}^2(\theta_1+\theta_2)), \qquad (13)$$

$$J_5'' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\omega+1)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)\Gamma(\nu-\mu+1)} (\operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2)^\nu \times$$
$$\times F(-\lambda-\omega, \nu; \nu-\lambda+1; -\operatorname{tg}^2\theta_1) \times$$
$$\times F(-\mu-\omega, \nu; \nu-\mu+1; -\operatorname{tg}^2\theta_2)\, d\nu = 0, \qquad (14)$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<-\operatorname{Re}\omega<\operatorname{Re}\mu+1<2$, $a>0$, $a>-1-\operatorname{Re}\omega$, и

$$J_6 \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) \times$$
$$\times \Bigg[\frac{\Gamma(\mu+\omega+1)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\lambda-\nu+1)\Gamma(\nu+\mu+\omega+1)} (\operatorname{ctg}\theta_1)^{\nu+\omega} (\operatorname{ctg}\theta_2)^\nu \times$$
$$\times F(-\omega-\nu, \lambda; \lambda-\nu+1; -\operatorname{tg}^2\theta_1) \times$$
$$\times F(\nu, \mu; \nu+\mu+\omega+1; -\operatorname{ctg}^2\theta_2) +$$
$$+ \frac{\Gamma(-\lambda-\omega)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(-\lambda-\omega-\nu+1)\Gamma(\nu-\mu+1)} (\operatorname{tg}\theta_1)^{\nu+\omega} (\operatorname{tg}\theta_2)^\nu \times$$
$$\times F(-\lambda-\omega, -\nu-\omega; -\lambda-\omega-\nu+1; -\operatorname{ctg}^2\theta_1) \times$$
$$\times F(-\mu-\omega, \nu; \nu-\mu+1; -\operatorname{tg}^2\theta_2)\Bigg] d\nu =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \left(\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin\theta_1\cos\theta_2}\right)^\omega \frac{(\operatorname{ctg}\theta_1)^\lambda (\operatorname{tg}\theta_2)^\mu}{(\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2))^{\mu-\lambda}} \times$$
$$\times F(\lambda, -\mu-\omega; \lambda-\mu+1; -\operatorname{tg}^2(\theta_1+\theta_2)), \qquad (15)$$

где $0<\operatorname{Re}\lambda<-\operatorname{Re}\omega<\operatorname{Re}\mu+1<2$ и $0<a<1$.

Вычисление остальных элементов матрицы $\mathbf{K}(\lambda, \mu; \chi; u(\theta_1+\theta_2))$ не дает новых формул для гипергеометрической функции.

Предоставляем читателю разобрать случай $0<\theta_1<\pi/2$, $0<\theta_2<\pi/2$, $\theta_1+\theta_2>\pi/2$, а также случай, когда один из углов θ_1 или θ_2 меньше нуля.

§ 7. Представления групп вещественных матриц второго порядка и функции Ганкеля

Мы рассматривали в этой главе реализации представлений группы $SL(2, R)$, при которых диагональным матрицам соответствовали операторы умножения на функцию. Здесь будет рассмотрена еще одна реализация представлений этой группы, а именно, реализация, при которой операторы умножения на функцию соответствуют треугольным матрицам $t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$. Мы увидим, что при этом матрице $s=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ соответствует интегральный оператор, ядро которого выражается через функцию Ганкеля.

1. Новая реализация представлений $T_\chi(g)$. Напомним, что представления $T_\chi(g)$ реализуются в пространстве $\mathfrak{D}_\chi$ функций на прямой и задаются формулой

$$T_\chi(g)f(x)=\chi(\beta x+\delta)f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right), \tag{1}$$

где $\chi(x)=|x|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}x$, $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Чтобы перейти к новой реализации, при которой матрицам t соответствуют операторы умножения на функцию, сделаем преобразование Фурье по x (а не преобразование Меллина, как мы делали в предыдущих параграфах). Итак, перейдем от $f(x)$ к

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx. \tag{2}$$

Так как $|f(x)|\sim|x|^{2l}$ при $|x|\to\infty$, то интеграл (2) абсолютно сходится, если λ — вещественное число и $\operatorname{Re} l<-{}^1/_2$.

Полученная реализация обладает искомым свойством — треугольным матрицам t в ней соответствуют операторы умножения на функцию. В самом деле, в силу (1) имеем

$$T_\chi(t)f(x)=f(x+t).$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,e^{i\lambda x}dx=e^{-i\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}dx=e^{-i\lambda t}F(\lambda).$$

Это равенство показывает, что в новой реализации матрице t соответствует оператор умножения на $e^{-i\lambda t}$:

$$Q_\chi(t)\,F(\lambda)=e^{-i\lambda t}F(\lambda). \tag{3}$$

Выясним теперь, во что переходят операторы $T_\chi(g)$, соответствующие другим матрицам из группы $SL(2, R)$. Сначала заметим, что любая матрица g из $SL(2, R)$ может быть представлена в одном из следующих двух видов:

$$g = t\delta \tag{4}$$

или

$$g = t_1 \delta s t_2. \tag{5}$$

Здесь t_1 и t_2 — треугольные матрицы с единицами на главной диагонали: $t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1 & 1 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 1 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ — диагональная матрица и $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В самом деле, если $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$, то $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ и, следовательно, g имеет вид (4). Пусть теперь $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где $\beta \neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$t_1^{-1} g t_2^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta t_2 & \beta \\ \gamma - \alpha t_1 - t_2(\delta - \beta t_2) & \delta - \beta t_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\beta \neq 0$, то можно положить $t_2 = \alpha/\beta$ и $t_1 = \delta/\beta$. При таком выборе имеем

$$t_1^{-1} g t_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \delta s.$$

Поэтому $g = t_1 \delta s t_2$.

Из доказанного утверждения вытекает, что достаточно найти операторы, соответствующие диагональным матрицам δ и матрице s. Мы имеем

$$T_\chi(\delta) f(x) = e^{2lt} f(e^{-2t} x)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-2t} x) e^{i\lambda x} \, dx = e^{2t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ie^{2t}\lambda y} \, dy = e^{2t} F(e^{2t}\lambda).$$

Поэтому диагональной матрице δ соответствует оператор вида

$$Q_\chi(\delta) F(\lambda) = e^{2(l+1)t} F(e^{2t}\lambda), \quad \delta = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}. \tag{6}$$

2. Вычисление ядра оператора $Q_\chi(s)$. Нам осталось найти операторы, соответствующие матрице s. Но

$$T_\chi(s)f(x) = |x|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon} x f\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Поэтому

$$Q_\chi(s)F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2l}\operatorname{sign}^{2\varepsilon} x f\left(-\frac{1}{x}\right) e^{i\lambda x}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-2l-2}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-y) f(y)\, e^{-i\lambda/y}\,dy.$$

В силу формулы обращения для преобразования Фурье получаем

$$Q_\chi(s)F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-2l-2}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-y)\, e^{-i\lambda/y}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{-i\mu y}\,d\mu\,dy.$$

Если $-1 < \operatorname{Re} l < 0$, то в этом равенстве можно изменить порядок интегрирования и получить

$$Q_\chi(s)F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-2l-2}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-y)\, e^{-i(\mu y+\lambda y^{-1})}\,dy\,d\mu. \tag{1}$$

Итак, мы доказали, что оператор $Q_\chi(s)$ является интегральным оператором с ядром

$$K_s(\lambda, \mu; \chi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-2l-2}\operatorname{sign}^{2\varepsilon}(-y)\, e^{-i(\mu y+\lambda y^{-1})}\,dy. \tag{2}$$

Это ядро легко выражается через функцию Ганкеля. Ответ зависит при этом от знаков λ и μ.

Пусть $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Положим $\sqrt{\lambda\mu} = R$, $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = e^a$ и $y = e^t$ при $y > 0$, $y = -e^t$ при $y < 0$. Тогда

$$K_s(\lambda, \mu; \chi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2iR\operatorname{ch}(t+a) - t(2l+1)}\,dt + \frac{(-1)^{2\varepsilon}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2iR\operatorname{ch}(t+a) - t(2l+1)}\,dt =$$

$$= \frac{ie^{(2l+1)a}}{2}\left[e^{(2l+1)\pi i/2} H^{(1)}_{2l+1}(2R) - (-1)^{2\varepsilon} e^{-(2l+1)\pi i/2} H^{(2)}_{2l+1}(2R)\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l+1/2}\left[e^{(2l+1)\pi i/2} H^{(1)}_{2l+1}(2\sqrt{\lambda\mu}) - (-1)^{2\varepsilon} e^{-(2l+1)\pi i/2} H^{(2)}_{2l+1}(2\sqrt{\lambda\mu})\right]. \tag{3}$$

Аналогично, при $\lambda < 0$, $\mu < 0$ получаем

$$K_s(\lambda, \mu; \chi) = \frac{i}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l+1/2}\left[-e^{-(2l+1)\pi i/2} H^{(2)}_{2l+1}(2\sqrt{\lambda\mu}) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{2\varepsilon} e^{(2l+1)\pi i/2} H^{(1)}_{2l+1}(2\sqrt{\lambda\mu})\right]. \tag{4}$$

Если $\lambda > 0$, $\mu < 0$, то

$$K_s(\lambda, \mu; \chi) = \frac{i}{2}\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l+1/2} \times$$
$$\times \left[(-1)^{2\varepsilon} H^{(1)}_{2l+1}(i\sqrt{-\lambda\mu}) - H^{(2)}_{2l+1}(-i\sqrt{-\lambda\mu})\right], \quad (5)$$

если же $\lambda < 0$, $\mu > 0$, то

$$K_s(\lambda, \mu; \chi) =$$
$$= \frac{i}{2}\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l+1/2}\left[-(-1)^{2\varepsilon} H^{(2)}_{2l+1}(-i\sqrt{-\lambda\mu}) + H^{(1)}_{2l+1}(i\sqrt{-\lambda\mu})\right]. \quad (6)$$

Итак, ядро оператора $Q_\chi(s)$, $\chi = (l, \varepsilon)$ вычислено при $-1 < l < 0$. В частности, формулы (3) — (6) справедливы для представлений основной серии, поскольку для них $l = -1/2 + i\rho$.

Можно показать, что для представлений дискретной серии оператор $Q_\chi(s)$ выражается через функции Бесселя с целым индексом $J_n(x)$. Пользуясь полученными выше формулами, можно находить различные свойства функций Ганкеля, аналогично тому, как это было сделано в главе V.

ГЛАВА VIII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ФУНКЦИИ УИТТЕКЕРА

В этой главе будут изучены свойства функций Уиттекера $M_{\lambda, \mu}(z)$ и $W_{\lambda, \mu}(z)$. Будет показано, что эти функции связаны с представлениями группы треугольных матриц третьего порядка точно так же, как гипергеометрическая функция связана с представлениями группы вещественных унимодулярных матриц второго порядка. Именно, будет построена реализация неприводимых представлений этой группы, при которой диагональным матрицам соответствуют операторы умножения на функцию. При этой реализации другим элементам группы соответствуют интегральные операторы, ядра которых выражаются через функции Уиттекера. Пользуясь этим, мы получим рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения, континуальные аналоги теоремы сложения и другие соотношения для функций Уиттекера. Кроме того, будут рассмотрены тесно связанные с функциями Уиттекера многочлены Лагерра.

§ 1. Функции Уиттекера и вырожденная гипергеометрическая функция

1. Определение. Определим *функции Уиттекера* $M_{\lambda, \mu}(z)$, $W_{\lambda, \mu}(z)$ следующими интегральными представлениями:

$$M_{\lambda, \mu}(z)=$$

$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\, z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 u^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}} e^{zu}\, du, \qquad (1)$$

$$W_{\lambda, \mu}(z)=\frac{z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-zu} u^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}(1+u)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}\, du. \qquad (2)$$

Первый из этих интегралов сходится при $\operatorname{Re}\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)>0$, $\operatorname{Re}\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)>0$, а второй — при $\operatorname{Re}\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)>0$, $\operatorname{Re} z>0$.

Интегралы, входящие в равенства (1) и (2), являются в области сходимости аналитическими функциями от z. Легко доказать, что функции $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\mu}(z)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость, разрезанную вдоль отрицательной полуоси (разрез делается для выделения однозначной ветви множителя $z^{\mu+1/2}$).

Заметим еще, что $M_{\lambda,\mu}(z)$, рассматриваемая как функция от параметров, аналитична всюду, кроме точек $\mu=-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ \ldots$, в которых множитель $\Gamma(2\mu+1)$ имеет простые полюсы. Функция же $W_{\lambda,\mu}(z)$ определена при всех значениях λ и μ.

Исходя из интегрального представления (1), получим разложение функции $M_{\lambda,\mu}(z)$ в ряд. Для этого разложим e^{zu} в степенной ряд и почленно проинтегрируем получившееся разложение. Используя интеграл (2) из п. 7 § 1 главы V, получим

$$M_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)\,z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mu-\lambda+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma(2\mu+k+1)}z^{k}. \tag{3}$$

2. Вырожденная гипергеометрическая функция. Введем *вырожденный гипергеометрический ряд*

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots \tag{1}$$

Этот ряд получается из обычного гипергеометрического ряда

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots$$

заменой z на z/k, β на k и предельным переходом $k\to\infty$ (нетрудно обосновать законность почленного предельного перехода). Ясно, что ряд (1) сходится при всех значениях z. Обозначим его сумму через $\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)$ и назовем ее *вырожденной гипергеометрической функцией*.

Из равенств (3) п. 1 и (1) вытекает, что

$$M_{\lambda,\mu}(z)=z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\,\Phi\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ z\right). \tag{2}$$

Если в дифференциальном уравнении

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0,$$

которому удовлетворяет гипергеометрическая функция $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ (см. п. 3 § 5 главы VII), сделаем замену z на z/k, β на k и выполним предельный переход $k \to \infty$, то получим уравнение

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{du}{dz}-\alpha u=0, \tag{3}$$

называемое вырожденным гипергеометрическим уравнением. Естественно ожидать, что одним из его решений является вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)$, которая получается из $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ тем же предельным переходом:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)=\lim_{k\to\infty} F\left(\alpha,\ k;\ \gamma;\ \frac{z}{k}\right). \tag{4}$$

В этом легко убедиться непосредственной проверкой.

Из уравнения (3) легко вывести уравнение

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right)v=0, \tag{5}$$

которому удовлетворяет функция $M_{\lambda,\mu}(z)$ (см. § 3).

§ 2. Группа треугольных матриц третьего порядка и ее представления

1. Алгебра Ли. Изучим представления *группы G треугольных матриц третьего порядка*, имеющих вид

$$g=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Здесь a, b, c, d — вещественные числа, $c>0$.

Вычислим алгебру Ли этой группы. Так как элементы группы зависят от четырех параметров, нам надо выбрать четыре однопараметрические подгруппы в G. В качестве этих подгрупп удобно выбрать следующие:

$$g_+(t)=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$g_-(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$z(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\varepsilon(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Касательные матрицы к этим подгруппам имеют вид

$$a_+=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad a_-=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$c=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$[a_+,\ a_-]=c,\quad [a_+,\ b]=a_+,\quad [a_-,\ b]=-a_-,$$
$$[a_+,\ c]=[a_-,\ c]=[b,\ c]=0. \tag{5}$$

Отметим, что однопараметрическая подгруппа $z(t)$ является центром группы G, т. е. ее элементы перестановочны со всеми элементами группы G:

$$z(t)\,g=gz(t).$$

Наряду с подгруппами $g_+(t)$ и $g_-(t)$ будем рассматривать однопараметрические подгруппы в G:

$$g_1(t)=\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{6}$$

и

$$g_2(t)=\begin{pmatrix}1&-t&-\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Им соответствуют касательные матрицы:

$$a_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=a_++a_-$$

и

$$a_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=a_--a_+.$$

Коммутационные соотношения для a_1 и a_2 следуют из формул (5).

2. Разложение по однопараметрическим подгруппам. Пусть

$$g(a,\ b,\ d,\ \tau)=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & e^{\tau} & d\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

— элемент группы G. Если $d=0$, то, как показывает простая проверка, имеет место равенство

$$g(a,\ b,\ 0,\ \tau)=\varepsilon(\tau)\,g_+(a)\,z(b). \tag{1}$$

Точно так же, если $a=0$, то

$$g(0,\ b,\ d,\ \tau)=\varepsilon(\tau)\,g_-(de^{-\tau})\,z(b). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Тогда при $ad>0$ справедливо равенство

$$g(a,\ b,\ d,\ \tau)=\varepsilon(\tau_1)\,g_1(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b), \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r^2=ade^{-\tau},\quad \operatorname{sign} r=\operatorname{sign} d,\\ e^{\tau_1}=\frac{d}{r}=\sqrt{\frac{d}{a}}\,e^{\frac{\tau}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если же $ad<0$, то

$$g(a,\ b,\ d,\ \tau)=\varepsilon(\tau_1)\,g_2(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b), \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r^2=-ade^{-\tau},\quad \operatorname{sign} r=\operatorname{sign} d,\\ e^{\tau_1}=\frac{d}{r}=\sqrt{-\frac{d}{a}}\,e^{\frac{\tau}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Таким образом, в любом случае элемент g из G может быть представлен в виде

$$g(a,\ b,\ d,\ \tau)=\varepsilon(\tau_1)\,h(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b), \tag{7}$$

где $h(r)$ — элемент одного из следующих четырех видов: $g_+(r)$, $g_-(r)$, $g_1(r)$, $g_2(r)$. В первых двух случаях $\tau_1=\tau$.

3. Неприводимые представления группы G_1. Неприводимые представления группы G_1 строятся в пространстве $\mathfrak{D}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой. Каждое представление задается парой $\chi=(\sigma,\ \omega)$ комплексных чисел. Именно, каждому элементу $g=(a,\ b,\ d,\ \tau)$ группы G ставится в соответствие оператор

$$T_\chi(g)f(x)=e^{\omega\tau+\sigma(dx+b)}f(e^{\tau}x+a) \tag{1}$$

в пространстве $\mathfrak{D}$.

Если $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$, то это представление нельзя распространить на пространство функций с интегрируемым квадратом (из-за экспоненциального роста множителя $e^{\sigma(dx+b)}$).

Легко показать, что при $\sigma \neq 0$ представление $T_\chi(g)$ неприводимо. Мы не будем проводить соответствующего рассуждения.

Вычислим инфинитезимальные операторы представления $T_\chi(g)$, соответствующие подгруппам $g_+(t)$, $g_-(t)$, $z(t)$, $\varepsilon(t)$. Из формулы (1) следует, что

$$T_\chi[g_+(t)]f(x) = f(x+t).$$

Поэтому подгруппе $g_+(t)$ соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_+f(x) = f'(x). \tag{2}$$

Точно так же доказывается, что подгруппе $g_-(t)$ соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_-f(x) = \sigma x f(x), \tag{3}$$

а подгруппе $z(t)$ — оператор

$$Zf(x) = \sigma f(x). \tag{4}$$

Наконец, подгруппе $\varepsilon(t)$ соответствует инфинитезимальный оператор

$$Ef(x) = \omega f(x) + xf'(x). \tag{5}$$

Так как $g_1(t) = g_-(t)\, g_+(t)\, z\left(\frac{t^2}{2}\right)$, то подгруппе $g_1(t)$ соответствует инфинитезимальный оператор

$$A_1 f(x) \equiv (A_+ + A_-)f(x) = \sigma x f(x) + f'(x). \tag{6}$$

Точно так же подгруппе $g_2(t)$ соответствует оператор

$$A_2 f(x) \equiv (A_- - A_+)f(x) = \sigma x f(x) - f'(x). \tag{7}$$

Предоставляем читателю проверить соотношения коммутации для этих операторов.

4. Другая реализация представлений $T_\chi(g)$. Как и в случае группы $SL(2, R)$, перейдем теперь к другой реализации представлений $T_\chi(g)$. Именно, выберем реализацию, при которой диагональным матрицам $\varepsilon(\tau)$ соответствовали бы операторы умножения на функцию.

С этой целью, как и в главе VII, каждой функции $f(x)$ из $\mathfrak{D}$ поставим в соответствие пару функций $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} F_+(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x_+^{\lambda-1}\, dx, \\ F_-(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x_-^{\lambda-1}\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти функции заданы в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Как отмечалось в главе VII, имеет место формула обращения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} F_+(\mu)\,x^{-\mu}\,d\mu, & x>0,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} F_-(\mu)\,(-x)^{-\mu}\,d\mu, & x<0.\end{cases}\tag{2}$$

Выясним, в какие операторы переходят операторы представления $T_\chi(g)$ при этом преобразовании. Для этого найдем пару $\mathbf{F}^{(g)}=(F_+^{(g)}, F_-^{(g)})$, соответствующую функции

$$f^{(g)}(x)\equiv T_\chi(g)f(x).$$

Мы имеем

$$F_\pm^{(g)}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_\chi(g)f(x)\,x_\pm^{\lambda-1}\,dx=e^{\omega\tau+\sigma b}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{d\sigma x} f(e^\tau x+a)\,x_\pm^{\lambda-1}\,dx.$$

Подстановка $e^\tau x+a=y$ преобразует это равенство к виду

$$F_\pm^{(g)}(\lambda)=\exp\left[(\omega-\lambda)\tau+\sigma(b-a\,de^{-\tau})\right]\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\sigma\,de^{-\tau}y\right](y-a)_\pm^{\lambda-1}f(y)\,dy.\tag{3}$$

Чтобы получить искомые операторы, нам осталось в равенстве (3) функцию $f(y)$ заменить по формуле обращения (2). Мы получим

$$F_\pm^{(g)}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\exp\left[(\omega-\lambda)\tau+\sigma(b-ade^{-\tau})\right]\times$$
$$\times\Bigg[\int\limits_0^\infty\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\exp\left[\sigma de^{-\tau}y\right]y^{-\mu}(y-a)_\pm^{\lambda-1}F_+(\mu)\,d\mu\,dy+$$
$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\exp\left[-\sigma de^{-\tau}y\right]y^{-\mu}(-y-a)_\pm^{\lambda-1}F_-(\mu)\,d\mu\,dy\Bigg].\tag{4}$$

Формально меняя порядок интегрирования, получаем из формулы (4)

$$F_+^{(g)}(\lambda)=$$
$$=\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{++}(\lambda,\mu;\chi;g)F_+(\mu)\,d\mu+\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{+-}(\lambda,\mu;\chi;g)F_-(\mu)\,d\mu\tag{5}$$

и

$$F_-^{(g)}(\lambda)=$$
$$=\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{-+}(\lambda,\mu;\chi;g)F_+(\mu)\,d\mu+\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{--}(\lambda,\mu;\chi;g)F_-(\mu)\,d\mu.\tag{6}$$

Здесь

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \exp[(\omega - \lambda)\tau + \sigma(b - a\,de^{-\tau})] \int_0^\infty \exp[\sigma de^{-\tau} y] y^{-\mu} (y-a)_+^{\lambda-1} dy, \quad (7)$$

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; g) = \frac{1}{2\pi i} \exp[(\omega - \lambda)\tau + \sigma(b - ade^{-\tau})] \times$$
$$\times \int_0^\infty \exp[-\sigma de^{-\tau} y] y^{-\mu} (-y-a)_+^{\lambda-1} dy. \quad (8)$$

K_{-+} получается из K_{++} заменой $(y-a)_+^{\lambda-1}$ на $(y-a)_-^{\lambda-1}$, а K_{--} получается из K_{+-} заменой $(-y-a)_+^{\lambda-1}$ на $(-y-a)_-^{\lambda-1}$.

Однако, в отличие от случая гипергеометрической функции, изученного в главе VII, здесь при $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$ невозможно указать общую область, в которой имеют смысл все написанные формулы. Например, если $a > 0$, $d > 0$ и $\operatorname{Re}\sigma < 0$, то интегралы, выражающие K_{++}, K_{+-} и K_{-+}, сходятся при $\operatorname{Re}\mu < 1$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Интеграл же, выражающий K_{--}, расходится. Поэтому в рассматриваемом случае вместо формулы (6) надо писать

$$F_-^{(g)}(\lambda) = \int_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; g) F_+(\mu)\, d\mu + \mathfrak{K}_{--} F_-(\lambda), \quad (9)$$

где $\mathfrak{K}_{--}$ уже не является интегральным оператором.

В случае, когда $\operatorname{Re}\sigma = 0$, существует общая область сходимости всех интегралов для K_{++}, K_{+-}, K_{-+}, K_{--}. Именно, эти интегралы сходятся в области $\operatorname{Re}\mu < 1$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\lambda$.

Если $g = \varepsilon(\tau)$, то удобнее непосредственно вычислить $F_+^{(g)}(\lambda)$ и $F_-^{(g)}(\lambda)$. Мы имеем

$$T_\chi[\varepsilon(\tau)] f(x) = e^{\omega\tau} f(e^\tau x).$$

Поэтому

$$F_\pm^{\varepsilon(\tau)}(\lambda) = e^{\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\tau x)\, x_\pm^{\lambda-1}\, dx =$$
$$= e^{(\omega-\lambda)\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, y_\pm^{\lambda-1}\, dy = e^{(\omega-\lambda)\tau} F_\pm(\lambda). \quad (10)$$

Итак, *диагональным матрицам* $\varepsilon(\tau)$ *соответствует оператор умножения на функцию* $e^{(\omega-\lambda)\tau}$.

Точно так же доказывается, что *матрице вида* $z(b)$ *соответствует оператор умножения на* $e^{\sigma b}$.

В дальнейшем операторы представления $T_\chi(g)$ после перехода к реализации в пространстве пар $\mathbf{F}(\lambda) = (F_+(\lambda), F_-(\lambda))$ будем обозначать через $R_\chi(g)$. Иными словами, полагаем

$$R_\chi(g)\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{(g)}(\lambda). \quad (11)$$

5. Инфинитезимальные операторы представления $R_\chi(g)$. Вычислим теперь инфинитезимальные операторы $\hat{A}_+$, $\hat{A}_-$, $\hat{Z}$ и $\hat{E}$ для представления $R_\chi(g)$. Чтобы найти оператор, соответствующий подгруппе $g_+(t)$, надо найти преобразования Меллина функций $A_+f(x)=f'(x)$ и $A_+f(-x)=f'(-x)$. Преобразование Меллина для $A_+f(x)$ имеет вид

$$\hat{A}_+F_+(\lambda)=\int_0^\infty A_+f(x)\,x^{\lambda-1}\,dx=\int_0^\infty f'(x)\,x^{\lambda-1}\,dx=$$

$$=-(\lambda-1)\int_0^\infty f(x)\,x^{\lambda-2}\,dx=-(\lambda-1)F_+(\lambda-1).$$

Аналогично доказывается равенство

$$\hat{A}_+F_-(\lambda)=(\lambda-1)F_-(\lambda-1).$$

Итак, инфинитезимальный оператор представления $R_\chi(g)$, соответствующий подгруппе $g_+(t)$, имеет вид

$$\hat{A}_+(F_+(\lambda),F_-(\lambda))=(\lambda-1)(-F_+(\lambda-1),F_-(\lambda-1)). \tag{1}$$

Точно так же доказывается, что подгруппам $g_-(t)$, $z(t)$, $\varepsilon(t)$ соответствуют инфинитезимальные операторы

$$\hat{A}_-(F_+(\lambda),F_-(\lambda))=\sigma(F_+(\lambda+1),-F_-(\lambda+1)), \tag{2}$$

$$\hat{Z}(F_+(\lambda),F_-(\lambda))=\sigma(F_+(\lambda),F_-(\lambda)), \tag{3}$$

$$\hat{E}(F_+(\lambda),F_-(\lambda))=(\omega-\lambda)(F_+(\lambda),F_-(\lambda)). \tag{4}$$

Инфинитезимальные операторы, соответствующие подгруппам $g_1(t)$ и $g_2(t)$, имеют вид

$$\hat{A}_1(F_+(\lambda),F_-(\lambda))=$$
$$=(\sigma F_+(\lambda+1)-(\lambda-1)F_+(\lambda-1),\ -\sigma F_-(\lambda+1)+(\lambda-1)F_-(\lambda-1)), \tag{5}$$

$$\hat{A}_2(F_+(\lambda),F_-(\lambda))=$$
$$=(\sigma F_+(\lambda+1)+(\lambda-1)F_+(\lambda-1),\ -\sigma F_-(\lambda+1)-(\lambda-1)F_-(\lambda-1)) \tag{6}$$

6. Вычисление ядер представлений. В п. 2 было доказано, что любая матрица g из группы G может быть записана в виде

$$g=\varepsilon(\tau_1)\,h(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b),$$

где $z(b)$ и $\varepsilon(b)$ задаются равенствами (3) и (4) п. 1, а $h(r)$ является матрицей, принадлежащей одной из подгрупп $g_+(t)$, $g_-(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$. Матрице $z(b)$ соответствует в представлении $R_\chi(g)$ оператор умножения на функцию $e^{\sigma b}$, а матрице $\varepsilon(\tau)$ — оператор умножения на

$e^{(\omega-\lambda)\tau}$ (см. п. 4). Поэтому достаточно вычислить ядра для элементов подгрупп $g_+(t)$, $g_-(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$.

Начнем с подгруппы $g_+(t)$. Для элементов этой подгруппы $b = d = \tau = 0$, и потому

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_+(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty y^{-\mu}(y-t)_+^{\lambda-1}\,dy.$$

Если $t > 0$, то имеем

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_+(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_t^\infty y^{-\mu}(y-t)^{\lambda-1}\,dy = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\mu-\lambda)\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}\,t^{\lambda-\mu}. \tag{1}$$

Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\lambda > 0$.

Точно так же доказывается, что при $t > 0$

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; g_+(t)) = 0, \tag{2}$$

$$K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; g_+(t)) = \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}\,t^{\lambda-\mu}, \tag{3}$$

где $\operatorname{Re}\mu < 1$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и

$$K_{--}(\lambda, \mu; \chi; g_+(t)) = \frac{\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(\mu-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)}\,t^{\lambda-\mu}, \tag{4}$$

где $\operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\mu < 1$.

Теперь рассмотрим операторы, соответствующие элементам подгруппы $g_-(t)$. Здесь получаем

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_-(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{\sigma t y}y^{\lambda-\mu-1}\,dy.$$

Этот интеграл сходится, если $\operatorname{Re}\sigma t < 0$ и равен

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_-(t)) = \frac{\Gamma(\lambda-\mu)\,(-\sigma t)^{\mu-\lambda}}{2\pi i}. \tag{5}$$

Будем, как и выше, считать, что $\operatorname{Re}\sigma < 0$. Тогда формула (5) имеет место при $t > 0$. Точно так же доказывается, что при $\operatorname{Re}\sigma < 0$, $t > 0$

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; g_-(t)) = 0 \tag{6}$$

и

$$K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; g_-(t)) = 0. \tag{7}$$

Ядро же $K_{--}(\lambda, \mu; \chi; g_-(t))$ при $\operatorname{Re}\sigma < 0$, $t > 0$ выражается расходящимся интегралом.

Рассмотренные до сих пор ядра приводили лишь к степенной функции. Элементам же подгрупп $g_1(t)$ и $g_2(t)$ соответствуют ядра, выражаемые через функции Уиттекера. Для определенности будем считать далее, что $\sigma=-1$.

Из формулы (7) п. 4 следует, что

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_1(t))=\frac{1}{2\pi i}e^{t^2/2}\int\limits_t^\infty e^{-ty}y^{-\mu}(y-t)^{\lambda-1}\,dy.$$

Делая подстановку $y-t=tx$ и используя равенство (2) п. 1 § 1, выводим, что при $t>0$

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_1(t))=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}e^{-\frac{t^2}{2}}t^{\lambda-\mu}\int\limits_0^\infty e^{-t^2x}(x+1)^{-\mu}x^{\lambda-1}\,dx=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi it}W_{\frac{1-\lambda-\mu}{2},\ \frac{\lambda-\mu}{2}}(t^2), \tag{8}$$

где $\operatorname{Re}\lambda>0$.

Совершенно аналогично доказывается, что при $\sigma=-1$, $t>0$

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; g_1(t))=0, \tag{9}$$
$$K_{-+}(\lambda; \mu; \chi; g_1(t))=\frac{1}{2\pi it}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu-1)}M_{\frac{1-\lambda-\mu}{2},\ \frac{\lambda-\mu}{2}}(t^2), \tag{10}$$

где $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}\mu<1$. Наконец, $K_{--}(\lambda, \mu; \chi; g_1(t))$ выражается расходящимся интегралом.

Точно так же устанавливаем, что при $\sigma=-1$, $t>0$

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_2(t))=\frac{\Gamma(1-\mu)}{2\pi it}W_{\frac{\lambda+\mu-1}{2},\ \frac{\lambda-\mu}{2}}(t^2), \tag{11}$$

где $\operatorname{Re}\mu<1$. Далее,

$$K_{+-}(\lambda, \mu; \chi; g_2(t))=\frac{1}{2\pi it}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}M_{\frac{\lambda+\mu-1}{2},\ \frac{\lambda-\mu}{2}}(t^2), \tag{12}$$

где $\operatorname{Re}\lambda>0$ и $\operatorname{Re}\mu<1$,

$$K_{-+}(\lambda, \mu; \chi; g_2(t))=0. \tag{13}$$

Наконец, интеграл, выражающий $K_{--}(\lambda, \mu; \chi; g_2(t))$, при $\sigma=-1$, $t>0$ расходится.

Во всех рассмотренных случаях переход от t к $-t$ сводится к замене знаков-индексов на обратные:

$$K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_+(-t))=K_{--}(\lambda, \mu; \chi; g_+(t)), \tag{14}$$

и т. д.

§ 3. Функциональные соотношения для функций Уиттекера

1. Соотношения между инфинитезимальными операторами и операторами представления. Вывод рекуррентных соотношений для функций Уиттекера основан на некоторых соотношениях между операторами представления $R_\chi(g)$ и инфинитезимальными операторами этого представления.

Рассмотрим матрицу

$$g_+(t)\,g_1(x)=\begin{pmatrix}1 & t+x & tx+\frac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$g_+(t)\,g_1(x)=\varepsilon(\tau)\,g_1(r)\,\varepsilon(-\tau)\,z(b), \tag{1}$$

где

$$r^2=x^2+tx,\qquad e^{2\tau}=\frac{x}{t+x},\qquad b=\frac{1}{2}tx. \tag{2}$$

Из равенств (2) следует, что при $t=0$ имеем $r=x$, $\tau=b=0$ и

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{2},\quad \left.\frac{d\tau}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2x},\quad \left.\frac{db}{dt}\right|_{t=0}=\frac{x}{2}. \tag{3}$$

Так как $R_\chi(g)$ — представление группы G, то

$$R_\chi(g_+(t))\,R_\chi(g_1(x))=R_\chi(\varepsilon(\tau))\,R_\chi(g_1(r))\,R_\chi(\varepsilon(-\tau))\,R_\chi(z(b)). \tag{4}$$

Продифференцируем это соотношение по t и положим $t=0$. В силу равенств (3) и формул (1) — (4) п. 5 § 2 получаем

$$\hat{A}_+R_\chi(g_1(x))=$$
$$=\frac{1}{2x}\Big(R_\chi(g_1(x))\,\hat{E}-\hat{E}R_\chi(g_1(x)\Big)+\frac{x}{2}R_\chi(g_1(x))\hat{Z}+\frac{1}{2}\frac{dR_\chi(g_1(x))}{dx}.$$

Подставляя выражения для операторов $\hat{E}$ и $\hat{Z}$, выводим, что при $\sigma=-1$

$$\hat{A}_+R_\chi(g_1(x))=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-\mu}{x}-x\right)R_\chi(g_1(x))+\frac{1}{2}\frac{dR_\chi(g_1(x))}{dx}. \tag{5}$$

Точно так же из рассмотрения произведения $g_-(t)\,g_1(x)$ выводим

$$\hat{A}_-R_\chi(g_1(x))=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\lambda}{x}+x\right)R_\chi(g_1(x))+\frac{1}{2}\frac{dR_\chi(g_1(x))}{dx}. \tag{6}$$

Из рассмотрения произведения $g_+(t)\,g_2(x)$ следует, что

$$\hat{A}_+R_\chi(g_2(x))=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\lambda}{x}-x\right)R_\chi(g_2(x))-\frac{1}{2}\frac{dR_\chi(g_2(x))}{dx}, \tag{7}$$

а из рассмотрения произведения $g_-(t)\,g_2(x)$, что

$$\hat{A}_-R_\chi(g_2(x))=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\lambda}{x}-x\right)R_\chi(g_2(x))+\frac{1}{2}\frac{dR_\chi(g_2(x))}{dx}. \tag{8}$$

2. Рекуррентные соотношения. Выведем теперь из формул предыдущего пункта рекуррентные соотношения, связывающие функции $W_{\lambda,\mu}(x)$ и $M_{\lambda,\mu}(x)$ с функциями $W_{\lambda\pm 1/2,\,\mu\pm 1/2}(x)$ и $M_{\lambda\pm 1/2,\,\mu\pm 1/2}(x)$. Для этого заменим операторы $\hat{A}_+$, $\hat{A}_-$, $R_\chi(g_1(x))$, $R_\chi(g_2(x))$, входящие в эти формулы, их явными выражениями, а затем сравним ядра получающихся операторов слева и справа.

Оператор $R_\chi(g_1(x))$ переводит пару $\mathbf{F}(\lambda)=(F_+(\lambda),\ F_-(\lambda))$ в пару $\mathbf{F}^{(g_1)}(\lambda)=(F_+^{(g_1)}(\lambda),\ F_-^{(g_1)}(\lambda))$, где

$$F_+^{(g_1)}(\lambda)=\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(x))\,F_+(\mu)\,d\mu$$

и $F_-^{(g_1)}(\lambda)$ имеет аналогичное выражение. Оператор же $\hat{A}_+$ переводит $F_+^{(g_1)}(\lambda)$ в $-(\lambda-1)\,F_+^{(g_1)}(\lambda-1)$ (см. п. 5 § 2). Следовательно,

$$\hat{A}_+F_+^{(g_1)}(\lambda)=(1-\lambda)\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{++}(\lambda-1,\ \mu;\ \chi;\ g_1(x))\,F_+(\mu)\,d\mu.$$

Точно так же устанавливается, что соответствующий оператор в правой части формулы (5) п. 1 имеет вид

$$\frac{1}{2}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\left[\left(\frac{\lambda-\mu}{x}-x\right)K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(x))+\frac{dK_{++}(\lambda,\mu;\chi;g_1(x))}{dx}\right]F_+(\mu)\,d\mu.$$

Следовательно,

$$(1-\lambda)\,K_{++}(\lambda-1,\ \mu;\ \chi;\ g_1(x))=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-\mu}{x}-x\right)K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(x))+\frac{1}{2}\frac{dK_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(y))}{dx}.$$

Подставляя в это равенство выражение (8) п. 6 § 2 для $K_{++}(g_1(t))$, выводим рекуррентное соотношение для функции $W_{\lambda,\mu}(x)$:

$$\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{x}}\,W_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)-\left(\frac{2\mu-1}{2x}-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x) \tag{1}$$

(мы заменили $\frac{1-\lambda-\mu}{2}$ на λ, $\frac{\lambda-\mu}{2}$ на μ и x^2 на x).

Точно так же из рассмотрения элемента K_{-+} выводим рекуррентное соотношение для функции $M_{\lambda,\mu}(x)$:

$$\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=\frac{2\mu}{\sqrt{x}}M_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)-\left(\frac{2\mu-1}{2x}-\frac{1}{2}\right)M_{\lambda,\mu}(x). \quad (2)$$

Аналогично, равенство (6) п. 1 приводит к следующим двум рекуррентным соотношениям:

$$\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=\frac{\lambda-\mu-\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}W_{\lambda-1/2,\,\mu+1/2}(x)+\left(\frac{2\mu+1}{2x}-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x) \quad (3)$$

и

$$\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=\frac{\mu-\lambda+\frac{1}{2}}{(2\mu+1)\sqrt{x}}M_{\lambda-1/2,\,\mu+1/2}(x)+\left(\frac{2\mu+1}{2x}-\frac{1}{2}\right)M_{\lambda,\mu}(x). \quad (4)$$

Из равенства (7) п. 1 получаем соотношения

$$\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=\frac{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}W_{\lambda-1/2,\,\mu-1/2}(x)-\left(\frac{2\mu-1}{2x}+\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x) \quad (5)$$

и

$$\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=\frac{2\mu}{\sqrt{x}}M_{\lambda-1/2,\,\mu-1/2}(x)-\left(\frac{2\mu-1}{2x}+\frac{1}{2}\right)M_{\lambda,\mu}(x), \quad (6)$$

а из равенства (8) п. 1 соотношения

$$\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=-\frac{W_{\lambda+1/2,\,\mu+1/2}(x)}{\sqrt{x}}+\left(\frac{2\mu+1}{2x}+\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x) \quad (7)$$

и

$$\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}=$$

$$=-\frac{\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\mu+1)\sqrt{x}}M_{\lambda+1/2,\,\mu+1/2}(x)+\left(\frac{2\mu+1}{2x}+\frac{1}{2}\right)M_{\lambda,\mu}(x). \quad (8)$$

Из полученных формул легко вытекают соотношения, не содержащие оператора дифференцирования. Так, из (1) и (3) находим

$$(2\mu-x)W_{\lambda,\mu}(x)+\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}\,W_{\lambda-1/2,\,\mu+1/2}(x)+$$
$$+\sqrt{x}\,W_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)=0; \quad (9)$$

из (3) и (7) находим

$$W_{\lambda,\mu}(x)+\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)W_{\lambda-1/2,\,\mu+1/2}(x)-\right.$$
$$\left.-W_{\lambda+1/2,\,\mu+1/2}(x)\right]=0, \quad (10)$$

из (1) и (5) получаем

$$W_{\lambda,\mu}(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda-1/2,\,\mu-1/2}(x)+\right.$$
$$\left.+W_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)\right]=0. \qquad (11)$$

Аналогично, из (2) и (4) имеем

$$(x-2\mu)M_{\lambda,\mu}(x)+2\mu\sqrt{x}\,M_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)-$$
$$-\frac{\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}}{2\mu+1}M_{\lambda-1/2,\,\mu+1/2}(x)=0, \qquad (12)$$

из (4) и (8) находим

$$M_{\lambda,\mu}(x)-\frac{1}{(2\mu+1)\sqrt{x}}\left[\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)M_{\lambda-1/2,\,\mu+1/2}(x)+\right.$$
$$\left.+\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)M_{\lambda+1/2,\,\mu+1/2}(x)\right]=0, \qquad (13)$$

из (2) и (6) имеем

$$M_{\lambda,\mu}(x)+\frac{2\mu}{\sqrt{x}}\left(M_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)-M_{\lambda-1/2,\,\mu-1/2}(x)\right)=0. \qquad (14)$$

3. Дифференциальное уравнение Уиттекера. Выведем теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции Уиттекера $M_{\lambda,\mu}(x)$ и $W_{\lambda,\mu}(x)$. Для этого заметим, что в силу формулы (1) п. 2 имеем

$$\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}+\frac{2\mu-1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x)=-W_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x).$$

Из формулы же (3) п. 2 получаем

$$\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}-\frac{\mu}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)W_{\lambda+1/2,\,\mu-1/2}(x)=\left(\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x).$$

Отсюда следует, что

$$\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}-\frac{\mu}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}+\frac{2\mu-1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x)=$$
$$=\left(\mu-\lambda-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем отсюда, что $W_{\lambda,\mu}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{x}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)y=0. \qquad (1)$$

Это уравнение называют *дифференциальным уравнением Уиттекера.*

Это же дифференциальное уравнение следует из равенств (5) и (7) п. 2.

Точно так же из формул (2) и (4) п. 2 следует, что и $M_{\lambda,\mu}(x)$ является решением уравнения (1). К тому же выводу можно прийти, пользуясь формулами (6) и (8).

Комбинируя иным образом полученные в п. 2 рекуррентные соотношения, получаем соотношения, связывающие $M_{\lambda,\mu}(x)$ и $W_{\lambda,\mu}(x)$ с функциями $M_{\lambda\pm 1,\mu}(x)$, $M_{\lambda,\mu\pm 1}(x)$, $W_{\lambda\pm 1,\mu}(x)$, $W_{\lambda,\mu\pm 1}(x)$. Например, из соотношений (1) и (5) п. 2 следует, что

$$\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}+\frac{\mu-1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}+\frac{2\mu-1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x)=$$
$$=-\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu-1}(x).$$

Раскрывая скобки и вычитая из получившегося соотношения равенство

$$x\frac{d^2W_{\lambda,\mu}}{dx^2}+\left(-\frac{x}{4}+\lambda+\frac{1-4\mu^2}{4x}\right)W_{\lambda,\mu}=0$$

(см. формулу (1)), получаем

$$(2\mu-1)\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}+\left[\frac{(2\mu-1)^2}{2x}-\lambda\right]W_{\lambda,\mu}(x)=$$
$$=-\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu-1}(x). \quad (2)$$

Совершенно так же из (1) и (7) п. 2 получаем

$$x\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}+\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x)=-W_{\lambda+1,\mu}(x), \quad (3)$$

из (3) и (5) находим

$$x\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}-\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(x)=\left[\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2-\mu^2\right]W_{\lambda-1,\mu}(x), \quad (4)$$

из (3) и (7) имеем

$$(2\mu+1)\frac{dW_{\lambda,\mu}(x)}{dx}-\left[\frac{(2\mu+1)^2}{2x}-\lambda\right]W_{\lambda,\mu}(x)=\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu+1}(x). \quad (5)$$

Аналогичные соотношения для $M_{\lambda,\mu}(x)$ имеют следующий вид:

$$(2\mu-1)\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}+\left[\frac{(2\mu-1)^2}{2x}-\lambda\right]M_{\lambda,\mu}(x)=2\mu(2\mu-1)M_{\lambda,\mu-1}(x), \quad (6)$$

$$x\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}+\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)M_{\lambda,\mu}(x)=\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)M_{\lambda+1,\mu}(x), \quad (7)$$

$$x\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}-\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)M_{\lambda,\mu}(x)=\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)M_{\lambda-1,\mu}(x), \quad (8)$$

$$(2\mu+1)\frac{dM_{\lambda,\mu}(x)}{dx}-\left[\frac{(2\mu+1)^2}{2x}-\lambda\right]M_{\lambda,\mu}(x)=$$
$$=\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\lambda^2}{2(\mu+1)(2\mu+1)}M_{\lambda,\mu+1}(x). \quad (9)$$

4. Соотношения симметрии для функций Уиттекера. Мы доказали в предыдущем пункте, что функции Уиттекера $M_{\lambda,\mu}(x)$ и $W_{\lambda,\mu}(x)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{x}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)y=0. \quad (1)$$

Это уравнение не меняется при замене μ на $-\mu$, а также при одновременной замене x на $-x$ и λ на $-\lambda$.

Отсюда следует, что наряду с функциями $M_{\lambda,\mu}(x)$ и $W_{\lambda,\mu}(x)$ функции

$$M_{\lambda,-\mu}(x),\quad M_{-\lambda,\mu}(-x),\quad M_{-\lambda,-\mu}(-x),$$
$$W_{\lambda,-\mu}(x),\quad W_{-\lambda,\mu}(-x),\quad W_{-\lambda,-\mu}(-x)$$

также являются решениями уравнения Уиттекера. Поэтому все эти функции должны линейно выражаться через два линейно независимых решения уравнения (1). Выберем в качестве таких решений $M_{\lambda,\mu}(x)$ и $M_{\lambda,-\mu}(x)$ (их линейная независимость без труда доказывается путем вычисления определителя Вронского).

Выражение для $M_{-\lambda,\mu}(-x)$ через $M_{\lambda,\mu}(x)$ сразу получается из интегрального представления (1) п. 1 § 1. Заменив в этой формуле λ на $-\lambda$, z на $-x$ и сделав подстановку $u=1-v$, получаем

$$M_{-\lambda,\mu}(-x)=$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)(-x)^{\mu+1/2}e^{-x/2}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 u^{\mu-\lambda-1/2}(1-u)^{\mu+\lambda-1/2}e^{zu}\,du.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (1) п. 1 § 1, находим

$$(-x)^{-\mu-1/2}M_{-\lambda,\mu}(-x)=x^{-\mu-1/2}M_{\lambda,\mu}(x). \quad (2)$$

Аналогично $M_{-\lambda,-\mu}(-x)$ выражается через $M_{\lambda,-\mu}(x)$.

Теперь найдем соотношение, связывающее $W_{\lambda,\mu}(x)$ и $M_{\lambda,\mu}(x)$, $M_{\lambda,-\mu}(x)$. Будем искать его в виде

$$W_{\lambda,\mu}(x)=AM_{\lambda,\mu}(x)+BM_{\lambda,-\mu}(x).$$

Заменяя в этом равенстве функции Уиттекера их интегральными представлениями (1) и (2) из п. 1 § 1, получаем после простых преобразований соотношение

$$\int\limits_0^\infty e^{-zu}u^{\mu-\lambda-1/2}(1+u)^{\mu+\lambda-1/2}du=$$
$$=A\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^1 u^{\mu-\lambda-1/2}(1-u)^{\mu+\lambda-1/2}e^{zu}du+$$
$$+B\frac{\Gamma(1-2\mu)\,z^{-2\mu}\,\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1 u^{-\mu-\lambda-1/2}(1-u)^{-\mu+\lambda-1/2}e^{zu}\,du. \tag{3}$$

Входящие в это соотношение интегралы сходятся при $z=0$ в области

$$\operatorname{Re}\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)>0,\qquad \operatorname{Re}\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)>0,\ \operatorname{Re}\mu<0,$$
$$\operatorname{Re}\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)>0,\ \operatorname{Re}\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)>0.$$

Положим в равенстве (3) $z=0$ и воспользуемся интегралами (7) п. 6 и (2) п. 7 § 1 главы V. Так как при $\operatorname{Re}\mu<0$ выражение $z^{-2\mu}$ обращается в нуль в точке $z=0$, мы получим после простых преобразований

$$A=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)}.$$

Чтобы найти значение B, сделаем в интеграле в левой части равенства (3) подстановку $zu=v$ и умножим обе части равенства на $z^{2\mu}$. Мы получим соотношение

$$\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{\mu-\lambda-1/2}(z+u)^{\mu+\lambda-1/2}du=$$
$$=A\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}z^{2\mu}\int\limits_0^1 u^{\mu-\lambda-1/2}(1-u)^{\mu+\lambda-1/2}e^{zu}du+$$
$$+B\frac{\Gamma(1-2\mu)\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^1 u^{-\mu-\lambda-1/2}(1-u)^{-\mu+\lambda-1/2}e^{zu}du.$$

При $z=0$ интегралы, входящие в это равенство, сходятся в области

$$\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)>0,\ \operatorname{Re}\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)>0,$$
$$\operatorname{Re}\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)>0,\ \operatorname{Re}\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)>0.$$

Полагая $z=0$, получаем после простых преобразований

$$B=\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}.$$

Итак, мы доказали, что

$$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,\mu}(z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,-\mu}(z). \tag{4}$$

Отметим, что ограничения, налагавшиеся на λ и μ при вычислении коэффициентов A и B, снимаются путем аналитического продолжения по λ и μ. Поэтому формула (4) верна при всех значениях λ и μ.

Выражение (3) не меняется при замене μ на $-\mu$. Поэтому имеем соотношение симметрии

$$W_{\lambda,\mu}(z)=W_{\lambda,-\mu}(z).$$

Предоставляем читателю вывести формулу для $W_{-\lambda,\mu}(-z)$.

Мы выразили, таким образом, функции $M_{-\lambda,\mu}(-z)$, $W_{\lambda,\mu}(z)$ и т. д. через $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $M_{\lambda,-\mu}(z)$.

§ 4. Интегралы, связанные с функциями Уиттекера

1. Представление Меллина — Бернса. Как и в случае гипергеометрической функции, интегралы, связанные с функциями Уиттекера, выводятся из соотношения

$$\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1g_2)=\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\mathbf{K}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ g_1)\,\mathbf{K}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ g_2)\,d\nu, \tag{1}$$

выражающего тот факт, что

$$T_\chi(g_1g_2)=T_\chi(g_1)\,T_\chi(g_2). \tag{2}$$

Однако при этом надо иметь в виду, что в матрице $\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g)$ некоторые элементы не определены.

Выбирая различным образом элементы g_1 и g_2 и сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, мы и приходим к интегральным соотношениям для функций Уиттекера. Так, чтобы получить интегральные представления типа Меллина — Бернса, будем исходить из следующего очевидного равенства:

$$g_-(t)\,g_+(t)=g_1(t)\,z\left(-\frac{t^2}{2}\right). \qquad (3)$$

Для определенности будем считать, что $\operatorname{Re}\sigma<0$. Как отмечалось в § 2, в этом случае определено значение $K_{++}(g_1(t))$. Поскольку $K_{+-}(g_-(t))=K_{-+}(g_-(t))=0$, то из равенства (3) вытекает

$$e^{-\sigma t^2/2}K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(t))=$$
$$=\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{++}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ g_-(t))\,K_{++}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ g_+(t))\,d\nu.$$

Подставив в эту формулу значения $K_{++}(g_+(t))$, $K_{++}(g_-(t))$, $K_{++}(g_1(t))$, даваемые равенствами (1), (5) и (8) п. 6 § 2, и положив

$$-\sigma t^2=z,\quad \frac{1-\lambda-\mu}{2}=\lambda',\quad \frac{\lambda-\mu}{2}=\mu',$$
$$\nu=\nu'-\lambda',$$

получим

$$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{e^{-z/2}}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}\,\Gamma(\nu-\lambda)\,z^{\nu}\,d\nu. \qquad (4)$$

Из условий сходимости интегралов, выражающих ядра $K_{++}(g_+(t))$ и т. д., вытекают следующие ограничения на параметры λ, μ, ν: $\operatorname{Re}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)>\operatorname{Re}\nu$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)>\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\lambda$.

Другое выражение для $W_{\lambda,\mu}(z)$ получается из равенства

$$g_+(t)\,g_-(t)=g_1(t)\,z\left(\frac{t^2}{2}\right). \qquad (5)$$

Из него следует, что

$$K_{++}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(t))\,e^{\frac{\sigma t^2}{2}}=\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}K_{++}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ g_+(t))\,K_{++}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ g_-(t))\,d\nu.$$

Подставляя значения ядер, получаем после несложных преобразований

$$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{e^{z/2}}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)}{\Gamma(1-\lambda-\nu)}\,z^{\nu}\,d\nu, \qquad (6)$$

где

$$\operatorname{Re}(1-\lambda)>\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)>\operatorname{Re}\nu,\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+\mu\right)>\operatorname{Re}\nu.$$

Если сравнить выражения для K_{-+}, то получим

$$K_{-+}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(t))\,e^{\frac{\sigma t^2}{2}} = \int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} K_{-+}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ g_+(t))\,K_{++}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ g_-(t))\,d\nu.$$

Подставляя сюда выражения для ядер, находим интегральное представление для функции Уиттекера $M_{\lambda,\mu}(z)$:

$$M_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu+1)\,e^{z/2}}{2\pi i\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \frac{\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}\,\Gamma(\lambda+\nu)\,z^{\nu}\,d\nu, \qquad (7)$$

где

$$-\operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \text{ и } \operatorname{Re}\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right) > 0.$$

2. Преобразование Меллина по параметрам. Из равенства (1) п. 1 можно получить целый ряд других интегральных соотношений для функций Уиттекера. Чтобы вывести формулы преобразований Меллина функций Уиттекера по параметрам, рассмотрим матрицу

$$g_+(x)\,g_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & t+x & tx+\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и применим к ней разложения (3) и (5) п. 2 § 2.

Если $t>0$, $x>0$, то это разложение имеет следующий вид:

$$g_+(x)\,g_1(t) = \varepsilon(\tau)\,g_1(r)\,\varepsilon(-\tau)\,z\left(\frac{tx}{2}\right), \qquad (1)$$

где $g_+(x)$, $\varepsilon(\tau)$, $g_1(t)$ задаются формулами (1), (4) и (6) п. 1 § 2. При этом

$$z^2 = t^2 + tx, \quad e^{2\tau} = \frac{t}{t+x}.$$

Поскольку матрице $\varepsilon(\tau)$ соответствует оператор умножения на $e^{(\omega-\lambda)\tau}$, матрице $z(t)$ — оператор умножения на $e^{\sigma t}$, то из формулы (1) вытекает, что

$$\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \mathbf{K}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ g_+(x))\,\mathbf{K}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ g_1(t))\,d\nu =$$

$$= e^{\frac{\sigma tx}{2}+\tau(\mu-\lambda)}\,\mathbf{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_1(r)).$$

Положим здесь $\sigma = -1$ и сравним элементы K_{++} слева и справа. Мы получим

$$\int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} K_{++}(\lambda, \nu; \chi; g_+(x))\, K_{++}(\nu, \mu; \chi; g_1(t))\, d\nu =$$
$$= e^{-\frac{tx}{2} + \tau(\mu - \lambda)} K_{++}(\lambda, \mu; \chi; g_1(r)).$$

Подставляя выражения для $K_{++}(\lambda, \nu; \chi; g_+(x))$ и т. д., приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} \Gamma(\nu)\, x^{-\nu} W_{\lambda - \nu/2,\ \mu + \nu/2}(t^2)\, d\nu =$$
$$= e^{-tx/2}\left(1 + \frac{x}{t}\right)^{\mu - 1/2} W_{\lambda, \mu}(t^2 + tx), \quad (2)$$

где

$$\operatorname{Re}\nu > 0 > \operatorname{Re}\left(\lambda - \mu - \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad t > 0, \quad x > 0.$$

Полученную формулу можно рассматривать как формулу обратного преобразования Меллина функции

$$F(\nu) = \Gamma(\nu)\, W_{\lambda - \nu/2,\ \mu + \nu/2}(t^2).$$

Поэтому в силу формулы обращения преобразования Меллина (см. п. 2 § 4 главы II) имеем при $t > 0$

$$\int\limits_0^\infty x^{\nu - 1} e^{-tx/2}\left(1 + \frac{x}{t}\right)^{\mu - 1/2} W_{\lambda, \mu}(t^2 + tx)\, dx = \Gamma(\nu)\, W_{\lambda - \nu/2, \mu + \nu/2}(t^2). \quad (3)$$

Положим теперь в формуле (1) $x \equiv -y < 0$, $t > 0$. Тогда, сравнивая элементы K_{-+}, получаем аналогичным путем при $0 < y < t$:

$$J_1 \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\mu + \nu + 1)}\, y^{-\nu} M_{\lambda - \nu/2,\ \mu + \nu/2}(t^2)\, d\nu =$$
$$= \frac{e^{ty/2}}{\Gamma(2\mu + 1)}\left(1 - \frac{y}{t}\right)^{\mu - 1/2} M_{\lambda, \mu}(t^2 - ty), \quad (4)$$

где

$$\operatorname{Re}\nu > 0 > \operatorname{Re}\left(\lambda - \mu - \frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{Re}\left(\lambda + \mu + \frac{1}{2}\right) > 0;$$

при $y \geqslant t > 0$ имеем $J_1 = 0$, где λ, μ, ν удовлетворяют тем же неравенствам.

В силу формулы обращения для преобразования Меллина имеем

$$\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\int_0^t y^{\nu-1}e^{ty/2}\left(1-\frac{y}{t}\right)^{\mu-1/2}M_{\lambda,\,\mu}(t^2-ty)\,dy=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\mu+\nu+1)}M_{\lambda-\nu/2,\,\mu+\nu/2}(t^2). \qquad (5)$$

Рассматривая произведение $g_+(x)\,g_2(t)$, приходим аналогичным путем к следующим соотношениям.

Если $0<x<t$, то

$$J_2\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu+\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}x^{-\nu}W_{\lambda+\nu/2,\,\mu+\nu/2}(t^2)\,d\nu=$$

$$=\frac{e^{-xt/2}}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\mu-1/2}W_{\lambda,\mu}(t^2-tx), \qquad (6)$$

где

$$\operatorname{Re}\nu>0>\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)\text{ и }\operatorname{Re}\left(\mu-\lambda-\frac{1}{2}\right)<0. \qquad (7)$$

Если же $x>t>0$, то

$$J_2=\frac{e^{-xt/2}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{t}-1\right)^{\mu-1/2}W_{-\lambda,\,\mu}(tx-t^2), \qquad (8)$$

где λ, μ, ν удовлетворяют тем же неравенствам (7).

Далее, при $0<x<t$ имеем

$$J_3\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+2\mu+1)}x^{-\nu}M_{\lambda+\frac{\nu}{2},\,\mu+\frac{\nu}{2}}(t^2)\,d\nu=$$

$$=\frac{e^{-xt/2}}{\Gamma(2\mu+1)}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\mu-1/2}M_{\lambda,\,\mu}(t^2-tx), \qquad (9)$$

где λ, μ, ν удовлетворяют тем же неравенствам (7). Если же $x>t>0$ и λ, μ, ν удовлетворяют неравенствам (7), то $J_3=0$.

Наконец, при $0<t<x$ имеем

$$J_4\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu\right)}{\Gamma(1-\nu)}x^{-\nu}W_{\lambda+\frac{\nu}{2},\,\mu+\frac{\nu}{2}}(t^2)\,d\nu=0, \qquad (10)$$

где

$$\operatorname{Re}\left(\lambda+\mu+\nu-\frac{1}{2}\right)<0,\quad \operatorname{Re}\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)>0,\quad \operatorname{Re}\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)<0.$$

Если же $x>t>0$, то

$$J_4=\frac{e^{-xt/2}}{\Gamma(2\mu+1)}\left(\frac{x}{t}-1\right)^{\mu-1/2}M_{-\lambda,\,\mu}(tx-t^2), \qquad (11)$$

где λ, μ, ν удовлетворяют неравенствам (7).

Применяя формулу обращения для преобразования Меллина, выводим из равенства (9) и из того факта, что $J_3=0$ при $x>t>0$, соотношение

$$\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\int\limits_0^t x^{\nu-1}e^{-xt/2}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}M_{\lambda,\,\mu}(t^2-tx)\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+2\mu+1)}M_{\lambda+\nu/2,\,\mu+\nu/2}(t^2). \qquad (12)$$

Из формул (6) и (8) аналогично выводится, что

$$\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\int\limits_t^\infty x^{\nu-1}e^{-xt/2}\left(\frac{x}{t}-1\right)^{\mu-1/2}M_{-\lambda,\,\mu}(tx-t^2)\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu\right)}{\Gamma(1-\nu)}W_{\lambda+\nu/2,\,\mu+\nu/2}(t^2). \qquad (13)$$

Отметим еще соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu\right)x^{-\nu}W_{\lambda+\nu/2,\,\mu+\nu/2}(t^2)\,d\nu=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)e^{\frac{xt}{2}}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}W_{\lambda,\,\mu}(tx+t^2), \qquad (14)$$

где

$$0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(\lambda-\mu)<\frac{1}{2}.$$

Оно вытекает из рассмотрения $g_+(-x)\,g_2(t)$ при $x>0$, $t>0$.

В силу формулы обращения Меллина имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)\int\limits_0^\infty x^{\nu-1}e^{xt/2}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}W_{\lambda,\,\mu}(tx+t^2)dx=$$

$$=\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu\right)W_{\lambda+\nu/2,\,\mu+\nu/2}(t^2). \qquad (15)$$

3. Континуальные теоремы сложения. Чтобы получить континуальные теоремы сложения для функций Уиттекера, рассмотрим матрицы вида

$$g_i(t_1)\,\varepsilon(\tau)\,g_j(t_2), \qquad (1)$$

где i и j равны 1 или 2, а матрицы $\varepsilon(\tau)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ задаются формулами (4), (6) и (7) п. 1 § 2. Как было доказано в п. 2 § 2, матрицу (1) можно представить в виде

$$g_i(t_1)\,\varepsilon(\tau)\,g_j(t_2)=\varepsilon(\tau_1)\,g_k(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b), \tag{2}$$

где $z(b)$ определяется формулой (3) п. 1 § 2, а $g_k(r)$ является матрицей одного из четырех типов:

$$g_1(r),\quad g_2(r),\quad g_+(r) \text{ или } g_-(r).$$

Мы знаем, что матрице $z(b)$ соответствует оператор умножения на $e^{\sigma b}$, а матрице $\varepsilon(\tau)$ — оператор умножения на $e^{\tau(\omega-\lambda)}$. Поэтому из равенства (2) вытекает, что

$$\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \mathrm{K}(\lambda,\ \nu;\ \chi;\ g_i(t_1)\,\mathrm{K}(\nu,\ \mu;\ \chi;\ g_j(t_2))\,e^{\tau(\mu-\nu)}\,d\nu=$$
$$=e^{\sigma b+\tau_1(\mu-\nu)}\,\mathrm{K}(\lambda,\ \mu;\ \chi;\ g_k(r)). \tag{3}$$

Соотношение (3) и является общей записью теорем сложения для функций Уиттекера. Чтобы получить из него конкретные формулы, надо рассмотреть различные выборы индексов i, j и значений t_1, τ, t_2.

Рассмотрим детально случай, когда $i=j=1$. Если $t_1\equiv t>0$, $t_2\equiv s>0$, то

$$g_1(t)\,\varepsilon(\tau)\,g_1(s)=\varepsilon(\tau_1)\,g_1(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b),$$

где

$$b=ts\operatorname{sh}\tau,\qquad r^2=t^2+2ts\operatorname{ch}\tau+s^2,\qquad e^{\tau_1}=\frac{t+se^\tau}{r}.$$

Используя эти формулы, и вычисляя в (3) значение K_{++}, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-\nu\tau}W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\,\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2)\,W_{\frac{\lambda+\mu-\nu}{2},\,\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}}(s^2)\,d\nu=$$
$$=\frac{ts}{r}\exp\left[(\lambda+\mu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{sh}\tau\right]W_{\lambda,\mu}(r^2), \tag{4}$$

где

$$\operatorname{Re}(\lambda-\mu)<\frac{1}{2}\ \text{ и }\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $t_1\equiv t>0$ и $t_2\equiv -s<0$, причем $t>s$. Тогда при $e^\tau<s/t$ имеем

$$g_1(t)\,\varepsilon(\tau)\,g_1(-s)=\varepsilon(\tau_1)\,g_2(r)\,\varepsilon(\tau-\tau_1)\,z(b),$$

где

$$b=-ts\operatorname{sh}\tau,\qquad r^2=2ts\operatorname{ch}\tau-t^2-s^2,\qquad e^{\tau_1}=\frac{t-se^\tau}{r}.$$

Аналогичным путем приходим к формуле

$$J_5 \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + \lambda + \mu + 1)} e^{-\tau\nu} \times$$
$$\times W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2}, \frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2) M_{\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}}(s^2)\, d\nu =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2\mu+1)} \frac{ts}{r} \exp\left[(\lambda+\mu)\tau - 2\mu\tau_1 + ts \operatorname{sh} \tau\right] M_{-\lambda, \mu}(r^2), \quad (5)$$

где

$$\operatorname{Re}\left(\lambda - \mu - \frac{1}{2}\right) < 0, \quad \operatorname{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0, \quad \operatorname{Re}\left(\lambda + \mu + \frac{1}{2}\right) > 0. \quad (6)$$

Если $e^\tau > s/t$, то имеем $J_5 = 0$, причем λ, μ, ν удовлетворяют неравенствам (6).

В случае $s > t > 0$ точно так же доказываются следующие соотношения.

Если $e^\tau < t/s$, то J_5 выражается формулой (5), а если $e^\tau > s/t$, то $J_5 = 0$. В случае же $\frac{t}{s} < e^\tau < \frac{s}{t}$ имеем

$$g_1(t)\, \varepsilon(\tau)\, g_1(-s) = \varepsilon(\tau_1)\, g_1(-r)\, \varepsilon(\tau - \tau_1)\, z(b),$$

где

$$b = -ts \operatorname{sh} \tau, \quad r^2 = s^2 + t^2 - 2ts \operatorname{ch} \tau, \quad e^{\tau_1} = \frac{se^\tau - t}{r}.$$

При этом

$$J_5 = \frac{1}{\Gamma(2\mu+1)} \frac{ts}{r} \exp\left[(\lambda+\mu)\tau - 2\mu\tau_1 + ts \operatorname{sh} \tau\right] M_{\lambda, \mu}(r^2), \quad (7)$$

где λ, μ, ν удовлетворяют неравенствам (6).

Случай, когда $i \neq j$, приводит к ряду новых формул того же типа, что и рассмотренные выше. Рассмотрим сначала произведение

$$g_1(t_1)\, \varepsilon(\tau)\, g_2(t_2).$$

Если $t_1 \equiv t > 0$, $t_2 \equiv s > 0$ и $e^\tau < s/t$, то

$$g_1(t_1)\, \varepsilon(\tau)\, g_2(s) = \varepsilon(\tau_1)\, g_2(r)\, \varepsilon(\tau - \tau_1)\, z(b),$$

где

$$b = ts \operatorname{ch} \tau, \quad r^2 = s^2 - t^2 - 2ts \operatorname{sh} \tau, \quad e^{\tau_1} = \frac{t + e^\tau s}{r}.$$

Точно так же получаем

$$J_6 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{-\tau\nu} W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\ \frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2)\, W_{\frac{\nu-\lambda-\mu}{2},\ \frac{\nu+\lambda+\mu}{2}}(s^2)\, d\nu =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\frac{ts}{r}\exp\left[(\lambda+\mu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{ch}\tau\right] W_{-\lambda,\mu}(r^2), \tag{8}$$

где

$$\operatorname{Re}\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)<0, \quad \operatorname{Re}\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)>0. \tag{9}$$

Далее,

$$J_7 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+\lambda+\mu+1)} e^{-\tau\nu} W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\ \frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2)\times$$
$$\times M_{\frac{\nu-\lambda-\mu}{2},\ \frac{\nu+\lambda+\mu}{2}}(s^2)\, d\nu =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\frac{ts}{r}\exp\left[(\lambda+\mu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{ch}\tau\right] M_{-\lambda,\mu}(r^2), \tag{10}$$

где

$$\operatorname{Re}\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)<0, \quad \operatorname{Re}\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)>0, \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \tag{11}$$

и, наконец,

$$J_8 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma(\mu-\lambda-\nu+1)} e^{-\tau\nu} M_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\ \frac{\mu-\lambda-\nu}{2}}(t^2)\times$$
$$\times W_{\frac{-\lambda-\mu+\nu}{2},\ \frac{-\lambda-\mu-\nu}{2}}(s^2)\, d\nu = 0, \tag{12}$$

где

$$\operatorname{Re}\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)<0, \quad \operatorname{Re}\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)>0, \ \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Если же $e^{\tau}>s/t$, то

$$b = ts\operatorname{ch}\tau, \quad r^2 = t^2-s^2+2ts\operatorname{sh}\tau, \qquad e^{\tau_1} = \frac{t+e^{\tau}s}{r}$$

и

$$J_6 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}\frac{ts}{2}\exp\left[(\lambda+\mu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{ch}\tau\right] W_{\lambda,\mu}(r^2), \tag{14}$$

$$J_7 = 0, \tag{15}$$

$$J_8 = \frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\frac{ts}{r}\exp\left[(\lambda+\mu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{ch}\tau\right] M_{\lambda,\mu}(r^2). \tag{16}$$

В работе [125] указаны еще некоторые формулы, получающиеся при рассмотрении произведения вида

$$g_2(t_2)\,\varepsilon(\tau)\,g_1(t_1).$$

4. Двойственные формулы. Формулы обращения Фурье в комплексной форме можно записать следующим образом:

$$\Phi(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{\nu x}\,dx,$$

где

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\Phi(\nu)\,e^{-\nu x}\,d\nu$$

(ср. п. 1 § 4 главы II). Пользуясь ими, получаем из формул предыдущего пункта ряд новых соотношений.

Так, из формулы (4) п. 3 получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[(\lambda+\mu+\nu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{sh}\tau\right]r^{-1}W_{\lambda,\mu}(r^2)\,d\tau=$$
$$=\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t^{-1}W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\,\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2)\,s^{-1}W_{\frac{\lambda+\mu-\nu}{2},\,\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}}(s^2),\qquad(1)$$

где

$$r^2=t^2+2ts\operatorname{ch}\tau+s^2,\qquad e^{\tau_1}=\frac{t+se^{\tau}}{r}.$$

Точно так же из формулы (5) п. 3 и равенства $J_3=0$ при $e^{\tau}>s/t$ получаем при $t>s>0$

$$\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\int_{-\infty}^{\ln\frac{s}{t}}\exp\left[(\lambda+\mu+\nu)\tau-2\mu\tau_1+ts\operatorname{sh}\tau\right]r^{-1}M_{-\lambda,\mu}(r^2)\,d\tau=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+\lambda+\mu+1)}t^{-1}W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\,\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2)\,s^{-1}M_{\frac{\lambda+\mu-\nu}{2},\,\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}}(s^2),\qquad(2)$$

где

$$r^2=2ts\operatorname{ch}\tau-t^2-s^2,\qquad e^{\tau_1}=\frac{t-se^{\tau}}{r}.$$

Далее, из формул (8) и (11) п. 3 вытекает, что

$$\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\int_{-\infty}^{\ln\frac{s}{t}} \exp\left[(\lambda+\mu+\nu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{ch}\tau\right] r^{-1}M_{-\lambda,\mu}(r^2)\,d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+\lambda+\mu+1)}t^{-1}W_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}}(t^2)\,s^{-1}M_{\frac{\nu-\lambda-\mu}{2},\frac{\nu+\lambda+\mu}{2}}(s^2), \quad (3)$$

где

$$r^2=s^2-t^2-2ts\operatorname{sh}\tau,\qquad e^{\tau_1}=\frac{t+e^{\tau}s}{r},$$

а из формул (9) и (12) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}\int_{\ln\frac{s}{t}}^{\infty} \exp\left[(\lambda+\mu+\nu)\tau-2\mu\tau_1-ts\operatorname{ch}\tau\right] M_{\lambda,\mu}(r^2)\,d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma(\mu-\lambda-\nu+1)}t^{-1}M_{\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\frac{\mu-\lambda-\nu}{2}}(t^2)\,s^{-1}W_{-\frac{\lambda-\mu+\nu}{2},\frac{-\lambda-\mu-\nu}{2}}(s^2), \quad (4)$$

где

$$r^2=t^2-s^2+2ts\operatorname{sh}\tau,\qquad e^{\tau_1}=\frac{t+e^{\tau}s}{r}.$$

5. Вырожденные случаи теорем сложения. При некоторых соотношениях между числами t_1, τ, t_2 матрица $g_i(t_1)$, $\varepsilon(\tau)$, $g_j(t_2)$ выражается не через $g_1(r)$ или $g_2(r)$, а через $g_+(r)$ или $g_-(r)$. В этих случаях соответствующие интегралы выражаются не через функции Уиттекера, а через степенную функцию. Укажем соответствующие формулы.

Если $i=j=1$, $t>s>0$ и $e^{\tau}=s/t$, то

$$g_1(t)\,\varepsilon(\tau)\,g_1(-s)=\varepsilon(\tau)\,g_-(r)\,z(b),$$

где

$$r=\frac{t^2-s^2}{s},\qquad b=\frac{t^2-s^2}{2}.$$

Так как $K_{+-}[g_-(r)]=0$, то интеграл J_5 из п. 3 обращается при $e^{\tau}=s/t$, $t>s>0$ в нуль.

Если $s>t>0$, то при $e^{\tau}=t/s$

$$g_1(t)\,\varepsilon(\tau)\,g_1(-s)=\varepsilon(\tau)\,g_+(-r)\,z(b),$$

где

$$r=\frac{s^2-t^2}{s}, \qquad b=\frac{s^2-t^2}{2}.$$

Отсюда выводим, что при $s>t>0$, $e^\tau=t/s$ интеграл J_5 из п. 3 принимает значение

$$J_5=\frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}t^{\lambda-\mu+1}s^{1-\lambda-\mu}(s^2-t^2)^{2\mu}\exp\left[\frac{t^2-s^2}{2}\right].$$

Аналогично доказывается, что если $s>t>0$ и $e^\tau=s/t$, то $J_5=0$.

Укажем еще следующие соотношения того же типа. Если $t>0$, $s>0$, $e^\tau=s/t$, то интеграл J_6 из п. 3 принимает значение

$$J_6=\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}t^{\mu-\lambda+1}\times$$
$$\times s^{\lambda+\mu+1}(s^2+t^2)^{-2\mu}\exp\left[-\frac{t^2+s^2}{2}\right].$$

Интегралы же J_7 и J_8 из п. 3 обращаются при $t>0$, $s>0$, $e^\tau=s/t$ в нуль.

§ 5. Многочлены Лагерра и представления группы комплексных треугольных матриц третьего порядка

1. Определение многочленов Лагерра. Если в вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x)$ параметр α является целым отрицательным числом или нулем, то ряд обрывается. Таким образом, $\Phi(-n;\ \gamma;\ x)$ является многочленом. Рассмотрим многочлены

$$L_n^\alpha(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\Phi(-n;\ \alpha+1;\ x), \tag{1}$$

называемые *многочленами Лагерра.*

Многие свойства многочленов Лагерра непосредственно вытекают из соответствующих свойств вырожденной гипергеометрической функции. Так, из разложения (1) п. 2 § 1 вытекает, что

$$L_n^\alpha(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-m)!\,\Gamma(\alpha+m+1)}x^m. \tag{2}$$

Далее, многочлены Лагерра являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$z\frac{d^2z}{du^2}+(\alpha-z+1)\frac{du}{dz}+nu=0, \tag{3}$$

непосредственно вытекающего из уравнения (3) п. 2 § 1.

Из формулы (2) легко следует, что

$$L_n^\alpha(x)=\frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}). \tag{4}$$

Для доказательства достаточно использовать формулу Лейбница. Мы приведем сейчас другое доказательство равенства (4). Для этого заметим, что в силу формулы (1) п. 1 § 1 и (2) п. 2 § 1 имеет место следующее интегральное представление вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x)$:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x)=\frac{\Gamma(\gamma)\,e^x}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{-ux}u^{\gamma-\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}du. \tag{5}$$

При $\alpha=-n$ оно теряет смысл. Но в теории обобщенных функций [1]) доказывается, что

$$\lim_{\alpha\to -n}\frac{(1-u)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}=\delta^{(n)}(1-u).$$

Поэтому, переходя в равенстве (5) к пределу при $\alpha\to -n$, получаем

$$\Phi(-n;\ \gamma;\ x)=\frac{\Gamma(\gamma)\,e^x}{\Gamma(\gamma+n)}\,\frac{d^n}{du^n}\left(e^{-ux}u^{\gamma-\alpha-1}\right)\Big|_{u=1}.$$

Принимая во внимание соотношение (1), имеем

$$L_n^\alpha(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{du^n}\left[e^{-ux}u^{\gamma-\alpha-1}\right]\Big|_{u=1}.$$

Подстановка $ux=y$ преобразует это соотношение к виду (4).

Установим в заключение соотношение ортогональности для многочленов Лагерра. Оно имеет следующий вид:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m^\alpha(x)\,L_n^\alpha(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{если}\quad m\neq n,\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}, & \text{если}\quad m=n.\end{cases} \tag{6}$$

Справедливость равенства (6) при $m<n$ легко доказывается путем подстановки вместо $L_m^\alpha(x)$ и $L_n^\alpha(x)$ из выражения (4) и $(m+1)$-кратного интегрирования по частям. Так как $L_m^\alpha(x)$ — многочлен m-й степени, то он при этом обращается в нуль.

В случае $m=n$ доказательство проводится точно так же. После n-кратного интегрирования по частям получаем

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,[L_n^\alpha(x)]^2\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+n}dx.$$

---

[1]) См. [18], глава 1, § 3, п. 5.

Применение равенства (1) п. 4 § 1 главы V приводит к требуемому результату.

В заключение отметим, что при $|z|<1$ имеет место равенство

$$e^{-xz}(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha-n}(x)\,z^n, \tag{7}$$

непосредственно доказываемое разложением функций в левой части по степеням z и умножением получающихся рядов.

2. Группа комплексных треугольных матриц третьего порядка и многочлены Лагерра. Чтобы вывести теорему сложения для многочленов Лагерра, установим связь между этими многочленами и представлениями группы G_1 матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — комплексные числа, $c \neq 0$. Среди представлений этой группы есть представления, являющиеся «аналитическим продолжением» представления $T_\chi(g)$ группы G из п. 3 § 2. Они задаются формулой

$$T_\chi(g)f(z)=c^{\omega}e^{\sigma(dz+b)}f(cz+a),$$

причем операторы $T_\chi(g)$ действуют в пространстве целых аналитических функций экспоненциального типа.

Естественным базисом в пространстве целых функций является набор одночленов $\{z^k\}$, $0 \leqslant k < \infty$. Вычислим матричные элементы представления $T_\chi(g)$ в этом базисе. Мы имеем

$$T_\chi(g)(z^n)=c^{\omega}e^{\sigma(dz+b)}(cz+a)^n.$$

Отсюда, используя равенство (7) п. 1, получаем

$$T_\chi(g)(z^n)=\sum_{k=0}^{\infty} c^{\omega+k}a^{n-k}e^{\sigma b}\,L_k^{n-k}\left(-\frac{\sigma a d}{c}\right)z^k.$$

Следовательно, искомые матричные элементы выражаются следующим образом:

$$t_{kn}^{\chi}(g)=c^{\omega+k}a^{n-k}e^{\sigma b}L_k^{n-k}\left(-\frac{\sigma a b}{c}\right). \tag{1}$$

Используя теперь равенство

$$T_\chi(g_1)\,T_\chi(g_2)=T_\chi(g_1g_2),$$

легко вывести формулу сложения для многочленов Лагерра. Именно, полагая $\sigma=-1$,

$$g_1=\begin{pmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 0 & c_1 & d_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad g_2=\begin{pmatrix}1 & a_2 & b_2\\ 0 & c_2 & d_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

и вводя числа a, b, x, y соотношениями

$$a=a_1,\quad b=\frac{a_2}{c_2},\quad x=\frac{d_1}{c_1},\quad y=d_2,$$

получаем

$$L_k^\alpha[(a+b)(x+y)]=(a+b)^{-\alpha}e^{ay}\sum_{m=-k}^{\infty}a^m b^{\alpha-m}L_k^m(ax)\,L_{k+m}^{\alpha-m}(by), \tag{2}$$

где $|a|<|b|$ (мы заменили α на $\alpha+k$ и m на $m+k$). В частности, полагая

$$a=r_1e^{\tau/2},\quad x=r_1e^{-\tau/2},\quad b=r_2e^{-\tau/2},\quad y=r_2e^{\tau/2},$$

где $r_1>0$, $r_2>0$, $-2\pi<\tau<2\pi$, получаем соотношение

$$L_k^\alpha(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\operatorname{ch}\tau)=$$

$$=\left(\frac{r_2}{r_1e^\tau+r_2}\right)^\alpha\exp(r_1r_2e^\tau)\sum_{m=-k}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m e^{m\tau}L_k^m(r_1^2)\,L_{k+m}^{\alpha-m}(r_2^2), \tag{3}$$

где $|r_1e^\tau|<r_2$. При $\tau=e^{i\varphi}$ соотношение (3) принимает следующий вид:

$$L_k^\alpha(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi)=$$

$$=\left(\frac{r_2}{r_1e^{i\varphi}+r_2}\right)^\alpha e^{r_1r_2\cos\varphi}[\cos(r_1r_2\sin\varphi]+i\sin(r_1r_2\sin\varphi)]\times$$

$$\times\sum_{m=-k}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m L_k^m(r_1^2)\,L_{k+m}^{\alpha-m}(r^2)\,e^{im\varphi}, \tag{4}$$

где $-\pi\leqslant\varphi<\pi$, $0<r_1<r_2$.

ГЛАВА IX

ГРУППА ВРАЩЕНИЙ n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ ГЕГЕНБАУЭРА

Рассмотренные до сих пор классы специальных функций (функции и многочлены Лежандра, функции Бесселя, функции Ганкеля, Макдональда, Уиттекера) были связаны с представлениями простейших групп, состоящих из матриц второго или третьего порядка. Мы переходим сейчас к изучению специальных функций, связанных с представлениями более сложных групп. Начнем с группы $SO(n)$ вращений n-мерного евклидова пространства. С этой группой связаны специальные функции, называемые *многочленами Гегенбауэра.*

§ 1. Группа $SO(n)$

1. Сферические координаты. Будем обозначать векторы n-мерного вещественного евклидова пространства E_n через $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, а их длину будем обозначать через $\|\mathbf{x}\|$ или r. Совокупность векторов вида $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ будем обозначать через E_k, единичную сферу в E_n — через S^{n-1}. Очевидно, что S^{n-1} можно отождествить с совокупностью векторов единичной длины. Как правило, единичные векторы будем обозначать через $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$.

Введем теперь в пространстве E_n сферические координаты $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Они связаны с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2 \sin\theta_1, \\ x_2 &= r \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2 \cos\theta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r \sin\theta_{n-1} \cos\theta_{n-2}, \\ x_n &= r \cos\theta_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

При этом числа $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ меняются в следующих пределах:

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant r < \infty, \\ &0 \leqslant \theta_1 < 2\pi, \\ &0 \leqslant \theta_k < \pi, \qquad k \neq 1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Очевидно, что для любой точки $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_n)$ из E_n найдется система параметров $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, связанная с ней формулами (1) и лежащая в области (2). При этом почти для всех точек $\mathbf{x}$ [1]) такая система параметров однозначно определена.

Параметры $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ выражаются через декартовы координаты по формулам

$$\cos\theta_k = \frac{x_{k+1}}{r_{k+1}}, \tag{3}$$

$$\sin\theta_k = \frac{r_k}{r_{k+1}}, \tag{4}$$

$$r = r_n, \tag{5}$$

где положено

$$r_k^2 = x_1^2 + \ldots + x_k^2. \tag{6}$$

При фиксированном r точка $\mathbf{x}(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ пробегает сферу радиуса r. Поэтому числа $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ можно рассматривать как координаты на единичной сфере S^{n-1}. Мы будем называть их *сферическими координатами.*

Найдем выражение для меры на сфере S^{n-1}, инвариантной при вращениях сферы вокруг начала координат. Заметим, что мера $d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_n$ в евклидовом пространстве инвариантна относительно этих вращений, равно как и обобщенная функция $\delta(r-1)$. Поэтому, полагая для любой непрерывной функции $f(\xi)$ на S^{n-1}

$$\int f(\xi)\, d\xi = A \int f(\mathbf{x})\, \delta(r-1)\, d\mathbf{x}, \tag{7}$$

где A — любое положительное число, мы и получим инвариантную меру на S^{n-1} (через $f(\mathbf{x})$ в этом равенстве обозначена любая непрерывная функция в евклидовом пространстве, совпадающая на S^{n-1} с функцией $f(\xi)$).

В декартовых координатах формула (7) принимает вид

$$d\xi = \frac{A\, dx_1 \ldots dx_{n-1}}{|x_n|}. \tag{8}$$

Перейдем от декартовых координат к сферическим координатам $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Элементарный подсчет показывает, что

$$\frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{|x_n|} = \sin^{n-2}\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}.$$

Поэтому

$$d\xi = A \sin^{n-2}\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}.$$

---

[1]) Мы говорим, что некоторое утверждение справедливо *почти для всех точек* многообразия $\mathfrak{M}$, если точки, где оно неверно, образуют многообразие меньшей размерности.

Подберем постоянную A так, чтобы мера всей сферы равнялась единице. Так как

$$\int_0^{\pi} \sin^{k-1}\theta_k \, d\theta_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} d\theta_1 = 2\pi ,$$

то $A = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}$. Поэтому

$$d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2 \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}. \tag{9}$$

2. Описание группы $SO(n)$. *Вращениями* евклидова пространства E_n называют линейные преобразования g этого пространства, не меняющие его ориентации и оставляющие инвариантным расстояние точек от начала координат:

$$\| g\mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} \|.$$

Вращения n-мерного евклидова пространства E_n образуют группу, которую мы будем обозначать через $SO(n)$.

Выберем в пространстве E_n ортонормированный базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Обозначим через $SO(k)$ подгруппу группы $SO(n)$, состоящую из вращений, оставляющих инвариантными векторы $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ этого базиса. Сферу S^{n-1} можно отождествить с пространством левых классов смежности группы $SO(n)$ по подгруппе $SO(n-1)$. В самом деле, вращения из подгруппы $SO(n-1)$ (и только они) оставляют инвариантным вектор ξ_n. Иными словами, эта подгруппа является стационарной подгруппой точки $\xi_n(0, 0, \ldots, 1)$ единичной сферы. Так как $SO(n)$ является транзитивной группой преобразований сферы S^{n-1}, то сферу S^{n-1} можно отождествить с $SO(n)/SO(n-1)$. При этом отождествлении левому смежному классу, состоящему из элементов вида $\{gh\}$, $h \in SO(n-1)$, ставится в соответствие вектор $g\xi_n$. В дальнейшем вектор $g\xi_n$ будем часто обозначать через ξ_g.

Каждому элементу g_0 из группы $SO(n)$ соответствует преобразование

$$\{gh\} \to \{g_0 gh\}, \quad h \in SO(n-1), \tag{1}$$

в фактор-пространстве $SO(n)/SO(n-1)$. Легко проверить, что при этом имеет место равенство

$$\xi_{g_0 g} = g_0 \xi_g. \tag{2}$$

Это равенство означает, что преобразованиям (1) в фактор-пространстве соответствуют вращения сферы.

3. Углы Эйлера. Мы видели в п. 6 § 1 главы III, что весьма удобными параметрами на группе $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства являются углы Эйлера φ, θ, ψ. Обобщим эту параметризацию на группу $SO(n)$ при любом n.

Обозначим через $g_{jk}(\alpha)$ вращение на угол α в плоскости (x_j, x_k), ориентированной так, что положительным считается вращение от вектора ξ_j к вектору ξ_k. Для краткости вращение $g_{k+1,k}(\alpha)$ будем обозначать через $g_k(\alpha)$. Покажем, что любое вращение g из группы $SO(n)$ можно представить в виде произведения вращений $g_k(\alpha)$.

Теорема 1. *Любое вращение g из группы $SO(n)$ может быть представлено в виде*

$$g = g^{(n-1)} \dots g^{(1)}, \tag{1}$$

где

$$g^{(k)} = g_1(\theta_1^k) \dots g_k(\theta_k^k). \tag{2}$$

Доказательство. Теорема очевидна при $n=2$, так как в этом случае g является вращением в плоскости (x_1, x_2), $g = g_1(\theta)$. Предположим, что она доказана для группы $SO(n-1)$, и докажем ее для $SO(n)$. Пусть g — элемент группы $SO(n)$. Обозначим через $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$ сферические координаты вектора $g\xi_n$ и рассмотрим вращение

$$g^{(n-1)} = g_1(\theta_1^{n-1}) \dots g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}). \tag{3}$$

Подсчитаем, в какой вектор переходит вектор ξ_n при вращении $g^{(n-1)}$. Вращение $g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})$ записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x'_{n-1} &= x_{n-1}\cos\theta_{n-1}^{n-1} + x_n \sin\theta_{n-1}^{n-1}, \\ x'_n &= -x_{n-1}\sin\theta_{n-1}^{n-1} + x_n\cos\theta_{n-1}^{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Поэтому вектор $\xi_n(0, 0, \dots, 1)$ переходит при этом вращении в вектор $g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})\xi_n$ с координатами

$$(0, 0, \dots, \sin\theta_{n-1}^{n-1}, \cos\theta_{n-1}^{n-1}).$$

Повторяя это рассуждение и принимая во внимание формулу (3), убеждаемся, что $g^{(n-1)}\xi_n = g\xi_n$. Поэтому $[g^{(n-1)}]^{-1} g\xi_n = \xi_n$ и, следовательно, вращение $[g^{n-1}]^{-1} g$ принадлежит подгруппе $SO(n-1)$. По предположению индукции, имеем

$$[g^{n-1}]^{-1} g = g^{(n-2)} \dots g^{(1)},$$

где $g^{(k)}$ — вращение вида (2). Поэтому

$$g = g^{(n-1)} \dots g^{(1)}.$$

Теорема доказана.

Легко показать, что почти для всех элементов g группы $SO(n)$ запись (1) единственна (исключение представляют случаи, когда один из углов θ_k^k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, обращается в нуль или π). Назовем числа

$$\theta_j^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{5}$$

углами Эйлера вращения g. Эти числа однозначно определяют g. При этом из проведенного построения видно, что углы Эйлера изменяются в следующих границах:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \theta_1^k < 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta_j^k < \pi, \quad j \neq 1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Из проведенного построения ясен геометрический смысл углов Эйлера: углы $\theta_1^k, \ldots, \theta_k^k$ являются сферическими координатами вектора

$$\eta_{k+1} = [g^{(n-1)} \ldots g^{(k+1)}]^{-1} g\xi_{k+1}, \tag{7}$$

где вращения $g^{(j)}$ определяются формулами (4).

Отметим, что вращение g можно записать не только в виде (1), но и в виде

$$g = g_{(1)} g_{(2)} \cdots g_{(n-1)}, \tag{8}$$

где

$$g_{(k)} = g_k(\theta_k^{n-1})\, g_{k-1}(\theta_{k-1}^{n-2}) \ldots g(\theta_1^{n-k}). \tag{9}$$

Это следует из того, что вращения $g_j(\alpha)$ и $g_k(\beta)$ перестановочны при $|j-k| > 1$.

4. Инвариантное интегрирование. Из геометрического смысла углов Эйлера легко получить выражение для инвариантной меры на группе $SO(n)$. Именно, это выражение имеет вид

$$dg = A_n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{k} \sin^{j-1} \theta_j^k \, d\theta_j^k, \tag{1}$$

где

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2\pi^{k/2}}. \tag{2}$$

Действительно, вращение g однозначно определяется векторами

$$\eta_{k+1} = [g^{(n-1)} \ldots g^{(k+1)}]^{-1} g\xi_{k+1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

лежащими на сферах S^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Легко видеть, что при замене вращения g на вращение gg_0 векторы η_k заменяются векторами $g_0^{(k)} \eta_k$, где $g_0^{(k)}$ — некоторое вращение сферы S^k (зависящее, вообще говоря, не только от g_0, но и от g).

Так как при вращениях $g_0^{(k)}$ евклидовы меры $d\eta_{k+1}$ на сферах S^k остаются инвариантными, то мера

$$dg = d\eta_2 \dots d\eta_n$$

на группе $SO(n)$ инвариантна при замене g на gg_0.

Но углы Эйлера $\theta_1^k, \dots, \theta_k^k$ являются сферическими координатами вектора η_{k+1}. Учитывая выражение евклидовой меры на сфере S^k в сферических координатах (см. формулу (9) п. 1), мы приходим к выражению (1) для инвариантной меры dg на группе $SO(n)$.

Из равенства (1) п. 3 вытекает, что каждый элемент g группы $SO(n)$ задается элементом

$$h = g^{(n-2)} \dots g^{(1)}$$

подгруппы $SO(n-1)$ и точкой η на сфере S^{n-1} со сферическими координатами $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$. Из формулы (1) вытекает, что

$$dg = dh\, d\eta. \tag{3}$$

§ 2. Представления класса 1 группы $SO(n)$ и гармонические многочлены

1. Квазирегулярное представление. Изучение представлений группы $SO(n)$ начнем с рассмотрения ее квазирегулярного представления. Группа $SO(n)$ является транзитивной группой преобразований n-мерной единичной сферы S^{n-1}. Обозначим через $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$ пространство функций $f(\xi)$ на сфере S^{n-1}, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2 = \int_{S^{n-1}} |f(\xi)|^2\, d\xi \tag{1}$$

($d\xi$ — нормированная евклидова мера на S^{n-1}). Каждому элементу g группы $SO(n)$ соответствует оператор $L(g)$ в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$, переводящий функцию $f(\xi)$ в функцию

$$L(g) f(\xi) = f(g^{-1}\xi). \tag{2}$$

Очевидно, что $L(g_1 g_2) = L(g_1) L(g_2)$ и потому $L(g)$ является представлением группы $SO(n)$.

Так как евклидова мера $d\xi$ на S^{n-1} инвариантна относительно вращений, то имеет место равенство

$$\|L(g) f\|^2 = \int_{S^{n-1}} |f(g^{-1}\xi)|^2\, d\xi = \int_{S^{n-1}} |f(\xi)|^2\, d\xi = \|f\|^2. \tag{3}$$

Таким образом, представление $L(g)$ унитарно относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int_{S^{n-1}} f_1(\xi) \overline{f_2(\xi)}\, d\xi. \tag{4}$$

Это унитарное представление группы $SO(n)$ будем называть *квазирегулярным представлением*.

2. Представления в пространствах однородных многочленов. Квазирегулярное представление группы $SO(n)$ приводимо. Ниже будут построены неприводимые представления этой группы, на которые разлагается представление $L(g)$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{nl}$ пространство однородных многочленов степени l от n переменных. Каждый многочлен $f(\mathbf{x})$ из пространства $\mathfrak{R}^{nl}$ однозначно определяется своими значениями на сфере S^{n-1}:

$$f(r\xi) = r^l f(\xi). \tag{1}$$

Поэтому можно рассматривать $\mathfrak{R}^{nl}$ как подпространство в $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. Очевидно, что при преобразовании

$$L(g)f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}) \tag{2}$$

однородные многочлены переходят в однородные же многочлены, а потому подпространство $\mathfrak{R}^{nl}$ инвариантно в $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. Представление $L(g)$ задает, таким образом, представление $L^{nl}(g)$ в инвариантном подпространстве $\mathfrak{R}^{nl}$:

$$L^{nl}(g)f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}), \qquad f(x) \in \mathfrak{R}^{nl}. \tag{3}$$

Однако и представления $L^{nl}(g)$ являются приводимыми. В самом деле, при вращениях g из $SO(n)$ расстояние $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ точки $\mathbf{x}$ из E_n от начала координат остается неизменным. Поэтому подпространство $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ многочленов вида $r^2 f(\mathbf{x})$, где $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, инвариантно относительно операторов $L^{nl}(g)$.

Обозначим через $T^{nl}(g)$ представление, заданное представлением $L^{nl}(g)$ в фактор-пространстве $\mathfrak{A}^{nl} \equiv \mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Мы докажем ниже, что это представление является неприводимым унитарным представлением группы $SO(n)$ и что квазирегулярное представление этой группы является прямой суммой представлений $T^{nl}(g)$:

$$L(g) = \sum_{l=0}^{\infty} T^{nl}(g). \tag{4}$$

Таким образом, представления $T^{nl}(g)$ могут быть охарактеризованы как неприводимые компоненты квазирегулярного представления группы $SO(n)$.

Мы докажем далее, что эти представления допускают другую характеристику. Именно, представлениями $T^{nl}(g)$ исчерпываются неприводимые представления $T(g)$ группы $SO(n)$, в пространствах которых есть вектор $\mathbf{f}_0$, инвариантный относительно всех операторов $T(h)$, $h \in SO(n-1)$:

$$T(h)\,\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0, \qquad h \in SO(n-1), \tag{5}$$

т. е. *представления класса* 1 относительно подгруппы $SO(n-1)$. Итак, ниже будет доказано, что *представления* $T^{nl}(g)$ *являются* *неприводимыми представлениями класса* 1 *группы* $SO(n)$, *причем каждое неприводимое представление класса* 1 *этой группы эквивалентно одному из представлений* $T^{nl}(g)$.

3. Гармонические многочлены. Чтобы доказать утверждения, сформулированные в конце предыдущего пункта, построим другую реализацию представления $T^{nl}(g)$, а именно, реализацию в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных многочленов степени l от n переменных.

Многочлен $f(\mathbf{x})$ называется *гармоническим*, если $\Delta f = 0$, где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

— *оператор Лапласа*. Нам понадобятся в дальнейшем некоторые соотношения, связанные с оператором Лапласа.

Покажем сначала, что если $f_1(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n,\, l-2}$, то

$$\Delta(r^2 f_1) = (2n + 4l - 8) f_1 + r^2 \Delta f_1. \tag{2}$$

В самом деле, непосредственное вычисление показывает, что

$$\Delta(r^2 f_1) = 2n f_1 + 4 \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + r^2 \Delta f_1. \tag{3}$$

Но так как $f_1(\mathbf{x})$ — однородный многочлен степени $l-2$, то по формуле Эйлера имеем

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = (l-2) f_1,$$

откуда и вытекает равенство (2).

Повторно применяя формулу (2), легко показать, что если $f_k(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n,\, l-2k}$, то

$$\Delta(r^{2k} f_k) = 2k(n + 2l - 2k - 2) r^{2k-2} f_k + r^{2k} \Delta f_k. \tag{4}$$

Из равенства (2) вытекает следующее утверждение:

Если $h(\mathbf{x})$ — *однородный гармонический многочлен степени* l, *то*

$$x_j h(\mathbf{x}) - \frac{1}{n+2l-2} r^2 \frac{\partial h}{\partial x_j} \tag{5}$$

является однородным гармоническим многочленом степени $l+1$.

В самом деле, $\Delta h = 0$, поэтому

$$\Delta[x_j h(\mathbf{x})] = x_j \Delta h + 2 \frac{\partial h}{\partial x_j} = 2 \frac{\partial h}{\partial x_j}. \tag{6}$$

С другой стороны, так как $\frac{\partial h}{\partial x_j} \in \mathfrak{R}^{n,\, l-1}$, то по формуле (2) имеем

$$\Delta\left(r^2 \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = (2n + 4l - 4) \frac{\partial h}{\partial x_j} + r^2 \Delta\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = 2(n + 2l - 2) \frac{\partial h}{\partial x_j}. \tag{7}$$

Сравнивая равенства (6) и (7), получаем

$$\Delta\left[x_j h(\mathbf{x}) - \frac{1}{n+2l-2} r^2 \frac{\partial h}{\partial x_j}\right] = 0. \tag{8}$$

Наконец, заметим, что *если $h(\mathbf{x})$ — гармонический многочлен, то для любого j многочлен $\partial h/\partial x_j$ также является гармоническим.* В самом деле,

$$\Delta\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(\Delta h)}{\partial x_j}.$$

Поэтому, если $\Delta h = 0$, то и $\Delta\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = 0$.

4. Инвариантность подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$. Пространство $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l от n переменных является подпространством пространства $\mathfrak{R}^{nl}$ всех однородных многочленов степени l от n переменных. Покажем, что это подпространство инвариантно относительно операторов представления $L^{nl}(g)$. Для этого воспользуемся следующим важным свойством оператора Лапласа.

Оператор Лапласа перестановочен с операторами движения в евклидовом пространстве: если g — движение, то

$$\Delta[f(g^{-1}\mathbf{x})] = (\Delta f)(g^{-1}\mathbf{x}). \tag{1}$$

Равенство (1) проще всего доказать, заметив, что

$$\Delta f(\mathbf{a}) = \lim_{r\to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\left[f_r(\mathrm{a}) - f(\mathrm{a})\right]}{\pi^{n/2} r^2}, \tag{2}$$

где $f_r(\mathbf{a})$ — среднее значение функции $f(\mathbf{x})$ на сфере $S^{n-1}(\mathbf{a}, r)$ радиуса r с центром в точке $\mathbf{a}$. Равенство (2) выводится путем разложения функции $f(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{a}$ и почленного интегрирования этого ряда по сфере $S^{n-1}(\mathbf{a}, r)$. Поскольку оператор в правой части равенства (2) перестановочен с движениями евклидова пространства, оператор Лапласа тоже перестановочен с этими движениями.

Из равенства (2) вытекает, что *подпространство $\mathfrak{H}^{nl}$ инвариантно относительно операторов представления*

$$L^{nl}(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}), \qquad f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{nl}. \tag{3}$$

В самом деле, если $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$, то в силу формулы (2) мы имеем $\Delta[f(g^{-1}\mathbf{x})] = 0$. Поэтому из $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{H}^{nl}$ вытекает, что

$$L^{nl}(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}) \in \mathfrak{H}^{nl}. \tag{4}$$

5. Гармоническая проекция многочлена. Представление в пространстве гармонических многочленов. Докажем теперь, что инвариантное подпространство $\mathfrak{H}^{nl}$ является дополнением в $\mathfrak{R}^{nl}$ инвариантного подпространства $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Иными словами, докажем следующее утверждение:

Пространство $\mathfrak{R}^{nl}$ однородных многочленов степени l от n переменных является прямой суммой подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l от n переменных и подпространства $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ многочленов вида $r^2f_1(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})\in\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$:

$$\mathfrak{R}^{nl}=\mathfrak{H}^{nl}+r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}. \tag{1}$$

Сначала докажем, что

$$\mathfrak{H}^{nl}\cap r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}=0, \tag{2}$$

т. е. что если $f_1(\mathbf{x})\in\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ и $f_1(\mathbf{x})\neq 0$, то $\Delta(r^2f_1)\neq 0$. В самом деле, если $f(\mathbf{x})\in r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, то $f(\mathbf{x})$ можно представить в виде $f(\mathbf{x})=r^{2k}f_k(\mathbf{x})$, где $f_k(\mathbf{x})\in\mathfrak{R}^{n,\,l-2k}$, $0<k\leqslant[l/2]$, $f_k(\mathbf{x})$ не делится на r^2. Предположим, что $\Delta f=0$. Тогда по формуле (4) п. 3 имеем

$$2k(n+2l-2k-2)\,r^{2k-2}f_k+r^{2k}\Delta f_k=0. \tag{3}$$

Так как $k\geqslant 1$ и $l\geqslant 2k$, то $k(n+2l-2k-2)>0$. Сокращая на r^{2k-2}, убеждаемся, что f_k делится на r^2 вопреки предположению. Тем самым доказано равенство $\mathfrak{H}^{nl}\cap r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}=0$.

Теперь докажем, что подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$ и $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ порождают все пространство $\mathfrak{R}^{nl}$. Для этого вычислим размерности указанных подпространств. Обозначим размерность пространства $\mathfrak{R}^{nl}$ через $r(n,\,l)$. Располагая однородные многочлены по степеням x_1, убеждаемся, что

$$r(n,\,l)=r(n-1,\,l)+r(n-1,\,l-1)+\ldots+r(n-1,\,0). \tag{4}$$

Кроме того, ясно, что

$$r(1,\,l)=l. \tag{5}$$

Отсюда получаем по индукции

$$r(n,\,l)=\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\,l!}. \tag{6}$$

Так как размерность пространства $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ равна размерности пространства $\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, а $\mathfrak{H}^{nl}\cap r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}=0$, то для размерности $h(n,\,l)$ пространства $\mathfrak{H}^{nl}$ выполняется неравенство

$$h(n,\,l)\leqslant r(n,\,l)-r(n,\,l-2). \tag{7}$$

С другой стороны, многочлен Δf, $f\in\mathfrak{R}^{nl}$, принадлежит пространству $\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Поэтому условие $\Delta f=0$ налагает не более, чем $r(n,\,l-2)$ линейных соотношений на коэффициенты многочлена $f(\mathbf{x})$. Отсюда вытекает, что размерность пространства $\mathfrak{H}^{nl}$ не меньше, чем $r(n,\,l)-r(n,\,l-2)$:

$$h(n,\,l)\geqslant r(n,\,l)-r(n,\,l-2). \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует

$$h(n, l) = r(n, l) - r(n, l-2), \tag{9}$$

или, что то же,

$$\dim \mathfrak{H}^{nl} = \dim \mathfrak{R}^{nl} - \dim \mathfrak{R}^{n, l-2} = \dim \mathfrak{R}^{nl} - \dim r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2}. \tag{10}$$

Из соотношений (2) и (10) вытекает, что подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$ и $r^2\mathfrak{R}^{n, l-2}$ порождают все пространство $\mathfrak{R}^{nl}$ и потому равенство (1) доказано.

Равенство (1) показывает, что *представление* $T^{nl}(g)$ *группы* $SO(n)$ *в фактор-пространстве* $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n, l-2}$ *эквивалентно сужению представления* $L(g)$ *на инвариантное подпространство* $\mathfrak{H}^{nl}$. Будем обозначать это представление тем же символом $T^{nl}(g)$. Однако в тех случаях, когда надо будет различать указанные реализации, будем обозначать реализацию в $\mathfrak{H}^{nl}$ через $H^{nl}(g)$.

Отметим, что при выводе формулы (1) мы попутно получили выражение для размерности $h(n, l)$ пространства $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l от n переменных

$$h(n, l) = r(n, l) - r(n, l-2) = \frac{(2l+n-2)(n+l-3)!}{(n-2)!\, l!}. \tag{11}$$

Из равенства (1) следует, что любой однородный многочлен $f(\mathbf{x})$ степени l может быть представлен в виде

$$f(\mathbf{x}) = h_l(\mathbf{x}) + r^2 f_1(\mathbf{x}), \tag{12}$$

где $f_1(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n, l-2}$ и $h_l(\mathbf{x}) \in \mathfrak{H}^{nl}$ — гармонический многочлен степени l. Будем в дальнейшем многочлен $h_l(\mathbf{x})$ называть *гармонической проекцией* однородного многочлена $f(\mathbf{x})$. Гармоническую проекцию многочлена $f(\mathbf{x})$ будем обозначать через $Hf(\mathbf{x})$.

Найдем явную формулу для гармонической проекции. Будем искать гармоническую проекцию многочлена $f(\mathbf{x})$ в виде

$$Hf(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \alpha_k r^{2k} \Delta^k f(\mathbf{x}), \tag{13}$$

где $\alpha_0 = 1$. Применим к обеим частям этого равенства оператор Лапласа Δ и примем во внимание соотношение

$$\Delta(r^{2k}\Delta^k f) = 2k(n+2l-2k-2)\, r^{2k-2}\Delta^k f + r^{2k}\Delta^{k+1} f$$

(см. формулу (4) п. 3). Мы получим

$$\Delta Hf(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{[l/2]} [\alpha_k + (2k+2)(n+2l-2k-4)\alpha_{k+1}]\, r^{2k}\Delta^{k+1} f. \tag{14}$$

Равенство (14) показывает, что для того, чтобы многочлен, задаваемый формулой (13), был гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_k удовлетворяли рекуррентному соотношению

$$a_k + (2k+2)(n+2l-2k-4)\,a_{k+1} = 0.$$

Принимая во внимание, что $a_0 = 1$, получаем

$$Hf(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k r^{2k} \Delta^k f(\mathbf{x})}{2^k k!\,(n+2l-4)(n+2l-6)\dots(n+2l-2k-2)}. \qquad (15)$$

Формула (15) и задает гармоническую проекцию многочлена $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{nl}$.

6. Каноническое разложение однородных многочленов. В предыдущем пункте доказано, что

$$\mathfrak{R}^{nl} = \mathfrak{H}^{nl} + r^2 \mathfrak{R}^{n,\,l-2}. \qquad (1)$$

Применяя к $\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ аналогичное разложение и продолжая далее этот процесс, получим

$$\mathfrak{R}^{nl} = \sum_{k=0}^{[l/2]} r^{2k} \mathfrak{H}^{n,\,l-2k}, \qquad (2)$$

где $r^{2k}\mathfrak{H}^{n,\,l-2k}$ — подпространство в $\mathfrak{R}^{nl}$, состоящее из многочленов вида $r^{2k}h_{l-2k}(\mathbf{x})$, $h_{l-2k}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{H}^{n,\,l-2k}$.

Итак, доказано, что *каждый однородный многочлен степени l от n переменных однозначно разлагается в сумму многочленов вида $r^{2k}h_{l-2k}(\mathbf{x})$, где $h_{l-2k}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{H}^{n,\,l-2k}$*:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{[l/2]} r^{2k} h_{l-2k}(\mathbf{x}). \qquad (3)$$

Это разложение назовем *каноническим разложением* многочлена $f(\mathbf{x})$.

Из равенства (3) вытекает, что на единичной сфере

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{[l/2]} h_{l-2k}(\xi). \qquad (4)$$

Иными словами, *значение любого однородного многочлена $f(\mathbf{x})$ степени l на единичной сфере совпадает со значением на этой сфере гармонического* (неоднородного) *многочлена* $h(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=0}^{[l/2]} h_{l-2k}(\mathbf{x})$.

Поэтому при рассмотрении многочленов на единичной сфере достаточно ограничиться гармоническими многочленами.

Поскольку $r^2=x_1^2+\ldots+x_n^2$ не меняется при вращениях g из $SO(n)$, то из разложения (3) следует, что

$$L^{nl}(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{[l/2]} r^{2k}h_{l-2k}(g^{-1}\mathbf{x}). \tag{5}$$

Так как при $h_{l-2k}(\mathbf{x})\in\mathfrak{H}^{n,\,l-2k}$ имеем

$$H^{n,\,l-2k}(g)\,h_{l-2k}(\mathbf{x})=h_{l-2k}(g^{-1}\mathbf{x}), \tag{6}$$

то из равенства (5) следует, что

$$L^{nl}(g)=\sum_{k=0}^{[l/2]} H^{n,\,l-2k}(g). \tag{7}$$

7. Разложение квазирегулярного представления. Мы построили выше унитарные представления класса 1 $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$. Покажем, что квазирегулярное представление

$$L(g)f(\xi)=f(g^{-1}\xi) \tag{1}$$

этой группы является прямой суммой представлений $T^{nl}(g)$:

$$L(g)=\sum_{l=0}^{\infty} T^{nl}(g). \tag{2}$$

Представление $L(g)$ строится в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$ функций на единичной сфере, имеющих интегрируемый квадрат модуля. Рассмотрим в этом пространстве подпространства, состоящие из значений на сфере S^{n-1} функций $h(\mathbf{x})$ из $\mathfrak{H}^{nl}$. Будем обозначать эти подпространства также через $\mathfrak{H}^{nl}$. Очевидно, что они инвариантны относительно операторов квазирегулярного представления.

Сужение квазирегулярного представления на $\mathfrak{H}^{nl}$ есть представление $T^{nl}(g)$, а при $l\neq m$ представления $T^{nl}(g)$ и $T^{nm}(g)$ неэквивалентны. Поэтому подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$ и $\mathfrak{H}^{nm}$, $l\neq m$, ортогональны друг другу. Иными словами, если $h_1(\xi)\in\mathfrak{H}^{nl}$ и $h_2(\xi)\in\mathfrak{H}^{nm}$, то

$$\int h_1(\xi)\overline{h_2(\xi)}\,d\xi=0. \tag{3}$$

Поэтому для доказательства разложения

$$\mathfrak{L}^2(S^{n-1})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathfrak{H}^{nl} \tag{4}$$

достаточно показать, что любая функция $f(\xi)$ из $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$ может быть приближена в среднем с любой степенью точности суммами функций из пространств $\mathfrak{H}^{nl}$, $l=0,\ 1,\ \ldots$

По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция $f(\xi)$ на сфере S^{n-1} может быть с любой степенью точности равномерно приближена функцией вида $\varphi(\xi)$, где $\varphi(\mathbf{x})$ — многочлен. Так как каждый многочлен можно представить в виде суммы однородных многочленов, то мы получаем следующий вывод.

Для любой непрерывной функции $f(\xi)$ на единичной сфере S^{n-1} и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие многочлены $\varphi_l(\mathbf{x})$ из пространств $\mathfrak{R}^{nl}$, $l = 1, 2, \ldots, m$, что для всех точек $\xi \in S^{n-1}$ имеем

$$|f(\xi) - \sum_{l=1}^{m} \varphi_l(\xi)| < \varepsilon.$$

Но в п. 6 было показано, что если $\varphi_l(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{nl}$, то $\varphi_l(\xi)$ может быть представлено в виде

$$\varphi_l(\xi) = \sum_{k=0}^{[l/2]} h_{l-2k}(\xi),$$

где $h_{l-2k}(\xi) \in \mathfrak{H}^{n,\, l-2k}$. Отсюда вытекает, что любая непрерывная функция $f(\xi)$ на S^{n-1} может быть с любой степенью точности равномерно приближена суммой функций, принадлежащих пространствам $\mathfrak{H}^{nl}$. Следовательно, подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$ порождают все пространство $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. Тем самым доказано разложение (4).

Из разложения (4) следует, что *представление $L(g)$ является прямой суммой представлений $T^{nl}(g)$, причем каждое из представлений $T^{nl}(g)$ входит в разложение $L(g)$ только один раз.* Тем самым доказано равенство (2).

Поскольку мы воспользовались реализацией представлений $T^{nl}(g)$ в пространствах $\mathfrak{H}^{nl}$, формулу (2) точнее писать в виде

$$L(g) = \sum_{l=0}^{\infty} H^{nl}(g). \tag{2'}$$

Осталось показать, что представления $T^{nl}(g)$ неприводимы. Докажем это с помощью индукции по n. Сначала рассмотрим сужение представления $T^{nl}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$.

8. Разложение сужения представления $T^{nl}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$. Сузим представление $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$ на подгруппу $SO(n-1)$. Мы получим представление $T^{nl}(h)$ этой подгруппы. Покажем, что $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$, является прямой суммой представлений $T^{n-1,\, k}(h)$, $0 \leqslant k \leqslant l$:

$$T^{nl}(h) = \sum_{k=0}^{l} T^{n-1,\, k}(h), \qquad h \in SO(n-1). \tag{1}$$

Построим сначала подпространства $\mathfrak{A}^{nlk}$ в $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$, в которых реализуются представления $T^{n-1,\, k}(h)$. Обозначим через $x_n^{l-k}\mathfrak{H}^{n-1,\, k}$ пространство многочленов вида $x_n^{l-k}h_k(\mathbf{x}')$, где $h_k(\mathbf{x}') \in$

$\in \mathfrak{H}^{n-1, k}$, т. е. является однородным гармоническим многочленом степени k от $n-1$ переменного. Очевидно, что $x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k} \in \mathfrak{R}^{nl}$, $0 \leqslant k \leqslant l$. Так как x_n не изменяется при вращениях h из подгруппы $SO(n-1)$, то при $f(\mathbf{x}) \in x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}$ имеем

$$L^{nl}(h) f(\mathbf{x}) = f(h^{-1}\mathbf{x}) = x_n^{l-k} h_k(h^{-1}\mathbf{x}'). \tag{2}$$

Поскольку пространство $\mathfrak{H}^{n-1, k}$ инвариантно относительно операторов вращения из $SO(n-1)$ (см. п. 4), то $h_k(h^{-1}\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1, k}$ и, следовательно,

$$L^{nl}(h)[x_n^{l-k} h_k(\mathbf{x}')] \in x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}. \tag{3}$$

Мы доказали, таким образом, что операторы $L^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$ оставляют инвариантными подпространства $x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}$. При этом представление

$$T(h)[x_n^{l-k} h_k(\mathbf{x}')] = x_n^{l-k} h_k(h^{-1}\mathbf{x}') \tag{4}$$

является сужением представления $L^{nl}(h)$ на подпространство $x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}$ и эквивалентно, согласно п. 5, представлению $T^{n-1, k}(h)$, $h \in SO(n-1)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}^{nlk}$ образ подпространства $x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}$ при отображении $\mathfrak{R}^{nl}$ на $\mathfrak{R}^{nl}/r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2}$. Очевидно, что $\mathfrak{A}^{nlk}$ инвариантно относительно операторов представления $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$, индуцированного в $\mathfrak{R}^{nl}/r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2}$ представлением $L^{nl}(h)$. Покажем, что пространство $\mathfrak{R}^{nl}/r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{A}^{nlk}$:

$$\mathfrak{R}^{nl}/r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2} = \sum_{k=0}^{l} \mathfrak{A}^{nlk}, \tag{5}$$

причём сужение представления $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$ на подпространство $\mathfrak{A}^{nlk}$ эквивалентно $T^{n-1, k}(h)$. Очевидно, что эти утверждения будут доказаны, если мы покажем, что пространство $\mathfrak{R}^{nl}$ есть прямая сумма подпространства $r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2}$ и подпространств $x^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}$:

$$\mathfrak{R}^{nl} = r^2 \mathfrak{R}^{n, l-2} + \sum_{k=0}^{l} x_n^{l-k} \mathfrak{H}^{n-1, k}. \tag{6}$$

Иными словами, надо доказать, что любой многочлен $f(\mathbf{x})$ из $\mathfrak{R}^{nl}$ однозначно представим в виде

$$f(\mathbf{x}) = r^2 f_1(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{l} x_n^{l-k} h_k(\mathbf{x}'), \tag{7}$$

где $f_1(\mathbf{x})$ — однородный многочлен степени $l-2$ от n переменных, а $h_k(\mathbf{x}')$ — однородный гармонический многочлен степени k от $n-1$ переменного.

Чтобы доказать равенство (7), покажем сначала, что

$$r(n, l)=r(n, l-2)+\sum_{k=0}^{l} h(n-1, k), \tag{8}$$

где, напомним, $r(n, l)$ — размерность пространства $\mathfrak{R}^{nl}$, а $h(n-1, k)$ — размерность пространства $\mathfrak{H}^{n-1, k}$. По формуле (9) п. 4 имеем

$$h(n-1, k)=r(n-1, k)-r(n-1, k-2).$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{l} h(n-1, k)=\sum_{k=0}^{l}[r(n-1, k)-r(n-1, k-2)]=$$
$$=r(n-1, l)+r(n-1, l-1), \tag{9}$$

где положено $r(n-1, -1)=r(n-2, -2)=0$. Применяя формулу (11) п. 4, получаем

$$r(n, l-2)+\sum_{k=0}^{l} h(n-1, k)=r(n, l-2)+r(n-1, l)+$$
$$+r(n-1, l-1)=\frac{(n+l-3)!}{(n-1)!\,(l-2)!}+\frac{(n+l-2)!}{(n-2)!\,l!}+\frac{(n+l-3)!}{(n-2)!\,(l-1)!}=$$
$$=\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\,l!}=r(n, l). \tag{10}$$

Тем самым соотношение (8) доказано.

Теперь покажем, что подпространства $r^2\mathfrak{R}^{n, l-2}$ и $x_n^{l-k}\mathfrak{H}^{n-1, k}$, $0 \leqslant k \leqslant l$ порождают все пространство $\mathfrak{R}^{nl}$. Пусть $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{nl}$. Тогда многочлен $f(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{x})=r^2F(\mathbf{x})+x_n\varphi_1(\mathbf{x}')+\varphi_2(\mathbf{x}'), \tag{11}$$

где

$$r^2=x_1^2+\ldots+x_n^2, \quad \mathbf{x}'=(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$
$$F(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n, l-2}, \quad \varphi_1(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1, l-1} \quad \text{и} \quad \varphi_2(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1, l}.$$

Применив к многочленам $\varphi_1(\mathbf{x}')$ и $\varphi_2(\mathbf{x}')$ каноническое разложение (см. п. 6), получим

$$f(\mathbf{x})=r^2F(\mathbf{x})+\sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} x_n r_{n-1}^{2k}\hat{h}_{l-2k-1}(\mathbf{x}')+\sum_{k=0}^{[l/2]} r_{n-1}^{2k}\hat{h}_{l-2k}(\mathbf{x}'), \tag{12}$$

где $r_{n-1}^2=x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2$ и $\hat{h}_s(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1, s}$.

Заменим в формуле (12) r_{n-1}^2 на $r^2-x_n^2$, раскроем скобки и отнесем все члены, содержащие r^2, к первому слагаемому. Мы получим

$$f(x)=r^2f_1(\mathbf{x})+\sum_{k=0}^{l} x_n^{l-k}h_k(\mathbf{x}'), \tag{13}$$

где $f_1(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, $h_k(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,\,k}$ ($h_k(\mathbf{x}')$ лишь знаком отличается от $\hat{h}_k(\mathbf{x}')$ в разложении (12)).

Мы доказали, таким образом, что подпространства $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ и $x_n^{l-k}\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$, $0 \leqslant k \leqslant l$ порождают все пространство $\mathfrak{R}^{nl}$. Поскольку раньше было показано, что размерность $\mathfrak{R}^{nl}$ равна сумме размерностей указанных подпространств, то разложение

$$\mathfrak{R}^{nl} = r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2} + \sum_{k=0}^{l} x_n^{l-k}\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$$

доказано.

Выше отмечалось, что из этого разложения вытекают следующие утверждения:

1) *Пространство* $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ *является прямой суммой подпространств* $\mathfrak{A}^{nlk}$ (*образа* $x_n^{l-k}\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$ *при отображении* $\mathfrak{R}^{nl}$ *на* $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$)

$$\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2} = \sum_{k=0}^{l} \mathfrak{A}^{nlk}.$$

2) *Сужение представления* $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$ *на подпространство* $\mathfrak{A}^{nlk}$ *эквивалентно* $T^{n-1,\,k}(h)$, $0 \leqslant k \leqslant l$.

9. Инфинитезимальные операторы представления $T^{nl}(g)$. В следующем пункте докажем неприводимость представлений $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$. Нам будет удобно иметь при этом дело не с самими операторами $T^{nl}(g)$, а с инфинитезимальными операторами.

Обозначим через A_{jk} инфинитезимальный оператор представления $T^{nl}(g)$, соответствующий подгруппе Ω_{jk} вращений в плоскости (x_j, x_k). Будем считать, что представление $T^{nl}(g)$ реализовано в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов. В этом случае оно задается той же формулой

$$T^{nl}(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}), \tag{1}$$

что и представление $L(g)$ в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. Поэтому инфинитезимальные операторы этих представлений также задаются одними и теми же формулами.

Обозначим через $g_{jk}(\varphi)$ вращение на угол φ в плоскости (x_j, x_k). Оператор $L[g_{jk}(\varphi)]$ переводит функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ в

$$L[g_{jk}(\varphi)] f(\mathbf{x}) = f[g_{jk}(-\varphi)\mathbf{x}] =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_j \cos\varphi + x_k \sin\varphi, \ldots, -x_j \sin\varphi + x_k \cos\varphi, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Поэтому инфинитезимальный оператор представления $L(g)$ имеет вид

$$A_{jk} = \left.\frac{dL[g_{jk}(\varphi)]}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = x_k \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{3}$$

Тот же вид имеют инфинитезимальные операторы представлений $L^{nl}(g)$ (в пространстве $\mathfrak{R}^{nl}$) и $T^{nl}(g)$ (в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$).

Из равенства (3) вытекает, что $A_{jk} = -A_{kj}$. Далее, из той же формулы следует, что если $j < k$, $p < q$, то

$$[A_{jk}, A_{pq}] = \delta_{kp} A_{jq}, \tag{4}$$

где $[A_{jk}, A_{pq}] = A_{jk}A_{pq} - A_{pq}A_{jk}$ — коммутатор операторов A_{jk} и A_{pq}, а δ_{kp} — символ Кронекера.

10. Неприводимость представлений $T^{nl}(g)$. Теперь мы уже можем перейти к доказательству неприводимости представлений $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$ при $n \geqslant 3$.

Заметим, что при $n = 2$ представление $T^{nl}(g)$ приводимо — оно является прямой суммой двух одномерных представлений. В самом деле, из формулы (11) п. 5 следует, что $h(2, l) = 2$, т. е. что $T^{2l}(g)$ — двумерное представление. Так как группа $SO(2)$ коммутативна, то ее неприводимые представления одномерны (см. п. 3 § 3 главы I). Следовательно, $T^{2l}(g)$ является прямой суммой двух неприводимых представлений.

Чтобы получить разложение $T^{2l}(g)$ в явном виде, заметим, что многочлены $(x_2 + ix_1)^l$ и $(x_2 - ix_1)^l$ принадлежат пространству $\mathfrak{H}^{2l}$. При этом простой подсчет показывает, что если g — вращение на угол φ в плоскости (x_1, x_2), то

$$T^{2l}(g)(x_2 + ix_1)^l = e^{il\varphi}(x_2 + ix_1)^l \tag{1}$$

и

$$T^{2l}(g)(x_2 - ix_1)^l = e^{-il\varphi}(x_2 - ix_1)^l. \tag{1'}$$

Таким образом, пространство $\mathfrak{H}^{2l}$ является прямой суммой двух инвариантных подпространств, одно из которых натянуто на функцию $(x_2 + ix_1)^l$, а второе — на функцию $(x_2 - ix_1)^l$. Соответствующие представления группы $SO(2)$ будем обозначать $T_+^{2l}(g)$ и $T_-^{2l}(g)$.

Проведем теперь доказательство неприводимости представлений $T^{nl}(g)$ при $n \geqslant 3$. Доказательство проведем с помощью индукции по n. Случай $n = 3$ был рассмотрен в главе III. Там были построены неприводимые представления $T_l(g)$, $0 \leqslant l < \infty$, группы $SO(3)$. Нетрудно показать, что эти представления лишь формой записи отличаются от представлений $T^{3l}(g)$ и, следовательно, представления $T^{3l}(g)$ группы $SO(3)$ неприводимы.

Пусть уже доказано, что представления $T^{n-1, k}(h)$ группы $SO(n-1)$, $n \geqslant 4$ неприводимы. Докажем, что тогда неприводимы и представления $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$. В самом деле, рассмотрим сужение представления $T^{nl}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$. Мы доказали в п. 7, что это сужение распадается в прямую сумму представлений $T^{n-1, k}(h)$, $0 \leqslant k \leqslant l$, $h \in SO(n-1)$, которые, по предположению индукции, неприводимы. Но представления $T^{n-1,k}(h)$ и $T^{n-1,m}(h)$ при $k \neq m$ неэквивалентны (хотя бы потому, что размерности $h(n-1, k)$ и $h(n-1, m)$ пространств этих представлений различны). Так как эти представления неприводимы, то любое инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n, l-2}$ должно быть прямой суммой подпространств $\mathfrak{A}^{nlk}$, в которых реализуются представления $T^{n-1,k}(h)$. (Напомним, что $\mathfrak{A}^{nlk}$ является образом подпространства $x^{l-k}\mathfrak{H}^{n-1,k}$ при отображении $\mathfrak{R}^{nl}$ на $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n, l-2}$).

Итак,

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A}^{nlk_1} + \ldots + \mathfrak{A}^{nlk_s}. \tag{2}$$

Поэтому, если $\mathfrak{T}$ непусто, то оно содержит хотя бы одно из подпространств $\mathfrak{A}^{nlm}$.

Нам осталось показать, что если инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ содержит $\mathfrak{A}^{nlm}$, то оно содержит и все $\mathfrak{A}^{nlk}$, $0 \leqslant k \leqslant l$. Заметим, что инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ должно быть инвариантным относительно инфинитезимальных операторов A_{jk}. Согласно п. 9 оператор A_{jk} переводит смежный класс по $r^2\mathfrak{R}^{n, l-2}$, содержащий функцию $f(\mathbf{x})$, в смежный класс, содержащий функцию

$$A_{jk}f(\mathbf{x}) = x_k \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{3}$$

Но пространство $\mathfrak{A}^{nlm}$ состоит из смежных классов, содержащих функции вида $x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')$, где $h_m(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,m}$, т. е. является гармоническим многочленом степени m от $n-1$ переменного. Оператор A_{jn} переводит функцию $x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')$ в

$$A_{jn}[x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')] = x_n^{l-m+1}\frac{\partial h_m}{\partial x_j} - (l-m)\,x_n^{l-m-1}x_jh_m(\mathbf{x}'). \tag{4}$$

Докажем, что выражение в правой части этого равенства можно представить в виде линейной комбинации функций из подпространств $x_n^{l-m+1}\mathfrak{H}^{n-1, m-1}$, $x_n^{l-m-1}\mathfrak{H}^{n-1, m+1}$ и $r^2\mathfrak{R}^{nl}$.

В самом деле, как было показано в п. 3, многочлен $\partial h_m/\partial x_j$ является гармоническим и потому $\partial h_m/\partial x_j \in \mathfrak{H}^{n-1, m-1}$. Далее, в п. 3 было показано, что

$$\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}') \equiv x_jh_m(\mathbf{x}') - \frac{1}{n+2m-3}\, r_{n-1}^2 \frac{\partial h_m}{\partial x_j} \tag{5}$$

является гармоническим многочленом. Поскольку степень этого многочлена равна $m+1$, то $\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1, m+1}$. Но $r_{n-1}^2 = r^2 - x_n^2$, и потому

$$x_jh_m(\mathbf{x}') = \hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}') - \frac{1}{n+2m-3}\, x_n^2 \frac{\partial h_m}{\partial x_j} + \frac{1}{n+2m-3}\, r^2 \frac{\partial h_m}{\partial x_j}. \tag{6}$$

В силу формул (4) — (6) имеем

$$A_{jn}[x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')] = \frac{l+n+m-3}{n+2m-3}x_n^{l-m+1}\frac{\partial h_m}{\partial x_j} - \\ -(l-m)x_n^{l-m-1}\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}') - \frac{l-m}{n+2m-3}r^2x_n^{l-m-1}\frac{\partial h_m}{\partial x_j}. \quad (7)$$

Поскольку $\frac{\partial h}{\partial x_j} \in \mathfrak{H}^{n-1,\, m-1}$, $\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,\, m+1}$ и

$$x_n^{l-m-1}\frac{\partial h}{\partial x_j} \in \mathfrak{R}^{n,\, l-2},$$

разложение (7) и является искомым изображением $A_{jn}[x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')]$ в виде линейной комбинации функций из подпространств

$$x_n^{l-m+1}\mathfrak{H}^{n-1,\, m-1},\ x_n^{l-m-1}\mathfrak{H}^{n-1,\, m+1} \text{ и } r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}.$$

Если $h_m(\mathbf{x}') \neq 0$, то при $m \neq 0$, $m \neq l$ хотя бы для одного j, $1 \leqslant j \leqslant n$, первые два слагаемых в разложении (7) отличны от нуля. Для первого слагаемого это вытекает из того, что при $m \neq 0$ функция $h_m(\mathbf{x}')$ не является постоянной, и потому хотя бы одна ее частная производная отлична от нуля. Для второго же слагаемого — из того, что $x_jh_m(\mathbf{x}')$ не делится на r^2 (см. стр. 439), и потому $\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}') \neq 0$, множитель же $l-m$ при $m \neq l$ отличен от нуля. В случае $m=0$ имеем $\hat{h}_{m+1} \neq 0$, а при $m=l$ имеем $\partial h_m/\partial x_j \neq 0$.

Итак, мы доказали, что существует j, $1 \leqslant j \leqslant n$, для которого

$$A_{jn}[x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')] \in x_n^{l-m+1}\mathfrak{H}^{n-1,\, m-1} + \\ + x_n^{l-m-1}\mathfrak{H}^{n-1,\, m+1} + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}, \quad (8)$$

причем компоненты в подпространствах $x_n^{l-m+1}\mathfrak{H}^{n-1,\, m-1}$ и $x_n^{l-m-1}\mathfrak{H}^{n-1,\, m+1}$ отличны от нуля (кроме указанных выше случаев $m=0$, $m=l$). Отсюда вытекает, что образ многочлена $A_{jn}[x_n^{l-m}h_m(x')]$ при отображении $\mathfrak{R}^{nl}$ на $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$ лежит в сумме подпространств $\mathfrak{A}^{nl,\, m-1}$ и $\mathfrak{A}^{nl,\, m+1}$. Так как этот образ принадлежит инвариантному подпространству $\mathfrak{T}$, то в силу разложения (2) подпространство $\mathfrak{T}$ должно содержать как $\mathfrak{A}^{nl,\, m-1}$, так и $\mathfrak{A}^{nl,\, m+1}$ (при $m=0$ лишь $\mathfrak{A}^{nl,\, m+1}$, а при $m=l$ лишь $\mathfrak{A}^{nl,\, m-1}$). Отсюда вытекает, что $\mathfrak{T}$ содержит все подпространства $\mathfrak{A}^{nlk}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$. Неприводимость представления $T^{nl}(g)$ доказана.

Итак, мы доказали, что $T^{nl}(g)$ — *неприводимые представления группы* $SO(n)$, $n \geqslant 3$. Покажем, что $T^{nl}(g)$ — представления класса 1, т. е. что в пространствах этих представлений есть векторы, инвариантные относительно всех операторов $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$. Для этого удобнее воспользоваться реализацией представления $T^{nl}(g)$ в фактор-пространстве $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$. Возьмем смежный класс

$x_n^l + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$. Если $h \in SO(n-1)$, то при вращении h не меняется координата x_n, и потому

$$T^{nl}(h)\left[x_n^l + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}\right] = x_n^l + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что любой элемент в $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$, инвариантный относительно операторов $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$, пропорционален $x_n^l + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$.

Отметим, наконец, что представление $T^{nl}(g)$ при реализации в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ унитарно относительно скалярного произведения

$$(h_1,\ h_2) = \int\limits_{S^{n-1}} h_1(\xi)\, \overline{h_2(\xi)}\, d\xi. \tag{10}$$

В самом деле, из инвариантности евклидовой меры $d\xi$ на сфере S^{n-1} вытекает, что

$$(T^{nl}(g)\, h_1,\ T^{nl}(g)\, h_2) = \int\limits_{S^{n-1}} h_1(g^{-1}\xi)\, \overline{h_2(g^{-1}\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{S^{n-1}} h_1(\xi)\, \overline{h_2(\xi)}\, d\xi = (h_1,\ h_2). \tag{11}$$

11. Полнота системы представлений $T^{nl}(g)$. Мы построили систему представлений $T^{nl}(g)$, $0 \leqslant l < \infty$, группы $SO(n)$. Покажем теперь, что эта система полна в множестве представлений класса 1 (относительно подгруппы $SO(n-1)$). Иными словами, покажем, что любое представление $T(g)$ класса 1 относительно подгруппы $SO(n-1)$ эквивалентно одному из представлений $T^{nl}(g)$.

Пусть $\mathbf{e}_1$ — нормированный инвариантный вектор в пространстве $\mathfrak{A}$ представления $T(g)$. Каждому вектору $\mathbf{f}$ из $\mathfrak{A}$ поставим в соответствие функцию на группе $SO(n)$, определяемую формулой

$$f(g) = (T^{nl}(g^{-1})\, \mathbf{f},\ \mathbf{e}_1) \tag{1}$$

($(\mathbf{f},\ \mathbf{e})$ — инвариантное скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{A}$). Из результатов п. 6 § 2 главы I следует, что функция $f(g)$ постоянна на левых смежных классах по подгруппе $SO(n-1)$. Поэтому $f(g)$ можно рассматривать как функцию на однородном многообразии $SO(n)/SO(n-1)$, т. е. на сфере S^{n-1}. Именно, если $\xi = g\xi_n$, то полагаем

$$\varphi(\xi) = f(g).$$

При переходе от векторов $\mathbf{f}$ к соответствующим функциям $f(g)$ представление $T(g)$ задается операторами сдвига

$$Q(g)\, \varphi(\xi) = \varphi(g^{-1}\xi). \tag{2}$$

В силу непрерывности представления $T(g)$ функции $\varphi(\xi)$ непрерывны и, следовательно, имеют интегрируемый квадрат. Но тогда представление $Q(g)$ является неприводимой компонентой квазирегулярного представления $L(g)$. Поскольку представление $L(g)$ разлагается в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений $H^{nl}(g)$, то в силу п. 3 § 3 главы I представление $T(g)$ эквивалентно одному из представлений $H^{nl}(g)$, или, что то же, одному из представлений $T^{nl}(g)$.

Тем самым доказано, что каждое неприводимое унитарное представление класса 1 $T(g)$ группы $SO(n)$ эквивалентно одному из представлений $T^{nl}(g)$. Более того, построена реализация представления $T(g)$ операторами сдвига в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ гармонических многочленов степени l от n переменных.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Пусть $T(g)$ — неприводимое унитарное представление класса 1 группы $SO(n)$ и $\mathbf{e}_1$ — нормированный вектор из пространства $\mathfrak{A}$ этого представления, инвариантный относительно всех операторов $T(h)$, $h \in SO(n-1)$. Каждому вектору $\mathbf{f}$ из $\mathfrak{A}$ поставим в соответствие функцию $\varphi(\xi)$ на сфере S^{n-1}:

$$\varphi(\xi) = (T(g^{-1})\,\mathbf{f},\ \mathbf{e}_1), \tag{3}$$

где $g\xi_n = \xi$. Тогда функция

$$\Phi(\mathbf{x}) = r^l \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right) \tag{4}$$

является гармоническим многочленом степени l от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Любой гармонический многочлен степени l от $x_1, \ldots, x_n$ может быть представлен в виде (4).

Отметим еще, что из доказанного выше утверждения вытекает массивность подгруппы $SO(n-1)$ в $SO(n)$. В самом деле, любое неприводимое унитарное представление класса 1 эквивалентно одному из представлений $T^{nl}(g)$, а в пространстве $\mathfrak{A}^{nl} = \mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ этого представления есть лишь один нормированный вектор, инвариантный относительно всех операторов $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$.

§ 3. Зональные сферические функции представлений $T^{nl}(g)$ и многочлены Гегенбауэра

1. Описание зональных сферических функций. Как указывалось в п. 6 § 2 главы I, зональной сферической функцией представления $T(g)$ (относительно подгруппы H) называют функцию

$$f(g) = (T(g)\,\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1),$$

где $\mathbf{e}_1$ — вектор в пространстве представления $T(g)$, инвариантный относительно всех операторов $T(h)$, $h \in H$.

Применим это определение к подгруппе $SO(n-1)$ группы $SO(n)$ и представлению $T^{nl}(g)$. Мы получим функцию

$$f_{nl}(g)=(T^{nl}(g)\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1).$$

Ей соответствует функция

$$\varphi_{nl}(\xi)=(T^{nl}(g)\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1),\qquad \xi=g\xi_n, \tag{1}$$

на сфере S^{n-1}, инвариантная относительно всех преобразований

$$L(h)\varphi(\xi)=\varphi(h^{-1}\xi),$$

где $h\in SO(n-1)$ (т. е. относительно вращений вокруг оси Ox_n). Следовательно, гармонический многочлен

$$\Phi_{nl}(\mathbf{x})=r^l\varphi_{nl}\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right),$$

соответствующий функции $\varphi_{nl}(\xi)$, должен обладать той же инвариантностью.

Как было показано в п. 5 § 2, каждому гармоническому многочлену из пространства $\mathfrak{H}^{nl}$ взаимно однозначно соответствует смежный класс пространства $\mathfrak{R}^{nl}$ по подпространству $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Но легко видеть, что единственным таким смежным классом, инвариантным относительно вращений вокруг оси Ox_n, является (с точностью до постоянного множителя) смежный класс $x_n^l+r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Поэтому гармонический многочлен, соответствующий зональной сферической функции $\varphi_{nl}(\xi)$, является (с точностью до постоянного множителя) гармонической проекцией функции x_n^l. Вычислив эту проекцию по формуле (15) п. 5 § 2, получим

$$Hx_n^l=\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^k\,l(l-1)\dots(l-2k+1)\,r^{2k}x_n^{l-2k}}{2^kk!\,(n+2l-4)(n+2l-6)\dots(n+2l-2k-2)}. \tag{2}$$

Итак, мы доказали, что *зональная сферическая функция представления* $T^{nl}(g)$ (с точностью до постоянного множителя) *является значением на сфере* S^{n-1} *гармонического многочлена* Hx_n^l:

$$\varphi_{nl}(\xi)=a_{nl}H\xi_n^l=$$
$$=a_{nl}\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^k\,l(l-1)\dots(l-2k+1)}{2^kk!\,(n+2l-4)(n+2l-6)\dots(n+2l-2k-2)}\,\xi_n^{l-2k}. \tag{2'}$$

Полученное выше выражение для Hx_n^l можно записать короче с помощью многочленов специального вида, называемых *многочленами Гегенбауэра*. Эти многочлены определяются формулой

$$C_m^p(t)=\frac{2^m\Gamma(p+m)}{m!\,\Gamma(p)}\Big[t^m-\frac{m(m-1)}{2^2(p+m-1)}t^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^4\cdot1\cdot2(p+m-1)(p+m-2)}t^{m-4}+\dots\Big]. \tag{3}$$

Сравнивая формулы (2) и (3), получаем

$$Hx_n^l = \frac{l!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^l\,\Gamma\left(l+\frac{n-2}{2}\right)}\, r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right). \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, что $r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)$ является *гармоническим многочленом, принадлежащим пространству* $\mathfrak{H}^{nl}$.

Из формул (2′) и (3) следует

$$\varphi_{nl}(\xi) = b_{nl} C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi_n). \tag{5}$$

Чтобы найти значение коэффициента b_{nl}, положим в равенстве (5) $\xi = \xi_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Из формулы (1) следует, что $\varphi_{nl}(\xi_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$. Поэтому имеем

$$1 = b_{nl} C_l^{\frac{n-2}{2}}(1).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\varphi_{nl}(\xi) = \frac{C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi_n)}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)}. \tag{6}$$

2. Дифференциальное уравнение и рекуррентные соотношения для многочленов Гегенбауэра. Чтобы вывести дифференциальное уравнение для многочленов Гегенбауэра, заметим, что $r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)$ является гармоническим многочленом, т. е.

$$\Delta\left[r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)\right] = 0. \tag{1}$$

Перейдем в этом равенстве к сферическим координатам $r, \theta, \ldots, \theta_n$ Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = r^{1-n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + r^{-2}\sin^{2-n}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\left[\sin^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\right] + \ldots, \tag{2}$$

где точками обозначены члены, содержащие производные по переменным θ_k, $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Поскольку $\frac{x_n}{r} = \cos\theta_{n-1}$, равенство (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2} C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) + (n-2)\operatorname{ctg}\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) + \\ + l(n+l-2)\, C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) = 0.$$

Делая в этом уравнении подстановку $\cos\theta_{n-1}=t$, $n-2=2p$, получим дифференциальное уравнение для многочленов Гегенбауэра:

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}C_l^p(t)-(2p+1)t\frac{d}{dt}C_l^p(t)+l(2p+l)C_l^p(t)=0. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) получается рекуррентная формула для многочленов Гегенбауэра. Продифференцируем обе части равенства (3) п. 1. Сравнивая полученную формулу с аналогичным разложением для $C_{m+1}^{p+1}(t)$, получаем

$$\frac{d}{dt}C_m^p(t)=2pC_{m-1}^{p+1}(t). \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) вытекает, что

$$4p(p+1)(1-t^2)C_{l-2}^{p+2}(t)-2p(2p+1)tC_{l-1}^{p+1}(t)+ \\ +l(2p+l)C_l^p(t)=0. \qquad (5)$$

Отметим еще, что из формулы (4) вытекает соотношение

$$\frac{d^k}{dt^k}C_m^p(t)=\frac{2^k\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}C_{m-k}^{p+k}. \qquad (6)$$

Другую рекуррентную формулу для многочленов Гегенбауэра выведем, исходя из равенства (4) п. 1. Перепишем это равенство в виде

$$x_n^l=\frac{l!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^l\Gamma\left(l+\frac{n-2}{2}\right)}r^lC_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)+r^2f_1(\mathbf{x}), \qquad (7)$$

где $f_1(\mathbf{x})\in\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, и умножим обе части равенства (7) на x_n. Так как $r^lC_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)$ — гармонический многочлен степени l, то, согласно п. 3 § 2, многочлен

$$x_nr^lC_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)-\frac{1}{n+2l-2}r^2\frac{\partial\left[r^lC_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)\right]}{\partial x_n}$$

является гармоническим. Следовательно,

$$Hx_n^{l+1}=\frac{l!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^l\Gamma\left(l+\frac{n-2}{2}\right)}\left[x_nr^lC_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)-\frac{1}{n+2l-2}r^2\frac{\partial\left[r^lC_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)\right]}{\partial x_n}\right].$$

Но $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, и потому $\frac{\partial r}{\partial x_n} = \frac{x_n}{r}$. Принимая во внимание формулу (4), получаем после простых преобразований

$$Hx_n^{l+1} = \frac{l!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^{l+1}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\left[(n+l-2)\,x_n\,r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right) - \right.$$

$$\left. -(n-2)\,r^{l-1}(r^2 - x_n^2)\,C_{l-1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right)\right]. \qquad (8)$$

С другой стороны, по формуле (4) п. 1

$$Hx_n^{l+1} = \frac{(l+1)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^{l+1}\,\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\,r^{l+1}C_{l+1}^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right). \qquad (9)$$

Сравнивая формулы (8) и (9) и положив в них $x_n = t$, $r = 1$, $n-2 = 2p$, получим

$$(l+1)\,C_{l+1}^p(t) = (2p+l)\,tC_l^p(t) - 2p\,(1-t^2)\,C_{l-1}^{p+1}(t). \qquad (10)$$

Заменим в этом равенстве p на $p+1$, l на $l-1$ и исключим из равенств (5) и (10) член, содержащий $(1-t^2)\,C_{l-2}^{p+2}(t)$. Мы получим следующее рекуррентное соотношение

$$(2p+l)\,C_l^p(t) = 2p\,[C_l^{p+1}(t) - tC_{l-1}^{p+1}(t)]. \qquad (11)$$

3. Частные случаи и частные значения многочленов Гегенбауэра. Из равенства (3) п. 1, определяющего многочлены Гегенбауэра, видно, что

$$C_0^p(t) = 1. \qquad (1)$$

Приведем значения многочленов Гегенбауэра для $m = 1, 2, 3$:

$$C_1^p(t) = 2pt, \qquad (2)$$

$$C_2^p(t) = 2p\,(p+1)\left[t^2 - \frac{1}{2p+2}\right], \qquad (3)$$

$$C_3^p(t) = \frac{4}{3}\,p\,(p+1)\,(p+2)\left[t^3 - \frac{3}{2p+4}\,t\right]. \qquad (4)$$

Далее, из равенства (3) п. 1 следует, что в многочлен Гегенбауэра $C_m^p(t)$ входят лишь степени t, показатели которых имеют ту же четность, что и m. Поэтому имеем

$$C_m^p(-t) = (-1)^m C_m^p(t) \qquad (5)$$

$$C_{2m+1}^p(0) = 0. \qquad (6)$$

Значение $C_{2m}^p(0)$ получаем из формулы (3) п. 2:

$$C_{2m}^p(0) = \frac{(-1)^m \Gamma(p+m)}{\Gamma(p)\Gamma(m+1)}. \tag{7}$$

Нам понадобится в дальнейшем значение $C_l^p(1)$. Чтобы найти его, воспользуемся формулой (10) п. 3. Из этой формулы вытекает, что

$$C_l^p(1) = \frac{2p+l-1}{l} C_{l-1}^p(1) \tag{8}$$

и, следовательно,

$$C_l^p(1) = \frac{\Gamma(2p+l)}{l!\,\Gamma(2p)}. \tag{9}$$

Подставив это выражение в формулу (6) п. 2, получим

$$\varphi_{nl}(\xi) = \frac{l!\,\Gamma(n-2)}{\Gamma(l+n-2)} C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi_n). \tag{10}$$

4. Соотношения ортогональности для многочленов Гегенбауэра. Из установленной связи между многочленами Гегенбауэра и зональными сферическими функциями вытекают соотношения ортогональности для многочленов Гегенбауэра. В самом деле, по формуле (1) п. 1 имеем при $\xi = g\xi_n$

$$\varphi_{nl}(\xi) = (T^{nl}(g)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1). \tag{1}$$

Таким образом,

$$\varphi_{nl}(\xi) = t_{11}^{nl}(g), \tag{1'}$$

где $\xi = g\xi_n$ и $t_{11}^{nl}(g)$ — матричный элемент представления $T^{nl}(g)$ (соответствующий базисному вектору $\mathbf{e}_1$). Из соотношений ортогональности для матричных элементов неприводимых унитарных представлений компактных групп (см. п. 3, § 4 главы 1) следует, что

$$\int t_{11}^{nl}(g)\overline{t_{11}^{nm}(g)}\,dg = \frac{\delta_{lm}}{h(n, l)}, \tag{2}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера, а

$$h(n, l) = \frac{(2l+n-2)(n+l-3)!}{(n-2)!\,l!} \tag{3}$$

размерность представления $T^{nl}(g)$ (см. формулу (11) п. 5 § 2).

Из формул (1) этого пункта и (10) п. 3 видно, что функции $t_{11}^{nl}(g)$ зависят только от координаты ξ_n вектора $\xi = g\xi_n$, или, что то же, от сферической координаты θ_{n-1} этого вектора. Координата θ_{n-1} есть не что иное, как угол Эйлера θ_{n-1}^{n-1} вращения g (см. п. 3, § 1). Переходя в равенстве (2) к углам Эйлера и используя формулу (10) п. 3, получаем при $l \neq m$

$$\int_0^\pi C_l^p(\cos\theta)\,C_m^p(\cos\theta)\sin^{2p}\theta\,d\theta = 0,$$

где для краткости положено $p=\frac{n-2}{2}$. Иными словами,

$$\int_{-1}^{1} C_l^p(x)\, C_m^p(x)\,(1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}\,dx=0. \tag{4}$$

В случае же $l=m$ из формул (1), (2) и (3) вытекает, что

$$\int_0^{\pi} [C_l^p(\cos\theta)]^2 \sin^{2p}\theta\, d\theta=\frac{\pi\Gamma(2p+l)}{2^{2p-1} l!\,(l+p)\,\Gamma^2(p)}$$

(мы использовали формулу удвоения для Г-функции). Иначе,

$$\int_{-1}^{1} [C_l^p(x)]^2 (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{\pi\Gamma(2p+l)}{2^{2p-1}\, l!\,(l+p)\,\Gamma^2(p)}. \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) следует, что *многочлены*

$$2^{p-1}\,\Gamma(p)\left[\frac{2\,(l+p)\,l!}{\Gamma(2p+l)\,\pi}\right]^{\frac{1}{2}} C_l^p(x), \qquad l=0,\ 1,\ldots, \tag{6}$$

образуют ортогональную нормированную систему на отрезке $[-1,\ 1]$ *относительно веса* $\sigma(x)=(1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}$.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\sigma^2$ пространство функций $\varphi(x)$, таких, что

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2 (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}\,dx<+\infty.$$

Система функций (6) полна в этом пространстве. В самом деле, из результатов п. 5 § 4 главы 1 следует, что любая функция $f(g)$ на группе $SO(n)$, имеющая интегрируемый квадрат модуля и такая, что

$$f(h_1 g h_2)=f(g), \qquad h_1,\ h_2 \in SO(n-1), \tag{7}$$

разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по зональным сферическим функциям представлений $T^{nl}(g)$:

$$f(g)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l\, t_{11}^{nl}(g). \tag{8}$$

Здесь

$$a_l=h(n,\ l)\int f(g)\,\overline{t_{11}^{nl}(g)}\,dg. \tag{9}$$

Из функционального уравнения (7) вытекает, что функция $f(g)$ зависит лишь от угла Эйлера θ_{n-1}^{n-1} элемента g, $f(g)=\varphi(\cos\theta_{n-1}^{n-1})$. При этом из того, что

$$\int |f(g)|^2 dg<+\infty,$$

следует

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx < +\infty, \tag{10}$$

т. е. функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}^2_\sigma$.

Заменяя в разложении (8) $f(g)$ на $\varphi(x)$, а зональные сферические функции их выражениями через многочлены Гегенбауэра, получаем после простых преобразований

$$\varphi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l C_l^p(x), \tag{11}$$

где

$$b_l = \frac{2^{2p-1} l! (l+p) \Gamma^2(p)}{\pi \Gamma(2p+l)} \int_{-1}^{1} \varphi(x) C_l^p(x) (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}} dx. \tag{12}$$

Ряд (11) сходится в среднем относительно веса $\sigma(x) = (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}$ и для него выполняется равенство Парсеваля:

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2 (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi \Gamma(2p+l)}{2^{2p-1} l! (l+p) \Gamma^2(p)} |b_l|^2. \tag{13}$$

5. Разложение пространства гармонических многочленов В этом пункте мы разложим пространство $\mathfrak{H}^{nl}$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{H}^{nls}$, инвариантных относительно операторов $T^{nl}(h)$, где $h \in SO(n-1)$. В п. 5 § 2 было показано, что пространство $\mathfrak{H}^{nl}$ изоморфно фактор-пространству пространства $\mathfrak{R}^{nl}$ однородных многочленов степени l по подпространству $r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$ многочленов вида $r^2 f_1(\mathbf{x})$, где $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $f_1(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n,\, l-2}$:

$$\mathfrak{R}^{nl} = \mathfrak{H}^{nl} + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}. \tag{1}$$

С другой стороны, мы показали в п. 8 § 2, что $\mathfrak{R}^{nl}$ является прямой суммой подпространства $r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$ и подпространств $x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,\, s}$, состоящих из многочленов вида $x_n^{l-s} h_s(\mathbf{x}')$, где $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $h_s(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,\, s}$:

$$\mathfrak{R}^{nl} = \sum_{s=0}^{l} x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,\, s} + r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) вытекает, что любой однородный гармонический многочлен $h(\mathbf{x})$ степени l может быть единственным образом представлен в виде

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{l} x_n^{l-s} h_s(\mathbf{x}') + r^2 f_1(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $h_s(\mathbf{x}')\in\mathfrak{H}^{n-1,\,s}$ и $f_1(\mathbf{x})\in\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Применяя к обеим частям этого равенства операцию гармонического проектирования, мы убеждаемся, что

$$h(\mathbf{x})=\sum_{s=0}^{l} H(x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}')). \tag{4}$$

Многочлены $H(x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}'))$ при фиксированном s образуют подпространство в $\mathfrak{H}^{nl}$. Обозначим это подпространство через $\mathfrak{H}^{nls}$:

$$\mathfrak{H}^{nls}=H(x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,\,s}). \tag{5}$$

Из того, что каждый многочлен $h(\mathbf{x})$, принадлежащий $\mathfrak{H}^{nl}$, может быть единственным образом записан в виде (3), вытекает, что $\mathfrak{H}^{nl}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{H}^{nls}$, $0\leqslant s\leqslant l$,

$$\mathfrak{H}^{nl}=\sum_{s=0}^{l}\mathfrak{H}^{nls}. \tag{6}$$

Мы знаем, что подпространства $x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,\,s}$ инвариантны относительно операторов $L^{nl}(h)f(\mathbf{x})=f(h^{-1}\mathbf{x})$, $h\in SO(n-1)$ (см. п. 8 § 2). Отсюда без труда вытекает, что подпространства $\mathfrak{H}^{nls}$ (т. е. гармонические проекции пространств $x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,\,s}$) инвариантны относительно операторов $T^{nl}(h)$, $h\in SO(n-1)$.

Подпространства $\mathfrak{H}^{nls}$ можно определить непосредственно, не прибегая в явной форме к гармоническому проектированию. Вычислим для этого гармоническую проекцию многочлена $x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}')$. Применяя формулу (15) п. 5 § 2, получаем

$$H(x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}'))=$$
$$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^k r^{2k}\Delta^k(x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}'))}{2^k k!\,(n+2l-4)(n+2l-6)\ldots(n+2l-2k-2)}. \tag{7}$$

Так как $h_s(\mathbf{x}')$ — гармонический многочлен, то при $p\geqslant 1$ имеем $(\Delta')^p h_s(\mathbf{x}')=0$, где

$$\Delta'=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$$

— оператор Лапласа в $(n-1)$-мерном пространстве. Но $\Delta=\Delta'+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, поэтому

$$\Delta^k[x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}')]=(l-s)\ldots(l-s-2k+1)\,x_n^{l-s-2k}h_s(\mathbf{x}').$$

Мы доказали, таким образом, что

$$H(x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}')) = h_s(\mathbf{x}') \sum_{k=0}^{\left[\frac{l-s}{2}\right]} \frac{(-1)^k (l-s)(l-s-1)\dots(l-s-2k+1)}{2^k k!\,(n+2l-4)\dots(n+2l-2k-2)} r^{2k} x_n^{l-s-2k}. \quad (8)$$

Принимая во внимание равенство (3) п. 1, можно переписать формулу (8) в следующем виде:

$$H(x_n^{l-s}h_s(\mathbf{x}')) = \frac{(l-s)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+s\right)}{2^{l-s}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)} r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{n-2}{2}+s}\left(\frac{x_n}{r}\right) h_s(\mathbf{x}'). \quad (9)$$

Итак, мы доказали, что *пространство $\mathfrak{H}^{nls}$ является пространством функций вида*

$$r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{n-2}{2}+s}\left(\frac{x_n}{r}\right) h_s(\mathbf{x}'), \quad (10)$$

где $h_s(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,\,s}$.

6. Построение канонического базиса. Перейдем теперь к основной цели этого параграфа — построению базиса в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l от n переменных. Из результатов предыдущего пункта вытекает, что любой многочлен $h(\mathbf{x})$ из $\mathfrak{H}^{nl}$ единственным образом представляется в виде

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{l} r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{n-2}{2}+s}\left(\frac{x_n}{r}\right) h_s(\mathbf{x}'), \quad (1)$$

где $h_s(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,\,s}$.

Так как функции $h_s(\mathbf{x}')$ принадлежат пространствам $\mathfrak{H}^{n-1,\,s}$, они допускают аналогичное разложение. Продолжим этот процесс и примем во внимание, что любой гармонический многочлен степени s от двух переменных x_1 и x_2 является линейной комбинацией многочленов (x_2+ix_1) и $(x_2-ix_1)^s$. Получаем следующий результат.

Любой многочлен из пространства $\mathfrak{H}^{nl}$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации функций вида

$$\Xi_K^l(\mathbf{x}) = A_K^l \prod_{j=0}^{n-3} r_{n-j}^{k_j-k_{j+1}} C_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}}\left(\frac{x_{n-j}}{r_{n-j}}\right)(x_2 \pm ix_1)^{k_{n-2}}, \quad (2)$$

где $r_{n-j}^2 = x_1^2+\dots+x_{n-j}^2$ и $l \equiv k_0 \geqslant k_1 \geqslant \dots \geqslant k_{n-2} \geqslant 0$. Символом K здесь обозначена последовательность целых чисел $(k_1, \dots, \pm k_{n-2})$.

Нормирующий множитель A_k^l выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{S^{n-1}} |\Xi_k^l(\xi)|^2 \, d\xi = 1, \tag{3}$$

где $d\xi$ — нормированная евклидова мера на единичной сфере S^{n-1}. Чтобы вычислить этот коэффициент в явном виде, запишем функции $\Xi_k^l(\xi)$ в сферических координатах. Так как $\frac{x_{n-j}}{r_{n-j}} = \cos\theta_{n-j-1}$ и $\frac{r_{n-j-1}}{r_{n-j}} = \sin\theta_{n-j-1}$, то

$$\Xi_k^l(\mathbf{x}) = A_k^l r^l \prod_{j=0}^{n-3} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}}(\cos\theta_{n-j-1}) \sin^{k_{j+1}}\theta_{n-j-1} e^{\pm i k_{n-2}\theta_1}. \tag{4}$$

Подставив это выражение в интеграл (3) и принимая во внимание, что

$$d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2 \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1},$$

получим

$$\frac{1}{(A_K^l)^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} \prod_{j=0}^{n-3} \int\limits_0^\pi [C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}}(\cos\theta)]^2 \sin^{2k_{j+1} + n - j - 2}\theta \, d\theta.$$

Принимая во внимание соотношения нормировки для многочленов Гегенбауэра (см. формулу (5) п. 4), получаем после простых преобразований

$$(A_K^l)^2 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-3} \frac{2^{2k_{j+1} + n - j - 4} (k_j - k_{j+1})! \, (n - j + 2k_j - 2) \, \Gamma^2\left(\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(k_j + k_{j+1} + n - j - 2)}. \tag{5}$$

В частности, если $O = (0, \ldots, 0)$, то

$$A_O^l = \sqrt{\frac{l!\,\Gamma(n-2)(2l+n-2)}{\Gamma(n+l-2)(n-2)}}, \tag{6}$$

и потому

$$\Xi_O^l(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{l!\,\Gamma(n-2)(2l+n-2)}{\Gamma(n+l-2)(n-2)}} \, r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x_n}{r}\right). \tag{7}$$

Покажем, наконец, что базис $\Xi^l_k(\mathbf{x})$ в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ ортогонален относительно скалярного произведения

$$(h_1, h_2)=\int\limits_{S^{n-1}} h_1(\xi)\overline{h_2(\xi)}\,d\xi \tag{8}$$

в этом пространстве. Иными словами, если последовательности $K=(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$ и $M=(m_1, \ldots, \pm m_{n-2})$ не совпадают, то

$$(\Xi^l_K, \Xi^l_M)\equiv\int\limits_{S^{n-1}} \Xi^l_K(\xi)\overline{\Xi^l_M(\xi)}\,d\xi=0. \tag{9}$$

В самом деле, подставим в интеграл (9) вместо функций $\Xi^l_K(\mathbf{x})$ и $\Xi^l_M(\mathbf{x})$ их выражения по формуле (4) и примем во внимание выражение для инвариантной меры на сфере S^{n-1}. Тогда интеграл (9) является (с точностью до постоянного множителя) произведением интегралов вида

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(\pm k_{n-2}\mp m_{n-2})\theta}\,d\theta \tag{10}$$

и

$$\int\limits_0^{\pi} C^{\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}}_{k_j-k_{j+1}}(\cos\theta)\, C^{\frac{n-j-2}{2}+m_{j+1}}_{m_j-m_{j+1}}(\cos\theta)\sin^{k_{j+1}+m_{j+1}+n-j-2}\theta\,d\theta, \tag{11}$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-3.$$

Если $k_{j+1}=m_{j+1}$, но $k_j\neq m_j$, то в силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра интеграл (11) равен нулю. Поэтому, если последовательности $K=(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$ и $M=(m_1, \ldots, \pm m_{n-2})$ различны, то хотя бы один множитель в выражении для (Ξ^l_K, Ξ^l_M) равен нулю (при $\pm k_{n-2}\neq\pm m_{n-2}$ в нуль обращается множитель вида (10)).

Мы построили, таким образом, ортогональный нормированный базис $\Xi^l_K(\mathbf{x})$ в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l от n переменных. Этот базис будем называть *каноническим базисом* в $\mathfrak{H}^{nl}$. Иногда удобно считать, что этот базис упорядочен. Именно, будем считать, что $\Xi^l_K(\mathbf{x})$, $K=(k_0, \ldots, \pm k_{n-2})$ предшествует $\Xi^l_M(\mathbf{x})$, $M(m_0, \ldots, \pm m_{n-2})$, если найдется такое j, что $k_i=m_i$, $0\leqslant i\leqslant j$ и $k_{j+1}<m_{j+1}$ (или $\pm k_{n-2}<\pm m_{n-2}$).

Из построения базиса $\Xi^l_K(\mathbf{x})$ ясно, что при $k_1=s$ функция $\Xi^l_K(\mathbf{x})$ принадлежит подпространству $\mathfrak{H}^{nls}$.

7. Разложение функций на n-мерной сфере. Функции $\Xi^l_K(\xi)$, $K=(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$ при фиксированном l образуют ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$. Но в п. 9 § 2 было показано, что пространство $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$ функций на сфере S^{n-1}, имеющих интегрируемый квадрат модуля, является прямой суммой подпространств $\mathfrak{H}^{nl}$, $l=0, 1, \ldots$

$$\mathfrak{L}^2(S^{n-1})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathfrak{H}^{nl}. \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что функции $\Xi_K^l(\xi)$, где K пробегает всевозможные последовательности целых чисел $K=(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$, такие, что $l\geqslant k_1\geqslant\ldots\geqslant k_{n-2}\geqslant 0$, образуют ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$.

Итак, мы доказали, что любую функцию $f(\xi)$ из пространства $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$ можно разложить в сходящийся в среднем ряд вида

$$f(\xi)=\sum_{k}a_K^l\Xi_K^l(\xi), \tag{2}$$

где

$$a_K^l=\int_{S^{n-1}}f(\xi)\overline{\Xi_K^l(\xi)}\,d\xi, \tag{3}$$

($d\xi$ — нормированная евклидова мера на сфере S^{n-1}). Как видно из результатов п. 6, это разложение связано с разложением квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на неприводимые представления. Именно, члены разложения (3), для которых l имеет фиксированное значение, принадлежат подпространству $\mathfrak{H}^{nl}$ и, следовательно, эта группа членов преобразуется по неприводимому представлению $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$.

§ 4. Матричные элементы нулевого столбца

Мы построили в предыдущем параграфе канонический базис в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l от n переменных. Назовем *канонической матрицей* представления

$$T^{nl}(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x}), \qquad f(\mathbf{x})\in\mathfrak{H}^{nl},$$

матрицу этого представления в каноническом базисе. В этом параграфе мы рассмотрим элементы «нулевого столбца» канонической матрицы, соответствующего базисному элементу

$$\Xi_O^l(\mathbf{x}), \qquad O=(0, \ldots, 0)$$

и выразим их через многочлены Гегенбауэра. Отсюда будут получены новые свойства этих многочленов.

1. Элементы «нулевого столбца» канонической матрицы. Будем нумеровать строки и столбцы канонической матрицы представления $T^{nl}(g)$ символами K, M, $K=(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$, $M=(m_1, \ldots, \pm m_{n-2})$.

Таким образом, элементы канонической матрицы оператора $T^{nl}(g)$ обозначаются $T^{nl}_{KM}(g)$. Эти матричные элементы являются коэффициентами в разложении функции $T^{nl}(g)\,\Xi_M(\mathbf{x})$ по функциям $\Xi_K(\mathbf{x})$.

Обозначим через O последовательность $(0, \ldots, 0)$. Покажем, что матричные элементы $t^{nl}_{KO}(g)$ и $t^{nl}_{OK}(g)$ весьма просто выражаются через многочлены Гегенбауэра.

Так как $t^{n}_{KM}(g)$ являются матричными элементами оператора $T^{nl}(g)$ в каноническом базисе $\Xi^l_K(\mathbf{x})$, то для любого g выполняется равенство

$$\Xi^l_M(g^{-1}\mathbf{x}) = T^{nl}(g)\,\Xi^l_M(\mathbf{x}) = \sum_K t^{nl}_{KM}(g)\,\Xi^l_K(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Положим в этом равенстве $\mathbf{x} = \xi_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Значения $\Xi^l_K(\xi_n)$ легко вычисляются по формуле (4) п. 6 § 3. Очевидно, что при $K \neq 0$ в правую часть этой формулы входят сомножители, равные нулю, а потому при $K \neq O$ имеем $\Xi^l_K(\xi_n) = 0$. Если же $K = O$, то по формуле (7) п. 6. § 3 получаем

$$\Xi^l_O(\xi_n) = A^l_O C_l^{\frac{n-2}{2}}(1). \tag{2}$$

По формуле (9) п. 3 § 3 имеем

$$C_l^{\frac{n-2}{2}}(1) = \frac{\Gamma(n+l-2)}{l!\,\Gamma(n-2)},$$

а по формуле (6) п. 6 § 3

$$A^l_O = \sqrt{\frac{l!\,\Gamma(n-2)(2l+n-2)}{\Gamma(n+l-2)(n-2)}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получаем

$$\Xi^l_O(\xi_n) = \sqrt{\frac{\Gamma(l+n-2)(2l+n-2)}{l!\,\Gamma(n-1)}}.$$

Подставляя полученные значения $\Xi^l_K(\xi_n)$ в формулу (1) при $\mathbf{x} = \xi_n$, находим

$$\Xi^l_M(g^{-1}\xi_n) = \sqrt{\frac{\Gamma(l+n-2)(2l+n-2)}{l!\,\Gamma(n-1)}}\, t^{n}_{OM}(g). \tag{3}$$

Так как представление $T^{nl}(g)$ унитарно, то $t^{nl}_{OM}(g) = \overline{t^{nl}_{MO}(g^{-1})}$. Поэтому из формулы (3) вытекает, что

$$t^{nl}_{MO}(g) = \sqrt{\frac{l!\,\Gamma(n-1)}{\Gamma(l+n-2)(2l+n-2)}}\, \Xi^l_M(g\xi_n). \tag{4}$$

Значение коэффициента в формуле (3) может быть получено иным путем из теоретико-групповых соображений. Так как $T^{nl}(g)$ — неприводимое представление группы $SO(n)$, то имеет место равенство

$$\int |t^{nl}_{MO}(g)|^2 dg = \frac{\Gamma(l+n-2)(2l+n-2)}{l!\,\Gamma(n-1)} \tag{5}$$

(см. п. 3 § 4 главы I и формулу (11) п. 4 § 2 этой главы). С другой стороны, из равенства (3) п. 6 § 3 легко следует, что

$$\int |\Xi^l_M(g\xi_n)|^2 dg = 1 \tag{6}$$

(по формуле (3) п. 4 § 1 интегрирование по группе $SO(n)$ сводится к интегрированию по подгруппе $SO(n-1)$ и по сфере S^{n-1}; поскольку при $h \in SO(n-1)$ имеем $h\xi_n = \xi_n$, а на сфере S^{n-1} функции $\Xi^l_M(\xi)$ нормированы, получаем равенство (6)). Сравнивая равенства (5) и (6), получаем значение коэффициента в формуле (4).

Из формулы (4) легко вывести выражение матричных элементов $t^{nl}_{MO}(g)$ через углы Эйлера вращения g. Именно, в п. 3 § 1 было показано, что углы Эйлера $\theta^{n-1}_1, \ldots, \theta^{n-1}_{n-1}$ равны сферическим координатам точки $g\xi_n$ сферы S^{n-1}. Выражение же $\Xi^l_M(\xi)$ через сферические координаты точки ξ дается формулой (4) п. 6 § 3. Подставляя соответствующие значения, получаем, что если углы Эйлера вращения g равны θ^j_k, то

$$t^{nl}_{MO}(g) = \sqrt{\frac{l!\,\Gamma(n-1)}{\Gamma(l+n-2)(2l+n-2)}}\, A^l_M \times$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-3} C^{\frac{n-j-2}{2}+m_{j+1}}_{m_j - m_{j+1}}(\cos\theta^{n-1}_{n-j-1}) \sin^{m_{j+1}}\theta^{n-1}_{n-j-1}\, e^{\pm i m_{n-2}\theta^{n-1}_1}, \tag{7}$$

где A^l_M выражается формулой (5) п. 6 § 3 и $M = (m_1, \ldots, \pm m_{n-2})$, $m_0 \equiv l$.

Отметим некоторые частные случаи полученной формулы. Если $M = O = (0, \ldots, 0)$, то все сомножители в формуле (7), для которых $j > 0$, равны 1 ($C^p_0(\cos\theta) = 1$ и $\sin^0\theta = 1$). Поэтому

$$t^{nl}_{OO}(g) = \frac{\Gamma(n-2)\,l!}{\Gamma(n+l-2)} C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta^{n-1}_{n-1}). \tag{8}$$

Мы видим, таким образом, что матричный элемент $t^{nl}_{OO}(g)$ канонической матрицы представления $T^{nl}(g)$ зависит лишь от угла Эйлера θ^{n-1}_{n-1}.

Вычислим еще значение $t^{nl}_{MO}(g)$ для случая, когда $g = g_n(\varphi)$ — вращение на угол φ в плоскости (x_n, x_{n-1}). В этом случае все углы Эйлера вращения g равны нулю, за исключением угла θ^{n-1}_{n-1}, равного φ. Поэтому из формулы (7) следует, что если хотя бы одно m_j, $j \geq 2$

отлично от нуля, то $t^{nl}_{MO}[g_n(\varphi)]=0$. Если же M имеет вид $M=(m, 0, \ldots, 0)$, то по формуле (7) получаем, учитывая формулы (5) п. 6 и (9) п. 3 § 3,

$$t^{nl}_{MO}(g)=\frac{2^m\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{l!\,(l-m)!\,\Gamma(n-2)\,\Gamma(n+m-3)\,(n+2m-3)}{m!\,\Gamma(l+m+n-2)\,\Gamma(l+n-2)}}\times$$
$$\times\sin^m\varphi\, C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}(\cos\varphi). \qquad (9)$$

2. Теорема сложения для многочленов Гегенбауэра. Из определения матричных элементов вытекает, что для любого элемента g группы $SO(n)$ выполняется равенство

$$\Xi^l_O(g^{-1}\xi)=\sum_M t^{nl}_{MO}(g)\,\Xi^l_M(\xi). \qquad (1)$$

Обозначим через $\xi^{(g)}_n$ n-ю декартову координату вектора $g^{-1}\xi$. Принимая во внимание формулу (7) п. 6 § 3, мы можем переписать равенство (1) в следующем виде:

$$C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi^{(g)}_n)=\sqrt{\frac{\Gamma(n+l-2)\,(n-2)}{l!\,\Gamma(n-2)\,(2l+n-2)}}\sum_M t^{nl}_{MO}(g)\,\Xi^l_M(\xi). \qquad (2)$$

Поскольку $t^{nl}_{MO}(g)$ и $\Xi^l_M(\xi)$ выражаются через многочлены Гегенбауэра, равенство (2) можно рассматривать как общий вид теоремы сложения для этих многочленов. Однако формула (2) мало удобна для применения, поскольку выражения $t^{nl}_{MO}(g)$ и $\Xi^l_M(\xi)$ через многочлены Гегенбауэра довольно сложны.

Чтобы получить более простую формулу, рассмотрим частный случай равенства (2), выбрав в качестве ξ вектор со сферическими координатами $0, 0, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}$, а в качестве g — вращение на угол φ в плоскости (x_n, x_{n-1}), $g=g_n(\varphi)$.

Вычисляя по формуле (4) п. 6 § 3 значение $\Xi^l_M(\xi)$ для вектора $\xi=\xi(0, \ldots, 0, \theta_{n-2}, \theta_{n-1})$, получаем

$$\Xi^l_M(\xi)=0,$$

если $m_k\neq 0$, $k\geqslant 2$, и

$$\Xi^l_M(\xi)=A^l_M\sin^m\theta_{n-1}\,C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}(\cos\theta_{n-1})\,C_m^{\frac{n-3}{2}}(\cos\theta_{n-2}),$$

если $M=(m, 0, \ldots, 0)$. При этом

$$A_M^l=2^{n+m-4}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)\sqrt{\frac{(l-m)!\,m!\,(n+2l-2)(n+2m-3)}{\pi\Gamma(l+m+n-2)\Gamma(m+n-3)(n-2)}}.$$

Значение же $t_{MO}^{nl}[g_n(\varphi)]$ дается формулой (4) п. 1.

Нам осталось вычислить $\xi_n^{(g)}$. Заметим для этого, что декартовы координаты точки $\xi(0, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1})$ имеют вид

$$\xi_k=0, \qquad 1\leqslant k\leqslant n-2,$$
$$\xi_{n-1}=\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2},$$
$$\xi_n=\cos\theta_{n-1}.$$

Поэтому вращение $g_n(\varphi)^{-1}$ переводит точку ξ в точку ξ^g, n-я координата которой имеет вид

$$\xi_n^g=\cos\varphi\cos\theta_{n-1}+\sin\varphi\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}.$$

Подставим полученные выражения для ξ_n^g, $\Xi_M^l(\xi)$ и $t_{MO}^n[g_n(\varphi)]$ в формулу (2) и заменим θ_{n-1} на θ, θ_{n-2} на ψ и $\frac{n-2}{2}$ на p. Мы получим

$$C_l^p(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)=$$
$$=\frac{\Gamma(2p-1)}{[\Gamma(p)]^2}\sum_{m=0}^{l}\frac{2^{2m}\Gamma^2(p+m)(l-m)!\,(2m+2p-1)}{\Gamma(l+m+2p)}\times$$
$$\times C_{l-m}^{p+m}(\cos\varphi)\sin^m\varphi\, C_{l-m}^{p+m}(\cos\theta)\sin^m\theta\, C_m^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi). \qquad (3)$$

Формулу (3) называют обычно *формулой сложения для многочленов Гегенбауэра.*

Отметим некоторые частные случаи формулы (3). Если положить в ней $\psi=0$ и принять во внимание, что

$$C_m^{p-\frac{1}{2}}(1)=\frac{\Gamma(2p+m-1)}{m!\,\Gamma(2p-1)},$$

то получим равенство

$$C_l^p[\cos(\theta-\varphi)]=$$
$$=\frac{1}{[\Gamma(p)]^2}\sum_{m=0}^{l}\frac{2^{2m}\Gamma^2(p+m)(l-m)!\,\Gamma(2p+m-1)(2m+2p-1)}{\Gamma(l+m+2p)\,m!}\times$$
$$\times C_{l-m}^{p+m}(\cos\varphi)\sin^m\varphi\, C_{l-m}^{p+m}(\cos\theta)\sin^m\theta. \qquad (4)$$

Аналогично, положив $\psi=\frac{\pi}{2}$ и принимая во внимание, что $C_{2m+1}^p(0)=0$ и

$$C_{2m}^p(0)=\frac{(-1)^m\Gamma(p+m)}{\Gamma(p)\,m!}$$

(см. п. 3 § 3), получим

$$C_l^p(\cos\theta\cos\varphi)=$$

$$=\frac{\Gamma(2p-1)}{[\Gamma(p)]^2}\sum_{m=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^m 2^{4m}\Gamma^2(p+2m)(l-2m)!\,\Gamma(p+m-{}^1/_2)(4m+2p+1)}{\Gamma(l+2m+2p)\,\Gamma(p-{}^1/_2)\,m!}\times$$

$$\times C_{l-2m}^{p+2m}(\cos\varphi)\sin^{2m}\varphi\, C_{l-2m}^{p+2m}(\cos\theta)\sin^{2m}\theta. \qquad (5)$$

Если же положить в равенстве (3) $\varphi=\theta=\frac{\pi}{2}$ и $l-m=2k$, то получим выражение $C_l^p(\cos\psi)$ через функции $C_k^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi)$:

$$C_l^p(\cos\psi)=\frac{\Gamma(2p-1)}{[\Gamma(p)]^2}\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(2k)!\,(2l-4k+2p-1)}{\Gamma(2l-2k+2p)}\times$$

$$\times\left[\frac{2^{l-2k}\,\Gamma(p+l-k)}{k!}\right]^2 C_{l-2k}^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi). \qquad (6)$$

3. Формула умножения для многочленов Гегенбауэра. Умножим обе части формулы сложения (3) п. 2 на выражение $C_k^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi)\sin^{2p-1}\psi$ и проинтегрируем по ψ от 0 до π. В силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра (п. 4 § 3) получим

$$\int_0^\pi C_l^p(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\,C_k^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi)\sin^{2p-1}\psi\,d\psi=$$

$$=\frac{2^{2k+2p-1}[\Gamma(p+k)]^2(l-k)!\,\Gamma(2p+k-1)}{k!\,\Gamma(2p-1)\,\Gamma(l+k+2p)}\times$$

$$\times C_{l-k}^{p+k}(\cos\varphi)\sin^k\varphi\, C_{l-k}^{p+k}(\cos\theta)\sin^k\theta. \qquad (1)$$

Эту формулу называют *формулой умножения* для многочленов Гегенбауэра. В частности, при $k=0$ получаем равенство

$$\int_0^\pi C_l^p(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\sin^{2p-1}\psi\,d\psi=$$

$$=\frac{2^{2p-1}\,l!\,[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p+l)}C_l^p(\cos\varphi)\,C_l^p(\cos\theta). \qquad (2)$$

Равенство (2) имеет простой геометрический смысл. Чтобы выяснить его, заметим, что зональные сферические функции $t_{00}^{nl}(g)$ можно рассматривать как функции на сфере, зависящие только от полярного угла θ (см. п. 2). В соответствии с этим будем писать

$$t_{00}^{nl}(g)=t_{00}^{nl}(\cos\theta).$$

По формуле (8) п. 1 имеем (при $n=2p+2$)

$$t_{OO}^{nl}(\cos\theta)=\frac{\Gamma(2p)\,l!}{\Gamma(2p+l)}C_l^p(\cos\theta).$$

Поэтому формулу (2) можно переписать так:

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}\int_0^\pi t_{OO}^{nl}(\cos\gamma)\sin^{2p-1}\psi\,d\psi=t_{OO}^{nl}(\cos\varphi)\,t_{OO}^{nl}(\cos\theta), \qquad (3)$$

где $\cos\gamma=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi$.

Легко проверить, что выражение в левой части равенства (3) является не чем иным, как средним значением функции $t_{OO}^{nl}(\cos\gamma)$ по $(n-2)$-мерной сфере $S^{n-2}(P,\varphi)$ со сферическим радиусом φ и с центром в точке P, полярное расстояние которой равно θ (т. е. множеству таких точек M сферы S^{n-1}, что дуга MP равна φ).

Итак, мы доказали, что среднее значение функции $t_{OO}^{nl}(\cos\gamma)$ по сфере $S^{n-2}(P,\varphi)$ указанного выше вида равно $t_{OO}^{nl}(\cos\theta)\,t_{OO}^{nl}(\cos\varphi)$.

Рассмотрим теперь некоторые формулы, получающиеся путем преобразования формулы умножения (2). Сделаем в формуле (2) подстановку

$$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi=\cos\gamma.$$

Так как

$$\sin\psi=\frac{[\cos(\theta-\varphi)-\cos\gamma]^{\frac{1}{2}}[\cos\gamma-\cos(\theta+\varphi)]^{\frac{1}{2}}}{\sin\theta\sin\varphi}$$

и

$$d(\cos\psi)=\frac{d(\cos\gamma)}{\sin\theta\sin\varphi},$$

а γ меняется от $|\theta-\varphi|$ до $\theta+\varphi$, когда ψ изменяется от 0 до π, то мы получаем

$$\int_{|\theta-\varphi|}^{\theta+\varphi}C_l^p(\cos\gamma)\,C_k^{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\gamma-\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta\sin\varphi}\right)[\cos(\theta-\varphi)-\cos\gamma]^{p-1}\times$$

$$\times[\cos\gamma-\cos(\theta+\varphi)]^{p-1}\sin\gamma\,d\gamma=\frac{2^{2k+2p-1}[\Gamma(p+k)]^2(l-k)!\,\Gamma(2p+k-1)}{k!\,\Gamma(2p-1)\,\Gamma(l+k+2p)}\times$$

$$\times C_{l-k}^{p+k}(\cos\varphi)\sin^{2p+k-1}\varphi\,C_{l-k}^{p+k}(\cos\theta)\sin^{2p+k-1}\theta. \qquad (4)$$

В частности, при $k=0$ имеем

$$\int_{|\theta-\varphi|}^{\theta+\varphi}C_l^p(\cos\gamma)[\cos(\theta-\varphi)-\cos\gamma]^{p-1}[\cos\gamma-\cos(\theta+\varphi)]^{p-1}\sin\gamma\,d\gamma=$$

$$=\frac{2^{2p-1}l!\,[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p+l)}C_l^p(\cos\varphi)\sin^{2p-1}\varphi\,C_l^p(\cos\theta)\sin^{2p-1}\theta. \qquad (5)$$

Применяя равенство (13) п. 2 § 3, получаем при $|\theta-\varphi|\leqslant\gamma\leqslant\theta+\varphi$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l!\,(l-k)!\,(l+p)}{\Gamma(2p+l)\,\Gamma(l+k+2p)}C_l^p(\cos\gamma)\,C_{l-k}^{p+k}(\cos\varphi)\,C_{l-k}^{p+k}(\cos\theta)=$$
$$=\frac{\pi k!\,\Gamma(2p-1)}{2^{2k+2p}\,[\Gamma(p)\,\Gamma(p+k)]^2\,\Gamma(2p+k-1)}\times$$
$$\times\frac{\left[\sin\frac{\theta-\varphi+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\gamma+\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta+\varphi-\gamma}{2}\right]^{p-1}}{\sin^{2p-1}\gamma\,\sin^{2p+k-1}\varphi\,\sin^{2p+k-1}\theta}\times$$
$$\times C_k^{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\gamma-\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta\sin\varphi}\right),\qquad(6)$$

а при остальных значениях γ на отрезке $[0,\ 2\pi]$ эта сумма равна нулю. В частности, при $k=0$ и $|\theta-\varphi|\leqslant\gamma\leqslant\theta+\varphi$, получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l!)^2\,(l+p)}{[\Gamma(2p+l)]^2}C_l^p(\cos\gamma)\,C_l^p(\cos\varphi)\,C_l^p(\cos\theta)=$$
$$=\frac{\pi\Gamma(2p-1)\left[\sin\frac{\theta-\varphi+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\gamma+\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta+\varphi-\gamma}{2}\right]^{p-1}}{2^{2p}\,[\Gamma(p)]^4\,\Gamma(2p-1)\,(\sin\gamma\sin\varphi\sin\theta)^{2p-1}},\qquad(7)$$

а при остальных значениях γ на отрезке $[0,\ 2\pi]$ сумма этого вида равна нулю.

4. Реализация представлений $T^{nl}(g)$ в пространстве функций от $n-1$ переменного. В следующем пункте мы выведем интегральное представление для многочленов Гегенбауэра. Чтобы получить это представление в достаточно простой форме, нам понадобится еще одна реализация представления $T^{nl}(g)$.

Мы реализовали в п. 2 § 2 представление $T^{nl}(g)$ группы $SO(n)$ в фактор-пространстве $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, где, напомним, $\mathfrak{R}^{nl}$ — пространство однородных многочленов степени l от n переменных. Было показано также, что этот фактор-пространство можно отождествить с пространством $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов степени l.

Определим теперь еще одну реализацию представления $T^{nl}(g)$. Сделаем в каждом многочлене $f(\mathbf{x})$ из $\mathfrak{R}^{nl}$ подстановку $x_n=ir_{n-1}$, где $r_{n-1}^2=x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2$. Очевидно, что при этой подстановке многочлен $r^2=x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2$ переходит в нуль, а следовательно, и все подпространство $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ переходит в нуль. В то же время ни один из многочленов, не принадлежащих $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$, не обращается в нуль при преобразовании

$$Qf(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n)=f(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ ir_{n-1}).\qquad(1)$$

В этом проще всего убедиться, записав многочлен $f(\mathbf{x})$ в виде

$$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2) f_1(\mathbf{x}) + x_n P_1(\mathbf{x}') + P_2(\mathbf{x}'), \tag{2}$$

где

$$f_1(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{n,\, l-2},\ P_1(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l-1},\ P_2(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l}.$$

Ясно, что если хотя бы один из многочленов $P_1(\mathbf{x}')$ или $P_2(\mathbf{x}')$ отличен от нуля, то $Qf(\mathbf{x}) \neq 0$.

Итак, мы доказали, что оператор Q устанавливает взаимно однозначное соответствие между фактор-пространством $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$ и пространством $\mathfrak{A}^{nl}$ функций вида $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, ir_{n-1})$. Выясним, из каких функций состоит пространство $\mathfrak{A}^{nl}$. Для этого положим в равенстве (2) $x_n = ir_{n-1}$. Мы получим

$$Qf(\mathbf{x}) = ir_{n-1} P_1(\mathbf{x}') + P_2(\mathbf{x}'), \tag{3}$$

где $P_1(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l-1}$, $P_2(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l}$.

Обратно, любая функция вида (3), где $P_1(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l-1}$ и $P_2(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l}$, принадлежит пространству $\mathfrak{A}^{nl}$; она является образом многочлена $x_n P_1(\mathbf{x}') + P_2(\mathbf{x}')$.

Итак, пространство $\mathfrak{A}^{nl}$ состоит из функций вида

$$ir_{n-1} P_1(\mathbf{x}') + P_2(\mathbf{x}'), \quad \text{где} \quad P_1(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l-1}, \quad P_2(\mathbf{x}') \in \mathfrak{R}^{n-1,\, l}.$$

Поскольку пространство $\mathfrak{A}^{nl}$ естественным образом изоморфно фактор-пространству $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$, в $\mathfrak{A}^{nl}$ можно реализовать представление $T^{nl}(g)$. Именно, положим

$$R^{nl}(g) F(\mathbf{x}') = QT^{nl}(g) Q^{-1} F(\mathbf{x}'), \tag{4}$$

где $F(\mathbf{x}') \in \mathfrak{A}^{nl}$, оператор Q имеет указанный выше смысл, а Q^{-1} — оператор, переводящий функцию $F(\mathbf{x}')$ пространства $\mathfrak{A}^{nl}$ в соответствующий ей смежный класс фактор-пространства $\mathfrak{R}^{nl}/r^2\mathfrak{R}^{n,\, l-2}$ (т. е. в смежный класс, содержащий, например, многочлен $x_n P_1(\mathbf{x}') + P_2(\mathbf{x}')$).

Простой подсчет, провести который мы предоставляем читателю, показывает, что операторы представления $R^{nl}(g)$ имеют следующий вид: если $h \in SO(n-1)$, то

$$R^{nl}(h) F(\mathbf{x}') = F(h^{-1}\mathbf{x}'). \tag{5}$$

Если же $g = g_n(\varphi)$ — вращение на угол φ в плоскости (x_n, x_{n-1}), то

$$\begin{aligned} R^{nl}[g_n(\varphi)] F(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= F(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\cos\varphi - ir_{n-1}\sin\varphi) \equiv \\ &\equiv (x_{n-1}\sin\varphi + ir_{n-1}\cos\varphi) P_1(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\cos\varphi - ir_{n-1}\sin\varphi) + \\ &\quad + P_2(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\cos\varphi - ir_{n-1}\sin\varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

где $F(\mathbf{x}') = ir_{n-1} P_1(\mathbf{x}') + P_2(\mathbf{x}')$.

5. Разложение пространства $\mathfrak{A}^{nl}$. В п. 8 § 2 было доказано, что

$$\mathfrak{R}^{nl} = r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2} + \sum_{m=0}^{l} x_n^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}. \tag{1}$$

При отображении Q подпространство $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$ переходит в нуль, а подпространства $x_n^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$ — в подпространства $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{A}^{nl}$ является прямой суммой подпространств $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$, состоящих из функций вида $(ir_{n-1})^{l-m}h_m(\mathbf{x}')$, где $h_m(\mathbf{x}') \in \mathfrak{H}^{n-1,\,m}$:

$$\mathfrak{A}^{nl} = \sum_{m=0}^{l} (ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}. \tag{2}$$

Так как подпространства $x_n^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$ в $\mathfrak{R}^{nl}$ инвариантны относительно операторов $T^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$ (см. п. 8 § 2), то подпространства $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$ в $\mathfrak{A}^{nl}$ инвариантны относительно операторов $R^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$. В этом нетрудно убедиться и непосредственно, заметив, что

$$R^{nl}(h)\left[(ir_{n-1})^{l-m}h_m(\mathbf{x}')\right] = (ir_{n-1})^{l-m}h_m(h^{-1}\mathbf{x}').$$

Таким образом, мы разложили пространство $\mathfrak{A}^{nl}$ в прямую сумму подпространств $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$, инвариантных относительно операторов $R^{nl}(h)$, $h \in SO(n-1)$. Легко видеть, что сужение представления $R^{nl}(h)$ подгруппы $SO(n-1)$ на подпространство $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$ изоморфно неприводимому представлению $T^{n-1,\,m}(h)$ этой подгруппы.

6. Инвариантное скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$. Построим теперь в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$ скалярное произведение, инвариантное относительно представления $R^{nl}(g)$, $g \in SO(n)$. Представление $R^{nl}(g)$ эквивалентно представлению

$$H^{nl}(g)f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}) \tag{1}$$

группы $SO(n)$ в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов. Пусть $F_1(\mathbf{x}')$ и $F_2(\mathbf{x}')$ — функции из пространства $\mathfrak{A}^{nl}$. Возьмем многочлены $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ из пространства $\mathfrak{R}^{nl}$, такие, что $Qf_j(\mathbf{x}) = F_j(\mathbf{x}')$, $j = 1, 2$. Тогда инвариантное скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$ определяется формулой

$$\langle F_1, F_2\rangle = \langle Qf_1, Qf_2\rangle = (Hf_1, Hf_2) = \int_{S^{n-1}} Hf_1(\xi)\,\overline{Hf_2(\xi)}\,d\xi \tag{2}$$

($Hf(\mathbf{x})$ — гармоническая проекция многочлена $f(\mathbf{x})$).

Нашей целью, однако, является получение иной записи для скалярного произведения $\langle F_1, F_2\rangle$. Именно, в силу равенства (2) п. 5 любая функция $F(\mathbf{x}')$ на $\mathfrak{A}^{nl}$ может быть представлена в виде

$$F(\mathbf{x}')=\sum_{m=0}^{l}(ir_{n-1})^{l-m}h_m(\mathbf{x}'), \tag{3}$$

где $h_m(\mathbf{x}')\in\mathfrak{H}^{n-1,m}$. Мы хотим выразить $\langle F_1, F_2\rangle$ через функции $h_m^{(1)}(\mathbf{x}')$ и $h_m^{(2)}(\mathbf{x}')$, входящие в разложение (3) функций $F_1(\mathbf{x}')$ и $F_2(\mathbf{x}')$.

Сначала рассмотрим сужение представления $R^{nl}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$. Это сужение задает в каждом из подпространств $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,m}$ представление, эквивалентное неприводимому представлению $T^{n-1,m}(h)$ группы $SO(n-1)$. Но инвариантное скалярное произведение для представления $T^{n-1,m}(h)$ имеет вид

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\int_{S^{n-2}}\varphi_1(\xi')\overline{\varphi_2(\xi')}\,d\xi' \tag{4}$$

(см. п. 7 § 2). Отсюда без труда получается, что искомое инвариантное скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$ имеет вид

$$(F_1, F_2)=\sum_{m=0}^{l}\alpha_m\int_{S^{n-2}}h_m^{(1)}(\xi')\overline{h_m^{(2)}(\xi')}\,d\xi' \tag{5}$$

(см. п. 3 § 3 главы I).

Нам осталось найти коэффициенты α_m. Возьмем некоторую функцию $F(\mathbf{x}')=(ir_{n-1})^{l-m}h_m(\mathbf{x}')$, где $h_m(\mathbf{x}')\in\mathfrak{H}^{n-1,m}$. Мы имеем

$$\langle F, F\rangle=\alpha_m\int_{S^{n-2}}|h_m(\xi')|^2\,d\xi'. \tag{6}$$

Но по формуле (1) п. 4 $F(\mathbf{x}')=Q[x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')]$, а гармоническая проекция многочлена $x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')$ вычисляется по формуле (9) п. 5 § 3:

$$H[x_n^{l-m}h_m(\mathbf{x}')]=\frac{(l-m)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)}{2^{l-m}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}r^{l-m}C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}\left(\frac{x_n}{r}\right)h_m(\mathbf{x}'). \tag{7}$$

Используя формулу (7), получаем следующее равенство:

$$\alpha_m\int_{S^{n-2}}|h_m(\xi')|^2\,d\xi'=$$

$$=\left[\frac{(l-m)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)}{2^{l-m}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}\right]^2\int_{S^{n-1}}|C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}(\xi_n)\,h_m(\mathbf{x}')|^2\,d\xi, \tag{8}$$

где $\mathbf{x}'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\xi=(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n)$ и $\|\xi\|=1$.

Нормируя вектор $\mathbf{x}$, получим вектор

$$\xi' = \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-\xi_n^2}}.$$

В силу однородности многочлена $h_m(\mathbf{x}')$ имеем

$$h_m(\mathbf{x}') = (1-\xi_n^2)^{\frac{m}{2}} h_m(\xi'). \tag{9}$$

Наконец, примем во внимание, что нормированная инвариантная мера $d\xi$ на сфере S^{n-1} выражается через координату ξ_n и нормированную инвариантную меру $d\xi'$ на S^{n-2} по формуле

$$d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} (1-\xi_n^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi_n\, d\xi'. \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что интеграл в правой части равенства (8) может быть записан в виде

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \left[C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}(\xi_n)\right]^2 (1-\xi_n^2)^{m+\frac{n-3}{2}} d\xi_n \times$$
$$\times \int_{S^{n-2}} |h_n(\xi')|^2\, d\xi'. \tag{11}$$

В силу соотношений нормировки для многочленов Гегенбауэра (формула (5) п. 4 § 3) получаем из формул (8) и (11)

$$\alpha_m = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\,(l-m)!\,(n+l+m-3)!}{2^{2l+n-3}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}. \tag{12}$$

Отсюда вытекает следующее выражение для инвариантного скалярного произведения в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$:

$$\langle F_1, F_2\rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)(2l+n-3)!} \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{l} (l-m)!\,(n+l+m-3)! \int_{S^{n-2}} h_m^{(1)}(\xi')\,\overline{h_m^{(2)}(\xi')}\, d\xi', \tag{13}$$

где

$$F_j(\mathbf{x}') = \sum_{m=0}^{l} (ir_{n-1})^{l-m} h_m^{(j)}(\xi') \tag{14}$$

(мы применили здесь формулу удвоения для Г-функции).

Из формулы (13) вытекает, в частности, что

$$\langle F, (ir_{n-1})^{l-m} h_m(\mathbf{x}')\rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right) i^{m-l}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)(2l+n-3)!}\times$$

$$\times (l-m)!\,(l+n+m-3)! \int\limits_{S^{n-2}} F(\xi')\,\overline{h_m(\xi')}\,d\xi'. \qquad (15)$$

Для доказательства достаточно принять во внимание формулу (13) и попарную ортогональность подпространств $(ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$.

Наконец, построим в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$ ортогональный нормированный базис относительно скалярного произведения (13). Из равенства (2) вытекает, что в качестве такого базиса можно выбрать функции вида

$$\hat{\Xi}^l_M(\mathbf{x}') = Q\Xi^l_M(\mathbf{x}), \qquad (16)$$

где $\Xi^l_M(\mathbf{x})$ — построенный в п. 6 § 3 ортогональный нормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$.

Функции $\hat{\Xi}^l_M(\mathbf{x}')$ легко записать в явном виде. Для этого вспомним, что по формуле (8) п. 5 § 3 функции

$$x_n^{l-m} h_m(\mathbf{x}') \quad \text{и} \quad \frac{(l-m)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)}{2^{l-m}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)} r^{l-m} C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}\left(\frac{x_n}{r}\right) h_m(\mathbf{x}')$$

лежат в одном и том же смежном классе по $r^2\mathfrak{R}^{n,\,l-2}$. Поэтому оператор Q переводит их в одну и ту же функцию. Следовательно,

$$Q\left[r^{l-m} C_{l-m}^{\frac{n-2}{2}+m}\left(\frac{x_n}{r}\right) h_m(\mathbf{x}')\right] = \frac{2^{l-m}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}{(l-m)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)} Q(x_n^{l-m} h_m(\mathbf{x}')) =$$

$$= \frac{2^{l-m}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}{(l-m)!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)} (ir_{n-1})^{l-m} h_m(\mathbf{x}'). \qquad (17)$$

Применяя равенство (17) к формуле (16), получаем при $M = (m, m_2, \ldots, \pm m_{n-2})$ (см. формулу (4) п. 6 § 3)

$$\hat{\Xi}_M^l(\mathbf{x}') = \frac{2^{l-m}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}{(l-m)!\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m\right)} A_M^l (ir_{n-1})^{l-m} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-3} r_{n-j}^{m_j - m_{j+1}} C_{m_j - m_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2}+m_{j+1}}\left(\frac{x_{n-j}}{r_{n-j}}\right)(x_2 \pm ix_1)^{m_{n-2}} =$$

$$= \frac{2^{l-1}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{(2l+n-2)\Gamma(n-1)}{\Gamma(l+n+m-2)(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}(ir_{n-1})^{l-m}\,\Xi_{M_1}^m(\mathbf{x}'), \qquad (18)$$

где $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $M_1 = (m_2, \ldots, \pm m_{n-2})$.

Очевидно, что $\hat{\Xi}_M^l(\mathbf{x}') \in (ir_{n-1})^{l-m}\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$, и потому

$$\langle F, \hat{\Xi}_M^l\rangle = \frac{[\pi\Gamma(n-1)\Gamma(l+n+m-2)(l-m)!\,(2l+n-2)]^{\frac{1}{2}}}{2^{l+n-2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\, i^{m-l} \times$$

$$\times \int_{S^{n-2}} F(\xi')\,\overline{\Xi_{M_1}^m(\xi')}\,d\xi'. \qquad (19)$$

7. Интегральное представление многочленов Гегенбауэра. Мы можем теперь вывести интегральное представление для многочленов Гегенбауэра. Воспользуемся для этого равенством (6) п. 1 § 3, записав его в виде

$$C_l^p(\cos\varphi) = \frac{\Gamma(2p+l)}{\Gamma(2p)\,l!}\, t_{OO}^{nl}[g_n(\varphi)], \qquad (1)$$

где $n = 2p+2$ и $g = g_n(\varphi)$ — вращение на угол φ в плоскости (x_n, x_{n-1}). Но в силу унитарности представления $T^{nl}(g)$ имеем

$$t_{OO}^{nl}[g_n(\varphi)] = (T^{nl}[g_n(\varphi)]\,\Xi_O^l,\ \Xi_O^l). \qquad (2)$$

Из равенства (2) п. 6 вытекает, что формулу (2) можно переписать в виде

$$t_{OO}^{nl}[g_n(\varphi)] = \langle R^{nl}[g_n(\varphi)]\,\hat{\Xi}_O^l,\ \hat{\Xi}_O^l\rangle. \qquad (3)$$

Так как $O = (0, \ldots, 0)$, то $\Xi_{O_1}^0(\xi') = 1$.

Применяя формулу (19) п. 6, получаем

$$t_{OO}^{nl}[g_n(\varphi)] = \frac{[\pi\Gamma(2p+1)\Gamma(l+2p)\,l!\,(2l+2p)]^{\frac{1}{2}} i^{-l}}{2^{l+2p}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+p+1)} \times$$

$$\times \int_{S^{n-2}} R^{nl}[g_n(\varphi)]\,\hat{\Xi}_O^l(\xi')\,d\xi'. \qquad (4)$$

Из формулы (18) п. 6 следует, что

$$\hat{\Xi}^l_O(\mathbf{x}')=\frac{2^{l-1}\Gamma(p+l)}{\Gamma(p+1)}\left[\frac{(2l+2p)\,\Gamma(2p+1)}{\Gamma(l+2p)\,l!}\right]^{\frac{1}{2}}(ir_{n-1})^l,$$

и потому

$$R^{nl}[g_n(\varphi)]\,\hat{\Xi}^l_O(\mathbf{x}')=$$

$$=\frac{2^{l-1}\Gamma(p+l)}{\Gamma(p+1)}\left[\frac{(2l+2p)\,\Gamma(2p+1)}{\Gamma(l+2p)\,l!}\right]^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}\sin\varphi+ir_{n-1}\cos\varphi)^l. \qquad (5)$$

Подставим это выражение в формулу (4) и перейдем к сферическим координатам. На сфере S^{n-2} имеем $r_{n-1}=1$ и $x_{n-1}=\cos\theta_{n-2}$, а

$$d\xi'=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\ldots\sin\theta_2\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-2}.$$

Поэтому, учитывая равенства (1) и (4), получаем

$$C^p_l(\cos\varphi)=\frac{\Gamma(2p+l)}{2^{2p-1}\Gamma^2(p)\,l!}\int\limits_0^\pi(\cos\varphi-i\sin\varphi\cos\theta)^l\sin^{2p-1}\theta\,d\theta. \qquad (6)$$

Полученное интегральное представление многочленов Гегенбауэра является частным случаем более общей интегральной формулы. Чтобы вывести ее, воспользуемся равенством

$$t^{nl}_{MO}[g_n(\varphi)]=\langle\hat{T}^{nl}[g_n(\varphi)]\,\hat{\Xi}^l_O,\ \hat{\Xi}^l_M\rangle. \qquad (7)$$

Как было показано в п. 1, если $M=(m_1,\ldots,\pm m_{n-2})$ и $m_2\neq 0$, то $t^{nl}_{MO}[g_n(\varphi)]=0$. Поэтому мы можем считать, что $M=(m,0,\ldots,0)$. В этом случае по формуле (9) п. 1 имеем

$$t^{nl}_{MO}[g_n(\varphi)]=$$

$$=\frac{2^m\Gamma(p+m)}{\Gamma(p)}\sqrt{\frac{l!\,(l-m)!\,\Gamma(2p)\,\Gamma(2p+m-1)\,(2p+2m-1)}{m!\,\Gamma(2p+m+l)\,\Gamma(2p+l)}}\times$$

$$\times\sin^m\varphi\,C^{p+m}_{l-m}(\cos\varphi). \qquad (8)$$

Сравнивая равенства (7) и (8) и используя для вычисления скалярного произведения в формуле (7) равенство (15) п. 6, получаем

$$\sin^m\varphi\,C^{p+m}_{l-m}(\cos\varphi)=\frac{m!\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+m+l)\,i^m}{2^{m+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+m)\,l!\,\Gamma(2p+m-1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi(\cos\varphi-i\sin\varphi\cos\theta)^l\,C^{p-\frac{1}{2}}_m(\cos\theta)\sin^{2p-1}\theta\,d\theta. \qquad (9)$$

Совершенно аналогично из соотношения

$$t^{nl}_{MO}[g_n(\varphi)] = t^{nl}_{OM}[g_n(-\varphi)] = \langle \hat{T}^{nl}[g_n(-\varphi)]\,\hat{\Xi}^l_M,\ \hat{\Xi}^l_O\rangle$$

выводится, что

$$\sin^m\varphi\, C^{p+m}_{l-m}(\cos\varphi) = \frac{m!\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+l)\,i^{-m}}{2^{m+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+m)(l-m)!\,\Gamma(2p+m-1)}\times$$
$$\times\int_0^\pi(\cos\varphi+i\cos\theta\sin\varphi)^l C^{p-\frac{1}{2}}_m\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi+i\cos\theta\sin\varphi}\right)\sin^{2p-1}\theta\,d\theta. \qquad (10)$$

Сделаем в интеграле (10) подстановку

$$\frac{\cos\theta\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi+i\cos\theta\sin\varphi}=\cos\gamma.$$

Мы получим

$$\sin^m\varphi\, C^{p+m}_{l-m}(\cos\varphi) = \frac{m!\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+l)\,i^{-m}}{2^{m+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+m)(l-m)!\,\Gamma(2p+m-1)}\times$$
$$\times\int_0^\pi(\cos\varphi-i\cos\gamma\sin\varphi)^{-l-2p}C^{p-\frac{1}{2}}_m(\cos\gamma)\sin^{2p-1}\gamma\,d\gamma. \qquad (11)$$

При $m=0$ получаем отсюда

$$C^p_l(\cos\varphi)=\frac{\Gamma(2p+l)}{2^{2p-1}\Gamma^2(p)\,l!}\int_0^\pi(\cos\varphi-i\cos\varphi\sin\varphi)^{-l-2p}\sin^{2p-1}\gamma\,d\gamma. \qquad (12)$$

Отметим еще частный случай формулы (9). При $\varphi=\frac{\pi}{2}$, принимая во внимание формулу (7) п. 3 § 3, получаем

$$\int_0^\pi C^{p-\frac{1}{2}}_m(\cos\theta)\cos^{m+2k}\theta\sin^{2p-1}\theta\,d\theta=$$
$$=\frac{\pi\Gamma(2k+m+1)\,\Gamma(2p+m-1)(2p-1)}{2^{2p+2k+m-1}m!\,k!\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+m+k+\frac{1}{2}\right)}.$$

8. Связь между многочленами Гегенбауэра и присоединенными функциями Лежандра. Полученное в п. 7 интегральное представление многочленов Гегенбауэра позволяет установить связь между этими многочленами и присоединенными функциями Лежандра. Положив в формуле (9) п. 7 $p=\frac{1}{2}$, получим

$$C^{\frac{1}{2}}_l(\cos\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\varphi-i\sin\varphi\cos\theta)^l\,d\theta. \qquad (1)$$

Сравнивая это равенство с формулой (16) п. 9 § 4 главы III, убеждаемся, что

$$C_l^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi) = P_l(\cos\varphi). \tag{2}$$

Таким образом, многочлены Лежандра являются частным случаем многочленов Гегенбауэра, соответствующим значению $p = \frac{1}{2}$.

Применим теперь рекуррентную формулу (6) п. 3 § 3. Мы получим для любого натурального p

$$C_{l-p}^{p+1/2}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^p C_l^{\frac{1}{2}}(t)}{dt^p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^p P_l(t)}{dt^p}. \tag{3}$$

Так как по формуле (4) п. 9 § 4 главы III имеем

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (t^2-1)^l}{dt^l},$$

то

$$C_{l-p}^{p+1/2}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{p+l}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) l!} \frac{d^{p+l}(t^2-1)^l}{dt^{p+l}},$$

или, иначе,

$$C_l^q(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q+l}\Gamma(q)\Gamma\left(q+l+\frac{3}{2}\right)} \frac{d^{2q+l}(t^2-1)^{q+l+1/2}}{dt^{2q+l}}, \tag{4}$$

где q — полуцелое, а l — целое число, $q \geqslant \frac{1}{2}$, $l \geqslant 0$.

По формуле (13) п. 9 § 4 главы III имеем

$$P_l^p(t) = \frac{(-1)^p (1-t^2)^{p/2}}{2^l l!} \frac{d^{p+l}(t^2-1)^l}{dt^{p+l}}. \tag{5}$$

Сравнивая это равенство с формулой (4), получаем

$$C_{l-p}^{p+1/2}(t) = \frac{(-1)^p \sqrt{\pi}(1-t^2)^{-p/2}}{2^p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} P_l^p(t), \tag{6}$$

или, иначе,

$$C_l^q(t) = \frac{(-1)^{q-1/2}\sqrt{\pi}(1-t^2)^{1/4-q/2}}{2^{q-1/2}\Gamma(q)} P_{l+q-1/2}^{q-1/2}(t) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(l+2q)(1-t^2)^{1/4-q/2}}{2^{q-1/2}\Gamma(q)\, l!} P_{l+q-1/2}^{1/2-q}(t). \tag{6'}$$

Согласно формуле (5) это равенство можно переписать так:

$$C_l^q(t)=\frac{(-1)^l\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+2q)(1-t^2)^{1/2-q}}{2^l\Gamma\left(l+q+\frac{1}{2}\right)l!}\,\frac{d^l(1-t^2)^{l+q-1/2}}{dt^l}. \qquad (7)$$

Из полученного выражения для $C_l^q(t)$ сразу следует, что

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{p-1}{2}}F(t)\,C_l^{\frac{p}{2}}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{l!}\,\frac{p(p+1)\dots(p+l-1)}{(p+1)(p+3)\dots(p+2l-1)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{l+\frac{p-1}{2}}\frac{d^lF}{dt^l}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(p+l)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2^l l!\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(l+\frac{p+1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{l+\frac{p-1}{2}}\frac{d^lF}{dt^l}\,dt. \qquad (8)$$

Для доказательства достаточно подставить вместо $C_l^{\frac{p}{2}}(t)$ выражение (7) и l раз проинтегрировать по частям. Проинтегрированные члены обращаются в нуль при подстановке пределов интегрирования.

Рассмотрим теперь случай, когда p — целое число. Положим в равенстве (9) п. 7 $p=1$ и сделаем подстановку $\cos\varphi - i\sin\varphi\cos\theta = z$. Мы получим

$$C_l^1(\cos\varphi)=\frac{l+1}{2i\sin\varphi}\int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}}z^l\,dz=\frac{\sin(l+1)\varphi}{\sin\varphi}. \qquad (9)$$

Применяя рекуррентную формулу (6) п. 3 § 3, находим

$$C_{l-p}^{p+1}(\cos\varphi)=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}\left(\frac{d}{d\cos\varphi}\right)^p\left[\frac{\sin(l+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)(l+1)}\left(\frac{d}{d\cos\varphi}\right)^{p+1}(\cos(l+1)\varphi). \qquad (10)$$

Равенство (10) можно переписать так:

$$C_l^p(\cos\varphi)=\frac{1}{2^{p-1}\Gamma(p)(p+l)}\left(\frac{d}{d\cos\varphi}\right)^p[\cos(p+l)\varphi]. \qquad (10')$$

Здесь p и l — целые неотрицательные числа.

При $p=0$ многочлены Гегенбауэра обращаются в нуль. Вычислим теперь $\lim\limits_{p\to 0}\Gamma(p)\,C_l^p(\cos\varphi)$. Для этого умножим на $\Gamma(p)$ обе части рекуррентной формулы

$$lC_l^p(\cos\varphi)=2p\left[\cos\varphi\,C_{l-1}^{p+1}(\cos\varphi)-C_{l-2}^{p+1}(\cos\varphi)\right]$$

(см. п. 3 § 3) и перейдем к пределу при $p \to 0$. Принимая во внимание выражение (9), получаем равенство

$$\lim_{p \to 0} \Gamma(p)\, C_l^p (\cos\varphi) = \frac{2\cos l\varphi}{l}, \tag{11}$$

которое также можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{p \to 0} \frac{C_l^p(\cos\varphi)}{p} = \frac{2\cos l\varphi}{l}. \tag{11'}$$

9. Некоторые разложения по многочленам Гегенбауэра. Формулу (9) п. 7 можно истолковать как выражение коэффициентов Фурье при разложении функции $(\cos\varphi - i\sin\varphi\cos\theta)^l$ по многочленам $C_m^{p-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$. Принимая во внимание формулы (11) и (12) п. 5 § 3, получаем

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi\cos\theta)^l =$$
$$= \frac{\Gamma(2p-1)\, l!}{\Gamma(p)} \sum_{m=0}^{l} \frac{(-2i)^m (2m+2p-1)\,\Gamma(p+m)}{\Gamma(2p+l+m)} \sin^m\varphi\, C_{l-m}^{p+m}(\cos\varphi) \times$$
$$\times C_m^{p-1/2}(\cos\theta). \tag{1}$$

Отметим некоторые частные случаи полученной формулы. Полагая в ней $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\cos^l\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2p-1)\, l!}{2^{2p+l-1}\,\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(2p+2l-4k-1)}{k!\,\Gamma\left(p+l-k+\frac{1}{2}\right)} C_{l-2k}^{p-1/2}(\cos\theta). \tag{2}$$

Далее, полагая $\theta = 0$ или π, находим

$$e^{\pm il\varphi} = \frac{l!}{\Gamma(p)} \sum_{m=0}^{l} \frac{(\pm 2i)^m (2m+2p-1)\,\Gamma(p+m)}{\Gamma(2p+l+m)\, m!} \times$$
$$\times \Gamma(2p+m-1) \sin^m\varphi\, C_{l-m}^{p+m}(\cos\varphi). \tag{3}$$

Наконец, перемножим разложения (1) при $l = l_1$ и $l = l_2$ и применим к левой части получившегося равенства это же разложение при $l = l_1 + l_2$. Умножив обе части равенства на $\sin^{2p}\theta$ и проинтегрировав по θ от 0 до π, получаем, в силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра, следующее соотношение:

$$C^p_{l_1+l_2}(\cos\varphi) = \frac{l_1!\ l_2!\ \Gamma(2p+l_1+l_2)}{(l_1+l_2)!\ \Gamma^2(p)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\min(l_1,\ l_2)} \frac{(-4)^k\,\Gamma^2(p+k)\,\Gamma(k+2p-1)}{k!\,\Gamma(2p+l_1+k)} \frac{(2k+2p-1)}{\Gamma(2p+l_2+k)} \sin^{2k}\varphi \times$$

$$\times C^{p+k}_{l_1-k}(\cos\varphi)\, C^{p+k}_{l_2-k}(\cos\varphi). \qquad (4)$$

10. Другие интегральные представления многочленов Гегенбауэра. Мы использовали для вывода интегрального представления многочленов Гегенбауэра реализацию представлений $T^{nl}(g)$ в пространстве $\mathfrak{A}^{nl}$. Другие интегральные представления возникают, если реализовать эти представления в пространстве $\mathfrak{H}^{nl}$. При такой реализации мы имеем

$$t^{nl}_{OO}[g_n(\varphi)] = (T^{nl}[g_n(\varphi)]\,\Xi^l_O, \Xi^l_O) = \int\limits_{S^{n-1}} T^{nl}[g_n(\varphi)]\,\Xi^l_O(\xi)\,\overline{\Xi^l_O(\xi)}\,d\xi. \qquad (1)$$

Но по формуле (7) п. 6 § 3

$$\Xi^l_O(\xi) = \sqrt{\frac{l!\Gamma(n-2)(2l+n-2)}{\Gamma(n+l-2)(n-2)}}\, C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}),$$

а оператор $T^{nl}[g_n(\varphi)]$ переводит функцию $C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1})$ в

$$T^{nl}[g_n(\varphi)]\,C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) =$$

$$= C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}\cos\varphi + \sin\theta_{n-1}\sin\varphi\cos\theta_{n-2}).$$

Поэтому

$$t^{nl}_{OO}[g_n(\varphi)] = \frac{l!\Gamma(n-2)(2l+n-2)}{\Gamma(n+l-2)(n-2)} \times$$

$$\times \int\limits_{S^{n-1}} C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}\cos\varphi + \sin\theta_{n-1}\sin\varphi\cos\theta_{n-2})\, C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1})\,d\xi. \quad (2)$$

Перейдем к сферическим координатам и подставим вместо $t_{OO}^{nl}[g_n(\varphi)]$ выражение (1) п. 7. Заменяя $n-2$ на $2p$, θ_{n-1} на θ и θ_{n-2} на ψ, получаем

$$C_l^p(\cos\varphi) = \frac{l+p}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi C_l^p(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\times \\ \times C_l^p(\cos\theta)\sin^{2p}\theta\sin^{2p-1}\psi\,d\theta\,d\psi. \quad (3)$$

В справедливости формулы (3) можно убедиться также, разлагая $C_l^p(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)$ по теореме сложения и почленно интегрируя полученное выражение.

Точно так же, как и (3), выводится формула

$$\sin^m\varphi\, C_{l-m}^{p+m}(\cos\varphi) = \\ = \frac{\Gamma(2p-1)(l+p)}{\pi\Gamma(2p+m-1)}\int_0^\pi\int_0^\pi C_l^p(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\times \\ \times C_{l-m}^{p+m}(\cos\theta)\sin^{2p+m}\theta\, C_m^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi)\sin^{2p-1}\psi\,d\theta\,d\psi. \quad (4)$$

Предоставляем читателю получить ее из равенства

$$t_{MO}^{nl}[g_n(\varphi)] = (T^{nl}[g_n(\varphi)]\,\Xi_O^l,\ \Xi_M^l).$$

11. Некоторые интегралы, содержащие многочлены Гегенбауэра. Интересные интегралы, содержащие многочлены Гегенбауэра, получаются, если вычислять зональную сферическую функцию $t_{OO}^{nl}(g)$ не в сферических, а в бисферических координатах. Последние определяются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\alpha\sin\theta_{m-1}\ldots\sin\theta_1,\\ x_2 &= \sin\alpha\sin\theta_{m-1}\ldots\cos\theta_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_m &= \sin\alpha\cos\theta_{m-1},\\ x_{m+1} &= \cos\alpha\sin\psi_{n-m-1}\ \ldots\ \sin\psi_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= \cos\alpha\cos\psi_{n-m-1}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\\ &0\leqslant\psi_k\leqslant\pi,\quad k\neq 1,\quad 0\leqslant\psi_1\leqslant 2\pi,\\ &0\leqslant\theta_k\leqslant\pi,\quad k\neq 1,\quad 0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Легко проверить, что нормированная инвариантная мера на сфере S^{n-1} выражается в бисферических координатах следующим образом:

$$d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}} \sin^{m-1}\alpha \cos^{n-m-1}\alpha \sin^{m-2}\theta_{m-1} \ldots \sin\theta_2 \times$$
$$\times \sin^{n-m-2}\psi_{n-m-1} \ldots \sin\psi_2 \, d\alpha \, d\theta_1 \ldots d\theta_{m-1} \, d\psi_1 \ldots d\psi_{n-m-1}. \quad (3)$$

Вычислим в бисферических координатах интеграл (4) из п. 7. Так как на сфере S^{n-2} имеем $r_{n-1} = 1$ и $x_{n-1} = \cos\alpha \cos\psi_{n-m-2}$, то, учитывая формулы (1), (4) и (5) из п. 7 и равенство (3), получаем $\left(p = \frac{n-2}{2}\right)$:

$$C_l^p(\cos\varphi) = \frac{\Gamma(2p+l)}{2^{2p-2}\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{m}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} (\cos\varphi - i\sin\varphi\cos\alpha\cos\psi)^l \sin^{m-1}\alpha \cos^{2p-m}\alpha \sin^{2p-m-1}\psi \, d\psi \, d\alpha \quad (4)$$

(мы выполнили здесь интегрирование по координатам $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ и $\psi_1, \ldots, \psi_{n-m-3}$).

Проинтегрируем теперь по ψ. Для этого вынесем сначала за скобки $(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha)^{l/2}$ и положим

$$m = 2p - 2q, \quad \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha}} = \cos\beta,$$
$$\frac{\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha}} = \sin\beta.$$

Применяя формулу (6) из п. 7, получаем

$$C_l^p(\cos\varphi) = \frac{2^{2q-2p+1} l! \, \Gamma(q)\Gamma(2p+l)}{\Gamma(p)\Gamma(p-q)\Gamma(2q+l)} \times$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} C_l^q\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha}}\right)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha)^{\frac{l}{2}} \times$$
$$\times (\sin\alpha)^{2p-2q-1}\cos^{2q}\alpha \, d\alpha. \quad (5)$$

Отметим частный случай формулы (5). Так как $\lim\limits_{q\to 0}\Gamma(q)C_l^q(\cos\varphi) = \frac{2\cos l\varphi}{l}$, то при $q = 0$ формула (5) принимает такой вид:

$$C_l^p(\cos\varphi) = \frac{2^{2-2p}\Gamma(2p+l)}{\Gamma^2(p)\Gamma(l+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T_l\left(\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha}\right) \times$$
$$\times (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha)^{\frac{l}{2}} \cos^{2p-1}\alpha \, d\alpha. \quad (5')$$

Здесь $T_l(x)$ — многочлен Чебышева:

$$T_l(x) = \cos(l \arccos x).$$

Отметим следующий интеграл, обобщающий интеграл (5) из п. 5 § 8 главы III. Если $l+m+n=2g$, где g — целое число, и если существует целочисленный треугольник со сторонами l, m, n, то

$$D(l, m, n, p) \equiv \int_{-1}^{1} C_l^p(x)\, C_m^p(x)\, C_n^p(x)\, (1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2^{1-2p}\pi\Gamma(g+2p)\,\Gamma(g-l+p)\,\Gamma(g-m+p)\,\Gamma(g-n+p)}{[\Gamma(p)]^4\,\Gamma(g-l+1)\,\Gamma(g-m+1)\,\Gamma(g-n+1)\,\Gamma(g+p+1)}. \tag{6}$$

В противном случае интеграл (6) равен нулю.

Обращение в нуль интеграла (6) в случае, когда $l+m+n$ не является четным числом, вытекает из того, что функция $C_n^p(x)$ имеет ту же четность, что и n, а интеграл $\int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx$ равен нулю, если функция $\varphi(x)$ нечетна. Если не существует треугольника со сторонами l, m, n, то интеграл (6) равен нулю в силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра.

Рассмотрим теперь случай, когда $l+m+n=2g$, где g — целое число, причем существует треугольник со сторонами l, m, n. Проведем в этом случае доказательство формулы (6) с помощью индукции по l. При $l=0$ имеем $m=n=g$, а потому формула (6) принимает вид

$$D(0, n, n, p) = \int_{-1}^{1} [C_n^p(x)]^2 (1-x)^{p-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2^{1-2p}\pi\Gamma(n+2p)}{(n+p)\,[\Gamma(p)]^2\,\Gamma(n+1)}. \tag{6'}$$

Справедливость формулы (6) в этом случае следует из равенства (5) п. 5 § 3.

Предположим теперь, что формула (6) справедлива для всех натуральных чисел, меньших l. Применим к интегралу (6) рекуррентную формулу (10) из п. 3 § 3:

$$C_l^p(x) = \frac{2(p+l-1)}{l}\, x C_{l-1}^p(x) - \frac{2p+l-2}{l}\, C_{l-2}^p(x)$$

сначала для замены $C_l^p(x)$, а потом для замены $xC_n^p(x)$. Мы получим

$$D(l, m, n, p) = \frac{(p+l-1)(n+1)}{l(p+n)} D(l-1, m, n+1, p) +$$
$$+ \frac{(p+l-1)(2p+n-1)}{l(p+n)} D(l-1, m, n-1, p) -$$
$$- \frac{2p+l-2}{l} D(l-2, m, n, p).$$

Подставим в правую часть вместо $D(l-1, m, n+1, p)$ и т. д. их выражения по формуле (6) (что можно сделать по предположению индукции). После простых преобразований получим выражение (6) и для $D(l, m, n, p)$.

Несомненно, формула (6) связана с кронекеровским умножением представлений группы $SO(n)$ и дает выражение одного из коэффициентов Клебша-Гордана для этого произведения. Было бы весьма интересно построить общую теорию кронекеровских произведений для представлений группы $SO(n)$.

В силу соотношений ортогональности для функций Гегенбауэра получаем из формулы (6) следующее разложение:

$$C_l^p(x)\,C_m^p(x)=\sum_{n=|l-m|}^{l+m}\frac{(n+p)\Gamma(n+1)\Gamma(g+2p)}{[\Gamma(p)]^2(g+p)\Gamma(n+2p)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(g-l+p)\,\Gamma(g-m+p)\,\Gamma(g-n+p)}{\Gamma(g-l+1)\,\Gamma(g-m+1)\,\Gamma(g-n+1)}\,C_n^p(x), \qquad (7)$$

где $l+m+n=2g$, а сумма распространена на значения n, имеющие ту же четность, что и $l+m$.

12. Производящая функция для многочленов Гегенбауэра. Мы доказали в п. 8, что

$$C_{n-p}^{p+1/2}(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{d^pP_n(t)}{dt^p}. \qquad (1)$$

Пользуясь этим равенством, легко найти производящую функцию для многочленов Гегенбауэра. Именно, в п. 4 § 8 главы III было показано, что

$$(1-2th+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\,h^n.$$

Продифференцируем это равенство p раз по t и применим формулу (1). Мы получим

$$1\cdot 3\ldots(2p-1)(1-2th+h^2)^{-p-1/2}=$$
$$=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{d^pP_n(t)}{dt^p}\,h^{n-p}=\frac{2^p\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{p+1/2}(t)\,h^n.$$

Но в силу формулы удвоения для Г-функций

$$1\cdot 3\ldots(2p-1)=\frac{\Gamma(2p)}{2^{p-1}\Gamma(p)}=\frac{2^p\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

и потому мы имеем при натуральных p

$$(1-2th+h^2)^{-p-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{p+1/2}(t)\,h^l. \tag{2}$$

Равенство (2) служит для определения многочленов Гегенбауэра с любым индексом λ. Именно, полагают, по определению,

$$(1-2th+h^2)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\lambda}(t)\,h^n. \tag{3}$$

Можно показать, что выведенные выше рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, интегральное представление и т. д. сохраняют силу для многочленов Гегенбауэра с любым индексом λ.

Из разложения (3) вытекает

$$C_k^{\lambda+\mu}(t)=\sum_{n=0}^{k} C_n^{\lambda}(t)\,C_{k-n}^{\mu}(t). \tag{4}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно перемножить разложения (3) и

$$(1-2th+h^2)^{-\mu}=\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\mu}(t)\,h^m,$$

после чего сравнить коэффициенты при одинаковых степенях h.

§ 5. Сферические функции и оператор Лапласа. Полисферические функции

В нашем изложении сферические функции возникли при выборе базиса в пространствах неприводимых представлений класса 1 группы $SO(n)$. Здесь будет изложен другой подход к сферическим функциям, связанный с разделением переменных для оператора Лапласа в сферических координатах. Кроме того, будут построены другие системы координат на сфере, в которых оператор Лапласа допускает разделение переменных. Это приводит к иному выбору базиса, связанному с полисферическими функциями.

1. Оператор Лапласа на сфере. Выразим оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

в сферических координатах. Известно, что если в ортогональной системе криволинейных координат в E_n дифференциал длины дуги имеет вид

$$ds^2=\sum_i A_i^2(u_1,\ \ldots,\ u_n)\,du_i^2, \tag{1}$$

то оператор Лапласа в этой системе координат выражается формулой

$$\Delta = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{A}{A_i^2} \frac{\partial}{\partial u_i}, \tag{2}$$

где

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i. \tag{3}$$

При этом инвариантная мера в системе координат $u_1, \ldots, u_n$ имеет вид

$$d\mathrm{x} = A du_1 \ldots du_n.$$

Применим это утверждение к сферической системе координат в евклидовом пространстве E_n. Из формул (1) п. 1 § 1 легко следует, что в этой системе

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta_{n-1}^2 + r^2 \sin^2\theta_{n-1} d\theta_{n-2}^2 + \ldots + \\ + r^2 \sin^2\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_2 d\theta_1^2. \tag{4}$$

Поэтому оператор Лапласа в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^{n-2}\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta_{n-1} \sin^{n-3}\theta_{n-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \sin^{n-3}\theta_{n-2} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}. \tag{5}$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ в E_n зависит лишь от угловых переменных, то оператор Лапласа от $f(\mathbf{x})$ на единичной сфере выражается формулой $\Delta f(\mathbf{x}) = \Delta_0 f(\xi)$, где

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}. \tag{6}$$

Оператор Δ_0 называют *угловой частью оператора Лапласа* Δ или, иначе, *оператором Лапласа на единичной сфере* S^{n-1}.

Можно показать, что оператор Δ_0 перестановочен с операторами квазирегулярного представления

$$L(g) f(\xi) = f(g^{-1}\xi)$$

(это вытекает из более общего утверждения о перестановочности оператора Лапласа Δ с движениями n-мерного евклидова пространства).

Так как оператор Δ_0 перестановочен с операторами представления $L(g)$, то сужение Δ_0 на пространство $\mathfrak{H}^{nl}$ неприводимой компоненты $T_{nl}(g)$ представления $\mathfrak{L}(g)$ кратно единичному оператору:

$$\Delta_0 f(\xi) = \lambda(n, l) f(\xi), \quad f(\xi) \in \mathfrak{H}^{nl}. \tag{7}$$

Чтобы вычислить коэффициент $\lambda(n, l)$, выберем в подпространстве $\mathfrak{H}^{nl}$ функцию $\Xi_M^l(\xi)$, где $M=(l, l, \ldots, l)$. В силу формулы (4) п. 7 § 3 функция $\Xi_M^l(\xi)$ имеет в этом случае вид

$$\Xi_M^l(\xi) = A_l \sin^l\theta_{n-1} \ldots \sin^l\theta_2 e^{il\theta_1}.$$

Подставляя это выражение в формулу (7) вместо $f(\xi)$ и используя выражение (6) для Δ_0, получаем $\lambda(n, l) = -l(l+n-2)$.

Итак, мы доказали, что все функции $f(\xi)$ из подпространства $\mathfrak{H}^{nl}$ (т. е. значения на сфере S^{n-1} однородных гармонических многочленов степени l) являются собственными функциями оператора Лапласа Δ_0, соответствующими собственному значению $\lambda = -l(l+n-2)$.

К этому же выводу можно прийти иначе.

Если $f(\xi) \in \mathfrak{H}^{nl}$, то $r^l f(\mathbf{x}/r)$ является однородным гармоническим многочленом степени l. Таким образом,

$$\Delta r^l f\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right) = 0.$$

Переходя к сферическим координатам и используя формулу

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_0$$

(см. формулы (5) и (6)), получаем искомый результат.

2. Полисферические координаты. Было показано, что все функции из пространства $\mathfrak{H}^{nl}$ являются собственными функциями оператора Лапласа Δ_0. Выбор базиса $\Xi_M^l(\xi)$ в $\mathfrak{H}^{nl}$ связан с тем, что он состоит из произведений функций, каждая из которых зависит лишь от одного переменного. Однако этот выбор не является единственным — на сфере есть и другие координаты, в которых оператор Лапласа Δ_0 допускает разделение переменных. Опишем один класс таких координат — *полисферические координаты*, частным случаем которых являются сферические координаты.

Рассмотрим некоторое дерево с n вершинами. Назовем корень дерева вершиной нулевого ранга; вершины, непосредственно соединенные с корнем, — вершинами первого ранга и т. д. Каждой вершине дерева поставим в соответствие декартову координату x_k и перенумеруем эти координаты следующим образом. Координату нулевого ранга (т. е. соответствующую корню дерева) обозначим x_0, координаты первого ранга — через $x_{01}, \ldots, x_{0s}$, координаты второго ранга, для которых соответствующие вершины соединены с координатой x_{0k}, — через x_{0k1}, x_{0k2}, ..., x_{0km}, и т. д.

Упорядочим координаты, считая, что координаты большего ранга предшествуют координатам меньшего ранга, а координаты одинакового ранга упорядочены лексикографически. Например, для дерева, изображенного на рис. 8, координаты упорядочиваются так:

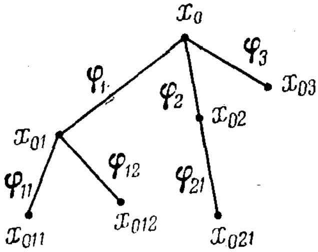

Рис. 8.

$$x_{011},\ x_{012},\ x_{021},\ x_{01},\ x_{02},\ x_{03},\ x_0.$$

Назовем координаты вида $x_{0i_1\ldots i_s i_{s+1}\ldots i_m}$ *подчиненными* координате $x_{0i_1\ldots i_s}$. Координату $x_{0j_1\ldots j_m}$ назовем *существенно предшествующей* координате $x_{0i_1\ldots i_s}$, если $m \geqslant s$ и $j_k = i_k$ при $1 \leqslant k \leqslant s-1$, а $j_s < i_s$. В этом случае $x_{0i_1\ldots i_s}$ называют *существенно последующей* за $x_{0j_1\ldots j_m}$.

Введем еще следующие обозначения. Число вершин, существенно предшествующих $x_{0i_1\ldots i_m}$, обозначим через $p_{i_1\ldots i_m}$, а число вершин, подчиненных вершине $x_{0i_1\ldots i_m}$, — через $q_{i_1\ldots i_m}$.

Пусть $x_{0i_1\ldots i_m}$ — одна из вершин ненулевого ранга. Поставим ей в соответствие вращение $g(\varphi)$ на угол $\varphi = \varphi_{i_1\ldots i_m}$ в плоскости $(x_{0i_1\ldots i_{m-1}},\ x_{0i_1\ldots i_m})$

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \cos\varphi - x_j \sin\varphi, \\ x_j' &= x_i \sin\varphi + x_j \cos\varphi, \end{aligned}$$

где для краткости положено $x_i = x_{0i_1\ldots i_{m-1}}$ и $x_j = x_{0i_1\ldots i_m}$.

Обозначим через $\mathbf{x}_0$ точку на сфере, соответствующую координатной оси Ox_0 и положим

$$\mathbf{x} = \prod g(\varphi_{i_1\ldots i_m})\,\mathbf{x}_0, \tag{1}$$

где произведение распространено на все вращения $g(\varphi_{i_1\ldots i_m})$, соответствующие вершинам дерева, причем эти вращения расположены в порядке следования координат. Например, для рис. 8 имеем

$$\mathbf{x} = g(\varphi_{11})\,g(\varphi_{12})\,g(\varphi_{21})\,g(\varphi_1)\,g(\varphi_2)\,g(\varphi_3)\,\mathbf{x}_0.$$

Выражение координаты $x_{0j_1\ldots j_s}$ через углы $\varphi_{i_1\ldots i_m}$ имеет следующий вид. Обозначим через $P_{j_1\ldots j_s}$ множество координат, подчиненных координате $x_{0j_1\ldots j_s}$, через $R_{j_1\ldots j_s}$ — множество координат, существенно последующих за ней, а через $S_{j_1\ldots j_s}$ множество координат, которым подчинена $x_{0j_1 \dots j_s}$. Тогда имеет место равенство

$$x_{0j_1 \dots j_s} = \prod_{P_{j_1 \dots j_s} \cup Q_{j_1 \dots j_s}} \cos \varphi_{i_1 \dots i_m} \prod_{S_{j_1 \dots j_s} \cup x_{0j_1 \dots j_s}} \sin \varphi_{k_1 \dots k_l}, \tag{2}$$

без труда выводимое из формулы (1).

Итак, каждому набору углов $\{\varphi_{i_1 \dots i_m}\}$ соответствует точка $\mathbf{x}$ единичной сферы. Обратно, легко показать, что для любой точки $\mathbf{x}$ сферы S^{n-1} найдется набор углов $\{\varphi_{i_1 \dots i_m}\}$, для которого справедлива формула (1).

Разумеется, углы $\{\varphi_{i_1 \dots i_m}\}$ неоднозначно определяются точкой $\mathbf{x}$. Но если наложить на них указанные ниже условия, то почти каждой точке $\mathbf{x}$ сферы S^{n-1} будут взаимно однозначно соответствовать углы $\{\varphi_{i_1 \dots i_m}\}$. Эти углы мы и будем называть *полисферическими координатами точки* $\mathbf{x}$ (они зависят от выбора дерева и соответствия между точками дерева и декартовыми координатами).

Сформулируем теперь условия, налагаемые на углы $\{\varphi_{i_1 \dots i_m}\}$.

а) Если $p_{i_1 \dots i_m} = 0$ и $q_{i_1 \dots i_m} = 0$, т. е., если у вершины $x_{0i_1 \dots i_m}$ нет ни подчиненных, ни существенно предшествующих, то

$$0 \leqslant \varphi_{i_1 \dots i_m} < 2\pi. \tag{3}$$

б) Если $p_{i_1 \dots i_m} = 0$, а $q_{i_1 \dots i_m} \neq 0$, то

$$0 \leqslant \varphi_{i_1 \dots i_m} < \pi. \tag{3'}$$

в) Если $p_{i_1 \dots i_m} \neq 0$, а $q_{i_1 \dots i_m} = 0$, то

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_{i_1 \dots i_m} < \frac{\pi}{2}. \tag{3''}$$

г) Наконец, если $p_{i_1 \dots i_m} \neq 0$ и $q_{i_1 \dots i_m} \neq 0$, то

$$0 \leqslant \varphi_{i_1 \dots i_m} < \frac{\pi}{2}. \tag{3'''}$$

Читатель легко проверит, что почти каждой точке сферы (т. е. за исключением точек, заполняющих множество меньшей размерности) соответствует один и только один набор чисел $\{\varphi_{i_1 \dots i_m}\}$, лежащих в указанных границах.

Из определения полисферических координат легко вывести их связь с декартовыми координатами. Например, для дерева, изображенного на рис. 8, имеем:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \cos\varphi_3 \cos\varphi_2 \cos\varphi_1,\\
x_{03} &= \sin\varphi_3,\\
x_{02} &= \cos\varphi_3 \sin\varphi_2 \cos\varphi_{21},\\
x_{01} &= \cos\varphi_3 \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_{12} \cos\varphi_{11},\\
x_{021} &= \cos\varphi_3 \sin\varphi_2 \sin\varphi_{21},\\
x_{012} &= \cos\varphi_3 \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_{12},\\
x_{011} &= \cos\varphi_3 \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_{12} \sin\varphi_{11}.
\end{aligned}$$

Обычные сферические координаты являются частным случаем полисферических. Они соответствуют дереву

$$x_0 \to x_{01} \to x_{011} \to \ldots \to x_{0111\ldots 1}.$$

3. Дифференциал длины дуги и оператор Лапласа в полисферических координатах. Пользуясь выражением (2) п. 2, связывающим декартовы и полисферические координаты, легко получить вид дифференциала длины дуги в полисферических координатах. Он имеет следующий вид. Каждой координате $x_{0i_1\ldots i_m}$ поставим в соответствие выражение

$$d\varphi^2_{i_1\ldots i_m} + \sin^2\varphi_{i_1\ldots i_m}(\cdot) + \cos^2\varphi_{i_1\ldots i_m}(\cdot). \tag{1}$$

Если существует координата $x_{0i_1\ldots i_{m+1}}$, то надо подставить это выражение в скобку для координаты $x_{0i_1\ldots i_{m+1}}$, имеющую коэффициент $\cos^2\varphi_{i_1\ldots i_{m+1}}$. Если же такой координаты нет, то выражение (1) подставляется в скобку для координаты $x_{0i_1\ldots i_{m-1}}$, имеющую коэффициент $\sin^2\varphi_{i_1\ldots i_{m-1}}$. После того как все подстановки выполнены, оставшиеся пустыми скобки приравниваются нулю.

Например, для дерева, изображенного на рис. 8, имеем

$$\begin{aligned}
ds^2 = d\varphi_3^2 + \cos^2\varphi_3 \{ d\varphi_2^2 + \sin^2\varphi_2 d\varphi_{21}^2 + {}\\
+ \cos^2\varphi_2 [d\varphi_1^2 + \sin^2\varphi_1 (d\varphi_{12}^2 + \cos^2\varphi_{12} d\varphi_{11}^2)] \}.
\end{aligned}$$

Поскольку выражение, получающееся после раскрытия скобок в ds^2, не содержит членов с произведениями координат, *полисферическая система координат ортогональна:*

$$ds^2 = \sum A^2_{i_1\ldots i_m} d\varphi^2_{i_1\ldots i_m}. \tag{2}$$

Значение коэффициентов $A_{i_1 \dots i_m}$ определяется при этом формулой [1])

$$A^2_{i_1 \dots i_m} = \prod_{R_{i_1 \dots i_m}} \cos^2 \varphi_{j_1 \dots j_s} \prod_{S_{i_1 \dots i_m}} \sin^2 \varphi_{k_1 \dots k_l}. \tag{3}$$

Из выражения (2) вытекает, что инвариантная мера на сфере S^{n-1} выражается в полисферических координатах формулой

$$d\mathbf{x} = \prod A_{i_1 \dots i_m} d\varphi_{i_1 \dots i_m}, \tag{4}$$

где произведение распространено на все вершины дерева, имеющие ненулевой ранг. Это выражение может быть записано в следующем виде:

$$d\mathbf{x} = \prod \cos^{p_{i_1 \dots i_m}} \varphi_{i_1 \dots i_m} \sin^{q_{i_1 \dots i_m}} \varphi_{i_1 \dots i_m} d\varphi_{i_1 \dots i_m}, \tag{5}$$

где произведение распространено на все углы, соответствующие данному дереву (относительно обозначений $p_{i_1 \dots i_m}$ и $q_{i_1 \dots i_m}$ см. стр. 490).

Например, для дерева на рис. 8 имеем

$$d\mathbf{x} = \cos^5 \varphi_3 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_{12} \, d\varphi_{11} \, d\varphi_{12} \, d\varphi_{21} \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \, d\varphi_3.$$

Исходя из выражения для ds^2, легко получить формулу для оператора Лапласа Δ_0 на S^{n-1} (см. формулу (2) п. 1).

Например, для дерева на рис. 8 получаем:

$$\Delta_0 = \frac{1}{\cos^5 \varphi_3} \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \cos^5 \varphi_3 \frac{\partial}{\partial \varphi_3} + \frac{1}{\cos^2 \varphi_3 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} +$$
$$+ \frac{1}{\cos^2 \varphi_3 \sin^2 \varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_{21}^2} + \frac{1}{\cos^2 \varphi_3 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \sin^2 \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} +$$
$$+ \frac{1}{\cos^2 \varphi_3 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_{12}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{12}} \cos^2 \varphi_{12} \frac{\partial}{\partial \varphi_{12}} + \frac{1}{\cos^2 \varphi_3 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_{12}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_{11}^2}.$$

4. Собственные функции оператора Лапласа в полисферических координатах. Перейдем к вычислению собственных функций оператора Лапласа на сфере в полисферических координатах. Эта задача приводит к решению дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\cos^p \varphi \sin^q \varphi} \frac{d}{d\varphi} \cos^p \varphi \sin^q \varphi \frac{du}{d\varphi} -$$
$$- \left[\frac{r(r+p-1)}{\cos^2 \varphi} + \frac{s(s+q-1)}{\sin^2 \varphi} - l(l+p+q) \right] u = 0. \tag{1}$$

Сделаем в уравнении (1) подстановку $u = \operatorname{tg}^s \varphi \cos^l \varphi \, v$, а затем по-

[1]) Относительно обозначений $R_{i_1 \dots i_m}$ и $S_{i_1 \dots i_m}$ см. стр. 490.

ложим $-\operatorname{tg}^2\varphi=y$. Тогда уравнение (1) приводится к гипергеометрическому уравнению, одним из решений которого является функция

$$v_1=F\left(\frac{s-l+r}{2},\ \frac{s-l-r-p+1}{2};\ s+\frac{q+1}{2};\ y\right). \tag{2}$$

Поэтому одно из частных решений уравнения (1) имеет вид

$$u_1=\operatorname{tg}^s\varphi\cos^l\varphi F\left(\frac{s-l+r}{2},\ \frac{s-l-r-p+1}{2};\ s+\frac{q+1}{2};\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right). \tag{3}$$

Как было отмечено в п. 3 § 5 главы VII, гипергеометрическое уравнение имеет, кроме функции $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, второе частное решение:

$$x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ x).$$

Пользуясь этим, получаем второе частное решение уравнения (1):

$$u_2=\operatorname{ctg}^{q+s-1}\varphi\cos^l\varphi F\left(\frac{r-l-s-q+1}{2},\ 1-\frac{p+s+q+l+r}{2};\right.$$
$$\left.-s-\frac{q-3}{2};\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right). \tag{4}$$

Перейдем теперь к разделению переменных в уравнении $\Delta_0 U+\lambda U=0$. Подставим в это уравнение выражение для оператора Лапласа Δ_0 в полисферических координатах и представим искомую функцию в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного угла $\varphi_{i_1\ldots i_m}$. Используя формулу (3) п. 3, получаем следующий результат (мы опускаем детали несложного, но кропотливого вывода).

Функция, зависящая от угла $\varphi_{i_1\ldots i_m}$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (1), *в котором надо положить*

$$\left.\begin{aligned} &p=p_{i_1\ldots i_m}, \quad q=q_{i_1\ldots i_m}, \quad r=l_{i_1\ldots i_{m-1}},\\ &l=l_{i_1\ldots i_m}, \quad s=|l_{i_1\ldots i_m i_{m+1}}|, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где i_{m+1} *имеет наибольшее из возможных значений* (иными словами, в дереве нет вершины $x_{0i_1\ldots i_{m+1}+1}$). *Если у вершины* $x_{0i_1\ldots i_m}$ *нет существенно предшествующих* (т. е. $p=0$), *то* $r=0$, *а если нет подчиненных, то* $s=0$. Числа $\{l_{i_1\ldots i_m}\}$ — параметры разделения переменных.

Выясним, при каких условиях на параметры разделения $\{l_{i_1\ldots i_m}\}$ уравнение (1) имеет решение, непрерывное на всей сфере S^{n-1}. Сначала рассмотрим случай, когда

$$p_{i_1\ldots i_m}=q_{i_1\ldots i_m}=0.$$

В этом случае уравнение (1) сводится к

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+l^2u=0$$

и его решениями являются функции

$$u=e^{il\varphi} \text{ и } u=e^{-il\varphi}.$$

Так как в этом случае $0\leqslant\varphi<2\pi$ (см. стр. 491), то параметр $l=l_{i_1\ldots i_m}$ принимает любые целые значения, причем каждому целому значению l соответствует одно решение уравнения (1).

Если $p=0$ (и потому $r=0$), а $q\neq 0$, то решения (3) и (4) принимают вид

$$u_1=\operatorname{tg}^s\varphi\cos^l\varphi\, F\left(\frac{s-l}{2},\ \frac{s-l+1}{2};\ s+\frac{q+1}{2};\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right) \tag{6}$$

и

$$u_2=\operatorname{ctg}^{q+s-1}\varphi\cos^l\varphi\times$$
$$\times F\left(\frac{-l-s-q+1}{2},\ 1-\frac{l+s+q}{2};\ -s-\frac{q-3}{2};\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right). \tag{7}$$

Из условия однозначности и непрерывности решения u_1 в точке $\varphi=0$ получаем, что s — целое неотрицательное число. Для непрерывности u_1 в точке $\varphi=\pi/2$ нужно, чтобы и $l-s$ было целым неотрицательным числом, $l\geqslant s$. Если эти условия выполнены, то функция u_1 непрерывна в точке $\pi/2$. В самом деле, при $l\geqslant s$ одно из чисел $\frac{s-l}{2}$, $\frac{s-l+1}{2}$ является целым неположительным, поэтому гипергеометрическая функция в равенстве (6) вырождается в многочлен от $\operatorname{tg}\varphi$, степень которого не превосходит $l-s$. Поскольку $\cos\varphi$ входит в функцию (6) в степени $l-s$, эта функция непрерывна при $\varphi=\pi/2$.

Рассмотрим теперь второе решение (7). Чтобы оно было непрерывно в точке $\varphi=0$, нужно, чтобы $s\leqslant 1-q$. Поскольку по условию $q>0$, а $s=|l_{i_1\ldots i_{m+1}}|\geqslant 0$, то $q=1$ и $s=0$. Но в этом случае решение (6) совпадает с (7).

Итак, если $p=0$, $q\neq 0$, то решениями уравнения (1), непрерывными при $\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$, являются функции

$$\operatorname{tg}^s\cos^l\varphi\, F\left(\frac{s-l}{2},\ \frac{s-l+1}{2};\ s+\frac{q+1}{2};\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right), \tag{8}$$

где $l=s,\ s+1,\ \ldots,\ s+k,\ \ldots$

Теперь рассмотрим случай, когда $p \neq 0$, но $q=0$, и потому $s=0$. В этом случае решения (3) и (4) принимают вид

$$u_1=\cos^l \varphi F\left(\frac{r-l}{2},\ \frac{-p-l-r}{2};\ \frac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 \varphi\right) \tag{9}$$

и

$$u_2=\operatorname{tg} \varphi \cos^l \varphi F\left(\frac{r-l+1}{2},\ 1-\frac{p+l+r}{2};\ \frac{3}{2};\ -\operatorname{tg}^2 \varphi\right). \tag{10}$$

Эти решения непрерывны и однозначны при $\varphi=0$. При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ для любого целого l, такого, что $l \geqslant r$, непрерывно только одно из двух решений (9) и (10) — при четном значении $l-r$ — первое, а при нечетном — второе. Если $l-r=2k$, то непрерывное решение имеет вид

$$u_1=\cos^{2k+r} \varphi F\left(-k,\ -k-\frac{p}{2};\ \frac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 \varphi\right), \tag{11}$$

а если $l-r=2k+1$, то вид

$$u_2=\sin \varphi \cos^{2k+r} \varphi F\left(-k,\ \frac{1-p}{2}-k-r;\ \frac{3}{2};\ -\operatorname{tg}^2 \varphi\right). \tag{12}$$

Наконец, если $p \neq 0$, $q \neq 0$, то непрерывные и однозначные решения существуют тогда и только тогда, когда $l \geqslant s+r$, причем $l-s-r$ — четное число: $l-s-r=2k$. Они имеют в этом случае вид

$$u=\sin^s \varphi \cos^{2k+r} \varphi F\left(-k,\ \frac{1-p}{2}-k-r;\ s+\frac{q+1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 \varphi\right). \tag{13}$$

Мы доказали, таким образом, что *система чисел* $\Lambda=\{l_{i_1 \ldots i_m}\}$ *тогда и только тогда является системой параметров разделения для уравнения* (1), *когда все числа* $\{l_{i_1 \ldots i_m}\}$ *являются целыми, причем:*

а) $l_{i_1 \ldots i_m} \geqslant 0$, *за исключением случая, когда* $p_{i_1 \ldots i_m}=q_{i_1 \ldots i_m}=0$.

б) *Имеет место неравенство*

$$l_{i_1 \ldots i_m} \geqslant |l_{i_1 \ldots i_{m-1}}|+|l_{i_1 \ldots i_m i_{m+1}}|. \tag{14}$$

Выясним, наконец, какой вид имеют собственные функции оператора Δ_0, соответствующие данному набору $\Lambda=\{l_{i_1 \ldots i_m}\}$ параметров разделения. Обозначим через $U_{i_1 \ldots i_m}(\varphi)$ непрерывное и однозначное решение уравнения (1) при значениях параметров p, q, r, l, s, даваемых равенством (5). Собственной функцией оператора Δ_0, соответствующей набору $\{l_{i_1 \ldots i_m}\}$, является

$$Y_\Lambda(\xi)=\prod U_{i_1 \ldots i_m}(\varphi_{i_1 \ldots i_m}), \tag{15}$$

где произведение распространено на все вершины ненулевого ранга. Функции $Y_\Delta(\xi)$, соответствующие всем допустимым наборам $\{l_{i_1} \dots i_m\}$, назовем *полисферическими функциями*, соответствующими данному дереву. В случае, когда дерево имеет вид, изображенный на рис. 8, полисферические функции совпадают с обычными сферическими функциями на S^{n-1}.

Нетрудно показать, что система полисферических функций, соответствующих данному дереву, ортогональна на сфере S^{n-1}. В этом можно убедиться, используя соотношения ортогональности для многочленов Якоби и выражения для решений уравнения (1).

ГЛАВА X

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩЕНИЙ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Связь теории функций Лежандра с теорией представлений групп была уже нами рассмотрена в главах III и VI. В главе III было показано, что свойства присоединенных функций Лежандра $P_l^m(x)$ с целым и полуцелым индексом l могут быть выведены из рассмотрения представлений группы $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц второго порядка (или, что то же, представлений группы $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства). В главе VI было показано, что многие свойства функций $\mathfrak{P}_l^m(x)$ с любым индексом l и целым m выводятся из теории представлений группы $QU(2)$ квазиунитарных матриц. Эта группа локально изоморфна группе $SH(2)$ движений плоскости Лобачевского.

Дальнейшие свойства функций $\mathfrak{P}_l^m(x)$ можно вывести, изучая представления группы $SH(n)$ движений n-мерного пространства Лобачевского, что и будет сделано в данной главе.

§ 1. Псевдоевклидово пространство и гиперболические вращения

1. Псевдоевклидово пространство. *Псевдоевклидовым пространством сигнатуры* $(n-1,\ 1)$ называется n-мерное вещественное линейное пространство $E_{n-1,1}$, в котором задана билинейная форма

$$[\mathbf{x},\ \mathbf{y}] = -x_1y_1 - \ldots - x_{n-1}y_{n-1} + x_ny_n.$$

Эта форма является аналогом скалярного произведения в евклидовом пространстве. С помощью билинейной формы $[\mathbf{x},\ \mathbf{y}]$ в пространстве $E_{n-1,1}$ можно определить расстояние между точками, положив

$$r^2(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = [\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{x}-\mathbf{y}].$$

В отличие от случая евклидова пространства, в псевдоевклидовом пространстве расстояние между точками может быть как положительным, так и нулевым и даже чисто мнимым.

Точки, лежащие внутри конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$, находятся на положительном расстоянии от начала координат O, а точки, лежащие вне этого конуса — на чисто мнимом расстоянии. Точки же самого конуса находятся на нулевом расстоянии от начала координат. Точки, лежащие на положительном расстоянии от начала координат, распадаются на два несвязных множества — точки, лежащие внутри верхней полы конуса (т. е. такие, что $x_n > 0$), и точки, лежащие внутри нижней полы конуса (т. е. такие, что $x_n < 0$). В настоящей главе нас будут в основном интересовать точки пространства $E_{n-1,1}$, находящиеся внутри верхней полы конуса. Для таких точек выполняются неравенства $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] > 0$, $x_n > 0$. Будем обозначать эту область через Ω_n.

Введем в области Ω_n координаты, аналогичные сферическим координатам в евклидовом пространстве. По аналогии с п. 1 § 1 главы IX определим эти координаты формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \operatorname{sh} \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \ldots \sin \theta_2 \sin \theta_1, \\ x_2 &= r \operatorname{sh} \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \ldots \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= r \operatorname{sh} \theta_{n-1} \cos \theta_{n-2}, \\ x_n &= r \operatorname{ch} \theta_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $r^2=[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$.

С точностью до множеств меньшей размерности, формулы (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между областью Ω_n и областью Ω_n':

$$\left.\begin{aligned} & 0 \leqslant r < \infty, \\ & 0 \leqslant \theta_1 < 2\pi, \\ & 0 \leqslant \theta_k < \pi, \qquad 1 < k < n-1, \\ & 0 \leqslant \theta_{n-1} < \infty \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

изменения переменных $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Иными словами, из областей Ω_n и Ω_n' можно удалить множества, размерность которых меньше, чем n, так, чтобы равенства (1) устанавливали взаимно однозначное соответствие между оставшимися множествами.

Определим теперь в псевдоевклидовом пространстве аналог евклидовой сферы (с центром в начале координат). Именно, назовем *псевдосферой* радиуса R множество точек псевдоевклидова пространства, для которых $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=R^2$. При этом следует различать псевдосферы положительного, нулевого и чисто мнимого радиусов. Псевдосферы положительного радиуса лежат внутри конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$, чисто мнимого радиуса — вне этого конуса, а псевдосферы нулевого радиуса совпадают с конусом. В соответствии со сказанным выше будем рассматривать лишь части псевдосфер положительного радиуса, лежащие в верхней поле конуса. С точки зрения евклидовой геометрии они являются верхними полами двуполостных гиперболоидов: $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = R^2$, $x_n > 0$.

На псевдосфере положительного радиуса координата r постоянна. Остальные координаты $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ задают систему координат на псевдосфере, которую будем называть *системой гиперболических координат.*

2. Группа $SH(n)$. Назовем *гиперболическими вращениями* псевдоевклидова пространства (вокруг начала координат) линейные преобразования, не меняющие расстояния точек от начала координат, сохраняющие ориентацию пространства и переводящие в себя обе полы конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] > 0$. Таким образом, при гиперболических вращениях сохраняется билинейная форма $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Очевидно, что произведение двух гиперболических вращений снова является гиперболическим вращением, равно как и преобразование, обратное гиперболическому вращению. Отсюда вытекает, что гиперболические вращения пространства $E_{n-1, 1}$ образуют группу. Будем называть ее *группой гиперболических вращений* пространства $E_{n-1, 1}$ и обозначать $SH(n)$.

Из сохранения билинейной формы $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ легко следует, что матрица гиперболического поворота унимодулярна. Отсюда следует также, что гиперболические повороты оставляют инвариантной евклидову меру $d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_n$ в $E_{n-1, 1}$.

Рассмотрим в группе $SH(n)$ подгруппу, состоящую из гиперболических вращений, не изменяющих координаты x_n. Так как при гиперболических вращениях не меняется выражение $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = -x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 + x_n^2$, то эти вращения оставляют неизменным $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$. Иными словами, гиперболическим вращениям, не изменяющим координаты x_n, соответствуют евклидовы вращения в подпространстве $E_{n-1} : x_n = 0$. Поэтому будем обозначать подгруппу гиперболических вращений, не изменяющих координаты x_n, через $SO(n-1)$. Аналогично подгруппу гиперболических вращений, не изменяющих координат $x_{n-s+1}, \ldots, x_n$, будем обозначать $SO(n-s)$.

Покажем теперь, что группа $SH(n)$ транзитивно действует на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 1$. Для этого достаточно показать, что любую точку $\xi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ этого гиперболоида можно перевести гиперболическим вращением в точку $\xi_n(0, \ldots, 0, 1)$. Очевидно, что с помощью евклидова вращения из подгруппы $SO(n-1)$ точку ξ можно перевести в точку $\eta(0, \ldots, 0, \operatorname{sh}\alpha, \operatorname{ch}\alpha)$, где $\operatorname{ch}\alpha = \xi_n$. А теперь сделаем гиперболический поворот

$$x'_{n-1} = x_{n-1}\operatorname{ch}\alpha - x_n \operatorname{sh}\alpha,$$
$$x'_n = -x_{n-1}\operatorname{sh}\alpha + x_n \operatorname{ch}\alpha$$

в плоскости x_{n-1}, x_n. При этом повороте точка η перейдет в ξ_n. Транзитивность группы $SH(n)$ доказана.

Подгруппа $SO(n-1)$ евклидовых вращений оставляет неподвижной точку $\xi_n=(0, \ldots, 0, 1)$ и, как легко видеть, является стационарной подгруппой этой точки. Отсюда вытекает, что верхняя пола гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, $x_n>0$ является пространством левых классов смежности группы $SH(n)$ по подгруппе $SO(n-1)$. Именно, каждому левому классу смежности $\{gh\}$, $h\in SO(n-1)$ соответствует точка ξ_g псевдосферы, в которую переходит точка ξ_n при гиперболических вращениях gh из этого класса. При этом преобразованию

$$\{gh\}\to\{g_0gh\}, \qquad h\in SO(n-1),$$

в фактор-пространстве $SH(n)/SO(n-1)$ соответствует гиперболический поворот $\xi_g\to\xi_{g_0g}$ псевдосферы.

3. Пространство Лобачевского. Пусть ξ и η — две точки псевдосферы $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, $x_n>0$. Тогда имеет место неравенство

$$[\xi, \eta]\geqslant 1, \tag{1}$$

причем $[\xi, \eta]=1$ тогда и только тогда, когда $\xi=\eta$.

В самом деле, из того, что $[\xi, \xi]=[\eta, \eta]=1$, следует

$$\xi_n=\sqrt{1+\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2} \text{ и } \eta_n=\sqrt{1+\eta_1^2+\ldots+\eta_{n-1}^2}.$$

Поэтому, по неравенству Буняковского — Шварца,

$$1+\xi_1\eta_1+\ldots+\xi_{n-1}\eta_{n-1}\leqslant\sqrt{1+\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2}\sqrt{1+\eta_1^2+\ldots+\eta_{n-1}^2}=\xi_n\eta_n, \tag{1'}$$

следовательно,

$$[\xi, \eta]=-\xi_1\eta_1-\ldots-\xi_{n-1}\eta_{n-1}+\xi_n\eta_n\geqslant 1.$$

Равенство в (1') достигается лишь, если $\xi_1=\eta_1, \ldots, \xi_{n-1}=\eta_{n-1}$. Но тогда $\xi_n=\eta_n$, и потому $\xi=\eta$.

Из неравенства (1) следует существование единственного числа $r\geqslant 0$, такого, что

$$\operatorname{ch} kr=[\xi, \eta] \tag{2}$$

(k — фиксированное положительное число). Назовем *r расстоянием между точками ξ и η псевдосферы.*

Легко показать, что при этом псевдосфера превращается в риманово пространство постоянной отрицательной кривизны. Это пространство называют *$(n-1)$-мерным пространством Лобачевского* и обозначают $\Lambda^{n-1}(R)$, где $R=\frac{1}{k}$.

Группа $SH(n)$ состоит из преобразований пространства Лобачевского, сохраняющих метрику и ориентацию, т. е. является группой движений $(n-1)$-мерного пространства Лобачевского Λ^{n-1} (подобно тому как группа $SO(n)$ является группой вращений n-мерного евклидова пространства E_n и в то же время группой движений $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}).

Наряду с описанной моделью пространства Лобачевского иногда бывают полезны другие модели этого пространства. Рассмотрим в пространстве $E_{n-1,\,1}$ совокупность прямых, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$. Определим расстояние r между такими прямыми формулой

$$\operatorname{ch} kr=\frac{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}{\sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}][\mathbf{y}, \mathbf{y}]}}, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — точки, лежащие на этих прямых. Легко видеть, что расстояние r между прямыми не зависит от выбора точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на них. Но если выбрать на прямых точки их пересечения с гиперболоидом $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, то равенство (3) примет вид $\operatorname{ch} kr=[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, т. е. совпадет с формулой (2). Отсюда вытекает, что множество прямых, лежащих внутри конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$ с метрикой, задаваемой формулой (3), является другой моделью пространства Лобачевского.

Другие модели пространства Лобачевского получаются следующим образом. Проведем внутри верхней полы конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$ какую-либо поверхность, пересекающую каждый луч, выходящий из начала координат, в одной и только одной точке. Каждой прямой, лежащей внутри конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$, поставим в соответствие точку ее пересечения с этой поверхностью. Мы получим тогда модель пространства Лобачевского в виде множества точек поверхности. Исходная модель пространства Лобачевского получается, если выбрать в качестве этой поверхности верхнюю полу гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$.

Отметим еще одну модель пространства Лобачевского. Проведем плоскость $x_n=1$. Очевидно, что эта плоскость пересекается с конусом $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$ по сфере радиуса 1. Тем самым пространство Лобачевского интерпретируется как внутренность $(n-1)$-мерного шара радиуса 1. Расстояние между точками этого шара определяется формулой

$$\operatorname{ch} kr=\frac{1-(\mathbf{x}', \mathbf{y}')}{\sqrt{1-(\mathbf{x}', \mathbf{x}')}\,\sqrt{1-(\mathbf{y}', \mathbf{y}')}}, \tag{4}$$

где положено $\mathbf{x}'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\mathbf{y}'=(y_1, \ldots, y_{n-1})$, $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')=x_1y_1+\ldots+x_{n-1}y_{n-1}$.

Введем понятие абсолюта пространства Лобачевского. Возьмем две прямые, проходящие через начало координат, и будем приближать одну из них к конусу $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$. Из формулы (3) видно, что при этом расстояние между прямыми будет стремиться к бесконечности. Таким образом, прямые, лежащие на конусе $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$, являются бесконечно удаленными точками пространства Лобачевского. Множество всех бесконечно удаленных точек и называется *абсолютом*. Таким образом, при реализации пространства Лобачевского как пространства прямых, абсолютом является множество прямолинейных образующих конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=0$. При реализации же пространства Лобачевского внутри единичного шара абсолют изображается единичной сферой.

4. Углы Эйлера в группе $SH(n)$. Введем параметры в группе $SH(n)$, аналогичные углам Эйлера в группе $SO(n)$ вращений евклидова пространства. Сначала докажем, что любой элемент g группы $SH(n)$ можно записать в виде

$$g=g_1(\theta_1^{n-1}) \ldots g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})\, h, \tag{1}$$

где $h \in SO(n-1)$, $g_k(\alpha)$ при $k<n-1$ обозначает вращение на угол α в плоскости (x_{k+1}, x_k), а $g_{n-1}(\alpha)$ — гиперболическое вращение на «угол» α в плоскости (x_n, x_{n-1}):

$$\left.\begin{aligned} x'_{n-1}&=x_{n-1}\operatorname{ch}\alpha+x_n\operatorname{sh}\alpha,\\ x'_n&=x_{n-1}\operatorname{sh}\alpha+x_n\operatorname{ch}\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В самом деле, пусть g — элемент группы $SH(n)$. Обозначим через $\theta_1^{n-1}, \ldots, \theta_{n-1}^{n-1}$ гиперболические координаты точки $g\xi_n$, где $\xi_n=(0, \ldots, 0, 1)$. Простой подсчет показывает, что $g\xi_n=g^{(n-1)}\xi_n$, где

$$g^{(n-1)}=g_1(\theta_1^{n-1}) \ldots g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}).$$

Поэтому $[g^{(n-1)}]^{-1}g\xi_n=\xi_n$ и, следовательно, гиперболическое вращение $[g^{(n-1)}]^{-1}g=h$ принадлежит подгруппе $SO(n-1)$. Так как

$$g=g^{(n-1)}h=g_1(\theta_1^{n-1}) \ldots g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})\, h,$$

то наше утверждение доказано.

Как было показано в п. 3 § 1 главы IX, вращение h из подгруппы $SO(n-1)$ можно представить в виде

$$h=g^{(n-2)} \ldots g^{(1)},$$

где

$$g^{(k)}=g_1(\theta_1^{k}) \ldots g_k(\theta_k^{k}), \tag{3}$$

и $g_s(\alpha)$ — вращение на угол α в плоскости (x_{s+1}, x_s). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Любое гиперболическое вращение g из $SH(n)$ можно представить в виде

$$g=g^{(n-1)}g^{(n-2)} \ldots g^{(1)}, \tag{4}$$

где $g^{(k)}$ имеет вид (3) и $g_k(\alpha)$ при $k<n-1$ является вращением на угол α в плоскости (x_{k+1}, x_k), а $g_{n-1}(\alpha)$ — гиперболическим вращением на «угол» α в плоскости (x_n, x_{n-1}).

Будем называть числа θ_j^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant k$ *углами Эйлера гиперболического вращения* g. Эти числа изменяются в следующих пределах:

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \theta_1^k < 2\pi, \\ &0 \leqslant \theta_{n-1}^{n-1} < \infty, \\ &0 \leqslant \theta_j^k < \pi \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Легко показать по аналогии с группой $SO(n)$, что инвариантная мера dg на группе $SH(n)$ выражается через углы Эйлера по формуле

$$dg = \operatorname{sh}^{n-2}\theta_{n-1}^{n-1} \sin^{n-3}\theta_{n-2}^{n-1} \ldots \sin\theta_2^{n-1} \times \\ \times \prod_{k=1}^{n-2}\prod_{j=1}^{k} \sin^{j-1}\theta_j^k \prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{k} d\theta_j^k. \qquad (6)$$

§ 2. Представления класса 1 группы $SH(n)$

Представление $T(g)$ группы $SH(n)$ назовем *представлением класса* 1, если в пространстве $\mathfrak{H}$ этого представления есть вектор $\mathfrak{f}_0$, инвариантный относительно всех преобразований $T(h)$, где h — элемент подгруппы $SO(n-1)$. В этом параграфе мы дадим описание этих представлений и изучим их свойства.

1. Описание представлений $T^{n\sigma}(g)$. Обозначим через $\mathfrak{B}^{n\sigma}$ пространство функций, заданных на верхней поле конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 0$, $x_n > 0$, и таких, что

1) *функции $f(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируемы в каждой точке верхней полы конуса,*

2) *функции $f(\mathbf{x})$ имеют степень однородности σ:*

$$f(a\mathbf{x}) = a^\sigma f(\mathbf{x}), \qquad a > 0. \qquad (1)$$

Очевидно, что если функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $\mathfrak{B}^{n\sigma}$, то и функция $f(g^{-1}\mathbf{x})$, где $g \in SH(n)$, также принадлежит этому пространству. Поэтому равенство

$$S^{n\sigma}(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}), \qquad g \in SH(n) \qquad (2)$$

определяет оператор в пространстве $\mathfrak{B}^{n\sigma}$. Так как

$$S^{n\sigma}(g_1) S^{n\sigma}(g_2) f(\mathbf{x}) = S^{n\sigma}(g_1) f(g_2^{-1}\mathbf{x}) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}\mathbf{x}) = \\ = f((g_1g_2)^{-1}\mathbf{x}) = S^{n\sigma}(g_1g_2) f(\mathbf{x}),$$

то $S^{n\sigma}(g)$ является представлением группы $SH(n)$.

Представление $S^{n\sigma}(g)$ можно реализовать как представление группы $SH(n)$ в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на сфере. Каждой функции $f(\mathbf{x})$ из пространства $\mathfrak{B}^{n\sigma}$ поставим в соответствие функцию

$$F(\xi') = Qf(\xi') \equiv f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 1)$$

на сфере S^{n-2} — пересечении конуса $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 0$ и плоскости $x_n = 1$. Очевидно, что функция $f(\mathbf{x})$ однозначно определяется функцией $F(\xi')$. Именно, в силу однородности $f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \\ = x_n^\sigma f\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right) = x_n^\sigma F\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \quad (3)$$

Отсюда вытекает, что операторы представления $S^{n\sigma}(g)$ соответствуют операторам представления

$$T^{n\sigma}(g) = QS^{n\sigma}(g)Q^{-1} \quad (4)$$

в пространстве $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций на сфере S^{n-2}.

Если g принадлежит подгруппе $SO(n-1)$, то оператор $T^{n\sigma}(g)$ нетрудно выписать в явном виде. Поскольку вращение h из $SO(n-1)$ переводит в себя плоскость $x_n = 1$, а тем самым и сферу S^{n-2}, то

$$T^{n\sigma}(h)F(\xi') = F(h^{-1}\xi'). \quad (5)$$

Таким образом, представление $T^{n\sigma}(h)$ группы $SO(n-1)$ совпадает с рассмотренным в п. 1 § 2 главы IX квазирегулярным представлением этой группы [1]).

Найдем теперь вид оператора $T^{n\sigma}(g_{n-1}(\alpha))$, где $g_{n-1}(\alpha)$ — гиперболическое вращение на угол α в плоскости (x_n, x_{n-1}). Мы имеем

$$T^{n\sigma}[g_{n-1}(\alpha)]F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = QS^{n\sigma}[g_{n-1}(\alpha)]f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) = \\ = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha, -\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha + \operatorname{ch}\alpha).$$

В силу однородности функции $f(\xi)$ и соотношения (3) это равенство можно переписать в следующем виде:

$$T^{n\sigma}[g_{n-1}(\alpha)]F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = (\operatorname{ch}\alpha - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha)^\sigma \times \\ \times F\left(\frac{\xi_1}{\operatorname{ch}\alpha - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}, \ldots, \frac{\xi_{n-2}}{\operatorname{ch}\alpha - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}, \frac{\xi_{n-1}\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}\right). \quad (6)$$

Оператор $T^{n\sigma}[g_{n-1}(\alpha)]$ удобнее записывать в сферических координатах $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ на сфере S^{n-2}. Согласно п. 1 § 1 главы IX эти

---

[1]) В п. 1 § 2 главы IX квазирегулярное представление строилось в пополнении пространства $\mathfrak{D}$ по норме

$$\|F\|^2 = \int_{S^{n-2}} |F(\xi')|^2 \, d\xi'.$$

координаты связаны с декартовыми координатами $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ формулами

$$\cos\varphi_k = \frac{x_{k+1}}{r_{k+1}}, \quad \sin\varphi_k = \frac{r_k}{r_{k+1}},$$

где $r_k^2 = x_1^2 + \ldots + x_k^2$. Отсюда вытекает, что при одновременном делении координат $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}$ на $\operatorname{ch}\alpha - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha$ величины углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-3}$ не изменяются. Угол же φ_{n-2} преобразуется по формуле

$$\cos\varphi'_{n-2} = \frac{\cos\varphi_{n-2}\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\varphi_{n-2}\operatorname{sh}\alpha}.$$

Следовательно, равенство (6) можно переписать так:

$$T^{n\sigma}[g_{n-1}(\alpha)]F_1(\cos\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_{n-2}) = \\ = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\varphi_{n-2}\operatorname{sh}\alpha)^\sigma \times \\ \times F_1\left(\cos\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_{n-3}, \frac{\cos\varphi_{n-2}\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\varphi_{n-2}\operatorname{sh}\alpha}\right). \tag{7}$$

Представление $T^{n\sigma}(g)$ является представлением класса 1, т. е. в пространстве этого представления есть функция $F_0(\xi')$, инвариантная относительно всех операторов $T^{n\sigma}(h)$, $h \in SO(n-1)$. Такой функцией является

$$F_0(\xi') \equiv 1. \tag{8}$$

2. Сопряженные представления. Рассмотрим представление $T^{n\sigma}(g)'$, сопряженное представлению $T^{n\sigma}(g)$. По определению сопряженного представления, $T^{n\sigma}(g)'$ строится в пространстве $\mathfrak{D}'$ функционалов для пространства $\mathfrak{D}$ и определяется формулой

$$(T^{n\sigma}(g)'\Phi, F) = (\Phi, T^{n\sigma}(g^{-1})F), \tag{1}$$

где $\Phi \in \mathfrak{D}'$, $F \in \mathfrak{D}$.

Докажем, что представление $T^{n\sigma}(g)'$ является продолжением в пространство $\mathfrak{D}'$ представления $T^{n, -n-\sigma+2}(g)$. С этой целью каждой функции $\Phi(\xi')$ из $\mathfrak{D}$ поставим в соответствие функционал

$$(\Phi, F) = \int_{S^{n-2}} \Phi(\xi')F(\xi')\,d\xi' \tag{2}$$

в пространстве $\mathfrak{D}$, и покажем, что

$$(T^{n, -n-\sigma+2}(g)\Phi, F) = (\Phi, T^{n\sigma}(g^{-1})F). \tag{3}$$

Поскольку каждый элемент g группы $SH(n)$ может быть представлен в виде $g = h_1 g_{n-1}(\alpha) h_2$, где $h_1, h_2 \in SO(n-1)$, то доказательство достаточно провести для случаев, когда $g \in SO(n-1)$ и когда $g=g_{n-1}(\alpha)$. В первом случае наше утверждение очевидно, поскольку при $g\in SO(n-1)$

$$(T^{n,-n-\sigma+2}(g)\Phi,\ F)=\int\limits_{S^{n-2}} T^{n,-n-\sigma+2}(g)\Phi(\xi')F(\xi')\,d\xi'=$$
$$=\int\limits_{S^{n-2}}\Phi(g^{-1}\xi')F(\xi')\,d\xi'=\int\limits_{S^{n-2}}\Phi(\xi')F(g\xi')\,d\xi'=$$
$$=\int\limits_{S^{n-2}}\Phi(\xi')T^{n\sigma}(g^{-1})F(\xi')\,d\xi'=(\Phi,\ T^{n\sigma}(g^{-1})F).$$

Пусть теперь $g=g_{n-1}(\alpha)$. В этом случае имеем по формуле (7) п. 1

$$\int\limits_{S^{n-2}} T^{n,-n-\sigma+2}(g)\Phi(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1})F(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1})\,d\xi'=$$
$$=\int\limits_{S^{n-2}}(\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha)^{-n-\sigma+2}\,\Phi\left(\frac{\xi_1}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha},\ \ldots,\ \frac{\xi_{n-2}}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha},\right.$$
$$\left.\frac{\xi_{n-1}\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}\right)F(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1})\,d\xi'. \tag{4}$$

Так как $\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2=1$, то в качестве независимых переменных в этом интеграле можно выбрать $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-2}$. В этих переменных инвариантная мера $d\xi'$ на сфере S^{n-2} выражается формулой

$$d\xi'=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{d\xi_1\ \ldots\ d\xi_{n-2}}{\xi_{n-1}}. \tag{5}$$

Сделаем в интеграле (4) подстановку

$$\frac{\xi_k}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}=\eta_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n-2.$$

Легко показать, что

$$\eta_{n-1}=\frac{\xi_{n-1}\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}$$

и

$$d\xi'=(\operatorname{ch}\alpha+\eta_{n-1}\operatorname{sh}\alpha)^{-n+2}\,d\eta'.$$

После подстановки интеграл (4) принимает следующий вид:

$$\int\limits_{S^{n-2}}(\operatorname{ch}\alpha+\eta_{n-1}\operatorname{sh}\alpha)^{\sigma}\,\Phi(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-1})\times$$
$$\times F\left(\frac{\eta_1}{\operatorname{ch}\alpha+\eta_{n-1}\operatorname{sh}\alpha},\ \ldots,\ \frac{\eta_{n-2}}{\operatorname{ch}\alpha+\eta_{n-1}\operatorname{sh}\alpha},\ \frac{\eta_{n-1}\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha+\eta_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}\right)d\eta'=$$
$$=\int\limits_{S^{n-2}}\Phi(\eta')\,T^{n\sigma}[g_{n-1}(-\alpha)]\,F(\eta')\,d\eta'. \tag{6}$$

Из равенств (4) и (6) следует

$$(T^{n,\,-n-\sigma+2}[g_{n-1}(\alpha)]\,\Phi,\ F)=(\Phi,\ T^{n\sigma}[g_{n-1}(-\alpha)]\,F).$$

Таким образом, соотношение (3) доказано и при $g=g_{n-1}(\alpha)$. Но тогда оно верно для всех элементов $g\in SH(n)$.

Совершенно так же доказывается, что представление $T^{n\sigma}(g)$ эрмитово сопряжено с $T^{n,\,-n-\bar{\sigma}-2}(g)$. Надо лишь функции $\Phi(\xi')$ поставить в соответствие антилинейный функционал

$$\int\limits_{S^{n-2}}\Phi(\xi')\overline{F(\xi')}\,d\xi'$$

в пространстве $\mathfrak{D}$.

3. Неприводимость представлений $T^{n\sigma}(g)$ при нецелых σ. Докажем, что если σ не является целым числом, то представление $T^{n\sigma}(g)$ неприводимо.

Рассмотрим сначала сужение представления $T^{n\sigma}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$. Мы уже говорили, что это представление совпадает с квазирегулярным представлением группы $SO(n-1)$. Из результатов п. 7 § 2 главы IX следует, что $T^{n\sigma}(h)$, $h\in SO(n-1)$ является прямой суммой неприводимых унитарных представлений $T^{n-1,\,k}(h)$ группы $SO(n-1)$:

$$T^{n\sigma}(h)=\sum_{k=0}^{\infty}T^{n-1,\,k}(h),\qquad h\in SO(n-1). \tag{1}$$

Представления $T^{n-1,\,k}(h)$ реализуются в подпространствах $\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$ состоящих из значений на сфере S^{n-2} однородных гармонических многочленов степени k от $n-1$ переменного. При этом для различных k представления $T^{n-1,\,k}(h)$ неэквивалентны.

Обозначим через $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$ пространство функций $F(\xi')$ на сфере S^{n-2} для которых

$$\|F\|^2=\int\limits_{S^{n-2}}|F(\xi')|^2\,d\xi'<+\infty. \tag{2}$$

Предположим, что $\mathfrak{T}$ — инвариантное подпространство в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$. Из разложения (1) и попарной неэквивалентности представлений $T^{n-1,\,k}(h)$ вытекает, что $\mathfrak{T}$ является прямой суммой некоторых из подпространств $\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$, $0\leqslant k<\infty$, и потому содержит по крайней мере одно из этих подпространств:

$$\mathfrak{T}=\sum_j\mathfrak{H}^{n-1,\,k_j}.$$

Нам осталось показать, что если инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ содержит одно из подпространств $\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$ и σ не является целым числом, то τ содержит и все остальные подпространства $\mathfrak{H}^{n-1,\,m}$, а потому совпадает с подпространством $\mathfrak{D}$.

Из инвариантности $\mathfrak{T}$ относительно операторов $T^{n\sigma}(g)$ вытекает, что $\mathfrak{T}$ инвариантно и относительно инфинитезимальных операторов этого представления. Вычислим инфинитезимальный оператор, соответствующий подгруппе Ω_n гиперболических вращений $g_{n-1}(\alpha)$ в плоскости (x_n, x_{n-1}). Применяя формулу (6) п. 1, убеждаемся, что

$$AF_1 = \left.\frac{dT^{n\sigma}[g_{n-1}(\alpha)]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\sigma\cos\varphi_{n-2}F_1 - \sin^2\varphi_{n-2}\frac{\partial F_1}{\partial\cos\varphi_{n-2}}.$$

Таким образом,

$$A = -\sigma\cos\varphi_{n-2} - \sin^2\varphi_{n-2}\frac{\partial}{\partial\cos\varphi_{n-2}}. \tag{3}$$

Предположим теперь, что инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ содержит подпространство $\mathfrak{H}^{n-1,k}$. Согласно п. 2 § 3 главы IX одной из функций подпространства $\mathfrak{H}^{n-1,k}$ является функция $C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2})$. Так как подпространство $\mathfrak{T}$ инвариантно, оно должно содержать и функцию

$$AC_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) =$$
$$= -\sigma\cos\varphi_{n-2}C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) - (n-3)\sin^2\varphi_{n-2}C_{k-1}^{\frac{n-1}{2}}(\cos\varphi_{n-2}). \tag{4}$$

Применяя рекуррентные соотношения

$$tC_n^p(t) = \frac{n+1}{2(p+n)}C_{n+1}^p(t) + \frac{2p+n-1}{2(p+n)}C_{n-1}^p(t)$$

и

$$(1-t^2)\,C_{n-1}^{p+1}(t) = \frac{2p+n}{2p}tC_n^p(t) - \frac{n+1}{2p}C_{n+1}^p(t)$$

для многочленов Гегенбауэра (см. п. 2 § 3 главы IX) убеждаемся, что $\mathfrak{T}$ содержит функцию[1])

$$AC_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) = \frac{(k+1)(k-\sigma)}{2k+n-3}C_{k+1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) -$$
$$- \frac{(n+k-4)(n+k+\sigma-3)}{2k+n-3}C_{k-1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}). \tag{5}$$

Но $C_{k+1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) \in \mathfrak{H}^{n-1,k+1}$ и $C_{k-1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) \in \mathfrak{H}^{n-1,k-1}$. При этом, если σ — нецелое число, то коэффициенты при многочленах Гегенбауэра в формуле (5) отличны от нуля.

---

[1]) При $k=0$ мы считаем $C_{k-1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}) = 0$.

Из разложения (1) вытекает, что если $\mathfrak{T}$ содержит сумму ненулевых функций из подпространств $\mathfrak{H}^{n-1, k-1}$ и $\mathfrak{H}^{n-1, k+1}$, то оно содержит и эти подпространства.

Итак, мы доказали, что если σ не является целым числом, то инвариантное подпространство $\mathfrak{T}$ вместе с каждым подпространством $\mathfrak{H}^{n-1, k}$ содержит подпространства $\mathfrak{H}^{n-1, k-1}$ и $\mathfrak{H}^{n-1, k+1}$ (при $k=0$ — подпространство $\mathfrak{H}^{n-1, k+1}$). Поэтому $\mathfrak{T}$ содержит все подпространства $\mathfrak{H}^{n-1, m}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$. Неприводимость представления $T^{n\sigma}(g)$ (а значит, и $S^{n\sigma}(g)$) доказана.

4. Приводимость представления $T^{n\sigma}(g)$ при целых значениях σ. Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma=k$ — целое неотрицательное число. Покажем, что в этом случае представление $T^{nk}(g)$ приводимо. Именно, инвариантным подпространством в $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$ является пространство $\mathfrak{A}^{n-1, k}$ многочленов степени k от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. В самом деле, очевидно, что это подпространство инвариантно относительно преобразований $T^{nk}(h)F(\xi')=F(h^{-1}\xi')$, соответствующих элементам $h\in SO(n-1)$. Возьмем теперь гиперболическое вращение $g_{n-1}(\alpha)$ в плоскости (x_n, x_{n-1}). Если $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — многочлен степени k от $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, то и

$$T^{nk}[g_{n-1}(\alpha)]F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})=(\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha)^k\times$$
$$\times F\left(\frac{\xi_1}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}, \ldots, \frac{\xi_{n-2}}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}, \frac{\xi_{n-1}\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\xi_{n-1}\operatorname{sh}\alpha}\right), \quad (1)$$

является многочленом от $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ той же степени.

Инвариантное подпространство $\mathfrak{A}^{n-1, k}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{H}^{n-1, j}$, $0\leqslant j\leqslant k$. Это вытекает из доказанного в п. 6 § 2 главы IX разложения однородных многочленов, и из того, что любой многочлен степени k может быть представлен в виде суммы однородных многочленов степени j, $0\leqslant j\leqslant k$.

Представление $T^{nk}(g)$ не является вполне приводимым, поскольку у подпространства $\mathfrak{A}^{n-1, k}$ нет инвариантного дополнения. Можно показать, что сужение $T^{nk}(g)$ на подпространство $\mathfrak{A}^{n-1, k}$ неприводимо. Неприводимо и представление, индуцированное $T^{nk}(g)$ в фактор-пространстве $\mathfrak{D}/\mathfrak{A}^{n-1, k}$.

Приводимым является представление $T^{n\sigma}(g)$ и в случае, когда $\sigma=-n-k+2$, где k — целое неотрицательное число. Инвариантным подпространством в $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$ является в этом случае ортогональное дополнение пространства $\mathfrak{A}^{n-1, k}$, т. е. пространство

$$\mathfrak{D}^{n-1, k}=\sum_{j=k+1}^{\infty}\mathfrak{H}^{n-1, j}. \quad (2)$$

В самом деле, пусть функция $\Phi(\xi')$ принадлежит $\mathfrak{D}^{n-1, k}$, т. е. пусть для любого многочлена $F(\xi')$ из $\mathfrak{A}^{n-1, k}$ выполняется равенство

$$(\Phi, F)\equiv\int\Phi(\xi')\overline{F(\xi')}\,d\xi'=0, \quad (3)$$

Как было отмечено в п. 2, операторы $T^{n,-n-k+2}(g)$ и $T^{nk}(g^{-1})$ эрмитово сопряжены относительно эрмитова функционала (Φ, F). Поэтому

$$(T^{n,-n-k+2}(g)\Phi, F)=(\Phi, T^{nk}(g^{-1})F). \tag{4}$$

Но если $F(\xi')\in\mathfrak{A}^{n-1,k}$, то и $T^{nk}(g^{-1})F(\xi')\in\mathfrak{A}^{n-1,k}$, а потому $(T^{n,-n-k+2}(g)\Phi, F)=0$. Тем самым доказано, что для всех многочленов $F(\xi')$ из $\mathfrak{A}^{n-1,k}$ выполняется равенство

$$(T^{n,-n-k+2}(g)\Phi, F)=0.$$

Следовательно, $T^{n,-n-k+2}(g)\Phi\in\mathfrak{D}^{n-1,k}$. Тем самым инвариантность подпространства $\mathfrak{D}^{n-1,k}$ относительно представления $T^{n,-n-k+2}(g)$ доказана.

Представления, индуцированные представлением $T^{n,-n-k+2}$ в подпространстве $\mathfrak{D}^{n-1,k}$ и фактор-пространстве $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{n-1,k}$, неприводимы. Доказательство этого утверждения проводится так же, как и для нецелых σ.

И в случае $\sigma=-n-k+2$ представление $T^{n\sigma}(g)$ не является вполне приводимым — у подпространства $\mathfrak{D}^{n-1,k}$ нет инвариантного дополнения.

5. Условия унитарности представления $T^{n\sigma}(g)$. Выясним теперь, при каких значениях σ представление $T^{n\sigma}(g)$ группы $SH(n)$ унитарно, т. е. когда в пространстве $\mathfrak{D}$ есть скалярное произведение (F_1, F_2), инвариантное относительно операторов представления $T^{n\sigma}(g)$:

$$(F_1, F_2)=(T^{n\sigma}(g)F_1, T^{n\sigma}(g)F_2).$$

Сначала установим, когда в $\mathfrak{D}$ есть инвариантная эрмитова форма, а затем, при каких условиях на σ эта форма положительно определена. Сузим представление $T^{n\sigma}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$. Согласно формуле (1) п. 3 представление $T^{n\sigma}(h)$, $h\in SO(n-1)$ является прямой суммой неприводимых представлений $T^{n-1,k}(h)$ группы $SO(n-1)$, реализующихся в подпространствах $\mathfrak{H}^{n-1,k}$. При этом

$$\mathfrak{L}^2(S^{n-2})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{H}^{n-1,k}.$$

Поскольку инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{H}^{n-1,k}$ определяется формулой

$$(F_1, F_2)_k=\int_{S^{n-2}}F_1(\xi')\overline{F_2(\xi')}\,d\xi',\quad F_1, F_2\in\mathfrak{H}^{n-1,k},$$

то инвариантное скалярное произведение (F_1, F_2) должно иметь вид

$$(F_1, F_2)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{S^{n-2}}F_1^{(k)}(\xi')\overline{F_2^{(k)}(\xi')}\,d\xi', \tag{1}$$

где $F_i = \sum F_i^{(k)}$, $i=1, 2$, $F_i^{(k)} \in \mathfrak{H}^{n-1, k}$. Из равенства $(F_1, F_2) = \overline{(F_2, F_1)}$ вытекает, что коэффициенты α_k вещественны.

Нам осталось вычислить коэффициенты α_k. Из инвариантности скалярного произведения (1) вытекает, что для любого инфинитезимального оператора A представления $T^{n\sigma}(g)$ выполняется равенство

$$(AF_1, F_2) = -(F_1, AF_2). \tag{2}$$

В частности, оно должно выполняться и для инфинитезимального оператора

$$A = -\sigma \cos\varphi_{n-2} - \sin^2\varphi_{n-2} \frac{\partial}{\partial \cos\varphi_{n-2}},$$

соответствующего однопараметрической подгруппе гиперболических вращений $g_{n-1}(\alpha)$ (см. формулу (3) п. 3).

Возьмем

$$F_1 = C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2})$$

и

$$F_2 = C_{k+1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2}).$$

Применим для вычисления AF_1 и AF_2 формулу (4) п. 3 и примем во внимание, что $C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_{n-2})$ принадлежит подпространству $\mathfrak{H}^{n-1, k}$. Подставляя значения AF_1 и AF_2 в формулу (2) и принимая во внимание равенство (1), получаем

$$\frac{(k+1)(k-\sigma)\alpha_{k+1}}{2k+n-3}\int_0^\pi \left[C_{k+1}^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi)\right]^2 \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{(n+k-3)(n+k+\bar\sigma-2)\,\alpha_k}{2k+n-1}\int_0^\pi \left[C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi)\right]^2 \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi.$$

Подставляя в это равенство значения интегралов (см. п. 5 § 3 главы IX), получаем следующее рекуррентное соотношение для коэффициентов α_k:

$$(k-\sigma)\,\alpha_{k+1} = (n+k+\bar\sigma-2)\,\alpha_k. \tag{3}$$

В силу вещественности α_k из равенства (3) вытекает, что либо $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, либо σ — вещественное число. В первом случае $k-\sigma = n+k+\bar\sigma-2$, а потому

$$\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho,$$

где ρ — вещественное число. Во втором случае $\sigma = \bar{\sigma}$, и потому

$$\alpha_{k+1} = \frac{n+k+\sigma-2}{k-\sigma}\alpha_k.$$

Полагая для простоты $\alpha_0 = \frac{\Gamma(n+\sigma-2)}{\Gamma(-\sigma)}$, находим

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(n+k+\sigma-2)}{\Gamma(k-\sigma)}. \tag{4}$$

Итак, мы доказали, что в пространстве $\mathfrak{D}$ лишь в двух случаях существует эрмитова форма (F_1, F_2), инвариантная относительно операторов $T^{n\sigma}(g)$:

1) σ имеет вид $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$, где ρ — вещественное число. В этом случае

$$(F_1, F_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S^{n-2}} F_1^{(k)}(\xi')\overline{F_2^{(k)}(\xi')}\,d\xi', \tag{5}$$

где $F_j = \sum_{k=0}^{\infty} F_j^{(k)}$, $F_j^{(k)} \in \mathfrak{H}^{n-1,\,k}$, $j = 1, 2$. Принимая во внимание, что подпространства $\mathfrak{H}^{n-1,\,k}$ попарно ортогональны, равенство (5) можно переписать в следующем виде:

$$(F_1, F_2) = \int F_1(\xi')\overline{F_2(\xi')}\,d\xi'. \tag{5'}$$

2) σ — вещественное число. В этом случае имеем

$$(F_1, F_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+\sigma-2)}{\Gamma(k-\sigma)} \int_{S^{n-2}} F_1^{(k)}(\xi')\overline{F_2^{(k)}(\xi')}\,d\xi', \tag{6}$$

где $F_i^{(k)}(\xi')$ имеют указанный выше смысл.

Можно показать, что равенство (6) допускает следующую запись:

$$(F_1, F_2) = C_\sigma \int_{S^{n-2}}\int_{S^{n-2}} \frac{F_1(\xi')\overline{F_2(\eta')}}{(1-(\xi', \eta'))^{n-2-\sigma}}\,d\xi'\,d\eta', \tag{7}$$

где

$$(\xi', \eta') = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_{n-1}\eta_{n-1}$$

и

$$C_\sigma = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)}{2^{\sigma-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\sigma - \frac{n-2}{2}\right)}.$$

Несложно показать, что эрмитовы формы (5′) и (6) на самом деле инвариантны относительно представлений $T^{n\sigma}(g)$, где $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$ для формы (5′) и $\sigma = \bar{\sigma}$ для формы (6). Опустим детали этой выкладки.

Выясним теперь, при каких значениях σ найденные инвариантные эрмитовы формы положительно определены. Для формы (5′) ответ очевиден — для любой функции F имеем $(F, F) \geqslant 0$. Таким образом, *если* $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$, *где* ρ — *вещественное число, то представление* $T^{n\sigma}$ *унитарно.* Эти унитарные представления называются *представлениями основной серии* группы $SH(n)$.

В случае формы (6) неравенство $(F, F) \geqslant 0$ имеет место для всех функций F, если для всех k выполняется неравенство

$$\frac{\Gamma(n+k+\sigma-2)}{\Gamma(k-\sigma)} \geqslant 0\,. \tag{8}$$

Очевидно, что это имеет место, если $-n+2 < \sigma < 0$. Таким образом, *представления* $T^{n\sigma}(g)$ *при вещественных* σ *унитарны тогда и только тогда, когда* $-n+2 < \sigma < 0$. Эти унитарные представления называются представлениями *дополнительной серии.*

Кроме основной и дополнительной серий, существует еще *дискретная серия* унитарных представлений группы $SH(n)$. Эта серия соответствует значениям $\sigma = -n-k+2$, где k — целое неотрицательное число. Мы показали в п. 4, что в этом случае в пространстве $\mathfrak{D}$ есть подпространство, инвариантное относительно представления $T^{n\sigma}(g)$, а именно,

$$\mathfrak{D}^{n-1,\,k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathfrak{H}^{n-1,\,j}. \tag{9}$$

Формула (6) определяет в этом случае инвариантную эрмитову форму в подпространстве $\mathfrak{D}^{n-1,\,k}$:

$$(F_1, F_2) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\Gamma(j-k)}{\Gamma(j-\sigma)} \int_{S^{n-2}} F_1^{(j)}(\xi') \overline{F_2^{(j)}(\xi')}\, d\xi'. \tag{10}$$

Эта форма положительно определена. Поэтому представление $T^{n\sigma}(g)$ при $\sigma = -n-k+2$ индуцирует в $\mathfrak{D}^{n-1,\,k}$ унитарное представление.

Эти унитарные представления мы и будем называть *представлениями дискретной серии.*

При $\sigma = k$ мы имеем конечномерное инвариантное подпространство

$$\mathfrak{A}^{n-1,\,k} = \sum_{j=0}^{k} \mathfrak{H}^{n-1,\,j}$$

в пространстве $\mathfrak{D}$. В этом подпространстве существует инвариантная эрмитова форма вида

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \Gamma(k-j+1)\, \Gamma(n+j+k-2) \int_{S^{n-2}} F_1^{(j)}(\xi') \overline{F_2^{(j)}(\xi')}\, d\xi'. \tag{11}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться рекуррентным соотношением (3) и положить $\alpha_0 = \Gamma(k+1)\Gamma(n+k-2)$. Форма (11) не является положительно определенной. Таким образом, группа $SH(n)$ не имеет унитарных конечномерных представлений (за исключением тождественного представления).

6. Эквивалентность представлений $T^{n\sigma}(g)$. При некоторых значениях σ и τ представления $T^{n\sigma}(g)$ и $T^{n\tau}(g)$ эквивалентны. Повторяя рассуждения, проведенные в п. 6 § 2 главы VI в случае $n=3$, получаем следующий результат.

Если σ не является целым числом, таким, что $\sigma \geqslant 0$ или $\sigma \leqslant -n+2$, то представления $T^{n\sigma}(g)$ и $T^{n,-n-\sigma+2}(g)$ эквивалентны друг другу. Если $\sigma = k \geqslant 0$ — целое число, то эквивалентны представления, индуцированные $T^{nk}(g)$ в подпространстве $\mathfrak{A}^{n-1,k}$ и $T^{n,-n-k-2}(g)$ в фактор-пространстве $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{n-1,k}$. Кроме того, эквивалентны представления, индуцированные $T^{nk}(g)$ в фактор-пространстве $\mathfrak{D}/\mathfrak{A}^{n-1,k}$ и $T^{n,-n-k+2}(g)$ в подпространстве $\mathfrak{D}^{n-1,k}$.

§ 3. Зональные и присоединенные сферические функции представлений класса 1 группы $SH(n)$

В этом параграфе будут изучены матричные элементы представлений $T^{n\sigma}(g)$ группы $SH(n)$, стоящие в «нулевом столбце», т. е. соответствующие функции $F_0(\xi') \equiv 1$, инвариантной относительно операторов $T^{n\sigma}(h)$, $h \in SO(n-1)$. В частности, будет изучена зональная сферическая функция, стоящая на пересечении нулевого столбца и нулевой строки. Мы увидим, что эти функции выражаются через изученные в главе VI функции Лежандра и присоединенные функции Лежандра. Полученная связь приводит к установлению многочисленных новых свойств функций Лежандра, оставшихся неосвещенными в главе VI.

1. Построение базиса в пространстве $\mathfrak{D}$. Согласно п. 1 § 2 представления $T^{n\sigma}(g)$ группы $SH(n)$ строятся в пространстве $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций на сфере S^{n-2}. Введем в это пространство скалярное произведение

$$(F, F) = \int_{S^{n-2}} |F(\xi')|^2 \, d\xi' \tag{1}$$

и пополним его относительно нормы $\|F\|^2 = (F, F)$. Мы получим гильбертово пространство $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$. Будем считать, что представление $T^{n\sigma}(g)$ реализовано в этом гильбертовом пространстве.

В этой главе будут изучены матричные элементы представления $T^{n\sigma}(g)$. Они вычисляются в ортогональном нормированном базисе в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$, состоящем из функций вида

$$\Xi_K(\xi') = A_K \prod_{j=0}^{n-4} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-3}{2}}(\cos\varphi_{n-j-2}) \sin^{k_j+1}\varphi_{n-j-2}\, e^{\pm ik_{n-3}\varphi_1}, \qquad (2)$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ — географические координаты на сфере S^{n-2},

$$K = (k_0, \ldots, \pm k_{n-3}),\ k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-3} \geqslant 0$$

и

$$(A_K)^2 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-4} \frac{2^{2k_{j+1}+n-j-5}(k_j - k_{j+1})!\,(n-j+2k_j-3)\,\Gamma^2\left(\frac{n-j-3}{2} + k_{j+1}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k_j + k_{j+1} + n - j - 3)}. \qquad (3)$$

Этот базис был рассмотрен нами в п. 6 § 3 главы IX[1]. Там было показано, что в этом базисе матрица квазирегулярного представления группы $SO(n-1)$ является клеточно-диагональной, причем на главной диагонали стоят канонические матрицы неприводимых унитарных представлений этой группы.

Одним из базисных элементов является функция $\Xi_O(\xi')$, $O = (0, \ldots, 0)$, тождественно равная 1. Ясно, что при всех вращениях сферы S^{n-2} этот элемент инвариантен:

$$\Xi_O(h\xi') = \Xi_O(\xi'), \qquad h \in SO(n-1).$$

Как было показано в п. 5 § 2 главы I, отсюда следует, что матричные элементы $t^{n\sigma}_{KO}(g)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$t^{n\sigma}_{KO}(gh) = t^{n\sigma}_{KO}(g), \qquad h \in SO(n-1), \qquad (4)$$

а матричные элементы $t^{n\sigma}_{OK}(g)$ — уравнению

$$t^{n\sigma}_{OK}(hg) = t^{n\sigma}_{OK}(g), \qquad h \in SO(n-1). \qquad (5)$$

В частности, матричный элемент $t^{n\sigma}_{OO}(g)$, т. е. *зональная сферическая функция*, удовлетворяет функциональному уравнению

$$t^{n\sigma}_{OO}(h_1 g h_2) = t^{n\sigma}_{OO}(g), \qquad h_1, h_2 \in SO(n-1). \qquad (6)$$

[1]) Мы несколько изменим обозначения по сравнению с главой IX, внеся число $l = k_0$ в символ K. Поэтому, например, базисный элемент $\Xi_O(\xi')$ в главе IX обозначался бы $\Xi^0_O(\xi') \equiv 1$.

Поскольку любой элемент g группы $SH(n)$ можно представить в виде $g=h_1g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})h_2$, где $h_1, h_2\in SO(n-1)$ и θ_{n-1}^{n-1} — угол Эйлера элемента g, то имеем

$$t_{OO}^{n\sigma}(g)=t_{OO}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})]. \tag{7}$$

Таким образом, матричный элемент $t_{OO}^{n\sigma}(g)$ зависит только от угла Эйлера θ_{n-1}^{n-1} элемента g.

2. Интегральное представление зональных и присоединенных сферических функций. Чтобы вывести интегральное представление сферических функций, воспользуемся формулой

$$t_{KO}^{n\sigma}(g)=(T^{n\sigma}(g)\,\Xi_O,\Xi_K), \tag{1}$$

где (F_1, F_2) — скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-2})$:

$$(F_1, F_2)=\int\limits_{S^{n-2}} F_1(\xi')\overline{F_2(\xi')}\,d\xi'. \tag{2}$$

Через $\Xi_O(\eta')$ здесь обозначена функция на сфере S^{n-2}, тождественно равная 1. Будем обозначать тем же символом однородную функцию степени σ на конусе $[\xi, \xi]=0$, равную единице при $\xi_n=1$. Иными словами, положим $\Xi_O(\xi)=\xi_n^\sigma$.

Обозначим через $\mathbf{x}_0$ точку с координатами $(0, 0, \ldots, 1)$. Тогда $\Xi_O(\xi)$ можно записать в виде

$$\Xi_O(\xi)=\xi_n^\sigma=[\mathbf{x}_0, \xi]^\sigma. \tag{3}$$

Оператор $T^{n\sigma}(g)$ переводит функцию $\Xi_O(\xi)$ в функцию

$$T^{n\sigma}(g)\,\Xi_O(\xi)=\Xi_O(g^{-1}\xi)=[\mathbf{x}_0, g^{-1}\xi]^\sigma.$$

Но выражение $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ инвариантно относительно сдвигов из группы $SH(n)$:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]=[g\mathbf{x}, g\mathbf{y}],$$

поэтому имеем

$$T^{n\sigma}(g)\,\Xi_O(\xi)=[g\mathbf{x}_0, \xi]^\sigma. \tag{4}$$

Из формул (1), (2) и (4) вытекает, что

$$t_{KO}^{n\sigma}(g)=\int\limits_{S^{n-2}}[g\mathbf{x}_0, \xi]^\sigma\,\overline{\Xi_K(\xi')}\,d\xi', \tag{5}$$

где $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 1)$, $\xi'=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

В частности,

$$t_{OO}^{n\sigma}(g)=\int\limits_{S^{n-2}}[g\mathbf{x}_0, \xi]^\sigma d\xi. \tag{6}$$

Поскольку зональная сферическая функция зависит только от угла Эйлера θ^{n-1}_{n-1}, достаточно вычислить ее для случая, когда g является гиперболическим вращением на угол θ в плоскости (x_{n-1}, x_n). Это вращение переводит $\mathbf{x}_0(0, \ldots, 0, 1)$ в $\mathbf{x}(0, \ldots, \operatorname{sh}\theta, \operatorname{ch}\theta)$. Поэтому

$$[g\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}] = \operatorname{ch}\theta - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\theta$$

и

$$t^{n\sigma}_{OO}(g_{n-1}(\theta)) = \int\limits_{S^{n-2}} (\operatorname{ch}\theta - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\theta)^\sigma\, d\boldsymbol{\xi}'.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем отсюда

$$t^{n\sigma}_{OO}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int\limits_0^\pi (\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi\operatorname{sh}\theta)^\sigma \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi. \tag{7}$$

Тем самым мы получили интегральное представление зональной сферической функции. Делая подстановку

$$\cos\psi = \frac{\operatorname{ch}\theta\cos\varphi - \operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi\operatorname{sh}\theta},$$

получаем

$$t^{n\sigma}_{OO}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int\limits_0^\pi (\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi\operatorname{sh}\theta)^{-n-\sigma+2} \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi. \tag{8}$$

Этот же результат можно получить, заметив, что представления $T^{n\sigma}(g)$ и $T^{n,\,-n-\sigma+2}(g)$ эквивалентны друг другу.

3. Выражение зональной функции через гипергеометрическую функцию. Вынесем в формуле (7) п. 2 за знак интеграла $\operatorname{ch}^\sigma\theta$, разложим $(1 - \cos\varphi\operatorname{th}\theta)^\sigma$ по формуле бинома Ньютона и почленно проинтегрируем. Мы получим

$$t^{n\sigma}_{OO}[g_{n-1}(\theta)] = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \operatorname{ch}^\sigma\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{th}^k\theta}{\Gamma(\sigma-k+1)\,\Gamma(k+1)} \int\limits_0^\pi \cos^k\varphi \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi.$$

Так как

$$\int\limits_0^\pi \cos^{2k}\varphi \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n-1}{2}\right)}$$

и

$$\int_0^\pi \cos^{2k+1}\varphi \sin^{n-3}\varphi\, d\varphi = 0,$$

то

$$t^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)}{\sqrt{\pi}} \operatorname{ch}^\sigma\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{th}^{2k}\theta}{\Gamma(\sigma-2k+1)\Gamma(2k+1)\Gamma\left(k+\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{1}$$

Но

$$\Gamma(2k+1) = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1),$$

$$\Gamma(\sigma+1) = -\frac{\pi}{\sin\sigma\pi\Gamma(-\sigma)}$$

и

$$\Gamma(\sigma-2k+1) = -\frac{2^{\sigma+1-2k}\pi\sqrt{\pi}}{\sin\sigma\pi\Gamma\left(k-\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{\sigma-1}{2}\right)}$$

(см. п. 6 и 7 § 1 главы V). Поэтому

$$t_{00}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\operatorname{ch}^\sigma\theta}{2^{\sigma+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k-\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{\sigma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(k+1)}\operatorname{th}^{2k}\theta. \tag{2}$$

В силу формулы (4) п. 7 § 1 главы V и формулы (2) п. 1 § 1 главы VII отсюда вытекает

$$t_{00}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] = \operatorname{ch}^\sigma\theta F\left(-\frac{\sigma}{2}, -\frac{\sigma-1}{2}; \frac{n-1}{2}; \operatorname{th}^2\theta\right). \tag{3}$$

Таким образом, мы получили выражение $t_{00}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)]$ через гипергеометрическую функцию. Сравним это выражение с выражением $\mathfrak{P}_l^m(z)$ через гипергеометрическую функцию (см. п. 4 § 1 главы VII). Мы получим

$$t_{00}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\operatorname{sh}^{\frac{n-3}{2}}\theta}\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta). \tag{4}$$

4. Вычисление присоединенных сферических функций. Перейдем теперь к вычислению присоединенных сферических функций. Рассмотрим сначала случай, когда g является гиперболическим вращением на угол φ в плоскости (x_{n-1}, x_n). Как мы видели выше, в этом случае имеем $[g\mathbf{x}_0, \xi] = \operatorname{ch}\theta - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\theta$. Поэтому по формуле (1) п. 3 получаем

$$t^{n\sigma}_{K0}(g_{n-1}(\theta)) = \int\limits_{S^{n-2}} (\operatorname{ch}\theta - \xi_{n-1}\operatorname{sh}\theta)^\sigma \overline{\Xi_K(\xi')}\, d\xi'. \tag{1}$$

Перейдем к сферическим координатам и подставим вместо $\Xi_K(\xi')$ выражение (2) из п. 1.

Из соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра получим, что $t^{n\sigma}_{K0}(g_{n-1}(\theta))$ отлично от нуля лишь, если $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-3} = 0$ [1]). Если же $K = (k, 0, \ldots, 0)$, то после несложных преобразований получаем

$$t^{n\sigma}_{K0}(g_{n-1}(\theta)) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \sqrt{\frac{k!\,(n+2k-3)\,\Gamma(n-2)}{\Gamma(n+k-3)}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi (\operatorname{ch}\theta - \cos\varphi\operatorname{sh}\theta)^\sigma C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi)\sin^{n-3}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \sqrt{\frac{k!\,(n+2k-3)\,\Gamma(n-2)}{\Gamma(n+k-3)}} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (\operatorname{ch}\theta - x\operatorname{sh}\theta)^\sigma C_k^{\frac{n-3}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}\, dx. \tag{2}$$

Но по формуле (7) п. 8 § 4 главы IX

$$(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}} C_k^{\frac{n-3}{2}}(x) = \frac{(-1)^k\,\Gamma(n+k-3)\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^k\,\Gamma(n-3)\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+k\right)k!} \frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x^2)^{k+\frac{n-4}{2}}\right].$$

Подставим это выражение в формулу (2) и k раз проинтегрируем

[1]) Это вытекает также из леммы Шура, если принять во внимание, что $T^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)]$ коммутирует со всеми операторами $T^{n\sigma}(h)$, $h \in SO(n-2)$, и учесть вид матрицы $T^{n\sigma}(h)$.

по частям. Мы получим

$$t_{KO}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)\operatorname{sh}^k\theta}{2^{k+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(n-3)\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+k\right)\Gamma(\sigma-k+1)} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(n+2k-3)\,\Gamma(n-2)\,\Gamma(n+k-3)}{k!}} \times$$
$$\times \int_{-1}^{1} (\operatorname{ch}\theta - x\operatorname{sh}\theta)^{\sigma-k}(1-x^2)^{k+\frac{n-4}{2}}\,dx. \quad (3)$$

Но по формуле (7) п. 2

$$\int_{-1}^{1} (\operatorname{ch}\theta - x\operatorname{sh}\theta)^{\sigma-k}(1-x^2)^{k+\frac{n-4}{2}}\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+k\right)}\, t_{OO}^{n+2k,\,\sigma-k}[g_{n+2k-1}(\theta)],$$

и потому при $K=(k, 0, \ldots, 0)$

$$t_{KO}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)}{2^{k+1}\Gamma(n-3)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+k\right)\Gamma(\sigma-k+1)} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(n+2k-3)\,\Gamma(n-2)\,\Gamma(n+k-3)}{k!}}\operatorname{sh}^k\theta\, t_{OO}^{n+2k,\,\sigma-k}[g_{n+2k-1}(\theta)]. \quad (4)$$

Выражение же для $t_{OO}^{n+2k,\,\sigma-k}[g_{n+2k-1}(\theta)]$ через присоединенные функции Лежандра нам уже известно (см. формулу (4) п. 3). Поэтому имеем

$$t_{KO}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)] = \frac{(-1)^k 2^{\frac{n-5}{2}}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(n-3)\,\Gamma(\sigma-k+1)} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(n+2k-3)\,\Gamma(n-2)\,\Gamma(n+k-3)}{k!}}\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta). \quad (5)$$

Найдем теперь выражение для матричных элементов вида $t_{OK}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta)]$. В п. 2 § 2 было доказано, что представления $T^{n\sigma}(g)$ и $T^{n,\,-n-\bar{\sigma}+2}(g)$ группы $SH(n)$ эрмитово сопряжены друг другу. Отсюда вытекает равенство

$$t_{OK}^{n\sigma}(g) = (T^{n\sigma}(g)\,\Xi_K, \Xi_O) = (\Xi_K,\ T^{n,\,-n-\bar{\sigma}+2}(g^{-1})\,\Xi_O) =$$
$$= (T^{n,\,-n-\sigma+2}(g^{-1})\,\Xi_O, \Xi_{\bar{K}}) = t_{\bar{K}O}^{n,\,-n-\sigma+2}(g^{-1}), \quad (6)$$

где $\bar{K}=(k, k_1, \ldots, \mp k_{n-3})$.

Из формулы (2) вытекает

$$t_{\overline{K}O}^{n,\,-n-\sigma+2}[g_{n-1}(-\theta)]=(-1)^k t_{\overline{K}O}^{n,\,-n-\sigma+2}[g_{n-1}(\theta)].$$

Мы доказали, что

$$t_{OK}^{n\sigma}(g_{n-1}(\theta))=(-1)^k t_{\overline{K}O}^{n,\,-n-\sigma-2}(g_{n-1}(\theta)). \tag{7}$$

Перейдем к вычислению присоединенных сферических функций $t_{KO}^{n\sigma}(g)$ для произвольного элемента g группы $SH(n)$. Пусть углы Эйлера этого элемента равны θ_i^j. Из равенства (4) п. 1 вытекает, что $t_{KO}^{n\sigma}(g)=t_{KO}^{n\sigma}(g')$, где

$$g'=g_1(\theta_1^{n-1})\ldots g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}).$$

Положим

$$h'=g_1(\theta_1^{n-1})\ldots g_{n-2}(\theta_{n-2}^{n-1}).$$

Тогда $g'=h'g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})$, и так как

$$T^{n\sigma}(g')=T^{n\sigma}(h')\,T^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})],$$

то

$$t_{KO}^{n\sigma}(g')=\sum_M t_{KM}^{n\sigma}(h')\,t_{MO}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})]. \tag{8}$$

Элементы $t_{MO}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})]$ мы вычислили выше и показали, что они отличны от нуля, лишь если $M=(m,\,0,\,\ldots,\,0)$. Нам осталось найти $t_{KM}^{n\sigma}(h')$. Но, как было показано в п. 1 § 2, сужение представления $T^{n\sigma}(g)$ на подгруппу $SO(n-1)$ является квазирегулярным представлением этой подгруппы.

В базисе $\Xi_K(\xi')$ матрица квазирегулярного представления группы $SO(n-1)$ клеточно-диагональна, причем на главной диагонали этой матрицы стоят канонические матрицы неприводимых унитарных представлений $T^{n-1,\,k}(h)$ группы $SO(n-1)$. Поэтому элементы $t_{KM}^{n\sigma}(h')$, где $M=(m,\,0,\,\ldots,\,0)$, $K=(k,\;k_1,\,\ldots,\,\pm k_{n-3})$, равны нулю, если $m\neq k$. Если же $m=k$, то $t_{KM}^{n\sigma}(h')=t_{K'O'}^{n-1,\,k}(h')$, где $K'=(k_1,\,\ldots$ $\ldots,\,\pm k_{n-3})$ и $O'=(0,\,\ldots,\,0)$. Подставляя это значение в формулу (1), получаем

$$t_{KO}^{n\sigma}(g')=t_{K'O'}^{n-1,\,k}(h')\,t_{MO}^{n\sigma}[g^{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})],$$

где $M=(k,\,0,\,\ldots,\,0)$.

Заменим в этой формуле оба сомножителя их выражениями через присоединенные функции Лежандра и многочлены Гегенбауэра (см. формулу (7) п. 1 § 4 главы IX и формулу (5) п. 4). Мы получим

$$t_{KO}^{n\sigma}(g)=t_{KO}^{n\sigma}(g')=B_{KO}^{n\sigma}\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta_{n-1}^{n-1}\,\mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}-k_0}(\operatorname{ch}\theta_{n-1}^{n-1})\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-4}C_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n-j-3}{2}+k_{j+1}}(\cos\theta_{n-j-2}^{n-1})\sin^{k_{j+1}}\theta_{n-j-2}^{n-1}e^{\pm ik_{n-3}\theta_1^{n-1}}, \tag{9}$$

где $k_0 = k$ и

$$B_{KO}^{n\sigma} = \frac{(-1)^{k_0} 2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\sigma-1)}{\Gamma(\sigma-k_0+1)} \times$$
$$\times \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \prod_{j=0}^{n-4} \frac{2^{2k_{j+1}+n-j-5}(k_j-k_{j+1})!}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k_j+k_{j+1}+n-j-3)} \times \right.$$
$$\left. \times (n-j+2k_j-3)\,\Gamma\left(\frac{n-j-3}{2}+k_{j+1}\right)\right]^{1/2}. \qquad (10)$$

5. Теорема сложения для функций Лежандра. Пользуясь установленной выше связью между функциями Лежандра и матричными элементами нулевого столбца матрицы $T^{n\sigma}(g)$, выведем новую теорему сложения для функций Лежандра.

Рассмотрим элемент

$$g = g_{n-1}(\theta_1)\, g_{n-2}(\varphi_1)\, g_{n-1}(\theta_2) \qquad (1)$$

группы $SH(n)$, где, по принятым нами обозначениям, $g_{n-1}(\theta_1)$ и $g_{n-1}(\theta_2)$ — гиперболические вращения в плоскости (x_n, x_{n-1}), а $g_{n-2}(\varphi_1)$ — вращение в плоскости (x_{n-1}, x_{n-2}). Это вращение переводит точку M с координатами $(0, 0, \ldots, 1)$ в точку $M'(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$x_n = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_1.$$

Из результатов п. 4 § 1 отсюда следует, что угол $\theta_{n-1}^{n-1} = \theta$ вращения g определяется формулой

$$\operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2 + \operatorname{sh}\theta_1 \operatorname{sh}\theta_2 \cos\varphi_1. \qquad (2)$$

Из равенства (1) вытекает, что

$$t_{OO}^{n\sigma}(g) = \sum_{K,\,M} t_{OK}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_1)]\, t_{KM}^{n\sigma}[g_{n-2}(\varphi)]\, t_{MO}^{n\sigma}[g_{n-2}(\theta_2)] =$$
$$= \sum_{K,\,M} (-1)^m\, t_{OK}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_1)]\, t_{KM}^{n\sigma}[g_{n-2}(\varphi)]\, t_{O\overline{M}}^{n,\,-n-\sigma+2}[g_{n-1}(\theta_2)], \qquad (3)$$

где $\overline{M} = (m_0, m_1, \ldots, \mp m_{n-3})$.

Как было показано в п. 4, элементы $t_{OK}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_1)]$ и $t_{O\overline{M}}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_2)]$ отличны от нуля лишь, если $K = (k, 0, \ldots, 0)$ и $M \equiv \overline{M} = (m, 0, \ldots, 0)$, а элемент $t_{KM}^{n\sigma}[g_{n-2}(\varphi)]$ отличен от нуля, лишь если $k = m$. Поэтому равенство (3) принимает вид

$$t_{OO}^{n\sigma}(g) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t_{OK}^{n\sigma}[g_{n-1}(\theta_1)] \times$$
$$\times t_{KK}^{n\sigma}[g_{n-2}(\varphi_1)]\, t_{OK}^{n,\,-n-\sigma+2}[g_{n-1}(\theta_2)], \qquad (4)$$

где $K = (k, 0, \ldots, 0)$.

Подставим в равенство (4) вместо матричных элементов их выражения через присоединенные функции Лежандра и многочлены Гегенбауэра. Так как

$$t_{KK}^{n\sigma}[g_{n-2}(\varphi_1)] = t_{O'O'}^{n-1,\,k}[g_{n-2}(\varphi_1)],$$

то

$$\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta) =$$
$$= 2^{\frac{n-5}{2}}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)\Gamma(-n-\sigma+3)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-3)}{\Gamma(\sigma-k+1)}\times$$
$$\times\Gamma(-n-\sigma-k+3)\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta_1\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta_2\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta_1)\times$$
$$\times\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta_2)\,C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_1), \tag{5}$$

где

$$\operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2 + \operatorname{sh}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2\cos\varphi_1.$$

Эта формула аналогична доказанной в п. 2 § 4 главы IX формуле сложения для многочленов Гегенбауэра.

6. Теорема умножения для функций Лежандра. Умножим обе части равенства (5) п. 5 на функцию $\sin^{n-3}\varphi_1 C_m^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_1)$ и проинтегрируем по φ_1 от 0 до π. Принимая во внимание соотношения ортогональности для функций Гегенбауэра, получим

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta)\,C_m^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi_1)\sin^{n-3}\varphi_1\,d\varphi_1 =$$
$$= \frac{(-1)^m\pi\,2^{\frac{5-n}{2}}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(-\sigma-n+3)\Gamma(n+m-3)}{m!\,\Gamma(\sigma-m+1)\Gamma(-n-m-\sigma+3)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\times$$
$$\times\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta_1\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta_2\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-m}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta_1)\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-m}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta_2), \tag{1}$$

где

$$\operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2 + \operatorname{sh}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2\cos\varphi. \tag{2}$$

Замена переменной φ_1 на переменную θ преобразует формулу (1) к следующему виду:

$$\int\limits_{|\theta_1+\theta_2|}^{\theta_1+\theta_2} \operatorname{sh}^{\frac{5-n}{2}}\theta\, \mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta)\, C_m^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2}{\operatorname{sh}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2}\right)\times$$

$$\times\{[\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)-\operatorname{ch}\theta][\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}(\theta_1-\theta_2)]\}^{\frac{n-4}{2}}\,d\theta=$$

$$=\frac{(-1)^m\pi\, 2^{\frac{5-n}{2}}\,\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(-\sigma-n+3)\,\Gamma(n+m-3)}{m!\,\Gamma(\sigma-m+1)\,\Gamma(-n-m-\sigma+3)\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{\frac{n-3}{2}}\theta_1\operatorname{sh}^{\frac{n-3}{2}}\theta_2\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-m}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta_1)\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-m}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta_2).$$

7. Производящая функция для присоединенных функций Лежандра. Из формул (2) и (5) п. 4 следует, что

$$\int\limits_0^\pi(\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi\operatorname{sh}\theta)^\sigma\, C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi)\sin^{n-3}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{(-1)^k\, 2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(n+k-3)}{k!\,\Gamma(n-3)\,\Gamma(\sigma-k+1)}\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta). \qquad (1)$$

В силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра отсюда вытекает

$$(\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi\operatorname{sh}\theta)^\sigma=2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+2k-3)}{\Gamma(\sigma-k+1)}\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta)\, C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi). \qquad (2)$$

Равенство (2) можно рассматривать как производящую функцию для присоединенных функций Лежандра. С его помощью легко установить ряд новых свойств этих функций.

Положим в равенстве (2) $\varphi=0$ или π. Мы получим

$$e^{\pm\sigma\theta}=\frac{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma(n-3)}\operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}\theta\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm 1)^k(n+2k-3)\,\Gamma(n+k-3)}{k!\,\Gamma(\sigma-k+1)}\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta). \qquad (3)$$

Из формулы (2) вытекает также:

$$\Gamma(2p)\operatorname{sh}^p\theta\,\mathfrak{P}^{-p}_{\sigma+\tau+p}(\operatorname{ch}\theta)=2^p\,\Gamma(p)\,\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(\tau+1)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p+k)\,\Gamma(2p+k)}{k!\,\Gamma(\sigma-k+1)\,\Gamma(\tau-k+1)}\mathfrak{P}^{-p-k}_{\sigma+p}(\operatorname{ch}\theta)\,\mathfrak{P}^{-p-k}_{\tau+p}(\operatorname{ch}\theta). \quad (4)$$

§ 4. Разложение представлений группы $SH(n)$ и преобразование Фока — Мелера

1. Вводные замечания. В этом параграфе мы разложим квазирегулярное представление группы $SH(n)$. Оно аналогично квазирегулярному представлению группы $SO(n)$ вращений n-мерного евклидова пространства и строится в пространстве функций на сфере псевдоевклидова пространства. Однако, поскольку в псевдоевклидовом пространстве есть три типа сфер (вещественной, чисто мнимой и нулевой кривизны), существуют три типа квазирегулярных представлений группы $SH(n)$. Первый из них реализуется в пространстве функций на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, второй — в пространстве функций на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=-1$ и третий — в пространстве функций на верхней поле конуса $[\xi, \xi]=0$.

Ограничимся представлением, связанным с двуполостным гиперболоидом $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, поскольку случай однополостного гиперболоида еще не изучен до конца. Разложение представления, связанного с гиперболоидом $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, проводится по общей схеме, найденной И. М. Гельфандом и М. И. Граевым. Схема состоит в следующем: сначала каждой функции $f(\mathbf{x})$ на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$ ставится в соответствие функция $h(\xi)$ на конусе $[\xi, \xi]=0$. Функцию $h(\xi)$ разлагают на однородные компоненты. Квазирегулярному представлению соответствуют неприводимые представления в пространствах этих однородных компонент.

Интегральное преобразование, переводящее функцию $f(\mathbf{x})$ на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$ в функцию $h(\xi)$ на конусе $[\xi, \xi]=0$, выполняется путем интегрирования по некоторым многообразиям на гиперболоиде, а именно, по орисферам пространства Лобачевского. Теория этих орисфер в нужной нам форме изложена в п. 4 § 1 главы V книги [15]. Там доказаны следующие утверждения.

Пусть пространство Лобачевского реализовано на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$. Тогда его орисферами являются сечения гиперболоида плоскостями вида $[\mathbf{x}, \xi]=1$, где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$, $\xi_n>0$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством орисфер пространства Лобачевского и точками верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$, $\xi_n>0$.

2. Инвариантное интегрирование в пространстве Лобачевского и на орисферах. Определим интегрирование в пространстве Лобачевского, инвариантное относительно операторов сдвига, т. е. такое, что

$$\int f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\int f(g\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Реализуем пространство Лобачевского на гиперболоиде $[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1$.

Элемент объема $dv=dx_1, \ldots, dx_n$ в пространстве $E_{n-1,1}$ сохраняется при всех линейных преобразованиях с определителем 1, в том числе и при всех гиперболических поворотах. Введем в области $[\mathbf{x},\mathbf{x}]>0$ новую систему координат $x_1, \ldots, x_{n-1}, \rho$, где $\rho^2=[\mathbf{x},\mathbf{x}]$. В этих переменных элемент объема dv примет следующий вид:

$$dv=\frac{\rho\,d\rho\,dx_1\ldots dx_{n-1}}{x_n}=\frac{\rho\,d\rho\,dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}}.$$

Поскольку при гиперболических поворотах в пространстве E_n сохраняются как ρ, так и dv, то, следовательно, сохраняется и

$$d\mathbf{x}=\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{x_n}=\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}}. \tag{2}$$

Формула (2) и определяет инвариантную меру в пространстве Лобачевского. Она аналогична установленной в п. 1 § 1 главы IX формуле для инвариантной меры на сфере.

Инвариантный интеграл по гиперболоиду $[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1$ можно записать с помощью обобщенной функции $\delta([\mathbf{x},\mathbf{x}]-1)$ [1]). Именно, легко показать, что

$$\int f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=2\int f(\mathbf{x})\,\delta([\mathbf{x},\mathbf{x}]-1)\,dv. \tag{3}$$

Инвариантность интеграла в правой части равенства (3) сразу вытекает из инвариантности меры dv и функции $[\mathbf{x},\mathbf{x}]$ при гиперболических поворотах пространства $E_{n-1,1}$.

Нам понадобится еще выражение инвариантной меры для пространства Лобачевского в гиперболических координатах $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ (см. п. 1 § 1). Делая замену переменных по формуле (1) п. 1 § 1, получаем

$$d\mathbf{x}=\operatorname{sh}^{n-2}\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\ldots\sin\theta_2\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}. \tag{4}$$

Совершенно так же устанавливается, что инвариантная мера $d\boldsymbol{\xi}$ на конусе $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}]=0$ задается формулой

$$d\boldsymbol{\xi}=\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}}{\xi_n}=\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2}}. \tag{5}$$

[1]) Относительно обобщенной функции $\delta(P)$ см. [18], главу III, § 1, п. 3 и, в частности, стр. 276. Само собой разумеется, что в правой части равенства (4) под $f(\mathbf{x})$ понимается непрерывное продолжение функции, заданной на гиперболоиде $[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1$, на все пространство $E_{n-1,1}$.

Выведем теперь формулу для инвариантного интегрирования по орисфере. В п. 1 было отмечено, что при реализации пространства Лобачевского на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$ уравнение орисферы в этом пространстве принимает вид $[\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}]=1$, где $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}]=0$.

Определим интеграл функции $f(\mathbf{x})$ по орисфере ω: $[\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}]=1$ формулой

$$\int_{\omega} f(\mathbf{x})\, d\omega=\int f(\mathbf{x})\, \delta([\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}]-1)\, d\mathbf{x}, \tag{6}$$

где $\mathbf{x}$ — точка пространства Лобачевского, реализованного на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, а $d\mathbf{x}$ — инвариантная мера в этом пространстве.

Так как мера $d\mathbf{x}$ и функция $[\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}]$ сохраняются при одновременном сдвиге точек $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$, то определенная таким образом мера сохраняется при сдвиге орисферы. Отсюда следует, что если движение g пространства Лобачевского переводит орисферу ω в орисферу $g\omega$, то имеет место равенство

$$\int_{\omega} f(g\mathbf{x})\, d\omega=\int_{g\omega} f(\mathbf{x})\, d\omega_g, \tag{7}$$

где $d\omega_g$ — мера на орисфере $g\omega$. В частности, если движение g переводит орисферу ω в себя, то

$$\int_{\omega} f(g\mathbf{x})\, d\omega=\int_{\omega} f(\mathbf{x})\, d\omega. \tag{8}$$

3. Интегральное преобразование Гельфанда — Граева. Каждой финитной функции $f(\mathbf{x})$ в пространстве Лобачевского поставим в соответствие ее интегралы по орисферам

$$h(\omega)=\int_{\omega} f(\mathbf{x})\, d\omega, \tag{1}$$

где $d\omega$ — определенная выше мера на орисфере ω. Тем самым каждой финитной функции в пространстве Лобачевского ставится в соответствие другая функция, $h(\omega)$, определенная на множестве орисфер этого пространства. Назовем преобразование, переводящее функцию $f(\mathbf{x})$ в функцию $h(\omega)$, *интегральным преобразованием Гельфанда — Граева*.

В п. 1 было показано, что множество орисфер можно рассматривать как множество точек верхней полы конуса $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}]=0$ (каждой точке $\boldsymbol{\xi}$ этой полы соответствует орисфера $[\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}]=1$). Поэтому функцию $h(\omega)$ можно рассматривать как функцию на верхней поле конуса и писать $h(\boldsymbol{\xi})$ вместо $h(\omega)$. Таким образом, наше интегральное преобразование переводит пространство функций, заданных на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, в пространство функций, заданных на верхней поле конуса $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}]=0$.

Вспоминая определение интеграла по орисфере при реализации пространства Лобачевского на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, можно записать функцию $h(\xi)$ в следующем виде:

$$h(\xi)=\int f(\mathbf{x})\,\delta([\mathbf{x}, \xi]-1)\,d\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $d\mathbf{x}$ — инвариантная мера в пространстве Лобачевского.

Можно доказать (см. [15], стр. 388), что если $f(\mathbf{x})$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, то функция $h(\xi)$ на конусе, определяемая формулой (2), бесконечно дифференцируема, финитна и равна нулю в некоторой окрестности вершины конуса.

В книге [15] (см. п. 3 § 2 главы V) выведена формула обращения для интегрального преобразования, переводящего $f(\mathbf{x})$ в $h(\xi)$. Именно, там доказано следующее утверждение.

Пусть $f(\mathbf{x})$ — финитная функция в $(n-1)$-мерном пространстве Лобачевского и

$$h(\xi)=\int f(\mathbf{x})\,\delta([\mathbf{x}, \xi]-1)\,d\mathbf{x}. \tag{3}$$

— ее интегралы по орисферам $[\mathbf{x}, \xi]=1$ этого пространства. Если размерность $n-1$ пространства Лобачевского нечетна, $n=2m+2$, то формула обращения для интегрального преобразования (3) *имеет вид*

$$f(\mathbf{a})=\frac{(-1)^m}{2(2\pi)^{2m}}\int h(\xi)\,\delta^{(2m)}([\mathbf{a}, \xi]-1)\,d\xi. \tag{4}$$

Если же $n=2m+1$, то формула обращения пишется следующим образом:

$$f(\mathbf{a})=\frac{(-1)^m\,\Gamma(2m)}{(2\pi)^{2m}}\int h(\xi)([\mathbf{a}, \xi]-1)^{-2m}\,d\xi. \tag{5}$$

Здесь интеграл понимается в смысле регуляризованного значения, а именно:

$$\int h(\xi)([\mathbf{a}, \xi]-1)^{-2m}\,d\xi=\int h(\xi)([\mathbf{a}, \xi]-1)^{\mu}\,d\xi\,\Big|_{\mu=-2m}. \tag{6}$$

4. Квазирегулярное представление группы $SH(n)$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(\mathbf{x})$ на верхней поле гиперболоида $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$. Каждому элементу g группы $SH(n)$ поставим в соответствие оператор $L(g)$ в пространстве $\mathfrak{K}$, задаваемый формулой

$$L(g)f(\mathbf{x})=f(g^{-1}\mathbf{x}). \tag{1}$$

Ясно, что $L(g_1)L(g_2)=L(g_1g_2)$ и потому $L(g)$ является представлением группы $SH(n)$.

Пополним пространство $\mathfrak{K}$ по норме

$$\|f\|^2 = \int\limits_{[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \tag{2}$$

Мы получим пространство $\mathfrak{H}$, состоящее из всех функций $f(\mathbf{x})$ на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 1$, $x_n > 0$, таких, что

$$\int |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty.$$

Представление $L(g)$ можно продолжить на пространство $\mathfrak{H}$. При этом из инвариантности меры $d\mathbf{x}$ вытекает, что $L(g)$ унитарно относительно нормы $\|f\|$.

Разложим представление $L(g)$ на неприводимые. С этой целью каждой функции $f(\mathbf{x})$ из пространства $\mathfrak{K}$ поставим в соответствие функцию

$$h(\xi) = \int\limits_{[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\, \delta([\mathbf{x}, \xi] - 1)\, d\mathbf{x}, \tag{3}$$

заданную на верхней поле конуса $[\xi, \xi] = 0$.

Найдем, во что переходит при этом преобразовании оператор $L(g)$. Из равенства (3) видно, что функции $L(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x})$ соответствует на конусе функция

$$h_g(\xi) = \int f(g^{-1}\mathbf{x})\, \delta([\mathbf{x}, \xi] - 1)\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int f(\mathbf{x})\, \delta([g\mathbf{x}, \xi] - 1)\, d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x})\, \delta([\mathbf{x}, g^{-1}\xi] - 1)\, d\mathbf{x} = h(g^{-1}\xi).$$

Таким образом, квазирегулярному представлению $L(g)$ соответствует представление

$$T(g)\, h(\xi) = h(g^{-1}\xi) \tag{4}$$

в пространстве функций на верхней поле конуса. Тем самым задача о разложении представления $L(g)$ свелась к задаче о разложении представления $T(g)$. Но эта задача оказывается значительно проще и сводится к разложению функций на конусе по однородным компонентам.

Именно, функции $h(\xi)$ поставим в соответствие функцию

$$\Phi(\xi, \sigma) = \int\limits_0^\infty h(t\xi)\, t^{-\sigma-1}\, dt. \tag{5}$$

При $a > 0$ имеем

$$\Phi(a\xi, \sigma) = \int\limits_0^\infty h(at\xi)\, t^{-\sigma-1}\, dt = a^\sigma \int\limits_0^\infty h(t\xi)\, t^{-\sigma-1}\, dt = a^\sigma\, \Phi(\xi, \sigma),$$

и потому функция $\Phi(\xi, \sigma)$ является однородной функцией от ξ степени σ. При этом функции $h(g^{-1}\xi)$ соответствует функция

$$T^{n\sigma}(g)\, \Phi(\xi, \sigma) = \Phi(g^{-1}\xi, \sigma). \tag{6}$$

Но $T^{n\sigma}(g)$ есть не что иное, как построенное в п. 1 § 2 представление группы $SH(n)$ в пространстве однородных функций на конусе. Эти представления неприводимы (за исключением случая, когда σ или $-n-\sigma+2$ — целые неотрицательные числа). Поэтому представления $T^{n\sigma}(g)$ являются неприводимыми компонентами $T(g)$ (или, что то же, $L(g)$).

Выведем явное выражение компонент Фурье $\Phi(\xi, \sigma)$ функции $f(\mathbf{x})$. Из формул (3) и (5) вытекает, что

$$\Phi(\xi, \sigma) = \int_0^\infty t^{-\sigma-1}\,dt \int_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\,\delta(t[\mathbf{x}, \xi]-1)\,d\mathbf{x} = \int_0^\infty t^{-\sigma-2}\,dt \int_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\,\delta([\mathbf{x}, \xi]-t^{-1})\,d\mathbf{x}.$$

Меняя порядок интегрирования и заменяя t на t^{-1}, получаем отсюда

$$\Phi(\xi, \sigma) = \int_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x}) \left[\int_0^\infty t^\sigma \delta([\mathbf{x}, \xi]-t)\,dt\right] d\mathbf{x},$$

и поэтому

$$\Phi(\xi, \sigma) = \int_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\,[\mathbf{x}, \xi]^\sigma\,d\mathbf{x}. \tag{7}$$

Выведем теперь выражение функции $f(\mathbf{x})$ через ее компоненты Фурье $\Phi(\xi, \sigma)$. Для этого сначала выразим через $\Phi(\xi, \sigma)$ функцию $h(\xi)$. Из формулы обращения преобразования Меллина (см. п. 2 § 4 главы II) следует, что

$$h(t\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^\sigma \Phi(\xi, \sigma)\,d\sigma.$$

Полагая $t=1$, получаем

$$h(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(\xi, \sigma)\,d\sigma. \tag{8}$$

Теперь используем формулы обращения для преобразования Гельфанда — Граева (см. п. 3). Мы получим при $n=2m+2$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^m}{2(2\pi)^{2m+1}i}\int_{[\xi,\xi]=0} \delta^{(2m)}([\mathbf{x}, \xi]-1)\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Phi(\xi, \sigma)\,d\sigma\,d\xi = \frac{(-1)^m}{2(2\pi)^{2m+1}i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\sigma \int_{[\xi,\xi]=0}\Phi(\xi, \sigma)\,\delta^{(2m)}([\mathbf{x}, \xi]-1)\,d\xi. \tag{9}$$

Так как функция $\Phi(\xi, \sigma)$ однородна, то она однозначно определяется своими значениями на любом контуре, пересекающем один раз каждую образующую конуса $[\xi, \xi]=0$. Выберем в качестве такого контура сферу S^{n-2} — сечение конуса плоскостью $\xi_n=1$. Точки сферы S^{n-2}

будем, как и выше, обозначать через ξ'. Ясно, что $\Phi(t\xi', \sigma) = t^\sigma \Phi(\xi', \sigma)$. Инвариантная мера $d\xi$ на конусе связана с нормированной евклидовой мерой $d\xi'$ на сфере S^{n-2} равенством

$$d(t\xi') = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} t^{n-3} dt\, d\xi'. \tag{10}$$

Отсюда следует, что при $n = 2m+2$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) i} \times$$

$$\times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\sigma \int_0^\infty t^{2m-1} \int_{S^{n-2}} \Phi(t\xi', \sigma)\, \delta^{(2m)}([\mathbf{x}, t\xi'] - 1)\, d\xi' dt =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) i} \times$$

$$\times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\sigma \int_{S^{n-2}} \Phi(\xi', \sigma) \int_0^\infty t^{\sigma-2} \sigma^{(2m)}([\mathbf{x}, \xi'] - t^{-1})\, dt\, d\xi'. \tag{11}$$

Но

$$\int_0^\infty t^{\sigma-2} \delta^{(2m)}([\mathbf{x}, \xi'] - t^{-1})\, dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{-\sigma} \delta^{(2m)}([\mathbf{x}, \xi'] - t)\, dt = \frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)} [\mathbf{x}, \xi']^{-\sigma-2m}.$$

Поэтому из формулы (11) вытекает при $n = 2m+2$, что

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) i} \times$$

$$\times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)} d\sigma \int_{S^{n-2}} \Phi(\xi', \sigma) [\mathbf{x}, \xi]^{-\sigma-2m} d\xi'. \tag{12}$$

Точно так же из формулы (5) п. 3 выводится, что при $n = 2m+1$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}\pi^m \Gamma(m)\, i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma\, d\sigma \times$$

$$\times \int_{S^{n-2}} \Phi(\xi', \sigma) [\mathbf{x}, \xi']^{-\sigma-2m+1} d\xi', \tag{13}$$

где $-2m+1 < a < 1$.

При выводе формулы (13) используется равенство

$$\int_0^\infty (t-1)^{-2m} t^{\sigma+2m-2}\,dt = -\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi\sigma \Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(2m)\Gamma(\sigma)}, \tag{14}$$

где интеграл понимается в смысле регуляризованного значения. Для вывода этого равенства заметим, что

$$\int_0^\infty |t-1|^\lambda t^{\sigma+2m-2}\,dt = \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\sigma+2m-2}\,dt + \int_1^\infty (t-1)^\lambda t^{\sigma+2m-2}\,dt.$$

Первый интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ и имеет значение

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma+\lambda+2m)},$$

а второй сходится при $\operatorname{Re}(\lambda+\sigma+2m) < 1$ и имеет значение

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\sigma-\lambda-2m+1)}{\Gamma(-\sigma-2m+2)}.$$

Поэтому интеграл (14) равен значению при $\lambda=-2m$ суммы

$$\Gamma(\lambda+1)\left[\frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma+\lambda+2m)} + \frac{\Gamma(-\sigma-\lambda-2m+1)}{\Gamma(-\sigma-2m+2)}\right].$$

Вычисляя это значение, мы и получим равенство (14). Условие на a связано с наличием полюсов у $\dfrac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma$.

Из формул (12) и (13) легко вытекает выражение нормы $\|f\|^2$ через функцию $\Phi(\boldsymbol{\eta}, \sigma)$. Именно, подставим в интеграл

$$\|f\|^2 = \int\limits_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\overline{f(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}$$

вместо функции $f(\mathbf{x})$ ее выражение по формуле (12) (или по формуле (13), если $n=2m+1$). Используя далее формулу (7), получим при $n=2m+2$

$$\|f\|^2 = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)}\,d\sigma \times$$
$$\times \int\limits_{S^{n-2}} \Phi(\boldsymbol{\xi}', \sigma)\overline{\Phi(\boldsymbol{\xi}', -\bar\sigma-2m)}\,d\boldsymbol{\xi}', \tag{15}$$

а при $n=2m+1$

$$\|f\|^2 = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}\pi^m \cdot \Gamma(m) i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma\,d\sigma \times$$
$$\times \int\limits_{S^{n-2}} \Phi(\boldsymbol{\xi}', \sigma)\overline{\Phi(\boldsymbol{\xi}', -\bar\sigma-2m+1)}\,d\boldsymbol{\xi}', \tag{16}$$

где $-2m+1 < a < 1$.

Особенно простой вид принимают формулы (15) и (16), если положить $a=-\frac{n-2}{2}$. Тогда $\sigma=-\bar{\sigma}-2m$ (соответственно $\sigma=-\bar{\sigma}-2m+1$), и мы получаем при $n=2m+2$

$$\|f\|^2=\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(m+i\rho)}{\Gamma(-m+i\rho)}\times$$
$$\times\int_{S^{n-2}}|\Phi(\xi',-m+i\rho)|^2\,d\xi'\,d\rho, \qquad (17)$$

а при $n=2m+1$

$$\|f\|^2=\frac{(-1)^m i}{2^{2m}\pi^m\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}+i\rho\right)}{\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}+i\rho\right)}\operatorname{th}\pi\rho\times$$
$$\times\int_{S^{n-2}}\left|\Phi\left(\xi',-m+\frac{1}{2}+i\rho\right)\right|^2 d\xi'\,d\rho. \qquad (18)$$

Положительность $\|f\|^2$ вытекает из соотношения симметрии

$$\int_{S^{n-2}}\left|\Phi\left(\xi',-\frac{n-2}{2}+i\rho\right)\right|^2 d\xi'=\int_{S^{n-2}}\left|\Phi\left(\xi',-\frac{n-2}{2}-i\rho\right)\right|^2 d\xi', \qquad (19)$$

которому удовлетворяют функции $\Phi(\xi',\sigma)$. Мы не будем останавливаться на выводе этого соотношения, связанного с эквивалентностью представлений $T^{n\sigma}(g)$ и $T^{n,-n-\sigma+2}(g)$ группы $SH(n)$.

5. Интегральные преобразования функций на гиперболоиде. Мы получили в предыдущем пункте выражение функции $f(\mathbf{x})$, заданной на гиперболоиде $[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1$ через функцию $\Phi(\xi',\sigma)$, заданную на сфере S^{n-2} — сечении конуса $[\xi,\xi]=0$ плоскостью $\xi_n=1$. Но в п. 7 § 3 главы IX показано, что всякая функция на сфере S^{n-2} (с интегрируемым квадратом модуля) разлагается в ряд Фурье по системе функций $\Xi_K(\xi')$, где $K=(k_0,k_1,\ldots,\pm k_{n-3})$ (и здесь мы включаем вес $l=k_0$ в символ K). Применив это разложение к функции $\Phi(\xi',\sigma)$, получим

$$\Phi(\xi',\sigma)=\sum_K a_K(\sigma)\,\Xi_K(\xi'), \qquad (1)$$

где

$$a_K(\sigma)=\int_{S^{n-2}}\Phi(\xi',\sigma)\,\overline{\Xi_K(\xi')}\,d\xi'. \qquad (2)$$

Найдем теперь выражение коэффициентов $a_K(\sigma)$ через функцию (x). Из формулы (7) п. 1 и равенства (2) имеем

$$a_K(\sigma) = \int\limits_{S^{n-2}} d\xi' \int\limits_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x}) [\mathbf{x}, \xi]^\sigma \overline{\Xi_K(\xi')}\, d\mathbf{x} = \int\limits_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x}) \int\limits_{S^{n-2}} [\mathbf{x}, \xi]^\sigma \overline{\Xi_K(\xi')}\, d\xi'\, d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{x} = g_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0 = (0, \ldots, 0, 1)$. Из формулы (5) п. 2 § 3 вытекает, что

$$a_K(\sigma) = \int\limits_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\, t_{KO}^{n\sigma}(g_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x}. \tag{4}$$

Теперь найдем выражение для функции $f(\mathbf{x})$ через коэффициенты $a_K(\sigma)$. Для этого подставим разложение (1) в формулу обращения (12) (соответственно (13) п. 1) и используем формулу (5) п. 2 § 3. Тогда при $n = 2m + 2$ имеет место равенство

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) i} \sum_K \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)} a_K(\sigma)\, t_{KO}^{n,-\sigma-2m}(g_{\mathbf{x}})\, d\sigma. \tag{5}$$

Аналогично, при $n = 2m + 1$ имеем

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}\pi^m\Gamma(m)\, i} \times \sum_K \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma\, a_K(\sigma)\, t^{n,-\sigma-2m+1}(g_{\mathbf{x}})\, d\sigma, \tag{6}$$

где $-2m+1 < a < 1$.

Функции $t_{KO}^{n,-\sigma-2m}(\xi)$, по которым ведется разложение в формулах (5) и (6), постоянны на левых смежных классах по подгруппе $SO(n-1)$ (см. п. 1 § 3) и потому являются функциями на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 1$ — однородном пространстве $SH(n)/SO(n-1)$. Введем обозначение

$$\Theta_K^{n\sigma}(\mathbf{x}) = t_{KO}^{n\sigma}(g_{\mathbf{x}}), \qquad [\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 1, \tag{7}$$

где, напомним, $g_{\mathbf{x}}$ — движение, переводящее точку $\mathbf{x}_0(0, \ldots, 0, 1)$ в точку $\mathbf{x}$. Тогда формулы (4)—(6) перепишутся следующим образом:

$$a_K(\sigma) = \int\limits_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1} f(\mathbf{x})\, \Theta_K^{n\sigma}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{8}$$

Если $n=2m+2$, то

$$f(\mathbf{x})=\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)i}\times$$
$$\times\sum_K\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)}a_K(\sigma)\,\Theta_K^{n,-\sigma-2m}(\mathbf{x})\,d\sigma, \qquad (9)$$

а если $n=2m+1$, то

$$f(\mathbf{x})=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}\pi^m\Gamma(m)\,i}\times$$
$$\times\sum_K\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{ctg}\pi\sigma\, a_K(\sigma)\,\Theta_K^{n,-\sigma-2m+1}(\mathbf{x})\,d\sigma, \qquad (10)$$

где $-2m+1<a<1$.

Особенно простой вид принимают формулы (9) и (10) в случае, когда функция $f(\mathbf{x})$ инвариантна относительно вращений h из подгруппы $SO(n)$, т. е. когда $f(h\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$. В этом случае в разложениях остается лишь член, соответствующий значению $K=0$. Мы получаем при этом следующие формулы:

При $n=2m+2$ имеем

$$f(\mathbf{x})=\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)i}\times$$
$$\times\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)}\,a(\sigma)\,t_{OO}^{n,-\sigma-2m}(g_{\mathbf{x}})\,d\sigma, \qquad (11)$$

а при $n=2m+1$:

$$f(\mathbf{x})=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}\pi^m\Gamma(m)\,i}\times$$
$$\times\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{ctg}\pi\sigma\,a(\sigma)\,t_{OO}^{n,-\sigma-2m+1}(g_{\mathbf{x}})\,d\sigma, \qquad (12)$$

где $-2m+1<a<1$. Коэффициенты $a(\sigma)$ имеют вид

$$a(\sigma)=\int\limits_{[\mathbf{x},\mathbf{x}]=1}f(\mathbf{x})\,t_{OO}^{n\sigma}(g_{\mathbf{x}})\,d\mathbf{x}. \qquad (13)$$

Выражение для зональной сферической функции $t_{OO}^{n\sigma}(g)$ через функции Лежандра дается формулой (4) п. 3 § 3. Применяя эту формулу, мы можем переписать формулы (11) и (12) в следующем виде:

Если $n=2m+2$, то

$$f(\operatorname{ch}\theta)=\frac{(-1)^m}{2i\operatorname{sh}^{m-\frac{1}{2}}\theta}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+2m)}{\Gamma(\sigma)}a(\sigma)\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}-m}_{-\sigma-m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\theta)\,d\sigma, \qquad (14)$$

а если $n=2m+1$, то

$$f(\operatorname{ch}\theta)=\frac{(-1)^{m+1}}{2i\operatorname{sh}^{m-1}\theta}\times$$
$$\times\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+2m-1)}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{ctg}\pi\sigma\, a(\sigma)\mathfrak{P}^{1-m}_{-\sigma-m}(\operatorname{ch}\theta)\,d\sigma, \qquad (15)$$

где $-2m+1<a<1$. При этом

$$a(\sigma)=\int\limits_0^\infty f(\operatorname{ch}\theta)\operatorname{sh}^{\frac{n-1}{2}}\theta\,\mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\operatorname{ch}\theta)\,d\theta. \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) при $n=3$ и $\operatorname{Re}\sigma=-\frac{1}{2}$ установлены Мелером и Фоком. Поэтому при $n=3$ преобразование (15) и (16) называют *преобразованием Мелера — Фока.*

§ 5. Оператор Лапласа на гиперболоиде. Полисферические и орисферические функции на гиперболоиде

1. Оператор Лапласа на гиперболоиде. В псевдоевклидовом пространстве $E_{n-1,1}$ роль, аналогичную роли оператора Лапласа в евклидовом пространстве, играет *волновой оператор*

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Подобно оператору Лапласа, он коммутирует с движениями псевдоевклидова пространства.

Будем рассматривать оператор $\Box$ внутри конуса $[\mathbf{x},\mathbf{x}]>0$, $x_n>0$. В сферических координатах (см. п. 1 § 1) он задается формулой

$$\Box=-\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\operatorname{sh}^{n-2}\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\operatorname{sh}^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}+$$
$$+\frac{1}{r^2\operatorname{sh}^2\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{r^2\operatorname{sh}^2\theta_{n-1}\sin^2\theta_{n-2}\ldots\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}.$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ не зависит от r, то на единичном гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, $x_n>0$ имеем $\square f(\mathbf{x})=\square_0 f(\xi)$, где (в сферических координатах)

$$\square_0=\frac{1}{\operatorname{sh}^{n-2}\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\operatorname{sh}^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}+\\ +\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta_{n-1}\sin^2\theta_{n-2}\ldots\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}.$$

Оператор $\square_0$ называют *оператором Лапласа на гиперболоиде* $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$. Подобно оператору Лапласа Δ_0 на сфере (см. п. 1, § 5 главы IX) оператор $\square_0$ перестановочен с гиперболическими вращениями: если $g\in SH(n)$, то

$$L(g)\square_0=\square_0 L(g),$$

где

$$L(g)f(\xi)=f(g^{-1}\xi).$$

Мы видели в п. 5 § 2 главы IX, что неприводимые представления класса 1 группы $SO(n)$ можно строить в пространствах $\mathfrak{H}^{nl}$ однородных гармонических многочленов. Аналогично можно реализовать и построенные в п. 1 § 2 представления $T^{n\sigma}(g)$ группы $SH(n)$. Именно, обозначим через $\mathfrak{S}^{n\sigma}$ пространство однородных функций $f(\mathbf{x})$ степени σ, $\mathbf{x}\in E_{n-1,1}$, таких, что $\square f(\mathbf{x})=0$. Через $\mathfrak{H}_{n\sigma}$ обозначим пространство функций $f(\xi)$ на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$, таких, что $r^\sigma f(\mathbf{x}/r)\in\mathfrak{S}_{n\sigma}$. Нетрудно показать, что пространство $\mathfrak{H}^{n\sigma}$ инвариантно относительно операторов $L(g)$, $g\in SH(n)$. Поэтому мы получаем представление $Q^{n\sigma}(g)$ группы $SH(n)$, эквивалентное представлению $T^{n\sigma}(g)$. Переход от представления $Q^{n\sigma}(g)$ к $T^{n\sigma}(g)$ осуществляется при помощи преобразования Гельфанда — Граева (см. п. 3 § 4).

2. Полисферические координаты на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$. Полисферические координаты на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=1$ определяются точно так же, как и на сфере (см. п. 2 § 5 главы IX). Единственное отличие состоит в следующем. Корню дерева ставится в соответствие координата $x_0\equiv x_n$, и вершинам первого ранга $x_{01}, \ldots, x_{0k}$ соответствует гиперболическое вращение в плоскости (x_{0m}, x_0) на «угол» φ_m:

$$\left.\begin{aligned} x_0'&=x_0\operatorname{ch}\varphi_m+x_{0m}\operatorname{sh}\varphi_m,\\ x_{0m}'&=x_0\operatorname{sh}\varphi_m+x_{0m}\operatorname{ch}\varphi_m.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Поэтому в выражении для дифференциала длины дуги на гиперболоиде вершинам первого ранга ставятся в соответствие выражения

$$d\varphi_m^2+\operatorname{sh}^2\varphi_m(\cdot)+\operatorname{ch}^2\varphi_m(\cdot).\qquad(2)$$

Соответственно меняются выражения для оператора Лапласа и инвариантной меры в полисферических координатах.

Параметры разделения переменных на гиперболоиде подчиняются тем же условиям, что и на сфере, с той лишь разницей, что вершинам первого ранга могут соответствовать любые комплексные числа, а не только целые. Поэтому для вершин первого ранга снимаются и ограничения вида (14) п. 4, § 5 главы IX.

При разделении переменных вершине x_{0m} первого ранга соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^p \varphi \operatorname{sh}^q \varphi} \frac{d}{d\varphi} \operatorname{ch}^p \varphi \operatorname{sh}^q \varphi \frac{du}{d\varphi} + \left[\frac{r(r+p-1)}{\operatorname{ch}^2 \varphi} - \frac{s(s+q-1)}{\operatorname{sh}^2 \varphi} - l(l+p+q)\right] u = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\left.\begin{matrix} \varphi = \varphi_m, & p = p_m, & q = q_m, \\ r = r_{m-1}, & l = l_m, & s = l_{mt}, \end{matrix}\right\} \quad (4)$$

где t принимает наибольшее из возможных значений.

Решения этого уравнения имеют вид

$$u_1 = \operatorname{th}^s \varphi \operatorname{ch}^l \varphi F\left(\frac{s-l+r}{2}, \frac{s-l-r-p+1}{2}; s+\frac{q+1}{2}; \operatorname{th}^2 \varphi\right) \quad (5)$$

и

$$u_2 = \operatorname{cth}^{q+s-1} \varphi \operatorname{ch}^l \varphi F\left(\frac{r-l-s-q+1}{2}, 1-\frac{p+s+q+l+r}{2}; -s-\frac{q-3}{2}; \operatorname{th}^2 \varphi\right). \quad (6)$$

Собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде выражаются формулой, аналогичной формуле (15) п. 4 § 5 главы IX. Именно,

$$Y_\Lambda(\xi) = \Pi\, U_{i_1 \ldots i_s}(\varphi_{i_1 \ldots i_s}; \Lambda), \quad (7)$$

где при $s \geqslant 2$ функции $U_{i_1 \ldots i_s}$ имеют тот же смысл, что и в п. 4 § 5 главы VIII, а функции $U_s(\varphi_s; \Lambda)$ являются решениями уравнения (3) при значениях параметров (4). В случае, когда дерево имеет вид, изображенный на рис. 8, то функции $Y_\Lambda(\xi)$ лишь постоянным множителем отличаются от функций $t_{OK}^{n\sigma}(g)$ из п. 1 § 3.

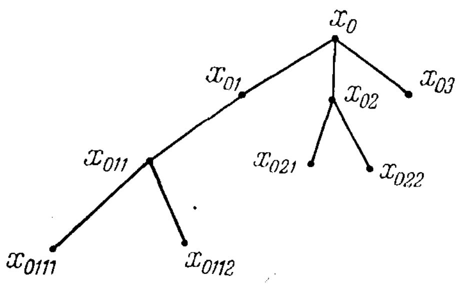

Рис. 9.

3. Орисферические координаты на гиперболоиде. Укажем еще одну систему координат на двуполостном гиперболоиде, в которой оператор Лапласа допускает разделение переменных. Она строится следующим образом. Рассмотрим дерево, содержащее вершину x_{011}, но не содержащее x_{012} (рис. 9). Всем вершинам, кроме вершин x_{011}, поставим в соответствие те же преобразования, что и в п. 2, т. е. евклидовы вращения на угол $\varphi_{i_1\ldots i_m}$ для вершин, ранг которых больше единицы, и гиперболические вращения на «угол» φ_k для вершин x_{0k}. Вершине же x_{011} поставим в соответствие бирациональное преобразование $h(t)$, которое будем называть *орисферическим вращением в подпространстве* (x_0, x_{01}, x_{011}) на угол t:

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= x_0 + \frac{2tx_{011}+t^2}{2(x_0+x_{01})}, \\ x_{01}' &= x_{01} - \frac{2tx_{011}+t^2}{2(x_0+x_{01})}, \\ x_{011}' &= x_{011}+t. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Введем параметр φ_{11}, положив

$$t = \varphi_{11}e^{\varphi_1}\operatorname{ch}\varphi_2\ldots\operatorname{ch}\varphi_k,$$

где k — число вершин первого ранга, и примем числа $\{\varphi_{i_1\ldots i_m}\}$ за орисферические координаты на гиперболоиде $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 1$. Именно, точка с координатами $\{\varphi_{i_1\ldots i_m}\}$ имеет вид

$$\mathbf{x} = \prod_{m\geqslant 3} g(\varphi_{i_1\ldots i_m})\,h(\varphi_{11}e^{\varphi_1}\operatorname{ch}\varphi_2\ldots\operatorname{ch}\varphi_k)\prod{}' g(\varphi_{i_1 i_2})\prod g(\varphi_i)\,\mathbf{x}_0. \tag{2}$$

Здесь $\Pi' g(\varphi_{i_1 i_2})$ распространено на все вершины второго ранга, кроме x_{011}, а остальные произведения — на все вершины соответствующего ранга; $\mathbf{x}_0$ — точка гиперболоида, соответствующая оси Ox_0.

Из определения орисферических координат следует, в частности, что

$$x_0 = \operatorname{ch}\varphi_2\ldots\operatorname{ch}\varphi_k\left[\operatorname{ch}\varphi_1 + \frac{\varphi_{11}^2}{2}e^{\varphi_1}\right],$$

$$x_{01} = \operatorname{ch}\varphi_2\ldots\operatorname{ch}\varphi_k\left[\operatorname{sh}\varphi_1 - \frac{\varphi_{11}^2}{2}e^{\varphi_1}\right],$$

$$x_{011} = e^{\varphi_1}\operatorname{ch}\varphi_2\ldots\operatorname{ch}\varphi_k\,\varphi_{11}\cos\varphi_{111}\ldots\cos\varphi_{11m},$$

$$x_{011m} = e^{\varphi_1}\operatorname{ch}\varphi_2\ldots\operatorname{ch}\varphi_k\,\varphi_{11}\sin\varphi_{11m},$$

где k и m имеют наибольшее значение для данного дерева.

Простой подсчет показывает, что в орисферических координатах дифференциал длины дуги на гиперболоиде имеет вид

$$ds^2 = \sum B^2_{i_1 \dots i_m} d\varphi^2_{i_1 \dots i_m}, \tag{3}$$

где коэффициенты $B_{i_1 \dots i_m}$ определяются следующим образом. Если $(i_1, i_2) \neq (1, 1)$, то $B_{i_1 \dots i_m} = A_{i_1 \dots i_m}$, где $A_{i_1 \dots i_m}$ задается формулой (3) п. 3 § 5 главы IX (с заменой $\cos \varphi_s$ и $\sin \varphi_s$ на $\operatorname{ch} \varphi_s$ и $\operatorname{sh} \varphi_s$, $1 \leqslant \varphi_s \leqslant k$). Далее,

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \operatorname{ch} \varphi_2 \dots \operatorname{ch} \varphi_k, \\ B_{11} &= e^{\varphi_1} \operatorname{ch} \varphi_2 \dots \operatorname{ch} \varphi_k, \\ B_{11 i_3 \dots i_s} &= e^{\varphi_1} \operatorname{ch} \varphi_2 \dots \operatorname{ch} \varphi_k \varphi_{11} A_{i_3 \dots i_s}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $A_{i_3 \dots i_s}$ определяется формулой (3) п. 3 § 5 главы IX. Например,

$$B_{111} = e^{\varphi_1} \operatorname{ch} \varphi_2 \dots \operatorname{ch} \varphi_k \varphi_{11} \cos \varphi_{112} \dots \cos \varphi_{11m}.$$

Из выражения для ds^2 обычным образом получаются выражения для инвариантной меры и оператора Лапласа на гиперболоиде. Мы не будем приводить их выражения.

4. Разделение переменных в орисферических координатах. Параметры разделения для уравнения $\square_0 u + \lambda u = 0$ в орисферических координатах имеют следующий вид: всем вершинам, ранг которых больше, чем 1 (кроме вершины x_{011}), соответствуют целые числа, а вершинам первого ранга и вершине x_{011} — комплексные числа. При этом параметры разделения $\{l_{i_1 \dots i_m}\}$ должны удовлетворять тем же условиям, что и в п. 5 § 5 главы IX.

После разделения переменных для всех аргументов, кроме φ_1 и φ_{11}, получаются те же уравнения, что и в п. 2. Поэтому надо вывести лишь уравнения для аргументов φ_1 и φ_{11}. Введем для краткости следующие обозначения: $\varphi = \varphi_{11}$, $\psi = \varphi_1$, $q = q_{11}$ (число вершин, подчиненных x_{011}), $l = l_{11}$, $s = l_{11m}$ (где m принимает наибольшее возможное значение), и $k = l_1$. Используя выражения для коэффициентов $B_{i_1 \dots i_m}$, получаем уравнение для φ_{11}:

$$\varphi^{-q} \frac{d}{d\varphi} \varphi^q \frac{du}{d\varphi} - \left[\frac{s(s+q-1)}{\varphi^2} - l^2\right] u = 0. \tag{1}$$

Подстановка $u = \varphi^{\frac{1-q}{2}} V$ сводит его к уравнению Бесселя. Поэтому частные решения уравнения (1) имеют вид

$$u_1 = \varphi^{\frac{1-q}{2}} J_{s + \frac{q-1}{2}}(l\varphi) \tag{2}$$

и

$$u_2 = \varphi^{\frac{1-q}{2}} Y_{s+\frac{q-1}{2}}(l\varphi). \tag{3}$$

Лишь первое из них непрерывно на полуоси $0 \leqslant \varphi < \infty$.

Точно так же для φ_1 получаем уравнение

$$e^{-(q+1)\psi} \frac{d}{d\psi} e^{(q+1)\psi} \frac{du}{d\psi} - [l^2 e^{-2\psi} + k(k+q+1)]\, u = 0. \tag{4}$$

Подстановка $e^{-\psi} = t$, $u = t^{\frac{q+2}{2}} v$ сводит его к модифицированному уравнению Бесселя

$$v'' + \frac{v'}{t} - \left[l^2 + \frac{\left(k+1+\frac{q}{2}\right)^2}{t^2}\right] v = 0. \tag{5}$$

Поэтому частные решения уравнения (4) имеют вид

$$u_1 = e^{\frac{q+2}{2}\psi} K_{k+\frac{q+2}{2}}\left(\frac{e^{-\psi}}{l}\right) \tag{6}$$

и

$$u_2 = e^{\frac{q+2}{2}\psi} I_{k+\frac{q+2}{2}}\left(\frac{e^{-\psi}}{l}\right). \tag{7}$$

Пользуясь полученными результатами, легко написать выражение для собственных функций оператора в орисферических координатах (или, как мы кратко назовем их, *орисферические функции*). Предоставляем сделать это читателю.

ГЛАВА XI

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

В главе IV многие свойства функций Бесселя были выведены из того, что через эти функции выражаются матричные элементы неприводимых представлений группы $M(2)$ движений евклидовой плоскости. В этой главе будут рассмотрены представления класса 1 группы $M(n)$ движений n-мерного евклидова пространства. Покажем, что при соответствующем выборе базиса в пространстве представления некоторые матричные элементы представления выражаются через функции Бесселя. Отсюда будут получены новые свойства функций Бесселя.

§ 1. Группа $M(n)$

Назовем движением n-мерного евклидова пространства E_n неоднородное линейное преобразование g, сохраняющее расстояние между точками этого пространства и его ориентацию.

Известно, что любое движение g в E_n можно записать в виде

$$\mathbf{x} \rightarrow h\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{1}$$

где h — вращение в пространстве E_n (т. е. некоторый элемент группы $SO(n)$), а $\mathbf{a}$ — вектор из E_n. В соответствии с этим будем писать

$$g = g(\mathbf{a},\ h).$$

Движения евклидова пространства образуют группу. Будем обозначать ее через $M(n)$. Группа $M(n)$ изоморфна группе матриц $(n+1)$-го порядка

$$\begin{pmatrix} h & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где h — ортогональная матрица, $\mathbf{a}$ — столбец с n элементами, $\mathbf{0}$ — строка с n нулевыми элементами.

Отсюда легко вытекает, что

$$g(\mathbf{a}_1,\ h_1)\, g(\mathbf{a}_2,\ h_2) = g(\mathbf{a}_1 + h_1\mathbf{a}_2,\ h_1h_2). \tag{3}$$

В частности, имеет место равенство

$$g(\mathbf{a},\ h)=g(\mathbf{a},\ e)\,g(\mathbf{0},\ h)=g(\mathbf{0},\ h)\,g(h^{-1}\mathbf{a},\ e), \tag{4}$$

где через e обозначено единичное вращение.

Введем в группу $M(n)$ параметризацию. Пусть $g=g(\mathbf{a},\ h)$. Вращение h задается углами Эйлера θ_i^j, $1\leqslant j\leqslant n-1$, $1\leqslant i\leqslant j$. Вектор же $\mathbf{a}$ удобно задавать сферическими координатами $r,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}$ (см. п. 1 § 1 главы IX).

Таким же образом элемент g группы $M(n)$ задается $\frac{n(n-1)}{2}$ углами θ_i^j, $n-1$ углом φ_k и положительным числом r. Эти числа меняются в следующих границах:

$$\begin{aligned}
&0\leqslant\theta_1^j<2\pi, &&\\
&0\leqslant\theta_i^j<\pi, && i>1,\\
&0\leqslant r<\infty, &&\\
&0\leqslant\varphi_1<2\pi, &&\\
&0\leqslant\varphi_k<\pi, && k>1.
\end{aligned}$$

Как было показано в п. 3 § 1 главы IX, вектор $\mathbf{a}$ со сферическими координатами $r,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{a}=g_1(\varphi_1)\ldots g_{n-1}(\varphi_{n-1})\,\mathbf{r}, \tag{5}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор вида $(0,\ \ldots,\ 0,\ r)$ и $g_k(\varphi)$ — вращение на угол φ в плоскости $x_{k+1},\ x_k$:

$$\left.\begin{aligned}
x_k'&=x_k\cos\varphi+x_{k+1}\sin\varphi,\\
x_{k+1}'&=-x_k\sin\varphi+x_{k+1}\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что элемент $g(\mathbf{a},\ h)$ группы $M(n)$ может быть записан в виде

$$g(\mathbf{a},\ h)=g(\mathbf{a},\ e)\,g(\mathbf{0},\ h)=g_1(\varphi_1)\ldots g_{n-1}(\varphi_{n-1})\,g(\mathbf{r},\ e)\,g(\mathbf{0},\ h). \tag{7}$$

Легко проверить, что инвариантная мера в группе $M(n)$ задается формулой

$$dg=dh\,d\mathbf{a}, \tag{8}$$

где dh — нормированная инвариантная мера в подгруппе $SO(n)$, а $d\mathbf{a}$ — евклидова мера в E_n.

§ 2. Неприводимые представления класса 1 группы $M(n)$

1. Описание представлений $T_R(g)$. Неприводимые представления класса 1 группы $M(n)$ строятся так же, как и представления $T_R(g)$ группы $M(2)$, с той лишь разницей, что окружность заменяется $(n-1)$-мерной сферой.

Обозначим через $d\xi$ нормированную инвариантную меру на сфере S^{n-1}:

$$d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}}{2\pi^{n/2} \, |\xi_n|}. \tag{1}$$

Пространство функций $f(\xi)$ на S^{n-1} таких, что

$$\|f\|^2 = \int_{S^{n-1}} |f(\xi)|^2 \, d\xi,$$

обозначим через $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. Будем строить представления группы $M(n)$ в этом пространстве.

Пусть R — комплексное число. Каждому элементу $g = g(\mathbf{a}, h)$ группы $M(n)$ поставим в соответствие оператор

$$T_R(g) f(\xi) = e^{R(\mathbf{a}, \xi)} f(h^{-1}\xi) \tag{2}$$

в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. При $g_1 = g(\mathbf{a}_1, h_1)$, $g_2 = g(\mathbf{a}_2, h_2)$ имеем

$$g_1 g_2 = g(\mathbf{a}_1 + h_1\mathbf{a}_2, \; h_1 h_2)$$

и

$$T_R(g_1)\, T_R(g_2) f(\xi) = T_R(g_1)\, e^{R(\mathbf{a}_2, \xi)} f(h_2^{-1}\xi) =$$

$$= e^{R(\mathbf{a}_1, \xi) + R(\mathbf{a}_2, h^{-1}\xi)} f(h_2^{-1} h_1^{-1}\xi) = e^{R(\mathbf{a}_1 + h_1\mathbf{a}_2, \xi)} f((h_1 h_2)^{-1}\xi).$$

Поэтому

$$T_R(g_1)\, T_R(g_2) f(\xi) = T_R(g_1 g_2) f(\xi) \tag{3}$$

и, следовательно, $T_R(g)$ является представлением группы $M(n)$.

Элементам h подгруппы $SO(n-1)$ соответствуют операторы

$$T_R(h) f(\xi) = f(h^{-1}\xi), \tag{4}$$

т. е. операторы квазирегулярного представления подгруппы $SO(n-1)$. Очевидно, что функция $f_0(\xi) \equiv 1$ инвариантна относительно всех операторов $T_R(h)$, $h \in SO(n-1)$. Таким образом, представления $T_R(g)$ являются представлениями класса 1 относительно подгруппы $SO(n-1)$.

Поскольку мера $d\xi$ инвариантна при вращениях сферы S^{n-1}, представление $T_R(g)$ унитарно тогда и только тогда, когда $R = \rho i$ — чисто мнимое число. В самом деле,

$$(T_R(g) f_1, \; T_R(g) f_2) = \int_{S^{n-1}} e^{(R+\overline{R})(\mathbf{a}, \xi)} f_1(h^{-1}\xi)\, \overline{f_2(h^{-1}\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int_{S^{n-1}} e^{(R+\overline{R})(\mathbf{a}, h\xi)} f_1(\xi)\, \overline{f_2(\xi)}\, d\xi.$$

Отсюда видно, что равенство

$$(f_1, f_2) = (T_R(g) f_1, \; T_R(g) f_2) \tag{5}$$

выполняется для всех f_1, f_2 и g, лишь если $R + \overline{R} = 0$. А это и значит, что R — чисто мнимое число.

2. Неприводимость представлений $T_R(g)$. Доказательство неприводимости представлений $T_R(g)$ при $R \neq 0$ протекает почти так же, как проведенное в п. 10 § 2 главы IX доказательство неприводимости представлений $T_l(g)$ группы $SO(n)$. Единственным отличием является то, что в случае группы $M(n)$ надо взять инфинитезимальный оператор, соответствующий подгруппе параллельных переносов вдоль оси Ox_n. Пусть $g_t = (\mathbf{a}, e)$, где $\mathbf{a} = (0, \ldots, 0, t)$. Тогда

$$T_R(g_t) f(\xi) = e^{Rt\xi_n} f(\xi).$$

Поэтому инфинитезимальный оператор A, соответствующий подгруппе элементов вида $g(\mathbf{a}, e)$, $\mathbf{a} = (0, \ldots, 0, t)$, задается формулой

$$Af(\xi) = \left. \frac{dT_R(g_t) f(\xi)}{dt} \right|_{t=0} = R\xi_n f(\xi). \tag{1}$$

Дальнейшее доказательство проводится дословно так же, как и в случае группы $SO(n)$.

Если же $R = 0$, то представление $T_R(g)$ сводится к квазирегулярному представлению подгруппы $SO(n)$:

$$T_0(g) f(\xi) = f(h^{-1}\xi), \quad g = g(a, h),$$

и потому приводимо.

§ 3. Зональные и присоединенные сферические функции представлений класса 1 группы $M(n)$

В этом параграфе будут изучены матричные элементы представлений $T_R(g)$, стоящие в нулевом столбце. Мы увидим, что эти элементы выражаются через функции Бесселя и функции Гегенбауэра. Полученная связь позволит установить ряд новых свойств функций Бесселя.

1. Базис в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$. Как и в главе X, в качестве базиса в пространстве $\mathfrak{L}^2(S^{n-1})$ выберем функции $\Xi_M(\xi)$ [1]) на сфере S^{n-1}, описанные в п. 6 § 3 главы IX, где $M = (m_0, \ldots, \pm m_{n-2})$ и $l = m_0 \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_{n-2} \geqslant 0$.

Этот базис удобен тем, что в нем элементам h подгруппы $SO(n)$ соответствуют клеточно-диагональные матрицы, на главной диагонали которых стоят канонические матрицы неприводимых унитарных представлений $T_l(h)$ группы $SO(n)$.

Функция $\Xi_O(\xi)$ тождественно равна единице, следовательно, инвариантна относительно операторов $T_R(h)$, $h \in SO(n)$. Будем изучать матричные элементы $t^R_{MO}(g)$ (присоединенные сферические функции

[1]) Нам удобно внести индекс l в символ M.

представления $T_R(g)$) и, в частности, матричный элемент $t_{OO}^R(g)$ (зональную сферическую функцию этого представления). Из результатов п. 5 § 2 главы I следует, что при $h_1,\ h_2 \in SO(n-1)$

$$t_{MO}^R(gh_2) = t_{MO}^R(g)$$

и

$$t_{OO}^R(h_1 g h_2) = t_{OO}^R(g).$$

Любой элемент g группы $M(n)$ можно представить в виде

$$g = g(\mathbf{a},\ h) = g(\mathbf{a},\ e)\, g(\mathbf{0},\ h).$$

Поэтому

$$t_{MO}^R(g) = t_{MO}^R[g(\mathbf{a},\ e)]. \tag{1}$$

Если $\mathbf{a} = h_1 \mathbf{a}_n$, где $\mathbf{a}_n = (0,\ \ldots,\ 0,\ r)$, то

$$g(\mathbf{a},\ e) = g(\mathbf{0},\ h_1)\, g(\mathbf{a}_n,\ e)\, g(\mathbf{0},\ h_1^{-1})$$

и поэтому

$$t_{OO}^R(g) = t_{OO}^R[g(\mathbf{a}_n,\ e)]. \tag{2}$$

Это равенство показывает, что $t_{OO}^R(g)$, где $g = g(\mathbf{a},\ h)$ зависит только от длины вектора $\mathbf{a}$. Матричные же элементы $t_{MO}^R(g)$ зависят от переменных $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ r$.

2. Вычисление зональных сферических функций. Как было показано в предыдущем пункте, зональные сферические функции $t_{OO}^R(g)$ достаточно вычислить для элемента $g_r = g(\mathbf{a}_n,\ e)$, где $\mathbf{a}_n = (0,\ \ldots,\ 0,\ r)$. Этому элементу соответствует оператор, переводящий функцию $\Xi_O(\xi) \equiv 1$ в функцию

$$T_R(g_r)\, \Xi_O(\xi) = e^{Rr\xi_n}.$$

Поэтому

$$t_{OO}^R(g_r) = (T^R(g_r)\, \Xi_O,\ \Xi_O) = (e^{Rr\xi_n},\ 1) = \int\limits_{S^{n-1}} e^{Rr\xi_n}\, d\xi. \tag{1}$$

Перейдем к сферическим координатам. Мы получим

$$t_{OO}^R(g_r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{Rr\cos\varphi} \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi \tag{2}$$

(нормирующий множитель перед интегралом проще всего получить из того, что при $r = 0$ $g_r = e$, а $t_{OO}^R(e) = 1$).

Мы получили интегральное представление для зональной сферической функции $t_{OO}^R(g_r)$. С помощью этого представления легко получить выражение $t_{OO}^R(g_r)$ через функции Бесселя. Для этого разложим $e^{Rr\cos\varphi}$ по степеням $\cos\varphi$.

Подставляя это разложение в интеграл (2) и почленно интегрируя, получим

$$t_{OO}^{R}(g_r)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Rr)^k}{k!}\int_0^{\pi}\cos^k\varphi\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi.$$

Но

$$\int_0^{\pi}\cos^{2m+1}\varphi\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi=0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^{2m}\varphi\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right)}.$$

Поэтому

$$t_{OO}^{R}(g_r)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)(Rr)^{2m}}{\Gamma(2m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right)}.$$

С помощью формулы удвоения для Γ-функции получаем отсюда

$$t_{OO}^{R}(g_r)=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{Rr}{2}\right)^{2m}. \tag{3}$$

Сравнивая это разложение с разложением (3) п. 3 § 3 главы IV, получим [1])

$$t_{OO}^{iR}(g_r)=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(Rr)}{\left(\frac{Rr}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{4}$$

Тем самым установлена связь между зональными сферическими функциями представлений $T^R(g)$ группы $M(n)$ и функциями Бесселя.

Отметим, что из формул (1) и (4) следует равенство

$$\int_{-1}^{1}e^{ixt}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)J_{\frac{n}{2}}(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \tag{5}$$

(мы заменили n на $n+2$).

---

[1]) Мы заменили здесь для удобства R на iR.

3. Присоединенные сферические функции. Рассмотрим теперь присоединенные сферические функции $t^R_{MO}(g)$ представлений $T^R g$. Как было показано в п. 1, эти функции зависят лишь от параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, r$.

Рассмотрим сначала матричные элементы вида $t^R_{MO}(g_r)$, где $g_r = g(\mathbf{a}_n, e)$, $\mathbf{a}_n = (0, \ldots, 0, r)$. Они задаются формулой

$$t^R_{MO}(g_r) = (T^R(g_r)\,\Xi_O, \Xi_M). \tag{1}$$

Но, как указывалось в п. 2, оператор $T^R(g_r)$ переводит функцию $\Xi_O \equiv 1$ в $e^{Rr\xi_n}$. Поэтому

$$t^R_{MO}(g_r) = \int\limits_{S^{n-1}} e^{Rr\xi_n}\,\overline{\Xi_M(\xi)}\,d\xi. \tag{2}$$

Подставим в эту формулу значение $\Xi_M(\xi)$ (см. формулу (2) п. 6 § 3 главы IX) и перейдем к сферическим координатам. Из соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра вытекает, что $t^R_{MO}(g_r)$ отлично от нуля, лишь если M имеет вид $M = (m, 0, \ldots, 0)$. При $M = (m, 0, \ldots, 0)$, получаем [1])

$$t^R_{MO}(g_r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{m!\,\Gamma(n-2)(2m+n-2)}{\Gamma(n+m-2)(n-2)}} \times \\ \times \int\limits_{-1}^{1} e^{Rrx}\, C_m^{\frac{n-2}{2}}(x)\,(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx. \tag{3}$$

Применив формулу (8) п. 8 § 4 главы IX, получим

$$t^R_{MO}(g_r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^m\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+m-2)(2m+n-2)}{m!\,\Gamma(n-1)}} \times \\ \times (Rr)^m \int\limits_{-1}^{1} e^{Rrx}(1-x^2)^{m+\frac{n-3}{2}}\,dx. \tag{4}$$

В силу формулы (5) п. 2 это равенство можно переписать следующим образом: если $M = (m, 0, \ldots, 0)$, то

$$t^{iR}_{MO}(g_r) = i^m\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\frac{\Gamma(n+m-2)(2m+n-2)}{m!\,\Gamma(n-1)}}\,\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(Rr)}{\left(\frac{Rr}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{5}$$

---

[1]) См. формулу (2) п. 6 § 3 главы IX. Следует иметь в виду, что $\Xi_M(\xi)$, $M = (m, 0, \ldots, 0)$ обозначалось в главе IX через $\Xi_O^m(\xi)$.

где, напомним, g_r — параллельный перенос на r вдоль оси Ox_n. Легко доказать, что при $M=(m, 0, \ldots, 0)$ имеем

$$t_{OM}^R(g_r)=t_{MO}^R(g_r). \tag{6}$$

Заметим еще, что из формул (3) и (5) вытекает равенство

$$\int_{-1}^{1} e^{itx} C_m^{\frac{n-2}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{i^m\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(n+m-2)}{m!\,\Gamma(n-2)}\,\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{7}$$

4. Теорема сложения для функций Бесселя. Выведем теперь новую теорему сложения для функций Бесселя. Рассмотрим элемент

$$g=g_{r_1}g_\varphi g_{r_2}, \tag{1}$$

где g_{r_1} и g_{r_2} — параллельные переносы вдоль оси Ox_n на отрезки длины r_1 и r_2 соответственно, а g_φ — вращение на угол φ в плоскости (x_n, x_{n-1}). При этом движении начало координат $O(0, \ldots, 0)$ переходит в точку M, расстояние r которой от O выражается формулой

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}. \tag{2}$$

Из равенства (1) следует, что

$$T^{iR}(g)=T^{iR}(g_{r_1})\,T^{iR}(g_\varphi)\,T^{iR}(g_{r_2}), \tag{3}$$

поэтому

$$t_{OO}^{iR}(g)=\sum_{K,\,M} t_{OK}^{iR}(g_{r_1})\,t_{KM}^{iR}(g_\varphi)\,t_{MO}^{iR}(g_{r_2}). \tag{4}$$

Как было показано выше, элементы $t_{OK}^{iR}(g_{r_1})$ и $t_{MO}^{iR}(g_{r_2})$ отличны от нуля, лишь если K и M имеют вид

$$K=(k, 0, \ldots, 0), \qquad M=(m, 0, \ldots, 0).$$

При этом элемент $t_{KM}^{iR}(g_\varphi)$ отличен от нуля, лишь если $k=m$. Поэтому равенство (3) принимает вид

$$t_{OO}^{iR}(g)=\sum_{k=0}^{\infty} t_{OK}^{iR}(g_{r_1})\,t_{KK}^{iR}(g_\varphi)\,t_{KO}^{iR}(g_{r_2}), \tag{5}$$

где $K=(k, 0, \ldots, 0)$.

Мы уже нашли выше значения $t_{OK}^{iR}(g_{r_1})$ и $t_{KO}^{iR}(g_{r_2})$ (см. формулы (5) и (6) п. 3). Далее (см. п. 1), матрица оператора $T^{iR}(g_\varphi)$ клеточно-диагональна, причем на ее главной диагонали стоят канонические матрицы неприводимых представлений группы $SO(n)$. Поэтому $t_{KK}^{iR}(g_\varphi)$, где $K=(k, 0, \ldots, 0)$, есть не что иное, как зональная сферическая функция представления $T^{nk}(g)$ группы $SO(n)$.

Наконец, $t_{OO}^{iR}(g)$, $g=g(\mathbf{a}, h)$ зависит лишь от длины r вектора $\mathbf{a}$, даваемой формулой (2). Из указанных соображений получаем

$$\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r)}{r^{\frac{n-2}{2}}}=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(k+\frac{n-2}{2}\right)\times$$
$$\times\frac{J_{k+\frac{n-2}{2}}(r_1)}{r_1^{\frac{n-2}{2}}}\frac{J_{k+\frac{n-2}{2}}(r_2)}{r_2^{\frac{n-2}{2}}}C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos\varphi), \qquad (6)$$

где, напомним,

$$r=\sqrt{r_1^2+r_1^2+2r_1r_2\cos\varphi}.$$

Формула (6) аналогична доказанной в п. 1 § 4 главы IV формуле сложения для функций Бесселя.

5. Теорема умножения для функций Бесселя. Умножим обе части равенства (6) п. 4 на $C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\varphi)\sin^{n-2}\varphi$ и проинтегрируем по φ от 0 до π. Принимая во внимание соотношения ортогональности для многочленов Гегенбауэра, получим

$$\int_0^\pi\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r)}{r^{\frac{n-2}{2}}}C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\varphi)\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi=$$
$$=\frac{(-1)^m\pi\Gamma(n+m-2)}{2^{\frac{n-4}{2}}m!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(r_1)}{r_1^{\frac{n-2}{2}}}\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(r_2)}{r_2^{\frac{n-2}{2}}}, \qquad (1)$$

где

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Замена переменной φ на переменную r преобразует формулу (1) к следующему виду:

$$\int\limits_{|r_1-r_2|}^{r_1+r_2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r)}{r^{\frac{n-2}{2}}} C_m^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{r_1^2+r_2^2-r^2}{2r_1r_2}\right)\times$$

$$\times[(r_1+r_2+r)(r_1+r_2-r)(r+r_1-r_2)(r+r_2-r_1)]^{\frac{n-3}{2}} r\,dr=$$

$$=\frac{\pi\Gamma(n+m-2)}{m!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}(2r_1r_2)^{\frac{n-2}{2}} J_{m+\frac{n-2}{2}}(r_1)\, J_{m+\frac{n-2}{2}}(r_2). \quad (3)$$

Заменим в полученной формуле r_1, r_2, r соответственно на Rr_1 Rr_2, где $R>0$, и применим преобразование Фурье — Бесселя (см. формулу (3) п. 2 § 5 главы IV). Мы получим

$$\int\limits_0^\infty J_{\frac{n-2}{2}}(Rr)\, J_{m+\frac{n-2}{2}}(Rr_1)\, J_{m+\frac{n-2}{2}}(Rr_2)\, R^{\frac{4-n}{2}}\, dR=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{m!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi\,\Gamma(n+m-2)\,S}\left(\dfrac{8S^2}{r_1r_2r_3}\right)^{\frac{n-2}{2}} C_m^{\frac{n-2}{2}}\left(\dfrac{r_1^2+r_2^2-r^2}{2r_1r_2}\right), \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } |r_1-r_2|<r<r_1+r_2; \\ 0 \qquad\qquad \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Через S здесь обозначена площадь треугольника со сторонами r_1, r_2, r.

6. Производящая функция для функций Бесселя. Из формул (3) и (5) п. 3 следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{itx} C_m^{\frac{n-2}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx=\frac{i^m\pi\Gamma(n+m-2)}{2^{\frac{n-4}{2}}\, m!\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\,\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(t)}{t^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (1)$$

В силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра (см. главу IX п. 5 § 5) отсюда вытекает, что

$$e^{itx}=\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty} i^m\left(m+\frac{n-2}{2}\right)\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(t)}{\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} C_m^{\frac{n-2}{2}}(x). \quad (2)$$

Равенство (2) можно рассматривать как производящую функцию для функций Бесселя. С его помощью можно установить ряд новых свойств этих функций. Положим в равенстве (2) $x=1$. Так как $C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)=\frac{\Gamma(n+m-2)}{m!\,\Gamma(n-2)}$, то

$$e^{it}=\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma(n-2)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m\Gamma(n+m-2)}{m!}\left(m+\frac{n-2}{2}\right)\frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(t)}{\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{3}$$

Если же положить $x=0$, то получаем

$$1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2m+\frac{n}{2}\right)}{2m!}\frac{J_{2m+\frac{n-2}{2}}(t)}{\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{4}$$

7. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя. Вычислим зональную сферическую функцию $t_{00}^{iR}(g_r)$, используя бисферические координаты (см. главу IX, § 4, п. 11). Используя формулы (1) и (4) п. 2 и выражение для инвариантной меры в бисферических координатах, получаем

$$\frac{J_p(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^p}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{m-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-m+1}\alpha\sin^{m-1}\alpha\,d\alpha\int_0^{\pi}e^{ix\cos\alpha\sin\varphi}\sin^{2p-m}\varphi\,d\varphi,$$

где $p=\frac{n-2}{2}$. В силу формулы (5) п. 2 это равенство можно переписать в следующем виде $(m=2q+2)$:

$$\int_0^{\pi/2}J_{p-q}(x\cos\alpha)\cos^{p-q}\alpha\sin^{2q+1}\alpha\,d\alpha=2^q\Gamma(q+1)\frac{J_p(x)}{x^{q+1}}. \tag{1}$$

Другой интеграл получается следующим образом. Сделаем параллельный перенос на вектор **a**, n-я координата которого равна r_1, m-я равна r_2, а все остальные равны нулю. Этот параллельный перенос $g(\mathbf{a})$ может быть записан в виде $g(\mathbf{a})=h^{-1}g_rh$, где h — вращение, переводящее вектор $\mathbf{r}=(0, \ldots, 0, \sqrt{r_1^2+r_2^2})$ в вектор **a**. В силу свойств зональной сферической функции имеем (при $R=l$)

$$t_{00}[g(\mathbf{a})]=t_{00}(g_r)=2^p\Gamma(p+1)\frac{J_p(\sqrt{r_1^2+r_2^2})}{(r_1^2+r_2^2)^{p/2}},$$

С другой стороны, вычислим $t_{00}(g(\mathbf{a}))$ в бисферических координатах. Интегрируя по $\theta_1, \ldots, \theta_{m-2}, \psi_1, \ldots, \psi_{n-m-2}$, получаем

$$t_{00}(g_r) = \int\limits_{S^{n-1}} e^{i(r_1\xi_n + r_2\xi_m)}\,d\xi =$$

$$= \frac{2\Gamma(p+1)}{\pi\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{m-1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{i(r_1\cos\alpha\cos\psi + r_2\sin\alpha\cos\theta)} \times$$

$$\times \sin^{m-2}\theta \sin^{2p-m}\psi \cos^{2p-m+1}\alpha \sin^{m-1}\alpha\, d\theta\, d\psi\, d\alpha.$$

Проинтегрируем по θ и ψ, учитывая равенство (5) из п. 2. Полагая $m = 2q$, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} J_{p-q}(r_1\cos\alpha)\, J_{q-1}(r_2\sin\alpha)\cos^{p-q+1}\alpha \sin^q\alpha\, d\alpha =$$

$$= r_1^{p-q} r_2^{q-1}(r_1^2 + r_2^2)^{-\frac{p}{2}} J_p(\sqrt{r_1^2 + r_2^2}). \qquad (2)$$

§ 4. Предельный переход по размерности пространства. Многочлены Эрмита

В предыдущих главах мы изучили свойства многочленов Гегенбауэра и функций Бесселя и изучили их связь с представлениями групп $SO(n)$ и $M(n)$. Здесь будет изучено поведение этих функций при $n \to \infty$. Покажем, что при соответствующем предельном переходе многочлены Гегенбауэра и функции Бесселя стремятся к многочленам Эрмита. Отсюда будет получен ряд свойств многочленов Эрмита.

1. Многочлены Эрмита как предел многочленов Гегенбауэра. Будем исходить из интегрального представления многочленов Гегенбауэра

$$C_l^p(x) = \frac{\Gamma(2p+l)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, l!\,\Gamma(2p)\,\Gamma(p)} \int\limits_{-1}^{1} (x + i\sqrt{1-x^2}\,t)^l (1-t^2)^{p-1}\,dt \qquad (1)$$

(см. п. 7 § 4 главы IX), где $p = \frac{n-2}{2}$. Из равенств

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{p-1}dt = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

и

$$\lim_{p\to\infty}(1-t^2)^{p-1} = 0$$

при $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $t \neq 0$ ясно, что

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)} (1-t^2)^{p-1} = \delta(t).$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{p \to \infty} \frac{l!\,\Gamma(2p)}{\Gamma(2p+l)} C_l^p(x) = \int_{-1}^{1} (x + i\sqrt{1-x^2}t)^l \delta(t)\,dt = x^l. \tag{2}$$

Более интересная предельная формула получается, если сделать в интеграле (1) подстановку $t = \frac{u}{\sqrt{p}}$ и заменить x на $\frac{x}{\sqrt{p}}$. Мы получим

$$C_l^p\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right) = \frac{\Gamma(2p+l)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,l!\,\Gamma(2p)\,\Gamma(p)\,p^{\frac{l+1}{2}}} \times$$
$$\times \int_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} \left(x + i\sqrt{1-\frac{x^2}{p}}\,u\right)^l \left(1-\frac{u^2}{p}\right)^{p-1} du. \tag{3}$$

При $p \to \infty$ интеграл в правой части стремится к интегралу вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x+iu)^l e^{-u^2}\,du.$$

Чтобы изучить поведение коэффициента при интеграле, когда $p \to \infty$, используем формулу Стирлинга

$$\Gamma(p) \sim \sqrt{2\pi}\,p^{p-\frac{1}{2}} e^{-p}. \tag{4}$$

Заменяя в равенстве (3) Г-функции по формуле Стирлинга, получаем

$$\lim_{p \to \infty} p^{-\frac{l}{2}} C_l^p\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right) = \frac{2^l}{\sqrt{\pi}\,l!} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iu)^l e^{-u^2}\,du. \tag{5}$$

Введем *многочлены Эрмита* $H_l(x)$, положив

$$H_l(x) = \frac{2^l}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+it)^l e^{-t^2}\,dt. \tag{6}$$

Из формулы (5) вытекает, что

$$\lim_{p \to \infty} l!\,p^{-\frac{l}{2}} C_l^p\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right) = H_l(x). \tag{7}$$

Таким образом, многочлены Эрмита получаются из многочленов Гегенбауэра при стремлении размерности пространства к бесконечности.

Естественность замены t на $\frac{u}{\sqrt{p}}$ в интеграле (1) видна из следующих соображений. Многочлены Гегенбауэра возникают при записи матричных элементов представлений класса 1 группы $SO(n)$ в виде интегралов по $(n-1)$-мерной сфере (см. п. 7 § 4 главы IX). При этом мы нормируем меру на сфере условием, что мера всей сферы равна единице. Иначе говоря, мы рассматриваем сферу такого радиуса, что обычная евклидова мера этой сферы равна единице. Несложный подсчет показывает, что этот радиус равен

$$R_n=\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\right]^{\frac{1}{n-2}}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что при $n\to\infty$

$$R_n\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}.$$

Иными словами, при увеличении n радиус сферы единичной меры возрастает примерно как $\sqrt{n}$. С этим и связана замена t на $\frac{u}{\sqrt{n}}$ в интеграле (1).

2. **Некоторые свойства многочленов Эрмита.** Установленная выше связь многочленов Эрмита и Гегенбауэра позволяет получить с помощью предельного перехода различные свойства многочленов Эрмита. При этом следует иметь в виду, что не только сами многочлены Гегенбауэра стремятся к многочленам Эрмита, но и их производные стремятся к соответствующим производным многочлена Эрмита.

Выведем сначала дифференциальное уравнение для многочленов Эрмита. Из уравнения (3) п. 3 § 3 следует, что

$$(1-x^2)\frac{d^2C_l^p(x)}{dx^2}-(2p+1)x\frac{dC_l^p(x)}{dx}+l(2p+l)C_l^p(x)=0. \qquad (1)$$

Заменим здесь x на $x/\sqrt{p}$, умножим обе части равенства на $l!\,p^{-1-l/2}$ и перейдем к пределу при $p\to\infty$. Мы получим дифференциальное уравнение для многочленов Эрмита:

$$\frac{d^2H_l(x)}{dx^2}-2x\frac{dH_l(x)}{dx}+2lH_l(x)=0. \qquad (2)$$

Точно так же из рекуррентных соотношений для многочленов Гегенбауэра вытекает, что

$$\frac{dH_l(x)}{dx}=2lH_{l-1}(x) \qquad (3)$$

и

$$H_{l+1}(x)-2xH_l(x)+2lH_{l-1}(x)=0 \tag{4}$$

(ср. с формулой (2)).

Далее, из формулы (4) п. 8 § 4 главы IX следует с помощью предельного перехода, что

$$H_l(x)=(-1)^l e^{x^2}\frac{d^l}{dx^l}(e^{-x^2}). \tag{5}$$

Аналогично из формулы (2) п. 12 § 4 главы IX, дающей производящую функцию для многочленов Гегенбауэра, получаем

$$e^{-t^2+2tx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}H_k(x). \tag{6}$$

Рассмотрим теперь теорему сложения для многочленов Гегенбауэра:

$$C_l^p(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}t)=$$
$$=\frac{\Gamma(2p-1)}{[\Gamma(p)]^2}\sum_{k=0}^{l}\frac{2^{2l}(l-k)!\,[\Gamma(p+k)]^2(2p+2k-1)}{\Gamma(2p+l+k)}\times$$
$$\times(1-x^2)^{\frac{k}{2}}(1-y^2)^{\frac{k}{2}}C_{l-k}^{p+k}(x)\,C_{l-k}^{p+k}(y)\,C_k^{p-\frac{1}{2}}(t). \tag{7}$$

Заменим в этой формуле y на $y/\sqrt{p}$ и t на $t/\sqrt{p}$, умножим обе части равенства на $l!\,p^{-l/2}$ и перейдем к пределу при $p\to\infty$. В правой части умножим и разделим коэффициенты на

$$(l-k)!\,k!\,(p+k)^{-\frac{l-k}{2}}\left(p-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{k}{2}}.$$

Используя формулы (2) и (7) п. 1 и равенства вида

$$\frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}=p(p+1)\,\ldots\,(p+k-1),$$

получим после несложных преобразований формулу сложения для многочленов Эрмита:

$$H_l(xy+\sqrt{1-x^2}t)=\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!\,(l-k)!}x^{l-k}(1-x^2)^{\frac{k}{2}}H_{l-k}(y)\,H_k(t). \tag{8}$$

В частности, при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеем

$$H_l\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{2^{l/2}k!\,(l-k)!}H_{l-k}(y)\,H_k(t). \tag{9}$$

Более общая формула сложения получается путем повторного применения формулы (8):

$$H_l\left(\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{x})}{\sqrt{(\mathbf{a},\ \mathbf{a})}}\right)=\frac{1}{(\mathbf{a},\ \mathbf{a})^{l/2}}\sum_{k_1+\ldots+k_n=l}\frac{l!}{k_1!\ldots k_n!}\prod_{j=1}^{n}a_j^{k_j}H_{k_j}(x_j),\tag{10}$$

где $(\mathbf{a},\ \mathbf{x})=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ и $(\mathbf{a},\ \mathbf{a})=a_1^2+\ldots+a_n^2$.

Укажем еще следующие формулы для многочленов Эрмита. Из формулы умножения для многочленов Гегенбауэра (см. п. 3 § 4 главы IX) следует, что при $l\geqslant k$

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_l(xy+\sqrt{1-x^2}t)\,H_k(t)\,e^{-t^2}dt=\frac{2^k\sqrt{\pi}\,l!}{(l-k)!}x^{l-k}(1-x^2)^{\frac{k}{2}}H_{l-k}(y).\tag{11}$$

Если же $l<k$, этот интеграл равен нулю. В частности, при $k=0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_l(xy+\sqrt{1-x^2}t)\,e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}x^lH_l(y).\tag{12}$$

Отметим частный случай этой формулы при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_l\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}}\right)e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{l/2}}H_l(y).\tag{13}$$

Далее из формулы (6) п. 11 § 4 главы IX следует, что если $l+m+n=2g$, где g — целое неотрицательное число, и если существует треугольник со сторонами l, m, n, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_l(x)\,H_m(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}dx=\frac{2^g\sqrt{\pi}\,l!m!n!}{(g-l)!(g-m)!(g-n)!}.\tag{14}$$

В противном случае этот интеграл равен нулю.

Из формулы (7) п. 3 § 4 главы IX вытекает:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nH_n(y)\,H_n(z)}{2^nn!}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{2xyz-(y^2-z^2)\,x^2}{1-x^2}\right\}.\tag{15}$$

Предоставляем читателю детально провести соответствующие предельные переходы. Впрочем, разложение (15) можно получить и исходя из формулы (12), сделав подстановку $xy+\sqrt{1-x^2}t=u$ и использовав соотношения ортогональности для многочленов Эрмита (см. ниже п. 3). Тем же путем из формулы (11) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n H_n(y) H_{n+k}(z)}{2^n n!} =$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{k+1}{2}} \exp\left[\frac{2xyz-(y^2+z^2)x^2}{1-x^2}\right] H_k\left(\frac{z-xy}{\sqrt{1-x^2}}\right). \quad (16)$$

3. Соотношения ортогональности для многочленов Эрмита. Из соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра вытекают следующие соотношения ортогональности для многочленов Эрмита:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если} \quad m = n. \end{cases} \quad (1)$$

Из соотношений (1) вытекает, что функции

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\pi^{\frac{1}{2}} n!}} H_n(x), \quad (2)$$

$n = 0, 1, \ldots,$ образуют ортонормированную систему в пространстве функций $f(x)$ на оси, имеющих интегрируемый квадрат. При этом в силу полноты системы многочленов Гегенбауэра система функций (2) полна.

Отсюда следует, что любая функция на оси, такая, что

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty,$$

разлагается в сходящийся в среднем ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (3)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \quad (4)$$

При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n! \sqrt{\pi}\, |a_n|^2. \quad (5)$$

4. Преобразование Фурье функций $e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$. Функции $e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ обладают следующим замечательным свойством инвариантности относительно преобразования Фурье:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,dx = \sqrt{2\pi}\, i^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y). \tag{1}$$

Чтобы доказать это свойство, применим формулу (6) п. 1. С помощью теоремы Коши получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^n e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-iy)^2}{2}}(x+it)^n e^{-t^2}\,dt\,dx =$$

$$= \frac{2^n i^n e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty-iy}^{\infty-iy}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(t+y-ix)^n e^{-t^2}\,dt\,dx =$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}} i^n e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(\frac{t+y}{\sqrt{2}}+ix\right)^n e^{-t^2}\,dt\,dx.$$

Вновь применяя формулу (6) п. 1, находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,dx =$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} i^n e^{-\frac{y^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{t+y}{\sqrt{2}}\right) e^{-t^2}\,dt = \sqrt{2\pi}\, i^n H_n(y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}$$

(см. формулу (14) п. 2). Тем самым равенство (1) доказано.

Равенство (1) дает новое доказательство формулы обращения для преобразования Фурье. Именно, из результатов п. 3 вытекает, что любую функцию $f(x)$ с интегрируемым квадратом можно разложить в ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Из этого разложения и формулы (1) вытекает

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\,dx = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y).$$

Второй раз применяя формулу (1), убеждаемся, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = f(x).$$

Тем самым доказана формула обращения для преобразования Фурье. Аналогично доказывается справедливость формулы Планшереля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n!\sqrt{\pi}\,|a_n|^2.$$

Найдем теперь преобразование Фурье функции $e^{-x^2}H_n(x)$. Применяя формулу (5) п. 2, убеждаемся, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}e^{-x^2}H_n(x)\,dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\,dx.$$

Интегрируя n раз по частям и применяя теорему Коши, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}e^{-x^2}H_n(x)\,dx = (iy)^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ixy}\,dx =$$
$$= (iy)^n e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{iy}{2}\right)^2}dx = (iy)^n e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx =$$
$$= \sqrt{\pi}\,(iy)^n e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

В силу формулы обращения Фурье получаем отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^n e^{ixy}e^{-y^2}dy = \left(\frac{i}{2}\right)^n\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{x^2}{4}}H_n(x).$$

Используя же соотношения ортогональности для многочленов Эрмита, выводим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{2^n n!}H_n(x) = e^{\frac{y^2}{4}+ixy}$$

(см. формулу (6) п. 2).

5. Предельный переход по размерности для группы $M(n)$. Рассмотрим теперь предельный переход по размерности для группы

$M(n)$. Как было показано в п. 2 § 3, зональные сферические функции для этой группы имеют вид

$$\frac{\Gamma(p+1)J_p(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^p}=\frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1}e^{ixt}(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}\,dt, \qquad (1)$$

где $p=\frac{n-2}{2}$. Сделаем в интеграле (1) подстановку $t=\frac{u}{\sqrt{p}}$, заменим x на $x\sqrt{p}$ и перейдем к пределу при $p\to\infty$. Мы получим

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\Gamma(p+1)J_p(2x\sqrt{p})}{(x\sqrt{p})^p}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{2ixu-u^2}\,du=e^{-x^2}$$

(см. формулу (1) п. 4). Асимптотическое разложение левой части этого равенства при $p\to\infty$ получено в работе [128].

ЛИТЕРАТУРА

Монографии и учебные пособия

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов, Гостехиздат, 1950.
2. Багавантам С. и Венкатарайуду Т., Теория групп и ее применения к физическим проблемам, ИЛ, 1959.
3. Бауер Э., Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике, ГТТИ, 1937.
4. Бейман Б. Ф., Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии, Физматгиз, 1961.
5. Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, 1962.
6. Брейн де Н. Г., Асимптотические методы в анализе, ИЛ, 1961.
7. Ван дер Верден Б. Л., Метод теории групп в квантовой механике, ДНВТУ, Харьков, 1938.
8. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1947.
9. Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, 1950.
10. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
11. Вигнер Е., Теория групп, ИЛ, 1961.
12. Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964.
13. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е, Гостехиздат, 1951.
14. Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып. 4), Физматгиз, 1961.
15. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции, вып. 5), Физматгиз, 1962.
16. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
17. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **36**, 1950.
18. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними (Обобщенные функции, вып. 1), изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
19. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм и произведений, Физматгиз, 1962.
21. Грей Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.

22. Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.
23. Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, изд. 2-е, Физматгиз, 1962.
24. Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, 1947.
25. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, ИЛ, 1949.
26. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.
27. Коренев Б. Г., Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях, Физматгиз, 1960.
28. Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.
29. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, 1951.
30. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, ч. I, изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
31. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
32. Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, 1950.
33. Любарский Г. Я., Теория групп и ее применения в физике, Гостехиздат, 1957.
34. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.
35. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
36. Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, т. 1 и 2; 1958, 1960.
37. Мурнаган Ф., Теория представлений групп, ИЛ, 1950.
38. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
39. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
40. Наймарк М. А., Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956.
41. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
42. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
43. Пятецкий-Шапиро И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Физматгиз, 1961.
44. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии, Гостехиздат, 1955.
45. Роуз М., Поля мультиполей, ИЛ, 1957.
46. Сеге Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
47. Семинар «Софус Ли» (Теория алгебр Ли. Теория групп Ли), ИЛ, 1962.
48. Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
49. Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.
50. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
51. Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ИЛ, т. I, II, 1960, 1961.
52. Трантер К. Дж., Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956.
53. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, Физматгиз, тт. 1, 2, 1963.
54. Уфлянд Я. С., Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Изд-во АН СССР, 1963.
55. Фробениус Г., Теория характеров и представлений групп, Харьков, 1937.

56. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», 1964.
57. Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.
58. Хейне, Волкер, Теория групп в квантовой механике, ИЛ, 1963.
59. Хуа Ло-кен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, ИЛ, 1959.
60. Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, т. 1, 1948; тт. 2 и 3, 1958.
61. Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947.
62. Эрдейи А., Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.
63. Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ванагас В. В., Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, 1960.
64. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции, «Наука», 1964.
65. Appell P., Kampé de Fériet J., Fonctions hypergéometriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, 1926.
66. Bailey, Generalized hypergeometric series, Cambridge, 1935.
67. Boerner H., Darstellungen von Gruppen, Springer, 1955.
68. Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer, 1953.
69. Cartan É., Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, partie 1, v. 1, 2, 1952.
70. Dixmier J., Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964.
71. Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Tables of integral transforms, t. 1, 2. McGraw-Hill, 1954.
72. Hammermesch M., Group Theory and Application to Physical Problems, Addison-Wesley, 1962. (Готовится перевод на русский язык.)
73. Higher transcendental functions, t. 1, 2, 3, McGraw-Hill, 1953, 1955. Перевод первого тома на русский язык вышел в свет в 1965 г. (серия «Справочная математическая библиотека», Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра), «Наука», 1965). Готовится к печати перевод второго тома.
74. Kahan Th., Théorie des groupes en physique classique et quantique, t. 1, Dunod, 1960.
75. Kampé de Fériet J., La function hypergéometrique de Gauss (Mém. Sc. Math., fasc, 85), Paris, 1937.
76. Klein F., Conférences sur les mathématiques (Recueillies par A. Ziwet, traduites par L. Laugel), Chicago, 1893; Paris, 1898.
77. Klein F., Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Berlin, 1933.
78. Kowalewski G., Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Leipzig, 1931.
79. Lense J., Kugelfunktionen, 2 Aufl., Akad. Verlag, 1954.
80. Littlewood D. E., The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford, 1950.
81. Miller W., On Lie algebras and some special functions of mathematical physics, Mem. of the Amer. Math. Soc. **50**, 1964.
82. Murnaghan F. D., The Unitary and Rotation Groups, Washington, 1962.
83. Nielsen N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, 1904.
84. Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gamma-funktion, Teubner, 1906.
85. Nielsen N., Théorie des functions métasphériques, Gauthier-Villars, 1911.
86. Oberhettinger F., Tabellen zur Fourier Transformation, Springer, 1957.
87. Racah G., Group theory and spectroscopy, Princeton lectures, Springer, 1951.
88. Rainville E. D., Special functions, New York, 1960.
89. Robin L., Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, v. 1, 2, Gauthier-Villars, 1958.

90. Rudin W., Fourier analysis on Groups, New York—London, 1962.
91. Schäfke F. W., Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer, 1963.
92. Shochat J. B., Hille E., Walsh J. L., A bibliography on orthogonal polynomials, Washington, 1940.
93. Slater L., Confluent hypergeometric functions, Cambridge, Univ. press, 1960.
94. Tricomi F. G., Fonctions hypergeométriques, confluentes, Gauthier-Villars, 1960.
95. Truesdell C., An Essay Toward a Unified Theory of Special Functions Based upon the Functional Equation $\frac{\partial}{\partial z}F(z, \alpha) = F(z, \alpha+1)$, Princeton, 1948.
96. Waerden B. L. van der, Gruppen von linearen Transformationen, Chelsea, 1948.
97. Wangerin A., Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Bd. 1, 2, Leipzig, 1922.
98. Wangerin A., Theorie der Kugelfunktionen..., Enc. der Math. Wiss., Vol. II, Heft 1, 2, 695—759.
99. Weyl H., Gruppentheory und Quantenmechanik, Leipzig, 1928.
100. Wigner E. P., The application of group theory to the special functions of mathematical physics, Princeton lectures, part I, II, Spring, 1955.

Журнальные статьи

101. Аким Э. Л., Левин А. А., Производящая функция для коэффициентов Клебша-Гордана, ДАН СССР **138**, № 3, 1961, 503—505.
102. Березанский Ю. М., О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам, Укр. матем. журнал **3**, № 4, 1951, 412—432.
103. Березин Ф. А., Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве, ДАН СССР **110**, № 6, 1956, 897—900.
104. Березин Ф. А., Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, Труды Моск. матем. о-ва **6**, 1957, 371—463.
105. Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрическом римановом пространстве, Труды Моск. матем. о-ва **5**, 1956, 311—351.
106. Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Граев М. И., Наймарк М. А., Представления групп, Успехи матем. наук **11**: 6 (72), 1956, 13—40.
107. Березин Ф. А., Карпелевич Ф. И., Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах, ДАН СССР **118**, № 1, 1958, 9—12.
108. Богаевский А. Н., Вычисление зональных сферических функций, ДАН СССР **129**, № 3, 1959, 484—487.
109. Богаевский А. Н., Гармонические функции на *GL* (2), ДАН СССР **153**, № 4, 1963, 751—753.
110. Брюа Б., Работы Хариш-Чандры по теории представлений вещественных полупростых групп, Математика **6**:5, 1962, 43—50.
111. Бхану Мурти Т. С., Мера Планшереля для фактор-пространства $SL(n, R)/SO(n, R)$, ДАН СССР **133**, № 3, 1960, 503—506.
112. Бхану Мурти Т. С., Асимптотическое поведение зональных сферических функций на верхней полуплоскости Зигеля, ДАН СССР **135**, № 5, 1960, 1027—1030.
113. Виленкин Н. Я., Бесселевы функции и представления группы евклидовых движений, Успехи матем. наук **11**:3 (69), 1956, 69—112.

114. Виленкин Н. Я., Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы вещественных ортогональных матриц и группы движения ($n-1$)-мерного евклидова пространства, ДАН СССР **113**, № 1, 1957, 16—19.
115. Виленкин Н. Я., Вывод некоторых свойств многочленов Якоби при помощи теории представлений групп, Ученые записки МГПИ им. В. И. Ленина **108**, 1957, 59—71.
116. Виленкин Н. Я., К теории присоединенных сферических функций на группах Ли, Матем. сб. **42**:4, 1957, 485—496.
117. Виленкин Н. Я., О производящей функции для многочленов Якоби, Успехи матем. наук **12**:6 (78), 1957, 137—142.
118. Виленкин Н. Я., Континуальный аналог теоремы сложения для многочленов Якоби, Успехи матем. наук **13**:2 (80), 1958, 157—161.
119. Виленкин Н. Я., Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы движений пространства Лобачевского и обобщенные преобразования Фока-Мелера, ДАН СССР **118**, № 2, 1958, 219—222.
120. Виленкин Н. Я., Некоторые соотношения для функций Гегенбауэра, Успехи матем. наук **13**:3 (81), 1958, 167—172.
121. Виленкин Н. Я., Специальные функции, связанные с представлениями класса 1 групп движений пространств постоянной кривизны, Труды Моск. матем. о-ва **12**, 1963, 185—257.
122. Виленкин Н. Я., Гипергеометрическая функция и представления группы вещественных матриц второго порядка, Матем. сб. **64** (106); 4, 1964, 497—520.
123. Виленкин Н. Я., Континуальные теоремы сложения для гипергеометрической функции, Матем. сб. **65** (107):1, 1964, 28—46.
124. Виленкин Н. Я., Полисферические и орисферические функции, Матем. сб. (печатается).
125. Виленкин Н. Я., Функции Уиттекера и представления группы треугольных матриц третьего порядка, Матем. сб. (печатается).
126. Виленкин Н. Я., Аким Э. Л., Левин А. А., Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы евклидовых движений трехмерного пространства и их свойства, ДАН СССР **112**, № 6, 1957, 987—989.
127. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А., Инвариантные разложения релятивистских амплитуд. ЖЭТФ **46**, вып. 5, 1964, 1793—1808.
128. Виленкин Н. Я., Цукерман В. В., Об одной асимптотической формуле для функций Бесселя, Ж. выч. матем. и матем. физики **4**, вып. 6, 1964, 1097—1102.
129. Гельфанд И. М., Сферические функции на симметрических римановых пространствах, ДАН СССР **70**, вып. 1, 1950, 5—8.
130. Гельфанд И. М., Центр инфинитезимального группового кольца. Матем. сб. **26**:1, (68), 1950, 103—112.
131. Гельфанд И. М., О структуре кольца быстро убывающих функций на группе Ли, ДАН СССР **124**, № 1, 1959, 19—21.
132. Гельфанд И. М., О формуле преобразования Фурье, «Матем. просвещение» **5**, 1960, 155—159.
133. Гельфанд И. М., О некоторых проблемах функционального анализа, Успехи матем. наук **11**:6 (72), 1956, 3—12.
134. Гельфанд И. М., Интегральная геометрия и ее связь с теорией представлений, Успехи матем. наук **15**:2 (92), 1960, 155—164.
135. Гельфанд И. М., Граев И. И., Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии), Известия АН СССР, сер. матем. **17**, 1953, 189—248.
136. Гельфанд И. М., Граев М. И., Аналог формулы Планшереля для классических групп, Труды Моск. матем. о-ва **4**, 1955, 375—404.

137. Гельфанд И. М., Граев М. И., Следы унитарных представлений вещественной унимодулярной группы, ДАН СССР **100**, № 6, 1955, 1037—1040.
138. Гельфанд И. М., Граев М. И., Преобразования Фурье быстро убывающих функций на комплексных полупростых группах, ДАН СССР **131**, № 3, 1960, 496—499.
139. Гельфанд И. М., Граев М. И., Конструкция неприводимых представлений простых алгебраических групп над конечным полем, ДАН СССР **147**, № 3, 1962, 529—532.
140. Гельфанд И. М., Граев М. И., Категории представлений групп и задача о классификации неприводимых представлений, ДАН СССР **146**, № 4, 1962, 757—760.
141. Гельфанд И. М., Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, 1, Труды Моск. матем. о-ва **8**, 1959, 321—390.
142. Гельфанд И. М., Граев М. И., Применение метода орисфер к спектральному анализу функций в вещественном и мнимом пространствах Лобачевского, Труды Моск. матем. о-ва 11, 1962, 243—308.
143. Гельфанд И. М., Граев М. И., Представления группы матриц 2-го порядка с элементами из локально-компактного поля и специальные функции на локально-компактных полях, Успехи матем. наук **18**:4 (112), 1963, 29—99.
144. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Известия АН СССР, сер. матем. **11**, № 5, 1947, 411—504.
145. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления группы линейных преобразований прямой, ДАН СССР **55**, № 7, 1947, 571—574.
146. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Нормированные кольца с инволюцией и их представления, Известия АН СССР, серия матем. **12**, № 5, 1948, 445—480.
147. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы, Труды Моск. матем. о-ва **1**, 1952, 423—475.
148. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и теория автоморфных функций, Успехи матем. наук **14**:2 (86), 1959, 171—194.
149. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И., Унитарные представления в однородных пространствах с дискретными стационарными подгруппами, ДАН СССР **147**, № 1, 1952, 17—20.
150. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И., Унитарные представления в пространстве G/Γ, где G — группа вещественных матриц n-го порядка, Γ — подгруппа целочисленных матриц, ДАН СССР **147**, № 2, 1962, 275—278.
151. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И., Автоморфные функции и теория представлений, Труды Моск. матем. о-ва **12**, 1963, 389—412.
152. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, Успехи матем. наук **7**:1 (47), 1952, 118—137.
153. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., Конечномерные представления группы унимодулярных матриц, ДАН СССР **71**, № 5, 1950, 825—828.
154. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., Конечномерные представления группы ортогональных матриц, ДАН СССР **71**, № 6, 1950, 1017—1020.
155. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я., Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения, Успехи матем. наук, **7**:1 (47), 1952, 3—117.

156. Гельфанд И. М., Яглом А. М., Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца, ЖЭТФ **8**, 1948, 703—733.
157. Гиндикин С. Г., Формула следа и дзета-функция на некоторых симметрических пространствах, Ученые записки МГПИ им. В. И. Ленина **188**, 1962, 23—53.
158. Гиндикин С. Г., Анализ в однородных областях, Успехи матем. наук **19**:4 (118), 1964, 3—92.
159. Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И., Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны, ДАН СССР **145**, № 2, 1962, 252—255.
159а. Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И., Об одной задаче интегральной геометрии, Сб. «Памяти Н. Г. Чеботарева», изд. Казанского ун-та, 1964, 30—43.
160. Годман М. (Godément R.), Обобщение интеграла, изученного Зигелем, и обобщенная Г-функция, Математика **4**:2 (1960), 39—50.
161. Годман Р. (Godément R), Голоморфные функции с суммируемым квадратом на полуплоскости Зигеля, Математика **4**:2, 1960, 51—57.
162. Голодец В. Я., Матричные элементы неприводимых унитарных и спинорных представлений собственной группы Лоренца, Весцi Академiii навук Беларускай ССР **1**, 1961, 19—28.
163. Граев М. И., Унитарные представления вещественных простых групп Ли, Труды Моск. матем. о-ва **7**, 1958, 335—389.
164. Граев М. И., О неприводимых унитарных представлениях некоторых классов вещественных простых групп Ли, ДАН СССР **127**, № 1, 1959, 13—16.
165. Граев М. И., Карпелевич Ф. И., Кириллов А. А., Теория представлений групп Ли, Труды четвертого Всесоюзного математического съезда, т. II, 275—281.
166. Диксмье Ж. (Dixmier J.), Некоторые результаты Хариш-Чандры, Математика **6**:5, 1962, 23—32.
167. Диксмье Ж. (Dixmier J.), Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, Математика **5**:1, 1961, 53—114.
168. Диксмье Ж. (Dixmier J.), Об унитарных представлениях алгебраических групп Ли, Математика **8**:6, 1964, 69—79.
169. Долгинов А. З., Релятивистские сферические функции, ЖЭТФ **30**, вып. 4, 1956, 746—755.
170. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н., Релятивистские сферические функции, II, ЖЭТФ **37**, вып. 5 (11), 1959, 1141—1151.
171. Долгинов А. З., Москалев А. Н., Релятивистские сферические функции, III, ЖЭТФ **37**, вып. 6 (12), 1959, 1697—1707.
172. Желобенко Д. П., Описание некоторого класса представлений группы Лоренца, ДАН СССР **121**, № 4, 1958, 586—589.
173. Желобенко Д. П., Строение группового кольца группы Лоренца, ДАН СССР **126**, № 3, 1959, 482—485.
174. Желобенко Д. П., Линейные представления группы Лоренца, ДАН СССР **126**, № 5, 1959, 935—938.
175. Желобенко Д. П., Описание всех неприводимых представлений произвольной связной группы Ли, ДАН СССР, 1961, **139**, № 6; 1961, 1291—1294.
176. Желобенко Д. П., Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений, Успехи матем. наук **17**:1 (103), 1962, 27—120.
177. Желобенко Д. П., К теории линейных представлений комплексных и вещественных групп Ли, Труды Моск. матем. о-ва **12**, 1963, 53—98.
178. Желобенко Д. П., О гармоническом анализе функций на полупростых группах Ли, I, Известия АН СССР, сер. матем. **27**, вып. 6, 1963, 1343—1394.

179. Зельберг А. (Selberg A.), Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах; приложения к теории рядов Дирихле, Математика **1**:4, 1957, 3—28.
180. Карпелевич Ф. И., Геодезические линии и гармонические функции на симметрических пространствах, ДАН СССР **124**, № **6**, 1959, 1199—1202.
181. Карпелевич Ф. И., Орисферические радиальные части операторов Лапласа на симметрических пространствах, ДАН СССР **143**, № 5, 1962, 1034—1037.
182. Картье П. (Cartier P.), О формуле характера Г. Вейля, Математика **6**:5, 1962, 139—141.
183. Картье П. (Cartier P.), Представления групп Ли (по Хариш-Чандры), Математика **6**:5, 1962, 33—41.
184. Кац Г. Ї., Лінійні представлення унімодулярної групи, Наукові записки Житомирского педагогічного інституту, фіз.-матем., сер. **3**, 1956, 7—61.
185. Кац Г. И., Обобщенные функции на локально-компактной группе и разложения унитарных представлений, Труды Моск. матем. о-ва **10**, 1961, 3—40.
186. Кириллов А. А., Представления группы вращений n-мерного евклидова пространства сферическими векторными полями, ДАН СССР **116**, № 4, 1957, 538—541.
187. Кириллов А. А., Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, ДАН СССР **130**, № 5, 1960, 966—968.
188. Кириллов А. А., Унитарные представления нильпотентных групп Ли, Успехи матем. наук, **17**:4 (106), 1962, 57—110.
189. Кириллов А. А., О бесконечномерных представлениях полной матричной группы, ДАН СССР **144**, № 1, 1962, 37—39.
190. Константинова Э. Л. и Соколик Г. А., Двумерное уравнение Шредингера и представления группы движения плоскости, ЖЭТФ **30**, вып. 2, 1956, 430—431.
191. Костант Б. (Kostant B.), Формула для кратности веса. Математика **6**:1, 1962, 133—152.
192. Крейн М. Г., Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры, ДАН СССР **69**, № 6, 1949, 725—728.
193. Крейн М. Г., Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах. т. I, II, Укр. матем. журнал, т. 1, № 4, 1949, 64—98; т. II, № 1, 1950, 10—59.
194. Ламбина Е. Н., Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы K_4 ортогональных матриц четырехмерного евклидова пространства, ДАН БССР **6**, № 10, 613—615.
195. Ламбина Е. Н., Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы K_n ортогональных матриц n-мерного евклидова пространства, ДАН БССР **9**, № 2, 1965, 77—81.
196. Левинсон И. Б., Юцис А. П., Приведение прямого произведения представлений собственной однородной группы Лоренца, Труды АН Литовской ССР, Б, **4** (16), 1958, 3—16.
197. Маккей Д. В. (Mackey G. W.), Функции на локально-компактных группах, Успехи матем. наук **8**:4 (56), 1953, 95—129.
198. Макки Г. (Mackey G. W.), Бесконечномерные представления групп, Математика **6**:6, 1962, 57—103.
199. Мандельцвейг В. Б., Неприводимые представления группы SU_3 ЖЭТФ **47**, вып. **5** (11), 1964, 1836—1846.
200. Мандельцвейг В. Б., Разложение представления редуктивной алгебры Ли на представления регулярных редуктивных подалгебр максимального ранга, ДАН СССР, **162**, № 6, 1965.
201. Наймарк М. А., О неприводимых линейных представлениях собственной группы Лоренца, ДАН СССР **97**, № 6, 1954, 969—972.

202. Наймарк М. А., Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп, I, II, Матем. сб. **35** (77):2, 1954, 317—356; **37** (79):1, 1955, 121—140.
203. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, Успехи матем. наук, **9**:4 (62), 1954, 19—93.
204. Наймарк М. А., Континуальный аналог леммы Шура и его применение к формуле Планшереля для комплексных классических групп, Известия АН СССР, сер. матем. **20**, № 1, 1956, 3—16.
205. Наймарк М. А., О неприводимых линейных представлениях полной группы Лоренца, ДАН СССР **112**, № 4, 1957, 583—586.
206. Наймарк М. А., О разложении неприводимых представлений основной серии комплексной унимодулярной группы n-го порядка по представлениям комплексной унимодулярной группы второго порядка, ДАН СССР **121**, № 4, 590—593.
207. Наймарк М. А., Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления, ч. I, II, III, Труды Моск. матем. о-ва **8**, 1959, 121—153; **9**, 1960, 237—282; **10**, 1961, 181—216.
208. Наймарк М. А., О разложении на фактор-представления унитарного представления локально-компактной группы, Сибирский матем. журнал, т. II, № 1, 1961, 89—99.
209. Наймарк М. А., Фомин С. В., Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения, Успехи матем. наук **10**:2 (64), 1955, 111—142.
210. Олевский М. Н., Решение некоторых начальных и краевых задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа в пространствах постоянной кривизны, ДАН СССР **33**, № 4, 1941, 282—286.
211. Олевский М. Н., Об одном обобщении бесселевых функций, ДАН СССР **40**, № 1, 1943, 5—10.
212. Олевский М. Н., Некоторые теоремы о среднем в пространствах постоянной кривизны, ДАН СССР **45**, № 3, 1944, 103—106.
213. Олевский М. Н., Решение задачи Коши для волнового уравнения в n-мерном пространстве постоянной кривизны, ДАН СССР, **46**, № 1, 1945, 3—7.
214. Олевский М. Н., О представлении произвольной функции в виде интеграла с ядром, являющимся гипергеометрической функцией, ДАН СССР **69**, № 1, 1949, 11—14.
215. Олевский М. Н., Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ допускает полное разделение переменных. Матем. сб. **27** (69):3, 1950, 379—426.
216. Олевский М. Н., Обобщенное волновое уравнение, уравнение теплопроводности и специальные функции, Труды МИМЭСХ **4**, вып. 1, 1959, 129—136.
217. Пятецкий-Шапиро И. И., Некоторые вопросы гармонического анализа в однородных областях, ДАН СССР **116**, № 2, 1957, 181—184.
218. Попов В. С., К теории релятивистских преобразований волновых функций и матрицы плотности частиц со спином, ЖЭТФ, **37**, вып. 4 (10), 1959, 1116—1126.
219. Попов В. С., Долинский Э. И., Групповые свойства комплексного углового момента, ЖЭТФ **46**, вып. 5, 1964, 1829—1841.
220. Ромм Б. Д., Разложение на неприводимые представления тензорного произведения двух неприводимых представлений вещественной группы Лоренца (случай двух дискретных серий), Известия АН СССР, сер. матем. **28**, № 4, 1964, 855—866.

221. Ромм Б. Д., Разложение на неприводимые представления сужения представлений основной серии собственной группы Лоренца на вещественную группу Лоренца, ДАН СССР **152**, № 1, 1963, 59—62.

221а. Ромм Б. Д., Аналог формулы Планшереля для вещественной унимодулярной группы третьего порядка, ДАН СССР **160**, № 6, 1965, 1269—1270.

222. Рывкин В. Б., Представление коэффициентов Клебша-Гордана в виде конечноразностных аналогов полиномов Якоби, ДАН БССР **3**, № 5, 1959, 183—185.

223. Семянистый В. И., Некоторые интегральные преобразования и интегральная геометрия в эллиптическом пространстве, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. **12**, 1963, 397—441.

224. Соколик Г. А., Представления общей группы Лоренца и классификация релятивистских уравнений, Известия высш. учеб. зав., физика, **5**, 1962, 54—59.

225. Соколик Г. А., Новый класс представлений полной группы Лоренца, ЖЭТФ **36**, вып. 4, 1959, 1098—1102.

226. Шапиро И. С., Разложение волновой функции по неприводимым представлениям группы Лоренца, ДАН СССР **106**, 1956, 647.

226а. Шапиро И. С., Разложение амплитуды рассеяния по релятивистским шаровым функциям, ЖЭТФ **43**, 1962, 1727. Physics Letters **1**, 1962, 253.

227. Широков Ю. М., Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики, ч. I, II, III, ЖЭТФ **33**, вып. 4 (10); 1957, 861—872; **33**, вып. 5 (11); 1957, 1196—1207.

228. Эскин Л. Д., Вычисление сферической функции группы D_2, Ученые записки Казанского госуниверситета, **115**, кн. 7, 1955, 19—24.

229. Эскин Л. Д., Замечания об операторах Лапласа на унимодулярной группе, Известия высш. учеб. завед., Математика **2** (9), 1957, 259—269.

230. Эскин Л. Д., К теории релятивистских сферических функций, Научные докл. высш. школы **2**, 1959, 95—97.

231. Эскин Л. Д., О матричных элементах неприводимых представлений группы Лоренца, Известия высш. учеб. завед., Математика **6** (25), 1961, 179—184.

232. Эскин Л. Д., ζ-функция на группе унитарных матриц, ДАН СССР **152**, № 6, 1963, 1327—1328.

233. Эскин Л. Д., Уравнение теплопроводности на группах Ли, Сб. «Памяти Н. Г. Чеботарева, 1894—1947», Казань, ун-т, 1964, 113—132.

234. Яглом А. М., Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам, Теория вероятностей и ее применения, **II**, вып. 3, 1957, 292—338.

235. Яглом А. М., Положительно-определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах, ДАН СССР **135**, № 6, 1960, 1342—1345.

236. Bargmann V., Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. **48**, 1947, 568—640.

237. Biedenharn L. C., On the representations of the semisimple Lie groups I., J. Math. Phys. **4**, 1963, 436—445.

238. Brauer R., Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe, Sitzungsber. der preuss. Akad. der Wissensch., Berlin, 1929, 626—638.

239. Brauer R., Weyl H., Spinors in n-dimension. Amer. J. of Math. **57**, 1935, 425—449.

240. Bruhat F., Sur les représentations induites de groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France **84**, 1956, 97—205.

241. Bruhat F., Sur les représentations des groupes classiques p-adiques, I, II, Amer. J. Math. **83**, № 2, 1961, 321—338, 343—368.

242. Cartan É., Les groupes projectifs, qui ne laissent invariante aucune miltiplicité plane, Bull. Soc. Math. de France **41**, 1913, 53—96.
243. Cartan É., Les groupes projectifs continus réels, qui ne laissent invariante aucune miltiplicité plane, J. Math. pures et appl. **10**, 1914, 149—186.
244. Cartan É., Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace dè Riemann symétrique clos, Rend. Circ. Mat. Palermo **53**, 1929, 217—252.
245. Dieudonne J., Note sur les fonctions spheriques, J. Math. pures, appl. **191**, **41**, 1962, 233—240.
246. Dirac P. A. M., A remarkable representation of the $3+2$ de Sitter group. J. Math. Phys. **4**, 1963, 901—909.
247. Dixmier J., Représentations integrables du groupe de Sitter, Bull. Soc. Math. France **89**, 1961, 9—41.
248. Dixmier J., Sur les représentations unitaires des groups de Lie resolubles, Math. J. Okayama Univ. **11**, 1962, 1—18.
249. Ehrenpreis L., Mautner F. J., Some properties of the Fourier transform on semisimple Lie groups, I, II, III, Ann. of Math., **61**, № 3, 1955, 406—439; Trans. of Amer. Math. Soc. **84**, № 1, 1957, 1—55; **90**, 1959, 431—484.
250. Gelfand I. M. (Гельфанд И. М.), Automorphic functions and the theory of representations, Proc. of Intern. Congress of Math., Stockholm, 1962, 74—85; Uppsala, 1963.
251. Godèment R., A theory of spherical functions I, Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 1952, 496—556.
252. Haar A., Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math. **34**, 1933, 147—169.
253. Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **70**, 1951, 28—96.
254. Harish-Chandra, Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38**, 1952, 337—342.
255. Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups, I, II, III, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 1953, 185—243; **76**, 1954, 26—65; 234—253.
256. Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups, IV, V, VI, Amer. J. Math. **77**, 1955, 743—777; **78**, 1956, 1—41; 564—628.
257. Harish-Chandra, The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 1954, 485—528.
258. Harish-Chandra, Fourier transforms on a semisimple Lie algebra, I, II, Amer. J. Math. **79**, 1957, 193—257, 653—686.
259. Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group, I, II, Amer. J. Math. **80**, 1958, 241—310, 553—613.
260. D'Heeden R. N., Simultaneous invariance of generalized spherical harmonics under the operators of two rotation groups, Quart. Appl. Math., **16**, № 2, 1958, 189—192.
261. Herz C. S., Bessel functions of matrix argument, Ann. of Math. **61**, № 3, 1955, 474—523.
262. Hirai T., On infinitesimal operators of irreducible representations of the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad. **38**, 1962, 83—87.
263. Horvath J., Singular integral operators and spherical harmonics, Trans. Amer. Math. Soc. **82**, № 1, 52—63.
264. Hurevitsch A. (Гуревич А.), Unitary representation in Hilbert space of a compact topological group, Матем. сб. **13**, № 1, 1943, 79—86.
265. Inonu E., Wigner E. P., On the contraction of groups and their representations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **39**, № 6, 1953, 510—524.
266. Itô S., Unitary representations of some linear groups. I, II, Nagoya Math. J. **4**, 1952, 1—13; **5**, 1953, 79—96.

267. Kohari A., Harmonic Analysis on the Group of Linear Transformations of the Straigth Line, Proc. Japan. Acad. **37**, № 5, 1961, 250—254.
268. Kostant B., Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math. **85**, № 3, 1963, 327—404.
269. Kunze R. A., Stein E. M., Analytic continuation of the principal series, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, № 6, 1961, 593—596.
270. Kunze R. A., Stein E. M., Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, I, II, Amer. J. Math. **82**, № 1, 1960, 1—62; **83**, № 4, 1961, 723—786.
271. Lehrer-Ilamed Y., On the direct calculation of the representations of the three-dimensional pure rotation group. Proc. Cambridge Philos. Soc. **60**, № 1, 1964, 61—66.
272. Lomont J. S., Decomposition of Direct Products of Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, J. of Math. Phys. **1**, № 2, 1960, 237—243.
273. Maass H., Spherical functions and quadratic forms, J. Indian Math. Soc. **20**, № 1—3, 1956, 117—162.
274. Maass H., Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen, Math. Ann. **134**, № 1, 1957, 1—32.
275. Maass H., Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen, Math. Ann. **135**, № 5, 1958, 391—416.
276. Maass H., Zur Theorie der harmonischen Formen, Math. Ann. **137**, № 2, 1959, 142—149.
277. Mackey G., Induced representations of locally compact groups, I, II, Ann. of Math. **55**, № 1, 1952, 101—139; **58**, № 2, 1953, 193—221.
278. Mautner F. I., Unitary representations of locally compact groups, I, II; Ann. of Math., v. **51**, № 1, 1950, 1—25; **52**, № 3, 1950, 528—556.
279. Mautner F. I., Fourier analysis and symmetric spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37**, 1951, 529—533.
280. Mautner F. I., Induced representations, Amer. J. Math., **74**, № 3, 1952, 737—758.
281. Mautner F. I., Spherical functions over $\mathfrak{P}$-adic fields I, II, Amer. J. of Math. **80**, № 2, 1958, 441—457; **86**, № 1, 1964, 171—200.
282. Miller W., Some Applications of the Representation Theory of the Euclidean Group in Three-Space, Comm. on pure and appl. math. **17**, № 4, 1964, 527—540.
283. Orihara A., Bessel functions and the euclidean motion group, Tohoku Math. J. **13**, № 1, 1961, 66—74.
284. Peter F., Weyl H., Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. **97**, 1927, 737—755.
285. Pukanszky L., On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group, 1, Trans. Amer. Math. Soc. **100**, № 1, 1961, 116—152.
286. Pukanszky L., On the Kronecker product of irreducible unitary representations of the inhomogeneous Lorents group, J. Math. Mech. **10**, № 3, 1961, 475—491.
287. Pukanszky L., The Plancherel Formula for the Universal Covering Group of $SL(R, 2)$, Math. Ann. **156**, № 2, 1964, 96—143.
288. Rubunowicz A., Über ein Additions-theorem für Laguerreschen Polynomen, Zeeman Festschr., 1935, 143—147.
289. Saito M., Représentations unitaires du groupe des déplacements du plan $\mathfrak{P}$-adique. Proc. Japan Acad. **39**, № 7, 1963, 407—409.
290. Schur I., Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheory, Sitzungsber. Preuß., Akad., Berlin, 1924, 189—208, 297—321, 346—355.

290a. Sugiura M., Representations of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces. Proc. Japan. Acad., **38**, № 3, 1962, 111—113.
291. Takahashi R., Sur les functions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, Japan J. Math., **31**, 1961, 55—90.
292. Takahashi L., Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. France, **91**, № 3, 289—433.
293. Takahashi T., Generalized spherical harmonics as representations, J. Phys. Soc. Japan **7**, 1952, 307—312.
294. Tamm J. (Тамм И. Е.), Die verallgemeinerten Kugelfunktionen und Wellenphysik, Zeitschr. für Phys. **71**, 141—150.
295. Tatsuuma N., Decomposition of representations of the three-dimensional Lorentz group. Proc. Japan Acad. **38**, № 1, 1962, 12—14.
296. Tatsuuma N., Decomposition of Kronecker products of representations of the inhomogeneous Lorentz group. Proc. Japan Acad. **38**, № 4, 1962, 156—160.
297. Thoma E., Die unitären Darstellungen der universellen Überlagerungsgruppe der Bewegungsgruppe des R^2, Math. Ann., **134**, № 5, 1958, 428—459.
298. Thomas L. H., On unitary representations of the group of De Sitter space, Ann. of Math., 1941, **42**, № 1, 113—126.
299. Weyl H., Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math., **35**, № 3, 1934, 486—499.
300. Weyl H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Zeitschr. **23**, 1925, 271—309; **24**, 1925, 228—395 (частично переведено на русский язык, Успехи матем. наук **4**, 1938, 201—246).
301. Wigner E. P., On unitary representations of inhomogeneous Lorentz group, Ann. of Math. **40**, № 1, 1939, 149—204.
302. Yamaguchi S., On certain zonal spherical functions, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ, Ser. A **17**, № 2, 1963, 131—134.
303. Yoshizawa H., Group representations and spherical functions, Sugaku **12**, 1960/61, 21—37.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Глава I

Теория представлений групп линейными преобразованиями была создана Г. Фробениусом [55]. Бернсайд и И. Шур нашли существенно более простой подход, выдвинув на первый план саму матрицу представления вместо ее следа — фробениусовского характера. Инфинитезимальный подход к теории представлений развит Э. Картаном [69]. Изложение инфинитезимальной теории групп Ли дано в книгах Понтрягина [42], Хелгасона [56], Чеботарева [57], Шевалле [60], Эйзенхарта [61], Ковалевского [78].

Общая теория непрерывных групп была в основном создана Л. С. Понтрягиным [42]. Инвариантное интегрирование на группах Ли ввел А. Гурвиц в 1897 г. для доказательства теорем об инвариантах. В 1924 г. И. Шур [290] применил этот процесс к представлениям компактных групп, в частности вещественной ортогональной группы. Существование инвариантной меры на произвольной локально компактной группе доказано А. Хааром [252].

Индуцированные представления групп использовались в серии работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [17]. Относительно общей теории см. Макки [277], Маутнер [280], Брюа [240].

Теория сферических функций на группах восходит к работе Э. Картана [244], см. также Г. Вейль [299]. Дальнейшее развитие теории дано И. М. Гельфандом, М. А. Наймарком, Ф. А. Березиным [17], [105], [129], Н. Я. Виленкиным [116], Р. Годманом [251], Хариш-Чандра [259], Маутнером [281], Иошидзава [303] и многими другими.

Изложенные здесь результаты получены в основном И. Шуром, Ф. Петером и Г. Вейлем. В работе Петера и Вейля [284] доказан основной результат о полноте системы неприводимых представлений компактной группы Ли. Для бесконечномерных представлений см. А. Гуревич [264]. В дальнейшем эти результаты были в той или иной мере перенесены на локально компактные группы; см. Рудин [90], Д. П. Желобенко [178], Макки [197, 198], Наймарк [204], Хариш-Чандра [257, 258], Маутнер [278]. Близким вопросам посвящены работы М. Г. Крейна [192, 193].

Дополнения к главе I. Относительно затронутых здесь вопросов см. книги И. М. Гельфанда, М. И. Граева и автора [14, 15], статью М. А. Наймарка и С. В. Фомина [209].

Глава II

Теория тригонометрических рядов восходит к Д. Бернулли и Л. Эйлеру. Эти ряды систематически применялись Ж. Фурье и О. Коши в 20-х годах XIX века для решения задач математической физики. Относительно современной теории тригонометрических рядов см. Н. К. Бари «Тригонометрические ряды» и А. Зигмунд «Тригонометрические ряды», т. 1, 2. Теория интеграла Фурье изложена в книгах Бохнера [5], Титчмарша [50].

Преобразование Фурье в комплексной области впервые было детально изучено Винером и Пэли [12]. Приведенное в книге доказательство формулы обращения для преобразования Фурье принадлежит И. М. Гельфанду [132].

С точки зрения теории групп теория тригонометрических рядов и интегралов является частным случаем теории характеров коммутативных локально компактных групп, построенной Л. С. Понтрягиным [42].

Глава III

Функции $P_n(x)$ были введены почти одновременно Лежандром и Лапласом в связи с изучением притяжения сфероидов. Они явились первым примером ортогональных многочленов. Обобщением функций $P_n(x)$ являются многочлены Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$. Относительно общей теории ортогональных многочленов см. Джексон [22], Сеге [46]. Библиографию по этим многочленам см. [92].

Классическая теория функций Лежандра изложена в книгах Гобсона [19], Уиттекера и Ватсона [53], Ензе [79], Робэна [89], Вангерина [97, 98]. Эти функции широко применяются в классической и квантовой физике. Изучение оператора момента количества движения в квантовой механике привело к выяснению связи между многочленами Лежандра и Якоби, с одной стороны, и представлениями группы вращений трехмерного евклидова пространства — с другой. Эти вопросы изложены в книгах Багавантама и Венкатарайуду [2], Бауэра [3], Беймана [4], Ван дер Вердена [7], Вигнера [11], Ландау и Лифшица [30], Любарского [33], Хейне, Волкера [58], Хаммермеша [72], Кагана [74], Рака [87], Вейля [99] и др.

Систематическое построение теории многочленов Лежандра на базе теории представлений групп дано Гельфандом и Шапиро [155]; см. также Гельфанд, Минлос и Шапиро [16]. В этих работах введены и детально изучены функции $P_{mn}^{l}(x)$, близкие к многочленам Якоби, но несколько отличающиеся от них. Результаты пп. 1 и 2 § 5 принадлежат автору [115, 117].

Коэффициенты Клебша — Гордана применяются для решения задач спектроскопии; см. Юцис, Левинсон и Ванагас [63] и упомянутые выше книги. Данный здесь вывод свойств этих коэффициентов принадлежит в основном автору.

Глава IV

Функция $J_0(x)$ рассматривалась в 1738 году Даниилом Бернулли, а функции $J_n(x)$ с целыми значениями n — в 1764 году Эйлером. Подробно изучены Бесселем в 1824 году. Относительно классической теории бесселевых функций см. Ватсон [8], Грей и Метьюз [21], справочник «Высшие трансцендентные функции» [73], Нильсен [83]. Приложения к задачам математической физики изложены в книгах Коренева [27], Лебедева [31], Морса и Фешбаха [36], Уфлянда [54].

Построение некоторых разделов теории бесселевых функций на основе теории представлений группы движений евклидовой плоскости проведено автором [113]. См. также Миллер [81], Константинова и Соколик [190], Инону и Вигнер [265]. Представления универсальной накрывающей группы для $M(2)$ изучены Тома [297]. Обобщение на $\mathfrak{P}$-адический случай см. Саито [289].

Глава V

Представления группы линейных преобразований прямой линии изучены Гельфандом и Наймарком [145]; см. также Кохари [267]. Функции $\Gamma(x)$ и $\mathrm{B}(x, y)$ введены Эйлером. Данное здесь изложение теории этих функций принадлежит автору. Различные обобщения Г-функции рассматривались Годманом [160], Гельфандом и Граевым [143], Гиндикиным [158].

Классическая теория функций Макдональда и Ганкеля изложена в упоминавшемся трактате Ватсона [8]. Изучение этих функций на основе теории представлений группы движений псевдоевклидовой плоскости проведено автором. Некоторые результаты (теорема сложения) независимо от него получены В. С. Рыко. Возможно, некоторые из приведенных здесь формул являются новыми.

Глава VI

Группа вещественных унимодулярных матриц второго порядка (или, что то же, группа квазиунитарных матриц второго порядка) была первой некомпактной некоммутативной группой, теория представлений которой детально изучалась (Баргман [236]). Интерес к представлениям этой группы и тесно связанной с ней группы унимодулярных комплексных матриц второго порядка вызван ролью этих групп в физике (они изоморфны соответственно трехмерной и четырехмерной группам Лоренца). Представления группы комплексных матриц второго порядка впервые изучены Гельфандом и Наймарком [144]. Полученные здесь результаты послужили основой изучения представлений полупростых групп (Гельфанд и Наймарк [17, 147], Гельфанд и Граев [135, 136, 137, 138], Березин [103, 104], Желобенко [176, 177], Эренпрайс и Маутнер [249], Хариш-Чандра [253—259] и др.). Многие результаты гармонического анализа на группах впервые были получены на группах второго порядка, причем еще не все они перенесены на более общий случай (Богаевский [109], Гельфанд и Фомин [152], Желобенко [172—174], Наймарк [201, 203, 207], Ромм [220, 221], Кунце и Стейн [269, 270], Пуканский [285, 287]).

В этой главе изложение следует в основном Баргману. Многие вопросы изложены по книге Гельфанда, Граева и автора [15], глава 7. Относительно других выводов формулы Планшереля на группе $SL(2, R)$ см. Гельфанд и Граев [136], Пуканский [287].

Глава VII

Гипергеометрическая функция была введена Гауссом. Относительно классической теории этой функции см. Кратцер и Франц [28], «Высшие трансцендентные функции», т. 1 [73], Клейн [77]. Данное здесь изложение теории принадлежит автору [122, 123]. Многие формулы этой главы являются новыми.

Глава VIII

Относительно теории вырожденных гипергеометрических функций и тесно связанных с ними функций Уиттекера см. Кратцер и Франц [28], Уиттекер и Ватсон [53], Бейли [66], Бухгольц [68], «Высшие трансцендентные функции», т. 1 [73], Трикоми [94]. Теория представлений группы треугольных матриц третьего порядка является частным случаем общей теории представлений разрешимых и нильпотентных групп Ли (см. Кириллов [188], Диксмье [167, 248]).

Связь теории функций Уиттекера с теорией представлений группы треугольных матриц установлена автором [125]; см. также Миллер [81]. Многие формулы этой главы являются новыми.

Глава IX

В работах Шура [290], Картана [242, 243], Вейля [300] и Брауера [238] получена классификация представлений ортогональной группы и вычислены характеры этих представлений. Относительно этих результатов см. также

Мурнаган [37] и [82], Вейль [10], Гельфанд и Цетлин [154] вычислили матричные элементы неприводимых инфинитезимальных представлений этой группы. Выражение матричных элементов представлений в параметрах Эйлера получено автором [114, 121] и Ламбиной [195].

Теория сферических функций в n-мерном случае изложена в книгах Аппеля и Кампе де Ферье [65] и Нильсена [85]. В книге «Высшие трансцендентные функции», т. 2 [73] эта теория по сути дела излагается на основе теории представлений. Данная в нашей книге реализация представлений принадлежит автору, равно как и теория полисферических функций. См. также Кириллов [186].

Связь между теорией представлений групп и многочленами Гегенбауэра была установлена Картаном [244]. Относительно классической теории этих многочленов см. Сеге [46].

Глава X

Представления группы гиперболических вращений n-мерного пространства и связанные с ними специальные функции независимо были изучены автором [114, 119, 121] и Такахаши [292]; см. также Хираи [262].

В четырехмерном случае эти представления полностью описаны Гельфандом и Наймарком [144, 16, 39, 201]. В ряде работ изучались эти представления, их матричные элементы и связанные с ними интегральные преобразования (см., например, Голодец [162], Долгинов, Топтыгин, Москалев [169—171], Желобенко [173, 174], Левинсон и Юцис [196], Попов [218], Ромм [220, 221], Шапиро [226], [226а], Эскин [228], Такахаши [291], Тамм [294].

Метод орисфер для разложения представлений на неприводимые разработан Гельфандом и Граевым [141, 142]. Вывод интегрального преобразования Фока — Мелера на основе метода орисфер дан автором [119, 121]. Можно показать, что и другие интегральные преобразования (Конторовича — Лебедева, Олевского [214] и др.) также получаются этим методом. Для четырехмерного случая это сделано в работе автора и Смородинского [127]. Полисферические и орисферические функции на гиперболоиде введены автором [124]. В трехмерном случае различные ортогональные системы координат, в которых оператор Лапласа допускает разделение переменных, изучены Олевским [215].

Глава XI

Изучение свойств бесселевых функций в связи с теорией представлений группы движений n-мерного евклидова пространства проведено автором [114, 121] и независимо от него Орихара [283]. Ито [266] описал все неприводимые унитарные представления этой группы. В работе Герца [261] изучаются функции Бесселя матричного аргумента. Относительно теории многочленов Эрмита см. Сеге [46].

УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Буквы латинские

Буквы готические

Буквы греческие

Специальные знаки

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ