Ш. Ж. Валле Пуссен

ЛЕКЦИИ по ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

И * Л

Государственное издательство

иностранной

литературы

*

LEÇONS
DE
MÉCANIQUE ANALYTIQUE

par

CH.-J. de la VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain
Membre de l'Académie Royale de Belgique
Correspondant de l'Institut de France

Tome I

VECTEURS — CINÉMATIQUE — DYNAMIQUE
DU POINT — STATIQUE

Deuxième édition

1932

Ш.-Ж. де ла Валле Пуссен

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

I

Перевод
со второго французского издания
А. В. ГЕРМОГЕНОВА

1948
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

В книге Валле Пуссена „Лекции по теоретической механике“ излагаются логические и математические основы этой науки, без приложений и сколько-нибудь значительного числа задач.

Оригинальность изложения (динамика точки предшествует статике) и одновременно с этим ясность, строгость и логичность построения курса делают эту книгу интересной как для студентов, так и для специалистов-механиков и особенно для преподавателей этой дисциплины, несмотря на наличие в русской литературе ряда обстоятельных руководств по теоретической механике.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Мы написали эти *«Лекции по теоретической механике»* для учащихся, получающих свое образование в Лувенском университете. Большая часть из них изучает потом курс прикладной механики, так что приложениями им в достаточной степени приходится заниматься в дальнейшем. Вначале же очень важно ввести их в логические методы теоретической механики. В настоящем курсе мы даем именно математические основы этой науки. При этом мы ни в какой степени не претендуем на какую-либо оригинальность изложения. Единственным нашим стремлением было сделать его простым, ясным и точным. Мы не пытались также затушевывать иногда несколько искусственный характер гипотез. Мы рассматриваем здесь лишь весьма ограниченное число задач и за дальнейшим материалом для упражнений отсылаем читателя к другим руководствам. Достаточное количество таких задач можно найти в соответствующих сборниках. Учащиеся, которые пожелали бы расширить свои знания, найдут неисчерпаемый источник для всякого рода справок в руководстве: Paul Appell, *Traité de mécanique rationnelle* *). Мы отсылаем их к этому превосходному курсу, которым сами очень широко пользовались. При изложении статики мы руководствовались также сочинением: Tullio Levi-Civita et Ugo Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, первый том которого был опубликован в прошлом году.

В противоположность тому, как поступают обычно, мы не начинаем изложения механики в собственном смысле со статики: в нашем курсе непосредственно после изложения основных законов динамики следует динамика точки и уже потом статика. В самом деле, статика может быть построена на базе основных законов динамики тольбо в том случае, когда ее рассматривают как частный случай последней, поэтому динамика, по крайней мере динамика точки, логически должна предшествовать статике.

Лувен, март 1924 г.

---

*) Есть русский перевод. (*Прим. перев.*)

ВВЕДЕНИЕ

НАЧАЛА ТЕОРИИ ВЕКТОРОВ

§ 1. ВЕКТОРЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. **Вектор.** — *Вектор* есть отрезок прямой OP, имеющий *начало* O и *конец* P. Абсолютную величину отрезка OP называют *величиной* (*grandeur*), или *модулем* вектора. Начало O называется также *точкой приложения* вектора. Бесконечную прямую, отрезком которой является вектор, и которая *несет* вектор, называют его *основанием* (*support*), или *линией действия*. Ориентация отрезка OP (от O к P) на линии действия есть *ориентация* (*sens*) вектора, она указывается стрелкой, помещенной в конце P. Направление линии действия определяет *направление* (*direction*) вектора без учета его ориентации.

В аналитической геометрии вектор определяется координатами его начала и конца по отношению к трем осям (прямоугольным или косоугольным). Можно также определить вектор координатами его начала и алгебраическими значениями X, Y, Z его проекций на оси. При этом предполагается, что проектирование выполняется параллельно координатным плоскостям, так что, если x, y, z — координаты начала вектора, то $x+X$, $y+Y$, $z+Z$ — координаты его конца.

Вектор с началом O и концом P обозначается через (OP) или через $\overrightarrow{OP}$ и часто также через $\overrightarrow{V}$. Но в печатном тексте мы будем обозначать его преимущественно буквой $\mathbf{V}$, напечатанной жирным шрифтом. Абсолютная величина вектора обозначается в виде AP, V или $|\mathbf{V}|$.

Если рассматривают векторы, имеющие общее начало O, то каждый из них можно представлять только его концом P и обозначать в виде $\overrightarrow{P}$ или $\mathbf{P}$. Вектор $\mathbf{P}$ определяет в этом случае положение точки P: мы будем говорить, что **P** есть *векторная координата* точки P относительно полюса O.

Вектор полностью определяется своей величиной, направлением несущей его прямой, ориентацией и точкой приложения. Однако для определения вектора не обязательно задавать все эти четыре элемента. В связи с этим удобно различать три категории векторов в зависимости от условий, наложенных на точку приложения.

Свободный вектор определяется величиной, направлением его линии действия и ориентацией, точка же приложения его может быть взята произвольно. *Скользящий вектор* определяется величиной, направлением линии действия, ориентацией и, кроме того, положением линии действия, вдоль которой вектор может скользить свободно. Вектор, для определения которого необходимо задать все элементы, включая и точку приложения, представляет собой *вектор приложенный*, или *неподвижный*.

В механике чаще всего выбирают прямоугольные оси координат. В этом случае модуль вектора выражается через его проекции формулой

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Направление и ориентация вектора $\overrightarrow{OP}$ определяются тремя его *направляющими косинусами*:

$$\cos\alpha = \frac{X}{V}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{V}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{V},$$

которые связаны между собою соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Когда оси координат косоугольные, отношения $X:V$, $Y:V$, $Z:V$ называются *направляющими коэффициентами* вектора. Из аналитической геометрии известно, что эти величины определяют направление отрезка OP и его ориентацию.

2. Геометрическое равенство. — *Два вектора* **V** *и* **V'** *геометрически равны, если они имеют одинаковые* *величину, направление и ориентацию.* В этом случае пишут:

$$V = V'.$$

Это соотношение и выражает *геометрическое равенство.* Если векторы отнесены к системе трех осей координат, то для геометрического равенства двух векторов необходимо и достаточно, чтобы они имели соответственно равные проекции на оси. Если обозначим эти проекции через X, Y, Z и X', Y', Z' соответственно, то предыдущее геометрическое равенство распадается на три алгебраические равенства:

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z',$$

которые ему эквивалентны.

Когда два вектора V и V' имеют одинаковые величину и направление, но противоположно ориентированы, то говорят, что они *противоположны.* Будем обозначать знаками $+$ и $-$ две противоположные ориентации одного и того же направления в пространстве, так что, если векторы V и V' противоположны, то будем писать

$$V = -V'.$$

Это соотношение эквивалентно трем алгебраическим равенствам:

$$X = -X', \quad Y = -Y', \quad Z = -Z'.$$

Два вектора *прямо противоположны,* если они противоположны и имеют одну линию действия.

3. Умножение и деление на число.—Умножить вектор V на положительное число m значит построить вектор mV с теми же самыми началом, направлением и ориентацией, но по величине равный mV.

Умножить вектор V на отрицательное число $-m$ значит построить вектор $-mV$, противоположный вектору mV.

Разделить вектор на число значит умножить его на число, обратное данному.

4. Сложение. — Пусть V_1, $V_2, \ldots, V_n$ суть векторы, произвольно расположенные в пространстве. Возьмем произвольную точку O за начало и построим многоугольник $O\,V_1 V_2' V_3' \ldots V_n'$, последовательные стороны которого соответственно геометрически равны данным векторам V_1, V_2, ..., V_n. Вектор $\overrightarrow{OV_n}$, замыкающий многоугольник, называется *геометрической суммой*, или просто *суммой* векторов V_1, V_2, ..., V_n. Этот вектор $\boldsymbol{R}$ записывается в виде:

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

Мы будем писать сокращенно

$$\boldsymbol{R} = \sum V_k. \tag{1}$$

Так как точка O взята произвольно, то геометрическая сумма нескольких векторов есть *вектор свободный*.

Сумма векторов может быть определена аналитическим способом. Если обозначить через X_k, Y_k, Z_k проекции вектора V_k на три оси, то проекции X, Y, Z суммы $\boldsymbol{R}$ равны суммам проекций векторов V_k (в силу теоремы о проекциях). Поэтому будем иметь:

$$X = \sum X_k, \quad Y = \sum Y_k, \quad Z = \sum Z_k. \tag{2}$$

Геометрическое равенство (1) эквивалентно трем алгебраическим соотношениям (2). Поэтому *переместительный* и *сочетательный* законы алгебраического сложения распространяются и на сложение векторов.

Геометрическая разность. — *Геометрическая разность* двух векторов V и V' есть геометрическая сумма вектора V и вектора $-V'$, противоположного V'. Согласно этому определению, имеем:

$$V - V' = V + (-V').$$

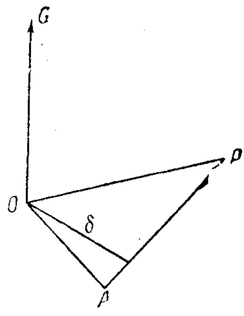
На основании законов сложения эта разность представляет собой вектор, который нужно прибавить к V', чтобы получить V.

В самом деле:

$$V + (-V') + V' = V.$$

5. Направление вращения вокруг оси. — Рассмотрим неподвижную ось с определенной ориентацией Oz и точку M, движущуюся таким образом, что плоскость MOz вращается вокруг этой оси. Вращение может происходить в двух различных направлениях: одно из них называют *прямым*, или *положительным*, другое, противоположное первому, *отрицательным*. Выбор прямого направления есть дело соглашения. Во всем дальнейшем предполагается, что ориентация координатных осей связана с прямым направлением вращения, т. е. поворот положительной оси x на прямой угол до совмещения ее с положительной осью y происходит вокруг оси Oz в прямом направлении. Само же прямое направление, для определенности, установим раз навсегда так, чтобы наблюдатель, ноги которого находятся в O, а голова в z, видел вращение от оси Ox к оси Oy происходящим справа налево (против направления вращения часовой стрелки).

6. Момент вектора относительно точки. — Момент вектора $\overrightarrow{AP}$, или V относительно точки O есть новый вектор G, определяемый следующим образом (фиг. 1): он *приложен* в точке O, *направлен* по нормали к плоскости, проходящей через точку O и вектор V, *ориентирован* в сторону движения точки O при положительном вращении вокруг V и по *величине* равен произведению $V\delta$ модуля V на расстояние δ точки O от прямой, несущей V. Точка O называется *центром момента*.



Фиг. 1.

Важно обратить внимание на следующее:

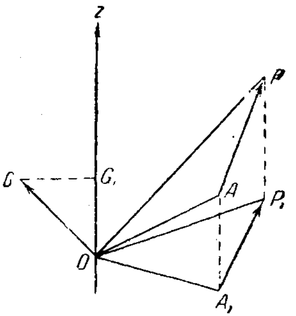
1°. Ориентация вектора V совпадает с движением при прямом вращении вокруг вектора G.

2°. Величина момента равна удвоенной площади треугольника, имеющего вершиной точку O и основанием вектор $\boldsymbol{V}$.

3°. Момент не изменяется, если заставить скользить вектор вдоль несущей его прямой. Он меняет свою ориентацию на противоположную одновременно с $\boldsymbol{V}$.

4°. Если вектор $\boldsymbol{V}$ умножить на произвольное число m (положительное или отрицательное), то момент $\boldsymbol{G}$ умножится на то же число.

7. Момент относительно оси. — Момент вектора $\boldsymbol{V}$ относительно оси определенной ориентации Oz есть положительное или отрицательное число, равное алгебраическому значению проекции (ортогональной) на эту ось момента $\boldsymbol{V}$ относительно точки O, взятой произвольно на оси.



Фиг. 2.

Необходимо, очевидно, показать, что выбор точки O не оказывает влияния на значение момента, определенного указанным здесь способом.

Пусть $\overrightarrow{AP}$ есть вектор $\boldsymbol{V}$. Проведем через точку O (фиг. 2) плоскость, перпендикулярную к оси Oz, и найдем проекцию $\overrightarrow{A_1P_1}$ вектора $\overrightarrow{AP}$ на эту плоскость. Пусть, далее, $\overrightarrow{OG}$ есть момент $\overrightarrow{AP}$, а $\overrightarrow{OG_1}$ — момент $\overrightarrow{A_1P_1}$ относительно точки O. Этот последний вектор лежит на оси Oz и представляет собой, как мы сейчас покажем, проекцию момента $\overrightarrow{OG}$ на эту ось.

В самом деле, пусть α есть угол (положительный и меньший прямого) между двумя плоскостями OAP и OA_1P_1; векторы $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}_1$ перпендикулярны соответственно к этим двум плоскостям и ориентированы от этих плоскостей в одну и ту же сторону (в сторону Oz или в противоположную):

они образуют поэтому между собой тот же угол α, что и указанные две плоскости. Площадь OA_1P_1 есть проекция площади OAP, поэтому

$$\text{площадь } OA_1P_1 = (\text{площадь } OAP) \cos\alpha.$$

С другой стороны, модули OG и OG_1 соответственно равны удвоенным значениям указанных площадей; поэтому имеем также

$$OG_1 = OG \cos\alpha,$$

откуда и видно, что отрезок OG_1 равен проекции вектора $\overrightarrow{OG}$ на ось Oz, так как α есть как раз угол между векторами $\overrightarrow{OG}$ и $\overrightarrow{OG_1}$.

Так как векторы $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}_1$ расположены по одну сторону от плоскости, нормальной к Oz, то $\boldsymbol{G}_1$ есть геометрическая проекция $\boldsymbol{G}$ на Oz.

Момент вектора V относительно оси Oz есть алгебраическое значение момента относительно некоторой точки O этой оси проекции вектора V на плоскость, перпендикулярную к оси и проходящую через точку O.

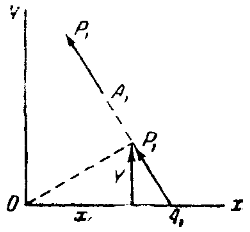
Это определение, очевидно, не зависит от выбора точки O на оси Oz, а потому то же справедливо и для первого определения.

Замечания. — 1°. Момент вектора V относительно оси Oz будет положительным или отрицательным, смотря по тому, будет ли проекция вектора на плоскость, перпендикулярную к оси Oz, ориентирована в положительную или отрицательную сторону вращения вокруг Oz.

2°. Момент вектора V относительно оси Oz может обратиться в нуль лишь в том случае, когда вектор равен нулю или когда он лежит в одной плоскости с осью Oz.

8. Моменты вектора относительно трех прямоугольных координатных осей. — Пусть $\overrightarrow{AP}$ есть вектор, отнесенный к трем прямоугольным осям; пусть далее x, y, z — координаты его начала A, и X, Y, Z — его проекции на оси. Вычислим момент вектора относительно оси Oz. Согласно второму определению предыдущего n°, этот момент равен алгебраическому значению момента относительно начала координат проекции $\overrightarrow{A_1P_1}$ вектора $\overrightarrow{AP}$ на плоскость xy.

Последний момент получается непосредственно, если вектор $\overrightarrow{A_1P_1}$ приложен в точке A_1 оси x (фиг. 3). В самом деле, так как x_1 есть абсцисса точки A_1, то рассматриваемый момент равен по величине удвоенной площади треугольника OA_1P_1 с основанием x_1 и высотой Y; а потому, если оставить пока в стороне знак, он равен x_1Y. Но равенство справедливо также и в смысле знака, так как это произведение положительно или отрицательно, смотря по тому, ориентирован ли вектор $\overrightarrow{A_1P_1}$ в положительную или отрицательную сторону вращения вокруг оси Oz или, иначе, ориентирован ли момент этого вектора в сторону положительных или отрицательных z.



Фиг. 3.

В общем случае вектор $\overrightarrow{A_1P_1}$ приложен в произвольной точке A_1 с координатами x, y (фиг. 3); но так как этот вектор можно перенести, не изменяя значения момента, в произвольную точку линии его действия, то можно переместить его до оси x, что приводит к рассмотренному уже случаю.

Все сводится, таким образом, к отысканию абсциссы x_1 точки пересечения линии действия вектора $\overrightarrow{A_1P_1}$ с осью Ox. Эта прямая проходит через точки x, y и $x+X, y+Y$; уравнение ее имеет вид:

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y}$$

и при $\eta = 0$ дает:

$$\xi = x_1 = x - \frac{X}{Y} y;$$

отсюда имеем по величине и знаку искомый момент:

$$x_1 Y = xY - yX.$$

Обозначим через L, M, N моменты вектора $\overrightarrow{AP}$ относительно каждой из трех координатных осей. Мы только что вычислили N; два другие момента L и M получаются таким же способом; все три момента могут быть получены один из другого при помощи круговой перестановки букв x, y, z и X, Y, Z. Таким образом, будем иметь

$$L = yZ - zY,\quad M = zX - xZ,\quad N = xY - yX.$$

Замечание. — Важно напомнить, что L, M, N представляют собой также проекции на оси координат момента вектора $\overrightarrow{AP}$ относительно начала координат (n° 7).

9. Векторное произведение. — Векторное произведение $[V_1 V_2]$ двух векторов V_1 и V_2 есть свободный вектор, определяемый следующим образом:

Приложим оба вектора V_1 и V_2 к одной точке O; векторное произведение есть вектор, равный по величине площади параллелограма, построенного на этих векторах, направленный по нормали к плоскости этих векторов и ориентированный так, чтобы вращение от V_1 к V_2 происходило вокруг него в прямом направлении.

Если векторы параллельны между собой, то их векторное произведение равно нулю.

Из этого определения следует, что векторное произведение не обладает переместительным свойством: два произведения $[V_1 V_2]$ и $[V_2 V_1]$ противоположны.

Векторное произведение приводится к моменту. В самом деле, приложим вектор V_1 к точке O, а вектор V_2 к концу V_1 первого вектора. Непосредственно видно, что произведение $[V_1 V_2]$ равно моменту вектора V_2 относительно точки O.

Принимая точку O за начало прямоугольных осей, непосредственно получаем проекции произведения $[V_1 V_2]$ на эти оси Ox, Oy и Oz или на оси, параллельные им.

Пусть X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 — проекции множителей V_1 и V_2. Тогда искомые проекции равны моментам относительно осей вектора (X_2, Y_2, Z_2), приложенного в точке (X_1, Y_1, Z_1), и выражаются следующими разностями:

$$Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \quad X_1 Y_2 - Y_1 X_2.$$

Отсюда ясно видно, что проекции векторного произведения меняют знак, если изменить порядок множителей.

Можно заметить, что проекции произведения $[V_1 V_2]$ на прямоугольные оси равны соответственно определителям, образованным из матрицы

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Векторное умножение не коммутативно, легко убедиться также в том, что оно не обладает и свойством ассоциативности: произведения вектора $[V_1 V_2]$ на V_3 и вектора V_1 на $[V_2 V_3]$, вообще говоря, различны между собой. Наоборот, эта операция, как и сложение, обладает распределительным свойством. В самом деле, имеем:

$$[(V_1 + V_2) V_3] = [V_1 V_3] + [V_2 V_3],$$

$$[V_1 (V_2 + V_3)] = [V_1 V_2] + [V_1 V_3].$$

Все эти свойства непосредственно проверяются на проекциях векторов.

Замечание. — Момент вектора V относительно точки O может быть, в свою очередь, определен как векторное произведение. Пусть M есть точка приложения вектора V; момент вектора V относительно точки O есть произведение $[MV]$ векторной координаты точки M (относительно полюса O) на вектор V.

10. Скалярное произведение. — Скалярное произведение двух векторов V_1 и V_2 есть положительное или отрицательное число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними. Это произведение обозначается через $(V_1 V_2)$; таким образом, имеем:

$$(V_1 V_2) = V_1 V_2 \cos \alpha.$$

Скалярное произведение можно рассматривать как произведение двух множителей:

$$V_1(V_2 \cos \alpha) \text{ или } V_2(V_1 \cos \alpha);$$

оно равно поэтому произведению величины одного из множителей на проекцию (взятую с ее знаком) другого множителя на направление первого.

Скалярное умножение приводится к алгебраическому умножению и потому обладает переместительным и распределительным свойствами.

Предположим, что векторы V_1 и V_2 отнесены к системе прямоугольных осей, и пусть X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 — их проекции. Найдем аналитическое выражение скалярного произведения этих векторов. Имеем

$$\cos \alpha = \frac{X_1}{V_1}\frac{X_2}{V_2} + \frac{Y_1}{V_1}\frac{Y_2}{V_2} + \frac{Z_1}{V_1}\frac{Z_2}{V_2}.$$

Следовательно,

$$(V_1 V_2) = V_1 V_2 \cos \alpha = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

§ 2. СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

11. Результирующая системы векторов, приложенных в одной точке. — *Результирующей системы векторов* $V_1, V_2, \ldots, V_n$, *приложенных в одной точке* A, *называют вектор* R, *равный их геометрической сумме и приложенный в той же точке.* — Обратно, векторы V называются *составляющими* вектора R.

Отнесем систему векторов к трем осям, прямоугольным или косоугольным. Обозначим через X_k, Y_k, Z_k алгебраические значения проекций вектора V_k на оси ($k = 1, 2, \ldots, n$). Проекции X, Y, Z вектора R на оси будут (n°4):

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = \Sigma Z_k.$$

Очень часто встречаются следующие частные случаи:

1°. Если имеются только две составляющие, то результирующая есть диагональ параллелограма, построенного на двух составляющих как на сторонах.

2°. Если имеются три составляющие, не лежащие в одной плоскости, то результирующая есть диагональ параллелепипеда, построенного на этих трех составляющих как на ребрах.

12. Разложение вектора на его составляющие. — Можно также разложить вектор V, приложенный в точке O, на его составляющие по заданным направлениям. При этом следует различать несколько случаев.

1°. Если даны только два направления Ox и Oy, то разложение возможно лишь в том случае, если вектор V лежит в плоскости Oxy. В этом случае обе составляющие получаются проектированием вектора V на каждое из двух направлений параллельно другому направлению.

2°. Если даны три направления, не лежащие в одной плоскости, то разложение возможно и выполняется единственным способом. Каждая составляющая получается проектированием вектора V на соответствующее направление при помощи проектирующей плоскости, параллельной двум другим направлениям.

3°. Наконец, если даны более чем три направления, разложение всегда возможно, и притом бесконечным множеством способов.

Замечание. — Проекции вектора V на оси координат определяют на этих осях векторы, геометрически равные составляющим данного вектора по направлениям, параллельным указанным осям. Мы будем обозначать эти векторы через X, Y, Z.

Мы имеем, таким образом, разложение:

$$V = X + Y + Z.$$

13. Моменты результирующей системы векторов, приложенных в одной точке. Результирующие моменты. — Рассмотрим систему векторов $V_1, V_2, \ldots, V_n$, приложенных в точке A; пусть $\boldsymbol{R}$ — их результирующая. Она приложена в той же точке. Мы имеем следующую теорему.

Момент результирующей $\boldsymbol{R}$ *системы векторов, приложенных в одной точке, относительно некоторой точки* O *равен сумме моментов составляющих* $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_n$ *относительно той же точки.*

Эта теорема есть следствие распределительного свойства векторного произведения. Пусть $\boldsymbol{G}$ есть момент вектора $\boldsymbol{R}$, и $\boldsymbol{G}_k$ — момент вектора $\boldsymbol{V}_k$ относительно точки O. Имеем:

$$\boldsymbol{G}_k=[(OA)\,\boldsymbol{V}_k], \quad \boldsymbol{G}=[(OA)\,\boldsymbol{R}].$$

Отсюда получаем:

$$\sum \boldsymbol{G}_k=[(OA)\sum \boldsymbol{V}_k]=[(OA)\boldsymbol{R}]=\boldsymbol{G},$$

что и доказывает теорему.

Спроектируем крайние члены этой цепи равенств на неподвижную ось, проходящую через точку O (центр моментов); так как проекция суммы векторов равна сумме их проекций, то мы получаем следующую теорему:

Момент результирующей $\boldsymbol{R}$ *системы векторов, приложенных в одной точке, относительно некоторой оси равен сумме моментов составляющих относительно той же оси.*

Эти теоремы можно сформулировать короче, если воспользоваться следующими определениями:

Определение. — *Для системы векторов, расположенных произвольно, результирующим, или главным моментом относительно некоторой точки называется геометрическая сумма моментов составляющих векторов относительно той же точки.*

Результирующим, или главным моментом системы относительно оси называется алгебраическая сумма моментов составляющих относительно той же оси.

Высказанные теоремы формулируются теперь следующим образом:

Теорема. — *Результирующий момент системы векторов, приложенных в одной точке, равен моменту их* *результирующей как относительно оси, так и относительно точки.*

Замечание. — Векторы называют *сходящимися*, если их линии действия проходят через одну точку. Векторы можно перемещать вдоль их линий действия, не изменяя их моментов. Можно поэтому применить предыдущую теорему к системе сходящихся векторов, перенося их в общую точку пересечения линий действия.

14. Геометрическая сумма и результирующие моменты системы векторов, расположенных произвольно. — Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — векторы, приложенные в произвольных точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и пусть O — данная точка.

Результирующая векторов V, перенесенных параллельно самим себе в точку O, называется их *геометрической суммой* в *этой точке* (n° 4), или *главным вектором.*

Результирующий, или главный момент G системы относительно точки O есть (n° 13) сумма моментов $G_1, G_2, \ldots$ составляющих относительно той же точки:

$$G = G_1 + G_2 + \ldots .$$

Если мы спроектируем обе части этого равенства на одну и ту же неподвижную ось, проходящую через точку O, и заметим, что проекция суммы $G_1 + G_2 + \ldots$ равна сумме проекций векторов $G_1, G_2, \ldots$, т. е. результирующему моменту системы относительно оси, то можем высказать следующую теорему:

Результирующий момент произвольной системы векторов относительно оси равен проекции на эту ось результирующего момента системы относительно какой-нибудь точки O на оси.

Эту теорему можно применить к трем прямоугольным осям $Oxyz$, проходящим через точку O. Таким образом, *результирующие моменты L, M и N произвольной системы векторов относительно трех прямоугольных осей равны проекциям на эти оси результирующего момента G*

относительно начала. Отсюда следует, что L, M, N суть координаты точки G относительно осей.

15. Изменение результирующего момента с изменением положения центра моментов.—Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_n$ есть система векторов, приложенных к точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и R — их главный вектор. Рассмотрим два различных центра моментов O и O' и результирующие моменты G и G' системы относительно этих двух точек. Мы имеем следующую теорему.

Теорема.—*Результирующий момент G' системы относительно точки O' равен геометрической сумме ее результирующего момента G относительно точки O и момента относительно O' главного вектора R системы, приложенного в O.*

Эта теорема есть следствие распределительного свойства векторного произведения.

Мы имеем:

$$G = \sum [(OA_k)\ V_k], \quad G' = \sum [(O'A_k) V_k].$$

Так как вектор $(O'A_k)$ может быть разложен по формуле:

$$(O'A_k) = (O'O) + (OA_k),$$

то получим:

$$G' = [(O'O) \sum V_k] + \sum [(OA_k)\ V_k] = [(O'O)\ R] + G,$$

что и доказывает теорему.

В качестве частного случая, отсюда вытекает следующая основная теорема:

Теорема.— *Если главный вектор системы равен нулю, то главный момент ее один и тот же для всех точек пространства.*

В общем случае, когда главный вектор не равен нулю, главные моменты одинаковы для всех точек прямой, параллельной главному вектору. В самом деле, если два центра O и O' лежат на прямой, параллельной R, то линия действия вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в O, проходит через O', и момент $\boldsymbol{R}$ относительно O' равен нулю.

16. Теорема. — *Если главный вектор системы векторов не равен нулю, то проекция главного момента системы на направление главного вектора постоянна для любого центра моментов.*

Пусть $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}'$ — главные моменты для двух произвольных центров O и O'. Напишем вновь соотношение предыдущего n°

$$\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{G} + [(O'O)\boldsymbol{R}].$$

Момент $[(O'O)\,\boldsymbol{R}]$ перпендикулярен к $\boldsymbol{R}$; поэтому, если спроектировать обе части предыдущего равенства на прямую, параллельную $\boldsymbol{R}$, то получим:

$$\text{пр. } \boldsymbol{G}' = \text{пр. } \boldsymbol{G}.$$

Произведения этих проекций на модуль R главного вектора равны скалярным произведениям $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{G}')$ и $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{G})$. Следовательно, *скалярное произведение* $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{G})$ *имеет одно и то же значение для всех точек пространства.*

17. Центральная ось. Наименьший главный момент. — Так как проекция главного момента на главный вектор $\boldsymbol{R}$ (предполагаемый отличным от нуля) одна и та же для всех центров моментов, то главный момент будет наименьшим, если он параллелен $\boldsymbol{R}$. Найдем геометрическое место точек пространства, для которых это условие выполняется.

Пусть O — начало прямоугольных осей $Oxyz$, и пусть L, M, N — главные моменты системы относительно этих осей; они являются в то же время проекциями на оси главного момента $\boldsymbol{G}$ относительно точки O. Пусть x, y, z — координаты некоторой точки O'. Момент $\boldsymbol{G}'$ относительно O' равен (n° 15), его проекции на оси будут

$$\boldsymbol{G} + [(O'O)\,\boldsymbol{R}] = \boldsymbol{G} - [(OO')\,\boldsymbol{R}];$$

$$L' = L - (yZ - zY),$$
$$M' = M - (zX - xZ),$$
$$N' = N - (xY - yX).$$

Условие, что вектор $\boldsymbol{G}'$ параллелен $\boldsymbol{R}$ (проекции которого суть X, Y, Z), дает уравнения прямой:

$$\frac{L-(yZ-zY)}{X}=\frac{M-(zX-xZ)}{Y}=\frac{N-(xY-yX)}{Z}.$$

Прямая, определяемая этими уравнениями, параллельна $\boldsymbol{R}$, так как уравнения не изменятся, если увеличить x, y, z на количества, пропорциональные X, Y, Z. Эту прямую называют центральной осью моментов. Отсюда имеем следующую теорему:

Теорема. — *Если вектор* $\boldsymbol{R}$ *не равен нулю, то существует прямая, параллельная* $\boldsymbol{R}$ *и называемая центральной осью, для всех точек которой главный момент системы получает свое наименьшее значение и оказывается равным своей постоянной проекции на* $\boldsymbol{R}$.

Если вектор $\boldsymbol{R}$ равен нулю, то главный момент системы постоянен, и вопрос о его наименьшем значении отпадает. Предыдущие уравнения становятся неопределенными.

Наименьший момент может быть равен нулю. Пусть главный вектор $\boldsymbol{R}$ не равен нулю. Тогда для равенства нулю наименьшего главного момента необходимо и достаточно, чтобы главный момент $\boldsymbol{G}$ был перпендикулярен к главному вектору $\boldsymbol{R}$ для какой-нибудь точки, например, для начала координат O. Значит, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{G}$ должно быть равно нулю, что выражается уравнением:

$$(\boldsymbol{RG}) = LX + MY + NZ = 0.$$

§ 3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

18. Определение эквивалентности. — *Две системы векторов называются эквивалентными, если они имеют одинаковые главные векторы и одинаковые главные* *моменты относительно какой-нибудь точки пространства.*

Чтобы не было никакой неясности, необходимо заметить, что если две системы векторов имеют один и тот же главный вектор $\boldsymbol{R}$ и один и тот же главный момент относительно какого-нибудь центра O, то они будут иметь одинаковые главные моменты и относительно всякого другого центра O'. В самом деле, главный момент каждой из этих систем относительно центра O' получается из главного момента относительно O прибавлением к последнему момента относительно O' вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в O: эта геометрическая сумма одна и та же для обеих систем, и потому главные моменты, предполагаемые одинаковыми относительно точки O, останутся одинаковыми и относительно точки O'.

В аналитической форме условие того, что две системы векторов S и S' эквивалентны, представляют, записывая, что они имеют один и тот же главный вектор и один и тот же главный момент относительно начала координат. Пусть $\boldsymbol{R}$ есть главный вектор системы S, $\boldsymbol{G}$ — ее главный момент относительно начала; X, Y, Z — проекции главного вектора $\boldsymbol{R}$, и L, M, N — проекции главного момента $\boldsymbol{G}$. Соответствующие величины для системы S' будем отмечать штрихами. Алгебраические условия эквивалентности выражаются шестью равенствами:

$$X = X',\ Y = Y',\ Z = Z';\ L = L',\ M = M',\ N = N'.$$

Они сводятся к двум геометрическим равенствам:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}',\ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}'.$$

В частности, *система сходящихся векторов эквивалентна своей результирующей*. В самом деле, в этом случае главный момент равен моменту результирующей (n° 13).

Замечание. — Если дана система векторов S, то из нее можно выделить любую ее часть и заменить ее эквивалентной системой векторов. Таким способом мы заменим полную систему S другой эквивалентной системой, так как эта операция не изменяет ни $\boldsymbol{R}$, ни $\boldsymbol{G}$.

19. Определение. Система, эквивалентная нулю. — *Система векторов S эквивалентна нулю, если ее главный вектор и главный момент относительно какой-нибудь точки равны нулю; в таком случае эти векторы будут равны нулю и для всякой другой точки* (n° 15).

Чтобы выразить в аналитической форме условие эквивалентности нулю системы S, нужны шесть алгебраических уравнений:

$$X = Y = Z = 0, \ L = M = N = 0.$$

Они сводятся к двум геометрическим равенствам

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G} = 0.$$

В частности, *чтобы система двух векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы оба вектора имели одну величину и были прямо противоположны.*

В самом деле, вектор $\boldsymbol{R}$ может обратиться в нуль лишь в том случае, когда оба вектора имеют равные модули и ориентированы в противоположные стороны. Далее, так как главный момент должен обращаться в нуль, в частности, для точки, лежащей на одном из векторов, то необходимо, чтобы линия действия другого вектора проходила через этот центр, что может иметь место лишь в том случае, когда векторы прямо противоположны.

Замечание. — Если к системе векторов S присоединить другую систему S', эквивалентную нулю, то получившаяся система $S + S'$ будет эквивалентна системе S, так как присоединение системы S не изменяет ни $\boldsymbol{R}$, ни $\boldsymbol{G}$. — В частности, если система S эквивалентна нулю, то система $S + S'$ тоже эквивалентна нулю.

20. Теорема. — *Для эквивалентности двух систем векторов S и S' необходимо и достаточно, чтобы система S'', образованная присоединением к векторам* *системы S векторов, прямо противоположных векторам системы S', была эквивалентна нулю.*

В самом деле, изменяя направление векторов системы S' на противоположное, мы изменим тем самым только направления главного вектора и главного момента этой системы. Проекции на оси главного вектора и главного момента системы S'', которую можно обозначить также $S+(-S')$, будут поэтому:

$$X-X',\ Y-Y',\ Z-Z';\ L-L',\ M-M',\ N-N'.$$

Если эти величины все равны нулю, то $X=X', \ldots,$ т. е. обе системы эквивалентны, и наоборот.

21. Пара векторов. — *Пара есть система, состоящая из двух векторов, равных по величине, параллельных и противоположно ориентированных.* Когда оба вектора пары имеют одну линию действия (прямо противоположны), то система эквивалентна нулю.

Когда пара не эквивалентна нулю, то плоскость двух векторов, составляющих пару, называется *плоскостью пары*; расстояние между линиями действия векторов пары называется *плечом пары.*

Так как главный вектор пары равен нулю, то главный момент ее один и тот же для всех точек пространства (п° **15**). Этот главный момент $\boldsymbol{G}$ называется *осевым моментом пары,* или, короче, *моментом пары.* Он может быть приложен в произвольной точке пространства.

Построим осевой момент пары, выбирая центр моментов на одном из векторов пары. Момент пары приводится тогда к моменту другого вектора. Таким образом, осевой момент пары перпендикулярен к плоскости пары. Его величина равна произведению $P\delta$ величины $\boldsymbol{P}$ одного из векторов на плечо δ пары.

Можно построить бесконечное множество пар, имеющих данный осевой момент $\boldsymbol{G}$. В самом деле, можно по желанию задать плоскость пары, перпендикулярную к $\boldsymbol{G}$, и выбрать произвольно в этой плоскости точки приложения векторов и общее направление их линий действия.

Плечо пары δ определяется этим выбором, а величину P и ориентацию обоих векторов находим после этого, принимая во внимание, что $P\delta = G$ и что силы пары ориентированы в положительную сторону вращения вокруг G.

Две пары, осевые моменты которых геометрически равны, эквивалентны друг другу, так как они имеют один и тот же главный вектор (нуль) и одинаковые главные моменты.

22. Сложение пар. — *Система нескольких пар эквивалентна одной паре, осевой момент которой равен геометрической сумме осевых моментов составляющих пар.*

В самом деле, эта единственная пара имеет тот же главный вектор (нуль), что и система составляющих пар, и ее главный момент такой же, как у этой системы пар, так как главный момент пары совпадает с ее осевым моментом.

23. Параллельный перенос вектора. Пара переноса. — *Не нарушая эквивалентности системы, можно перенести вектор P системы, приложенный в точке A, в другую точку B, при условии, что мы присоединим к системе пару, осевой момент которой равен моменту вектора P относительно точки B.*

В самом деле, система остается эквивалентной самой себе, если мы присоединим к ней два вектора, приложенные в точке B, равные и параллельные P и ориентированные в противоположные стороны, так как мы присоединяем этим самым систему векторов, эквивалентную нулю, что не изменяет ни главного вектора, ни главного момента системы (n°19). Но система трех векторов, полученных таким способом, состоит из вектора P, перенесенного в точку B, и пары с осевым моментом, указанным в условии теоремы. Эта пара, которую нужно присоединить к перенесенному вектору, чтобы восстановить эквивалентность системы самой себе, часто называется *парой переноса*.

В частности, если перенести вектор $\boldsymbol{P}$ в другую точку, лежащую на линии его действия, то пара переноса эквивалентна нулю, и вектор остается эквивалентным самому себе. Таким образом, с точки зрения эквивалентности, векторы можно перемещать вдоль линии их действия. Это свойство выражают, говоря, что, с точки зрения эквивалентности, векторы системы являются *скользящими векторами*.

§ 4. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

24. Определение приведения. Приведение к одному вектору и одной паре. — *Привести систему векторов, значит заменить данную систему другой системой, более простой и эквивалентной первой.*

Выберем произвольно точку O и назовем ее *центром приведения. Произвольную систему векторов S можно привести к одному вектору, приложенному к точке O, и к одной паре: этот вектор равен главному вектору $\boldsymbol{R}$ системы, а осевой момент пары равен главному моменту $\boldsymbol{G}$ системы относительно точки O.*

В самом деле, система, составленная из указанных вектора и пары, имеет в точке O те же самые главный вектор $\boldsymbol{R}$ и главный момент $\boldsymbol{G}$, как и система S: она эквивалентна, таким образом, системе S.

Вектор $\boldsymbol{R}$ не зависит от центра приведения, но момент $\boldsymbol{G}$ пары меняется с изменением центра приведения и притом таким же образом, как главный момент системы (n°15).

Для точек центральной оси системы S главный момент $\boldsymbol{G}$ имеет наименьшую величину и параллелен главному вектору $\boldsymbol{R}$. Поэтому, если взять за центр приведения точку на центральной оси, то осевой момент результирующей пары получит наименьшую величину и будет параллелен главному вектору.

Пара, соответствующая центру приведения O, называется часто *парой переноса*, так как приведение системы также может быть выполнено при помощи правила n° **23**. Каждый вектор системы S можно перенести в точку O, если при этом присоединить соответствующую пару переноса. После этого все векторы, приложенные в точке O, могут быть заменены их результирующей $\boldsymbol{R}$ (n°18), а все пары приводятся к одной *паре переноса* по закону сложения пар (n°22). Этот способ приведения принадлежит Пуансо.

Если вектор $\boldsymbol{R}$ равен нулю, то система приводится к одной паре. Если, кроме того, момент $\boldsymbol{G}$ также равен нулю, то система эквивалентна нулю.

25. Система, эквивалентная одной результирующей. — Когда главный вектор $\boldsymbol{R}$ системы S не равен нулю, то главный момент принимает свое наименьшее значение во всех точках центральной оси, представляющей собой определенную прямую, параллельную $\boldsymbol{R}$ (n°17). Если этот наименьший момент равен нулю, то система приводится к единственному вектору $\boldsymbol{R}$ при условии, что центр приведения взят на центральной оси. В этом случае говорят, что система допускает *одну результирующую*, или *равнодействующую*. Вектор $\boldsymbol{R}$, приложенный в точках центральной оси, представляет собой *результирующую* системы S, эквивалентную всей системе.

Чтобы наименьший момент был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы главный момент $\boldsymbol{G}$ был перпендикулярен к главному вектору $\boldsymbol{R}$ для произвольного центра приведения (n°17).

Чтобы выразить это условие в аналитической форме, за центр приведения берут начало координат; тогда имеем известное соотношение:

$$LX + MY + NZ = 0.$$

26. Приведение системы к двум векторам. — *Система векторов может быть приведена бесконечным множеством способов к двум векторам, один из которых проходит через произвольно данную точку.*

Пусть O — данная точка. Выберем ее за центр приведения. Тогда система приводится к вектору $\boldsymbol{R}$, приложенному в O, и к паре с осевым моментом $\boldsymbol{G}$. Проведем через O плоскость, перпендикулярную к $\boldsymbol{G}$, и выберем произвольно в этой плоскости точку O'. Пару $\boldsymbol{G}$ можно представить двумя подходящими векторами $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}'$, приложенными в точках O и O' (n°21). Векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$ приводятся к их результирующей $(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})$, приложенной в O, после чего остается еще вектор $\boldsymbol{Q}'$, приложенный в O'.

27. Теорема. — *Система векторов эквивалентна нулю, если равны нулю ее главные моменты относительно трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой.*

В самом деле, возьмем точку A за центр приведения; система приводится к своему главному вектору $\boldsymbol{R}$, приложенному в A, и к паре с осевым моментом $\boldsymbol{G}$. Главный момент системы относительно A равен $\boldsymbol{G}$, но, по условию, $\boldsymbol{G}$ равен нулю. Следовательно, главные моменты относительно точек B и C приводятся к моментам относительно этих точек вектора $\boldsymbol{R}$. Эти последние моменты равны нулю по условию, поэтому $\boldsymbol{R}$ тоже должен быть равен нулю, ибо в противном случае вектор $\boldsymbol{R}$, приложенный в точке A, должен был бы проходить одновременно через точки B и C, что противоречит условию.

Следствие. — *Система векторов эквивалентна нулю, если равны нулю ее главные моменты относительно шести ребер тетраэдра.*

Действительно, главный момент системы относительно каждой из четырех вершин тетраэдра должен быть равен нулю, так как его проекции на три ребра, сходящиеся в этой вершине, равны нулю. Этот случай приводится, таким образом, к предыдущему.

Вспомним, что условие эквивалентности двух систем S и S' заключается в том, что система $S+(-S')$, образованная из векторов системы S и векторов системы S', взятых с обратными знаками, должна быть эквивалентна нулю; мы можем поэтому высказать следующую теорему, равносильную двум предшествующим:

Теорема. — *Две системы векторов S и S' эквивалентны, если они имеют соответственно равные главные* *моменты относительно трех точек, не лежащих на одной прямой, или относительно шести ребер произвольного тетраэдра.*

28. Элементарные операции. — Будем называть *элементарными операциями* следующие три операции:

1°. Приведение нескольких сходящихся векторов к их результирующему вектору и разложение вектора на его составляющие.

2°. Присоединение или отбрасывание двух векторов, равных между собой и прямо противоположных.

3°. Перенесение вектора в произвольную точку его линии действия (скольжение вектора).

Третья операция сводится к двукратному применению второй. Она не имеет поэтому самостоятельного значения и могла бы быть исключена из общего числа элементарных операций.

Мы уже видели, что эти операции допустимы с точки зрения эквивалентности, т. е. что они преобразуют систему в другую, эквивалентную ей ($n^\circ 18$ и **23**). Мы установим теперь, что имеет место обратное: две эквивалентные системы могут быть приведены одна к другой последовательным применением одних только элементарных операций. С этой целью мы докажем следующую предварительную теорему:

Теорема. — *Система, эквивалентная нулю, может быть приведена к нулю при помощи элементарных операций.*

Пусть S есть система, эквивалентная нулю. Проведем плоскость, не содержащую точек приложения векторов системы (что, очевидно, возможно), и возьмем в этой плоскости три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Приведем сначала систему к трем векторам, приложенным соответственно в этих трех точках.

Вектор V_k системы, приложенный в точке O, может быть заменен тремя его составляющими, по осям OA, OB и OC, не лежащим в одной плоскости. Далее, можно переместить эти составляющие вдоль осей до точек A, B, C.

В результате вектор V_k заменен тремя векторами, приложенными соответственно в точках A, B и C. Так поступают со всеми векторами системы S. После того как это сделано, складывают отдельно векторы, приложенные в каждой из трех точек. Итак, первоначальная система оказывается приведенной к трем векторам $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, приложенным соответственно в точках A, B и C, причем она попрежнему эквивалентна нулю.

Вектор $\boldsymbol{R}$ (если он не равен нулю) лежит в плоскости A, B и C, так как главный момент системы относительно прямой AB должен быть равен нулю. В самом деле, этот момент приводится к моменту вектора $\boldsymbol{R}$, и из равенства его нулю необходимо следует, что $\boldsymbol{R}$ действительно лежит в одной плоскости с прямой AB. Поэтому $\boldsymbol{R}$ можно разложить на *две* составляющие по направлениям CA и CB и переместить их в точки A и B, чтобы сложить затем соответственно с векторами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. В результате останутся два вектора, приложенные в точках A и B и образующие попрежнему систему, эквивалентную нулю; эти векторы должны быть, следовательно, равны и прямо противоположны (n° 19). Их можно отбросить, применяя вторую элементарную операцию. Система, таким образом, оказывается приведенной к нулю.

Приведение двух эквивалентных систем друг к другу. — *Две эквивалентные системы S и S' всегда могут быть приведены одна к другой при помощи элементарных операций.*

Чтобы выполнить это преобразование, присоединим к S все векторы систем S' и $-S'$ (обозначая через $-S'$ систему векторов, прямо противоположных векторам системы S'). При этом нам придется лишь несколько раз применить вторую из элементарных операций. Совокупность векторов S и $-S'$ эквивалентна нулю (n°20); поэтому ее можно привести к нулю при помощи элементарных операций. В результате остается только система S', и требуемое приведение, таким образом, выполнено.

§ 5. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ

29. Приложение общих теорем. Определение центральной оси. — Если все векторы системы параллельны, то их главный вектор R параллелен общему направлению векторов или равен нулю. С другой стороны, моменты различных векторов относительно точки O перпендикулярны к этому общему направлению, и потому главный момент G системы тоже перпендикулярен к этому направлению. Итак, если R не равен нулю, то G и R перпендикулярны между собой: система допускает, таким образом, одну результирующую, или просто результирующую, приложенную в какой-нибудь точке центральной оси (n°26). Если бы главный вектор R был равен нулю, то система приводилась бы к одной паре или нулю, но не могла бы быть приведена к одному вектору.

Предположим, что главный вектор R отличен от нуля. В этом случае система эквивалентна своей результирующей, приложенной в одной из точек центральной оси. Мы определим эту ось как геометрическое место точек, в которых нужно приложить результирующую, чтобы она была эквивалентна всей системе.

Зададим три взаимно перпендикулярные оси $Oxyz$, и пусть α, β, γ — направляющие косинусы одного из векторов системы, взятого произвольно. Обозначим через P_1, $P_2, \ldots, P_n$ алгебраические значения векторов V_1, $V_2, \ldots, V_n$ системы, считая их положительными при ориентации в сторону α, β, γ и отрицательными в противном случае. Каков бы ни был знак P_k, проекции X_k, Y_k, Z_k соответствующего вектора на оси будут:

$$X_k = \alpha P_k, \quad Y_k = \beta P_k, \quad Z_k = \gamma P_k.$$

Если мы обозначим через x_k, y_k, z_k координаты точки приложения вектора V_k, то моменты V_k относительно осей будут иметь значения:

$$L_k = y_k Z_k - z_k Y_k = P_k(\gamma y_k - \beta z_k); \quad M_k = P_k(\alpha z_k - \gamma x_k)$$

$$N_k = P_k(\beta x_k - \alpha y_k).$$

Пусть теперь будут: R — алгебраическая величина результирующей; x, y, z — координаты ее точки приложения; L, M, N — ее моменты относительно осей. Тогда имеем:

$$R = \sum P_k,\ L = R(\gamma y - \beta z),\ M = R(\alpha z - \gamma x),$$
$$N = R(\beta x - \alpha y).$$

Задача заключается в том, чтобы найти точки (x, y, z), где следует приложить результирующую $\boldsymbol{R}$. С этой целью заметим, что система векторов $\boldsymbol{V}$, с одной стороны, и вектор $\boldsymbol{R}$, с другой, должны иметь одинаковые моменты относительно трех осей. Это условие дает три уравнения:

$$\sum L_k = L, \sum M_k = M, \sum N_k = N.$$

Заменяя в первом уравнении L_k и L их значениями, полученными выше, будем иметь:

$$\gamma[\sum P_k y_k - Ry] - \beta[\sum P_k z_k - Rz] = 0.$$

Два других аналогичных уравнения получим в результате круговой перестановки букв. Таким образом, мы приходим к уравнениям:

$$\frac{\Sigma P_k x_k - Rx}{\alpha} = \frac{\Sigma P_k y_k - Ry}{\beta} = \frac{\Sigma P_k z_k - Rz}{\gamma}.$$

Эти два уравнения, которым должны удовлетворять координаты x, y, z точки приложения результирующей, суть уравнения прямой с направлением α, β, γ; эта прямая и есть *центральная ось*.

30. Центр системы параллельных векторов. — Каковы бы ни были величины α, β, γ, центральная ось проходит через точку x, y, z, определяемую уравнениями:

$$Rx = \sum P_k x_k,\ Ry = \sum P_k y_k,\ Rz = \sum P_k z_k. \qquad (1)$$

Таким образом, эта точка занимает вполне определенное положение, каково бы ни было общее направление векторов, лишь бы эти векторы сохраняли те же самые точки приложения и те же самые величины (впрочем, относительные). Поэтому, если поворачивать векторы вокруг их точек приложения, сохраняя, конечно, их параллельность, то линия действия результирующей все время будет проходить через определенную точку, и саму результирующую всегда можно приложить к этой точке. Вот почему эта особенная точка называется *центром параллельных векторов*. Обычно условливаются рассматривать ее в более узком смысле как точку приложения результирующей.

31. Моменты относительно плоскости. — Рассмотрим систему параллельных векторов, положительных и отрицательных, соответственно тому, направлены они в одну или другую сторону. *Моментом вектора относительно плоскости* называется произведение алгебраической величины вектора на расстояние от его точки приложения до плоскости; при этом расстояние считается положительным с одной стороны плоскости и отрицательным — с другой.

Если ввести такое определение, то три уравнения (1) (n° 30), определяющие центр параллельных векторов, вследствие произвольного выбора осей, будут выражать следующую теорему:

Если результирующая системы параллельных векторов (предполагаемая отличной от нуля) приложена в центре параллельных векторов, то момент ее относительно какой-нибудь плоскости равен сумме моментов составляющих относительно той же плоскости.

Для этой теоремы существенное значение имеет предположение, что геометрическая сумма R параллельных векторов отлична от нуля. Если бы вектор R был равен нулю, то центр параллельных векторов, определенный формулами предшествующего n°, удалился бы в бесконечность. Легко видеть, что центр параллельных векторов вполне определяется применением предыдущей теоремы по отношению к трем плоскостям какого-нибудь триэдра, безразлично, будут ли эти плоскости взаимно перпендикулярны или наклонны друг к другу.

Теорема остается справедливой и в том случае, когда расстояние точки от плоскости, вместо того чтобы отсчитываться по нормали, отсчитывается по наклонной к плоскости, лишь бы эта наклонная оставалась параллельной определенному направлению, так как эти два расстояния (отсчитанные по нормали и по наклонной) находятся между собой в постоянном отношении. Отсюда следует, что *формулы (1) предшествующего* n°, *определяющие центр параллельных векторов, сохраняют силу и для косоугольных осей.*

Едва ли необходимо обращать внимание читателя на то, что центр параллельных векторов определен при помощи свойств, не зависящих от выбора осей координат. Следовательно, положение точки с координатами x, y, z, определяемой формулами (1) предшествующего n°, не зависит от рассматриваемой системы осей, прямоугольных или косоугольных.

§ 6. ВЕКТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

32. **Производная вектора.** — Пусть $V(t)$ есть вектор, проекции которого на оси $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ представляют собой непрерывные и дифференцируемые функции от t, и который, следовательно, сам есть функция от t. Если дать t приращение Δt, то вектор V получит геометрическое приращение

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t),$$

т. е. вектор, имеющий проекциями на оси $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. Если Δt стремится к нулю, то отношение $\Delta V : \Delta t$ стремится к предельному вектору, имеющему проекции

$$\frac{dX}{dt}, \quad \frac{dY}{dt} \text{ и } \frac{dZ}{dt}.$$

Этот предельный вектор называется *геометрической производной вектора* $V(t)$ и обозначается через

$$\frac{dV}{dt}.$$

Обычные правила *дифференцирования суммы* и *произведения* применимы и к векторному дифференцированию, так как они применимы к проекциям суммы и векторного произведения на оси координат. Имеем поэтому:

$$\frac{d(V_1+V_2+\ldots)}{dt}=\frac{dV_1}{dt}+\frac{dV_2}{dt}+\ldots$$

$$\frac{d[V_1V_2]}{dt}=\left[V_1\frac{dV_2}{dt}\right]+\left[\frac{dV_1}{dt}V_2\right].$$

При дифференцировании векторного произведения необходимо сохранять порядок множителей.

33. Интегрирование. — Пусть $V(t)$ есть непрерывная функция от t в интервале (t_1, T), и пусть $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ — ее проекции на оси. Разложим интервал (t_1, T) на n последовательных интервалов точками $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}=T$ и составим геометрическую сумму, распространенную на все индексы $k=1,2,\ldots, n$:

$$\sum V(t_k)\,(t_{k+1}-t_k).$$

Эта сумма стремится к определенному предельному вектору, когда последовательные значения t_k неограниченно приближаются друг к другу, и этот предельный вектор обозначается векторным интегралом

$$\int_{t_1}^{T} V(t)\,dt.$$

Действительно, это вполне определенный вектор, так как его проекции на оси представляют собой пределы проекций указанной выше суммы, т. е. интегралы

$$\int_{t_1}^{T} X(t)\,dt,\quad \int_{t_1}^{T} Y(t)\,dt,\quad \int_{t_1}^{T} Z(t)\,dt.$$

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. ДВИЖЕНИЕ. СКОРОСТЬ. УСКОРЕНИЕ

34. **Движение**. — Говорят, что твердое тело движется относительно другого твердого тела, если расстояния между точками обоих тел изменяются. Таким образом, движение в его геометрическом представлении имеет чисто относительный характер. Но если мы выберем определенное твердое тело, т. е. систему неизменяемой формы, в качестве системы отсчета, то можно условиться рассматривать эту систему как неподвижную, и тогда движения других тел, определенные по отношению к ней, могут быть условно названы *абсолютными движениями*. В качестве такого твердого тела выбирают обычно систему трех осей (чаще всего прямоугольных), называемую *триэдром отсчета*.

В чистой кинематике выбор триэдра отсчета произволен, в физической же механике дело обстоит иначе. Когда хотят выразить законы динамики в наиболее простой, удобной и естественной форме, считают абсолютно неподвижным определенный триэдр, ориентированный неизменным образом относительно неподвижных звезд.

Задача кинематики заключается в изучении движения самого по себе, независимо от причин, которые его вызывают. В этой части механики в числе основных понятий содержится лишь одно понятие, чуждое геометрии, — понятие *времени*.

35. **Время**. — Последовательность сменяющих друг друга явлений порождает в нас идею *времени*, однако само по-

нятие времени не поддается определению. Когда точка в своем движении переходит из одного положения в другое, это явление имеет известную *длительность*, совершается в течение некоторого *промежутка времени*. Каждое из своих промежуточных положений точка занимает в определенный *момент* времени, и этот момент определяется соответствующим положением точки. В частности, крайние моменты времени, т. е. начальный и конечный моменты промежутка времени, соответствуют начальному и конечному положению движущейся точки. Если начальный момент и соответствующее ему начальное положение точки фиксированы, а конечный момент меняется вместе с конечным положением точки, то величина промежутка времени меняется, и мера этого промежутка (которую мы далее определим) есть переменная t. Эту переменную величину t называют в механике *временем*. Конечный момент промежутка времени, о котором мы только что говорили, определяется значением переменной t и называется *моментом времени* t, подобно тому как точка на оси определяется своей абсциссой x и называется точкой x. В механике почти всегда в качестве независимой переменной выбирают переменную t и рассматривают ее как величину, постоянно возрастающую.

Принципиально, всякая точка, которая движется не останавливаясь, может служить для измерения времени: равенство промежутков времени определяется равенством путей, пройденных за эти промежутки выбранной точкой. Изложение кинематики совершенно не зависит от этого выбора.

В действительности, когда дело идет о приложении механики к явлениям природы, время измеряют при помощи часов, которые показывают среднее время, определяемое в космографии. Равными промежутками времени при этом считаются такие промежутки, в течение которых Земля поворачивается на один и тот же угол относительно неподвижных звезд. *За единицу времени* принимают секунду среднего солнечного времени, или 1/86400 часть средних солнечных суток, определяемых астрономическими наблюдениями.

В кинематике необходимо также выбрать *единицу длины*, например, метр или сантиметр, после чего единицы измерения других кинематических величин, таких как скорость и ускорение, о которых речь будет итти далее, определяются при помощи единиц длины и времени.

Другое основное понятие, связанное с временем, есть понятие *одновременности* событий. Две материальные точки движутся *одновременно*, если они перемещаются в течение одного и того же промежутка времени. Понятие одновременности распространяется и на самые моменты времени: положения, которые две различные движущиеся точки занимают в один и тот же момент времени, называют *одновременными*.

В классической механике допускают, что это соответствие имеет абсолютный характер и, следовательно, не зависит от наблюдателя и условий опыта. Определение одновременности событий, происходящих в различных местах, вызывает трудности *физического порядка*, которые здесь не будут рассматриваться. Этот вопрос является одной из основных проблем теории относительности.

36. Траектория точки. Конечные уравнения движения. — Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *траекторией*. Смотря по тому, представляет ли эта линия прямую или кривую (в частности, окружность), траектория будет *прямолинейной* или *криволинейной* (в частности, *круговой*).

Предположим, что движение отнесено к трем неподвижным осям $Oxyz$ (прямоугольным или косоугольным); движение точки определено аналитически, если заданы три ее координаты x, y, z как функции времени t. Три уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi_1(t), \quad z = \varphi_2(t)$$

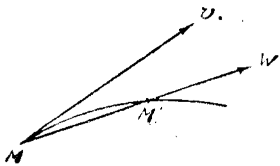
называются *конечными уравнениями* движения. Они дают положение движущейся точки в каждый момент времени t и представляют собой уравнения траектории в параметрической форме.

Когда траектория известна заранее, движение точки по траектории может быть определено одним уравнением. В самом деле, положение движущейся точки определяется в этом случае алгебраическим значением s длины дуги M_0M, соединяющей точку M с ее начальным положением на траектории; при этом длина дуги считается положительной в одном направлении и отрицательной в другом. Движение, таким образом, будет вполне определено, если задать s как функцию от t. Единственное уравнение движения будет в этом случае

$$s = f(t).$$

Замечание. — Во всем последующем изложении различные введенные в этом n° функции от t будут предполагаться непрерывными и имеющими непрерывные производные двух первых порядков.

37. Перемещение. Геометрическая скорость. — Если движущаяся точка занимает последовательно два положения M и M' (фиг. 4) соответственно в моменты t и $t+\Delta t$, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ называется перемещением точки за промежуток времени Δt. Этот вектор представляет хорду траектории, описываемой движущейся точкой, причем следует остерегаться смешивать перемещение с дугой траектории.



Фиг. 4.

Если перемещение $\overrightarrow{MM'}$ разделить на Δt, то частное

$$\overrightarrow{MW} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

будет новым вектором, который называется *средней геометрической скоростью* точки за промежуток времени Δt. Средняя геометрическая скорость направлена, таким образом, по той же прямой и ориентирована в ту же сторону, что и перемещение.

Геометрической скоростью точки M в момент времени t называют предел средней скорости, когда Δt стремится к нулю. Этот вектор обозначают v; следовательно, имеем по определению:

$$v = \lim \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}.$$

В пределе хорда MM' совпадает с касательной к траектории; поэтому *геометрическая скорость* точки M представляет собой вектор $\overrightarrow{MV}$, приложенный в точке M и направленный по касательной к траектории с ориентацией в сторону движения. В тех случаях, когда не будет поводов к различным толкованиям, мы будем обозначать геометрическую скорость одним словом *скорость*.

Пусть $\mathbf{M}$ есть векторная координата движущейся точки M, когда в качестве полюса взята неподвижная точка O, т. е. вектор $\overrightarrow{OM}$ (n°1). Перемещение $\overrightarrow{MM'}$ за промежуток времени Δt равно геометрическому приращению $\Delta \mathbf{M}$ вектора $\mathbf{M}$; отношение $\Delta \mathbf{M} : \Delta t$ есть средняя геометрическая скорость; ее предел, когда Δt стремится к нулю, есть *геометрическая производная* вектора $\mathbf{M}$ по t; мы имеем:

$$v = \frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

Таким образом, *геометрическая скорость движущейся точки равна геометрической производной от ее векторной координаты по времени*. Это есть вектор, связанный с движущейся точкой.

38. Проекции геометрической скорости на оси координат. Алгебраическая скорость. — Пусть x, y, z — координаты точки M (рассмотренной еще в предшествующем n°) относительно трех неподвижных осей $Oxyz$, которые могут быть прямоугольными или косоугольными; пусть, далее, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ — координаты точки M'. Проекции (прямоугольные или косоугольные) вектора $\overrightarrow{MM'}$

на оси соответственно равны Δx, Δy, Δz; проекции средней скорости суть

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t};$$

поэтому проекции геометрической скорости $\boldsymbol{v}$ будут равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Отсюда следует основная теорема:

Теорема. — *Алгебраические значения проекций (прямоугольных или косоугольных) геометрической скорости точки на оси (прямоугольные или косоугольные) равны производным от координат движущейся точки по времени.*

На основании указанных формул, в случае прямоугольных осей, величина скорости равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}.$$

Обозначим через s длину дуги траектории, отсчитываемой (с соответствующим знаком) от неподвижной точки M_0 на траектории. В дифференциальном исчислении доказывается, что в случае прямоугольных осей имеет место равенство

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Следовательно, будем иметь

$$v = \pm \frac{ds}{dt},$$

независимо от выбранной системы координат, так как длина дуги s полностью определяется самой кривой.

Мы условимся, однако, приписывать скорости v *алгебраическое значение* (положительное или отрицательное) и будем поэтому во всех случаях определять *алгебраическую скорость* v формулой

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Когда dt положительно, ориентация $\mathbf{ds}$ совпадает с ориентацией $\mathbf{v}$, и потому в полученной формуле v имеет тот же знак, что и ds. Это условие сводится, таким образом, к тому, чтобы считать алгебраическую скорость положительной в направлении возрастающих дуг и отрицательной в противоположном направлении.

Если обозначим через Δs дугу (положительную или отрицательную), описываемую за время Δt, то отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

называется *средней алгебраической скоростью* точки за промежуток времени Δt; когда Δt стремится к нулю, это отношение стремится к $\frac{ds}{dt}$, или к v. Таким образом, алгебраическая скорость есть предел средней алгебраической скорости, когда рассматриваемый промежуток времени стремится к нулю.

39. Определение вектора $\mathbf{ds}$. — Будем называть *вектором* $\mathbf{ds}$ вектор, приложенный в точке M и имеющий проекции на оси, соответственно равные dx, dy, dz.

Геометрическая скорость $\mathbf{v}$ равна геометрическому частному от деления вектора $\mathbf{ds}$ на dt,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{ds}}{dt},$$

так как проекции этого частного на оси равны

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

т. е. проекциям (v_x, v_y, v_z) вектора $\mathbf{v}$.

Вектор $\boldsymbol{ds}$ имеет те же направление и ориентацию, что и вектор $\boldsymbol{v}$, если dt положительно. Он совпадает поэтому с касательной к траектории и ориентирован в сторону движения точки. Его модуль равен величине произведения $v\,dt$.

40. Равномерное движение; переменное движение. — *Движение называется равномерным, если величина скорости постоянна.* В этом случае имеем:

$$\frac{ds}{dt} = \text{const} = a .$$

Пусть s_0 есть значение s для $t = 0$ (начальное значение); интегрируя это уравнение, получим:

$$s = s_0 + at.$$

Следовательно, в равномерном движении пройденные пути пропорциональны времени, и величина $|a|$ скорости равна пути $|s - s_0|$, пройденному в единицу времени.

Движение, не являющееся равномерным, называется *переменным*, или *неравномерным*. Оно будет *ускоренным* или *замедленным*, смотря по тому, будет ли абсолютная величина скорости возрастать или убывать.

Движение называется *равномерно переменным*, если алгебраическая скорость изменяется пропорционально времени. В этом случае будем иметь, обозначая через v_0 начальную скорость (для $t = 0$):

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + at.$$

Отсюда получим, интегрируя:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} .$$

Если начальная скорость равна нулю, пройденный путь изменяется пропорционально квадрату времени.

41. Прямолинейное движение. Теорема о проекции скорости. — Если движение прямолинейное, то можно взять траекторию за ось x. В этом случае имеем $s = x$, и конечное уравнение движения принимает вид:

$$x = f(t).$$

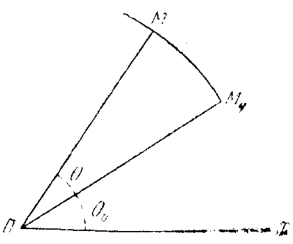
Алгебраическая скорость определяется формулой

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t).$$

Выражение $dx:dt$ скорости точки, движущейся по оси x, приводит к важной теореме. Когда точка движется в пространстве, $dx:dt$ есть проекция ее скорости на ось x; в то же время эта величина равна алгебраическому значению скорости проекции M_1 точки M на ось x, так как точка M_1 имеет абсциссою x. Если ось x взята произвольно, то мы приходим к следующей теореме:

Если спроектировать на ось движущуюся точку и ее скорость, то проекция этой скорости равна скорости проекции точки.

42. Круговое движение. — Пусть точка M описывает окружность радиуса r вокруг точки O (фиг. 5). Положение движущейся точки определяется углом θ, который подвижной радиус OM составляет с неподвижной прямой Ox; этот угол измеряется длиной дуги, вырезаемой им на окружности единичного радиуса. Предположим, что дуга s отсчитывается от точки M_0, где θ равно θ_0. Так как дуги пропорциональны радиусам, то будем иметь, если s и θ отсчитываются в одну и ту же сторону:



Фиг. 5.

$$s = r\,(\theta - \theta_0), \quad ds = r\,d\theta.$$

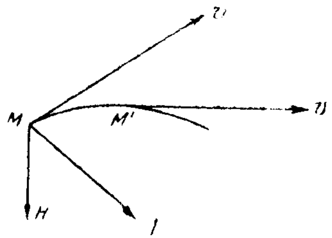
Тогда значение алгебраической скорости будет

$$v = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}.$$

43. Индекс и годограф движущейся точки. — *Индексом* движущейся точки M называют конец I вектора $\overrightarrow{OI}$, геометрически равного вектору скорости v точки M и имеющего начало в неподвижном полюсе O. В качестве полюса индекса чаще всего выбирают начало координат. Если движение точки отлично от прямолинейного и равномерного, то ее индекс перемещается с течением времени и описывает некоторую кривую, называемую *годографом* точки M.

44. Ускорение. Проекции ускорения. — Определение. Пусть v и v' будут геометрические скорости движущейся точки, которая занимает положения M и M' в моменты t и $t+\Delta t$ (фиг. 6). Отложим от точки M вектор $\overrightarrow{MH}$, равный геометрической разности $v'-v$, или Δv. Геометрическое отношение

$$\frac{\overrightarrow{MH}}{\Delta t}=\frac{\Delta v}{\Delta t},$$



Фиг. 6.

с теми же направлением и ориентацией, что и вектор $\overrightarrow{MH}$, называется *средним ускорением* точки за промежуток времени Δt. Предел среднего ускорения, когда Δt стремится к нулю, есть вектор j, приложенный в точке M и называемый *ускорением* движущейся точки в момент t. Отсюда следует, что j есть геометрическая производная от v по t, т. е.

$$j=\frac{dv}{dt}.$$

Если принять во внимание, что v есть векторная координата индекса точки M, то имеем следующую теорему:

Ускорение точки M в момент t геометрически равно скорости индекса точки.

Алгебраические значения проекций ускорения j на оси координат выводятся непосредственно из предыдущей теоремы. В самом деле, координаты индекса I суть v_x, v_y, v_z; проекции ускорения точки M (геометрической скорости точки I) равны производным от этих координат по времени (n° 38). Пусть j_x, j_y, j_z — проекции ускорения; тогда будем иметь

$$j_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Отсюда вытекает следующая основная теорема:

Теорема. — *Алгебраические значения проекций ускорения движущейся точки на оси координат равны вторым производным от координат точки по времени.*

Известно из геометрии, что соприкасающаяся плоскость в точке M траектории есть предельное положение плоскости, проходящей через касательную в точке M (а потому и через скорость v в этой точке) и через прямую, параллельную касательной в бесконечно близкой точке M' (а потому параллельную скорости v'). Эта плоскость содержит геометрическую разность Δv, отложенную от точки M. Так как направление ускорения является предельным для направления Δv, то *ускорение лежит в соприкасающейся плоскости к траектории.*

Мы вновь придем к тому же заключению в следующем n°, где будет показано, что ускорение может быть разложено на два вектора, лежащие в соприкасающейся плоскости и направленные соответственно по касательной и главной нормали к траектории.

45. Касательное и нормальное ускорения. — Пусть α, β, γ — направляющие косинусы касательной к траектории в точке M, проведенной в сторону возрастающих дуг. Тогда будем иметь, каков бы ни был знак алгебраической скорости v (так как v положительна, когда вектор скорости ориентирован в сторону возрастающих дуг):

$$v_x = v\alpha, \quad v_y = v\beta, \quad v_z = v\gamma.$$

Дифференцируя эти формулы по t, получим уравнения:

$$j_x = \frac{dv_x}{dt} = \alpha \frac{dv}{dt} + v \frac{d\alpha}{dt},$$

$$j_y = \frac{dv_y}{dt} = \beta \frac{dv}{dt} + v \frac{d\beta}{dt},$$

$$j_z = \frac{dv_z}{dt} = \gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt}.$$

Пусть R есть радиус кривизны, и λ, μ, ν — направляющие косинусы главной нормали к траектории. По формулам Френэ (которые доказываются в курсе анализа бесконечно малых) имеем:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{R}.$$

Выполним подстановки:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda}{R} v, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu}{R} v, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\nu}{R} v$$

тогда получим:

$$j_x = \alpha \frac{dv}{dt} + \lambda \frac{v^2}{R},$$

$$j_y = \beta \frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R},$$

$$j_z = \gamma \frac{dv}{dt} + \nu \frac{v^2}{R}.$$

Возьмем ось x по касательной, ось y по главной нормали и ось z по бинормали к траектории; при этом выборе осей $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$; $\mu = 1$, $\lambda = \nu = 0$.

Обозначим через j_t, j_n, j_b алгебраические значения проекций ускорения на три указанные направления, так что $j_t = j_x$, $j_n = j_y$, $j_b = j_z$. Тогда получим:

$$j_t = \frac{dv}{dt}, \quad j_n = \frac{v^2}{R}, \quad j_b = 0.$$

Таковы алгебраические значения составляющих ускорения по трем главным направлениям. Последняя составляющая j_b равна нулю, а потому, как мы это уже видели, ускорение лежит в соприкасающейся плоскости к траектории.

Касательная составляющая ускорения называется *касательным*, или *тангенциальным* ускорением. Ее алгебраическое значение, $j_t = \frac{dv}{dt}$, положительно или отрицательно, смотря по тому, возрастает или убывает алгебраическая скорость.

Тангенциальное ускорение, смотря по обстоятельствам, будет ориентировано в сторону возрастающих дуг (в положительную сторону на касательной) или в противоположную сторону.

Составляющая по главной нормали называется *нормальным ускорением*. Ее алгебраическое значение $v^2:R$ всегда положительно. Поэтому она всегда ориентирована в положительную сторону по главной нормали, т. е. в сторону вогнутости траектории и, следовательно, к ее центру кривизны. Вследствие этого нормальное ускорение называют также *центростремительным* ускорением.

Рассмотрим, например, круговое равномерное движение точки. В этом случае v и R — постоянные величины. Тангенциальное ускорение равно нулю, а нормальное ускорение, направленное к центру круга, имеет постоянную величину $v^2:R$.

Движение, в котором нормальное ускорение постоянно равно нулю, может быть только прямолинейным, так как в этом случае $1:R$ обращается в нуль, т. е. кривизна траектории постоянно равна нулю, что может иметь место только для прямой линии.

§ 2. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

46. Абсолютное движение; относительное движение; переносное движение. — Предположим, что система осей, к которой отнесено движение точки, не рассматривается более как неподвижная, но сама движется относительно другой системы, принимаемой за неподвижную. *Относительным движением* точки называется движение ее относительно подвижной системы осей. Это движение представляет собой то *кажущееся движение*, которое видит наблюдатель, когда он перемещается вместе с подвижной системой. *Абсолютным движением* точки называется движение ее относительно неподвижных осей. Наконец, *переносным движением* точки в данный момент называют то движение, которое эта точка имела бы, если бы в этот момент она была неизменно связана с подвижной системой осей и, следовательно, перемещалась бы вместе с этой системой. Абсолютное движение называется еще *результирующим движением*, а два других — *составляющими движениями*.

Траектория, скорость, ускорение и т. д. называются *абсолютными*, *относительными* или *переносными*, смотря по тому, относятся ли они к движению абсолютному, относительному или переносному.

47. Теорема сложения скоростей. — *Абсолютная скорость движущейся точки в каждый момент времени равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.*

Пусть $Oxyz$ есть система неподвижных осей, $O'x'y'z'$ — система подвижных осей. Относительные координаты x', y', z' движущейся точки и ее абсолютные координаты x, y, z связаны в каждый момент t формулами преобразования координат. Эти формулы представляют собой линейные соотношения, первое из которых имеет вид:

$$x = x_0 + ax' + by' + cz'.$$

Координаты x, y, z и x', y', z' суть функции времени t; коэффициенты преобразования x_0, a, b, c — также функции t, но они зависят только от положения подвижных осей. Чтобы получить проекцию v_x вектора абсолютной скорости $\boldsymbol{v}$ на неподвижную ось x, нужно продифференцировать значение x по t. Таким способом находим:

$$v_x = a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt} + c\frac{dz'}{dt} + \\ + \frac{dx_0}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt}.$$

В правой части этого равенства мы написали слагаемые в двух строках: первая из них представляет величину, в которую обратилась бы v_x, если бы x_0, a, b, c были постоянны, т. е. если бы система $O'x'y'z'$ была неподвижна; следовательно, эта строка представляет собой проекцию v_x' относительной скорости v' на неподвижную ось x. Вторая строка есть то, во что обратилась бы v_x, если бы x', y', z' были постоянны, т. е. если бы точка M была неподвижна в подвижной системе осей; так что эта строка представляет проекцию v_x'' на ось x переносной скорости v''. Предшествующее уравнение приводится, таким образом, к первому из написанных ниже уравнений (два других получаются по аналогии)

$$v_x = v_x' + v_x'', \quad v_y = v_y' + v_y'', \quad v_z = v_z' + v_z''.$$

Система этих трех алгебраических уравнений эквивалентна одному геометрическому равенству

$$v = v' + v'',$$

что и доказывает теорему.

Обратно, из предшествующего соотношения получаем:

$$v' = v - v''.$$

Таким образом, *относительная* (*геометрическая*) *скорость равна геометрической разности абсолютной и переносной скоростей*.

Другое доказательство. — Теорему сложения скоростей можно также вывести при помощи *сложения перемещений*. Обозначим через S неподвижную систему и через S_1 подвижную систему отсчета. Рассмотрим *абсолютное перемещение* $\overrightarrow{MM'}$ движущейся точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. В течение этого времени подвижная система S_1 переходит из начального положения S_1 в конечное положение S_1'. Перемещение $\overrightarrow{MM'}$ точки M можно осуществить двумя последовательными перемещениями: сначала переводят систему S_1 в S_1', не меняя положения в ней точки M, что переводит M в M_1, где $\overrightarrow{MM_1}$ есть *переносное перемещение;* потом, оставляя систему S_1 в ее конечном положении S_1', переводят точку M из M_1 в M' по ее относительной траектории. Перемещение $\overrightarrow{M_1M'}$ есть ***относительное перемещение*** точки в системе S_1 (остановленной в ее конечном положении). Абсолютное перемещение есть геометрическая сумма определенных таким образом перемещений, переносного и относительного.

Отсюда имеем геометрическое равенство:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}.$$

Если разделим это равенство на Δt и заставим Δt стремиться к нулю, то получим:

$$\boldsymbol{v} = \lim \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{v}' = \lim \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{v}'' = \lim \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t}$$

и, следовательно,

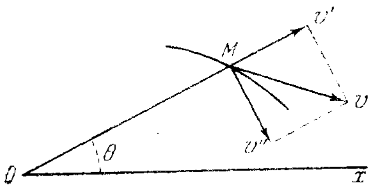
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''.$$

48. Радиальная скорость точки. — Пусть O есть неподвижный полюс и M — движущаяся точка, которая описывает какую-нибудь траекторию (плоскую или пространственную). Проведем радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Движение точки M можно рассматривать как абсолютное движение, результирующее двух составляющих движений: движения относительного вдоль прямой OM и движения переносного, вызванного вращением этой прямой вокруг полюса. Относительная скорость $\boldsymbol{v}'$ точки есть ее скорость в прямолинейном движении, она направлена по радиусу-вектору, и ее алгебраическое значение есть $\frac{dr}{dt}$ (n°41); эту скорость называют *радиальной скоростью* точки.

Переносная скорость перпендикулярна к радиусу-вектору, так как точка, связанная с прямой OM, движется по сфере с центром в O. Эта вторая составляющая абсолютной скорости перпендикулярна к первой; следовательно, первая составляющая есть проекция абсолютной скорости на радиус-вектор. Отсюда имеем следующую теорему, которая часто оказывается полезной.

Радиальная скорость точки равна проекции ее геометрической скорости на радиус-вектор.

Если траектория есть плоская кривая, то полюс O можно поместить в ее плоскости. Тогда положение радиуса-вектора определяется углом θ, который он составляет с неподвижной осью OX (фиг. 7). Переносное движение круговое, и переносная алгебраическая скорость v'' равна $r\dfrac{d\theta}{dt}$. Эта переносная скорость, перпендикулярная к радиусу, получила название *трансверсальной скорости*. Абсолютная геометрическая скорость точки есть результирующая скоростей и радиальной и трансверсальной. Ее величина равна



Фиг. 7.

$$v=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

Умножая это значение v на Δt, получаем известную формулу, которая дает дифференциал дуги плоской кривой в полярных координатах

$$v dt = ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Далее мы увидим, как теорема о радиальной скорости может быть использована при построении касательных к кривым (n° 50).

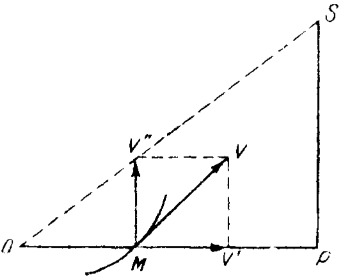
49. Одновременные движения в произвольном числе. — Предположим, что движущаяся точка перемещается относительно первой системы отсчета S_1. Пусть, далее, система S_1 движется относительно второй системы S_2, которая, в свою очередь, движется относительно третьей системы S_3, и так далее до последней системы S, которая неподвижна.

Скорость точки относительно системы S_2 определяется по известному правилу сложения скоростей: это есть результирующая относительной скорости $\boldsymbol{v}'$ по отношению к S_1 и переносной скорости $\boldsymbol{v}_1$, которую точка имела бы относительно S_2, если бы она была неподвижна в S_1. Итак, скорость по отношению к S_2 равна $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_1$. Скорость точки относительно S_3 есть таким же образом результирующая относительной скорости по отношению к S_2, т. е. скорости $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_1$, и переносной скорости $\boldsymbol{v}_2$, которую точка имела бы по отношению к S_3, если бы она была неподвижна в S_2. Искомая скорость, следовательно, равна $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$. Продолжая этот процесс, получаем следующую общую теорему:

Абсолютная скорость движущейся точки есть результирующая ее относительной скорости по отношению к первой подвижной системе отсчета и всех ее последовательных переносных скоростей, вызванных движением первой системы относительно второй, второй относительно третьей, и так далее.

Когда говорят, что тело участвует в нескольких одновременных движениях, это нужно понимать лишь в только что указанном смысле. Первое движение есть относительное движение тела по отношению к первой системе отсчета, остальные представляют последовательные переносные движения, вызванные перемещением первой системы относительно второй, второй относительно третьей, и т. д. Пусть, например, какое-нибудь тело движется относительно вагона, вагон движется относительно Земли, Земля вращается вокруг своей оси, эта ось перемещается вокруг Солнца, — все это будут одновременные движения в указанном выше смысле.

50. Построение касательных к кривым. — *Способ Роберваля* построения касательной к кривой заключается в том, что эту кривую рассматривают как траекторию движущейся точки и разлагают движение этой точки на несколько более простых одновременных движений, в каждом из которых скорость может быть легко построена. Абсолютная скорость, направление которой определяет касательную, есть результирующая указанных выше составляющих скоростей.



Фиг. 8.

Например, спираль Архимеда (фиг. 8) описывается точкой M, которая движется равномерно по прямой OP, в то время как точка P этой прямой равномерным движением описывает окружность вокруг полюса O со скоростью PS. Относительное движение точки M есть движение прямолинейное, и относительная скорость $\overrightarrow{MV'}$, направленная по прямой MP, постоянна. Переносное движение вызывается вращением прямой вокруг полюса; скорость переносного движения $\overrightarrow{MV''}$ перпендикулярна к прямой и относится к скорости PS так же, как OM к OP, что позволяет легко ее построить. Геометрическая скорость $\overrightarrow{MV}$ есть результирующая двух указанных скоростей и направлена по касательной к спирали.

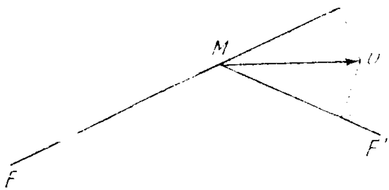
Теорема о радиальной скорости (n° 48), позволяющая найти проекцию скорости на радиус-вектор, дает другой способ построения касательных к кривым, отличный от способа Роберваля.

Например, эллипс описывается точкой M, сумма $r+r'$ расстояний которой от двух фокусов F и F' (фиг. 9) есть величина постоянная. Поэтому имеем:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{dr'}{dt}.$$

Эти производные представляют собой радиальные скорости, относящиеся к каждому из двух радиусов-векторов, или ортогональные проекции скорости на эти радиусы. Так как эти проекции равны по величине, то скорость $\boldsymbol{v}$, а следовательно, и касательная к кривой, направлены по биссектрисе угла, составленного радиусами-векторами, проведенными из фокусов.

Было бы большой ошибкой смешивать этот способ со способом Роберваля. В предшествующем примере движение по эллипсу не разлагается на два одновременных движения по радиусам, проведенным из фокусов, и радиальные скорости не представляют собой составляющих скорости точки по этим двум направлениям. В самом деле, составляющие вектора по двум направлениям совпадают с его ортогональными проекциями на них только в том случае, когда указанные направления взаимно перпендикулярны.



Фиг. 9.

Лемниската дает другое простое приложение теоремы о радиальной скорости, и этот новый пример подтверждает предшествующее замечание.

Лемниската описывается точкой M, для которой произведение rr' ее расстояний от двух фокусов постоянно. Отсюда заключаем:

$$\frac{d(rr')}{dt} = 0, \quad \frac{\frac{dr'}{dt}}{r'} = -\frac{\frac{dr}{dt}}{r}.$$

Таким образом, радиальные скорости по двум радиусам, проведенным из фокусов, находятся в том же отношении, как и сами радиусы. Следовательно, известно отношение ортогональных проекций скорости точки M на оба радиуса, а потому направление этой скорости находится непосредственно.

ГЛАВА II

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. ПРОСТЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

51. Кинематическое определение твердого тела. — *Твердым телом в кинематике называют всякую совокупность точек, неизменно связанных между собой.* Эта совокупность может содержать все точки некоторой геометрической фигуры (линии, поверхности или объема), в предположении, что фигура эта не изменяет своей формы. Можно также понимать под указанной совокупностью точек все пространство. При этом все физические свойства твердых тел, встречающихся в природе, в частности, непроницаемость, исключаются: идеальные твердые тела, как они рассматриваются в кинематике, могут проникать друг в друга. Мы не обращаем при этом внимания на их внешнюю форму и из всех свойств твердого тела удерживаем только одно: все точки одного и того же твердого тела могут совершать только *перемещения всей совокупности в целом* (*déplacements d'ensemble*), при которых все расстояния между точками сохраняются неизменными.

Если закрепить две точки твердого тела, то оно сможет только вращаться вокруг прямой, проходящей через эти точки: эта прямая есть ось вращения тела. Если закрепить третью точку, взятую вне указанной прямой, то все тело окажется закрепленным. Таким образом, *положение твердого тела определяется положениями трех его точек, не лежащих на одной прямой.*

52. Перемещения твердого тела. — Если твердое тело переходит из некоторого положения (A) в другое положение (B), то оно испытывает при этом *перемеще-*

ние совокупности, которое и называют *перемещением твердого тела*. Каждая из точек тела совершает при этом свое собственное перемещение. Так как положение твердого тела определяется положениями трех его точек, не лежащих на одной прямой, то ясно, что и *перемещение твердого тела будет известно, если известны перемещения трех его точек, не лежащих на одной прямой*.

Если твердое тело двумя последовательными перемещениями переводится соответственно сначала из (A) в (B), потом из (B) в (C), то в результате оно получит полное перемещение, переводящее его из (A) в (C). Это выражают, говоря, что перемещения твердого тела образуют *группу*.

Если всем точкам системы задать геометрически равные перемещения, то точки останутся на одних и тех же расстояниях между собой. Такое движение есть, следовательно, не что иное, как перемещение твердого тела (déplacement d'ensemble d'un solide). *Перемещение твердого тела, при котором перемещения всех точек тела геометрически равны, называется поступательным перемещением* (*translation*). Мы знаем, что перемещение твердого тела определяется перемещениями трех его точек, не лежащих на одной прямой. Поэтому, если три точки твердого тела, на лежащие на одной прямой, получают геометрически равные перемещения, то перемещение твердого тела будет поступательным.

Если два последовательных перемещения твердого тела поступательные, то полные перемещения всех точек тела, равные геометрической сумме составляющих перемещений, будут геометрически равны между собой. Два последовательных поступательных перемещения дадут поэтому тоже поступательное перемещение. Таким образом, перемещения твердого тела, принадлежащие к частному виду поступательных перемещений, сами по себе образуют группу (подгруппу предшествующей группы).

Если при перемещении твердого тела две его точки закреплены, то тело повернется на определенный угол вокруг оси, проходящей через закрепленные точки. Такое перемещение называется *вращением*.

Можно доказать, и мы вернемся к этому далее, что всякое перемещение твердого тела представляет собой комбинацию поступательного перемещения и вращения. Сначала, однако, следует изучить распределение скоростей в различных точках твердого тела, совершающего непрерывное движение; начнем с определения и изучения двух наиболее простых движений твердого тела.

53. Поступательное движение. — *О твердом теле, непрерывно перемещающемся с течением времени, говорят, что оно совершает поступательное движение (mouvement de translation), если перемещение тела между двумя произвольными моментами времени поступательно, иначе говоря, если соответствующие перемещения двух произвольных точек тела геометрически равны между собой.*

При поступательном движении твердого тела любые две его точки A и B совершают в течение промежутка времени Δt геометрически равные перемещения $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$. Если мы разделим эти перемещения на Δt, то получим для точек A и B одну и ту же среднюю геометрическую скорость. Переходя к пределу, увидим, что *в поступательном движении все точки твердого тела в каждый момент имеют геометрически равные скорости*. Эта общая скорость называется *скоростью поступательного движения* твердого тела.

При поступательном движении все точки твердого тела описывают одинаковые траектории с равными скоростями, так что движение одной точки тела позволяет определить движение всего тела.

Смотря по тому, будут ли траектории прямыми или кривыми линиями, поступательное движение будет *прямолинейным* или *криволинейным*.

Положение твердого тела практически может быть определено положением трех прямоугольных осей, неизменно связанных с телом. В поступательном движении эти оси перемещаются параллельно самим себе. Обратно, если три прямоугольные оси (или даже только две пересекающиеся прямые), связанные с телом, перемещаются параллельно самим себе, то твердое тело движется поступательно.

54. Вращение вокруг неподвижной оси. Угловая скорость. Геометрическое представление. — Когда твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OR, то каждая его точка M описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к оси, со скоростью, перпендикулярной к плоскости MOR и пропорциональной расстоянию точки от оси. *Угловой скоростью* ω называют величину скорости точки, находящейся на расстоянии единицы длины от оси. Величина скорости точки M, находящейся на расстоянии r от оси, будет поэтому равна $r\omega$. Чаще всего угловую скорость рассматривают как величину положительную или отрицательную, смотря по тому, в какую сторону происходит вращение вокруг оси. Вращательное движение твердого тела вокруг оси в самом общем случае можно определить, задавая в функции от t угол θ, на который плоскость MOR, связанная с телом, повертывается из своего начального положения. При таком определении скорость точки M тела равна $r\dfrac{d\theta}{dt}$ (n°42), алгебраическое же значение угловой скорости равно $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$; это значение положительно или отрицательно в зависимости от направления вращения.

Чтобы определить равномерное вращение твердого тела, необходимо знать три элемента: *положение оси*, *величину угловой скорости* и *направление вращения*. Эти три элемента можно представить одним вектором, который определяется следующим образом:

Начиная от точки O, взятой произвольно на оси вращения, откладывают на этой оси вектор $\overrightarrow{OR}$, *по величине* равный ω (величине угловой скорости), *ориентированный* так, чтобы вращение тела вокруг OR происходило в положительном направлении (против часовой стрелки) для наблюдателя, ноги которого находятся в O, а голова в R. Этот вектор $\overrightarrow{OR}$, определяющий вращение, называется *угловой скоростью вращения*, *или, короче*, *вращением* твердого тела. Он обозначается ω, и в этом случае говорят, что тело совершает *вращение* ω.

Согласно этому определению, вектор угловой скорости есть вектор скользящий (n°23), так как начало его может быть выбрано произвольно на оси вращения.

Преимущество представления угловой скорости твердого тела вектором ω вытекает всецело из следующей основной теоремы, позволяющей использовать геометрическую теорию векторов, изложенную во введении к курсу:

Геометрическая скорость произвольной точки M твердого тела, вращающегося вокруг оси, равна моменту вектора угловой скорости ω относительно точки M.

В самом деле, эта скорость по величине равна $r\omega$, перпендикулярна к плоскости, содержащей M и ω, и ориентирована в положительную сторону вращения вокруг ω: она определяется, таким образом, совершенно так же, как и момент вектора ω.

Если вектор ω приложен к точке O, то скорость точки M равна векторному произведению

$$v = [\overrightarrow{MO} \cdot \omega] = [\omega \cdot \overrightarrow{OM}].$$

55. Проекции скорости точки вращающегося твердого тела на прямоугольные оси координат. — Пусть p, q, r — проекции угловой скорости ω на три прямоугольные оси Ox, Oy, Oz.

Предположим, что вектор ω приложен в начале O координат. Скорость v точки M с координатами x, y, z равна векторному произведению векторов ω и $\overrightarrow{OM}$ с проекциями p, q, r и x, y, z соответственно. Проекции вектора v на оси равны поэтому определителям, образованным из матрицы

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

т. е.

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx. \tag{1}$$

В общем случае вектор угловой скорости ω может быть приложен в произвольной точке A с координатами x_0, y_0, z_0. Проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ должны быть заменены проекциями AM, равными $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Поэтому получим:

$$\begin{aligned} v_x &= q(z - z_0) - r(y - y_0), \\ v_y &= r(x - x_0) - p(z - z_0) \\ v_z &= p(y - y_0) - q(x - x_0). \end{aligned} \tag{2}$$

56. Мгновенное поступательное движение и мгновенное вращение твердого тела. — Может случиться, что в некоторый момент t скорости v всех точек твердого тела геометрически равны между собой. Эти скорости оказались бы в этот момент **теми же самыми**, если бы твердое тело совершало поступательное движение со скоростью v. В этом случае говорят, что твердое тело совершает *мгновенное поступательное движение* со скоростью v. Однако важно никогда не упускать из виду, что выражение *мгновенное поступательное движение* обозначает исключительно *состояние скоростей* всех точек твердого тела в момент t, а не действительное движение этого тела.

Может также случиться, что в некоторый момент времени скорости всех точек твердого тела таковы, как если бы тело находилось во вращательном движении, определенном вектором угловой скорости ω. В этом случае говорят, что тело совершает в этот момент *мгновенное вращение* ω, или что ω есть *мгновенная угловая скорость*. Проекции скорости произвольной точки тела в этот момент определяются формулами предыдущего n°. Но следует заметить еще раз, что выражение *мгновенное вращение* обозначает исключительно *состояние скоростей* точек твердого тела в момент t, а не действительное конечное вращение тела вокруг неподвижной оси. В частности, ускорения в момент t могут быть совершенно другими, чем при настоящем вращении тела с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ МГНОВЕННЫХ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ И МГНОВЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ

57. Сложение одновременных поступательных движений. — Рассмотрим твердое тело, совершающее несколько одновременных поступательных движений. Как было объяснено выше (n°49), это значит, что тело совершает относительное движение и одно или несколько переносных движений, причем все они представляют собой поступательные движения. Само тело совершает относительное поступательное движение со скоростью v' по отношению к движущейся системе отсчета S_1; эта последняя движется поступательно со скоростью v_1 относительно второй системы S_2, которая, в свою очередь, находится в поступательном движении со скоростью v_2 относительно системы S_3, и т. д. При этих условиях абсолютная скорость v точки твердого тела равна геометрической сумме $v' + v_1 + v_2 + \cdots$ скоростей указанных движений и, следовательно, одна и та же для всех точек тела.

Таким образом, *если твердое тело совершает несколько одновременных поступательных движений, то его абсолютное движение будет тоже поступательным. Скорость этого результирующего поступательного движения в каждый момент времени равна геометрической сумме скоростей составляющих движений.*

Вместо того, чтобы рассматривать непрерывные поступательные движения, можно также рассматривать мгновенные поступательные движения, т. е. можно ограничиться рассмотрением состояния скоростей в момент t: при этом твердое тело совершает мгновенное поступательное движение по отношению к системе S_1, S_1 совершает мгновенное поступательное движение по отношению к системе S_2, и т. д. Теорема сложения скоростей с одинаковым правом может быть применена и в этом случае. Таким образом, *несколько мгновенных поступательных движений, совершающихся одновременно, приводятся к одному результирующему мгновенному поступательному движению.*

58. Сложение одновременных вращательных движений. — Пусть твердое тело совершает несколько одновременных вращательных движений; рассмотрим для всех этих движений только состояние скоростей в момент t. В соответствии с этим мы будем предполагать, что в этот момент твердое тело совершает мгновенное вращение ω' по отношению к подвижной системе S_1, S_1 совершает вращение ω_1 по отношению ко второй системе S_2, S_2 совершает вращение ω_2 по отношению к системе S_3 и т. д. В этом случае говорят, что твердое тело совершает в момент t несколько одновременных вращений ω', ω_1, ω_2, $\cdots$, причем векторы угловых скоростей этих вращений могут иметь произвольное положение в пространстве.

Скорость точки твердого тела в этом случае будет равна геометрической сумме скоростей, получающихся от каждого вращения отдельно. Каждая из составляющих скоростей равна моменту вектора угловой скорости соответствующего вращения относительно рассматриваемой точки. Абсолютная скорость точки твердого тела равна поэтому результирующему моменту (относительно этой точки) системы векторов ω', ω_1, ω_2, $\cdots$ угловых скоростей составляющих вращений. Отсюда следует основная теорема:

Если рассматривать в момент t две различные системы одновременных вращений твердого тела, то для эквивалентности этих систем в смысле состояния скоростей всех точек тела в этот момент необходимо и достаточно, чтобы эти две системы вращений геометрически были представлены двумя эквивалентными системами векторов *).

---

*) См. n° 18, теорема. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1°. *Мгновенные вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке.* — Сходящиеся векторы образуют систему векторов, эквивалентную их результирующей (n° 18). Отсюда следует, что несколько одновременных мгновенных вращений вокруг осей, пересекающихся в одной точке, с точки зрения состояния скоростей всех точек твердого тела в момент t, эквивалентны одному результирующему вращению. Эту теорему можно выразить следующим образом: *несколько мгновенных вращений вокруг осей, проходящих через одну точку, приводятся к одному результирующему мгновенному вращению.* В этом заключается теорема о сложении вращений вокруг пересекающихся осей.

В частности, два мгновенных вращения ω_1 и ω_2 приводятся к одному вращению ω вокруг диагонали параллелограма, построенного на угловых скоростях ω_1 и ω_2 составляющих вращений.

Можно, очевидно, предположить, что оба составляющие вращения (относительное и переносное) совершаются в течение конечного промежутка времени (одно в подвижной системе отсчета, другое в неподвижном пространстве). Но в этом случае ось результирующего вращения перемещается в неподвижном пространстве, и потому само результирующее вращение может быть только мгновенным.

2°. *Вращения вокруг параллельных осей.* — Параллельные векторы, геометрическая сумма которых равна нулю, не могут приводиться к одному вектору. Наоборот, если геометрическая сумма параллельных векторов не равна нулю, они приводятся к их главному вектору, приложенному в какой-либо точке центральной оси моментов (n° 26). Отсюда следует, что мгновенные вращения вокруг параллельных осей в любом числе, если геометрическая сумма их не равна нулю, приводятся к одному результирующему вращению вокруг центральной оси, значение которого равно алгебраической сумме значений составляющих вращений.

3°. *Пара вращений.* — Если два одновременных мгновенных вращения ω и ω' образуют пару, то в действительности твердое тело будет обладать мгновенным поступательным движением, скорость которого равна осевому моменту пары. В самом деле, скорость каждой точки тела равна главному моменту пары относительно этой точки, постоянному для всех точек тела и равному осевому моменту пары. Отсюда следует, что *пара вращений эквивалентна поступательному движению.*

Следует заметить, что это заключение остается справедливым и в случае непрерывных вращений. Твердое тело, совершающее относительное и переносное вращения, которые образуют пару, изменяющуюся с течением времени, обладает непрерывным поступательным движением. Это поступательное движение будет, вообще говоря, криволинейным, так как величина и направление скорости изменяются с течением времени.

59. Приведение нескольких одновременных мгновенных поступательных движений и вращений. — Мгновенное поступательное движение может быть заменено парой мгновенных вращений; поэтому достаточно рассмотреть произвольное число мгновенных вращений $\omega_1, \omega_2, \ldots$ Эта система векторов ω может быть приведена или к двум векторам (n° 27), или к одному вектору, приложенному в выбранном центре приведения, и к паре (n° 25). Таким образом, любая система одновременных мгновенных поступательных движений и вращений может быть приведена по желанию или к двум вращениям, или к вращению, ось которого проходит через произвольно выбранную точку O (центр приведения), и поступательному движению, скорость которого равна скорости точки O.

Скорость поступательного движения зависит от выбора точки O, угловая же скорость вращения при любом центре приведения одна и та же (как геометрическая сумма векторов). Если центр приведения взят на центральной оси системы векторов ω, то осевой момент пары получает наименьшее значение и параллелен геометрической сумме векторов. Отсюда следует, что при приведении одновременных движений твердого тела центр приведения можно выбрать таким образом, что ось вращения будет параллельна скорости поступательного движения. В этом случае ось вращения, являющаяся центральной осью системы, называется *мгновенной осью вращения и скольжения*, *или осью Моцци*. Мы увидим в следующем параграфе, что всякое движение твердого тела в каждый данный момент может быть разложено на мгновенные поступательное и вращательное движения и что, следовательно, только что описанное нами мгновенное движение представляет собой наиболее общее движение, которое можно сообщить твердому телу.

В частности, геометрическая сумма вращений может быть равна нулю, тогда мгновенное движение приводится к поступательному; далее, если обращается в нуль момент результирующей пары, то движение приводится к мгновенному вращению, Наконец, если геометрическая сумма вращений и момент результирующей пары равны нулю, то состояние твердого тела в момент t есть *мгновенный покой.*

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ДВИЖУЩЕМСЯ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

60. Общие положения. — Основной результат, к которому мы придем в этом параграфе, заключается в том, что распределение скоростей в твердом теле при любом его движении таково же, как и распределение моментов некоторой системы векторов относительно различных точек пространства. Чтобы обнаружить это, мы докажем, что самое общее мгновенное движение твердого тела приводится к системе трех вращений. Скорости различных точек твердого тела представляют собой при этом результирующие моменты системы трех векторов, представляющих эти вращения После того как этот результат будет установлен, изучение распределения скоростей в твердом теле сведется к изучению изменения результирующего момента некоторой системы векторов при переходе от одной точки пространства к другой, что составляет содержание параграфа 2 введения к курсу.

Мы установим указанный результат возможно более простым спосoбом.

Положение твердого тела определяется положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Отсюда следует, что перемещения всех точек тела за промежуток времени Δt опредекяются перемещениями трех его точек, не лежащих на одной прямой. Непрерывное движение твердого тела определяется поэтому также движением трех его точек, и можно предвидеть на основании сказанного, что достаточно знать скорости трех точек тела, не лежащих на одной прямой, чтобы определить скорости всех других его точек. Мы укажем здесь одну очень простую теорему, которая позволяет построить все эти скорости при помощи трех из них. Эта теорема заключается в следующем:

61. Теорема. — *При движении прямой геометрическая разность скоростей v и v' двух точек ее A и B перпендикулярна к этой прямой.*

Проведем через точку A прямой три оси $Axyz$, движущиеся поступательно со скоростью v этой точки. В своем движении относительно этих осей точка B прямой перемещается по сфере с центром в A. Отсюда следует, что ее относительная скорость, представляющая собой не что иное, как разность $v' - v$, перпендикулярна к радиусу AB этой сферы.

Эта теорема допускает другую формулировку. Если спроектировать на прямую AB скорости двух ее точек, то получим:

$$\text{пр. } v' - \text{пр. } v = \text{пр. } (v' - v) = 0.$$

Отсюда следует, что проекция v' равна проекции v. Поэтому указанная теорема может быть выражена также следующим образом:

При движении прямой проекции (прямоугольные) скоростей точек на прямую одинаковы для всех точек *прямой* [1]); *эту общую проекцию можно назвать скоростью скольжения прямой* (или просто *скольжением*). Если скольжение прямой равно нулю, то скорость каждой из ее точек перпендикулярна к прямой (или равна нулю).

62. Теорема. — *Скорость любой точки твердого тела определяется скоростями трех его точек A, B, C, не лежащих на одной прямой* [2]).

Пусть сначала D — четвертая точка твердого тела, не лежащая в плоскости ABC. Скорость точки D определяется ее проекциями на три прямые AD, BD, CD, не лежащие в одной плоскости. Эти проекции известны, так как они представляют собой скорости скольжения каждой из этих прямых, которые равны соответственно проекциям на те же прямые скоростей трех точек A, B, C. Теперь известны скорости уже четырех точек тела, не лежащих в одной плоскости, и скорость всякой новой точки M тела может быть определена, как это только что было сделано, при помощи скоростей трех из этих четырех точек, выбранных таким образом, чтобы их плоскость не проходила через точку M.

Замечание. — Эта теорема имеет большое значение для определения мгновенного движения твердого тела, так как такое движение представляет собой не что иное, как состояние скоростей всех точек тела в определенный

---

[1]) Это представляет собой кинематическое выражение теоремы из теории векторов, которая утверждает, что проекция на ось результирующего момента системы векторов относительно какой-нибудь точки оси не зависит от выбора этой точки на оси.

[2]) Это представляет собой перевод на язык кинематики следующей теоремы из теории векторов: *две системы векторов эквивалентны, если они имеют соответственно равные главные моменты относительно трех точек, не лежащих на одной прямой.* Следует к тому же заметить сходство в доказательствах.

Точно так же скорости всех точек твердого тела определяются скоростями скольжения шести ребер тетраэдра (n° 27).

момент времени. Если в данный момент скорости трех точек тела, не лежащих на одной прямой, такие же, как в некотором известном мгновенном движении, то мгновенное движение тела совпадает с этим известным движением. Этот именно принцип мы будем применять при доказательстве следующих далее теорем.

63. Теорема.—*Если скорости трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент геометрически равны между собой, то движение тела в этот момент представляет собой мгновенное поступательное движение.*

Пусть $\boldsymbol{v}$ есть общая скорость трех точек; эти точки имели бы такую же скорость в поступательном движении со скоростью $\boldsymbol{v}$, поэтому мгновенное движение твердого тела совпадает с этим поступательным движением. Высказанная теорема означает только, что все точки тела имеют одну и ту же скорость $\boldsymbol{v}$ в момент t; никаких других выводов из нее сделать нельзя. В частности, если в момент t скорости трех точек, не лежащих на одной прямой, равны нулю, то скорости всех других точек тела тоже равны нулю.

64. Теорема.—*Если в момент t скорости двух точек A и B твердого тела равны нулю, то мгновенное движение тела есть вращение вокруг прямой AB.*

Пусть M есть третья точка твердого тела, взятая вне прямой AB. Скольжение каждой из двух прямых AM и BM равно нулю в момент t, а потому скорость точки M перпендикулярна к плоскости MAB или равна нулю. В первом случае скорость точки M можно получить при помощи подходящего вращения $\boldsymbol{\omega}$ тела вокруг прямой AB. Так как три точки тела A, B и M имеют такие же скорости, как при вращении $\boldsymbol{\omega}$, то это справедливо и для всех других точек тела. В том исключительном случае, когда скорость точки M в момент t равна нулю, скорости трех точек тела обращаются в нуль, и твердое тело находится в состоянии мгновенного покоя.

65. Теорема. — *Если скорость точки A твердого тела равна нулю в момент t, то мгновенное движение тела есть вращение вокруг оси, проходящей через точку A.*

Пусть B есть некоторая отличная от A точка твердого тела. Если скорость ее равна нулю, то движение тела есть мгновенное вращение вокруг прямой AB в силу предшествующей теоремы, и предложение, таким образом, доказано. В противном случае скорость v точки B перпендикулярна к прямой AB, и скольжение этой прямой равно нулю. Проведем через AB плоскость Π, перпендикулярную к v, и возьмем третью точку C тела, не лежащую в плоскости Π. Скорость v' точки C перпендикулярна к AC. Проведем через AC плоскость Π', перпендикулярную к v'. Две плоскости Π и Π' пересекаются по прямой AR. Я утверждаю, что скорость любой точки твердого тела, лежащей на прямой AR, равна нулю, и следовательно, в силу предшествующей теоремы, мгновенное движение тела есть вращение вокруг AR. В самом деле, пусть M есть некоторая точка прямой AR; если мы проведем MB и MC, то эти прямые будут соответственно перпендикулярны к v и v'. Скольжение каждой из трех прямых MA, MB, MC, не лежащих в одной плоскости, равно нулю, т. е. проекции скорости точки M на эти три прямые равны нулю, а следовательно, и сама скорость равна нулю.

Ось мгновенного вращения есть, таким образом, общая прямая плоскостей, проведенных через различные точки тела перпендикулярно к соответствующим скоростям этих точек.

66. Мгновенное движение свободного твердого тела в самом общем случае. — *Мгновенное движение свободного твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: поступательное движение со скоростью, равной скорости произвольной точки O тела, и мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через эту точку.*

Проведем через точку O твердого тела три взаимно перпендикулярные оси $Oxyz$, движущиеся вместе с точкой O поступательно со скоростью, равной скорости u точки O. Движение тела по отношению к этим осям есть *мгновенное вращение* ω вокруг оси, проходящей через точку O, так как относительная скорость этой точки равна нулю. Переносное движение есть *поступательное движение* со скоростью u; это и будут два составляющие движения, указанные в формулировке теоремы.

Проекции скорости v какой-нибудь точки M (x, y, z) твердого тела на подвижные оси $Oxyz$ (или на параллельные им неподвижные оси) легко получить, принимая во внимание это разложение. Пусть u_x, u_y, u_z — проекции скорости u точки O; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости ω. Проекции v_x, v_y, v_z вектора v представляют собой суммы проекций скоростей поступательного и вращательного движений; поэтому, согласно формулам (1) n° 55, будем иметь:

$$v_x = u_x + qz - ry,$$
$$v_y = u_y + rx - pz,$$
$$v_z = u_z + py - qx.$$

Эти формулы дают распрепеление скоростей в движущемся твердом теле в момент t. Они зависят от шести параметров u_x, u_y, u_z и p, q, r, являющихся, вообще говоря, функциями от t.

Мы пришли, таким образом, к заключению, высказанному в виде теоремы в начале настоящего параграфа. Так как мгновенное поступательное движение эквивалентно паре вращений, движение твердого тела может быть разложено на три вращения, из которых два составляют пару, тогда скорости точек тела представляют собой результирующие моменты системы, состоящей из трех векторов угловых скоростей.

Система, состоящая из вектора и пары (определяющих соответственно вращение и поступательное движение) может быть заменена совершенно другой системой, эквивалентной первой системе и состоящей тоже из вектора (вращение) и пары (поступательное движение). Если точка O (центр приведения) выбрана на центральной оси, то осевой момент пары параллелен вектору. Момент пары дает скорость точки O и, следовательно, скорость поступательного движения; вектор же представляет собой угловую скорость вращения вокруг точки O. Мы получили, таким образом, следующую *теорему Моцци:*

Теорема. — *В любой момент времени скорости всех точек свободного твердого тела таковы, как если бы тело вращалось вокруг некоторой оси и в то же время скользило вдоль этой оси, которая называется мгновенной осью вращения и скольжения* (*или осью Моцци*).

Примером непрерывного движения, при котором твердое тело вращается вокруг неподвижной оси и в то же время скользит вдоль этой оси, является движение винта в своей гайке. Такое движение называется поэтому *винтовым движением.*

Два различных непрерывных движения твердого тела называются *касательными* в момент t, если в этот момент одни и те же точки тела имеют соответственно одинаковые скорости в обоих движениях. В соответствии с этим, теорема Моцци утверждает, что *в каждый момент времени существует мгновенное винтовое движение, касательное к движению твердого тела.* Можно также сказать, что самое общее мгновенное движение свободного твердого тела есть винтовое. Очевидно, что в частных случаях это движение может приводиться к одному вращению, к одному поступательному движению или даже к мгновенному покою.

67. Определение оси Моцци при помощи скоростей трех точек твердого тела. — Пусть $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{v}''$ — скорости трех точек A, B и C (не лежащих на одной прямой). Движение твердого тела складывается из переносного поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{v}$ точки A и из относительного вращательного движения вокруг этой точки.

В этом относительном движении геометрические скоррсти точек B и C равны $v' - v$ и $v'' - v$. Следовательно, плоскости, проведенные соответственно через точки B и C перпендикулярно к каждому из двух написанных векторов, пересекаются по оси ω относительного вращения. Проекция скорости v на определенное таким способом направление есть скорость скольжения u вдоль оси Моцци. Следовательно, известные разности $v' - u$, $v'' - u$ представляют скорости точек B и C во вращательном движении вокруг оси Моцци, а потому плоскости, проведенные соответственно через B и C перпендикулярно к каждому из этих двух векторов, пересекаются по оси Моцци.

Чтобы определить направление центральной оси и скольжение u вдоль этой оси, можно еще поступать следующим образом.

От точки O, взятой в пространстве произвольно, откладывают скорости v, v' и v'' трех точек твердого тела. Пусть A', B', C' — концы этих трех векторов; стороны треугольника $A'B'C'$ геометрически равны разностям трех скоростей, взятых попарно. Поэтому центральная ось будет перпендикулярна к плоскости треугольника $A'B'C'$, откуда следует, что скольжение u тела (проекция v на центральную ось) есть перпендикуляр, опущенный из точки O на плоскость $A'B'C'$.

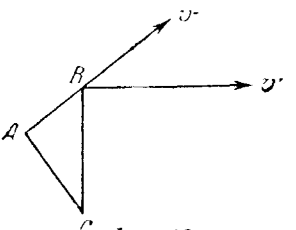
§ 4. НЕПРЕРЫВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ В ЕЕ ПЛОСКОСТИ

68. Предварительные соображения. — Движение плоской фигуры неизменяемой формы в ее плоскости есть частный случай движения твердого тела в пространстве. Поэтому в непосредственном изучении такого движения нет необходимости, однако сделать это все же весьма полезно. Для этого нужно применить общие соображения предшествующего параграфа к этому частному случаю.

Положение плоской фигуры в ее плоскости определяется положением двух ее точек, и состояние скоростей всех ее точек в определенный момент (т. е. мгновенное движение фигуры) определяется скоростями только двух точек A и B. Если известны эти последние, то можно построить скорости всех прочих точек фигуры. В самом деле, скорость точки C фигуры определяется ее проекциями, в данном случае известными, на две прямые AC и BC.

Если в какой-нибудь момент t скорость точки C движущейся фигуры равна нулю, то мгновенное движение фигуры есть вращение ее вокруг этой точки. В самом деле, скорость какой-нибудь второй точки A фигуры перпендикулярна к CA. Эту скорость можно получить вращением фигуры вокруг точки C. Так как при помощи этого вращения мы получаем скорости двух точек фигуры, то оно же даст и скорости всех других ее точек.

69. Мгновенное движение плоской фигуры в ее плоскости. — *Плоская фигура, движущаяся в своей плоскости, совершает в каждый момент или мгновенное поступательное движение, или мгновенное вращение.*



Фиг. 10.

Пусть A есть точка движущейся фигуры. Если скорость ее равна нулю, то, как мы только что видели, фигура совершает мгновенное вращение вокруг точки A. В противоположном случае пусть v есть скорость точки A и пусть B — вторая точка движущейся фигуры, лежащая на векторе v (фиг. 10). Если скорость v' точки B параллельна v, то эти две скорости должны быть геометрически равны, так как каждая из них представляет скорость скольжения прямой AB. Две точки фигуры имеют такие же скорости, как в *поступательном движении* со скоростью v, а потому мгновенное движение фигуры совпадает в рассматриваемый момент с этим поступательным движением. Если же скорость v' не параллельна скорости v, то прямые AC и BC, соответственно перпендикулярные к v

и v', будут иметь скольжения, равные нулю; они пересекаются в точке C, скорость которой, следовательно, должна быть равна нулю. В этом случае движение фигуры есть мгновенное вращение вокруг точки C и сама точка C есть *мгновенный центр вращения*. Мгновенный центр находится поэтому в точке пересечения прямых, проведенных из каждой точки движущейся фигуры перпендикулярно к скорости этой точки.

Проекции на две прямоугольные оси скорости точки M с координатами x, y во вращательном движении ω (положительном или отрицательном) вокруг начала получим непосредственно, дифференцируя по t формулы, выражающие x и y в полярных координатах, и замечая, что $\varphi' = \omega$ (положительное вращение происходит в направлении от Ox к Oy). Имеем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и, дифференцируя при постоянном r, найдем;

$$v_x = -r\omega\sin\varphi = -\omega y,$$
$$v_y = r\omega\cos\varphi = \omega x.$$

Если мгновенный центр находится в точке с координатами x_0, y_0, то, перенося начало координат в эту точку, получим:

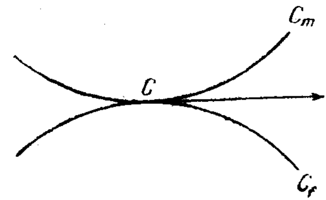
$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\omega(y - y_0), \\ v_y &= \ \ \omega(x - x_0). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти формулы представляют собой частный случай формул n° 55, из которых они могут быть выведены, если положить $p = q = 0$ и $r = \omega$. При этом выводе предполагается, конечно, что направления положительного вращения на плоскости и в пространстве согласуются между собой.

70. Непрерывное движение плоской фигуры в ее плоскости. — Рассмотрим движение плоской фигуры в течение промежутка времени Δt. Мы будем предполагать, что в течение этого промежутка геометрические скорости всех точек фигуры изменяются непрерывно, и движение ни в какой момент времени не является мгновенным поступательным движением. В таком случае в каждый момент существует мгновенный центр вращения C.

Если точка C неподвижна на плоскости, движение фигуры есть непрерывное вращение вокруг этой точки. В самом деле, каждая точка M движущейся фигуры описывает окружность вокруг точки C, так как траектория точки во все время движения остается нормальной к радиусу MC. В этом случае точка C занимает также неизменное положение в движущейся фигуре.

Обратно, если мгновенный центр занимает неизменное положение в движущейся фигуре, то эта точка фигуры имеет скорость, постоянно равную нулю, и, следовательно, она неизменно связана также с неподвижной плоскостью; движение фигуры представляет собой, таким образом, непрерывное вращение вокруг неподвижной точки.



Фиг. 11.

Предположим теперь, что мгновенный центр C непрерывно перемещается в плоскости и в движущейся фигуре. Рассмотрим его абсолютное движение на неподвижной плоскости и его относительное движение на движущейся фигуре, принимаемой в качестве подвижной системы отсчета. Мгновенный центр, перемещаясь, описывает кривую в неподвижной плоскости, представляющую его абсолютную траекторию, и некоторую другую кривую на движущейся фигуре, представляющую его относительную траекторию. Абсолютная траектория есть кривая C_f, которую мы будем называть *неподвижной центроидой*, а относительная траектория есть кривая C_m, которая перемещается вместе с движущейся фигурой и называется *подвижной центроидой* (фиг. 11). Мгновенный центр движется по каждой из этих двух кривых с соответствующей скоростью: с абсолютной скоростью по неподвижной кривой и с относительной скоростью по подвижной кривой. Легко видеть, *что в каждый момент* *относительная и абсолютная скорости совпадают по величине и направлению.* В самом деле, их разность представляет собой переносную скорость мгновенного центра, т. е. скорость, которую имела бы точка C, если бы она была связана с движущейся фигурой. Но эта скорость равна нулю, так как C есть мгновенный центр вращения фигуры. Отсюда получаем следующие два заключения:

1°. *Две кривые C_f и C_m в каждый момент касаются друг друга в мгновенном центре, соответствующем этому моменту.* В самом деле, касательные к двум кривым в мгновенном центре совпадают, так как они соответственно имеют направления абсолютной и относительной скоростей, геометрически равных друг другу.

2°. *При движении фигуры в ее плоскости мгновенный центр описывает дуги одинаковой длины на обеих кривых C_f и C_m.* В самом деле, обозначим через s_f и s_m дуги, пробегаемые точкой C на кривых C_f и C_m и отсчитываемые от соответствующих начальных положений A и A' этой точки на каждой из двух кривых. Так как точка движется с одинаковой скоростью по обеим кривым, то каково бы ни было t,

$$\frac{ds_f}{dt} = \frac{ds_m}{dt}.$$

Поэтому обе дуги могут отличаться друг от друга лишь на постоянную величину. Так как в начальный момент обе дуги обращаются в нуль, то они равны между собой в каждый последующий момент.

Оба указанных свойства характеризуют качение без скольжения движущейся центроиды по неподвижной. Они дают очень наглядное представление самого общего непрерывного движения плоской фигуры в ее плоскости, которое не приводится к непрерывному вращению и ни в какой момент не вырождается в мгновенное поступательное движение. Таким образом, можно высказать следующую теорему:

Самое общее непрерывное движение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить, заставляя *катиться по неподвижной кривой другую кривую, которая неизменно связана с движущейся фигурой и увлекает ее в своем движении. Точка касания обеих кривых в каждый момент времени представляет собой мгновенный центр вращения. Неподвижная кривая есть геометрическое место мгновенных центров на неподвижной плоскости (неподвижная центроида), подвижная кривая есть геометрическое место мгновенных центров на движущейся фигуре (подвижная центроида).*

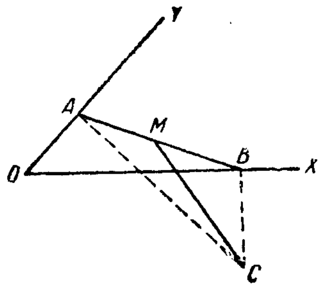
71. Приложение к построению нормалей к кривым. — Если известно положение мгновенного центра при движении плоской фигуры в ее плоскости, то можно построить нормаль к траектории любой точки фигуры, так как эта нормаль проходит через мгновенный центр. Поэтому если данная кривая может быть описана точкой плоской фигуры в таком ее движении, для которого можно определить мгновенный центр вращения, то мы получаем способ построения нормали к этой кривой.

Рассмотрим несколько примеров.

Самым простым является случай, когда кривая представляет собой *рулетту*, т. е. когда кривая может быть определена как траектория точки, связанной с движущейся линией, которая катится по неподвижной кривой. В этом случае положение мгновенного центра (точки касания двух последних кривых) известно заранее. Например, циклоида есть рулетта, описываемая точкой окружности, которая катится по прямой; нормаль к циклоиде получим, соединяя движущуюся точку с точкою касания движущейся окружности и неподвижной прямой.

Второй простой пример представляет тот случай, когда две точки A и B движущейся фигуры вынуждены описывать заданные траектории. Нормали к этим траекториям, проведенные для каждого момента через точки A и B, определяют своим пересечением мгновенный центр, соответствующий этому моменту. Например, эллипс описывается точкой M отрезка прямой AB, концы которого скользят по двум осям Ox и Oy (фиг. 12). Мгновенный центр определяется пересечением нормалей AC и BC к осям, а нормаль к эллипсу в точке M есть MC.

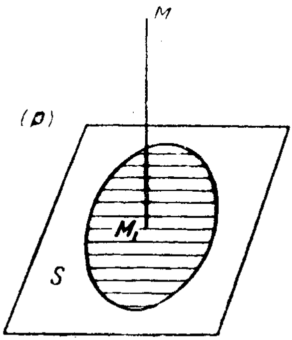
Для рассматриваемого движения прямой AB легко получить подвижную и неподвижную центроиды. В самом деле, угол ACB (равный углу AOB или дополнительный для него) остается постоянным; построим на отрезке AB сегмент, вмещающий угол ACB; окружность сегмента пройдет через точку O, а отрезок OC будет диаметром окружности. Эта окружность, связанная с отрезком AB, есть геометрическое место мгновенных центров C на движущейся фигуре, или подвижная центроида. С другой стороны, OC есть отрезок постоянной длины, так как это — диаметр указанной окружности. Поэтому геометрическим местом точек C на плоскости, или неподвижной центроидой, будет служить окружность радиуса OC с центром O. Таким образом, движение отрезка AB по его направляющим можно осуществить, если заставить катиться внутренним образом окружность по неподвижной окружности вдвое большего радиуса. Эллипс, описываемый при этом точкой движущегося круга, входит в класс так называемых *гипоциклоид*.



Фиг. 12.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

72. Непрерывное движение тела параллельно неподвижной плоскости. — Если все точки твердого тела перемещаются параллельно неподвижной плоскости (P), то говорят, что движение твердого тела параллельно этой плоскости. В этом случае сечение (S) тела плоскостью (P) есть плоская фигура (связанная с телом), движущаяся в своей плоскости (фиг. 13). Движение сечения (S) определяет движение всего тела, так как мы покажем сейчас, что всякая точка M тела движется так же, как ее проекция M_1 на плоскость (P). Прямая, проектирующая M на плоскость сечения (S), связана с твердым телом и перпендикулярна к неподвижной плоскости (P); следовательно, она движется параллельно самой себе, и все ее точки описывают одинаковые траектории с равными скоростями. Значит, движение основания M_1 этого перпендикуляра в плоскости сечения (S) определяет движение всей прямой. Отсюда выводим следующие заключения:

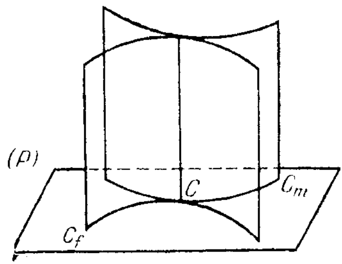


Фиг. 13.

1°. Если движение сечения (S) в своей плоскости есть мгновенное поступательное, то движение твердого тела будет также мгновенным поступательным.

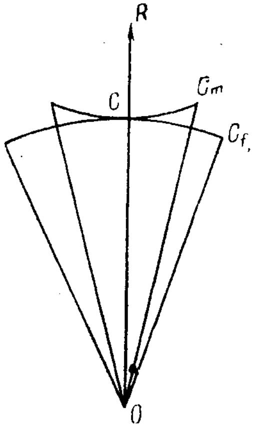
2°. Если движение сечения (S) в своей плоскости есть мгновенное вращение вокруг центра C, то движение твердого тела будет мгновенным вращением вокруг перпендикуляра, восставленного к плоскости сечения в точке C. Этот перпендикуляр представляет собой *мгновенную ось вращения* тела.

Рассмотрим теперь непрерывное движение твердого тела в течение некоторого промежутка времени. Оставим в стороне случай вращения вокруг неподвижной оси и предположим, что мгновенное движение ни в какой момент времени не вырождается в поступательное движение. В таком случае можно дать представление непрерывного движения твердого тела, аналогичное тому, которое мы только что рассмотрели для плоской фигуры. Движение сечения (S) можно осуществить, заставляя кривую C_m, неизменно связанную с сечением, катиться по неподвижной кривой C_f, так что точка касания будет совпадать с мгновенным центром вращения C сечения. Мгновенная ось вращения твердого тела есть перпендикуляр к этому сечению, восставленный в точке C (фиг. 14). Она перемещается параллельно самой себе в пространстве и в теле и описывает два цилиндра, перпендикулярные к плоскости (P): неподвижный цилиндр, имеющий основанием кривую C_f (*неподвижный аксоид*), и движущийся цилиндр, связанный с твердым телом и имеющий основанием кривую C_m (*подвижный аксоид*). Эти цилиндры касаются друг друга в каждый момент вдоль общей образующей, представляющей собой мгновенную ось, а нормальные сечения обоих цилиндров, касательные друг к другу, катятся без скольжения одно по другому. Отсюда следует, что движущийся цилиндр будет катиться без скольжения по неподвижному цилиндру. Таким образом, движение твердого тела, параллельное неподвижной плоскости, есть *цилиндрическое качение.*



Фиг. 14.

73. Движение твердого тела около неподвижной точки.—Если твердое тело закреплено в одной точке O, то скорость этой точки постоянно равна нулю, поэтому движение тела в каждый момент времени представляет собой *мгновенное вращение* вокруг оси OR, проходящей через точку O (n° 65). Если движение тела не есть непрерывное вращение вокруг неподвижной оси, мгновенная угловая скорость постоянно изменяется по направлению и по величине как в неподвижном пространстве, так и в движущемся теле. Геометрическое место мгновенных осей в пространстве есть коническая поверхность с вершиной в точке O (*неподвижный аксоид*), геометрическое место этих осей в теле есть другая коническая поверхность с вершиной в той же точке (*подвижный аксоид*). В каждый момент времени мгновенная ось OR представляет собой общую образующую этих двух конусов (фиг. 15). Если пересечь оба конуса одной сферой с центром в O, то сечения будут иметь в каждый момент общую точку C. Как и в случае плоской фигуры, можно доказать, что подвижное сечение C_m постоянно касается неподвижного сечения C_f в точке C и катится без скольжения по этой последней кривой. Следовательно, оба конуса постоянно касаются друг друга, и один из них катится по другому. Поэтому самое общее непрерывное движение твердого тела с одной неподвижной точкой можно осуществить, заставляя катиться один по другому два конуса, имеющих общую вершину в неподвижной точке; один из конусов неподвижен в пространстве, другой движется и связан с телом, увлекая его с собой в своем движении.



Фиг. 15.

Таким образом, самое общее непрерывное движение твердого тела около неподвижной точки есть *коническое качение*.

74. Самое общее непрерывное движение свободного твердого тела. — Мы установили уже выше (n° 66) теорему Моцци:

Во всякий момент времени скорости всех точек свободного твердого тела таковы, как если бы оно вращалось вокруг некоторой оси и в то же время скользило вдоль нее; эта ось называется мгновенной осью вращения и скольжения, или осью Моцци.

Если бы такое движение было непрерывным, то оно было бы подобно движению винта в своей гайке. Оно называется поэтому *винтовым движением*. В соответствии с этим теорему Моцци можно сформулировать так: ***самое общее мгновенное движение свободного твердого тела есть винтовое движение (мгновенное).***

Конечно, в общем случае лишь скорости точек твердого тела в каждый момент будут такими же, как в некотором винтовом движении, само же движение тела не будет винтовым, так как мгновенная ось вращения и скольжения не остается неподвижной (как в случае винта), а непрерывно изменяет свое положение в пространстве.

Мгновенная ось описывает в этом случае в пространстве неподвижную поверхность; в то же время она описывает в теле поверхность, увлекаемую движением последнего. Эти две линейчатые поверхности касаются в каждый момент времени одна другой вдоль мгновенной оси, представляющей собой их общую образующую в этот момент. Чтобы осуществить непрерывное движение твердого тела в общем случае, нужно заставить подвижную поверхность, связанную с телом, катиться по неподвижной поверхности и одновременно скользить вдоль образующей соприкосновения.

75. Качение и верчение неизменяемой подвижной поверхности по неподвижной поверхности. — Предположим, что при движении твердого тела некоторая неизменяемая поверхность S, связанная с телом, все время касается неподвижной поверхности S_1 в одной точке A, которая может при этом изменять свое положение от момента к моменту на каждой из этих поверхностей. В этом случае говорят, что подвижная поверхность S ***катится и вертится*** по поверхности S_1, если только скорость точки A поверхности S, совпадающей с точкой касания, в каждый момент равна нулю.

Как известно, твердое тело обладает в этом случае мгновенным вращением ω вокруг оси, проходящей через точку A тела, скорость которой равна нулю. Если вектор ω мгновенной угловой скорости направлен по нормали к поверхности S_1, то говорят, что поверхность S ***вертится*** на поверхности S_1; вектор ω называется *угловой скоростью* *верчения*, или *верчением*. Если же вектор ω лежит в общей касательной плоскости к двум поверхностям, то говорят, что поверхность S катится по поверхности S_1, и ω называется *угловой скоростью качения*, или *качением*.

В общем случае вектор ω направлен по наклонной к поверхности S_1, его нормальная составляющая представляет собой угловую скорость верчения, а касательная составляющая — угловую скорость качения.

Если точка касания A перемещается по одной из поверхностей, то она необходимо перемещается и по другой поверхности и описывает на обеих поверхностях дуги, постоянно равные друг другу по длине. Это можно доказать при помощи известного рассуждения (n° 70). Таким образом, точка A описывает две кривые: одну на поверхности S, другую на поверхности S_1; при движении поверхности S эти кривые остаются касательными между собой и катятся одна по другой без скольжения.

Рассмотрим теперь самый общий возможный случай движения, когда подвижная поверхность S остается касательной к неподвижной поверхности S_1. Скорость точки A поверхности S, совпадающей с точкой касания обеих поверхностей, не будет уже равна нулю: пусть u — эта скорость. Она лежит в общей касательной плоскости, так как в противном случае поверхности отделились бы друг от друга. Мгновенное движение поверхности S разлагается в этом случае на поступательное движение со скоростью u и на вращение ω вокруг оси, проходящей через точку A. Касательная и нормальная составляющие вектора ω и в этом случае называются *качением* и *верчением* поверхности S по S_1, скорость же u точки касания получает название *скольжения* S по S_1.

§ 6. КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

76. Простые перемещения. — Когда твердое тело переходит из одного положения в другое, каждая из его точек совершает перемещение; тело в целом получает при этом некоторое перемещение, которое мы будем называть просто *перемещением твердого тела.* Перемещение, о котором здесь идет речь, определяется двумя различными положениями твердого тела, рассматриваемыми в определенном порядке, так что имеются первое и второе положения. При этом мы совершенно отвлекаемся от промежуточных положений, через которые тело проходит во время движения из одного положения в другое, и от времени, в течение которого совершается этот переход. При изучении *конечных перемещений* твердого тела обнаруживаются замечательные свойства, которые в результате перехода к пределу (когда перемещение становится бесконечно малым) приводят к свойствам мгновенных движений, рассмотренным в предшествующих параграфах. Таким именно образом поступал при установлении этих свойств Шаль, которому мы обязаны этой теорией. Свойства конечных перемещений менее просты, чем свойства бесконечно малых перемещений, но тем не менее они заслуживают самостоятельного изучения; этим именно мы и будем заниматься в настоящем параграфе.

Конечное перемещение твердого тела называется *поступательным перемещением* (*трансляцией*) (n° 52), если перемещения всех точек тела геометрически равны. Поступательное перемещение определяется вектором u, геометрически равным перемещению какой-нибудь точки твердого тела.

Перемещение представляет собой *вращение*, когда второе положение тела получается из первого поворотом на определенный угол вокруг неподвижной оси. Вращение представляют вектором ω, откладываемым по оси, причем величина вектора равна угловому перемещению, а ориентация на оси определяется направлением вращения.

Отсюда непосредственно вытекают следующие свойства:

Любое число последовательных поступательных перемещений приводится к одному результирующему поступательному перемещению (n° 52).

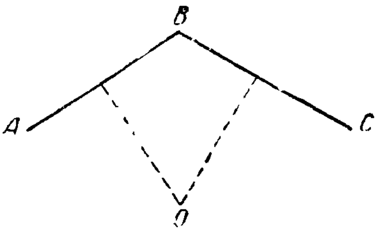
Если выполнить последовательно поступательное перемещение и вращение, то окончательное перемещение *будет одно и то же, каков бы ни был порядок обеих операций.*

Однако последовательные конечные вращения складываются не так, как складываются мгновенные одновременные вращения, правило в этом случае оказывается значительно более сложным. Отметим здесь следующее свойство, напоминающее аналогичное свойство пары мгновенных вращений (n° 58, 3°) и столь же простое: *Пара двух конечных последовательных вращений эквивалентна одному поступательному перемещению (вообще говоря, зависящему от порядка, в котором выполняются оба вращения).*

В самом деле, рассмотрим плоскость, связанную с телом и параллельную осям обоих вращений. Эта плоскость повертывается на определенный угол в первом вращении, потом она повертывается в противоположную сторону на такой же угол во втором вращении и в результате оказывается параллельной своему первоначальному положению: она получает, таким образом, только поступательное перемещение. Перемещение твердого тела определяется при этом перемещением оси первого вращения во время поворота вокруг другой оси; в самом деле, первая ось при первом вращении остается неподвижной.

77. Конечное перемещение плоской фигуры в своей плоскости. — *Самое общее конечное перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть поступательное перемещение или вращение.*

Пусть A (фиг. 16) — одна из точек фигуры и AB — перемещение этой точки. Пусть далее BC есть перемещение той точки фигуры, которая первоначально была в B. Отрезок AB фигуры переходит поэтому в BC и, следовательно, эти два отрезка равны. Если бы они были расположены на одной прямой, то они были бы или геометрически равны, или ориентированы в противоположные стороны. В первом случае перемещение отрезка (а следовательно, и всей фигуры) было бы поступательным. Во втором случае отрезок сделал бы пол-оборота, поэтому перемещение фигуры было бы вращением на 180° вокруг середины отрезка. В общем случае перемещения AB и BC образуют между собой угол. Перпендикуляры, проведенные через середины этих двух отрезков, пересекаются в точке O. Поэтому отрезок AB может быть перемещен в положение BC вращением вокруг точки O. Следовательно, перемещение фигуры есть вращение.



Фиг. 16.

Перемещение твердого тела, параллельное плоскости, очевидно, приводится к перемещению плоской фигуры в ее плоскости. Оно представляет собой поэтому поступательное перемещение или вращение.

78. Конечное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку. — *Самое общее конечное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, есть вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку.*

Пусть O — неподвижная точка. Рассмотрим вторую точку A тела, и пусть AB — ее перемещение. Пусть, как и в предшествующем случае (фиг. 16), BC — перемещение точки B, так что отрезок AB, связанный с телом, переходит в BC. Проведем через середины двух отрезков AB и BC плоскости, перпендикулярные к этим отрезкам; обе плоскости пройдут через неподвижную точку O и пересекутся по прямой, проходящей через O. Отрезок AB перемещается в положение BC вращением вокруг найденной прямой, и это перемещение отрезка влечет за собой перемещение всего тела, что и доказывает предложение.

79. Перемещение свободного твердого тела. — *Самое общее конечное перемещение свободного твердого тела разлагается на поступательное перемещение, определяемое*

перемещением произвольной точки тела, и на вращение вокруг оси, проходящей через эту точку.

В самом деле, пусть O — какая-нибудь точка тела и $\boldsymbol{u}$ — перемещение этой точки. Если сначала сообщим телу перемещение $\boldsymbol{u}$, то после этого оно должно будет только повернуться вокруг точки O. Поэтому, в силу предшествующей теоремы, оно может быть переведено в свое новое положение вращением $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через точку O, что и доказывает предложение. Поступательное перемещение $\boldsymbol{u}$ зависит от выбора точки O, вращение же $\boldsymbol{\omega}$ остается одним и тем же при любом выборе этой точки. В самом деле, единственными прямыми, которые остаются параллельными самим себе при перемещении твердого тела, являются прямые, параллельные вектору углового перемещения $\boldsymbol{\omega}$. С другой стороны, величина вектора $\boldsymbol{\omega}$ и его направление определяются углом, на который повертывается какая-нибудь плоскость, связанная с телом и параллельная $\boldsymbol{\omega}$.

Разложим поступательное перемещение $\boldsymbol{u}$ на два составляющие, одно $\boldsymbol{u}_1$, параллельное вектору $\boldsymbol{\omega}$, и другое $\boldsymbol{u}_2$, перпендикулярное к этому вектору. Если сначала сообщим телу поступательное перемещение $\boldsymbol{u}_1$, то остальная часть перемещения тела совершается параллельно плоскости, нормальной к $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому это дополнительное перемещение приводится к вращению $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси (n° 77). Таким образом, перемещение твердого тела складывается из вращения $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси и из скольжения вдоль этой оси. Это свойство выражают в следующих словах: *самое общее конечное перемещение свободного твердого тела есть винтовое перемещение.*

ГЛАВА III

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. ОБ УСКОРЕНИИ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ

80. Теорема Кориолиса. — Если движение точки M одновременно отнесено к неподвижной и к подвижной системам осей, то между ускорениями в абсолютном и относительном движениях имеет место соотношение, аналогичное тому, которое связывает абсолютную и относительную скорости движущейся точки, но менее простое. Это соотношение выражается основной теоремой, которую мы сейчас установим и которая известна под названием *теоремы Кориолиса.*

Пусть x_1, y_1, z_1 — координаты точки M относительно трех прямоугольных неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$, и x, y, z — координаты той же точки относительно подвижных осей $Oxyz$. Положение подвижной системы определяется координатами ξ, η, ζ ее начала O и направляющими косинусами a, b, c,... ее осей Ox,... относительно неподвижных осей. Абсолютные и относительные координаты точки связаны между собой формулами преобразования координат, из которых достаточно написать первую:

$$x_1 = \xi + ax + by + cz.$$

Дифференцируя это равенство два раза по времени, получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2} + x\frac{d^2a}{dt^2} + \\ + y\frac{d^2b}{dt^2} + z\frac{d^2c}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{db}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{dc}{dt}\frac{dz}{dt}\right).$$

Левая часть написанного уравнения есть проекция j_{x_1} *абсолютного ускорения* j точки M на неподвижную ось O_1x_1.

В правой части слагаемые написаны в трех строках.

Если ξ, a, b, c постоянны, т. е. если подвижные оси остановлены в занимаемом ими положении, то j_{x_1} приведется к членам первой строки. Следовательно, эти члены представляют собой проекцию j'_{x_1} *относительного ускорения* j' на ось O_1x_1.

Если x, y, z постоянны, т. е. если точка M неподвижна в подвижной системе координат, то j_{x_1} приведется к членам второй строки. Эти члены дают, таким образом, проекцию j''_{x_1} *переносного ускорения* j''.

Наконец, члены третьей строки можно рассматривать как проекцию на ось O_1x_1 вектора j''', приложенного в точке M и называемого *добавочным ускорением*, или *ускорением Кориолиса*.

Мы получаем, таким образом, соотношение

$$j_{x_1} = j'_{x_1} + j''_{x_1} + j'''_{x_1}.$$

Очевидно, имеют место два аналогичных соотношения между проекциями векторов j, j', j'', j''' на две другие неподвижные оси O_1y_1 и O_1z_1. Аналитические выражения этих проекций получаются из уже написанного круговой перестановкой букв xyz, $\xi\eta\zeta$ и введением соответствующих направляющих косинусов. В результате получаем геометрическое равенство

$$j = j' + j'' + j'''.$$

Отсюда следует *теорема Кориолиса*:

Абсолютное ускорение точки, отнесенной к подвижной системе осей, равно геометрической сумме ускорений: относительного, переносного и добавочного.

81. Определение добавочного ускорения. — Чтобы получить проекцию v''_{x_1} скорости переносного движения точки M на неподвижную ось O_1x_1, нужно продифференцировать, считая x, y, z постоянными, равенство

$$x_1 = \xi + ax + by + cz,$$

что дает

$$v''_{x_1} = \frac{d\xi}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}.$$

На основании результатов, полученных в кинематике твердого тела, мгновенное движение системы отсчета $Oxyz$ разлагается на поступательное движение со скоростью u точки O и на вращение ω вокруг оси, проходящей через O. Проекция вектора u на ось O_1x_1 есть

$$u_{x_1} = \frac{d\xi}{dt},$$

т. е. равна первому члену в выражении для v''_{x_1}; поэтому следующие члены

$$x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}$$

представляют собой проекцию на ту же ось скорости точки M (x, y, z), вызванной только переносным вращением ω подвижной системы координат. Эта скорость равна векторному произведению

$$[\overrightarrow{MO}\omega] = [\omega\overrightarrow{OM}].$$

Возвратимся теперь к проекции на ось O_1x_1 добавочного ускорения

$$j'''_{x_1} = 2\left(\frac{da}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{db}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{dc}{dt}\frac{dz}{dt}\right).$$

Сумма в скобках представляет собой выражение, в которое обращается проекция скорости точки при переносном вращении ω, если относительные координаты точки x, y, z заменить на координаты $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ индекса ее относительной скорости v' для того же начала O, или, что то же самое, если заменить вектор $\overrightarrow{OM}$ вектором v'. То же заключение относится и к проекциям вектора j''' на две другие неподвижные оси, и, следовательно,

$$j''' = 2\,[\omega v'].$$

Мы имеем поэтому следующую теорему: *Добавочное ускорение равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость движущейся точки. Оно, следовательно, перпендикулярно к относительной скорости.*

Проекции добавочного ускорения j''' на подвижные оси $Oxyz$ получим, проектируя на них произведение $[\omega v']$. Пусть p, q, r — проекции угловой скорости переносного вращения на подвижные оси; тогда

$$j_x''' = 2(qv_z' - rv_y'), \quad j_y''' = 2(rv_x' - pv_z'),$$
$$j_z''' = 2(pv_y' - qv_x').$$

Из предыдущей теоремы ясно видно, что если движение подвижной системы отсчета задано, то добавочное ускорение движущейся точки зависит лишь от ее относительной скорости.

Добавочное ускорение обращается в нуль вместе с каждым из множителей произведения $[\omega v']$, т. е. в двух очень важных случаях: 1°. Если относительная скорость равна нулю; 2°. Если подвижная система отсчета движется поступательно *).

82. Сложное центробежное ускорение. — Геометрическое равенство, связывающее ускорения, может быть написано в виде

$$j' = j - j'' - j'''.$$

Таким образом, *относительное ускорение равно геометрической сумме абсолютного ускорения и ускорений, равных по величине, но противоположных ускорениям, переносному и добавочному.* Ускорение $-j'''$, равное по величине, но противоположное добавочному ускорению, называется также *сложным центробежным ускорением.*

---

*) Следует также отметить случай, когда вектор относительной скорости параллелен вектору угловой скорости переносного вращения. (*Прим. перев.*)

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ФИГУРЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

83. Разложение ускорения точки фигуры на три составляющих. — Рассмотрим плоскую фигуру, движущуюся в своей плоскости. Отнесем ее к двум прямоугольным осям Ox и Oy. Пусть x_0, y_0 — координаты мгновенного центра вращения C, и ω — алгебраическое значение угловой скорости вращения вокруг C (рассматриваемое как положительное при вращении от Ox к Oy). Проекции на оси скорости той точки M движущейся фигуры, координаты которой суть x, y, определяются формулами (1) n° 69; их значения в момент t равны:

$$v_x = -\omega(y - y_0), \quad v_y = \omega(x - x_0). \tag{1}$$

Проекции на оси ускорения точки M равны производным от этих величин по времени:

$$j_x = \omega y_0' - \omega v_y - \omega'(y - y_0),$$
$$j_y = -\omega x_0' + \omega v_x + \omega'(x - x_0);$$

откуда, подставляя v_x и v_y из формул (1), получим:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \omega y_0' - \omega^2(x - x_0) - \omega'(y - y_0),\\ j_y &= -\omega x_0' - \omega^2(y - y_0) + \omega'(x - x_0). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Каждая из правых частей формул (2) представляет собой сумму трех членов, которым можно дать следующую кинематическую интерпретацию.

Для точки x_0, y_0 правые части приводятся к их первым членам $\omega y_0'$ и $-\omega x_0'$. Следовательно, эти члены представляют собой проекции ускорения γ_c точки фигуры, совпадающей в данный момент с мгновенным центром x_0, y_0.

Если бы мгновенный центр был неподвижен, то движение было бы круговым, и правые части приводились бы ко второму и третьему членам:

$$-\omega^2(x - x_0) - \omega'(y - y_0),$$
$$-\omega^2(y - y_0) + \omega'(x - x_0).$$

Но в этом круговом движении нормальное ускорение, равное по величине $\omega^2 r$ (где r есть радиус CM), не зависит от ω', а тангенциальное ускорение, равное по величине $dv : dt = \omega' r$, не зависит от ω. Следовательно, вторые члены в правых частях формул (2), т. е. члены с ω^2, суть проекции нормального ускорения γ_n, а последние члены, т. е. члены с ω', — проекции тангенциального ускорения γ_t, причем эти ускорения создаются круговым движением точки M вокруг точки C (рассматриваемой как неподвижная) с переменной угловой скоростью ω.

Формулы (2) приводятся, таким образом, к геометрическому равенству

$$j = \gamma_c + \gamma_n + \gamma_t, \tag{3}$$

и мы имеем следующую теорему:

При движении плоской фигуры в ее плоскости ускорение любой точки фигуры равно геометрической сумме трех отдельных ускорений: 1° ускорения γ_c точки фигуры, совпадающей с мгновенным центром; 2° нормального ускорения γ_n и 3° тангенциального ускорения γ_t, причем оба последние ускорения рассматриваются во вращательном движении вокруг мгновенного центра (предполагаемого неподвижным) с переменной угловой скоростью ω.

84. Центр ускорений. — Если величины ω и ω' обе равны нулю, то из формул (2) видно, что все точки фигуры имеют одно и то же ускорение γ_c. В этом случае либо ни одна из точек фигуры не имеет ускорения, равного нулю, либо ускорения всех точек равны нулю. Исключим этот случай. Если положим

$$j_x = \omega y_0' - \omega^2 (x - x_0) - \omega' (y - y_0) = 0,$$

$$j_y = -\omega x_0' - \omega^2 (y - y_0) + \omega' (x - x_0) = 0,$$

то полученная система линейных уравнений относительно неизвестных x, y будет вполне определенной, так как детерминант системы, равный $\omega^4 + \omega'^2$, отличен от нуля. Эта система имеет поэтому единственное решение x_1, y_1.

Вычтем из предыдущих выражений нулевые их значения, которые получим, полагая в них $x = x_1$, $y = y_1$; тогда будем иметь:

$$j_x = -\omega^2 (x - x_1) - \omega' (y - y_1),$$

$$j_y = -\omega^2 (y - y_1) + \omega' (x - x_1).$$

Это как раз такие формулы, которые мы имели бы (на основании сказанного в предшествующем n°), если бы точка M вращалась вокруг точки x_1, y_1, предполагаемой неподвижной, с переменной угловой скоростью ω. По этой причине точке x_1, y_1 дают название *центр ускорений*.

Мы имеем, таким образом, следующую теорему:

В каждый момент времени (исключая момент, когда $\omega = \omega' = 0$*) существует единственная точка фигуры, ускорение которой равно нулю (эту точку называют центром ускорений); ускорения всех остальных точек таковы, как если бы фигура вращалась вокруг этого центра, предполагаемого неподвижным, с переменной угловой скоростью* ω.

85. Определение нормального и тангенциального ускорений точки фигуры. Окружность и полюс перегибов. — Выберем для простоты оси координат специальным образом (фиг. 17). Поместим начало в мгновенном центре вращения C и проведем ось Cx по направлению ускорения γ_c точки C движущейся фигуры. Проекции γ_c на оси Cx и Cy равны тогда (n° 83)

$$\gamma_c = \omega y_0' > 0, \quad -\omega x_0' = 0 \quad (\text{отсюда } x_0' = 0).$$

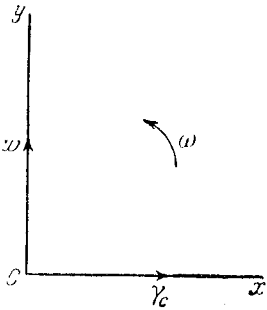
Пусть w есть вектор скорости переменного мгновенного центра C; проекции этого вектора на оси равны x_0', y_0'; но x_0' равно нулю, так что w совпадает со своей проекцией y_0' на ось Cy; мы можем поэтому положить, по величине и знаку,

$$w = y_0',$$

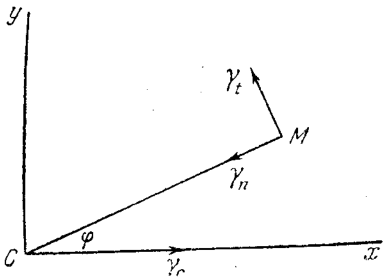
где w есть *алгебраическое значение скорости* мгновенного центра C (скорость считается положительной, если ее направление совпадает с Cy). После этого имеем

$$\gamma_c = \omega y_0' = \omega w > 0.$$

Таким образом, w имеет знак, одинаковый со знаком ω, и, следовательно, *вектор скорости* $\boldsymbol{w}$ *повернут относительно ускорения* γ_c *на прямой угол в сторону вращения* ω.



Фиг. 17.



Фиг. 18.

Полное ускорение точки M получается сложением ее ускорения при круговом движении вокруг C с ускорением $\gamma^з$. Нормальная и тангенциальная составляющие полного ускорения параллельны аналогичным составляющим в круговом движении (исключение представляет лишь точка C), так как CM есть нормаль к траектории. Поэтому чтобы получить составляющие полного ускорения, нужно прибавить соответственно к γ_n и γ_t составляющие γ_c по тем же направлениям. Выполним эти вычисления.

Пусть r и φ — полярные координаты точки M (предполагаемой отличной от C), т. е. r есть радиус-вектор CM, и φ — угол его наклона к Cx (фиг. 18). Так как ускорение γ_c направлено по Cx, и положительное направление нормали есть MC, то алгебраическое значение полного нормального ускорения, j_n, будет

$$j_n = \gamma_n - \gamma_c \cos\varphi = \omega^2 r - \omega w \cos\varphi.$$

Обозначим через u величину (положительную вместе с $\gamma_c = w\omega$)

$$u = \frac{w}{\omega};$$

тогда значение нормального ускорения равно

$$j_n = \omega^2 (r - u \cos \varphi). \qquad (4)$$

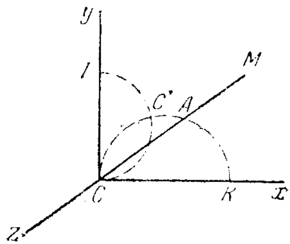
Переходим к тангенциальному ускорению. Положительная ориентация для этого ускорения определяется направлением прямого вращения вокруг точки C *), поэтому имеем

$$j_t = \gamma_t - \gamma_c \sin \varphi = r\omega' - \omega w \sin \varphi. \qquad (5)$$

Рассмотрим некоторые приложения этих формул.

Найдем сначала геометрическое место точек движущейся фигуры, нормальные ускорения которых в момент t равны нулю. На основании формулы (4) уравнение этой кривой имеет вид:

$$r = u \cos \varphi.$$



Фиг. 19.

Отложим на оси Cx (фиг. 19) от точки C в положительную сторону отрезок CK, равный u (т. е. $w : \omega$); предшествующее уравнение есть (в полярных координатах r, φ) уравнение окружности, построенной на CK как на диаметре. Эта окружность называется *окружностью перегибов*, а точка K — *полюсом перегибов*. Точки фигуры, расположенные на этой окружности, проходят в данный момент через точки перегиба своих траекторий, так как их нормальные ускорения $v^2 : R$ равны нулю. Обратно, если какая-нибудь точка проходит через точку

*) Иначе говоря, положительное направление на касательной определяется направлением вращения от оси Cx к оси Cy. *(Прим. перев.)*

перегиба своей траектории, то она должна находиться в данный момент на этой окружности, так как $v^2:R$ для нее равно нулю. Кроме того, касательная к траектории в этой точке проходит через полюс перегибов K, так как, с одной стороны, эта касательная перпендикулярна к MC, а с другой, угол KMC должен быть вписан в полуокружность, если точка M лежит на окружности перегибов.

Найдем также геометрическое место точек фигуры, касательные ускорения которых равны нулю. На основании формулы (5) уравнение этого геометрического места будет

$$r = \frac{\omega}{\omega'} w \sin \varphi.$$

Отложим по оси Cy отрезок CI, равный по величине и знаку $\frac{\omega}{\omega'} w$; предыдущее уравнение есть уравнение окружности, построенной на отрезке CI как на диаметре.

Точка K удалится в бесконечность, если угловая скорость ω обратится в нуль; точка I удалится в бесконечность, если угловое ускорение ω' будет равно нулю, а ω будет отлично от нуля. Если же обе величины ω и ω' равны нулю, то положение I сделается неопределенным. Исключим этот последний случай, тогда обе указанные окружности (имеющие общую точку C) пересекутся в другой точке C', полное ускорение которой равно нулю: эта точка есть поэтому центр ускорений.

Точка C движущейся фигуры была исключена из предыдущих рассуждений. В этой точке скорость равна нулю, поэтому ее ускорение γ_c параллельно ее скорости в момент $t + dt$ и, следовательно, направлено по касательной к траектории точки C фигуры. Таким образом, γ_c есть тангенциальное ускорение, нормальное же ускорение точки фигуры, совпадающей с C, равно нулю.

86. Формула Савари. — Выражение (4) для j_n приводит к построению центра кривизны Z траектории, описываемой точкой M движущейся фигуры. Обозначим через R алгебраическое значение радиуса кривизны MZ, считая это значение положительным при ориентации в ту же сторону, как j_n, т. е. от M к C. Условившись так относительно знаков, будем иметь

$$j_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 r^2}{R};$$

сравнивая полученную формулу с выражением (4) для j_n, будем иметь

$$\frac{r^2}{R} = r - u\cos\varphi, \tag{6}$$

или еще

$$R(r - u\cos\varphi) = r^2.$$

Пусть A — точка, в которой радиус-вектор CM пересекает окружность перегибов. Так как имеем (учитывая знаки)

$$R = MZ, \quad r - u\cos\varphi = MA,$$

то предыдущая формула дает, по величине и знаку,

$$MZ \cdot MA = (MC)^2. \tag{7}$$

Полученная формула носит название *формулы Савари*. Она написана в виде, наиболее удобном для учета знаков. Между тем, чаще всего ее пишут иначе. Соотношение (6) может быть написано в виде

$$\frac{r(R-r)}{R} = u\cos\varphi;$$

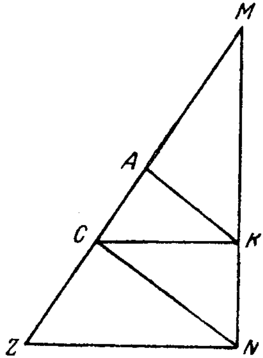
полагая $R = r + \rho$, приведем его окончательно к следующему виду:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u\cos\varphi}. \tag{8}$$

Такова, в ее классической форме, *формула Савари*.

Формула Савари, написанная в виде (7), показывает, что два отрезка MZ и MA имеют одинаковые знаки, т. е. ориентированы в одну сторону. Таким образом, ***центр кривизны всегда лежит на перпендикуляре MC к скорости точки M с той же стороны от M, как и точка A, в которой радиус-вектор CM пересекает окружность перегибов.***

87. Первое построение центра кривизны. — Если известно положение мгновенного центра C и полюса перегибов K, то формула Савари дает возможность построить центр кривизны Z следующим образом. Из точки M проводят полупрямые MC и MK (фиг. 20). Из точки C восставляют к MC перпендикуляр CN, пересекающий MK в N, затем проводят прямую NZ, параллельную KC; прямая NZ пересекает MC в искомом центре кривизны Z. В самом деле, если опустим, кроме того, перпендикуляр KA на MC, то A есть точка пересечения CM с окружностью перегибов. На основании подобия имеем



Фиг. 20.

$$\frac{MA}{MC}=\frac{MK}{MN}=\frac{MC}{MZ},$$

откуда

$$MA \cdot MZ=(MC)^2.$$

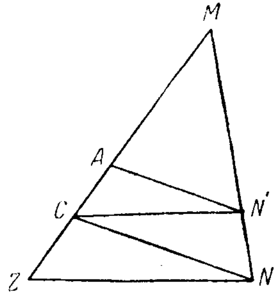
Таким образом, Z есть центр кривизны, в силу формулы (7).

88. Второе построение центра кривизны. — Если кроме C, известна точка A на радиусе MC (что имеет место, когда дана окружность перегибов), то центр кривизны Z можно построить, не обращаясь к точке K. Сначала проводим произвольные прямые MN и CN, пересекающиеся в точке N (фиг. 21); потом строим прямую AN', параллельную CN и пересекающую MN в точке N'; тогда прямая NZ, параллельная $N'C$, пересечет MC в центре кривизны Z, как в предшествующем построении.

Если бы неизвестным было положение точки A, а даны были бы точки M и Z, то, изменив соответственно построение, мы нашли бы точку A.

Отсюда следует, что для построения окружности перегибов достаточно знать мгновенный центр C и центры кривизны Z и Z' траекторий двух точек M и M' фигуры.

Необходимо только, чтобы радиусы-векторы r и r' точек M и M' имели различные направления. Действительно, в этом случае можно построить две различные точки A и A' окружности перегибов, что вместе с точкой C дает три точки, достаточные для построения этой окружности. После этого можно построить центр кривизны для любой точки фигуры. Нетрудно, впрочем, указать прямое построение неизвестного центра кривизны при помощи двух известных центров. Это построение мы не будем здесь рассматривать.



Фиг. 21.

89. Третье построение центра кривизны. — Если известны положения центров кривизны O и O' подвижной C_m и неподвижной C_f центроид, то полюс перегибов можно найти следующим способом.

Проведем через точку C две прямоугольные оси Cx и Cy, направив ось x по общей нормали Cx к обеим кривым, в ту сторону от неподвижной центроиды, где находится подвижная центроида. При этих условиях, если заставить фигуру двигаться так, чтобы вращение вокруг мгновенного центра происходило в положительную сторону (от Cx к Cy), то скорость w этого центра будет направлена по оси Cy в положительную сторону и будет поэтому положительна. Величина $u = w : \omega$, подлежащая определению, будет также положительной и расположится по Cx. Пусть R и R' — радиусы кривизны CO и CO' подвижной и неподвижной центроид, рассматриваемые как положительные или отрицательные, смотря по тому, отложены они в сторону Cx или в противоположную сторону. Пусть далее ds — длина дуги, описываемой точкой C на той и на другой кривой за время dt; тогда $ds = w dt$.

Если бы неподвижная центроида катилась по своей касательной Cy в течение промежутка времени dt, то она повернулась бы на угол (положительный или отрицательный)

$$d\varphi' = \frac{ds}{R'} = \frac{wdt}{R'}.$$

Точно так же, если бы подвижная центроида катилась по своей касательной, то она повернулась бы на угол

$$d\varphi = \frac{ds}{R} = \frac{wdt}{R};$$

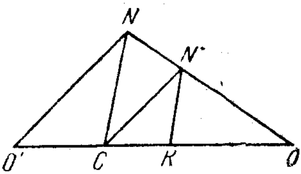
но, так как она катится по кривой C_f, то она повернется на разность двух предыдущих углов

$$d\varphi - d\varphi' = wdt\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Так как этот угол равен ωdt, то получим

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{\omega}{w} = \frac{1}{u}.$$

Таким образом, приходим к следующему построению точки K (фиг. 22). Соединим произвольную точку N плоскости с тремя точками C, O, O'; проведем прямую CN', параллельную $O'N$ и пересекающую ON в точке N'; проведем, наконец, $N'K$, параллельную CN. Прямая $N'K$ пересечет OO' в искомой точке K, которая и есть полюс перегибов.



Фиг. 22.

Действительно, имеем

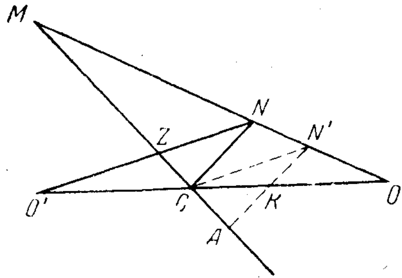
$$\frac{OO'}{CO} = \frac{NO}{N'O} = \frac{CO}{OK} = \frac{CO + OO'}{CO + OK},$$

или

$$\frac{R' - R}{R} = \frac{R'}{CK}; \quad \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{1}{CK}.$$

Таким образом, в силу результата, полученного выше, имеем $CK = u$.

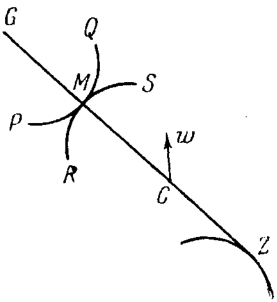
Когда даны два центра кривизны, то для определения центра кривизны L траектории точки M фигуры нет необходимости строить полюс перегибов K. Действительно, в этом случае мы можем выполнить следующее построение Савари (фиг. 23). Соединяем точку M с центром кривизны O подвижной центроиды; проводим через мгновенный центр перпендикуляр CN к MC, представляющий собой нормаль к траектории точки M. CN пересекает MO в точке N; проводим прямую $O'N$. Эта прямая пересечет нормаль MC в искомом центре кривизны. В самом деле, построим полюс перегибов K только что указанным способом, проводя прямую CN', параллельную $O'N$ и пересекающую OM в N', затем прямую $N'K$, параллельную CN и пересекающую OO' в точке K; прямая $N'K$ (перпендикулярная к MC) пересекает CM в A. Теперь видно, что центр кривизны Z построен при помощи данных точек C, A и вспомогательных N, N' так же, как при втором способе построения этого центра (n° 88, фиг. 21).



Фиг. 23.

90. Центр кривизны огибающей неизменяемой движущейся линии. — Рассмотрим кривую PQ неизменяемой формы, движущуюся так, что она постоянно остается в соприкосновении с другой кривой RS, которая представляет, таким образом, ее огибающую (фиг. 24). Определение центра кривизны Z огибающей в точке M производится на основании изложенных выше соображений. Рассмотрим положение кривой PQ в тот момент, когда она касается RS в точке M, пусть G — центр кривизны PQ

в этой точке. При перемещении движущейся фигуры прямая GZ, представляющая собой общую нормаль к кривым PQ и RS, катится по развертке кривой RS. В свою очередь при движении по отношению к GZ развертка кривой PQ (которая в своем абсолютном движении увлекает движущуюся фигуру, но не изображена на фигуре 24) катится по той же нормали GZ. Перемещение движущейся фигуры складывается, таким образом, из двух одновременных движений: переносного качения вместе с прямой GZ и относительного качения по GZ. В относительном движении скорость центра кривизны G, совпадающего с точкой касания прямой GZ и развертки, равна нулю, поэтому скорость точки G приводится к скорости переносного движения. Пусть C — мгновенный центр абсолютного вращения кривой PQ, ω — угловая скорость вокруг C, r — расстояние GC, ρ — отрезок CZ и ω_1 — угловая скорость при вращении нормали GZ вокруг Z (переносное вращение). Абсолютная скорость ωr точки G совпадает со скоростью ее переносного движения $\omega_1 (r+\rho)$; следовательно,



Фиг. 24.

$$\omega r = \omega_1 (r+\rho).$$

С другой стороны, мгновенный центр C перемещается по нормали GZ; скорость его переносного движения есть проекция на направление, перпендикулярное к GZ, его абсолютной скорости w, составляющей с GZ (или MC) угол φ, определенный выше. Поэтому имеем

$$\omega_1 \rho = w \cos\varphi.$$

Исключая ω_1 из этих двух соотношений, получим:

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{r+\rho}{\omega r} = \frac{\rho}{w\cos\varphi},$$

откуда

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho}=\frac{\omega}{w\cos\varphi}=\frac{1}{u\cos\varphi}.$$

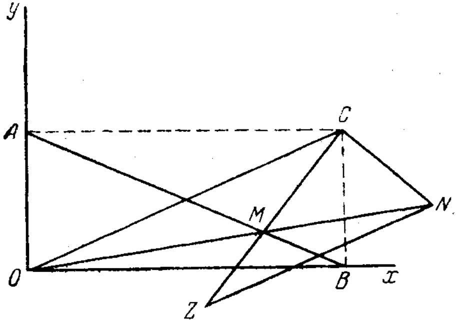
Эта формула тождественна с формулой Савари, следовательно, Z есть центр кривизны траектории точки G. Мы имеем, таким образом, следующую замечательную теорему:

Если кривая неизменяемой формы перемещается в своей плоскости и имеет огибающую, то центр кривизны огибающей в какой-нибудь ее точке совпадает с центром кривизны траектории, описываемой центром кривизны подвижной кривой, в тот момент, когда последняя касается огибающей в рассматриваемой точке.

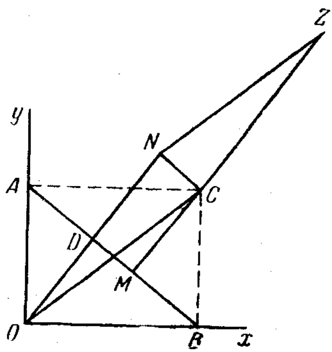
Если движущаяся кривая представляет собой прямую, то центр кривизны ее удален в бесконечность по нормали к ней, но теорема остается справедливой.

91. Различные приложения. — *Эпициклоиды.* Окружность с центром O катится внешним образом по неподвижной окружности с центром O': точка M движущейся окружности описывает при этом эпициклоиду. Точка касания C обеих окружностей есть мгновенный центр, MC — нормаль к эпициклоиде. Проведем диаметр MON движущейся окружности и соединим N и O', прямая NO' пересечет MC в центре кривизны Z эпициклоиды (n° 89). Подобным же способом можно построить центр кривизны *удлиненной* или *укороченной эпициклоиды*, описанной внешней или внутренней точкой катящейся окружности. При внутреннем качении кривая, описанная точкой M окружности, представляет собой *гипоциклоиду*, но построения останутся такими же.

Рассмотрим теперь эллипс, описанный точкой M прямой AB (фиг. 25), которая скользит своими концами по двум неподвижным осям Ox и Oy. Мгновенный центр C есть точка пересечения перпендикуляров к обеим осям, восставленных в точках A и B. Точка K совпадает с точкой пересечения O обеих осей Ox и Oy, так как скорости точек A и B проходят через K (все точки прямолинейной траектории представляют собой точки перегиба). Теперь можем выполнить первое построе-



Фиг. 25.



Фиг. 26.

ние центра кривизны Z (n° 87): соединяем прямой точки O и M, проводим прямую CN, перпендикулярную к MC и пересекающую OM в точке N, и прямую NZ, параллельную OC и пересекающую CM в Z: точка Z и будет искомым центром кривизны.

Можно также найти центр кривизны огибающей прямой AB, рассмотренной в предыдущей задаче (фиг. 26). Мы знаем уже мгновенный центр C и центр перегибов O (точка K предшествующих n°). Точка касания M прямой с ее огибающей есть основание перпендикуляра CM, опущенного из точки C на прямую, так как точка M перемещается параллельно AB. Найдем теперь центр кривизны Z огибающей в этой точке. Центр кривизны огибаемой (прямой AB) есть точка G, удаленная в бесконечность по прямой CM. Искомый центр Z есть центр кривизны траектории, описываемой в бесконечности точкой G движущейся фигуры. Первое построение этого центра кривизны (n° 87) выполняется в данном случае как в предельном следующим образом:

Проводим прямую OD (заменяющую GK, n° 87), параллельную MC и пересекающую AB в точке D, затем прямую CN, перпендикулярную к MC и пересекающую OD в точке N, наконец, прямую NZ, параллельную OC и пересекающую MC в искомой точке Z.

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ В ДВИЖУЩЕМСЯ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

92. Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку. — Рассмотрим сначала распределение ускорений в твердом теле, имеющем одну неподвижную точку. Возьмем эту точку за начало трех прямоугольных осей $Oxyz$. Пусть p, q, r — проекции мгновенного вращения ω твердого тела вокруг оси, проходящей через точку O. Проекции скорости точки M с координатами x, y, z тогда будут:

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

Проекции ускорения точки M на оси будут равны производным от этих выражений:

$$\begin{aligned} j_x &= qv_z - rv_y + (q'z - r'y), \\ j_y &= rv_x - pv_z + (r'x - p'z), \\ j_z &= pv_y - qv_x + (p'y - q'x). \end{aligned}$$

Направим ось z по мгновенной угловой скорости ω в момент t в ту же сторону, как ω; тогда будем иметь $p = q = 0$, $r = \omega$; следовательно,

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0,$$

и предыдущие формулы для рассматриваемого момента t приводятся к виду:

$$\begin{aligned} j_x &= -\omega^2 x + q'z - r'y, \\ j_y &= -\omega^2 y + r'x - p'z, \\ j_z &= \qquad\qquad p'y - q'x. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти равенства показывают, что j есть результирующая двух векторов.

Первый вектор, проекции которого равны $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$, 0, есть нормальное ускорение γ_n, соответствующее непрерывному вращению ω вокруг мгновенной оси, рассматриваемой как неподвижная.

Второй вектор имеет проекции на оси

$$q'z - r'y, \quad r'x - p'z, \quad p'y - q'x.$$

Но в рассматриваемый момент p, q равны нулю вследствие выбора осей координат; дифференцируя равенство $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ и замечая, что $r = \omega$, получим $r' = \omega'$. Поэтому предыдущие проекции могут быть также написаны в виде:

$$q'z - \omega'y, \quad \omega'x - p'z, \quad p'y - q'x.$$

Если бы мгновенная ось имела постоянное направление, то проекции касательного ускорения были бы $-\omega'y$, $\omega'x$, 0. Отсюда следует, что второй вектор отличается, вообще говоря, от касательного ускорения, вызванного вращением ω в предположении, что оно непрерывное; он совпадает с этим касательным ускорением только в том частном случае, когда $p' = q' = 0$.

Второй вектор в выражении ускорения допускает простое истолкование. Если вектор угловой скорости ω отложить от точки O, то скорость конца этого переменного вектора будет иметь проекциями p', q', r'. Отложим от точки O вектор $\frac{d\omega}{dt}$, геометрически равный указанной скорости; тогда второй вектор в выражении ускорения будет равен моменту относительно точки M определенного таким образом вектора, т. е. векторному произведению

$$\left[\overrightarrow{MO}\,\frac{d\omega}{dt}\right].$$

93. Распределение ускорений в свободном твердом теле. — Рассмотрим теперь произвольное движение свободного твердого тела. Пусть O — какая-нибудь точка тела.

Проведем через нее три подвижные оси, движущиеся поступательно. Тогда движение твердого тела может быть разложено на движение по отношению к подвижным осям $Oxyz$ и переносное, которое будет поступательным и определяется движением точки O тела. Сложное центробежное ускорение равно нулю в случае поступательного переносного движения; поэтому ускорение точки M тела равно геометрической сумме относительного ускорения, равного ускорению при движении тела вокруг неподвижной точки, и переносного ускорения, представляющего собой ускорение точки O. Пусть $\boldsymbol{w}$ — ускорение точки O, и p, q, r — проекции на оси переменного вращения ω тела; проведем ось z параллельно оси вращения в *рассматриваемом ее положении* и в сторону вектора ω: тогда проекции абсолютного ускорения точки M (с координатами x, y, z) будут:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= w_x - \omega^2 x + q'z - r'y, \\ j_y &= w_y - \omega^2 y + r'x - p'z, \\ j_z &= w_z \qquad\quad\; + p'y - q'x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Это ускорение равно, таким образом, сумме трех ускорений: ускорения γ_0 точки O тела, выбранной произвольно, нормального ускорения γ_n при непрерывном вращении вокруг оси, параллельной вектору ω и проходящей через O, наконец, третьего ускорения с проекциями $q'z - r'y, \ldots$, интерпретацию которого мы дали в предшествующем n°.

Если направление вектора ω остается неизменным, то p' и q' постоянно равны нулю, и третье ускорение совпадает с касательным ускорением, получающимся при вращении. Отсюда имеем следующую теорему:

Если вектор ω мгновенной угловой скорости остается параллельным постоянному направлению, то ускорение любой точки тела равно геометрической сумме ускорения точки O тела, взятой произвольно, и ускорений касательного и нормального в непрерывном вращении ω вокруг точки O.

94. Центр ускорений. — В движущемся твердом теле, вообще говоря, существует точка, ускорение которой равно нулю. Эта точка x, y, z определяется следующей системой уравнений, вытекающей из системы (2):

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 x - q'z + r'y &= w_x, \\ \omega^2 y - r'x + p'z &= w_y, \\ -p'y + q'x &= w_z. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) будет определенной, если ее детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega^2 & r' & -q' \\ -r' & \omega^2 & p' \\ q' & -p' & 0 \end{vmatrix} = \omega^2(p'^2 + q'^2)$$

отличен от нуля, что имеет место в общем случае. Таким образом, если Δ отличен от нуля, то существует единственная точка тела, ускорение которой равно нулю. Эту точку называют *центром ускорений*.

Предположим, что мы выбрали подвижные оси $Oxyz$ таким образом, что точка *O в данный момент* совпадает с центром ускорений; тогда w равно нулю, и уравнения (2) совпадут с уравнениями (1), относящимися к случаю, когда точка O неподвижна. Отсюда получаем следующую теорему:

В каждый момент времени в движущемся твердом теле существует такая точка, что, с точки зрения ускорений, движение тела происходит так, как если бы оно совершало переменное вращение $\boldsymbol{\omega}$ *вокруг этой точки, рассматриваемой как неподвижная. Эта точка, изменяющая с течением времени свое положение в теле, есть центр ускорений.*

95. Исключительный случай при определении центра ускорений. — Предыдущая теорема и существование единственного центра ускорений могут иметь исключение лишь в том случае, когда определитель Δ обращается в нуль в рассматриваемый момент t.

Для этого нужно, чтобы мы имели:

$$\text{или } \omega = 0, \quad \text{или } p' = q' = 0.$$

Первый случай. Пусть $\omega = 0$ в момент t, тогда уравнения (3) будут несовместны, и мгновенный центр ускорений, вообще говоря, не существует. Исключение представит только тот случай, когда выполняется условие:

$$p'w_x + q'w_y + r'w_z = 0.$$

Это условие показывает, что если вектор $\boldsymbol{\omega}$ откладывается от неподвижной точки, то скорость $\frac{d\omega}{dt}$ его конца перпендикулярна к ускорению некоторой точки тела (которая в остальном может быть какой угодно). Если условие выполняется, то уравнения (3) представляют собой уравнения прямой, параллельной $\frac{d\omega}{dt}$, все точки которой суть центры ускорений.

Если ω постоянно равно нулю, то p', q', r' тоже равны нулю постоянно, и уравнения (3) имеют следствием $w = 0$. Центр ускорений может существовать при таких условиях лишь в том случае, когда движение твердого тела приводится к равномерному поступательному, что очевидно *a priori*.

Второй случай. Предположим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ не равен нулю в момент t, но что $p' = q' = 0$. Уравнения (3) приводятся к виду:

$$\omega^2 x + r'y = w_x, \quad \omega^2 y - r'x = w_y, \quad w_z = 0.$$

Так как последнее равенство, вообще говоря, не имеет места, то центра ускорений не существует. Центр ускорений существует лишь в том случае, когда удовлетворяется уравнение $w_z = 0$; в этом случае имеется бесконечное число центров, расположенных на прямой, которая определяется двумя уравнениями, предшествующими этому последнему уравнению. Эта прямая параллельна оси Oz, следовательно, вектору $\boldsymbol{\omega}$, а также и $\frac{d\omega}{dt}$ (так как $p' = q' = 0$).

Если имеем постоянно $p' = q' = 0$, то скорость конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ (приложенного в неподвижной точке) параллельна самому вектору $\boldsymbol{\omega}$, имеющему в данном случае неизменное направление. Центр ускорений существует лишь в том случае, когда $w_z = 0$, т. е. когда скольжение вдоль оси Моцци равномерное. Такое скольжение не оказывает влияния на ускорение. Ускорения в этом случае будут такими же, как при цилиндрическом качении тела: мы приходим к случаю движения плоской фигуры в своей плоскости.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ. ДИНАМИКА ТОЧКИ

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ. ФИЗИЧЕСКИЕ СИЛЫ. ЕДИНИЦЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ НАЧАЛА

96. Физическая механика и теоретическая механика.— Задача механики заключается в том, чтобы описывать движения тел в пространстве и выражать законы этих движений. *Физическая механика* является наукой экспериментальной, и потому ее результаты имеют лишь эмпирическую ценность. Ее законы представляют собой индуктивные положения, основанные на большом числе согласующихся между собой фактов, и не являются математическими следствиями некоторых начальных истин. Вычисления физической механики имеют лишь известную степень приближения, тесно связанную с действительным измерением конкретных величин, и самые законы ее представляют собой, повидимому, лишь приближенные истины.

В теоретической механике вместо таких тел, которые встречаются в природе, рассматривают *идеальные тела*, находящиеся, вообще говоря, в таком же отношении к телам природы, в каком, в частности, находятся геометрические тела к твердым физическим телам. Индуктивные истины экспериментальной механики заменяются при этом математическими определениями, *логически согласованными* между собой, из которых посредством математических выводов получаются строгие следствия.

97. Абсолютно неподвижные оси. Абсолютное время.— *Принципы физической механики* постулируют *абсолютное движение* и *абсолютное время.* Первый постулат, который приходится вводить при формулировке этих принципов, заключается в допущении, что они будут истинны, если мы будем относить движение к некоторой определенной системе осей и измерять время некоторым определенным способом.

Этими особенными *привилегированными* осями и *привилегированным* временем являются *абсолютно неподвижные оси* и *абсолютное время*. Эти оси и это время нельзя изменять произвольно, не изменяя законов механики. Определить наилучшим образом положение неподвижных осей в системе мира и дать способ измерения абсолютного времени составляет уже задачу астрономии.

При настоящем состоянии астрономических знаний мы можем приписать *абсолютную неподвижность* трехграннику отсчета, имеющему свое начало в центре тяжести солнечной системы и ориентированному неизменяемым образом по отношению к неподвижным звездам *). В качестве абсолютного времени берут *среднее время*, которое мы определяем, считая равномерным вращательное движение Земли по отношению к неподвижным звездам. Ни одно из этих определений не обладает абсолютной точностью, так как звезды не представляют собой строго неизменяемой системы **), но эти определения оказываются до настоящего времени практически достаточно точными.

В теоретической механике за абсолютные принимают такие оси и такое время, для которых оказываются истинными по определению основные законы механики. Мы увидим далее, что если эти основные законы справедливы по отношению к некоторой системе осей, то они будут справедливы также по отношению к другой системе осей, находящейся в равномерном поступательном движении по отношению к первой системе. Этим различным системам осей, по отношению к которым оказываются

*) Точнее говоря, эта система координат с большой степенью точности является галилеевой. (*Прим. перев.*)

**) К этому следует добавить, что центр тяжести солнечной системы, т. е. начало „абсолютно неподвижных“ осей, движется относительно неподвижных звезд. (*Прим. перев.*)

справедливыми основные законы механики, часто дают название *галилеевых систем.*

Замечание.—*В физической механике* не всегда оказывается необходимым относить движение к абсолютно неподвижным осям, которые мы определили выше. Такие оси применяются в астрономии. Для движения же тел вблизи от поверхности Земли мы можем, как это показывают опыты, при которых принимается во внимание теория относительного движения, применять основные законы механики, считая Землю неподвижной системой отсчета, но при условии замены притяжения Земли силой тяжести, или весом тела. Из этого правила следует, впрочем, сделать некоторые исключения: к ним, в частности, относятся опыты с маятником Фуко и с гироскопом и стрельба дальнобойной артиллерии; эти случаи движения обнаруживают, с точки зрения допущенных принципов, вращение Земли.

98. **Материальная точка.**—*В физической механике*, если не хотят вводить никаких гипотез о строении материи, говорят, что материальная точка представляет собой частицу материи, достаточно малую для того, чтобы можно было практически определять ее положение и движение так же, как для точки, не имеющей размеров, не учитывая при этом ее вращения. Это условие будет осуществлено, если размерами частицы можно пренебречь.

Мы будем предполагать во всех случаях, что тела образованы соединением весьма большого числа материальных точек. Разложение тела на материальные точки действительно осуществляется при молекулярной гипотезе. Если эта гипотеза не вводится, то разложение имеет в известной мере искусственный и произвольный характер. При этом мы мысленно разлагаем весь объем тела на элементы объема, достаточно малые для того, чтобы их можно было считать материальными точками.

В теоретической механике можно придать теории наибольшую простоту и ясность, рассматривая материю образованной из непротяженных точек, изолированных друг от друга. Мы будем пользоваться при изложении этим простым представлением. Далее мы увидим, как следует видоизменить это представление, если мы захотим ввести гипотезу о непрерывности материи.

Таким образом, в теоретической механике *материальная точка* представляет собой геометрическую точку, наделенную по определению механическими свойствами; эти свойства обусловливаются основными законами, которые мы теперь изложим.

Основные законы классической механики представляют собой, за исключением некоторых ограничений и изменений в способе расположения, не что иное, как систематическое распространение на материальные точки некоторых сформулированных Галилеем и Ньютоном принципов, управляющих движениями тел солнечной системы.

99. Первый основной закон: закон инерции.— Первый из основных законов есть *закон инерции, или принцип Галилея;* предварительно и несколько неточно его можно выразить в следующих словах: *Тело само неспособно изменить скорость, которой оно обладает в некоторый момент. Если бы тело было одно, то движение его было бы прямолинейным и равномерным. Скорость тела может быть изменена лишь благодаря присутствию других тел, действующих на него.*

Так например, изменение скорости планеты в ее движении вокруг Солнца определяется исключительно действием Солнца и других планет и зависит от взаимного расположения всех этих тел.

Эта первая формулировка закона инерции представляется несколько неопределенной, поэтому следует более точно описать движение тела, о котором идет речь. Предположим для большей ясности, что имеется в виду твердое тело. В формулировке не говорится о вращательном движении, которое тело может иметь вокруг некоторой пересекающей его оси, а только о его поступательном движении в пространстве. Чтобы вполне определить это поступательное движение, необходимо рассмотреть движение какой-нибудь одной точки тела. Опыт, в согласии с теорией, показывает, что в теле имеется одна точка, строго подчиняющаяся в своем движении закону инерции. Эта точка называется *центром тяжести*, и несколько позднее мы увидим, как можно ее определить на основании законов механики. Пока отметим только, что когда закон инерции применяют к телу, то предполагают, что тело движется поступательно, т. е. движение тела совпадает с движением его центра тяжести. Для планет, например, центр тяжести достаточно точно совпадает с геометрическим центром фигуры, и потому при формулировке закона инерции совершенно естественно имелся в виду этот последний.

Из закона инерции следует, что если скорость тела изменяется, то имеются другие тела, присутствие которых влияет на движение данного тела. О механизме осуществления этого влияния мы, вообще говоря, абсолютно ничего не знаем. Когда мы констатируем действие одного тела на другое, то обычно говорим, что это действие представляет собой *силу*, что эта сила имеет своим источником первое тело и приложена ко второму.

Опыт позволяет более или менее непосредственно удостовериться в справедливости закона инерции для тел. В *теоретической механике* закон инерции распространяют на все материальные точки, что приводит к следующей его формулировке:

Формулировка закона инерции. *Всякое ускорение материальной точки необходимо определяется действием других материальных точек.*

В этом новом выражении закона трудность, с которой мы встретились выше при истолковании скорости, сообщенной телу, исчезла, так как в понятии скорости геометрической точки нет уже никакой неопределенности.

Несколько позднее, в динамике систем, мы увидим, что закон инерции для тел в той форме, в какой он был высказан сначала, есть следствие закона инерции для материальных точек и других принципов механики, которые нам предстоит еще изложить.

100. Второй основной закон. Определение массы.— Если в данный момент тело A действует на тело B, то действие будет взаимным: тело A сообщает некоторое ускорение j' телу B, а тело B, в свою очередь, вызывает ускорение j тела A.

Выражаясь более точно, следует сказать, что эти ускорения представляют собой ускорения центров тяжести двух тел, как мы это выяснили в предыдущем n°; они могут изменяться в зависимости от положения, движения и физического состояния (электрического, магнитного и т. д.) обоих тел, отношение $j:j'$ величин обоих ускорений остается одним и тем же при всех опытах (с данными телами). Это отношение есть, таким образом, постоянная величина, характеризующая совокупность двух тел A и B. Поставим в соответствие телу A положительное число M, которое будем называть его *массой*. Мы можем также поставить в соответствие телу B число M', удовлетворяющее условию:

$$Mj = M'j', \tag{1}$$

которое будет иметь место во всех опытах с этими телами. Число M' есть *масса* тела B.

Пусть теперь C — третье тело. Мы можем определить его массу M'' сравнением с массой M тела A, как мы только что сделали для тела B. Но с равным правом можно определить массу тела C сравнением с массой M' тела B. Для вполне однозначного и непротиворечивого определения массы необходимо, чтобы оба опыта приводили к одному и тому же результату. И это подтверждается экспериментом.

Если массу тела A принять за единицу, то M будет равно 1, и массы M', M'', ... других тел будут выражаться в выбранных таким образом единицах массы.

Если разделить тело на несколько частей, то можно утверждать, что масса всего тела равна сумме масс различных его частей. Таким образом, возникает взгляд на массу как на меру количества материи, при этом допускается, что это количество остается неизменным при всякого рода дроблении, которому материя может подвергаться.

Когда мы будем рассматривать вес (n° 108), то увидим, что массы тел, расположенных на земной поверхности, пропорциональны их весам в одном и том же месте, иначе говоря, их относительным весам, измеренным посредством взвешивания. Таким образом, если в качестве единицы массы мы возьмем массу одного грамма, то масса какого-нибудь тела численно равна его весу, выраженному в граммах (n° 112). Таким именно образом практически определяют массы тел, расположенных на земной поверхности.

Масса самой Земли определяется с помощью непосредственного измерения притяжения, испытываемого некоторым телом со стороны другого тела, масса которого известна (опыт Кэвендиша). Массы тел солнечной системы вычисляются на основании уже определенной массы Земли. Все эти определения масс производятся на основании закона всемирного тяготения (n° 107).

Если мы будем теперь делить материю на части до самых последних элементов, представляющих собой материальные точки, то нам придется в конце концов применить предшествующие заключения к самим материальным точкам; мы приходим, таким образом, к следующим законам:

1°. *Каждой материальной точке можно поставить в соответствие некоторое положительное число m, называемое массой точки, таким образом, что при действии друг на друга двух материальных точек с массами m и m' значения j и j' ускорений, которые они получают при таком взаимодействии, всегда удовлетворяют соотношению:*

$$mj = m'j'. \tag{2}$$

2°. *Если массу одного грамма принять за единицу, то масса материальной точки численно равна ее весу, выраженному в граммах.*

3°. *Масса тела равна сумме масс всех материальных точек, его составляющих.*

101. Математическое определение и измерение силы.—Если материальная точка в некоторый момент времени подвергается действию других материальных точек, она получает в этот момент ускорение, определяемое вектором j. В этом случае говорят, что на точку действует сила F, определяемая геометрическим равенством

$$F = mj.$$

Сила есть, таким образом, вектор, приложенный к движущейся точке, имеющий те же направление и ориентацию, что и ускорение и по величине равный произведению mj *массы точки на численное значение ускорения.*

Предыдущее уравнение есть *основное уравнение* динамики.

102. Третий основной закон. Равенство действия и противодействия. — Когда две материальные точки M и M' действуют друг на друга, они получают соответственно ускорения j и j'. Эти два вектора прямо противоположны друг другу и направлены по прямой MM', соединяющей точки. Таким образом, названные точки с массами m и m' находятся под действием двух прямо противоположных сил, равных по величине mj и $m'j'$; величины этих сил должны быть равны между собой на основании определения массы. Одна из сил есть *действие*, другая — *противодействие*. Эти силы представляют собой притяжение или отталкивание в зависимости от того, стремятся ли они сблизить две точки, или удалить их друг от друга. Мы можем, таким образом, высказать следующий основной закон, выражающий равенство действия и противодействия.

Если две материальные точки действуют одна на другую, то действие и противодействие равны между собой и прямо противоположны.

103. Четвертый основной закон: независимость действия сил, или закон сложения сил. Физические условия, определяющие силы. — Изучение физических явлений заставляет нас допустить, что ускорения, которые две материальные точки вызывают друг у друга, и, следовательно, силы, действующие между ними, зависят только от физического состояния (электрического, магнитного и т. д.) каждой из двух точек, от их положений и скоростей. Если физические условия остаются неизменными, то силы взаимодействия этих двух точек не могут быть изменены возможными действиями на них других материальных точек. Действительно, можно установить, что когда несколько различных точек действуют одновременно на одну и ту же точку M, то ускорения, которые они вызвали бы у нее, действуя каждая отдельно, налагаются одно на другое, т. е. складываются геометрически. В этом заключается *закон независимости действия сил*.

Так как силы пропорциональны ускорениям, то точка M ведет себя так, как если бы она находилась под действием только одной силы, равной результирующей сил, происходящих от каждой из точек в отдельности.

Отсюда имеем следующий *закон сложения сил*, представляющий собой лишь другое выражение *закона независимости* действия сил:

Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то можно заменить эти силы их результирующей.

Заметим, что эта формулировка имеет физический смысл лишь благодаря возможности определять составляющие силы независимо от производимых ими эффектов, а именно так, как это было указано выше.

104. Замечания о двух определениях силы. — В изложенных выше законах понятие силы представлено с двух различных сторон. С точки зрения ее действия, сила определяется ускорением, сообщаемым ею материальной точке, к которой она приложена (динамическое определение силы). С точки зрения ее происхождения, она определяется физическим состоянием, расположением в пространстве и движением тел, являющихся источником или объектом ее действия (статическое определение силы). Соответствие между этими двумя определениями силы имеет эмпирическую основу, однако все то, что имеется объективного в механике, содержится в этом соответствии. Уничтожить это соотношение равносильно тому, чтобы лишить физическую механику всего ее содержания и привести теоретическую механику к одним номинальным определениям.

Понятие силы и измерение ее никоим образом не предполагают, что сила является реальностью сама по себе. Между тем большое число физиков склонны расссматривать силу как истинную реальность, существующую отлично от тел, которые являются ее источником или испытывают эффект ее действия. Они утверждают, что мускульное усилие, которое мы должны сделать, чтобы передвинуть тело, дает нам достаточно ясное представление о силе, рассматриваемой независимо от движения, которое она способна произвести. Мы, со своей стороны, вместе со многими другими, видим в этом антропоморфизм, оказывающийся, в конце концов, лишь иллюзорным и к тому же бесполезным. Тем не менее, понятие усилия предполагает более или менее ясное представление о точке приложения, напряженности и направлении, т. е. представление о векторе; все это составляет некоторый род интуиции, опирающейся на привычки ума, которые укоренились в течение многих поколений.

105. Силы действительные и силы фиктивные. Галилеевы системы отсчета. — До сих пор мы рассматривали лишь абсолютно неподвижные оси, определенные в **n° 97**. Силы, действующие между материальными точками и определяемые формулой $F = mj$, представляют собой *реальные силы*.

Предположим теперь, что движение отнесено к осям, которые сами движутся относительно неподвижных осей. Относительное ускорение j' точки с массой m будет в общем случае отличным от ее абсолютного ускорения j.

Реальная сила F, действующая на точку, есть mj. Но для наблюдателя, движущегося вместе с подвижной системой координат, точка имеет ускорение j': она ему кажется поэтому подверженной действию силы $F' = mj'$. Эта последняя есть *кажущаяся сила*, или, иначе, *фиктивная сила*, которую следует рассматривать как определяющую движение точки относительно подвижных осей. Но при этом нужно иметь в виду, что общие принципы, которые мы сформулировали выше, рассматривая реальные силы, не приложимы в том же виде к фиктивным силам, только что нами определенным. Этот вопрос будет освещен дополнительно в теории относительного движения.

Однако в том частном случае, когда система отсчета совершает прямолинейное и равномерное поступательное движение по отношению к абсолютно неподвижным осям, относительное ускорение совпадает с абсолютным ускорением, и силы, определенные в относительном движении, не отличаются от сил, определенных в абсолютном движении, т. е. от сил реальных. Законы и уравнения механики применяются по отношению к этим новым осям совершенно так же, как по отношению к неподвижным осям. Поэтому различные системы осей, находящихся в прямолинейном и равномерном поступательном движении одни относительно других, совершенно эквивалентны между собой с точки зрения принципов механики; мы уже упоминали выше, что их называют *галилеевыми системами*.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ СИЛЫ. ПРИТЯЖЕНИЕ. ВЕС. УПРУГИЕ СИЛЫ

106. Физические силы. — Материальные точки действуют друг на друга в условиях, весьма разнообразных. Силы, возникающие во всех этих случаях, носят общее название *физических сил*. Таковы силы всемирного тяготения, упругие или молекулярные силы, электрические, магнитные притяжения и отталкивания и т. д. Определение этих сил и исследование условий их действия составляют, как мы уже указывали выше, содержание опытной физики.

Между прочим, полезно обратить внимание на следующие две ка егории сил, которые имели преобладающее значение в установлении механических законов: 1° вес, принадлежащий к силам всемирного тяготения, и 2° упругие силы.

107. Всемирное тяготение. Масса инертная и масса гравитационная. — Закон всемирного тяготения был установлен Ньютоном и представляет собой одно из самых важных открытий во всей истории науки. Этот закон выводится из законов Кеплера, относящихся к движениям планет, и формулируется следующим образом:

Всякие две материальные точки с массами m и m' притягивают друг друга силами, прямо пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.

На основании этого закона сила, действующая на каждую из этих точек по прямой, соединяющей точки, равна

$$f \cdot \frac{mm'}{r^2},$$

где f есть коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранных единиц. Но закон этот точно выполняется лишь для значительных расстояний и весьма строго оправдывается для движений планет. Он оказывается неприложимым к молекулярным силам, действующим на чрезвычайно малых расстояниях (порядка миллионной доли миллиметра).

В небесной механике условно полагают $f = 1$ и на основании этого выбирают единицу массы. В системе CGS, которую мы определим далее, значение f равно

$$f = \frac{6 \cdot 67}{10^8} = \frac{1}{15\,000\,000}.$$

Этот коэффициент настолько мал, что взаимные притяжения тел, расположенных на земной поверхности, не могут быть замечены даже при весьма тонких опытах, так что, вообще говоря, ими можно пренебречь. Тем более можно пренебречь взаимными притяжениями, которые оказывают друг на друга различные части одного и того же тела (в предположении, конечно, что действуют только силы тяготения).

Выше мы определили массы тел как величины, обратно пропорциональные ускорениям, которые два тела вызывают друг у друга. С этой точки зрения, масса тела определяется как некоторый коэффициент, характеризующий сопротивление, оказываемое телом его перемещению, или как коэффициент, измеряющий, в известном смысле, инерцию тела: его называют по этой причине *инертной массой*.

В законе тяготения понятие массы представляется с другой стороны. Масса тела пропорциональна тому действию, которое это тело производит на другое тело. Эта точка зрения почти противоположна предыдущей: масса, рассматриваемая с этой новой ее стороны, называется *тяготеющей*, или *гравитационной массой*.

Гравитационная масса равна массе инертной. В этом заключается в высшей степени замечательный принцип, который подтверждается опытом, но которому классическая механика не дает объяснения.

108. Земное тяготение. Абсолютный вес. — Материальная точка с массой m, помещенная в пустоте около земной поверхности, *падает*, т. е. ее движение относительно Земли, при небольшой высоте падения, довольно близко к прямолинейному в направлении вертикали (направление нити, имеющей на конце груз). Ускорение в этом относительном движении постоянно (приблизительно), и его модуль (в начальный момент) обозначается через g. Таким образом, точка находится под действием *фиктивной силы* (n°105):

$$p = mg,$$

которую называют ее *абсолютным весом*. Рассматриваемая вообще*), кажущаяся сила, заставляющая все тела

*) Т. е. во все время движения, а не только в начальный момент. (*Прим. перев.*)

падать на поверхность Земли, называется ***силой тяжести,*** или *весом.*

Ускорение g остается постоянным в одном и том же месте, но оно убывает с возрастанием высоты и при приближении к экватору. Изменением с высотой часто можно пренебречь, изменение же с широтой места более значительно. В Париже, если за единицу времени взять секунду, значение g равно 9,81 *м/сек*^{2}; на экваторе, где ускорение наименьшее, оно не превосходит 9,78 *м/сек*^{2}. Для Бельгии можно считать g равным его значёнию для Парижа, $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}.

Точка, падающая на поверхность Земли с этим относительным ускорением, и по отношению к абсолютно неподвижным осям не будет двигаться прямолинейно и равномерно; она находится, следовательно, под действием некоторой *реальной силы.* Эта сила есть *притяжение Земли.*

Притяжение Земли отлично от абсолютного веса, так как абсолютное ускорение отлично от относительного ускорения. В самом деле, ускорение переносного движения в этом случае не равно нулю. Добавочное ускорение тоже отлично от нуля, за исключением начального момента падения, но чаще всего этим ускорением можно пренебречь. Мы увидим далее, что если его не принимать во внимание, то *вес равен притяжению Земли, уменьшенному на центробежную силу, происходящую от вращения Земли.* Разность между притяжением и весом незначительна: она не превосходит $\frac{1}{239}$ притяжения; во многих случаях этой величиной также можно пренебречь.

Действие веса имеет *постоянный* характер. Если материальная точка, будучи несвободной, не падает, это значит, что действие силы тяжести нейтрализовано, или уравновешено другими силами, действующими на точку и происходящими от препятствий, мешающих ее движению. Так, если точка подвешена на нити или лежит на столе, то она находится под действием реальной силы, имеющей своим источником нить или стол; эта сила проявляется в статической форме вследствие изменений, происшедших в физическом состоянии того или другого из этих двух тел (удлинение нити, сжатие стола). Эти именно реальные силы и нейтрализуют эффект силы тяжести, физические же изменения доказывают, что сила тяжести не перестала действовать на материальную точку. Силы, которые вводятся в действие этими физическими деформациями, представляют собой то, что называют *упругими силами*. Мы скажем о них несколько слов.

109. Упругие силы. Динамометр. — Упругие силы действуют между частицами тел, расположенными чрезвычайно близко друг от друга, на расстояниях порядка тысячной доли микрона (т. е. миллионной доли миллиметра). Эти силы могут развиваться как в твердых телах, так и в жидкостях и газах, но мы пока будем иметь в виду лишь твердые тела.

Все твердые тела, известные в природе, обладают, в более или менее совершенной степени, свойством быть *упругими*, т. е. возвращаться к их первоначальной форме, когда их предоставляют самим себе, после того как они были деформированы. Деформация, однако, исчезает совершенно лишь в том случае, когда она не перешла за известный предел, который называют *пределом упругости*. Это свойство тел объясняют тем, что изменения физического состояния, происходящие вследствие расширения или сжатия тела (удаление или сближение его молекул), вызывают возникновение между материальными точками, составляющими тело, притягивающих или отталкивающих действий, которые становятся заметными лишь для чрезвычайно сближенных точек. Это те именно силы, которые приходится преодолевать, чтобы деформировать тело, и которые потом приводят тело к его первоначальной форме.

Пока не перейден предел упругости, между силами и произведенными деформациями имеет место связь, выражаемая следующим основным законом, который оправдывается на опыте: *Величина силы, возникшей вследствие деформации* *или необходимой для деформации, пропорциональна самой деформации.*

Так, нить удлиняется под действием веса привязанного к ней груза, и это удлинение пропорционально весу, который должен уравновешиваться натяжением нити. Подобным же образом сжатый стержень укорачивается; металлическая полоска, закрепленная одним концом, изгибается под действием силы, перпендикулярной к ней и приложенной к другому ее концу. Опыт показывает, что во всех этих случаях деформация и действующая сила находятся в постоянном отношении.

Часто упругая сила используется для получения движения; например, упругая сила натянутого лука применяется для метания стрелы. Упругие силы используются также при *статическом измерении* сил.

Мы знаем, что действие тела на материальную точку зависит от его физического состояния. Если это состояние определяется значением некоторой переменной величины, которую легко измерить, мы получаем отсюда практическое средство для измерения силы, с которой тело действует на материальную точку, и, обратно,—средство для измерения силы, с которой эта точка действует на тело. Это имеет место в случае пружин, действие которых пропорционально их деформации, которая может быть измерена с помощью шкалы. В этом заключается принцип действия *динамометра*, который применяется при статическом измерении сил.

Самый простой *динамометр* состоит из спиральной пружины, один конец которой закреплен, а другой свободен. Свободный конец перемещается перед градуированной шкалой, когда пружина растягивается. К свободному концу пружины подвешивают грузы в 1 *кг*, 2 *кг*,... и отмечают на шкале соответствующие деформации. Чтобы измерить величину какой-нибудь силы, ее заставляют действовать на конец пружины (предполагается, что этот опыт можно выполнить) и читают на шкале соответствующее растяжение. Значение силы получают в килограммах.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

110. Три основные единицы механики. — В геометрии имеется лишь одна *основная единица*, единица длины, например, метр. Остальные единицы являются производными, так как они выражаются через первую. Таковы единицы площади и объема: квадратный метр и кубический метр.

В кинематике мы имеем две основные единицы: единицу длины и единицу времени. Остальные единицы оказываются производными. Таковы, например, единицы скорости и ускорения.

В механике вообще имеются три основные единицы: две первые суть единицы длины и времени, третья единица может быть по выбору единицей силы или единицей массы. Соответственно этому применяются две системы единиц. В более старой в качестве третьей основной выбирают единицу силы: *килограмм-сила*; в более новой за основную принимают единицу массы: *грамм-масса*. Мы рассмотрим обе системы.

111. Килограмм-сила. — В первой системе, до сих пор очень употребительной в технике, берут следующие основные единицы:

единица длины: *метр*;
единица времени: *секунда*;
единица силы: *килограмм-сила*.

Килограмм-сила есть абсолютный вес 1 литра дистиллированной воды при наибольшей плотности в определенном месте, например, в Париже.

В этой системе единица массы является производной единицей. Действительно, из формулы $p = mg$ получаем:

$$m = \frac{p}{g},$$

откуда видно, что $m = 1$, если $p = g$. Единица массы есть, таким образом, масса g килограммов (т. е. около 10 *кг*).

Неудобство этой системы заключается в том, что определение единицы силы требует указания места, где производится определение абсолютного веса, так как абсолютный вес одного и того же тела изменяется вместе с ускорением силы тяжести g от одного места к другому. Это неудобство не имеет сколько-нибудь заметного значения в промышленной практике, но оно оказывается значительным в теории и при лабораторных исследованиях. Именно с целью устранить это неудобство и была введена другая система: CGS.

112. **Система CGS.** — Эта систем˜ была принята британской комиссией в 1871 г. и конгрессом электриков в 1881 г. Три основные единицы этой системы следующие:

единица длины: *сантиметр*;

единица времени: *секунда* среднего времени;

единица массы: *грамм-масса*.

Грамм-масса есть масса международного образца из сплава платины с иридием, который был принят общей конференцией мер и весов, состоявшейся в Париже в 1889 г., и помещен в павильоне Breteuil в Севре, близ Парижа. Масса этого эталона очень мало отличается от массы одного кубического сантиметра дистиллированной воды при наибольшей плотности.

Так как в одном и том же месте ускорение силы тяжести g одинаково для всех тел, то соответствие $p = mg$ доказывает, что массы тел находятся в том же отношении, как их абсолютные веса в одном и том же месте, и, следовательно, в том же отношении,как их относительные веса. Масса тела равна поэтому ее относительному весу, выраженному в граммах и измеренному при помощи весов (balance). То, что измеряют в торговле при помощи весов и гирь, является поэтому не абсолютным весом, а относительным весом и, следовательно, массой тел.

В системе CGS единица силы представляет собой производную единицу. Основная формула $F = mj$ показывает, что $F = 1$, если $m = j = 1$. Единица силы, называемая *диной*, есть сила, которая сообщает единице массы единицу ускорения, т. е. массе в 1 *г* ускорение 1 *см/сек*^{2}. Можно также сказать, что единица силы сообщает грамм-массе приращение скорости 1 *см* в течение одной секунды.

Дина представляет собой весьма малую силу по отношению к тем усилиям, которые человек производит своими мускулами. Килограмм-сила равна 1000 g дин, или 980800 дин, т. е. около $(1000)^2$ дин, так как $g = 980{,}80$ *см/сек*^{2}.

Когда нужно рассматривать очень большие силы, то в качестве единицы берут 1 *мегадину*, представляющую собой силу в 10^6, т. е. 1 миллион дин, или 0,98 килограмм-силы.

113. Система *MTS*. — Эта система получается из предыдущей, если в качестве основных единиц взять простые кратные предшествующих единиц, а именно:

единица длины: *метр*;

единица массы: *тонна-масса*;

единица времени: *секунда*.

Тонна-масса равна 1000^2 или 1 миллиону грамм-масс.

Единица силы есть *стен* (в сокращенном обозначении *сн*): это — сила, сообщающая массе в 1 тонну ускорение 1 *м/сек*^{2}, или, иначе, приращение скорости 1 *м/сек* в каждую секунду.

Стен равен, таким образом, $100 \times 1000^2 = 10^8$ дин, или 100 мегадин. Он равен также 102 килограмм-сил, т. е. около 100 килограмм-сил.

114. Формулы размерности. Однородность. — Выбор определенных единиц измерения необходим в практике. В теории удобнее единицы оставлять неопределенными и писать формулы, которые могут применяться при всякой системе единиц. Эти формулы должны поэтому обладать тройной однородностью, так как они должны быть однородны по отношению к каждой из трех основных единиц: длины, времени и массы.

Если изменить единицы, то значения длин, времен и масс умножатся соответственно на новые значения L, T и M

прежних единиц. Поэтому скорость $\frac{ds}{dt}$ умножится на $\frac{L}{T}$, ускорение $\frac{d^2s}{dt^2}$ на $\frac{L}{T^2}$, наконец, сила mj на $\frac{LM}{T^2}$. В частности, прежние единицы скорости, ускорения и силы получат новые значения:

$$V=\frac{L}{T}, \qquad J=\frac{L}{T^2}, \qquad F=\frac{LM}{T^2}.$$

Таковы общие выражения производных единиц в функции от трех основных единиц L, T, M. Они называются *формулами размерностей* этих единиц. Механическая формула, в которой единицы не указаны, должна оставаться неизменной, когда мы меняем единицы, т. е. когда умножаем длины на L, времена — на T, массы — на M, скорости — на LT^{-1}, ускорения — на LT^{-2} и силы — на MLT^{-2}. Для этого необходимо, чтобы после такой операции формула была однородна по отношению к каждой из трех букв L, T, M.

Легко проверить, что этот принцип осуществляется, например, в следующих формулах.

Формула Торичелли, которая дает скорость v тяжелой точки, падающей с высоты h, имеет вид:

$$v=\sqrt{2gh}.$$

Если умножить скорость v на LT^{-1}, ускорение g — на LT^{-2} и длину h — на L, то условие однородности будет выполнено.

Продолжительность τ бесконечно малого колебания простого маятника выражается формулой

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если умножить время τ на T, длину l — на L, ускорение g — на LT^{-2}, то условие однородности и в этой формуле оказывается выполненным.

ГЛАВА V

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

115. Дифференциальные уравнения движения. — Пусть M — точка массы m, $\boldsymbol{j}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — действующая на нее сила. Эти величины связаны между собой основным уравнением динамики

$$m\boldsymbol{j} = \boldsymbol{F}.$$

Отнесем движущуюся точку M к системе осей $Oxyz$, прямоугольной или косоугольной. Пусть X, Y, Z — проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси; проекции ускорения $\boldsymbol{j}$ равны соответственно $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Предшествующее геометрическое равенство распадается на три алгебраических уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

которые называются *дифференциальными уравнениями движения*.

Вектор $\boldsymbol{F}$ представляет собой *движущую силу*. Если мы имеем лишь одну движущуюся точку, то часто оказывается удобным вместо движущей силы ввести *ускоряющую силу*. Эта последняя определяется как частное $\boldsymbol{F} : m$ от деления силы на массу точки; она представляет, таким образом, силу, отнесенную к единице массы, и совпадает по величине, направлению и ориентации с ускорением точки. Пусть X_1, Y_1, Z_1 — проекции ускоряющей силы на оси; тогда дифференциальные уравнения движения принимают следующую более простую форму:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X_1, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y_1, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z_1.$$

Частные случаи. — Если движение точки происходит в плоскости, то эту плоскость можно принять за плоскость xy; в этом случае, так как z постоянно равно нулю, уравнения движения приводятся к двум:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y.$$

Если движение прямолинейное, то можно принять траекторию за ось x; тогда y и z равны нулю, и остается лишь одно уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X.$$

Если сравним уравнения движения в этих двух частных случаях с уравнениями, относящимися к общему случаю, то придем к заключению, что проекция точки на плоскость или на прямую движется, как точка с той же массой под действием силы, равной проекции на эту плоскость или прямую действующей на точку силы.

Дифференциальные уравнения движения применяются при решении двух взаимно обратных задач, которые указываются ниже. Прямая задача относится к дифференциальному исчислению; обратная задача принадлежит к области интегрального исчисления.

1°. *Прямая задача.* — Зная *конечные уравнения движения*, или, иными словами, положение движущейся точки в функции от времени, определить силу для каждого момента.

Эта задача решается непосредственно. По предположению, даны конечные уравнения движения:

$$x=\varphi(t), \quad y=\varphi_1(t), \quad z=\varphi_2(t);$$

из этих уравнений находят вторые производные

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi''(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\varphi_1''(t), \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\varphi_2''(t),$$

после чего дифференциальные уравнения движения дают:

$$X=m\varphi''(t), \quad Y=m\varphi_1''(t), \quad Z=m\varphi_2''(t).$$

2°. *Обратная задача* является той задачей, которую обычно решают в механике и которая оказывается значительно более трудной. Она заключается в следующем: дана сила посредством ее статического определения (n° 104), требуется найти движение точки.

В самом общем случае, который можно допустить в механике, сила зависит от положения движущейся точки, от ее скорости и от времени; поэтому X, Y и Z суть функции от семи переменных x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ и t. Внося эти значения X, Y, Z в дифференциальные уравнения движения, получаем следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x,\ y,\ z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y\left(x,\ y,\ z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z\left(x,\ y,\ z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right).$$

Решение задачи получается в результате интегрирования этой системы. При интегрировании появятся произвольные постоянные, число которых легко определить заранее. В начальный момент, когда точка предоставлена действию движущей силы, ее положение и скорость могут быть произвольными. Это дает три произвольные координаты и три произвольные проекции скорости. Таким образом, шесть произвольных постоянных, которые войдут в решение при интегрировании, должны определяться начальными условиями. Если движение плоское или прямолинейное, то число уравнений и, соответственно, число постоянных уменьшится, но постоянные попрежнему будут определяться на основании тех же соображений, как и в общем случае.

116. Количество движения. Измерение постоянных сил.—Рассмотрим прямолинейное движение точки с массой m под действием постоянной силы величины F. Мы будем предполагать, что точка выходит из начала координат с нулевой скоростью и двигается по оси Ox, направленной в сторону действия силы F. Единственное уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Интегрируя последовательно два раза и замечая, что v и x обращаются в нуль вместе с t, получим:

$$m\frac{dx}{dt} = mv = Ft,$$

$$mx = F\frac{t^2}{2}.$$

Если положим $t = 1$, то первое уравнение нам даст

$$F = mv,$$

и если $m = 1$,

$$F = v.$$

Количеством движения, или *импульсом* точки называют вектор, равный произведению массы точки на ее геометрическую скорость; величина этого вектора (алгебраическая) равна поэтому mv. Предшествующие уравнения выражают, таким образом, следующие теоремы:

Постоянная сила измеряется количеством движения, которое она сообщает движущейся точке в единицу времени. — В частности, постоянная сила, действующая на единицу массы, измеряется скоростью, которую она сообщает этой массе в единицу времени.

Эти правила имеют частое применение в физических науках, но их можно прилагать только к силам, постоянным по величине и направлению.

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЕ
ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ В ПУСТОТЕ

117. Движение тяжелой точки в пустоте. — Рассмотрим в качестве приложения уравнений предшествующего параграфа движение тяжелой точки в пустоте. Мы отвлекаемся, таким образом, от сопротивления воздуха и предполагаем, что точка находится только под действием силы тяжести. Будем рассматривать лишь достаточно малую часть траектории, чтобы можно было считать силу тяжести постоянной по величине и направлению во всей области движения.

Пусть O — начальное положение и v_0 — начальная скорость точки. Примем за плоскость xy вертикальную плоскость, проходящую через начальную скорость, поместим начало координат в точке O и проведем ось y вертикально в сторону действия силы тяжести. Точка находится под действием своего веса $p=mg$, поэтому ускоряющая сила (n°115) равна g и направлена в положительную сторону по оси y. Уравнения движения будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=g, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=0. \tag{1}$$

Обозначим через α угол наклона начальной скорости к горизонтали Ox; тогда в начале координат при $t=0$ будем иметь:

$$(v_x)_0=v_0\cos\alpha, \quad (v_y)_0=-v_0\sin\alpha, \quad (v_z)_0=0.$$

Интегрируя уравнения (1), получим:

$$\frac{dx}{dt}=\text{const}., \qquad \frac{dy}{dt}=gt+\text{const}., \qquad \frac{dz}{dt}=\text{const}.,$$

или, определяя постоянные по начальным условиям,

$$\frac{dz}{dt}=v_0\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt}=gt-v_0\sin\alpha, \qquad \frac{dz}{dt}=0.$$

Интегрируя еще раз и замечая, что x, y, z обращаются в нули при $t=0$, получим:

$$x=v_0t\cos\alpha, \qquad y=\frac{gt^2}{2}-v_0t\sin\alpha, \qquad z=0. \tag{2}$$

Таковы конечные уравнения движения. Движение происходит в плоскости xy, т. е. в вертикальной плоскости, проходящей через начальную скорость.

Исключая t из уравнений (2), получим уравнение траектории:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} - x \operatorname{tg} \alpha. \tag{3}$$

Траектория представляет собой параболу с вертикальной осью, ориентированной в сторону действия силы тяжести.

Найдем точку, в которой траектория вновь, после выхода из начала, пересекает горизонтальную ось Ox. Для этого нужно положить в уравнении (3) $y=0$, что дает

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Это расстояние называется *дальностью полета* (*amplitude du jet*). При одном и том же значении начальной скорости дальность наибольшая, если $\sin 2\alpha = 1$, т. е. для $\alpha = 45°$. Наибольшая дальность равна

$$x = \frac{v_0^2}{g} .$$

Наибольшая высота, до которой поднимается точка на своей траектории, достигается при x, равном половине дальности (вследствие симметрии), или при

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha ;$$

эта наибольшая высота равна поэтому

$$|y| = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} .$$

При вертикальной начальной скорости ($\alpha = 90°$) она равна половине наибольшей дальности, и только четверти дальности, если $\alpha = 45°$.

§ 3. ВНУТРЕННИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНАЯ И ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛЫ

118. Внутренние уравнения. — Рассмотрим точку M с массой m, описывающую свою траекторию под действием силы (результирующей) F, и предположим, что эта траектория дана. Положение точки M на траектории определяется длиной s дуги, описываемой точкой от начального положения M_0; дуга s может быть положительной или отрицательной в зависимости от выбора направления положительного отсчета дуг на кривой. Пусть j — ускорение точки в момент t; мы имеем

$$F = mj.$$

Приравняем проекции обеих частей этого геометрического равенства соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории. Если мы обозначим через F_t, F_n и F_b проекции F, то будем иметь:

$$F_t = mj_t, \quad F_n = mj_n, \quad F_b = mj_b,$$

и, заменяя проекции ускорения известными их значениями (n° 45), получим:

$$F_t = m\frac{dv}{dt}, \qquad F_n = m\frac{v^2}{R}, \qquad F_b = 0,$$

где R есть радиус кривизны траектории. Эти три уравнения представляют собой *внутренние*, или *естественные уравнения* движения. Они вполне эквивалентны уравнениям движения в прежней форме, так как, в свою очередь, влекут за собой геометрическое равенство $F = mj$.

Если сила остается постоянно нормальной к траектории, то F_t равна нулю, следовательно, $\frac{dv}{dt}$ тоже обращается в нуль, и скорость постоянна по величине; в этом случае F_n изменяется обратно пропорционально радиусу кривизны.

Если сила остается постоянно касательной к траектории, то F_n равна нулю, поэтому отношение $v^2 : R$ также равно нулю; последнее требует, чтобы $R = \infty$, и траектория будет прямолинейной.

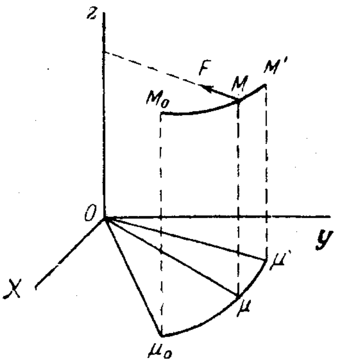
Так как во всех случаях F_b равна нулю и F_n положительна, то сила направлена в сторону вогнутости траектории и расположена (как и ускорение) в соприкасающейся плоскости.

119. Центростремительная сила и центробежная сила. — Нормальная составляющая F_n полной силы, определяющей движение точки, как мы только что сказали, направлена к центру кривизны траектории и по величине равна $mv^2:R$. Эта составляющая называется *центростремительной силой.*

В большом числе вопросов приходится рассматривать силу, равную и прямо противоположную центростремительной силе. Эта сила может быть в одних случаях действительной, в других фиктивной. Ей дают название *центробежной силы.*

§ 4. ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ

120. Интеграл и теорема площадей. — Предположим, что сила F, действующая на точку M, постоянно пересекает неподвижную ось или ей параллельна. Примем эту неподвижную прямую за ось z и проведем прямоугольную систему осей координат $Oxyz$ (фиг. 27). Плоскость xy будет при этом перпендикулярна к неподвижной прямой. Момент движущей силы относительно оси z постоянно равен нулю, поэтому будем иметь $xY-yX=0$. Так как X и Y пропорциональны $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$, то будем иметь также:



Фиг. 27.

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0. \quad (1)$$

Левая часть этого равенства есть производная по t от выражения

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}.$$

Следовательно, само это выражение равно постоянной C; умножая его на dt, мы получаем равенство

$$xdy - ydx = Cdt.$$

Пусть s — дуга траектории точки M, отсчитываемая от начального положения точки M_0, и σ — соответствующая дуга, описываемая проекцией μ точки M на плоскости xy, начиная от начального положения проекции μ_0 (фиг. 27). Выражение

$$xdy - ydx$$

представляет собой момент относительно оси z вектора ds, приложенного в точке (x, y, z) и имеющего проекциями dx, dy и dz или, что то же самое, момент относительно точки O проекции $d\sigma$ этого вектора на плоскость xy. Этот момент с точностью до знака равен удвоенной площади треугольника, имеющего вершиной точку O и основанием $d\sigma$. Но вектор $d\sigma$ можно считать совпадающим с бесконечно малой дугой $\mu\mu'$, описываемой проекцией μ за промежуток времени dt, а площадь указанного выше треугольника можно считать совпадающей с площадью $O\mu\mu'$, описываемой радиусом-вектором $O\mu$ за этот же промежуток времени dt. Эта элементарная площадь представляет собой дифференциал dS площади S, описываемой радиусом $O\mu$ (проекцией радиуса-вектора OM), начиная от его начального положения $O\mu_0$. Эта площадь считается положительной или отрицательной, смотря по тому, описывается ли она в прямом направлении или в обратном. Последнее уравнение может быть поэтому написано в виде:

$$2dS = Cdt.$$

Этот первый интеграл уравнений движения носит название интеграла площадей. Интегрируя снова и замечая, что S обращается в нуль вместе с t, получим:

$$S = \frac{C}{2}t.$$

Отсюда имеем следующую теорему:

Теорема площадей. — *Если направление движущей силы постоянно пересекает неподвижную ось или ей параллельно, то проекция на плоскость, перпендикулярную к оси, радиуса-вектора, проведенного из какой-нибудь точки оси к движущейся точке, описывает в этой плоскости площади (положительные или отрицательные), пропорциональные времени.*

121. Теорема площадей в случае центральной силы. — Предположим теперь, что точка M приводится в движение центральной силой, т. е. силой, проходящей постоянно через неподвижную точку O, и возьмем O за начало координат. Предшествующая теорема применима по отношению к каждой из трех осей Ox, Oy и Oz. Имеем, следовательно, три уравнения:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B, \qquad (2)$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

где A, B и C — постоянные. Умножим эти три уравнения соответственно на x, y, z и сложим. Получим

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Это уравнение есть уравнение неподвижной плоскости, проходящей через начало координат. Движущаяся точка (x, y, z) все время остается в этой плоскости, ее траектория представляет собой поэтому плоскую кривую.

Возьмем плоскость траектории за плоскость xy. Точка M совпадает тогда со своей проекцией μ на эту плоскость, а радиус-вектор OM совпадает со своей проекцией $O\mu$: поэтому можно применить к самому радиусу-вектору теорему площадей, установленную в предшествующем n°. Отсюда имеем следующую теорему, которая и есть собственно теорема площадей:

Теорема. — *Если материальная точка движется под действием центральной силы, т. е. силы, линия действия которой проходит через неподвижный центр, то траектория точки есть плоская кривая, и центр силы лежит в ее плоскости; радиус-вектор, проведенный из центра к движущейся точке, описывает в этой плоскости площади, пропорциональные времени.*

Обратно, если радиус-вектор, проведенный из точки O к движущейся точке M, описывает в неподвижной плоскости, проходящей через точки O и M, площадь, изменяющуюся пропорционально времени, то точка находится под действием центральной силы. В самом деле, тем же свойством обладают и площади, описываемые проекциями радиуса-вектора OM на три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку O. Если эти плоскости принять за плоскости координат, то можно написать уравнения (2), выражающие тот факт, что производные указанных площадей постоянны. Дифференцируя уравнения (2), получаем уравнение (1) и два другие аналогичные, которые можно написать также в виде:

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0;$$

отсюда

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}.$$

Эти равенства показывают, что направление силы совпадает с направлением радиуса-вектора.

§ 5. РАБОТА СИЛЫ

122. Элементарная работа силы. — Пусть F есть сила, приложенная к движущейся точке M, и $\overrightarrow{MM'}$ — бесконечно малое перемещение точки. *Элементарной работой силы F на перемещении $\overrightarrow{MM'}$ называют скалярное произведение* (**n° 10**) *этих двух векторов.* Другими словами, элементарная работа есть произведение величины силы на величину перемещения ее точки приложения и на косинус угла между силой и перемещением. Она может быть написана в следующих двух видах:

$$(F\overrightarrow{MM'}) = FMM' \cos(F, \overrightarrow{MM'}).$$

Обычно сила F и ее точка приложения M бывают отнесены к прямоугольным осям координат $Oxyz$. Проекции X, Y, Z вектора F и координаты x, y, z точки M являются функциями параметра t, который чаще всего представляет собой время, но это вовсе не обязательно. Кривая, описываемая точкой M, определяется тогда уравнениями в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi_1(t), \quad z = \varphi_2(t),$$

где t есть независимая переменная.

Если переменной t дадим приращение dt, то проекции Δx, Δy, Δz соответствующего перемещения точки M будут отличны от дифференциалов dx, dy, dz, представляющих собой проекции вектора ds; но отношения приращений координат к соответствующим дифференциалам имеют пределом единицу, когда dt стремится к нулю, и потому при вычислении сумм бесконечно малых слагаемых эти приращения можно заменять соответствующими дифференциалами. Мы можем поэтому перемещение $\overrightarrow{MM'}$ заменить вектором ds.

Элементарная работа силы F на перемещении ds, которое можно рассматривать как определяемое изменением параметра dt, есть, таким образом, скалярное произведение векторов F и ds и может быть написано в одной из двух форм:

$$(Fds) \quad \text{или} \quad Fds \cos(F, ds).$$

Элементарная работа будет поэтому положительна, отрицательна или равна нулю, смотря по тому, составляет ли сила с перемещением угол острый, тупой или прямой. Говорят, что мы имеем работу движущей силы, если работа положительна, и работу сопротивления, если она отрицательна.

Рассмотрим два разложения

$$ds\,[F\cos(F,\ ds)] \text{ и } F\,[ds\cos(F,\ ds)]$$

элементарной работы на произведение двух множителей; мы видим, что элементарная работа равна произведению величины перемещения на алгебраическое значение проекции силы на направление перемещения. Она равна также произведению величины силы на алгебраическое значение проекции перемещения на направление силы.

Применим теорему о проекциях; из предшествующих определений следует, что: 1°. Элементарная работа равнодействующей F равна сумме элементарных работ ее составляющих; 2°. Если перемещение ds есть результирующее нескольких других перемещений, то элементарная работа силы F равна сумме элементарных работ, выполненных ею на каждом из составляющих перемещений.

Аналитическое выражение элементарной работы мы получим, если напишем аналитическое выражение скалярного произведения двух векторов F и ds. Пусть X, Y, Z — проекции силы F на оси; проекции вектора ds равны dx, dy, dz; тогда будем иметь (n° 10):

$$Fds\cos(F,\ ds) = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Этот результат может быть также получен как следствие предшествующих теорем. Работа силы F равна сумме работ ее составляющих X, Y, Z по осям координат на каждом из перемещений dx, dy, dz (составляющих перемещения ds). Работа составляющей X на двух перемещениях dy и dz (перпендикулярных к X) равна нулю; работа этой силы на перемещении dx равна по величине и знаку Xdx, так как произведение Xdx положительно или отрицательно, смотря по тому, будут ли X и dx иметь одинаковые ориентации или противоположные. Таким образом, работа составляющей X равна Xdx; точно так же работы составляющих Y и Z равны соответственно Ydy и Zdz, и работа силы F равна сумме этих трех выражений.

123. Полная работа. — Предположим, как в предыдущем n°, что проекции X, Y, Z на оси силы F и координаты x, y, z ее точки приложения M являются непрерывными функциями параметра t. Когда этот параметр изменяется от t_0 до t_1, точка M описывает дугу кривой M_0M_1.

Разделим промежуток времени (t_0t_1) на последовательные бесконечно малые промежутки величины dt. Полная работа силы F вдоль дуги M_0M_1 есть сумма элементарных работ, произведенных силой F на каждом из элементарных перемещений, соответствующих последовательным промежуткам времени dt. Полная работа силы F есть поэтому интеграл от элементарной работы и выражается определенным интегралом, распространенным на весь рассматриваемый промежуток времени:

$$\mathcal{T} = \int_{t_0}^{t_1} F ds \cos(F, ds).$$

Если заменить элементарную работу ее аналитическим выражением, то полная работа получит вид:

$$\mathcal{T} = \int_{t_0}^{t_1} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Не нужно, однако, забывать, что в этих интегралах независимая переменная есть t и что пределы t_0 и t_1 относятся к t. Поэтому последний интеграл мог бы быть выражен в следующей более явной форме:

$$\mathcal{T} = \int_{t_0}^{t_1} \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) dt.$$

Обратим внимание на некоторые частные случаи:

1°. Если *сила постоянна по величине и направлению*, то полная работа равна произведению силы на сумму проекций элементарных перемещений на направление силы.

Но элементарные перемещения являются составляющими полного прямолинейного перемещения. Следовательно, работа силы, постоянной по величине и направлению, равна произведению модуля силы на алгебраическое значение проекции полного перемещения на направление силы.

2°. *Прямолинейное перемещение.* Если сила постоянна по величине и направлению и, сверх того, перемещение прямолинейно и направлено по силе, то полная работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения и будет положительна или отрицательна в зависимости от того, перемещается ли точка в сторону действия силы или в противоположную сторону.

124. Единицы работы. — Единица работы есть работа силы, равной единице, если точка приложения силы перемещается на единицу длины в направлении и в сторону действия силы. В системе, где единицы длины и силы равны соответственно метру и килограмму, единица работы есть *килограммометр*.

В системе *CGS* единица работы есть *эрг* (или *динасантиметр*).

В практических измерениях за единицу работы берут величину, кратную эргу, *джоуль*, равный $10^7 = 10\,(1000)^2$ эргов. Джоуль есть работа одной мегадины на перемещении в 10 *см*. Один килограммометр равен 9,81 джоулей.

В системе *MTS* единица работы есть *килоджоуль*, или произведение *одного* стена на *один* метр (стен-метр). Действительно, 10^8 дин $\times\ 10^2$ *см* $= 10^{10}$ эргов $= 10^3$ джоулей.

Это равно примерно 100 *кгм*, так как 100 *кгм* равны 0,98 килоджоулей.

Формула размерности работы имеет вид FL или ML^2T^{-2}.

125. Мощность машины. — Мощностью машины называют количество работы, которую эта машина совершает в единицу времени.

В системе *CGS* единица мощности есть *эрг-секунда*. Это есть мощность машины, которая производит работу в 1 эрг за секунду. Практически применяемая единица есть *ватт* или *джоуль-секунда*, равный 10^7 эрг-секунд. В качестве единицы мощности берут также *киловатт* или *килоджоуль-секунду* (равный 1000 ватт, или 10^{10} эрг-секунд). Отсюда следует, что *киловатт-час* есть единица работы, равная 3600 килоджоулей.

В технике часто за единицу мощности берут *лошадиную силу*, представляющую собой мощность машины, которая производит работу в 75 *кгм* в секунду. Одна лошадиная сила равна $75 \times 9{,}81 = 736$ ватт. Лошадиная сила имеет, таким образом, величину порядка одного киловатта. Один киловатт равен 1,36 лошадиной силы.

Мощность есть отношение работы ко времени, поэтому формула размерности мощности имеет вид: FLT^{-1} или ML^2T^{-3}.

§ 6. СИЛОВОЕ ПОЛЕ. СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

126. Векторное поле. Силовое поле. — Предположим, что в каждой точке пространства или некоторой части пространства приложен некоторый вектор, определяемый координатами x, y, z его точки приложения. Пусть, например, проекции вектора на оси выражаются как функции от x, y, z общими формулами:

$$X = X(x, y, z),\ Y = Y(x, y, z),\ Z = Z(x, y, z).$$

Эти формулы определяют то, что называется *векторным полем*. Если векторы, приложенные в каждой точке поля, представляют собой силы, то предыдущие формулы определяют *силовое поле*.

Если материальная точка перемещается в пространстве и в каждой точке пространства находится под действием силы, определяемой данным силовым полем, то говорят, что точка движется в этом силовом поле. В этом случае говорят также, что точка находится под действием *силы, зависящей от положения*, или *позиционной силы*.

Например, действие Солнца на планету данной массы вполне определяется в каждой точке пространства законом всемирного тяготения: оно зависит лишь от положения планеты. Притяжение Солнца, действующее на планету (в предположении, что планета может занимать любое положение в пространстве), определяет, таким образом, силовое поле, распространенное на все пространство. Когда планета, находясь под действием притяжения Солнца, движется в пространстве, она перемещается, таким образом, в этом силовом поле.

127. Силовая функция. Потенциал. — Предположим, что существует силовое поле, т. е. что проекции X, Y и Z силы F представляют собой функции от координат x, y, z точки приложения этой силы; точка приложения рассматривается при этом как произвольная точка пространства. Весьма важным оказывается тот случай, когда проекции X, Y, Z соответственно равны частным производным по x, y, z от некоторой функции $\varphi(x, y, z)$, в которой переменные x, y, z рассматриваются как независимые. В этом случае имеем:

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{1}$$

Когда выполнены эти условия, функция $\varphi(x, y, z)$ называется *силовой функцией*; в этом случае говорят также, что сила F имеет силовую функцию или потенциал. *Потенциал*, или *потенциальная функция* есть силовая функция, взятая с обратным знаком, т. е. $-\varphi(x, y, z)$.

Когда существует силовая функция, то выражение для элементарной работы силы представляет собой полный дифференциал этой функции. В самом деле, имеем:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi. \tag{2}$$

Обратно, если элементарная работа выражается полным дифференциалом функции $\varphi(x, y, z)$ трех независимых переменных, то существует силовая функция, и функция эта есть $\varphi(x, y, z)$.

В самом деле, dx, dy и dz суть так же, как переменные x, y, z, независимые произвольные величины, поэтому уравнение (2) распадается на три уравнения (1).

Таким образом, необходимое и достаточное условие для существования силовой функции заключается в том, что выражение для элементарной работы должно быть полным дифференциалом некоторой функции от x, y, z.

Силовая функция определяется силой лишь с точностью до постоянной, так как дифференциал силовой функции и ее производные не изменяются от прибавления к ней произвольной постоянной. При этом в каждом случае эту постоянную можно выбирать так, как это представляется наиболее удобным. Мы будем предполагать во всем дальнейшем, что силовая функция $\varphi(x, y, z)$ однозначна, т. е. что она в каждой точке (x, y, z) может принимать лишь одно значение.

Теорема. — *Пусть точка находится под действием нескольких сил F_1, $F_2, \ldots$ Если каждая из них имеет силовую функцию, то равнодействующая их F также имеет силовую функцию φ, и эта последняя есть сумма функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, относящихся к каждой из составляющих сил.*

В самом деле, если имеем

$$X_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \ldots,$$

то отсюда следует

$$X = X_1 + X_2 + \ldots = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

что и доказывает теорему.

128. Основная теорема. — *Если сила F обладает однозначной силовой функцией $\varphi(x, y, z)$ и если точка ее приложения описывает дугу M_0M_1 кривой, то работа силы на этой дуге зависит лишь от концов последней M_0 и M_1. Она не зависит от вида пути, по которому точка переходит из начального положения M_0 в конечное положение M_1.*

Рассмотрим параметрическое представление дуги M_0M_1 и предположим, что точка M описывает эту дугу, когда параметр t (который не обязательно должен быть временем) изменяется от t_0 до t_1. Так как элементарная работа силы F выражается полным дифференциалом $d\varphi$, то полная работа имеет вид:

$$\mathcal{T} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varphi}{dt}\,dt = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0),$$

где индексы 0 и 1 относятся к начальному и конечному положениям M_0 и M_1. Следовательно, *полная работа силы F равна алгебраическому приращению силовой функции между двумя крайними положениями точки приложения силы.*

129. Поверхности уровня. — Предположим, что существует силовая функция; приравнивая ее произвольной постоянной a, получим уравнение семейства поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = a.$$

Эти поверхности называются *поверхностями уровня*. На одной и той же поверхности уровня силовая функция сохраняет постоянное значение. Через каждую точку x_0, y_0, z_0 проходит поверхность уровня и притом только одна, определяемая уравнением

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Теорема. — *Сила F действует по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку приложения силы, и ориентирована в сторону возрастания функции φ.*

Прежде всего, сила направлена по нормали, так как X, Y, Z пропорциональны направляющим косинусам силы, а $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ — направляющим косинусам нормали, и эти величины равны друг другу попарно.

Далее, сила ориентирована в сторону возрастания функции φ, так как элементарная работа $d\varphi$ положительна для перемещения в сторону действия силы, функция же φ в этом случае возрастает.

130. Работа силы тяжести. — Силовое поле однозначно, если сила определяется единственным образом в каждой точке поля. Это имеет место в случае силы тяжести, если предположить, что эта сила действует на одну и ту же материальную точку. Кроме того, мы сейчас установим, что в этом случае существует силовая функция.

Направим ось z вертикально и ориентируем в сторону действия силы тяжести; тогда проекции веса точки с массой m будут:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=mg.$$

Следовательно, существует силовая функция

$$\varphi = mgz.$$

Работа силы тяжести при переходе тяжелой точки из положения (x_0, y_0, z_0) в другое положение (x_1, y_1, z_1) будет:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0) = mg(z_1 - z_0).$$

Таким образом, *работа силы тяжести, действующей на весомую точку, равна весу точки, умноженному на положительное или отрицательное количество, измеряющее понижение ее центра тяжести (повышение точки рассматривается как отрицательное понижение).*

В данном случае поверхности уровня определяются уравнением $z = \alpha$. Эти поверхности представляют собой горизонтальные плоскости, и по этой именно причине они получили название „поверхностей уровня", которое, по аналогии, было перенесено на общий случай.

131. Работа центральной силы. — Пусть M — точка, находящаяся под действием центральной силы F, линия действия которой проходит через центр O. Обозначим через r радиус-вектор OM, через F — алгебраическое значение силы, считая его положительным в случае притяжения и отрицательным в случае отталкивания.

Так как F считается положительной при ориентации, противоположной радиусу-вектору r, то элементарная работа силы F будет:

$$-F ds \cos(r, ds) = -Fv \cos(r, v)\, dt,$$

где v есть скорость $\frac{ds}{dt}$. Но $v \cos(r, v)$, т. е. проекция скорости v на радиус-вектор, есть радиальная скорость $\frac{dr}{dt}$ (n° 48), и выражение для элементарной работы приводится к виду:

$$-F dr.$$

Предположим, что F зависит только от r, так что $F = \psi(r)$; тогда будем иметь:

$$-F dr = -\psi(r) dr = -d \int \psi(r) dr.$$

Таким образом, элементарная работа есть полный дифференциал функции от модуля радиуса-вектора r, который сам есть функция от x, y, z, так что существует силовая функция

$$\varphi(r) = -\int \psi(r) dr.$$

В этом случае поверхностями уровня $\varphi(r) = \alpha$ являются поверхности, для которых $r = \text{const}$. Они представляют собой поэтому сферы с центром в точке O.

Рассмотрим, в частности, случай, когда точка притягивается к центру силой, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра, так что $\psi(r) = k : r^2$. Силовая функция будет

$$\varphi(r) = -k \int \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r}.$$

Поверхности уровня $r = \text{const}$, как и в общем случае, суть сферы с центром в точке O.

Замечание. — Движущаяся точка может находиться под одновременным действием нескольких центральных сил, являющихся функциями от расстояния и вызываемых притяжением или отталкиванием различных неподвижных центров. В этом случае тоже имеется силовая функция, равная сумме силовых функций, относящихся к каждой из центральных сил в отдельности (n° 127).

§ 7. ТЕОРЕМА ЖИВОЙ СИЛЫ

132. Теорема живой силы. — Определение. *Живая сила* *) *движущейся материальной точки в данный момент времени есть положительное число, равное половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Между живой силой точки и работой действующей на точку силы существует основное соотношение, называемое теоремой живой силы и являющееся, может быть, наиболее важным во всей механике. Мы установим сейчас эту теорему.

Рассмотрим точку с массой m, движущуюся под действием только одной силы F. Пусть x, y, z — координаты точки и X, Y, Z — проекции силы на оси. Рассмотрим первое из дифференциальных уравнений движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

которое может быть написано в виде:

$$m\frac{dv_x}{dt} = X.$$

Перемножая это уравнение почленно с равенством $v_x dt = dx$, получим:

$$mv_x dv_x = X dx,$$

или в другом виде:

$$d\frac{mv_x^2}{2} = X dx.$$

Подобным же способом находим

$$d\frac{mv_y^2}{2} = Y dy, \quad d\frac{mv_z^2}{2} = Z dz.$$

Сложим почленно эти три равенства. Замечая, что

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2,$$

*) Для той же величины существует другой термин — *кинетическая энергия. (Прим. перев.)*

получим

$$d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz. \tag{1}$$

Левая часть есть дифференциал живой силы, правая — элементарная работа силы. Это уравнение выражает теорему живой силы в ее дифференциальной форме. Ее можно высказать следующим образом:

Теорема. — *Дифференциал живой силы материальной точки равен элементарной работе равнодействующей сил, приложенных к точке, за тот же самый бесконечно малый промежуток времени dt.*

Уравнение (1) может быть получено другим способом. Элементарная работа силы F на перемещении ds равна работе ее касательной составляющей F_t, так как другая составляющая перпендикулярна к ds.

Далее F_t и ds имеют одинаковые или противоположные знаки, смотря по тому, ориентированы они в одну сторону или в разные, поэтому работа силы F_t равна $F_t ds$ по величине и знаку. Так как (n° 118) $F_t = m\frac{dv}{dt}$, то

$$F_t ds = m\frac{dv}{dt}ds = mvdv = d\frac{mv^2}{2};$$

это уравнение эквивалентно уравнению (1).

В уравнении (1) все переменные суть функции времени t. Рассмотрим промежуток времени от t_0 до t, в течение которого точка, описывая некоторую дугу своей траектории, переходит из начального положения M_0 в конечное положение M. Интегрируя обе части уравнения (1) от t_0 до t, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t} Xdx + Ydy + Zdz. \tag{2}$$

Это уравнение выражает теорему живой силы в ее конечной форме. Ее можно сформулировать следующим образом:

Теорема.—*Изменение живой силы движущейся точки за некоторый промежуток времени равно полной работе сил, приложенных к точке, за тот же промежуток времени.*

Термин *живая сила* был введен Лейбницем и настолько прочно вошел в употребление, что едва ли от него можно теперь отказаться. Однако термин этот неудачен, так как живая сила вовсе не есть сила.

133. Интеграл живой силы.—Интегралом живой силы называют первый интеграл уравнений движения, получающийся в том частном случае, когда точка движется в силовом поле и равнодействующая сил, приложенных к точке, имеет силовую функцию $\varphi(x, y, z)$. В этом случае элементарная работа выражается в виде $d\varphi$, а полная работа равна разности значений силовой функции в крайних положениях движущейся точки. Поэтому интеграл в правой части уравнения (2) непосредственно вычисляется. Уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\varphi(x, y, z)-\varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Это уравнение представляет собой интеграл живой силы. Его можно также написать в виде:

$$mv^2=2\varphi(x, y, z)+h, \tag{3}$$

обозначая через h произвольную постоянную

$$h=mv_0^2-2\varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Постоянная h называется постоянной живых сил. Ее значение зависит от начального положения и начальной скорости точки, которые могут быть произвольными.

Интеграл живой силы выражает теорему живой силы в том частном случае, когда существует силовая функция. Некоторые авторы название теоремы живой силы дают теореме именно в этом случае.

Интеграл (3) живой силы выявляет одно частное свойство движения. Движущаяся точка может возвращаться несколько раз на одну и ту же поверхность уровня, определяемую уравнением

$$\varphi(x, y, z) = a;$$

в этом случае уравнение (3) показывает, что величина скорости получает одно и то же значение каждый раз, как точка переходит через эту поверхность уровня. Но направление скорости может быть совершенно различным при каждом таком переходе.

Рассмотрим, например, движение планеты вокруг Солнца. Мы имеем здесь движение точки, притягиваемой центральной силой обратно пропорционально квадрату расстояния; поверхности уровня суть сферы, центром которых является Солнце. Поэтому величина скорости планеты принимает одно и то же абсолютное значение каждый раз, как планета находится на некотором определенном расстоянии от Солнца, направление же скорости, очевидно, может быть различным.

134. Случай, когда некоторые силы не производят работы. — Иногда встречается случай, когда некоторые силы, действующие на движущуюся точку, постоянно остаются нормальными к траектории этой точки. Тогда элементарная работа этих сил постоянно равна нулю и, следовательно, полная их работа тоже равна нулю. Поэтому говорят, что эти силы не работают.

Так как работа равнодействующей сил, приложенных к движущейся точке, равна сумме работ ее составляющих, то она приводится в этом случае к работе остальных действующих на точку сил. Таким образом, в приложениях теоремы живой силы следует учитывать лишь силы, которые производят работу, не обращая внимания на остальные. Если, сверх того, силы, производящие работу, имеют силовую функцию, то будет существовать интеграл живой силы в той форме, которую мы ему придали в предшествующем n°.

Это замечание находит применение в случае, когда рассматривается движение несвободной точки, вынужденной оставаться на заданной линии или поверхности, которые предполагаются неподвижными и лишенными трения. Последнее свойство обозначает, что линия или поверхность могут действовать на движущуюся точку лишь с силой, направленной по нормали к поверхности: эта сила называется *нормальной реакцией*. Нормальная реакция не производит работы при движении точки по линии или по поверхности, и в приложениях теоремы живой силы ее поэтому не приходится учитывать. Это можно видеть на следующем примере.

135. Случай, когда работу производит только сила тяжести. Теорема Торичелли. — Известно, что работа силы тяжести, действующей на движущуюся точку, равна весу точки, умноженному на высоту падения H. Интеграл живой силы может быть применен здесь независимо от того, свободна ли точка или вынуждена перемещаться без трения по неподвижной кривой или поверхности.

Этот интеграл имеет в данном случае вид:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgH;$$

отсюда

$$v^2 = v_0^2 + 2gH.$$

Если начальная скорость равна нулю, то будет

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Это уравнение выражает *теорему Торичелли: Скорость, полученная свободной или несвободной материальной точкой, отпущенной без начальной скорости и находящейся под действием силы тяжести, в предположении, что движение происходит без трения, равна* $\sqrt{2gH}$, *где H есть высота падения.*

§ 8. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ РАССТОЯНИЮ

Когда на точку действует центральная сила, то из теоремы площадей (n° 121) следует, что движение ее происходит в некоторой плоскости. Возьмем эту плоскость за плоскость xy, центр силы — за начало координат, тогда число уравнений движения сведется к двум.

136. Случай притяжения. — Пусть r — радиус-вектор движущейся точки и x, y — ее координаты, которые могут быть прямоугольными или косоугольными. Величина ускоряющей силы (предполагаемая пропорциональной r) будет k^2r, где k^2 — постоянная. Проекции силы на оси получим, замечая, что ее направляющие косинусы равны по величине и противоположны по знаку направляющим косинусам $(x:r,\ y:r)$ радиуса-вектора. Поэтому будет

$$X = k^2r\left(-\frac{x}{r}\right) = -k^2x,$$

$$Y = k^2r\left(-\frac{y}{r}\right) = -k^2y.$$

Следовательно, обозначая точками производные по времени, получим дифференциальные уравнения движения в виде:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad \ddot{y} + k^2y = 0.$$

Обе переменные x и y удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами без правой части. Не входя здесь в подробности общей теории этого уравнения, заметим, что значения $x = \cos kt$, $x = \sin kt$ удовлетворяют, как это видно с первого взгляда, уравнению $\ddot{x} = -k^2x$; поэтому решение, зависящее от двух произвольных постоянных a и b, получим, полагая

$$x = a\cos kt + b\sin kt.$$

Это решение есть общий интеграл уравнения, так как оно позволяет, распоряжаясь соответствующим образом неопределенными величинами a и b, выбрать произвольно начальные значения x и v_x (или $\dot{x}$).

Значение y получается таким же способом. Обозначая через a_1 и b_1 две новые постоянные, будем иметь:

$$y = a_1 \cos kt + b_1 \sin kt.$$

Четыре постоянные определяются при помощи начальных условий. Чтобы упростить вычисления, проведем ось x через начальное положение точки (тогда $x_0 = r_0$, $y_0 = 0$), ось y — параллельно ее начальной скорости, предполагая, что эта скорость направлена под углом к радиусу-вектору (тогда $v_x{}^0 = 0$, $v_y{}^0 = v_0$). Мы получим условия:

$$x_0 = a = r_0, \quad x_0' = v_x{}^0 = kb = 0,$$

$$y_0 = a_1 = 0, \quad y_0' = v_y{}^0 = kb_1 = v_0.$$

Конечные уравнения движения приводятся к виду:

$$x = r_0 \cos kt, \qquad y = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Это есть не что иное, как параметрические уравнения эллипса, отнесенного к двум сопряженным диаметрам, центр которого совпадает с центром притяжения. Движение точки периодическое. Продолжительность обращения точки по этому эллипсу, или период есть $T = 2\pi : k$. Следует заметить, что период обращения совершенно не зависит от начальных данных, а следовательно, и от размеров эллипса, описываемого вокруг центра притяжения; он зависит лишь от постоянной притяжения k.

Если начальная скорость равна нулю или направлена по оси x, то движение будет прямолинейным и приведется к колебаниям вдоль оси x.

Мы возвратимся к этому случаю далее (n° 138).

Рассматриваемая задача имеет особый интерес, так как она дает закон малых колебаний, происходящих под действием упругих сил. В этом случае предполагают, что сила, которая действует на точку, выведенную из своего положения равновесия, пропорциональна смещению и стремится возвратить точку в положение равновесия. Это закон, обычно применяемый при изучении колебательных движений.

137. Случай отталкивания. — Проекции ускоряющей силы в случае отталкивания по величине такие же, как в случае притяжения, но имеют обратные знаки. Это сводится к замене k^2 через $-k^2$. Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \quad \ddot{y} - k^2 y = 0.$$

Значения $x = e^{kt}$ $x = e^{-kt}$ представляют собой частные решения первого уравнения. Как и в предыдущем случае, общее решение получим, составляя линейную комбинацию двух частных решений. Пусть a, b и a_1, b_1 — четыре постоянных интегрирования, тогда общие решения предшествующих уравнений будут:

$$x = ae^{kt} + b\,e^{-kt}; \quad y = a_1 e^{kt} + b_1 e^{-kt}.$$

Постоянные определяются начальными данными.

Проведем оси так же, как в предыдущем случае: ось x — через начальное положение движущейся точки, ось y — параллельно начальной скорости; тогда будем иметь:

$$x_0 = a + b = r_0, \quad x_0' = v_x^0 = k\,(a - b) = 0,$$
$$y_0 = a_1 + b_1 = 0, \quad y_0' = 0 = k\,(a_1 - b_1) = v_0;$$

отсюда

$$a = b = \frac{r_0}{2}, \quad a_1 = b_1 = \frac{v_0}{2k}.$$

Уравнения движения в конечной форме запишутся так:

$$x = r_0\,\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}; \quad y = \frac{v_0}{k}\,\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

Они дают параметрическое представление траектории. Траектория есть гипербола, отнесенная к двум сопряженным диаметрам. Исключая t, получим уравнение этой гиперболы в виде:

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1.$$

Между этим случаем и предыдущим имеется коренное различие. В случае притяжения движущаяся точка остается сколь угодно близко от центра притяжения, лишь бы начальное расстояние r_0 и начальная скорость v_0 были достаточно малыми. В случае отталкивания, каковы бы ни были эти начальные данные, движущаяся точка все более и более отклоняется от центра отталкивания и удаляется в бесконечность.

§ 9. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОСТОЕ, ЗАТУХАЮЩЕЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ

138. Простое и затухающее колебательное движение. — Рассмотрим опять движение точки M, притягиваемой силой, пропорциональной расстоянию (**n° 136**). Если начальная скорость равна нулю, или направление ее проходит через центр, то постоянная площадей равна нулю, и, следовательно, движение прямолинейное и происходит по прямой, проходящей через центр. Возьмем точку O за начало и прямую, по которой происходит движение, за ось Ox. Ускоряющая сила направлена по этой оси и равна $-k^2x$, где k^2 есть положительная постоянная. Дифференциальное уравнение движения имеет вид (**n° 136**):

$$x'' + k^2x = 0,$$

его общий интеграл есть (n° **136**)

$$x = a\cos kt + b\sin kt.$$

Постоянные a и b определяются начальными значениями x_0 и x_0' абсциссы и скорости. Для $t = 0$ имеем $x_0 = a$ и $x_0' = kb$.

Следовательно,

$$x = x_0\cos kt + \frac{x_0'}{k}\sin kt.$$

Это равенство представляет собой уравнение *простого колебательного* (или *периодического*) *движения*. Продолжительность, или *период*, полного колебания есть $2\pi : k$, число колебаний в единицу времени (вообще говоря дробное), или *частота*, есть $k:2\pi$.

Предположим теперь, что движущаяся точка, находящаяся под действием той же притягивающей силы, испытывает, кроме того, сопротивление при перемещении, пропорциональное величине скорости. Алгебраическое значение этого сопротивления, отнесенное к единице массы, будет $-2\lambda x'$, где 2λ есть положительный коэффициент. Дифференциальное уравнение движения принимает в этом случае вид:

$$x'' + 2\lambda x' + k^2 x = 0.$$

Оно попрежнему линейное и однородное, но содержит одним членом больше, чем в предыдущем случае. Заменой переменного

$$x = e^{-\lambda t} z$$

уравнение приводится к двучленной форме:

$$z'' + (k^2 - \lambda^2)\, z = 0.$$

Следует различать три случая, в соответствии с тем, будет ли k больше, меньше или равно λ.

Первый случай. *Затухающее колебательное движение.* Если $k > \lambda$, то полагаем

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \lambda^2} < k,$$

и тогда z удовлетворяет уравнению

$$z'' + k_1^2 z = 0,$$

имеющему известный интеграл

$$z = a \cos k_1 t + b \sin k_1 t.$$

Уравнение движения в конечной форме имеет поэтому вид:

$$x = e^{-\lambda t} (a \cos k_1 t + b \sin k_1 t).$$

Если в качестве начального момента возьмем тот, когда z проходит через максимум $z_0 = x_0$, и положим $z_0' = 0$, то получим $b=0$ и $a=x_0$; уравнение приводится тогда к виду:

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \cos k_1 t.$$

Если t возрастает неограниченно, то x стремится к нулю, совершая при этом колебания с одним и тем же периодом $T_1 = 2\pi : k_1$, но с убывающими амплитудами. Период в этом случае оказывается бо́льшим, чем период незатухающих (или свободных) колебаний, так как $k_1 < k$. Множитель λ называется *коэффициентом затухания*, или *коэффициентом вязкости*; число $e^{-\lambda T_1}$, равное отношению двух последовательных максимумов x, т. е. двух последовательных амплитуд, называется *коэффициентом редукции*, или *декрементом затухания* *).

Второй случай. Если $k < \lambda$, полагаем

$$k_1 = \sqrt{\lambda^2 - k^2} < \lambda;$$

уравнение для переменной z принимает тогда вид:

$$z'' - k_1^2 z = 0$$

и имеет общим интегралом (n° 137)

$$z = ae^{k_1 t} + be^{-k_1 t}.$$

Конечное уравнение движения выводится отсюда. Мы напишем его в виде:

$$x = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t},$$

обозначая через λ_1 и λ_2 два положительных числа (так как $\lambda > k_1$):

$$\lambda_1 = \lambda - k_1, \quad \lambda_2 = \lambda + k_1.$$

Для скорости x' получаем выражение

$$x' = -a\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - b\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = -a\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\left(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \frac{b\lambda_2}{a\lambda_1}\right).$$

*) В качестве величины, характеризующей затухание, пользуются также абсолютным значением λT_1 логарифма указанного в тексте отношения двух последовательных амплитуд. *(Прим. перев.)*

Отсюда видно, что скорость может обратиться в нуль только один раз. Когда t неограниченно возрастает, x стремится к нулю, но направление, в котором изменяется x, может обратиться в прямо противоположное не больше одного раза.

Следовательно, движение в этом случае не будет колебательным. Его называют *апериодическим*.

Третий случай. Если $k=\lambda$, то $z''=0$, откуда

$$z=at+b,$$

и

$$x=e^{-\lambda t}(at+b),$$

$$x'=e^{-\lambda t}(a-\lambda b-\lambda at).$$

Таким образом, x стремится к нулю, когда t стремится к бесконечности, и скорость может обратиться в нуль лишь один раз. Движение будет *апериодическим*, как и в предыдущем случае.

139. Колебательное движение, возмущаемое периодической силой. — Рассмотрим опять точку M, движущуюся под действием ускоряющей притягивающей силы $-k^2x$. Движение, которое точка M получит под влиянием только этой силы, есть ее *собственное движение*. Предположим теперь, что к предыдущей силе прибавляется возмущающая сила, линия действия которой проходит через тот же центр; пусть эта сила выражается периодической функцией времени и пусть алгебраическое значение ее, отнесенное к единице массы, есть $P\cos(\alpha t+\beta)$. Мы можем привести это выражение к виду $P\cos\alpha t$, отсчитывая время от того момента, когда эта сила проходит через свой максимум. Уравнение движения точки M при таком предположении будет иметь вид:

$$x''+k^2x=P\cos\alpha t.$$

Предположим, что α отлично от k. Это дифференциальное уравнение удовлетворяется частным решением вида $C\cos\alpha t$, где $C=P:(k^2-\alpha^2)$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой этого решения в уравнение.

Общее решение получим, прибавляя это частное решение к общему решению уравнения $x'' + k^2x = 0$, что приводит к следующему уравнению движения:

$$x = (a \cos kt + b \sin kt) + \frac{P}{k^2 - \alpha^2} \cos \alpha t.$$

Это уравнение показывает, что движение точки M является результатом наложения двух различных колебательных движений, из которых одно имеет период $2\pi : k$ собственных колебаний, а другое — период $2\pi : \alpha$ возмущающей силы.

Постоянные a и b определяются начальными значениями x_0 и x_0'. Без труда получаем

$$x_0 = a + \frac{P}{k^2 - \alpha^2}, \quad x_0' = kb;$$

после этого уравнение движения получает вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt + \frac{P}{k^2 - \alpha^2} (\cos \alpha t - \cos kt).$$

Собственные колебания определяются двумя первыми членами (n° 138), последний дает *возмущение*, производимое периодической силой. Весьма важен тот частный случай, когда частоты собственных колебаний и возмущающей силы имеют очень близкие значения, так что $(k - \alpha)$ по модулю очень мало по сравнению с k. В этом случае в предыдущей формуле член, представляющий собой возмущение и содержащий $k^2 - \alpha^2$ в знаменателе, периодически становится очень большим и во много раз превосходящим сумму двух других. Он может быть представлен в виде:

$$-\frac{2P}{k^2 - \alpha^2} \sin \frac{\alpha - k}{2} t \cdot \sin \frac{\alpha + k}{2} t.$$

Так как значение $|\alpha - k|$ весьма мало, то первый синус этого произведения изменяется очень мало в течение периода $4\pi : (\alpha + k)$, соответствующего второму, и потому его можно приближенно рассматривать как постоянную. Возмущение представляется тогда как колебательное движение с периодом $4\pi:(\alpha+k)$, близким к собственному периоду $2\pi:k$, и амплитуда которого

$$\left|\frac{2P}{k^2-\alpha^2}\sin\frac{\alpha-k}{2}t\right|$$

изменяется с течением времени периодически, но весьма медленно. Период колебаний амплитуды имеет бо́льшую продолжительность $|2\pi:(k-\alpha)|$ и определяет *биения.* В каждом биении амплитуда возмущенного колебания обращается один раз в нуль, когда $(\alpha-k)t$ принимает значение, кратное 2π, и проходит через один максимум, имеющий весьма большое значение, когда $(\alpha-k)t$ равно нечетному кратному π. Следовательно, периодическая сила увеличивает возмущение в течение первой половины биения, чтобы погасить его во второй половине.

Предельный случай, *когда частоты равны между собой. Синхронизм.* Если $\alpha=k$, то уравнение движения получается из предыдущего уравнения в результате перехода к пределу. Применяем правило Лопиталя и находим, приближая α к k,

$$x=x_0\cos kt+\frac{2x_0'+Pt}{2k}\sin kt.$$

Это есть уравнение колебательного движения с тем же периодом $2\pi:k$, как и у собственных колебаний, но амплитуда которого

$$\sqrt{x_0^2+\left(\frac{2x_0'+Pt}{2k}\right)^2}$$

стремится к бесконечности с течением времени. В этом случае под влиянием периодической силы амплитуда колебания монотонно и неограниченно возрастает. Это явление называется *резонансом.*

Замечание. Малые движения материальных систем, такие как колебания рессор, мостов и т. п., выражаются уравнениями того же вида, как и предыдущие, и обнаруживают поэтому явления, аналогичные тем, которые мы здесь рассматривали. В частности, явление резонанса может в некоторых случаях иметь опасные последствия. Примером служат цепные мосты.

§ 10. ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ ВОКРУГ СОЛНЦА

140. Уравнения движения. Интегралы площадей и живой силы. — *Пусть требуется определить движение точки P (планета), притягиваемой к неподвижному центру F (Солнце) силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.*

Так как сила центральная, то траектория будет плоской, и плоскость ее будет содержать центр F. Рассмотрим систему полярных координат в этой плоскости с полюсом в центре F. Пусть r — радиус-вектор FP и θ — угол, образуемый им с полярной осью Fx. Требуется определить r и θ как функции от t, для чего необходимы два уравнения. Эти уравнения даются интегралом площадей и интегралом живой силы.

Пусть C есть постоянная площадей; тогда интеграл площадей запишется:

$$2\frac{dS}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}=C. \tag{1}$$

Найдем теперь интеграл живой силы.

Пусть F_1 будет ускоряющаяся сила (т. е. сила, отнесенная к единице массы) для точки P; мы можем положить

$$F_1=\frac{\mu}{r^2},$$

где μ есть коэффициент пропорциональности, *один и тот же для всех планет*; этот коэффициент положителен, так как сила притягивающая. Тогда сила, действующая на точку, равна

$$F_2=\frac{m\mu}{r^2}.$$

Элементарная работа этой силы будет (n° **131**)

$$-F_2 dr = -\frac{m\mu}{r^2}\,dr = d\,\frac{m\mu}{r}\,.$$

Поэтому силовая функция равна $m\mu : r$, и интеграл живой силы принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\mu}{r} + \mathrm{const}.$$

Это уравнение можно написать в следующей форме:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \tag{2}$$

где h есть постоянная живых сил, имеющая значение

$$h = v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0}\,. \tag{3}$$

141. Определение траектории. — Для определения движения нужно проинтегрировать уравнения (1) и (2). Мы начнем с определения траектории точки P. Для этого нужно из уравнений (1) и (2) исключить t. Заменяя в уравнении (2) v^2 через

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}$$

и деля почленно на равенство (1), возведенное в квадрат, получим:

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} = \left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{C^2}\left(\frac{2\mu}{r} + h\right).$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение траектории. Оно может быть написано в виде:

$$\left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 = \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}\,.$$

Левая часть положительна, поэтому правая часть тоже должна быть положительна, и мы можем вместо r ввести новую переменную ρ, определяемую соотношением

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \rho\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}.$$

Будем считать радикал в правой части положительным, тогда ρ может иметь любой знак. Дифференциальное уравнение после этого приведется к виду:

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 1 - \rho^2, \quad \text{или} \quad d\theta = \pm\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Отсюда:

$$\theta - \alpha = \mp \arccos\rho,$$

$$\rho = \cos(\theta - \alpha).$$

Заменяя ρ этим значением в написанном выше соотношении, получим уравнение трбектории в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cdot \cos(\theta - \alpha). \tag{4}$$

Это — фокальное уравнение конического сечения. Таким образом, *траектория есть коническое сечение, в одном из фокусов которого находится центр притяжения F*. В этом заключается первый закон Кеплера.

142. Определение параметров траектории. — Посмотрим, как параметры получившегося конического сечения, в частности его параметр p и эксцентриситет e, связаны с начальными данными движения. Сравним для этого уравнение (4) траектории с фокальным уравнением, в которое эти параметры конического сечения входят в явном виде:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta - \alpha);$$

из сравнения заключаем:

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad \frac{e}{p} = \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}\,; \tag{5}$$

отсюда

$$e = \sqrt{1 + h\frac{C^2}{\mu^2}}. \tag{6}$$

Выражение для эксцентриситета позволяет определить вид конического сечения; мы имеем эллипс, параболу или гиперболу, смотря по тому, будет ли $e < 1, = 1$ или > 1. Таким образом, *вид конического сечения зависит лишь от знака постоянной живых сил h: оно представляет собой эллипс, если $h < 0$, параболу, — если $h = 0$, и гиперболу, — если $h > 0$.*

Постоянная h, определяемая уравнением (3), зависит от начального положения и от величины начальной скорости, но не от ее направления, так как $h = v_0^2 - 2\mu : r_0$. Поэтому *вид конического сечения зависит лишь от точки отправления и от абсолютной величины начальной скорости планеты.*

Ограничимся теперь случаем эллиптической траектории и определим ее большую ось. Из теории конических сечений имеем:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a(1 - e^2);$$

поэтому на основании формул (5) и (6)

$$\frac{C^2}{\mu} = a(1 - e^2) = a\left(-h\frac{C^2}{\mu^2}\right),$$

откуда

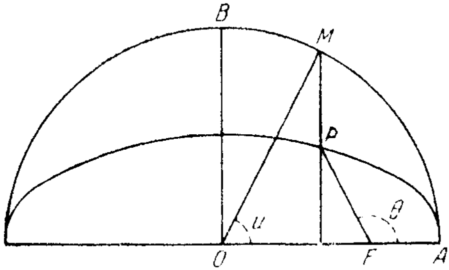
$$a = -\frac{\mu}{h}. \tag{7}$$

Это соотношение показывает, что *длина большой оси эллиптической орбиты зависит лишь от постоянной h живых сил, следовательно, она зависит лишь от начального положения планеты и от абсолютной величины начальной скорости.*

Из уравнений (6) и (7), исключая h, получим

$$1-e^2=\frac{C^2}{\mu a}. \tag{8}$$

143. Выражения r, θ и S в функциях от эксцентрической аномалии. — Положение планеты на ее траектории зависит от времени в соответствии с теоремой площадей. Мы рассмотрим здесь задачу определения этого положения



Фиг. 28.

только для эллиптического движения. Предварительно следует решить чисто геометрическую задачу: выразить координаты r и θ и площадь S фокального сектора эллипса в функциях от эксцентрической аномалии. Дадим сначала определение эксцентрической аномалии.

Рассмотрим эллипс, отнесенный к своим осям:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b).$$

Построим окружность на большой оси как на диаметре (фиг. 28) и возьмем точку M на этой окружности, имеющую ту же самую абсциссу x, как точка P эллипса, и лежащую с той же стороны от большой оси. Центральный угол AOM называют *эксцентрической аномалией точки* P и обозначают его через u. Эксцентрическая аномалия изменяется от 0 до 2π, когда точка P описывает эллипс, а точка M в то же самое время описывает окружность.

Пусть r и θ — полярные координаты точки P, полюс которых совпадает с фокусом эллипса. Выразим сначала эти две координаты как функции от u. Непосредственно имеем $x = a\cos u$, и далее, на основании свойств эллипса,

$$r = a - ex = a(1 - e\cos u). \tag{9}$$

С другой стороны, обращаясь к фигуре 28, получим:

$$x = OF + FP\cos\theta = c + r\cos\theta = ae + r\cos\theta,$$

откуда

$$r\cos\theta = x - ae = a(\cos u - e).$$

Из этих формул получим:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{r}{r} = \frac{1 - e\cos u - (\cos u - e)}{1 - e\cos u + (\cos u - e)} =$$

$$= \frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u}, \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) выражают r и θ в зависимости от эксцентрической аномалии u. Перейдем теперь к вычислению отсчитываемой от большой оси площади S фокального сектора эллипса, т. е. сектора AFP (на фиг. 28), имеющего свою вершину в фокусе F, ближайшем к точке A. Дифференцируя формулу (10), получим

$$\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}.$$

Так как

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = 1 + \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{u}{2} =$$

$$= \frac{(1-e)\cos^2\frac{u}{2} + (1+e)\sin^2\frac{u}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{1 - e\cos u}{(1-e)\cos^2\frac{u}{2}},$$

то

$$d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}} du = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u} du.$$

Подставляя это значение $d\theta$ и значение r из формулы (9) в выражение $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ площади элементарного сектора dS, получим:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2} (1 - e\cos u)\, du;$$

отсюда, интегрируя от $\theta = 0$ и $u = 0$, будем иметь:

$$S = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2} (u - e\sin u).$$

Таково искомое выражение площади фокального сектора в зависимости от эксцентрической аномалии.

144. Выражение времени движения как функции от эксцентрической аномалии. — Мы можем теперь возвратиться к движению планеты. Два ее положения на концах большой оси являются соответственно самым близким и самым удаленным от Солнца, т. е. от фокуса F. Им дают название *перигелия* и *афелия*. Условимся отсчитывать время t от того момента, когда планета находится в перигелии A (фиг. 28).

Теорема площадей дает:

$$2\frac{dS}{dt} = C;$$

отсюда, интегрируя от $t = 0$ и определяя S, как в предшествующих вычислениях, получим:

$$S = \frac{C}{2} t.$$

Заменим S его значением, полученным выше, и постоянную C — ее значением из (5); тогда будет

$$t = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(u - e \sin u). \tag{11}$$

Такова зависимость между t и эксцентрической аномалией. Теперь величины r, θ и t явно выражены как функции от параметра u формулами (9), (10) и (11), и задача интегрирования решена, правда, в параметрической форме.

Продолжительность T обращения планеты получим, полагая $u = 2\pi$ в формуле (11)

$$T = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,2\pi.$$

Таким образом, *квадраты времен обращения относятся, как кубы больших осей орбит.* Это — последний из законов Кеплера. Заметим, что продолжительность обращения зависит лишь от большой оси орбиты, а следовательно, лишь от начального положения планеты и от величины начальной скорости, но не от ее направления.

Чтобы покончить с этим вопросом, остается найти явные выражения r и θ в зависимости от t. Для этого нужно было бы найти выражение u через t из уравнения (11) и подставить его в формулы (9) и (10). Но уравнение (11) трансцендентное, и решение его можно получить лишь приближенными способами. Рассмотрение этого вопроса скорее относится к небесной механике, поэтому мы оставим его в стороне.

§ 11. РАВНОВЕСИЕ ТОЧКИ. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

145. Определение. — Говорят, что покоящаяся в какой-либо момент точка находится в равновесии, если равнодействующая приложенных к ней сил равна нулю. Если точка остается в равновесии в течение некоторого промежутка времени, то она находится в состоянии покоя в течение этого промежутка.

Таким образом, необходимое и достаточное условие для того, чтобы покоящаяся точка была в равновесии под действием приложенных к ней сил, заключается в том, чтобы равнодействующая R этих сил была равна нулю. Если X, Y, Z — проекции силы R, то это условие аналитически запишется в виде трех алгебраических уравнений:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0.$$

146. Случай, когда существует силовая функция. — Если существует силовая функция $\varphi(x, y, z)$ для равнодействующей R сил, приложенных к точке, то три предыдущие уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

О функции $\varphi(x, y, z)$ говорят, что она имеет в точке (a, b, c) максимум или минимум, если значение ее в этой точке больше или меньше, чем во всякой другой достаточно близкой к ней точке. Согласно этому, три предыдущие условия представляют собой *необходимые* условия для максимума или минимума функции φ. Отсюда мы заключаем, что при существовании силовой функции те точки пространства, где функция φ достигает наибольшего или наименьшего значения, суть положения равновесия: точка, будучи помещена в одно из этих положений без начальной скорости, останется в этом положении.

147. Устойчивость равновесия. Теорема Лежен-Дирихле. — Когда точка находится в положении равновесия, то может случиться, что самый незначительный толчок или смещение из этого положения, сообщенные точке, будут достаточны, чтобы привести ее в движение, которое будет все более и более усиливаться, так что точка в конце концов отойдет на конечное расстояние от своего положения равновесия. В этом случае говорят, что равновесие *неустойчиво*. Наоборот, равновесие *устойчиво*, если точка сколь угодно мало отклоняется от своего положения равновесия при условии, что начальные отклонение и скорость достаточно малы.

Теорема Лежен-Дирихле. — *Положения равновесия движущейся точки, в которых силовая функция достигает своего максимума, являются положениями устойчивого равновесия.*

Пусть a, b, c — координаты точки A, в которой силовая функция имеет максимум; это значит, что функция в точке A достигает значения большего, чем во всякой другой, достаточно близкой точке.

Докажем, что A есть положение устойчивого равновесия, т. е. что точка M не выйдет из сферы S с центром A и с радиусом ρ, как угодно малым, при условии, что начальное положение M_0 точки достаточно близко к A и начальная скорость v_0 достаточно мала.

Так как функция φ определена лишь с точностью до постоянной, то мы можем выбрать эту постоянную таким образом, чтобы φ обратилась в нуль в точке A и, следовательно, было отрицательна вблизи от этой точки, т. е. внутри и на поверхности сферы (за исключением точки A) с центром A и с радиусом ρ, который можно задать как угодно малым. В частности, так как φ отрицательна на поверхности сферы S, то можно выбрать положительное число ε (также как угодно малое вместе с ρ), удовлетворяющее в любой точке x, y, z этой поверхности условию

$$\varphi(x, y, z) < -\varepsilon. \tag{1}$$

После того как это сделано, дадим точке M начальное положение M_0, достаточно близкое к A, чтобы удовлетворить условию

$$-\varphi(x_0, y_0, z_0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

и начальную скорость v_0, достаточно малую, чтобы имело место неравенство

$$\frac{mv_0^2}{2} < \frac{\varepsilon}{2};$$

в таком случае можно утверждать, что точка M никогда не выйдет из сферы S.

Это следует из интеграла живой силы

$$\frac{mv^2}{2} = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0) + \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда получаем на основании предыдущих неравенств

$$\frac{mv^2}{2} < \varphi(x, y, z) + \varepsilon. \tag{2}$$

Из этого неравенства сразу же получаем два другие. Прежде всего, так как левая часть положительна, имеем:

$$\varphi(x, y, z) > -\varepsilon,$$

т. е. неравенство противоположного смысла по сравнению с (1), которое имеет место на поверхности сферы. Точка M не может поэтому попасть на эту поверхность и остается, следовательно, внутри ее.

Так как $\varphi(x, y, z)$ не может быть больше нуля, то из неравенства (2) получаем:

$$\frac{mv^2}{2} < \varepsilon,$$

откуда видно, что величина скорости будет порядка ε (т. е. как угодно мала).

ГЛАВА VI

ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ КРИВОЙ ИЛИ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ КРИВОЙ

148. Уравнения движения. — Пусть точка M вынуждена двигаться по кривой (C). На точку действуют непосредственно приложенная сила F и, так как точка не может сойти с кривой, реакция N, испытываемая ею со стороны кривой. Движущуюся точку можно рассматривать в этом случае как свободную, если реакцию N присоединить к силе F, представляющей собой движущую силу.

Пусть X, Y, Z — проекции силы F на оси $Oxyz$, которые мы будем предполагать прямоугольными; пусть далее λ, μ, ν — направляющие косинусы и N — величина реакции неподвижной кривой. Уравнения движения точки M тогда будут:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda N, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \mu N, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \nu N. \quad (1)$$

Одних этих уравнений недостаточно, чтобы определить движение точки, если неизвестно направление λ, μ, ν реакции.

Мы будем рассматривать здесь лишь тот случай, когда кривая неподвижна и свободна от трения. Под этим понимают, по определению, что реакция кривой на точку может быть направлена лишь нормально к кривой. Предположим, что эта кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u),$$

так что положение движущейся точки определяется только значением параметра u. В таком случае достаточно только одного уравнения между u и t, чтобы определить движение, Это единственное уравнение получается на основании теоремы живой силы и не содержит реакции N:

$$d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz, \tag{2}$$

так как работа неизвестной нормальной реакции N постоянно равна нулю. Чтобы интегрировать уравнение (2), нужно заменить в нем величины x, y, z и их первые и вторые дифференциалы, входящие в dv^2 $\left[\text{так как имеем } dv^2 = d\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)\right]$, их значениями, выраженными через u, du и d^2u на основании уравнений кривой. Таким путем мы приходим к одному дифференциальному уравнению второго порядка в переменных u и t; интегрируя его, получаем u в зависимости от t и двух произвольных постоянных интегрирования.

Задача упрощается и становится более интересной, если движущая сила (X, Y, Z) имеет силовую функцию $\varphi(x, y, z)$. В этом случае движение определяется интегралом живой силы, который получается интегрированием уравнения (2) и имеет вид:

$$mv^2 = 2\varphi(x, y, z) + h.$$

Далее нужно выразить x, y, z и dx, dy, dz (содержащиеся в v^2) через u и du. Подставляя эти значения в предшествующее уравнение, получаем уравнение первого порядка в переменных u и t. Решение задачи приводится, таким образом, к интегрированию этого уравнения первого порядка. В результате мы должны получить u как функцию от t, постоянной h живых сил и одной новой постоянной интегрирования.

149. Определение нормальной реакции. — Если движение точки известно, то уравнения (1) предшествующего n° непосредственно дают выражения составляющих λN, μN, νN нормальной реакции.

Нормальная реакция может быть также определена простым геометрическим построением. Полная сила, действующая на точку, равна геометрической сумме $F+N$ движущей силы и реакции; отсюда имеем геометрическое равенство

$$F+N=mj.$$

Приравниваем проекции обеих частей этого равенства на нормальную плоскость к неподвижной кривой. Обозначая через F_n проекцию F и через j_n проекцию j, получим

$$F_n+N=mj_n,$$

откуда следует геометрическое равенство

$$N=mj_n-F_n.$$

Таким образом, *нормальная реакция кривой есть результирующая центростремительной силы mj_n (по величине равной $mv^2:R$), направленной по главной нормали к неподвижной кривой, и нормальной составляющей движущей силы, взятой с обратным знаком.*

В силу закона равенства действия и противодействия *давление,* производимое движущейся точкой на неподвижную кривую, равно и противоположно N, т. е. равно F_n-mj_n.

На основании этого *давление движущейся точки на кривую есть результирующая центробежной силы* (n° 119) *и нормальной составляющей движущей силы.*

Реакция неподвижной кривой и давление точки на кривую могут быть определены *a priori* для каждой точки на кривой, если известна скорость, которой будет обладать движущаяся точка, проходя через эту точку кривой, так как $j_n=mv^2:R$. Это будет в случае существования интеграла живой силы, так как этот интеграл выражает скорость как функцию от положения движущейся точки.

§ 2. ТЕОРИЯ ПРОСТОГО МАЯТНИКА

150. Движение тяжелой точки по вертикальной окружности. — В качестве приложения предшествующей теории рассмотрим движение тяжелой точки M, вынужденной двигаться без трения по вертикальной окружности с центром O и с радиусом l. Движущаяся точка, находящаяся в этих условиях, представляет собой то, что называют *простым*, или *математическим маятником*.

Пусть точка M помещена в начальное положение M_0 и предоставлена, без начальной скорости, действию одной только силы тяжести.

Примем за ось x горизонтальный диаметр, а за ось z — вертикальный диаметр с ориентацией в сторону действия силы тяжести. Уравнение движения дается *интегралом живой силы*, т. е. в этом случае *теоремой Торичелли*:

$$v^2 = 2g(z - z_0). \qquad (1)$$

Это уравнение позволяет предвидеть без всякой интеграции, каков будет характер движения. Предположим, что начальное положение M_0 не находится на вертикальном диаметре окружности, так что M_0 не есть положение равновесия (так как нормальная реакция не прямо противоположна весу). Точка M будет поэтому спускаться вдоль окружности со скоростью, возрастающей вместе с z, до самого нижнего положения у основания вертикального диаметра, где v имеет наибольшее значение. Потом точка начнет подниматься по окружности с другой стороны от вертикального диаметра с убывающей скоростью до того момента, когда она достигнет своей начальной высоты в точке C, где ее скорость обратится в нуль. В этом положении не будет равновесия; точка M будет поэтому двигаться в обратном направлении, пока она не возвратится в свое начальное положение M_0, где ее скорость снова обратится в нуль. В этот момент положение будет точно такое же, как в начале движения, поэтому далее весь процесс повторится. Таким образом, точка будет совершать колебательное движение в ту и другую сторону от вертикали. Так как скорость проходит через одни и те же значения на одних и тех же уровнях, то продолжительность колебаний будет неизменной. Колебательное движение будет поэтому периодическим

Движение, которое точка должна совершить, чтобы перейти из начального положения M_0 в симметричное, положение C и возвратиться оттуда в начальное положение представляет собой *полное колебание* маятника. Продолжительность этого движения, которую мы будем обозначать через $2T$, называется *периодом полного колебания*. Найдем половину T периода, т. е. время, необходимое для перехода из положения M_0 в симметричное положение. Этот промежуток равен удвоенному времени, необходимому для того, чтобы точка поднялась из самого низкого положения B до своего начального уровня C.

Пусть θ есть угол между движущимся радиусом OM и вертикальным диаметром OB, считаемый положительным по направлению к OC; пусть α — наибольшее значение θ при котором OM совпадает с OC, т. е. начальное отклонение. Тогда имеем:

$$r = l\cos\theta, \qquad v = l\frac{d\theta}{dt};$$

Интеграл живых сил получает вид:

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl\left(\cos\theta - \cos\alpha\right),$$

откуда следует:

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Знак $+$ нужно брать в том случае, когда dt и $d\theta$ имеют одинаковые знаки, т. е. когда при возрастании t возрастает и θ, что имеет место при движении из M_0 в C. Знак $-$ нужно брать, когда θ убывает при возрастании t, что имеет место при движении в обратную сторону. Рассмотрим движение от B к C; мы должны при этом взять знак $+$. В этой фазе движения t возрастает на $\frac{T}{2}$, и θ изменяется от 0 до α. Поэтому, интегрируя предыдущее уравнение для этой фазы движения, получим:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

так как можно написать

$$\cos\theta - \cos\alpha = (1 - \cos\alpha) - (1 - \cos\theta) = \\ = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Положим для упрощения

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k, \quad \sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi,$$

тогда

$$\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = k\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = k\cos\varphi,$$

$$\theta = 2\arcsin(k\sin\varphi),$$

$$d\theta = \frac{2k\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Выполняя эти подстановки, получим

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \qquad (2)$$

Интеграл, входящий в формулу (2), называется *полным эллиптическим интегралом*. Он не может быть выражен в конечной форме при помощи элементарных функций; существуют таблицы, которые дают его значения для различных значений параметра k^2. Если угол α очень мал, т. е. если амплитуда колебаний незначительна, то можно легко получить приближенное значение интеграла. Заметим, что точное значение интеграла лежит между двумя его значениями, которые мы получим, заменяя последовательно $\sin^2\varphi$ двумя его крайними значениями 0 и 1. Таким способом найдем:

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} < T < \frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если k очень мало, то эти два граничных значения для T очень мало отличаются друг от друга, и мы можем положить

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3}$$

Эта формула дает значение для половины периода бесконечно малого колебания маятника.

Значение T можно выразить сходящимся рядом по положительным степеням k^2. По формуле бинома (ряд сходится, так как $k^2\sin^2\varphi < 1$) имеем:

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}(k^2\sin^2\varphi)^2+\ldots$$

Подставляя это разложение в интеграл Лежандра (2) и интегрируя его почленно, получим:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\ldots\right].$$

Если пренебречь членами четвертого порядка и выше, то значение полупериода приближенно выражается следующей формулой:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

Такое приближение почти всегда оказывается достаточным.

151. Свойства простого маятника. — Простой маятник состоит из тяжелой материальной точки M, подвешенной к неподвижной точке O при помощи невесомого стержня (или нити) неизменяемой длины. Стержень отклоняют от вертикали и предоставляют маятник действию силы тяжести. Точка M будет при этом описывать окружность в вертикальной плоскости с центром O согласно законам, полученным выше. Половина периода полного колебания определится формулой (2), где l — длина маятника и α — начальное отклонение стержня от вертикали. Если это отклонение очень мало, то продолжительность T полупериода с достаточной точностью определится формулой (3) и не будет зависеть от начального отклонения (т. е. от амплитуды колебаний). Это свойство, которое называют *изохронизмом* малых колебаний, служит основанием для применения маятника к регулированию хода часов.

152. Измерение g. — Из формулы (3) получаем следующее выражение для g:

$$g = \pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

Эта формула дает средство для точного определения ускорения g силы тяжести в каждом определенном месте. С этой целью в данном месте наблюдают колебания маятника длиной l и определяют число n колебаний в заданный промежуток времени T_1. Продолжительность половины полного колебания равна $T_1 : 2n$; следовательно,

$$g = \frac{4n^2\pi^2 l}{T_1^2}.$$

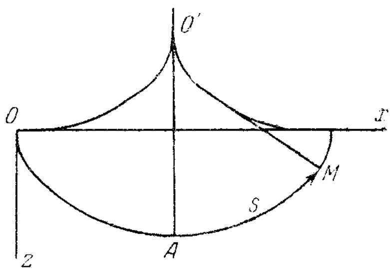
Таким именно способом было измерено изменение силы тяжести с широтой места на земной поверхности.

153. Замечание. Маятник на одной и двух нитях. — Если тяжелая точка M подвешена к неподвижной точке O одной нитью, то в действительности она будет двигаться по поверхности сферы с центром O, и движение ее будет представлять собой движение простого маятника лишь в том случае, когда начальная скорость равна нулю (как мы это предполагали) или, при более общем предположении, лежит в вертикальной плоскости, проходящей через O. При всяком другом предположении точка M будет описывать пространственную сферическую кривую, и движение ее будет представлять собой движение *сферического* маятника, который мы рассмотрим несколько далее.

Чтобы осуществить движение простого маятника при всяких условиях, т. е. чтобы обеспечить движение точки M в вертикальной плоскости, можно подвесить точку на двух нитях одинаковой длины к двум точкам O и O', лежащим на горизонтальной прямой. Такое приспособление вынуждает точку двигаться в вертикальной плоскости, нормальной к отрезку OO' в его середине. По этой именно причине простой маятник называют иногда *маятником на двух нитях*, в отличие от сферического маятника, который представляет собой *маятник на одной нити*.

§ 3. ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ МАЯТНИК

154. Движение тяжелой точки по циклоиде. — *Циклоидальный маятник* представляет собой тяжелую точку, вынужденную двигаться (без трения) по циклоиде. Эта циклоида имеет горизонтальное основание, расположена в вертикальной плоскости и обращена своей вогнутостью кверху; она может быть образована движением точки окружности вертикального круга радиуса a, который катится снизу по неподвижной горизонтальной прямой.



Фиг. 29.

Примем эту неподвижную прямую за ось x (фиг. 29), поместим начало O в точке возврата циклоиды (в которой описывающая циклоиду точка достигает прямой Ox) и проведем ось z вертикально вниз. Тогда мы будем иметь параметрические уравнения циклоиды в их классической форме

$$x = a(u - \sin u), \quad z = a(1 - \cos u),$$

где u есть угол между подвижным радиусом, идущим из центра катящейся окружности к движущейся точке, и вертикальным диаметром этой окружности.

Из этих уравнений получим:

$$dx = a\ (1 - \cos u)\, du, \qquad dz = a \sin u\, du,$$

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = 2a^2(1 - \cos u)\, du^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{u}{2}\, du^2,$$

откуда, отсчитывая s и u в одну и ту же сторону, будем иметь:

$$ds = 2a \sin \frac{u}{2}\, du.$$

Будем отсчитывать дугу s от нижней точки циклоиды (где $u = \pi$), тогда получим:

$$s = 2a \int\limits_{\pi}^{u} \sin \frac{u}{2}\, du = -4a \cos \frac{u}{2}\, .$$

Движение точки M (с массой m) по циклоиде определяется ее *внутренним* уравнением (в проекциях на касательную), имеющим в общем случае вид:

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t.$$

В данном случае F_t есть проекция на касательную веса $F = mg$, следовательно (так как направление и ориентация веса F и оси Oz совпадают)

$$F_t = mg \cos(F, ds) = mg\frac{dz}{ds}\, ;$$

поэтому внутреннее уравнение движения будет в данном случае

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\frac{dz}{ds}.$$

Принимая во внимание значения dz и ds, вычисленные выше, будем иметь:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\sin u}{2\sin\frac{u}{2}}=\cos\frac{u}{2}=-\frac{s}{4a}.$$

Дифференциальное уравнение движения получает, таким образом, следующий окончательный вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{4a}\,s=0.$$

Это линейное уравнение такого же вида, как уравнение, которое определяет движение точки, притягиваемой к неподвижному центру силой, пропорциональной расстоянию (n° 136).

Общий интеграл его будет

$$s=A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right)+B\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right).$$

Это равенство и дает уравнение движения в конечной форме.

Предположим, что точка предоставлена действию своего веса в начальном положении s_0 без начальной скорости. Для $t=0$ будем иметь:

$$s_0=A,\qquad s_0'=B\sqrt{\frac{g}{4a}}=0.$$

Следовательно, $B=0$, и уравнение движения приводится к виду

$$s=s_0\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right).$$

Эта формула показывает, что точка M совершает периодические колебания в ту и другую стороны от нижней точки циклоиды. Продолжительность T половины полного колебания будет:

$$T = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Она совершенно не зависит от амплитуды s_0. Колебания циклоидального маятника оказываются, таким образом, вполне изохронными. Движение, обладающее таким свойством, называют *таутохронным*.

Следует заметить, что $4a$ есть радиус кривизны циклоиды в ее нижней точке, что позволяет приравнять T полупериоду бесконечно малых колебаний простого маятника.

155. Осуществление циклоидального маятника. — Гюйгенс, которому мы обязаны предшествующими результатами, осуществил на практике циклоидальный маятник. Известно, что эволюта циклоиды есть циклоида, равная первоначальной и смещенная на длину $a\pi$ в горизонтальном направлении и на высоту $2a$ вверх. Центр кривизны циклоиды, представляющей собой эвольвенту, в нижней ее точке находится в точке возврата эволюты, и соответствующий радиус кривизны равен $4a$. Поэтому если подвесить тяжелую точку M на нити длиной $4a$ к точке возврата O' эволюты (фиг. 32) и заставить ее колебаться так, чтобы нить попеременно навертывалась на обе дуги эволюты, оканчивающиеся в точках возврата эвольвенты, то тяжелая точка будет двигаться точно по эвольвенте. Однако конструкция циклоидального маятника оказывается слишком сложной, чтобы представляемые им теоретические преимущества заставили предпочесть его в практических применениях простому маятнику.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

156. Дифференциальные уравнения движения. — Рассмотрим точку M массы m, вынужденную двигаться по неподвижной поверхности S, заданной уравнением

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Пусть F есть сила, приложенная к точке, X, Y, Z — ее проекции на оси (предполагаемые прямоугольными), N — реакция поверхности и λ, μ, ν — ее направляющие косинусы. Точка M может рассматриваться как свободная, если мы присоединим к силе F реакцию N. Уравнения движения тогда будут

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda N,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\mu N,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\nu N. \qquad (2)$$

Мы будем рассматривать только тот случай, когда поверхность S абсолютно гладкая и, следовательно, может развить только нормальную реакцию, действующую на точку M. В этом случае λ, μ, ν соответственно пропорциональны частным производным функции $f(x, y, z)$; можно поэтому положить

$$\frac{\lambda}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{\mu}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}=\frac{\nu}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\rho.$$

Уравнения движения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\frac{\partial f}{\partial x}N\rho,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\frac{\partial f}{\partial y}N\rho,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\frac{\partial f}{\partial z}N\rho. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Уравнения (1) и (3) образуют систему четырех уравнений между четырьмя неизвестными функциями x, y, z, $N\rho$ и временем. Теоретически они позволяют определить эти четыре неизвестные в зависимости от t. После того как движение будет определено, уравнения (3) позволят непосредственно найти проекции на оси $\frac{\partial f}{\partial x}N\rho, \ldots$ нормальной реакции N; последняя будет, таким образом, тоже определена.

Теорема живой силы дает в случае неподвижной поверхности, как и в случае кривой, уравнение, не зависящее от реакции N:

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,.$$

Если существует силовая функция $\varphi\,(x, y, z)$ для силы F, то из предыдущего уравнения получаем интеграл живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} = \varphi\,(x, y, z) + h\,.$$

Однако одного уравнения живой силы в той или другой форме недостаточно, чтобы определить движение, так как положение точки на поверхности зависит от двух параметров.

157. Нормальная реакция поверхности. — Реакция N может быть определена, если исходить из геометрического равенства

$$F + N = mj. \qquad (4)$$

Пусть j_ν есть проекция вектора j на нормаль к поверхности, проведенную в какую-нибудь определенную сторону и образующую с главной нормалью к траектории угол θ; тогда будет, если обозначить через ρ радиус кривизны траектории:

$$j_\nu = j_n \cos\theta = \frac{v^2}{\rho}\cos\theta.$$

Пусть F_ν есть проекция силы F на ту же нормаль к поверхности. Если спроектировать обе части геометрического равенства (4) на эту нормаль, то получим:

$$F_\nu + N = mj_\nu = \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta,$$

откуда

$$N = \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta - F_\nu.$$

Эту формулу можно упростить, если обратиться к теореме из теории поверхностей, известной под названием *теоремы Менье* (*Meusnier*). Пусть R есть радиус кривизны нормального сечения поверхности плоскостью, проходящей через касательную MT к траектории; на оснввании этой теоремы имеем соотношение $\rho = R\cos\theta$, откуда

$$N = \frac{mv^2}{R} - F_\nu .$$

Таким образом, нормальная реакция поверхности есть разность следующих двух сил: с одной стороны, центростремительной силы, которая была бы приложена к точке, если бы эта точка описывала с той геометрической скоростью, которую она в данный момент имеет, нормальное сечение поверхности, и, с другой стороны, силы, равной проекции движущей силы на нормаль к поверхности.

158. Случай, когда движущая сила равна нулю. — Если движущая сила равна нулю, то теорема живой силы непосредственно дает $v = \text{const}$. Скорость точки имеет постоянную величину во все время движения. В этом случае нормальная реакция N поверхности есть в то же время полная сила, действующая на точку; поэтому эта сила, так же как и ускорение, лежит в соприкасающейся плоскости к траектории и направлена по главной нормали к этой кривой. Таким образом, главная нормаль к траектории в каждой ее точке есть в то же время нормаль к поверхности. Кривые, обладающие таким свойством, называются *геодезическими линиями*. Можно доказать, что геодезические линии являются кратчайшими из всех линий, которые можно провести на поверхности между двумя точками, если только эти две точки находятся достаточно близко одна от другой. Таким образом, если при движении точки по абсолютно гладкой поверхности движущая сила равна нулю, то траекторией точки будет геодезическая линия. В частности, если поверхность сферическая, то траекторией точки будет дуга большого круга этой сферы.

§ 5. СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

159. Уравнения движения тяжелой точки по поверхности сферы. — *Сферический*, или *свободный маятник*, или также *маятник на одной нити* (n° 153) представляет собой точку, движущуюся без трения по поверхности сферы. Мы рассмотрим здесь это движение как пример движения точки по поверхности.

Выберем за начало прямоугольных осей центр O сферы и проведем ось Oz вертикально в сторону действия силы тяжести. Пусть l — радиус сферы и mN — нормальная реакция сферической поверхности, так что N есть реакция, отнесенная к единице массы. Если предположить, что движущаяся точка M связана с точкой O нитью, то mN есть реакция нити. Обозначим через N алгебраическое значение реакции N, считая его положительным, если реакция направлена к центру (натяжение), и отрицательным в обратном случае. Направляющие косинусы N тогда будут:

$$-\frac{x}{l}, \quad -\frac{y}{l}, \quad -\frac{z}{l};$$

а проекции mN:

$$-mN\frac{x}{l}, \quad -mN\frac{y}{l}, \quad -mN\frac{z}{l}.$$

Движущаяся точка находится под действием только двух сил: реакции mN и силы веса, равной mg; поэтому уравнения движения (после сокращения на общий множитель m) будут:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g-N\frac{z}{l}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

К ним нужно присоединить соотношение:

$$x^2+y^2+z^2=l^2. \qquad (2)$$

Таким образом, имеем четыре уравнения для определения четырех неизвестных x, y, z, и N в зависимости от времени.

Самым простым случаем будет тот, когда начальная скорость лежит в вертикальной плоскости, проходящей через O, например в плоскости zy. Тогда начальные значения x и $\frac{dx}{dt}$ равны нулю. Первому уравнению удовлетворим, полагая $x=0$, два другие уравнения определят y и z. Движение происходит в вертикальной плоскости, и мы приходим к случаю простого маятника. Мы можем поэтому исключить этот случай, уже рассмотренный выше.

160. Интегралы живых сил и площадей. — Легко получить в рассматриваемом случае два первых интеграла уравнений движения: интегралы живых сил и площадей.

Так как работу производит только сила тяжести, то теорема живой силы даст уравнение

$$v^2 = 2gz + h, \tag{3}$$

где h есть постоянная живых сил.

С другой стороны, в этом случае применима теорема площадей к горизонтальной плоскости xy, так как вес (параллельный Oz) и нормальная реакция (пересекающая Oz) имеют равнодействующую, пересекающую ось Oz. Обозначим через S площадь, ометаемую проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость xy; интеграл площадей будет:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}, \ |C| > 0, \tag{4}$$

где C есть постоянная площадей. Эта постоянная не равна нулю, так как случай простого маятника исключен.

Уравнений (2), (3) и (4) достаточно, в силу исключения N, чтобы найти x, y, z в зависимости от t; следовательно, эти уравнения определяют движение.

161. Нормальная реакция. — При помощи интеграла (3) живой силы можно показать, что *реакция N зависит лишь от z и от постоянной h живых сил.*

Сложим уравнения (1), умноженные соотвественно на x, y, z; принимая во внимание уравнение (2), получим:

$$\sum x \frac{d^2x}{dt^2} = gz - Nl,$$

где сумма $\sum$ распространяется на три координаты.

С другой стороны, если продифференцировать два раза по t уравнение (2), то получим

$$\sum x \frac{d^2x}{dt^2} = -\sum \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -v^2.$$

Из двух полученных уравнений имеем

$$N = g\frac{z}{l} + \frac{v^2}{l}.$$

Эта формула выражает для нашего частного случая общее правило, данное в конце n° **157.** Она показывает, что N не может обратиться в нуль, если z положительно, т. е. пока точка движется ниже экватора. Если заменить величину v^2 ее значением $2gz + h$ из уравнения (3), то получим:

$$N = \frac{3gz + h}{l}. \tag{5}$$

Эта формула выражает теорему, высказанную в начале n°.

162. Бесконечно малые колебания сферического маятника. — Прежде чем рассматривать задачу в общем случае, следует изучить случай, когда угол между нитью OM и вертикалью остается все время очень малым. Мы будем предполагать этот угол настолько малым, чтобы можно было пренебречь квадратами отношений $x:l$ и $y:l$ по сравнению с единицей. При такой степени приближения имеем, в силу уравнения (2),

$$\frac{z}{l} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}} = 1;$$

поэтому, с тою же степенью приближения, N остается постоянной в силу формулы (5). Далее, последнее из уравнений (1), с тем же приближением, можно написать в виде:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g-N, \text{ откуда } \frac{dz}{dt}=(g-N)\,t+C'.$$

Отсюда заключаем, что $g=N$, так как z все время остается близким к l, и производная $\frac{dz}{dt}$ не может возрастать неограниченно вместе с t.

Движение проекции μ точки M на плоскость xy определяется в этом случае, с тем же приближением, двумя уравнениями:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{gx}{l}=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{gy}{l}=0.$$

Это уравнения движения точки, притягиваемой к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию и равной по величине k^2r, где $k^2=g:l$. Общие интегралы этих уравнений будут (n° 136):

$$\left.\begin{aligned} x&=A\cos kt+B\sin kt,\\ y&=A_1\cos kt+B_1\sin kt, \end{aligned}\right\}\quad k=\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Траектория точки μ есть эллипс.

Возьмем ось x в направлении наибольшего радиуса-вектора r_0, который будем считать начальным, и пусть начальная скорость v_0 (перпендикулярная к радиусу) будет параллельна оси y. При этих начальных данных получим:

$$r_0=A, \quad B=0, \quad A_1=0, \quad v_0=kB_1.$$

Уравнения траектории, которая в этом случае будет отнесена к своим осям симметрии, получат вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=r_0\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),\\ y&=v_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \end{aligned}\right\}$$

Продолжительность $2T$ полного обращения точки по эллипсу будет

$$2T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Она равна, таким образом, периоду бесконечно малого колебания простого маятника той же длины. Если $v_0 = 0$, то движение сферического маятника приводится к движению простого маятника и очень мало отличается от последнего, если скорость v_0 мала.

163. Уравнения движения в цилиндрических координатах. Приведение интегрирования к эллиптическим квадратурам. — Пусть r и θ — полярные координаты проекции μ точки M на плоскость xy. Тогда

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2}.$$

Уравнения (2), (3) и (4) (уравнение сферы, интеграл живых сил и интеграл площадей) принимают в цилиндрических координатах r, θ и z вид:

$$r^2 + z^2 = l^2,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz + h,$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C.$$

Зависимость между z и t получим, исключая r и θ из этих трех уравнений. Для этого умножим второе уравнение на r^2, что дает

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r^2\left(2gz + h - \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

и продифференцируем первое уравнение

$$r\frac{dr}{dt} = -z\frac{dz}{dt};$$

исключение $\left(r\frac{dr}{dt}\right)$, $\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ и r^2 из предпоследнего уравнения приводит к

$$\left(z\frac{dz}{dt}\right)^2+C^2=(l^2-z^2)\left(2gz+h-\frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

или после приведения подобных членов:

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(l^2-z^2)\ (2gz+h)-C^2.$$

Зависимость между z и t принимает, таким образом, вид:

$$l\frac{dz}{dt}=\pm\sqrt{\varphi(z)},\tag{6}$$

где положено

$$\varphi(z)=(l^2-z^2)(2gz+h)-C^2.\tag{7}$$

Обозначим три корня многочлена $\varphi(z)$ через $-a$, b и c. Мы покажем, что эти три корня действительны; первый отрицателен и меньше $-l$, а два другие заключены между $\pm l$. Для этого заметим, что так как квадратный корень из $\varphi(z)$ действителен, то функция $\varphi(z)$ положительна для всех значений z, удовлетворяющих задаче, и, в частности, для начального значения z_0 (заключенного между $\pm l$). Заметим далее, что $\varphi(z)$ получает значения с чередующимися знаками для последовательных значений $z: z=-\infty,\ -l,\ z_0,\ +l$.

В самом деле,

$$\varphi(-\infty)=+\infty,\quad \varphi(-l)=-C^2,$$

$$\varphi(z_0)>0,\quad \varphi(+l)=-C^2.$$

Поэтому имеем:

$$-a<-l<b<c<l.$$

Так как $\varphi(z)$ должно оставаться положительным, то необходимо, чтобы z изменялось между b и c. Следовательно, вертикальная координата точки M колеблется между этими значениями, т. е. точка M совершает периодические колебания между верхним уровнем b и нижним уровнем c.

Если обратимся к коэффициентам многочлена $\varphi(z)$ в формуле (7), то увидим, что его корни — a, b, c связаны двумя соотношениями:

$$ab + ac - bc = l^2, \quad a - b - c = 2gh;$$

из первого получаем

$$a = \frac{bc + l^2}{b + c}.$$

Эта формула показывает, что $b + c$ и, следовательно, c положительны (так как a и $bc + l^2$, конечно, положительны). Нижний уровень находится, таким образом, под экватором сферы, но верхний уровень может находиться и над экватором. Вторая формула показывает, что a возрастает неограниченно вместе с h (постоянной живых сил), т. е. вместе с начальной скоростью. Но тогда $b + c$ (знаменатель a) стремится к нулю, и в пределе оба уровня (верхний и нижний) будут находиться по обе стороны от экватора на одинаковых расстояниях от него. В этом случае действительно можно пренебречь силой тяжести и считать, что движение точки совершается по геодезической линии, т. е. по большому кругу сферы.

Вернемся теперь к выражению $\varphi(z)$. На основании сказанного имеем:

$$\varphi(z) = 2g(z + a)(z - b)(z - c). \tag{8}$$

Продолжительность T перехода от b к c получим, интегрируя значение dt из уравнения (6). Так как, изменяясь от b до c, z меняется в том же смысле, как t, то радикал нужно взять с знаком $+$; таким образом

$$T = \int_b^c \frac{dt}{dz}\, dz = l \int_b^c \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}. \tag{9}$$

Пусть $O\mu$ есть проекция радиуса OM на горизонтальную плоскость; за промежуток времени dt радиус $O\mu$

поворачивается на угол $d\theta$, который получим из интеграла площадей:

$$d\theta = \frac{C\,dt}{r^2} = \frac{Cl\,d}{(l^2 - z^2)\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Найдем угол Θ, который описывает $O\mu$ вокруг вертикали за то время, когда точка M опускается от верхнего уровня b до нижнего уровня c. Он выражается интегралом

$$\Theta = Cl\int_b^c \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{\varphi(z)}}. \tag{10}$$

То же самое значение получим для угла, описываемого за время перехода от нижнего уровня до верхнего; при этом радикал и dz одновременно изменяет свои знаки. Задача приводится, таким образом, к квадратурам (9) и (10), но квадратуры эти эллиптические. Чтобы привести решение задачи к более простому виду, найдем приближенное значение интеграла (10).

164. Приближенное значение Θ. — Найдем приближенное выражение для интеграла (10). Представим сначала этот интеграл в виде:

$$\Theta = \frac{C}{2}\int_b^c \left(\frac{1}{l - z} + \frac{1}{l + z}\right)\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}};$$

далее, заменим C его значениями, полученными из формулы (7),

$$C = \sqrt{-\varphi(l)} = \sqrt{-\varphi(-l)};$$

тогда можем написать

$$2\Theta = \int_b^c \left(\frac{\sqrt{-\varphi(l)}}{l - z} + \frac{\sqrt{-\varphi(-l)}}{l + z}\right)\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Однако

$$\varphi(z) = 2g(z+a)(z-b)(z-c).$$

Множитель $(z+a)$ можно вынести за знак интеграла, заменяя его средним значением $(a+\zeta)$, где ζ заключено между b и c; таким образом, получаем:

$$2\Theta\sqrt{a+\zeta} = \int_b^c \left(\frac{\sqrt{-\varphi(l)}}{l-z} + \frac{\sqrt{-\varphi(-l)}}{l+z}\right)\frac{dz}{\sqrt{2g(z-b)(z-c)}}.$$

Теперь интеграл приведен к элементарной форме и вычисляется легко. Имеем

$$\int_b^c \frac{1}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\frac{dz}{l-z} = \frac{\pi}{\sqrt{(l-b)(l-c)}},$$

$$\int_b^c \frac{1}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\frac{dz}{l+z} = \frac{\pi}{\sqrt{(l+b)(l+c)}},$$

так как эти интегралы приводятся соответственно подстановкой $l \mp z = \frac{1}{4}$ к классическому интегралу

$$\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}} = \pi.$$

Заменяя в правой части φ значениями, полученными из формулы (8):

$$-\varphi(l) = 2g(a+l)(l-b)(l-c),$$

$$-\varphi(-l) = 2g(a-l)(l+b)(l+c),$$

найдем

$$2\Theta\sqrt{a+\zeta} = \pi\left(\sqrt{a+l} + \sqrt{a-l}\right),$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{a+l}+\sqrt{a-l}}{\sqrt{a+\zeta}} \tag{11}$$

при условии $b<\zeta<c$.

Приближенная формула (11) показывает, что Θ всегда больше $\frac{\pi}{2}$. Это видно непосредственно, так как $l > \zeta$, следовательно $\sqrt{a+l} > \sqrt{a+\zeta}$.

С другой стороны, она показывает, что если ζ положительна, то $\Theta < \pi$, так как имеет место неравенство

$$\sqrt{a+l}+\sqrt{a-l}<2\sqrt{a}<2\sqrt{a+\zeta},$$

которое доказывается возведением в квадрат. Это условие ($\zeta > 0$) будет выполнено, если маятник колеблется, оставаясь под уровнем экватора сферы. Итак, если колебания происходят на нижней полусфере, то Θ остается меньше π. Это заключение можно распространить и на случай $\zeta < 0$, но соответствующее доказательство было бы более трудным, поэтому мы не будем здесь его рассматривать.

165. Характер колебаний сферического маятника. — Рассмотрим случай, когда колебания происходят на нижней полусфере. Точка M, отправляясь от своего верхнего уровня, опускается до нижнего уровня. В это время горизонтальная проекция ее радиуса-вектора $O\mu$ поворачивается вокруг вертикали на угол Θ, заключенный между $\frac{\pi}{2}$ и π. Далее точка опять поднимается до своего верхнего уровня, между тем как ее радиус-вектор продолжает поворачиваться на такой же угол. В этот момент точка M не может оказаться ни в своем начальном положении, ни в противоположном положении на том же меридиане. После второй фазы, подобной только что описанной, точка второй раз возвращается к своему начальному уровню, причем проекция ее радиуса-вектора оказывается повернутой на угол 4Θ, заключенный между 2π и 4π. Таким образом, точка необходимо должна пройти мимо своего начального положения, и движение, вообще говоря, не будет периодическим или, самое большее, может допускать в качестве периода лишь промежуток, кратный продолжительности только что описанной фазы. Последнее обстоятельство следует рассматривать как весьма частный случай рассмотренного здесь общего движения или даже как исключение из этого общего случая.

Рассмотрим теперь проекцию траектории на экваториальную плоскость xy; это будет некоторая плоская кривая. Эта кривая не может иметь точек перегиба, если движущаяся точка остается на нижней полусфере. В самом деле, в точке перегиба мы имели бы

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}=0,$$

откуда

$$dx\frac{d^2y}{dt^2}-dy\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

и в силу уравнений движения (1) (n°159):

$$N(xdy-ydx)=NCdt=0,$$

где C есть постоянная площадей. Следовательно, точка перегиба может быть в случае, если $N=0$. Но выше мы видели (n°161), что N не может обратиться в нуль на нижней полусфере. Таким образом, движение проекции μ точки M на горизонтальную плоскость можно рассматривать как движение точки, описывающей овал, в то время как этот овал сам вращается в своей плоскости в ту же сторону, как движущаяся точка.

166. Частный случай. Конический маятник. — Может случиться, что сферический маятник описывает на сфере окружность, параллельную экватору; он называется тогда *коническим маятником*. В этом случае оба корня b и c равны друг другу и положительны. Так как многочлен $\varphi(z)$ должен иметь двойной корень, то квадратуры (9) и (10) оказываются элементарными. Если предположить значения b и c (и, следовательно, ζ) бесконечно близкими одно к другому, то значение a становится равным $(b^2+l^2):2b$, и формула (11) дает, в качестве *предельного значения* Θ, величину

$$\Theta = \frac{\pi l}{\sqrt{l^2 + 3b^2}} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \Theta < \pi\right).$$

Движение конического маятника периодическое, но оно не представляет собою, как это видно, предела движения, стремящегося стать периодическим, так как Θ не стремится ни к $\frac{\pi}{2}$, ни к π.

В движении конического маятника ордината z, радиус r, скорость v и реакция N являются постоянными величинами. Можно непосредственно получить связывающие их соотношения, если заметить, что горизонтальная и вертикальная проекции N представляют собой соответственно центростремительную силу $v^2 : r$ и силу g, равную и противоположную весу. Таким образом, если λ есть угол наклона маятника к вертикали, то будем иметь

$$N \sin \lambda = \frac{v^2}{r}, \quad N \cos \lambda = g,$$

откуда, исключая N, получим:

$$v^2 = gr \operatorname{tg} \lambda = \frac{gr^2}{z}.$$

Продолжительность обращения конического маятника равна

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{z}{g}}.$$

Эта величина совпадает с полным периодом бесконечно малого колебания простого маятника длины z.

ГЛАВА VII

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

167. Предварительные замечания. — При выводе дифференциальных уравнений и различных свойств движения точки, которые мы изучали до сих пор, предполагалось, что рассматривается абсолютное движение, т. е. движение, отнесенное к неподвижным осям, введенным нами выше. Во многих случаях возникает необходимость определять *кажущееся*, или *относительное* движение, отнесенное к системе отсчета, движущейся по отношению к неподвижным осям. Так, в том случае, когда мы изучали движение точки вблизи земной поверхности, мы рассуждали так, как если бы Земля находилась в покое, и рассматривали это движение как абсолютвое. Остается сделать следующий шаг и оценить полученное таким образом приближение. Общая задача заключается в построении теории движения точки относительно системы отсчета, движущейся в пространстве. Мы покажем здесь, как можно получить непосредственно уравнения движения точки относительно системы отсчета, движение которой задано.

168. Дифференциальные уравнения относительного движения. Центробежная сила. Сложная центробежная сила. — Пусть $Oxyz$ — подвижный триэдр отсчета; m — масса, x, y, z — относительные координаты движущейся точки M и X, Y, Z — проекции реальной силы F, определяющей абсолютное движение точки. Эта сила равна mj, произведению массы точки на ее ускорение j.

Пусть j', j'', j''' — ускорения, относительное, переносное и добавочное, точки M. Тогда имеем:

$$j_x' = j_x - j_x'' - j_x'''.$$

Умножим каждый член этого равенства на m, заменим j'_x через $\frac{d^2x}{dt^2}$, mj_x — через X и поступим так же по отношению к двум другим осям; мы получим следующие три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - mj_x'' - mj_x''', \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - mj_y'' - mj_y''', \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - mj_z'' - mj_z'''. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения относительного движения точки M. В кинематике (n° 80 и 81) мы дали способ определения проекций векторов j'' и j'''.

Фиктивную силу, равную $-mj''$ и имеющую проекциями $-mj_x''$, $-mj_y''$, $-mj_z''$, называют *кинетической реакцией переносного движения* (или *силой инерции переносного движения*).

Фиктивную силу, равную $-mj'''$, имеющую проекциями $-mj_x'''$, $-mj_y'''$, $-mj_z'''$, называют *сложной центробежной силой, или кориолисовой силой.*

Уравнения (1) выражают, таким образом, следующую теорему:

Относительное движение точки по отношению к подвижной системе отсчета может рассматриваться как абсолютное движение и обладает всеми свойствами абсолютного движения, если только к реальным силам, действующим на точку, присоединить две фиктивные силы: кинетическую реакцию переносного движения и сложную центробежную силу.

Добавочное ускорение, как известно (n° 81), исчезает, если относительная скорость равна нулю (т. е. если точка находится в относительном покое). То же самое имеет место и для сложной центробежной силы.

Отсюда имеем следующую теорему:

Условия относительного равновесия точки определяются, как и условия абсолютного равновесия, из рассмотрения действительных сил, но при этом к ним прибавляется сила инерции переносного движения.

Если подвижные оси находятся в прямолинейном и равномерном поступательном движении, то оба ускорения j'' и j''' равны нулю, кинетическая реакция и сложная центробежная сила тоже обращаются в нуль. Поэтому их бесполезно вводить, и уравнения относительного движения оказываются тождественными с уравнениями абсолютного движения. Это можно было предвидеть, так как подвижная система осей в этом случае *галилеева* (п°105).

Замечание. — Следует заметить, что когда движение подвижной системы отсчета задано, то сила инерции переносного движения зависит лишь от положения точки в этой системе, а сложная центробежная сила зависит от положения точки и от ее скорости. Эти *фиктивные силы не зависят, таким образом, от действующих на точку реальных сил.* Уравнения (1) относительного движения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка такого же вида, как уравнения абсолютного движения в самом общем случае (п° 115).

169. Проекции на подвижные оси сложной центробежной силы. — Пусть p, q, r — проекции на подвижные оси угловой скорости ω мгновенного вращения системы отсчета вокруг ее начала O, т. е. мгновенной угловой скорости переносного вращения. Пусть v_x', v_y', v'_z — проекции на те же оси относительной скорости. Проекции добавочного ускорения $2[\omega\, v']$ будут (п° 81):

$$j_x''' = 2\,(qv'_z - rv_y'),$$

$$j_y''' = 2\,(rv_x' - pv_z'),$$

$$j_z''' = 2\,(pv_y' - qv_x').$$

Проекции сложной центробежной силы равны:

$$\left.\begin{aligned} -mj_x''' &= -2m(qv_z' - rv_y') = -2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \\ -mj_y''' &= -2m(rv_x' - pv_z') = -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \\ -mj_z''' &= -2m(pv_y' - qv'_x) = -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Эти составляющие обращаются в нуль одновременно с относительной скоростью v'. С другой стороны, если угловая скорость переносного вращения очень мала, то p, q, r также очень малы, а потому составляющие сложной центробежной силы будут иметь весьма малую величину, если только относительная скорость v' не будет очень большой.

170. Сила инерции переносного движения при равномерном вращении системы отсчета. — Если переносное движение есть равномерное вращение ω вокруг неподвижной оси, то ускорение переносного движения точки является ускорением в равномерном круговом движении и приводится, таким образом, к нормальному ускорению, равному $v^2 : \rho$, или $\omega^2\rho$, где ρ обозначает расстояние точки от оси. Центростремительная сила, определяющая это круговое переносное движение, равна по величине $m\omega^2\rho$ и направлена к оси.

Кинетическая реакция переносного движения — mj'', прямо противоположная центростремительной силе, *приводится, следовательно, здесь к центробежной силе, вызванной переносным вращением.* Это совпадение объясняет, почему в практике часто смешивают центробежную силу с силой инерции переносного движения. Чтобы избежать здесь неясности, лучше называть указанную силу *центробежной силой переносного движения.*

171. О применении теоремы живой силы. — Теорема живой силы, как и другие теоремы динамики, может быть применена к относительному движению, если только к реальным силам присоединить две фиктивные силы: силу инерции переносного движения и сложную центробежную силу. Но работа сложной центробежной силы в относительном движении равна нулю, так как эта сила параллельна добавочному ускорению и поэтому перпендикулярна к относительной скорости; отсюда приходим к следующему заключению:

Теорема живой силы может быть применена к относительному движению точки в подвижной системе осей при условии, что к работе реальных сил прибавляется работа силы инерции переносного движения.

В частности, если переносное движение есть равномерное вращение, сила инерции переносного движения совпадаст с центробежной силой, вызванной этим вращением. следовательно, *чтобы приложить теорему живой силы к относительному движению точки по отношению к осям, совершающим равномерное вращение, достаточно прибавить к работе реальных сил работу центробежной силы переносного движения.* Это замечание часто применяется в прикладной механике, в частности, в теории вентиляторов и турбин.

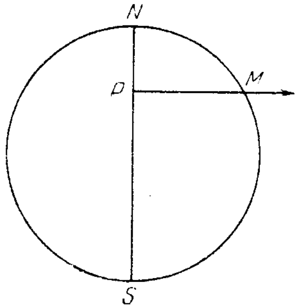
2. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

172. Движение относительно поверхности Земли. — Движение Земли в пространстве может быть разложено на поступательное движение, определяемое движением ее центра тяжести, и на вращение вокруг оси, проходящей через центр тяжести. Поступательное движение Земли при изучении относительного движения точки можно не принимать во внимание. В самом деле, поступательное движение Земли вызывается действием Луны, Солнца и планет. Это действие можно считать одинаковым для всех точек Земли; сила инерции поступательного движения, которую нужно приложить к точке M, будет поэтому уравновешена силой, с которой действуют на эту точку тела солнечной системы. Следовательно, можно пренебречь поступательным движением Земли, если одновременно не принимать во внимание действия тел солнечной системы.

Достаточно поэтому рассматривать только вращательное движение Земли вокруг ее оси SN (ориентированной с юга на север), предполагаемой неподвижной; вращение происходит с запада на восток с постоянной угловой скоростью ω, соответствующей одному полному обороту в течение одних звездных суток, или 86 164 *сек.* Принимая за единицу времени секунду, будем иметь:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073\,^{1}/_{сек}.$$

Угловая скорость ω оказывается, таким образом, очень малой.



Фиг. 30.

Следовательно, как мы это уже отметили (n° 169), сложная центробежная сила будет очень мала, за исключением того случая, когда относительная скорость очень велика. Таким образом, кроме исключительных случаев очень большой относительной скорости (движение снарядов и гироскопов) или действия сложной центробежной силы в течение долгого времени в одну сторону (движение маятника Фуко), этой силой можно пренебречь и принимать во внимание только силу инерции переносного движения.

Так как Земля вращается с постоянной угловой скоростью ω, то сила инерции переносного движения приводится к центробежной силе. Последняя направлена по продолжению радиуса PM, перпендикулярного к земной оси SN (фиг. 30); если ρ есть длина этого радиуса, то величина центробежной силы будет $m\omega^2\rho$. Эта величина всегда мала, так как даже на экваторе, где она имеет наибольшее значение и где $\rho = 6\,378\,200$ *м*, имеем

$\omega^2\rho = 0{,}034$ *м/сек*^{2}. Итак, если мы хотим определить кажущееся движение точки относительно поверхности Земли, то достаточно присоединить к реальным силам, приложенным к точке, эту фиктивную силу. Можно также соединить эту силу с одной из реальных сил, действующей на точку постоянно, с силой притяжения Земли. Именно эту равнодействующую силы притяжения и центробежной силы переносного движения и называют *весом*. Из этого следует, что для того, чтобы принять во внимание вращение Земли при рассмотрении движений тяжелых тел относительно земной поверхности, достаточно, как мы это указали выше (n°108), подставить вместо силы притяжения вес тела.

Мы можем поэтому высказать следующее правило: *При изучении движения точки относительно поверхности Земли можно (за исключением указанных выше случаев) рассуждать так, как если бы Земля была неподвижна, и применять уравнения абсолютного движения, вводя в них реальные силы, если только сила земного притяжения заменена весом.*

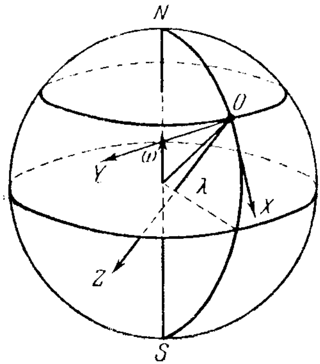
Как мы видели, это правило оставляет в стороне действие сложной центробежной силы. Оно оказывается вполне строгим при определении условий относительного равновесия, так как в этом случае сложная центробежная сила в точности равна нулю (n°168).

Мы рассмотрим теперь некоторые из наиболее важных исключительных случаев, когда сложная центробежная сила не может быть оставлена вне рассмотрения, когда она выясняет свойства движений, обусловленные вращением земного шара.

§ 3. ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ В ПУСТОТЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

173. Уравнения движения. — Составим уравнения относительного движения тяжелой точки M, учитывая сложную центробежную силу. Пусть O (фиг. 31) есть начало системы осей, неподвижных относительно земного шара, и SN—ось вращения Земли. Проведем ось Oz вниз по направлению веса, ось Ox к югу и ось Oy к западу. Пусть λ есть широта места (угол между вертикалью и плоскостью экватора), считаем ее положительной к северу (северное полушарие) и отрицательной к югу (южное полушарие). Проекции p, q, r угловой скорости ω на оси будут

$$p = -\omega \cos \lambda,$$
$$q = 0, \quad r = -\omega \sin \lambda.$$



Фиг. 31.

Движущаяся точка, по предположению, мало удаляется от точки O; в этом случае силу веса можно рассматривать как величину постоянную. Ее проекции будут (в обозначениях n° 168)

$$X - mj_x'' = 0, \quad Y - mj_y'' = 0, \quad Z - mj_z'' = mg.$$

Проекции сложной центробежной силы, в свою очередь, равны:

$$-mj_x''' = -2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) = -2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt},$$
$$-mj_y''' = -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) = 2m\omega\left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt}\right),$$
$$-mj_z''' = -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) = 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}.$$

Уравнения (1) относительного движения (n° 168), после сокращения на общий множитель m, получат вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= 2\omega\left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt}\right), \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= g + 2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Предположим, что движущаяся точка в момент $t=0$ выходит из точки O, так что начальные значения координат x, y, z равны нулю. Обозначим через a, b, c проекции начальной скорости на оси. Если пренебречь членами с множителем ω в формулах (1), уравнения приведутся к тем, которые были проинтегрированы выше (n° **117**), и мы получим:

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = \frac{gt^2}{2} + ct.$$

Нетрудно проинтегрировать и самые уравнения (1), но точное интегрирование их не представляет интереса. Мы получим достаточное приближение, пренебрегая при интегрировании степенями ω выше первой. Учитывать члены с ω^2 не имеет смысла, так как изменения веса и действие Луны, которыми мы пренебрегаем, уже имеют порядок величины ω^2.

Мы можем поэтому написать интегралы уравнений (1) в следующем виде:

$$x = at + \omega\xi, \quad y = bt + \omega\eta, \quad z = \frac{gt^2}{2} + ct + \omega\zeta, \tag{2}$$

где величины $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$, которые прибавляются к значениям x, y, z, вычисленным ранее, представляют собой проекции отклонения, вызванного вращением Земли (точнее, сложной центробежной силой).

Чтобы определить это отклонение, поставим предыдущие значения x, y, z в уравнения (1), отбросим члены с ω^2 и потребуем, чтобы уравнения удовлетворялись. Для этого следует только приравнять члены с первыми степенями ω, что дает:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2b\sin\lambda,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -2gt\cos\lambda + 2(a\sin\lambda - c\cos\lambda),$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 2b\cos\lambda.$$

Проинтегрируем теперь эти уравнения, принимая во внимание, что начальные значения ξ, η, ζ и их первых производных равны нулю; получим:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -bt^2 \sin\lambda,\\ \eta &= -\frac{1}{3}gt^3\cos\lambda + (a\sin\lambda - c\cos\lambda)t^2,\\ \zeta &= bt^2\cos\lambda.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Умножая эти значения на ω, получим проекции на оси отклонения точки.

174. Случай, когда начальная скорость равна нулю.— В качестве первого частного случая рассмотрим тот, когда начальная скорость равна нулю. Тогда a, b, c равны нулю. Проекции отклонения будут:

$$\omega\xi = 0, \quad \omega\eta = -\omega\frac{gt^3}{3}\cos\lambda, \quad \omega\zeta = 0.$$

Таким образом, если точку без начальной скорости предоставить действию силы тяжести, то отклонение будет горизонтально и направлено к востоку. Движение проекции точки на вертикаль не изменяется, но сама точка отклоняется от вертикали в плоскости, нормальной к меридиану, к востоку на весьма малую величину

$$\omega\frac{gt^3}{3}\cos\lambda.$$

Если h есть высота падения, то уравнение $h = \frac{gt^2}{2}$ позволяет определить продолжительность t падения:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

отсюда значение отклонения получается равным

$$\frac{\omega g\cos\lambda}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\omega\cos\lambda}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}.$$

Эти результаты вычисления подтверждаются многочисленными опытами. Укажем на самые первые из них, опыты Рейха (Reich), и на последние, опыты Холла (Hall).

Рейх проделал свои опыты в 1831 г. в шахте Фрейберга, на широте $\lambda = 51^\circ$. Высота падения была 158 *м*, вычисленное отклонение 27,5 *см*. Результаты 106 опытов дали отклонения, заключенные между пределами $(28,3 \pm 4)$ *см*. Опыты Холла были выполнены в 1902 году в лаборатории Гарвардского университета в Кембридже (США). Высота падения была 23 *м*, широта $\lambda = 42^\circ$, вычисленное отклонение 1,8 *см*. Холл проделал 948 опытов, и наблюдения дали в качестве пределов отклонения значения $(1,5 \pm 0,1)$ *см*.

175. Отклонение снарядов. — Эффект сложной центробежной силы оказывается заметным при движении артиллерийских снарядов. Чтобы получить представление о важности этого эффекта, мы рассмотрим движение снаряда в пустоте, что, очевидно, значительно удалит нас от практических условий задачи. Предположим, что снаряд движется по настильной траектории (т. е. траектории, весьма близкой к горизонтальной прямой) и начальная скорость v_0 очень велика, так что в формулах (3) можно пренебречь членами, содержащими c, и сохранить члены, содержащие a и b (горизонтальные проекции скорости v_0). Тогда формулы (3) приведутся к виду:

$$\omega\xi = -\omega b t^2 \sin\lambda, \quad \omega\eta = +\omega a t^2 \sin\lambda.$$

Эти формулы показывают, что отклонение перпендикулярно к траектории (точнее, к v_0); в северном полушарии (где λ положительно) оно происходит в правую сторону, в южном полушарии — в левую сторону *); его величина равна

$$\omega\sqrt{a^2+b^2}\, t^2 \sin\lambda = (\omega v_0 \sin\lambda)\, t^2.$$

Таким образом, поскольку оказываются законными наши допущения, *величина отклонения в одном и том же месте не зависит от направления стрельбы.*

---

*) Если смотреть на движущийся снаряд сверху, т. е. в направлении оси Oz. *(Прим. перев.)*

Например, если стрельба происходит в горизонтальном направлении по цели, отстоящей на 8 *км*, со скоростью 800 *м/сек*, то отклонение будет равно

$$\omega t^2 v_0 \sin\lambda = 0{,}000073 \cdot 100 \cdot 800 \cdot \sin\lambda = 5{,}8 \sin\lambda,$$

что составляет около 4 *м* на широте 50°.

§ 4. ОТКЛОНЕНИЕ СВОБОДНОГО МАЯТНИКА. МАЯТНИК ФУКО

176. Уравнения движения маятника относительно поверхности Земли. — Мы будем рассматривать здесь кажущееся движение сферического маятника (или маятника на одной нити) относительно поверхности Земли, или, что сводится к тому же, движение тяжелой точки M по сферической поверхности радиуса l, неизменно связанной с Землей.

Сохраним те же оси, как в предшествующем параграфе. Пусть точка O будет центром сферической поверхности или точкой подвеса нити, удерживающей движущуюся точку на этой поверхности. Уравнения относительного движения маятника получаются из уравнений движения (1), написанных в предшествующей главе (n° **159**), прибавлением к правым частям центробежной силы, отнесенной к единице массы, так как множитель m в этих уравнениях опущен. Мы получаем, таким образом, систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l} - 2\omega\sin\lambda\,\frac{dy}{dt},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l} + 2\omega\left(\sin\lambda\,\frac{dx}{dt} - \cos\lambda\frac{dz}{dt}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= g - N\frac{z}{l} + 2\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В этих уравнениях N есть реакция нити, отнесенная к единице массы. К ним нужно присоединить еще уравнение сферы радиуса l

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \qquad (2)$$

Четыре уравнения (1) и (2) определяют x, y, z и N в зависимости от времени, но полное интегрирование их представляет собой трудную задачу.

Рассмотрим сначала частный случай. Предположим, что мы находимся на северном полюсе, где $\lambda = 90°$, $\sin\lambda = 1$, $\cos\lambda = 0$. Уравнения (1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nx}{l} &= -2\omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ny}{l} &= 2\omega\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Nz}{l} &= g. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Возьмем в плоскости xy подвижную систему двух прямоугольных осей $Ox'y'$, вращающуюся относительно Oxy с постоянной угловой скоростью ω в направлении от Ox к Oy (положительное направление). В момент t, после поворота осей на угол ωt, будем иметь:

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t,$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t.$$

Дифференцируя эти равенства два раза по t и отбрасывая члены с ω^2, получим:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\omega t + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\omega t -$$
$$-2\omega\left(\frac{dx}{dt}\sin\omega t - \frac{dy}{dt}\cos\omega t\right) =$$
$$= \cos\omega t\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\frac{dy}{dt}\right) + \sin\omega t\left(\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt}\right) =$$
$$= -\frac{Nx}{l}\cos\omega t - \frac{Ny}{l}\sin\omega t = -\frac{Nx'}{l}$$

и аналогичное уравнение для y'. Уравнения в переменных x', y' и z' получат поэтому вид:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + N\frac{x'}{l} = 0, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} + N\frac{y'}{l} = 0, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} + N\frac{z'}{l} = g.$$

Это уравнения движения относительно подвижных осей $Ox'y'z'$. Они тождественны с уравнениями движения сферического маятника в неподвижных осях. Отсюда получаем следующее заключение:

На полюсе движение сферического маятника будет таким же, как если бы оно было отнесено к неподвижным осям, при условии, что в качестве системы осей взята система, обладающая относительно Земли равномерным вращением вокруг вертикали с угловой скоростью — ω, *равной и прямо противоположной угловой скорости Земли.*

Этот результат очевиден *a priori* и, кроме того, совершенно точен, так как вращение Земли в данном случае не оказывает никакого влияния ни на самый маятник, ни на силы, действующие на него. Результат оказывается даже более точным, чем вычисления, которые к нему привели, так как мы пренебрегли членами с ω^2; но эта ошибка компенсировалась изменением веса, которым мы также пренебрегли.

Таким образом, если заставить маятник колебаться на полюсе в вертикальной плоскости, то мы увидим, что плоскость колебаний будет вращаться с постоянной угловой скоростью — ω в сторону, обратную вращению Земли.

Возвратимся теперь к уравнениям (1). Заменим во втором из них производную $\frac{dz}{dt}$ ее значением:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{x}{z}\frac{dx}{dt} - \frac{y}{x}\frac{dy}{dt},$$

полученным дифференцированием уравнения (2). Положим далее

$$N' = N - 2\omega\cos\lambda\,\frac{l}{z}\frac{dy}{dt}; \tag{4}$$

уравнения (1) могут быть тогда написаны в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + N'\frac{x}{l} = -2\omega\left(\sin\lambda + \frac{x}{z}\cos\lambda\right)\frac{dy}{dt},\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + N'\frac{y}{l} = 2\omega\left(\sin\lambda + \frac{x}{z}\cos\lambda\right)\frac{dx}{dt},\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + N'\frac{z}{l} = g.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Рассмотрим ещё один частный случай. Предположим, что мы находимся на экваторе, где $\lambda = 0$, $\sin\lambda = 0$, $\cos\lambda = 1$. Предыдущие уравнения приводятся к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + N'\frac{x}{l} = -2\omega\frac{x}{z}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + N'\frac{y}{l} = 2\omega\frac{x}{z}\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + N'\frac{z}{l} = g.$$

Первому уравнению можно удовлетворить, полагая $x = 0$; тогда движение в плоскости $x = 0$ определяется двумя другими уравнениями, содержащими только y и z:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + N'\frac{y}{l} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + N'\frac{z}{l} = g.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения движения простого маятника в плоскости yz. Таким образом, мы приходим к следующему заключению:

На экваторе можно заставить свободный маятник колебаться в экваториальной плоскости, так что его движение будет совпадать с движением простого маятника. Но реакция N в этом случае будет отлична от реакции, соответствующей колебаниям простого маятника.

В самом деле, реакция была бы равна N', если бы не было сложной центробежной силы. Благодаря наличию этой силы реакция становится равной

$$N = N' + 2\omega\cos\lambda\frac{l}{z}\frac{dy}{dt}.$$

Она оказывается увеличенной или уменьшенной в зависимости от направления движения: увеличенной в случае, когда y возрастает, и уменьшенной, когда y убывает (в предположении, что $z > 0$).

Возвратимся опять к уравнениям (5). Они могут быть проинтегрированы в том случае, когда отношение $\frac{x}{z}$ очень мало, так что можно пренебречь величиной $\frac{x}{z}\cos\lambda$ по сравнению с $\sin\lambda$. Этот прием был бы вполне законен, если бы отношение $\frac{x}{z}$ было порядка ω^2. Благодаря такому упрощению, уравнения (5) принимают вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+N'\frac{x}{l}=-2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+N'\frac{y}{l}=2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+N'\frac{z}{l}=g.$$

Эти уравнения совпадут с уравнениями (3) движения маятника на полюсе, если заменить в последних ω на $\omega\sin\lambda$. Это сводится к замене угловой скорости вращения Земли ее составляющей по направлению вертикали в данном месте. Отсюда приходим к следующему заключению:

Бесконечно малые колебания свободного маятника в точке Земли на широте λ совпадают с колебаниями относительно неподвижных осей при условии, что движение отнесено к подвижным осям, вращающимся вокруг вертикали данного места, в сторону, противоположную вращению Земли, с угловой скоростью $\omega\sin\lambda$.

Таким образом, если начальные колебания маятника в каком-либо месте на земной поверхности происходят в вертикальной плоскости, то наблюдатель, находящийся в этом месте, увидит, что плоскость колебаний вращается с угловой скоростью $\omega\sin\lambda$ в сторону кажущегося движения небесного свода.

Это явление вращения плоскости колебаний свободного маятника обнаружил в 1851 году Леон Фуко в своих знаменитых опытах в Пантеоне, в Париже. Длина нити была 67 *м*, длина описываемой дуги 6 *м*, наибольшие значения отношений $x:y$ и $y:z$ около $\frac{1}{12}$, продолжительность простого колебания 16 *сек*; широта

Парижа $\lambda = 48°58'$. Продолжительность полного оборота плоскости колебаний должна была получиться на основании вычислений равной

$$\frac{2}{\omega \sin \lambda} = 41 \text{ час } 47 \text{ мин.},$$

что и было подтверждено опытами.

В опыте Фуко амплитуда колебаний не была достаточно мала, чтобы можно было с полной уверенностью применять изложенную теорию. Однако результаты этих опытов могут быть обоснованы более глубоким анализом

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

СТАТИКА

ГЛАВА VIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 1. НАЧАЛА СТАТИКИ. РАВНОВЕСИЕ ТОЧКИ

177. Статика. — Статика есть учение о *равновесии* тел она изучает условия, при которых тела, находящиеся под действием данных сил, остаются в состоянии покоя относительно системы отсчета, принимаемой за неподвижную; в качестве такой «неподвижной» системы чаще всего выбирают Землю.

Эта часть механики является, таким образом, лишь частным случаем динамики, поэтому все законы динамики могут быть применены и в статике. Однако статика получила свое развитие гораздо раньше учения о движении, так как для ее построения необходимы более простые основные законы. Она не использует понятия скорости и ускорения. Она может обойтись без измерения времени, без закона инерции и без определения массы. С другой стороны, чистая статика как учение о равновесии не делает никакого принципиального различия между равновесием относительным и равновесием абсолютным. Если оставить в стороне закон инерции, то различие, необходимое в динамике, между силами реальными и силами фиктивными становится искусственным, так как их статическое определение оказывается одинаковым: разница между этими силами появляется лишь при условии, содержащемся в законе инерции, находить источник реальных сил, приложенных к данной материальной точке, в других материальных точках.

Следует поэтому рассмотреть сначала, как статика может быть изложена независимым от динамики образом.

Мы покажем далее, при изучении равновесия твердых тел, как статика может быть выведена из динамики и какое более широкое содержание получат некоторые ее положения, если стать на эту более общую точку зрения.

Условия равновесия точки и абсолютно твердого тела полностью сводятся к геометрическим свойствам систем векторов, составляющим предмет введения к курсу. Из этих свойств вытекает целый ряд методов, составляющих в своей совокупности то, что мы называем *геометрической статикой* и что мы изложим в первой главе этой части.

178. Равновесие точки. — *Материальная точка находится в равновесии, если она сохраняет состояние покоя, или, иначе говоря, если действующие на нее силы не выводят ее из состояния покоя.*

Слово «сила» берется здесь в его динамическом понимании. Следует однако показать, что мы можем обосновать учение о равновесии, пользуясь чисто статическим определением понятия о силе, не входя в рассмотрение того движения, которое сила должна сообщить своей точке приложения.

179. Статическое понятие и измерение силы. — В статике сила рассматривается как причина движения, или как причина нарушения равновесия. Геометрически она изображается вектором, как и в динамике.

Сила есть вектор, приложенный к точке, имеющий определенную величину, направление и ориентацию.

Всем этим элементам силы необходимо дать статическое определение, так как в предшествующей части курса они были определены лишь с динамической точки зрения.

Мы допускаем, что сила может быть измерена посредством динамометра, т. е. посредством упругих деформаций, которые она вызывает. *Две силы равны*, если они производят одинаковые деформации или если их действия взаимно уничтожаются, когда эти две силы заставляют действовать на одну и ту же точку по одной прямой в противоположные стороны.

При этом предполагается, что силу можно переносить и заставить ее действовать по различным прямым в разные стороны, не изменяя ее величины. Легко можно представить себе физические операции, осуществляющие эти условия.

В качестве типичной силы берется вес, измеряемый, например, в килограммах. Мы допускаем, что действие этой силы может быть перенесено в данную точку. С этой целью нужно прикрепить один конец нити к грузу данного веса, а другой конец — к точке, к которой должна быть приложена сила. Мы допускаем, что сила, приложенная таким образом, равна весу и действует по нити в сторону груза. Для того чтобы изменить направление нити и заставить силу действовать в желаемую сторону, достаточно применить подходящую систему блоков. Если действие силы ничем не стеснено, то она заставляет свою точку приложения двигаться туда, куда она сама направлена и ориентирована.

В опытах такого рода величина силы может быть измерена упругой деформацией или, иначе говоря, удлинением нити, которую она натягивает. Легко также представить себе другие опыты статического характера, при помощи которых можно было бы выполнить проверку основных законов статики. Однако установление различных возможных опытов такого рода, обсуждение их наглядного значения и те толкования, которые им можно дать, относятся скорее к области физики и философии естествознания, чем к теоретической механике. Мы не будем более на этом останавливаться.

180. Закон равенства действия и противодействия. — Если две материальные точки действуют одна на другую, то действие и противодействие равны между собою и прямо противоположны. Этот общий закон динамики имеет место также и в статике. Он допускает, между прочим, и чисто статическую проверку. Можно, например, заставить действовать друг на друга две упругие пружины; можно измерить динамометром действие друг на друга двух наэлектризованных тел, и т. д. Этот закон уже неявно допускается в опытах, где действие силы передается посредством натянутой нити; такого рода опыты рассматривались в предыдущем n°.

181. Условия равновесия точки. — Материальная точка находится в равновесии (n°178), если она покоится, и если силы, действующие на нее, удерживают ее в этом состоянии, т. е. если их действия взаимно уничтожаются. Мы имеем следующие теоремы:

Необходимое и достаточное условие равновесия материальной точки заключается в том, что эта точка должна находиться в покое и что равнодействующая приложенных к ней сил должна быть равна нулю.

С точки зрения условий равновесия материальной точки, система сил, приложенных к одной точке, эквивалентна их равнодействующей.

Эти теоремы, которые являются частным случаем подобных теорем динамики, могут быть проверены и чисто статическими опытами, аналогичными тем, которые были описаны выше.

§ 2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ, ОБЩИЕ ДЛЯ ВСЕХ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

182. Внутренние и внешние силы. — Будем рассматривать какую-нибудь материальную систему, образованную из тел твердых, жидких или газообразных, как составленную из очень большого числа материальных точек, подчиненных некоторым связям.

Внутренними силами системы называют силы взаимодействия, с которыми различные точки системы действуют друг на друга. Эти силы попарно равны и прямо противоположны на основании закона равенства действия и противодействия, который мы напомнили выше.

Силы, отличные от указанных, а именно, силы, происходящие от действия тел, внешних по отношению к системе, т. е. тел, не составляющих часть системы, и фиктивные силы при относительном движении представляют собою *внешние силы*.

Так как внутренние силы попарно равны и противоположны, они образуют для всякой материальной системы совокупность векторов, эквивалентную нулю.

183. Необходимое условие равновесия системы.— *Для равновесия системы необходимо* (*но, вообще говоря, не достаточно*), *чтобы внешние силы, действующие на систему, образовывали систему векторов, эквивалентную нулю.*

О материальной системе говорят, что она находится в равновесии, если каждая из ее точек находится в равновесии. В этом случае все силы, как внутренние, так и внешние, приложенные к одной из точек системы, имеют результирующую, равную нулю, и образуют систему, эквивалентную нулю. Так как это имеет место для каждой точки системы, то совокупность всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на все точки системы, эквивалентна нулю. Но так как система всех внутренних сил эквивалентна нулю сама по себе, то система всех внешних сил должна быть также эквивалентна нулю.

Пусть R есть главный вектор внешних сил и G — их главный момент относительно некоторой точки; предыдущее условие обозначает, что эти два вектора должны быть равны нулю, и выражается двумя геометрическими равенствами

$$R = 0, \quad G = 0. \tag{1}$$

Пусть X, Y, Z — проекции на три прямоугольные оси одной из внешних сил и x, y, z — координаты ее точки приложения. Если мы будем брать момент G относительно начала координат, то два предыдущие геометрические равенства распадаются на шесть алгебраических уравнений:

$$\sum X=0, \quad \sum Y=0, \quad \sum Z=0;$$
$$\sum (yZ-zY)=0, \quad \sum (zX-xZ)=0,$$
$$\sum (xY-yX)=0, \qquad (1')$$

где суммы распространяются на все внешние силы.

Эти уравнения называются *общими уравнениями равновесия*. Три первых уравнения выражают, что суммы проекций внешних сил на три прямоугольные оси соответственно равны нулю; три следующие показывают, что результирующие моменты внешних сил относительно осей также равны нулю.

Вообще говоря, эти условия, всегда необходимые, недостаточны для равновесия системы, но, как мы увидим в следующем параграфе, в случае твердого тела они оказываются также и достаточными.

§ 3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

184. Определение твердого тела в статике. Постулат механики, который предполагается при этом определении. — В статике, так же как и в кинематике (n° 51), *твердым телом называется система материальных точек, неизменно связанных между собой*. Эта система представляет собой, таким образом, *абсолютно твердое тело*, точки которого остаются на неизменных расстояниях друг от друга, каковы бы ни были силы, действующие на эти точки и каково бы ни было движение тела.

Определенное таким образом тело есть, конечно, идеализация. Прежде всего, физика учит нас, что твердые тела состоят из молекул, которые сами имеют весьма сложное строение и могут находиться в самых разнообразных скрытых движениях. Именно о молекулах, взятых в их средних положениях, можно сказать, что они остаются с большой степенью приближения на одних и тех же расстояниях друг от друга. Таким образом, только на молекулы в их средних положениях мы можем смотреть здесь как на материальные точки. Но это еще не все; даже если пренебречь скрытыми молекулярными движениями и обращать внимание только на видимые перемещения частиц, то и тогда все тела природы изменяют свою форму под действием приложенных к ним сил; внутренние силы, действующие между частицами одного и того же тела, зависят, как мы это знаем (n° **109**), от этих деформаций. Тем не менее, так как деформации тел, называемых в физике «твердыми», весьма малы, ими можно пренебречь в первом приближении, если только приложенные к телам силы не слишком велики и если мы не занимаемся изучением внутренних сил. Определение внутренних сил и видимых деформаций, происходящих в твердых телах, является трудной задачей, относящейся уже не к статике, а к теории упругости. Теория, которую мы будем излагать, с тем большей точностью применима к твердым физическим телам, чем больше они приближаются к абсолютно твердому телу.

С логической точки зрения геометрическая статика твердого тела должна рассматриваться как *предельная теория*. Она излагает известное число *общих законов*, применимых ко всем твердым телам, каковы бы ни были их молекулярное строение и их упругие свойства, если только деформации можно считать бесконечно малыми. Однако построенная таким образом теория представляет собой неполную теорию равновесия, так как она систематически оставляет в стороне *упругие свойства*, привлечение которых становится в некоторых случаях совершенно необходимым. В этих случаях методы геометрической статики оказываются недостаточными для разрешения всех вопросов, которые может поставить перед нами задача о равновесии. Некоторые из этих вопросов могут даже оказаться противоречивыми, если сохранить гипотезу абсолютной неизменяемости твердого тела.

Одного условия недеформируемости недостаточно, чтобы обосновать теорию равновесия твердых тел;

к этому нужно присоединить, в качестве дополнения к определению твердого тела, следующий *механический* постулат:

Постулат. — *Не изменяя ничего в условиях равновесия твердого тела, можно прибавить или отбросить две равные и прямо противоположные силы, приложенные к двум его точкам.*

Этот постулат можно было бы вывести из общего принципа, известного под названием *принципа виртуальных перемещений*, но мы пока не будем этого делать. Мы установим упомянутый принцип в одной из следующих глав как основание аналитической статики. Было бы также бесполезно вводить этот постулат, если принять основные законы динамики в том виде, как мы их изложили в предшествующей части курса, так как рассматриваемый постулат, как мы это увидим позже, представляет собой простой частный случай одной общей теоремы динамики твердого тела. Если мы вводим его здесь, то делаем это с той целью, чтобы сохранить за статикой характер самостоятельной дисциплины. Мы будем смотреть на этот постулат, с точки зрения физики, как на прямое следствие опыта; с точки же зрения теоретической механики мы будем рассматривать его как дополнение к определению твердого тела, принятому в статике, получая при этом ту выгоду, что мы освобождаемся от введения молекулярной гипотезы.

Как было уже замечено в теории векторов (n° 28), этот основной постулат влечет в качестве следствия следующее предложение:

Не нарушая условий равновесия твердого тела, можно перенести точку приложения силы в произвольную точку ее линии действия, лишь бы эта новая точка была связана с телом.

Само собою разумеется, что в этом предложении говорится лишь о состоянии равновесия тела, а не о тех действиях, которые оказывают друг на друга различные точки тела, так как эти внутренние действия, конечно, изменятся при изменении точки приложения силы. Указанную операцию можно, например, выполнить, когда твердое тело помещается на некоторых опорах, но ни в коем случае нельзя утверждать, что перенос силы в этом случае не изменит реакций опор. Было бы, следовательно, большой ошибкой применять принцип переноса силы при определении реакций опор, перенося, например, в точку опоры ту или другую из приложенных сил. Единственными условиями, которые можно законно применять в этом случае, оказываются общие условия равновесия, так как последние всегда являются необходимыми условиями.

185. Приведение сил, приложенных к твердому телу (статическая точка зрения). — Мы только что видели, что можно, не нарушая равновесия твердого тела, произвести над силами, приложенными к точкам тела, следующие операции:

1°. Сложение или разложение сил, приложенных в одной точке.

2°. Прибавление или отбрасывание двух равных и прямо противоположных сил.

3°. Перенос силы в произвольную точку ее линии действия.

Эти операции, как это было установлено в теории векторов (n° **29**), представляют собой как раз те элементарные операции, которые позволяют привести друг к другу две эквивалентные системы векторов. Отсюда получаем следующую теорему:

Не нарушая равновесия твердого тела, можно заменить всякую систему сил, приложенных к телу, другой системой сил, представляющей собой систему векторов, эквивалентную первой.

Такие две системы сил называют *эквивалентными*.

Задача приведения системы сил, приложенных к твердому телу, совпадает, таким образом, с задачей приведения системы векторов, так что мы можем высказать следующие заключения:

1°. *Приведение к двум силам.* Система сил, приложенных к твердому телу, может быть приведена, без нарушения равновесия, только к двум силам, из которых одна приложена в произвольно выбранной точке тела (n° 26).

2°. *Приведение к силе и к паре.* Система сил, приложенных к твердому телу, может быть приведена, без нарушения равновесия, к одной силе, приложенной в произвольной точке O тела, и к одной паре. Сила есть результирующая $\boldsymbol{R}$ всех сил системы, перенесенных в точку O (главный вектор), а момент пары равен главному моменту $\boldsymbol{G}$ системы сил относительно той же точки (n° 24).

Для того чтобы система сил приводилась к одной результирующей $\boldsymbol{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольно взятого центра приведения O геометрическая сумма $\boldsymbol{R}$ была отлична от нуля, а результирующий момент $\boldsymbol{G}$ (если он не равен нулю) был перпендикулярен к $\boldsymbol{R}$. Равнодействующая направлена в этом случае по центральной оси системы.

Для того чтобы система приводилась к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\boldsymbol{R}$ был равен нулю, а главный момент $\boldsymbol{G}$ был отличен от нуля. В этом случае главный момент системы один и тот же для каждой точки пространства.

Наконец, если векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{G}$ оба равны нулю, то система эквивалентна нулю, и тело будет в равновесии. Мы рассмотрим этот случай в следующем n°.

Силы в плоскости. — Когда все силы действуют в одной плоскости, и геометрическая сумма их $\boldsymbol{R}$ не равна нулю, результирующий момент $\boldsymbol{G}$ (так же, как и момент каждой силы) перпендикулярен к $\boldsymbol{R}$. Следовательно, эти силы приводятся к *одной равнодействующей* $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке центральной оси (лежащей, очевидно, в плоскости действия сил). Если $\boldsymbol{R}$ равна нулю, то система приводится к *одной паре*, а если, кроме того, и $\boldsymbol{G}$ равен нулю, то система находится *в равновесии*.

Полезно заметить, что *всякая плоская система сил всегда может быть приведена к двум силам, приложенным в двух данных точках A и B плоскости,* В самом деле, каждая сила F, приложенная в точке O, лежащей вне прямой AB, раскладывается, по направлениям OA и OB, на две составляющие, которые можно перенести в точки A и B. Если точка O приложения силы лежит на AB, и линия действия силы проходит через A, то точку приложения силы можно перенести в A; если линия действия силы не проходит через A, то точку приложения силы можно перенести вдоль линии действия за прямую AB, что приводит к первому случаю.

Параллельные силы. — Если силы параллельны, и их геометрическая сумма $\boldsymbol{R}$ не равна нулю, то результирующий момент $\boldsymbol{G}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{R}$, и, следовательно, эти силы приводятся к одной результирующей $\boldsymbol{R}$ приложенной в точке центральной оси (параллельной общему направлению сил). Если $\boldsymbol{R}$ равна нулю, то система приводится *к одной паре* или находится *в равновесии* (когда момент пары равен нулю).

186. Равновесие твердого тела. — *Для равновесия свободного твердого тела необходимо и достаточно, чтобы система приложенных к нему сил (т. е., в данном случае, внешних сил) была эквивалентна нулю.*

Мы знаем уже, что это условие необходимо, так как оно представляет собой общее условие равновесия.

Для твердого тела оно оказывается также и достаточным. В самом деле, если система сил эквивалентна нулю, она может быть приведена к нулю элементарными операциями и, следовательно, можно просто отбросить все составляющие ее силы. На основании этого имеем два условия равновесия в векторной форме

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{G} = 0.$$

Эти условия распадаются на шесть алгебраических уравнений. Пусть X, Y, Z — проекции вектора $\boldsymbol{R}$ на три прямоугольные оси координат, или суммы проекций всех приложенных сил на те же оси; пусть далее L, M,

N — результирующие моменты системы этих сил относительно тех же осей; тогда эти шесть уравнений будут:

$$\left.\begin{array}{lll} X=0, & Y=0, & Z=0, \\ L=0, & M=0, & N=0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Часто говорят, что три первые уравнения (эквивалентные равенству $R=0$) представляют собою *условия равновесия для поступательного движения*, а три последние (эквивалентные равенству $G=0$) — *условия равновесия для вращения*. Основание для таких названий мы получим позднее, при применении к решению той же задачи принципа виртуальных работ.

187. Приведение сил, приложенных к твердому телу (динамическая точка зрения). Динамическое равновесие. — В динамике твердого тела мы покажем, что в случае свободного твердого тела его движение будет полностью определено, если для каждого момента времени даны главный вектор и главный момент относительно какой-нибудь точки всех приложенных к нему сил. Отсюда имеем следующую теорему:

Если две системы сил, приложенных к твердому телу, постоянно эквивалентны между собой с точки зрения теории векторов, то они будут эквивалентны и с точки зрения движения тела.

Эта теорема, по существу, относится к динамике, но она тесно связана также с геометрической статикой. Действительно, ее можно доказать при помощи очень простого обобщения основного постулата, который уточняет определение твердого тела в статике (n° 184).

В самом деле, заменим этот постулат следующим:

Не изменяя ничего в состоянии покоя или движения твердого тела, можно прибавить или отбросить две равные и прямо противоположные силы, приложенные к двум точкам тела.

Этот более общий постулат, который может быть также проверен непосредственно опытом, позволяет дать такое же обобщение понятию приведения и эквивалентности сил. В самом деле, во всех предложениях n° 185 можно заменить слова «не нарушая равновесия» словами «ничего не изменяя в состоянии покоя или движения тела». Тогда заключение n°185 оказывается равносильным высказанному здесь динамическому принципу.

Отметим, в частности, одно следствие:

Если твердое тело под действием системы сил S остается в равновесии, то эта система сил (будучи эквивалентна нулю) ничего не может изменить и в состоянии движения тела, если последнее уже не находится в покое.

Теперь совершенно естественно установить такое определение:

Данная система сил находится в *равновесии с точки зрения динамики*, или *в динамическом равновесии*, если силы не могут изменить состояние покоя или движения твердого тела, к которому они приложены.

Имея это определение, можно высказать следующее предложение:

Для того чтобы силы, приложенные к твердому телу, находились в динамическом равновесии, необходимо и достаточно, чтобы они представляли собой систему векторов, эквивалентную нулю.

Этот способ представления равновесия сил, приложенных к твердому телу, очень широко распространен, и слово «равновесие» очень часто употребляется именно в этом смысле. Однако не следует упускать из виду, что такое представление о равновесии относится скорее к динамике, чем к статике.

188. Центр тяжести твердого тела. — Приведение сил, приложенных к твердому телу, может быть, в частности, выполнено для сил веса всех материальных точек, из которых тело состоит. Все эти силы представляют собой параллельные силы, одинаково ориентированные. Эта система векторов приводится поэтому к одной равнодействующей, равной общему весу P твердого тела и приложенной в центре этих параллельных векторов, который мы будем обозначать Г. Эта точка, положение которой в теле не зависит от его ориентировки относительно поверхности Земли, есть *центр тяжести* тела. Мы увидим в следующей главе, как можно определить его координаты (ξ, η, ζ). Из предыдущих теорем следует, что *действие сил тяжести на различные точки твердого тела как со статической, так и с динамической точки зрения, приводится к единственной силе, к полному весу, приложенному в центре тяжести тела.*

§ 4. РАВНОВЕСИЕ НЕСВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

189. Метод реакций. — Чтобы найти условия равновесия несвободного твердого тела, т. е. тела, на которое наложены связи, можно с успехом воспользоваться *методом реакций*.

Этот метод заключается в том, что твердое тело можно рассматривать как свободное, если ввести в качестве вспомогательных неизвестных реакции, происходящие от наложенных на тело связей.

Реакции представляют собой силы, определяемые связями; в данном случае это будут внешние силы, так как они не вызываются действием точек, принадлежащих телу. В связи с этим необходимо различать два рода внешних сил: *активные*, или *прямо приложенные силы*, которые задают произвольно и заставляют действовать на тело, и *силы связи*, или *реакции*, возникающие автоматически как следствия первых. Внутренние силы, действующие между точками системы, представляют собою также силы связи, но они попарно исключаются и не входят в условия равновесия.

Законы геометрической статики позволяют вывести общие условия равновесия прямо приложенных сил, но они не всегда оказываются достаточными для определения реакций: они будут достаточны лишь в том случае, когда эти реакции определяются общими условиями равновесия, которые всегда необходимы.

190. Равновесие твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. — Твердое тело, имеющее неподвижную точку O, около которой оно может свободно двигаться, и находящееся под действием прямо приложенных сил F_1, F_2, ... F_n, представляет собою то, что называют *рычагом* в самом общем смысле слова.

Для равновесия тела, имеющего одну неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент прямо приложенных сил относительно этой точки был равен нулю.

Пусть R есть реакция в неподвижной точке. Тело может рассматриваться как свободное под действием реакции R и прямо приложенных сил F_1, F_2, ... F_n.

Поэтому, чтобы равновесие имело место, система сил R и F_1, F_2, ... должна быть эквивалентна нулю.

Если равновесие имеет место, то результирующий момент системы сил R, F_1, F_2, ... равен нулю относительно произвольной точки, в частности, относительно неподвижной точки O. Но, так как сила R приложена в этой точке и имеет момент относительно нее равный нулю, то результирующий момент сил F относительно O также равен нулю.

Обратно, если результирующий момент сил F относительно точки O равен нулю, то эти силы приводятся к одной результирующей, приложенной в этой точке. В этом случае равновесие должно иметь место, так как эта результирующая необходимо уравновешивается сопротивлением в точке O, которая закреплена неподвижно. В закрепленной точке развивается, таким образом, реакция связи R, равная и прямо противоположная геометрической сумме прямо приложенных сил. Реакция определяется, таким образом, вполне.

191. Равновесие твердого тела, имеющего неподвижную ось. — Рассмотрим твердое тело, имеющее неподвижную ось, вокруг которой оно может свободно вращаться. Неподвижность этой оси может быть достигнута закреплением двух точек тела. Но можно также закрепить большее число точек или даже целый прямолинейный отрезок оси. Пусть, как и в предыдущем случае, на тело действуют прямо приложенные силы F_1, F_2, ... F_n.

Для равновесия твердого тела, имеющего неподвижную ось, необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент прямо приложенных сил относительно этой оси был равен нулю.

Это условие необходимо, так как если равновесие имеет место, то результирующий момент всех внешних сил (активных и реакций) равен нулю относительно любой оси, в частности и относительно неподвижной оси. Но результирующий момент реакций (которые все проходят через ось) относительно этой оси равен нулю. Следовательно, результирующий момент активных сил F также равен нулю.

Это условие и достаточно, так как если оно имеет место, то, как мы сейчас покажем, тело будет в равновесии. В самом деле, можно утверждать, что активные силы F при данном условии могут быть приведены только к двум силам, которые можно считать приложенными в двух точках O и O', выбранных произвольно на закрепленной оси.

Действительно, прежде всего, эти силы приводятся к двум силам, из которых одна P приложена в точке O, а другая P' — в некоторой подходящим образом выбранной точке O_1. Но, по предположению, результирующий момент системы P, P' (эквивалентной системе F) относительно фиксированной оси равен нулю. Так как момент силы P (пересекающей ось) в отдельности равен нулю, то момент силы P' тоже равен нулю.

Следовательно, P' и ось OO' лежат в одной плоскости, а потому вектор P' может быть разложен на два P'' и P''' по двум направлениям O_1O и O_1O'. Векторы P'' и P''' можно перенести соответственно в точки O и O', потом сложить P и P'', что даст P^{IV}. В результате останутся только две силы P^{IV} и P''', приложенные в точках O и O'.

Так как эти две силы приложены в точках неподвижной оси, то они необходимо будут уравновешены сопротивлением этой последней.

192. Определение реакций — В случае тела, имеющего неподвижную ось, полное определение реакций может быть произведено лишь при учете деформаций тела. Одних уравнений геометрической статики оказывается для этого недостаточно.

Рассмотрим самый простой случай, когда неподвижность оси достигается закреплением только двух ее точек O и O'.

Возьмем три прямоугольные оси координат $Oxyz$ с началом в закрепленной точке O и с осью z, взятой по направлению неподвижной оси OO'.

Пусть X, Y, Z — суммы проекций прямо приложенных сил и L, M, N — результирующие моменты этих сил относительно осей. Пусть X', Y', Z' и X'', Y'', Z'' — проекции реакций $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$ в неподвижных точках O и O'. Моменты $\boldsymbol{R}'$ относительно осей равны нулю; моменты $\boldsymbol{R}''$, если обозначить через a расстояние OO', соответственно равны

$$-aY'', \quad aX'', \quad 0.$$

Шесть уравнений равновесия твердого тела, рассматриваемого как свободное под действием всех этих сил, будут:

$$X+X'+X''=0, \quad Y+Y'+Y''=0, \quad Z+Z'+Z''=0,$$
$$L-aY''=0, \quad M+aX''=0, \quad N=0.$$

Последнее уравнение не зависит от реакций. Это единственное условие равновесия, уже рассмотренное выше. Два предпоследние уравнения определяют соответственно X'' и Y''; после этого два первых определят X' и Y'. Наконец, остается неиспользованным только одно уравнение — третье:

$$Z+Z'+Z''=0.$$

Это уравнение позволяет определить сумму $Z'+Z''$, но оно, конечно, недостаточно для определения каждой из этих двух составляющих отдельно. Z' и Z'' можно определить, лишь принимая во внимание внутренние силы, возникающие в теле вследствие упругих деформаций, геометрическая же статика вовсе исключает из рассмотрения эти деформации.

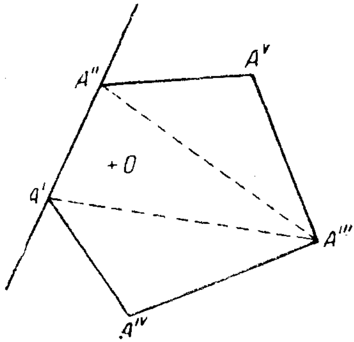
Можно было предвидеть заранее, что геометрическая статика не в состоянии определить Z' и Z'', так как основной ее постулат позволяет прибавлять или отбрасывать две равные и прямо противоположные силы, приложенные в двух точках O и O'. Он позволяет поэтому увеличить Z' на произвольное количество при условии, что то же самое количество вычитается из Z''.

193. Равновесие твердого тела, опирающегося на плоскость. — Рассмотрим твердое тело, опирающееся на неподвижную плоскость в некотором числе отдельных точек $A', A'', A''', \ldots$, не лежащих на одной прямой. Число этих точек должно быть поэтому не меньше трех. Пусть при этом тело может скользить свободно и без трения по плоскости. Пусть далее все тело расположено *с одной стороны* плоскости; эту сторону мы будем называть *внешней стороной*, допуская, что плоскость представляет собой поверхность материального тела, имеющего достаточную твердость, чтобы препятствовать проникновению рассматриваемого тела, но неспособного удерживать последнее всегда на своей поверхности. Другими словами, плоскость может развивать реакцию только во внешнюю сторону (как это происходит в том случае, когда тяжелый предмет положен на горизонтальный стол). Пусть тело находится под действием заданных активных сил $F_1, F_2, \ldots F_n$ и требуется определить условия равновесия.

Пусть соответственно $R', R'', R''', \ldots$ — *нормальные* реакции плоскости в точках опоры $A', A'', A''', \ldots$

Так как плоскость может развивать реакцию только во внешнюю сторону, то эти реакции параллельны между собой и одинаково ориентированы: они поэтому имеют равнодействующую R, равную их сумме и тоже с ориентацией во внешнюю сторону плоскости. Точка O плоскости, в которой приложена равнодействующая R, лежит всегда с той же стороны, как точки опоры, от всякой прямой (такой как $A'A''$ на фиг. 32), оставляющей все точки опоры с одной стороны. Действительно, момент равнодействующей относительно этой прямой имеет тот же знак, что и моменты реакций. Следовательно, точка приложения равнодействующей R будет заключена внутри выпуклого многоугольника, который содержит все точки опоры и называется *опорным многоугольником*. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы силы, прямо приложенные к твердому телу, имели равнодействующую Q, равную и прямо противоположную R. Отсюда имеем следующее заключение:

Для равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость в нескольких точках, необходимо и достаточно, чтобы прямо приложенные к телу силы имели равнодействующую, нормальную к плоскости, ориентированную во внутреннюю сторону и пересекающую плоскость внутри опорного многоугольника или (в предельном случае) на его контуре.



Фиг. 32.

На основании изложенного выше эти условия необходимы, но они также и достаточны. В самом деле, если они выполняются, то точка пересечения O равнодействующей Q с плоскостью опоры лежит внутри треугольника, образованного тремя опорными точками, выбранными соответствующим образом среди вершин опорного многоугольника, например $A,'$ $A,''$ A''' (фиг. 32). В этом случае сила Q эквивалентна трем силам, нормальным к плоскости, так же ориентированным и проходящим через точки A', A'' и A'''. Эти силы необходимо уравновешиваются сопротивлением плоскости в точках опоры.

Предполагая, что условия равновесия выполняются, поставим своей задачей определить реакции неподвижной плоскости в каждой из точек опоры. Выберем систему осей $O'xy$ в опорной плоскости; пусть ξ, η — координаты точки, в которой равнодействующая Q пересекает эту плоскость; далее пусть x', y'; x'', y''; $x''', y''', \ldots$ — координаты точек опоры, наконец, $R', R'', R''', \ldots$ — абсолютные величины неизвестных реакций.

Так как сила Q равна по величине сумме реакций $R', R'', R''', \ldots$ и пересекает плоскость в центре ξ, η этих параллельных сил, то будем иметь три уравнения:

$$Q = R' + R'' + R''' + \ldots$$
$$Q\xi = R'x' + R''x'' + R'''x''' + \ldots$$
$$Q\eta = R'y' + R''y'' + R'''y''' + \ldots$$

Если имеются только три точки опоры, не лежащие на одной прямой, для чего необходимо, чтобы детерминант системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля, то эти три уравнения определят три неизвестные R', R'', R'''. Если же имеется более трех неизвестных реакций, то системы трех уравнений окажется недостаточно, и для определения неизвестных реакций потребуется изучение упругих деформаций тела. Таким образом, геометрическая статика не дает достаточного числа уравнений для полного определения реакций.

Случай тяжелого твердого тела. — Эти рассуждения можно применить, в частности, к случаю тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость в нескольких точках, не лежащих на одной прямой. Действие сил тяжести приводится к весу тела, приложенному в центре тяжести. Условие равновесия заключается, таким образом, в том, чтобы вертикаль из центра тяжести падала внутрь опорного многоугольника или (в предельном случае) на одну из сторон этого многоугольника.

194. Устойчивость равновесия твердого тела, опирающегося на плоскость. — Изучение равновесия твердого тела, опирающегося на плоскость, позволяет ввести в простой форме понятие об *устойчивости* в статическом смысле.

Так как при равновесии тела, опирающегося на плоскость, равнодействующая прямо приложенных к нему сил нормальна к плоскости, то равновесие будет устойчивым или неустойчивым, смотря по тому, пересекает ли равнодействующая плоскость внутри контура или в точке на контуре опорного многоугольника.

Если равнодействующая пересекает плоскость в точке контура, то достаточно приложить в некоторой точке тела новую как угодно малую силу, *нормальную к плоскости*, чтобы вывести точку пересечения равнодействующей с плоскостью за границы опорного многоугольника и тем самым нарушить равновесие тела, не заставляя его скользить. В этом случае говорят, что равновесие *неустойчиво*.

Если, наоборот, равнодействующая проходит внутри опорного многоугольника, то момент ее относительно любой из сторон опорного многоугольника не равен нулю. В таком случае он имеет наименьшее значение относительно одной (или нескольких) из этих прямых, например, $A'A''$. Пусть M есть этот наименьший момент. Чтобы вызвать нарушение равновесия введением новой силы, действующей нормально к плоскости, необходимо сделать так, чтобы точка пересечения равнодействующей с плоскостью была выведена за пределы опорного многоугольника. Для этого достаточно приложить новую силу, момент которой относительно $A'A''$ был бы больше M и противоположен ему по знаку. В этом случае говорят, что равновесие *устойчиво*, наименьший момент M (момент устойчивости) измеряет, в некотором смысле, *степень устойчивости* равновесия.

Все эти рассуждения применимы, в частности, к случаю тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость. Равновесие такого тела устойчиво, если центр тяжести проектируется внутрь опорного многоугольника, и неустойчиво, если эта проекция лежит на контуре.

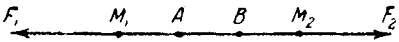
В этом последнем случае самый незначительный добавочный груз, положенный на твердое тело так, что он проектируется в точку вне контура опорного многоугольника, вызывает опрокидывание тела на плоскость. В случае устойчивости, наоборот, чтобы вызвать опрокидывание тела, нужно положить дополнительный груз, проектирующийся в точку вне контура опорного многоугольника, так чтобы его момент относительно соответствующей стороны этого многоугольника превосходил наименьший для данного тела момент M (момент устойчивости).

§ 5. РАВНОВЕСИЕ ВЕРЕВОЧНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

195. Определение. — *Веревочным многоугольником* называют систему материальных точек M_1, M_2, ... M_n, из которых каждая связана со следующей *гибкой и нерастяжимой нитью* (*или шнуром*). Эта нить представляет собой связь, поперечное сечение которой весьма мало и которая не оказывает никакого сопротивления *изгибу*; кроме того, длина нити между двумя любыми ее точками остается неизменной. Точки M_1,M_2, ... M_n суть вершины многоугольника и находятся под действием заданных сил F_1, F_2, ... F_n. Задача заключается в определении условий и фигуры равновесия этой системы.

Свойства веревочных многоугольников послужили исходной точкой для целой системы графических построений, имеющих целью решение задач статики; этот метод составляет в настоящее время содержание отдельной ветви механики, известной под названием *графической статики*. Мы, однако, не будем ею заниматься в этом курсе.

196. Равновесие нити. Натяжение. — Найдем сначала условия равновесия отдельной нити. Для этого предположим, что система материальных точек, о которой шла речь выше, сводится только к двум точкам M_1 и M_2, находящимся соответственно под действием сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (фиг. 33). Равновесие может иметь место лишь в том случае, если силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ образуют систему, эквивалентную нулю, т. е. если они равны и прямо противоположны. Но так как нить не сопротивляется сжатию, то необходимо, чтобы силы ее растягивали; в этом случае мы допускаем, что равновесие осуществлено. Если бы обе силы были ориентированы в обратные стороны, то равновесие могло бы иметь место лишь при условии замены нити твердым стержнем, т. е. неизменяемым телом.



Фиг. 33.

Предположим, что нить $M_1 M_2$ находится в равновесии. Возьмем на нити точку A (фиг. 33) и выделим мысленно часть M_1A. Эта часть находится в равновесии под действием силы $\boldsymbol{F}_1$, приложенной в M_1, и под действием оставшейся части нити AM_2. Это последнее представляет собой, следовательно, силу, равную и прямо противоположную $\boldsymbol{F}_1$. В то же время часть AM_2 нити подвергается со стороны M_1A действию силы, равной и прямо противоположной $\boldsymbol{F}_2$.

Эти действие и противодействие, которые две части нити M_1A и AM_2 оказывают друг на друга в точке A, носят название *натяжения* нити в этой точке; натяжение остается таким же во всякой другой точке B нити. Обозначим через T_{12} действие, испытываемое частью M_1A, и через T_{21} — действие, испытываемое в той же точке частью нити M_2A, так что

$$T_{12} = -T_{21}.$$

197. Равновесие веревочного многоугольника. — Для равновесия веревочного многоугольника необходимо и достаточно, чтобы каждая из его вершин находилась в равновесии под действием прямо приложенной силы и натяжения нити или нитей, оканчивающихся в этой вершине.

Крайние вершины M_1 и M_n будут в равновесии: первая, — под действием сил F_1 и T_{12}, вторая — под действием сил F_n и $T_{n,n-1}$.

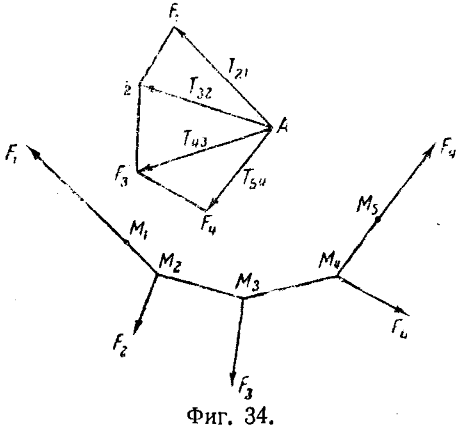
Промежуточная вершина M_k будет в равновесии под действием сил F_k, $T_{k,k-1}$, $T_{k,k+1}$.

Условия равновесия выражаются соответственно векторными уравнениями:

$$F_1 + T_{12} = 0,\ F_k + T_{k,k-1} + T_{k,k+1} = 0,\ F_n + T_{n,n-1} = 0.$$

Проверка этих условий выполняется при помощи очень простого геометрического построения, известного под названием *многоугольника Вариньона.*

198. Многоугольник Вариньона. — Начиная от произвольной точки A (фиг. 34), строим векторы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, проводя каждый последующий из конца предыдущего.



Фиг. 34.

Мы получаем таким способом многоугольник прямо приложенных сил; этот многоугольник в случае равновесия должен быть замкнутым, так как результирующий вектор должен быть равен нулю.

Рассмотрим первую сторону AF_1 и последовательные диагонали $AF_2, AF_3, AF_4 \ldots$; эти векторы представляют собой по величине и направлению последовательные натяжения $T_{21}, T_{32}, T_{43}, \ldots$, так как замкнутость двойного отрезка AF_1A и треугольников AF_1F_2A, AF_2F_3A, $AF_3F_4A, \ldots$ показывает, что геометрические равенства, написанные в конце предыдущего n°, удовлетворяются.

Для равновесия веревочного многоугольника достаточно, чтобы его стороны M_1M_2, $M_2M_3, \ldots$ были соответственно параллельны натяжениям $T_{21}, T_{32}, \ldots$, полученным указанным способом, т. е. параллельны соответствующим диагоналям силового многоугольника, и чтобы ориентация этих сил отвечала действительно имеющемуся натяжению нитей, а не сжатию. В самом деле, в этом случае каждая сторона многоугольника будет в равновесии, так как она находится под действием двух равных и прямо противоположных сил, приложенных к ее концам.

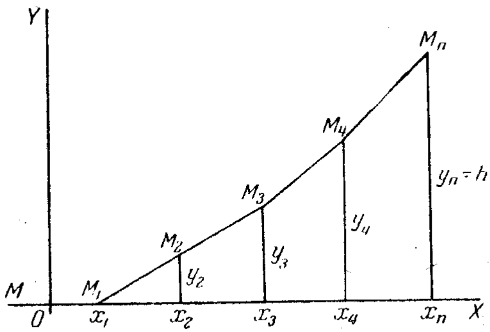
Если бы сторона многоугольника подвергалась сжатию, то равновесие могло бы иметъ место лишь при условии, что нить заменена твердым стержнем.

199. Условия на концах. — Может случиться, что силы, действующие на промежуточные вершины веревочного многоугольника, заданы, крайние же вершины подчинены условиям различного характера, которые называются *условиями на концах*. В этом случае задача заключается в определении фигуры равновесия и реакций в точках закрепления, если таковое имеет место. Мы рассмотрим лишь два наиболее простых случая.

1°. *Концы свободны и находятся под действием данных сил.* — В этом случае задача решается способом, указанным в предыдущем n°. Даны все силы, многоугольник этих сил должен быть замкнутым, чтобы равновесие было возможно. Натяжение сторон, а вместе с этим и направления их определяются диагоналями многоугольника Вариньона. Веревочный многоугольник, таким образом, может быть построен.

2°. Конец M_1 прикреплен к неподвижной точке, другой конец M_n свободен и находится под действием данной силы F_n. Неизвестная реакция в неподвижной точке F_1 должна образовать вместе с другими силами замкнутый многоугольник. Она оказывается, таким образом, известной. Мы приходим к предыдущему случаю. Веревочный многоугольник строится начиная с неподвижной точки M_1.

200. Задача о цепном мосте. — Цепной мост состоит, в основном, из горизонтального настила, подвешенного на вертикальных стержнях к канату, прикрепленному



Фиг. 35.

своими концами к вершинам двух вертикальных башен. Предполагается, что стержни находятся на одинаковых расстояниях друг от друга и несут одинаковую нагрузку, что обе точки прикрепления каната находятся на одинаковой высоте и что число стержней четное. Канат представляет собой веревочный многоугольник, фигуру равновесия которого нужно определить.

Из условия симметрии следует, что средняя сторона многоугольника должна быть горизонтальна. С другой стороны, так как все силы, передаваемые стержнями, вертикальны, две последовательные стороны и стержень, оканчивающийся в точке их пересечения, должны лежать в одной вертикальной плоскости, так как это одно из условий равновесия этой вершины, и потому вся фигура равновесия расположена в одной вертикальной плоскости.

Возьмем вертикальную плоскость, содержащую канат, за плоскость xy и середину O горизонтальной стороны MM_1 (фиг. 35) — за начало координат; ось Ox горизонтальна и направлена по MM_1; ось Oy направим по вертикали вверх.

Пусть a есть расстояние между стержнями и p нагрузка на каждый из них (весом стержней и каната пренебрегаем). Обозначим через (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots, (x_n, y_n)$ координаты последовательных вершин $M_1, M_2, \ldots, M_n$ многоугольника. Стрела прогиба каната, т. е. высота $y_n = h$ крайней вершины M_n над горизонтальной плоскостью, дается заранее. Пусть $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ будут углы наклона к горизонтальной плоскости последовательных сторон M_1M_2, $M_2M_3, \ldots$; координаты точки M_k тогда будут

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)\, a,$$

$$y_k = a\,(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_k).$$

Обозначим через T_0 натяжение горизонтальной части нити (в направлении от M к M_1) и выразим то обстоятельство, что суммы проекций на оси Ox и Oy внешних сил системы, образованной частью $M_1M_2 \ldots M_k$ многоугольника, соответственно равны нулю; мы получим два уравнения:

$$T_{k,\,k+1}\cos\alpha_{k+1} - T_0 = 0,$$

$$T_{k,\,k+1}\sin\alpha_{k+1} - kp = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_{k+1} = \frac{kp}{T_0};$$

складывая эти равенства для $k = 1, 2, \ldots, k-1$, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_k =$$

$$= \frac{p}{T_0}(1 + 2 + \ldots + k - 1) = \frac{p}{2T_0}k(k-1).$$

Следовательно,

$$y_k = \frac{ap}{2T_0} k(k-1).$$

Значение T_0 получается отсюда, если положить $k=n$, так как тогда $y_k = y_n = h$; выполняя это, получим:

$$h = \frac{ap}{2T_0} n(n-1), \text{ откуда } T_0 = \frac{ap}{2h} n(n-1).$$

Окончательно значения x_k, y_k будут:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a,$$

$$y_k = h\frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Таким образом, мы имеем координаты вершин многоугольника, и задача решена, так как, зная вершины, мы можем найти длины стержней, далее — длины сторон многоугольника, а следовательно, и натяжения различных частей каната. По этим данным мост можно построить.

Следует заметить, что все вершины многоугольника лежат на одной и той же параболе, имеющей ось Oy осью симметрии; уравнение параболы получим, исключая k из двух уравнений:

$$x = \frac{a}{2} + (k-1)a, \quad y = \frac{ap}{2T} k(k-1).$$

Это исключение дает:

$$y = \frac{p}{2aT_0}\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2aT_0}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right),$$

что действительно является уравнением параболы с осью, совпадающей с Oy.

§ 6. ПЛОСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ (ИЛИ СОЧЛЕНЕННЫЕ) СИСТЕМЫ

201. Определение. — Рассмотрим систему точек M_1, M_2, ..., M_n, лежащих в одной плоскости, из которой они не могут выйти; будем называть эти точки *узлами* системы.

Предполагают, что каждый узел связан по меньшей мере с двумя другими узлами твердыми стержнями, из которых каждый соединяет только два узла. Стержни, сходящиеся в одном и том же узле, связаны между собой в этой точке *сочленением* (*шарниром*), позволяющим этим стержням, если бы их другие концы были свободны, вращаться независимо один от другого вокруг узла в общей плоскости. Такую систему стержней называют *сочлененной* (или *шарнирной*) *системой*. Она может находиться под действием *внешних сил*, расположенных в ее плоскости; при этом предполагается, что силы приложены только в узлах системы.

Сочлененная система называется *изменяемой*, если наложенные на нее связи не обеспечивают ее жесткости, т. е. позволяют некоторым углам, образованным стержнями, изменяться. В противном случае система называется *неизменяемой*.

Система называется *строго неизменяемой* (или *системой без лишних стержней*), если достаточно удалить только один стержень, чтобы сделать ее изменяемой. Система, образованная тремя сторонами треугольника, очевидно, обладает этим свойством. Наоборот, если можно отбросить n стержней без того, чтобы сделать систему изменяемой, то говорят, что система имеет *n лишних стержней*. Система, образованная шестью сторонами полного четырехсторонника, имеет, на основании сказанного, один лишний стержень.

Система без лишних стержней называется *мгновенно-изменяемой* *), если удаление какого-нибудь одного стержня, например M_1M_2, позволит сообщить системе бесконечно малую деформацию, при которой расстояние M_1M_2 изменится. Строго неизменяемая система,

*) Автор называет указанную систему *свободно расширяемой* (*librement dilatable*). Термином *мгновенно изменяемая* система пользуются в строительной механике. См., например, Рабинович М. М. Строительная механика стержневых систем, Стройиздат, 1946, § 10, стр. 21. В этой книге можно найти соответствующие примеры. (*Прим. перев.*)

вообще говоря, обладает этим свойством. Действительно, точки M_1M_2 только в том случае могли бы, после удаления стержня, перемещаться нормально к отрезку M_1M_2, если бы единственное назначение стержня M_1M_2 в системе заключалось в том, чтобы связывать два другие стержня, расположенные точно на его продолжении, или в том, чтобы связывать две неизменяемые части системы, в точности заменяющие два такие стержня. Этот исключительный случай можно оставить в стороне.

202. Равновесие шарнирной системы. — Допустим, что сочленения стержней допускают их вращение без трения; под этим подразумевают, что эти сочленения не вызывают действия моментов на стержни, а могут действовать на них только сосредоточенными силами, приложенными к концам и направленными по осям стержней.

Так как каждый из стержней должен быть в равновесии, то он должен находиться под действием двух равных и прямо противоположных сил, приложенных к его концам. Эти силы вызывают в стержне усилия *натяжения* или усилия *сжатия*, смотря по ориентации сил. Возникающие усилия натяжения или сжатия представляют собой *внутренние силы* системы.

Будучи неизменяемой, система может рассматриваться, как абсолютно твердое тело, и условия равновесия ее будут совпадать с условиями равновесия абсолютно твердого тела. Отсюда получаем следующую теорему:

Для равновесия сочлененной системы необходимо и достаточно, чтобы система внешних сил, приложенных к узлам, была эквивалентна нулю; другими словами, чтобы главный вектор и главный момент этих сил были равны нулю.

203. Определение усилий в стержнях. Теорема Мориса Леви (Maurice Lévy). — Наибольший интерес при изучении стержневых систем представляет вопрос о том, может ли определение усилий в стержнях быть выполнено на основании принципов только геометрической статики, т. е. при помощи только условий равновесия абсолютно твердого тела, без рассмотрения деформаций. В этом вопросе мы обязаны Морису Леви следующей теоремой:

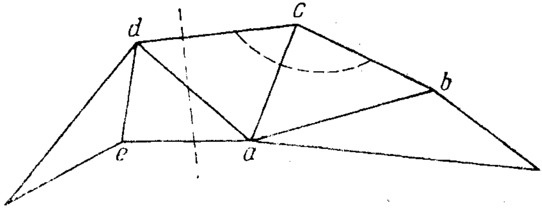
Для того чтобы определение усилий в стержнях сочлененной системы могло быть основано только на законах геометрической статики, необходимо и достаточно, чтобы система была мгновенно изменяемой.

Почти непосредственно очевидно, что это условие необходимо. Если бы система не была мгновенно изменяемой, то существовал бы по меньшей мере один стержень M_1M_2, который можно было бы отбросить без того, чтобы точки M_1, M_2 могли удалиться или приблизиться одна к другой при бесконечно малой деформации системы. Ясно, что при этих условиях стержень M_1M_2 может быть подвергнут какому угодно внутреннему усилию (растяжению или сжатию) без изменения положения его концов, и, следовательно, без нарушения равновесия системы. Таким образом, условие равновесия фигуры в предположении, что она представляет собою абсолютно твердое тело, оказывается недостаточным для определения этих усилий.

С другой стороны, высказанное в теореме условие достаточно. Доказательство достаточности почти непосредственно следует из принципа виртуальных перемещений. Мы и приведем его как применение принципа виртуальных перемещений, что может быть сделано лишь в одной из следующих глав (n° 245).

204. Системы, составленные из треугольников. — Стержневая система называется *просто триангулированной*, если она составлена из последовательности треугольников, из которых каждый является смежным со следующим. Каждый из треугольников оказывается, таким образом, смежным с двумя другими, за исключением двух крайних; каждый крайний оказывается смежным только с одним из треугольников системы (фиг. 36). Системы, просто триангулированные, представляют собой системы, строго неизменяемые и мгновенно изменяемые, так что определение усилий, возникающих в стержнях, не представляет затруднений.

Каждый треугольник, за исключением двух крайних, обладает одной стороной, ограничивающей многоугольную фигуру стержневой системы и принадлежащей лишь этому треугольнику, и двумя сторонами, внутренними для этой



Фиг. 36.

фигуры, которые являются общими для данного треугольника и одного из смежных.

Покажем сначала, что можно определить усилие, испытываемое каким-нибудь из стержней, расположенных на границе многоугольной фигуры.

Пусть bc есть один из этих стержней (фиг. 36). Заметим, что отбрасывание стержня bc разделяет систему на две части S' и S'', соединенные друг с другом в вершине треугольника a, противолежащей стороне bc. Неизвестное усилие, производимое стержнем bc на часть S' системы, должно уравновесить действие внешних сил, приложенных к S' и стремящихся повернуть S' вокруг вершины a. Это усилие, таким образом, может быть определено из условия, что момент его относительно a уничтожается результирующим моментом внешних сил, действующих на S'.

После определения усилий в крайних стержнях переходят к определению усилий, испытываемых стержнями, общими для двух треугольников системы. Здесь возможны два случая.

1°. Сторона, подобная ac, разделяет два треугольника, у которых внешние стороны встречаются на ac, в точке c.

Тогда усилие, производимое стержнем ac на эту точку, известно, так как оно уравновешивает внешнюю силу, приложенную в этом узле, и действия двух внешних стержней bc и dc, уже вычисленные.

2°. Внутренняя сторона, подобная ad, отделяет два треугольника, внешние стороны которых оканчиваются на двух противоположных концах стороны ad. В этом случае стержневую систему делят на две части S' и S'', мысленно разрезая три стержня ae, ad и dc. Из всех внешних по отношению к части S' сил остается неизвестным только усилие в стержне ad, так как усилия в двух других стержнях уже вычислены. Поэтому усилие, производимое стержнем ad, равно и противоположно равнодействующей всех других сил.

Замечание.—В последнем случае можно одновременно определить усилия в трех стержнях ae, ad и dc, так как они уравновешивают силы, прямо приложенные к S'. Сначала можно привести эти приложенные силы к двум силам, проходящим через точки a и d (n° 185); тогда первую можно разложить по стержням ad и ae, вторую — по стержням ad и dc, наконец, силы, действующие по ad, заменить одной силой, и задача, таким образом, решена. Решение задач такого рода приводит к изящным построениям, составляющим предмет *графической статики*.

§ 7. РАВНОВЕСИЕ НИТЕЙ *)

205. Уравнения равновесия. — Мы будем рассматривать условия равновесия гибкой и нерастяжимой нити, находящейся под действием непрерывно распределенных сил. Сечение нити будем предполагать настолько малым, что им можно пренебречь. Обозначим через s длину нити, отсчитываемую от некоторой начальной точки A в определенную сторону (от A к B), и допустим, что внешние

*) Этот вопрос не входит в область геометрической статики в том виде, в каком мы ее здесь определили, но он очень тесно связан с предыдущими задачами.

силы, приложенные к элементу дуги ds, могут быть приведены к одной силе, приложенной в некоторой точке этого элемента. Обозначим эту силу через Fds, а ее проекции на три прямоугольные оси — через

$$X\,ds,\ Y\,ds,\ Z\,ds,$$

так что F представляет собой величину силы, *отнесенной к единице длины.*

Будем рассматривать нить AB, находящуюся в равновесии, и выделим мысленно часть ее AM от конца A до некоторой точки M. Эта часть нити находится в равновесии под влиянием приложенных к ней внешних сил и усилия, действующего на нее в конце M со стороны оставшейся части MB. Это усилие может быть заменено силой T, приложенной в точке M и способной удержать нить натянутой, а потому направленной по касательной к нити в сторону возрастающих дуг.

Чтобы часть AM нити была в равновесии, необходимо, чтобы результирующая сил, приложенных к ней, была равна нулю. Эти силы следующие: натяжение T, приложенное в M, натяжение в начальной точке A, направленное в обратную сторону по нити (т. е. $-T_0$), и, наконец, сумма всех внешних сил вида Fds, приложенных ко всем элементам ds отрезка нити AM. Получаем соотношение

$$T - T_0 + \int_0^s F\,ds = 0. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по s, получим

$$\frac{dT}{ds} + F = 0. \tag{2}$$

Это есть векторное уравнение равновесия нити. Оно выражает, что каждый элемент ds нити, рассматриваемый как материальная точка, находится в равновесии. Поэтому и вся нить в целом будет в равновесии. Нетрудно было бы убедиться в том, что условие равновесия, относящееся к моментам сил, осуществляется для нити одновременно с предыдущим уравнением.

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы касательной в точке M кривой, представляющей фигуру равновесия нити. Проектируя соотношение (1) на три оси, получим

$$T\alpha - T_0\alpha_0 + \int_0^s X\,ds = 0$$

и два другие аналогичные уравнения; дифференцируя эти уравнения по s, будем иметь

$$\frac{d(T\alpha)}{ds} + X = 0, \quad \frac{d(T\beta)}{ds} + Y = 0, \quad \frac{d(T\gamma)}{ds} + Z = 0, \quad (3)$$

т. е. три алгебраические (или скалярные) уравнения равновесия нити.

Из них можно вывести несколько интересных следствий:

1°. *Если сила F для всех точек нити перпендикулярна к одной из осей, например, к оси Ox, то проекция $T\alpha$ натяжения нити на эту ось постоянна.*

В самом деле, из равенства $X=0$ следует $T\alpha = \text{const}$.

2°. *Если сила F параллельна некоторой неподвижной прямой, например, оси Oz, то нить лежит в плоскости, параллельной этой прямой.*

Действительно, из предыдущего следствия имеем

$$T\alpha = \text{const.} = a, \quad T\beta = \text{const.} = b;$$

кроме того, $\alpha:\beta = dx:dy$, откуда $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$.

Интегрируя последнее равенство, найдем, что

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} + C,$$

т. е. уравнение плоскости, параллельной оси Oz.

3°. *Если сила F пересекает ось Ox или ей параллельна, то момент натяжения относительно этой оси для всех точек нити имеет постоянную величину.*

Действительно, имеем

$$y\frac{d(T\gamma)}{ds}-z\frac{d(T\beta)}{ds}=-yZ+zY=0;$$

$$\frac{d}{ds}[y(T\gamma)-z(T\beta)]=0;$$

$$y(T\gamma)-z(T\beta)=\text{const}.$$

206. Интегрирование уравнений равновесия. — Заменим в уравнениях (3) величины α, β, γ их значениями $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; тогда получим три дифференциальные уравнения второго порядка относительно функций x, y, z и первого порядка относительно T, которые, в соединении с условием

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

и позволят определить четыре неизвестные x, y, z и T как функции от s. Интегрирование уравнений введет шесть постоянных, которые позволят выбрать произвольно начальные значения величин x, y, z, T и двух первых производных (из трех) от x, y, z (т. е. выбрать точку прикрепления, направление нити и натяжение ее в этой точке). Однако решение будет годиться лишь в том случае, если натяжение T нигде не получит отрицательных значений, так как нить не оказывает сопротивления сжатию.

В действительности, при решении задач чаще всего приходится удовлетворять *условиям на концах*, отличным от высказанных начальных условий, однако при выполнении интегрирования эти последние оказываются наиболее естественными и удобными.

207. Внутренние, или естественные уравнения равновесия нити. — Выполним дифференцирования, указанные в равенствах (3), и воспользуемся формулами Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\lambda}{\rho},\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\mu}{\rho},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\nu}{\rho},$$

где λ, μ, ν суть направляющие косинусы главной нормали к кривой, представляющей собой фигуру равновесия нити, а ρ есть радиус кривизны нити. Получим:

$$\alpha\frac{dT}{ds}+T\frac{\lambda}{\rho}+X=0,$$

$$\beta\frac{dT}{ds}+T\frac{\mu}{\rho}+Y=0,$$

$$\gamma\frac{dT}{ds}+T\frac{\nu}{\rho}+Z=0.$$

Направим ось Ox по касательной (поэтому $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$), ось Oy — по главной нормали (поэтому $\lambda=0$, $\mu=1$, $\nu=0$). Пусть F_t, F_n, F_b — проекции силы F на касательную, главную нормаль и бинормаль; предыдущие уравнения приведутся в этом случае к виду

$$\frac{dT}{ds}+F_t=0,\quad \frac{T}{\rho}+F_n=0,\quad F_b=0.$$

Эти уравнения называются *естественными уравнениями* равновесия нити.

Последнее из них показывает, что в каждой точке нити сила, приложенная в ней, лежит в соприкасающейся плоскости к кривой, представляющей собою фигуру равновесия.

Если сила нормальна к нити, то $F_t=0$, и первое уравнение показывает, что натяжение остается постоянным по всей длине нити.

Если сила направлена по нити, то второе уравнение дает $\frac{1}{\rho}=0$: нить принимает форму прямой линии, что очевидно *a priori*.

208. Нить на поверхности. — Пусть нить натянута на абсолютно гладкой поверхности, с которой она не может сойти, и пусть она находится только под действием нормальной реакции поверхности. Эта реакция есть единтвенная сила, приложенная к точкам нити, она непрерывно распределена вдоль нее. На основании сделанного в предыдущем n° замечания, реакция лежит в соприкасающейся плоскости к кривой, представляющей собой фигуру равновесия нити. Следовательно, главная нормаль к этой кривой есть в то же время нормаль к поверхности.

Кривые на поверхностях, обладающие этим свойством, носят название *геодезических линий*. Отсюда имеем следующую теорему:

Если нить натянута на абсолютно гладкой поверхности и не подвергается действию никаких других непрерывно распределенных сил, кроме реакции поверхности, то фигура равновесия нити представляет собой геодезическую линию поверхности.

Эта теорема в наглядной форме выражает то обстоятельство, что геодезические линии имеют наименьшую длину по сравнению со всеми прочими кривыми, проведенными на поверхности между какими-нибудь двумя ее точками.

209. Равновесие тяжелой нити. — Рассмотрим тяжелую однородную нить, подвешенную к двум неподвижным точкам A и B, и определим форму, которую она принимает, находясь под действием только силы тяжести. Так как в этом случае сила направлена по вертикали, т. е. параллельна неподвижной прямой, то фигура равновесия будет лежать в вертикальной плоскости (**n° 205**, 2°). Примем эту плоскость за плоскость xy, тогда число уравнений равновесия сведется к двум.

Проведем ось x горизонтально и ось y вертикально в сторону, противоположную направлению силы тяжести. Пусть p есть вес единицы длины нити; его составляющие по осям будут: $X = 0$, $Y = -p$. Пусть T есть величина натяжения нити; тогда уравнения равновесия запишутся:

$$\frac{d(T\alpha)}{ds} = 0, \quad \frac{d(T\beta)}{ds} = p,$$

или, если обозначить через φ угол наклона касательной к оси x:

$$\frac{d(T\cos\varphi)}{ds} = 0, \quad \frac{d(T\sin\varphi)}{ds} = p.$$

Первое уравнение показывает, как мы это уже знаем (n° **205**), что $T\cos\varphi$ есть постоянная величина. Обозначим ее через ap, так что

$$T\cos\varphi = ap.$$

Подставляя полученное отсюда значение T во второе уравнение, будем иметь

$$ad(\operatorname{tg}\varphi) = ds. \tag{1}$$

Заменяя $\operatorname{tg}\varphi$ через y', и ds через $dx\sqrt{1+y'^2}$, получим дифференциальное уравнение линии равновесия нити

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, мы получаем

$$\lg\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = \frac{x-C}{a},$$

$$y' = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-C}{a}} - e^{-\frac{x-C}{a}}\right); \tag{2}$$

вторичное интегрирование дает

$$y - C_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{-C}{a}} + e^{-\frac{x-C}{a}}\right). \tag{3}$$

Таким образом, фигура равновесия есть *цепная линия*, ось которой вертикальна. Этот результат принадлежит Гюйгенсу.

В уравнения (2) и (3) вошли три постоянные интегрирования: a, C и C_1. Для их определения необходимо иметь три условия на концах.

Два первых выражают то, что кривая проходит через данные точки A и B; в качестве третьего условия можно взять, например, то, что дуга кривой между точками A и B должна иметь данную длину, а именно, длину нити.

Определение цепной линии. — Выберем именно эти условия. Пусть x_0, y_0 — координаты точки A; x_1, y_1 — координаты точки B, и $2l$ — длина нити. Каково бы ни было положение начала координат, мы можем положить

$$x_1 - x_0 = 2h, \quad y_1 - y_0 = 2k,$$

где h и k — две заданные постоянные величины, зависящие лишь от относительного положения точек A и B; первую из них h мы всегда можем считать положительной.

Постоянные C и C_1 зависят от положения осей координат. Расположим оси так, чтобы эти постоянные обратились в нуль, так что задача приводится к определению положения точек A и B относительно осей. Уравнения (2) и (3) принимают вид:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{4}$$

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{5}$$

а уравнение (1) после интегрирования от A до B дает

$$a(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_0) = 2l. \tag{6}$$

Заменим y_0 и y_1 в уравнении $y_1 - y_0 = 2k$ их значениями (5), потом $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_0$ в уравнении (6) их значениями (4); получим

$$2k = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right) - \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_0}{a}} + e^{-\frac{x_0}{a}}\right),$$

$$2l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right) - \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}}\right).$$

Складывая и вычитая эти уравнения, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{2(l+k)}{a} &= e^{\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}} = e^{\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{2h}{a}} - 1\right), \\ \frac{2(l-k)}{a} &= e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} = e^{-\frac{x_0}{a}}\left(1 - e^{-\frac{2h}{a}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

умножая почленно уравнения (7), получим

$$\frac{4(l^2 - k^2)}{a^2} = \left(e^{\frac{h}{a}} - e^{-\frac{h}{a}}\right)^2.$$

Получилось трансцендентное уравнение для определения величины a и, следовательно, уравнения (5) цепной линии.

Если для упрощения записи положить $h : a = u$, то последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{l^2 - k^2}{h^2} = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2u}\right)^2.$$

Правая часть возрастает от 1 до ∞, когда u изменяется по абсолютному значению от 0 до ∞. Поэтому решение получится лишь в том случае, когда левая часть больше 1. В этом случае уравнение даст для u два корня с противоположными знаками. Выберем из них положительный, который дает и для a положительное значение.

Действительно, величина a должна быть положительной, чтобы цепная линия была обращена своей выпуклостью вниз и чтобы нить была натянута. Задача допускает поэтому одно и только одно решение, если имеет место неравенство

$$l^2 > k^2 + h^2,$$

выражающее тот факт, что длина нити больше расстояния между двумя точками A и B. В самом деле, когда величина a найдена и цепная линия этим определена, то одно из уравнений (7) даст x_0, после чего имеем $x_1 = x_0 + 2h$, а значения y_0 и y_1 определяются уравнением (5). Таким образом, положения точек A и B цепной линии относительно осей координат найдены, и задача решена.

ГЛАВА IX

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

210. Определение центра тяжести системы материальных точек. — Рассмотрим систему материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Обозначим через m_k массу и через x_k, y_k, z_k — прямоугольные или косоугольные координаты точки M_k.

Приложим к каждой из точек M_k вектор величины m_k и направим все эти векторы параллельно друг другу в одну сторону.

Центр этих параллельных векторов есть точка Г, не зависящая от направления векторов, координаты ее ξ, η, ζ определяются формулами

$$M = \sum m, \quad M\xi = \sum m_k x_k, \quad M\eta = \sum m_k y_k,$$
$$M\zeta = \sum m_k z_k, \tag{1}$$

где M есть общая масса системы, а суммирование распространяется на все точки системы.

Точка, определенная уравнениями (1), называется *центром тяжести* системы.

Три уравнения системы (1), определяющие ξ, η, ζ, очевидно, могут быть соединены в одно векторное уравнение. Если обозначим через $\boldsymbol{r}_k$ векторную координату точки M_k и через $\mathbf{Г}$ векторную координату центра тяжести, то это векторное уравнение получит вид:

$$M\mathbf{Г} = \sum m_k \boldsymbol{r}_k. \tag{1'}$$

Определение центра тяжести предполагает, как мы видим, введение определения *массы*, и вследствие этого теория центра тяжести относится столько же к динамике, сколько и к статике. Между тем, само название «центр тяжести» выражает статическое свойство этой точки, имеющее место лишь при весьма ограничительных условиях: рассматриваемое тело должно быть сравнительно небольших размеров и находиться под действием силы тяжести на поверхности Земли.

Действительно, при этом предположении можно допустить, что ускорение g силы тяжести постоянно, так что вес p материальной точки связан с ее массой m формулой

$$p = mg.$$

Эта формула показывает, что веса пропорциональны массам. Центр тяжести твердого тела совпадает поэтому с центром параллельных векторов, изображающих веса всех точек тела, *действие же тяжести на тело сводится к полному весу тела, приложенному в его центре тяжести*, согласно теории приведения параллельных сил, приложенных к твердому телу (n° 188).

211. Определение центра тяжести при помощи статических моментов. — Уравнениям (1) можно дать геометрическую интерпретацию, позволяющую определить центр тяжести системы материальных точек независимо от какой-либо системы осей.

Назовем *статическим моментом* массы m, сосредоточенной в точке M, относительно плоскости P произведение массы на ее расстояние от плоскости, считаемое положительным в одну сторону и отрицательным в другую сторону от плоскости. Если принять во внимание то, что координаты точки, в прямоугольной или косоугольной системе осей, находятся в постоянном отношении к ее расстояниям от координатных плоскостей, то легко видеть, что уравнения (1) выражают следующую теорему.

Теорема. — *Если всю массу материальной системы сосредоточить в ее центре тяжести, то статический момент этой массы относительно какой-нибудь*

плоскости равен сумме статических моментов относительно той же плоскости масс всех точек системы.

Центр тяжести данной материальной системы может быть определен применением этой теоремы к трем плоскостям, образующим трехгранный угол. Из теоремы следует, что если указанное в ней свойство оправдывается для трех таких плоскостей, то оно будет иметь место и для любой плоскости.

Можно, впрочем, убедиться в этом непосредственно. Если выбрать три первые плоскости в качестве координатных, то для центра тяжести соотношения (1) выполнены по определению. Всякая новая плоскость P определяется уравнением

$$ax + by + cz + d = 0;$$

левая часть уравнения пропорциональна расстоянию точки (x, y, z) от плоскости P. Из уравнений (1) можем получить соотношение

$$M\,(a\xi + b\eta + c\zeta + d) = \sum m\,(ax + by + cz + d),$$

в точности выражающее теорему о статическом моменте системы относительно плоскости P.

212. Теорема. — *Если вся материальная система расположена с одной стороны от некоторой плоскости P, то центр тяжести ее находится по ту же сторону от плоскости. Поэтому центр тяжести материальной системы находится внутри всякой выпуклой поверхности, заключающей в себе всю данную систему.*

В самом деле, статические моменты относительно плоскости P всех точек системы имеют одинаковые знаки, поэтому момент центра тяжести должен иметь тот же знак. А это значит, что центр тяжести находится с той же стороны плоскости P, как все точки системы.

213. Распределительное свойство центров тяжести. — Если разделить систему материальных точек S на две части S' и S'', то ее центр тяжести есть в то же время центр тяжести двух масс M' и M'' систем S' и S'', помещенных соответственно в центрах тяжести этих двух систем.

Это свойство есть следствие уравнений (1). Будем отмечать обозначения одним или двумя штрихами, смотря по тому, относятся ли они к частным системам S' или S''; тогда получим соотношение

$$M\xi = \sum mx = \sum{}' mx + \sum{}'' mx = M'\xi' + M''\xi''$$

и другие аналогичные, что и доказывает теорему.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СПЛОШНЫХ ТЕЛ

214. Плотность. — Формулы (1) предыдущего параграфа не могут быть применены непосредственно к определению центров тяжести тел, так как материальные точки, из которых составлены тела, и их массы не поддаются измерению, и суммирования в формулах практически нельзя выполнить. Вычисление суммы здесь сводится к вычислению интегралов при помощи нижеследующих рассуждений, в которых постулируется непрерывность материи. Таким способом физическую задачу заменяют чисто геометрической.

Тело называют *однородным*, если во всех своих точках оно имеет одинаковое физическое строение. *Плотность* тела в этом случае есть постоянное отношение массы произвольной части тела к объему этой части. Пусть M — масса, V — объем и ρ — плотность тела, тогда

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{или} \; M = V\rho.$$

Если тело неоднородное, то отношение массы к объему зависит от рассматриваемой части тела, и тогда для каждой части это отношение называется *средней плотностью*. Рассмотрим теперь точку тела с координатами x, y, z и выделим из тела элемент объема $\Delta\omega$, содержащий эту точку. Допустим, что средняя плотность этого элемента стремится к определенному пределу, когда объем $\Delta\omega$ стягивается к точке x, y, z, и что этот предел не зависит от выбора элементарного объема и от способа его стремления к нулю.

Этот предел ρ представляет собой в таком случае функцию $f(x, y, z)$, которую мы будем предполагать непрерывной и называть *плотностью тела в точке* x, y, z. Высказанные предположения могут относиться только к идеальным телам и для действительных тел оправдываются лишь более или менее приближенно.

215. Преобразование сумм в интегралы. — Рассмотрим непрерывное тело с плотностью ρ (которая может быть переменной), занимающее некоторый объем V. Разделим этот объем на бесконечно малые элементы $d\omega$; полученные элементарные частицы тела могут рассматриваться как материальные точки. Пусть x, y, z — координаты одной из них, $d\omega$; так как плотность в этой точке есть ρ, масса частицы будет $\rho d\omega$. Уравнения (1) заменятся тогда следующими:

$$M = \sum \rho d\omega, \quad M\xi = \sum x\rho d\omega, \quad M\eta = \sum y\rho d\omega, \quad M\zeta = \sum z\rho d\omega.$$

Эти суммы распространяются теперь на бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых и представляют собой в действительности определенные интегралы. Они распространены на все элементы $d\omega$ объема V и являются, следовательно, объемными, или тройными интегралами. Их записывают обычно в следующем виде:

$$M = \iiint\limits_V \rho d\omega, \quad M\xi = \iiint\limits_V \rho x d\omega, \quad M\eta = \iiint\limits_V \rho y d\omega,$$

$$M\zeta = \iiint\limits_V \rho z d\omega. \tag{2}$$

Эти формулы и применяют при вычислении координат центров тяжести. Способы вычисления таких интегралов излагаются в курсах анализа.

Если ограничиться однородными телами, как мы обычно будем поступать в приложениях, то постоянная плотность может быть вынесена за знак интеграла и сократится как общий множитель (M полагаем равным $V\rho$). Формулы (2) переходят при этом в следующие:

$$V=\iiint_V d\omega,\quad V\xi=\iiint_V xd\omega,\quad V\eta=\iiint_V yd\omega,$$

$$V\zeta=\iiint_V zd\omega. \tag{3}$$

216. Центры тяжести поверхностей и линий — 1°. При определении *центра тяжести поверхности*, предполагают, что по этой поверхности распределена по заданному закону некоторая материя, обладающая массой. Толщину этого материального слоя, лежащего на поверхности, считают настолько малой, что ею можно пренебречь. Средней плотностью элемента поверхности ΔS называют отношение массы этого элемента к его площади. Плотность в какой-нибудь точке поверхности есть предел средней плотности бесконечно малого элемента dS, содержащего эту точку; предполагают, что плотность есть данная непрерывная функция ρ координат точки.

Общими формулами для определения центра тяжести являются равенства (2) или (3), смотря по тому, переменна или постоянна плотность тела. Так как теперь суммирования распространяются на все элементы dS поверхности S, то эти суммы обращаются в поверхностные, или двойные интегралы. Самые формулы, в предположении однородности поверхности, принимают следующий вид:

$$S=\iint_S dS,\quad S\xi=\iint_S xdS,\quad S\eta=\iint_S ydS,\quad S\zeta=\iint_S zdS.$$

В том частном случае, когда поверхность плоская, ее можно принять за плоскость xy. Тогда z для каждой точки равно нулю, ζ тоже обращается в нуль, и остается определить только ξ и η.

2°. *Центр тяжести линии* определяют аналогичным способом, предполагая, что некоторая масса распределена по известному закону вдоль линии. Толщину полученной материальной линии предполагают настолько малой, что ею можно пренебречь. Плотность ρ определяют в этом случае, рассматривая бесконечно малый элемент дуги длины ds. Суммирования распространяются на все элементы линии и приводят поэтому к простым определенным интегралам. Для однородной дуги длины s формулы принимают вид:

$$s\xi = \int_s x ds, \quad s\eta = \int_s y ds, \quad s\zeta = \int_s z ds.$$

Если кривая плоская, то ее плоскость можно принять за плоскость xy, и тогда уравнения приводятся к двум следующим:

$$s\xi = \int_s x\, ds, \quad s\eta = \int_s y\, ds.$$

217. Замечания, относящиеся к случаям, когда определение центра тяжести однородных фигур упрощается. — Если фигуры однородны и обладают симметрией, то определение центра тяжести во многих случаях упрощается.

1°. Если фигура (линия, поверхность, объем) имеет центр симметрии O, то точка O и есть центр тяжести. Действительно, в этом случае фигуру можно разложить на элементы, попарно равные и расположенные симметрично относительно точки O. Центр тяжести каждой пары элементов лежит в точке O, поэтому и центр тяжести всей фигуры будет находиться в той же точке (n° 213).

2°. Если фигура имеет диаметральную плоскость, которая делит пополам все хорды, параллельные сопряженному направлению, то центр тяжести лежит в этой плоскости. В самом деле, фигура может быть разложена на элементы, попарно равные и расположенные по разные стороны от диаметральной плоскости на равных от нее расстояниях. Центр тяжести каждой пары элементов лежит в этой плоскости, поэтому и центр тяжести всей фигуры будет находиться в той же плоскости.

3°. Если фигура плоская и имеет диаметр, то центр тяжести лежит на этом диаметре. Доказательство проводится так же, как в 2°.

4°. Если фигура (линия, поверхность, объем) обладает осью симметрии, так что она может быть разложена на пары элементов, соответственно равных друг другу и расположенных симметрично относительно этой оси, то, пользуясь тем же рассуждением, легко показать, что центр тяжести лежит на оси симметрии.

§ 3. ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ФИГУР

218. Треугольник. — Медиана треугольника есть диаметр, делящий пополам хорды, параллельные основанию, поэтому на ней лежит центр тяжести (n° 217) площади треугольника. Следовательно, *три медианы треугольника, пересекаясь, определяют центр тяжести площади треугольника.*

Элементарные соображения показывают, что медианы треугольника пересекаются в точке, отстоящей на две трети длины каждой из них от соответствующей вершины. Поэтому *центр тяжести площади треугольника лежит на любой его медиане на расстоянии двух третей ее длины от вершины.*

219. Четырехугольник. — Центр тяжести площади четырехугольника определяется пересечением двух прямых, которые мы получаем, применяя распределительное свойство центров тяжести (n° 213).

Сначала делим четырехугольник диагональю на два треугольника. Центр тяжести четырехугольника лежит на прямой, соединяющей центры тяжести этих треугольников. Эта прямая и есть первая из двух искомых прямых.

Вторую прямую получим таким же способом, разбивая четырехугольник на два треугольника (отличных от предыдущих) посредством другой диагонали.

220. Многоугольник. — Мы знаем способы нахождения центров тяжести площади треугольника и четырехугольника. Чтобы определить центр тяжести площади многоугольника с произвольным числом сторон, предположим, что мы умеем находить центр тяжести площади многоугольника с меньшим числом сторон.

Тогда можно поступить так же, как в случае четырехугольника. Площадь данного многоугольника делят на две части двумя разными способами проведением диагоналей. В каждом из двух случаев соединяют прямой центры тяжести отдельных частей. Эти две прямые пересекаются в искомом центре тяжести.

221. Дуга окружности. — Пусть требуется определить центр тяжести дуги окружности AB длины s. Отнесем окружность к двум взаимно перпендикулярным диаметрам OX и OY, из которых первый проходит через середину C дуги AB. Центр тяжести лежит на оси OX, являющейся осью симметрии. Достаточно поэтому определить ξ. Для этого имеем формулу:

$$s\xi = \int_s x\, ds.$$

Пусть будут: a — радиус окружности, c — длина хорды AB, θ — угол между осью OX и радиусом, проведенным к элементу ds, $-\theta_0$ и $+\theta_0$ — значения θ, соответствующие концам дуги AB. Имеем:

$$x = a\cos\theta, \quad ds = a\,d\theta, \quad c = 2a\sin\theta_0.$$

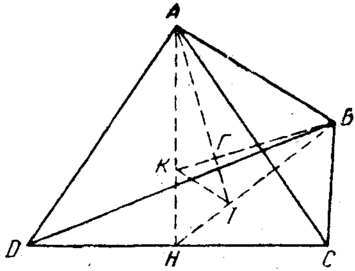
Тогда, принимая θ за переменную интегрирования и выполняя интегрирование вдоль дуги AB, получим:

$$s\xi = a^2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta\, d\theta = 2a^2 \sin\theta_0 = ac.$$

Следовательно, *центр тяжести дуги окружности лежит на радиусе, проведенном через середину дуги, в точке, расстояние которой от центра окружности есть четвертая пропорциональная длины дуги, радиуса и хорды.*

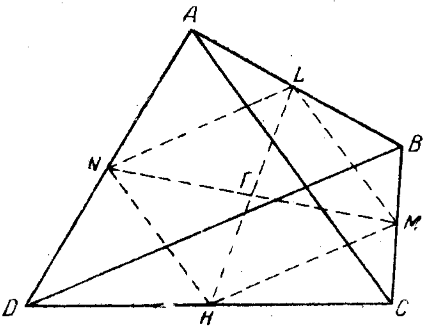
222. Круговой сектор. — Сектор, заключенный между дугой окружности и двумя радиусами OA и OB, может быть разложен промежуточными радиусами на бесконечно малые равные между собою секторы. Эти элементарные секторы можно рассматривать как бесконечно узкие треугольники; центр тяжести каждого из них, по предыдущему, лежит на радиусе, проведенном через середину элементарной дуги этого сектора, на расстоянии двух третей длины радиуса от центра окружности. Равные между собою массы всех элементарных треугольников, сосредоточенные в их центрах тяжести, образуют однородную дугу окружности, радиус которой равен двум третям радиуса дуги сектора. Рассматриваемый случай приводится, таким образом, к отысканию центра тяжести этой однородной дуги, т. е. к задаче, решенной в предыдущем n°.

223. Тетраэдр. — Определим центр тяжести объема тетраэдра. Плоскость, проходящая через одно из ребер и через середину противоположного ребра, есть диаметральная плоскость, которая делит пополам хорды, параллельные этому последнему ребру: она содержит поэтому центр тяжести объема тетраэдра. Следовательно, *шесть плоскостей тетраэдра, из которых каждая проходит через одно из ребер и через середину противоположного ребра, пересекаются в одной точке, представляющей собой центр тяжести объема тетраэдра.*



Фиг. 37.

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ (фиг. 37); соединим вершину A с центром тяжести I основания BCD; прямая AI есть пересечение диаметральных плоскостей, проходящих через ребра AB и AC; поэтому она содержит искомый центр тяжести. Точка I находится на расстоянии двух третей медианы BH от вершины B. Точно так же возьмем на медиане AH точку K на расстоянии двух третей ее длины от вершины A. Прямая BK пересечет прямую A в центре тяжести тетраэдра. Проведем IK; из подобия треугольников ABH и KIH видно, что IK есть третья



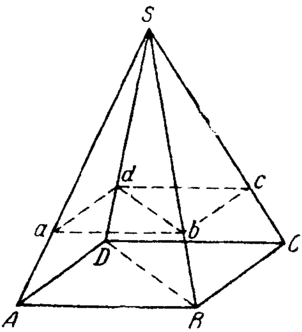
Фиг. 38.

часть AB; далее, из подобия треугольников $KГI$ и $BГA$ заключаем, что $ГI$ есть третья часть $AГ$. Следовательно, *центр тяжести объема тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем любую вершину тетраэдра с центром тяжести противоположной грани, на расстоянии трех четвертей длины этого отрезка от вершины.*

Заметим еще, что прямая, соединяющая середины H и L двух противоположных ребер (фиг. 38) есть пересечение диаметральных плоскостей, проходящих через эти ребра, она также проходит через центр тяжести тетраэдра. Таким образом, *три прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в его центре тяжести.*

Пусть H и L—середины одной пары противоположных ребер (фиг. 38) и M, N—середины двух других противоположных ребер. Фигура $HNLM$ есть параллелограм, стороны которого соответственно параллельны остальным двум ребрам. Прямые HL и MN, соединяющие середины двух противоположных ребер, суть диагонали этого параллелограма, а значит, они в точке пересечения делятся пополам. Таким образом, *центр тяжести тетраэдра лежит в середине отрезка, соединяющего середины двух противоположных ребер тетраэдра.*

224. Пирамида с многоугольным основанием. — *Центр тяжести пирамиды лежит на отрезке, соединяющем вершину пирамиды с центром тяжести основания на расстоянии трех четвертей длины этого отрезка от вершины.*



Фиг. 39.

Чтобы доказать эту теорему, разложим пирамиду на тетраэдры плоскостями, проведенными через вершину пирамиды и через диагонали основания $ABCD$ ... (например BD на фиг. 39). Проведем плоскость $abcd$ ..., пересекающую ребра на расстоянии трех четвертей их длины от вершины. Эта плоскость содержит центры тяжести тетраэдров, а следовательно, и пирамиды. Массы тетраэдров, которые мы предполагаем сосредоточенными в их центрах тяжести, пропорциональны их объемам, следовательно и площадям из оснований $BAD, BCD, \ldots$ (фиг. 39) или также площадям треугольников bad, $bcd, \ldots$, подобных предыдущим и расположенным в секущей плоскости $abcd\ldots$ Таким образом, искомый центр тяжести совпадает с центром тяжести многоугольника $abcd$. Последний же лежит на прямой, соединяющей вершину S пирамиды с центром тяжести (подобно расположенным) многоугольника основания.

225. Призма. Цилиндр. Конус. — На основании симметрии, центры тяжести призмы и цилиндра лежат на середине отрезка, соединяющего центры тяжести оснований.

Рассматривая конус, как предел вписанной в него пирамиды с той же вершиной, убеждаемся, что центр тяжести конуса лежит на отрезке, соединяющем вершину конуса с центром тяжести основания, на расстоянии трех четвертей длины этого отрезка от вершины. Можно также сказать, что центр тяжести конуса совпадает с центром тяжести сечения конуса плоскостью, параллельной основанию и проведенной на расстоянии одной четверти высоты конуса от основания.

§ 4. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ ГЮЛЬДЕНА

226. Центр тяжести поверхности вращения. — Рассмотрим поверхность вращения, образованную вращением дуги плоской кривой AB вокруг оси, лежащей в ее плоскости, примем ось вращения за ось Ox. Центр тяжести, очевидно, лежит на этой оси, являющейся осью симметрии; остается, следовательно, только определить положение центра тяжести на оси.

Проведем ось Oy перпендикулярно к Ox в плоскости кривой. Пусть x_0 и x_1 — абсциссы концов A и B дуги AB, и

$$y = f(x)$$

— уравнение кривой.

Пусть S — площадь поверхности вращения, dS — бесконечно малый элемент поверхности с абсциссой x. Абсцисса ξ искомого центра тяжести определяется общей формулой (n° 216):

$$S\xi = \iint\limits_S x\,dS.$$

Сначала можно просуммировать все элементы dS, имеющие одну и ту же абсциссу и заключенные между двумя плоскостями, перпендикулярными к Ox, с абсциссами x и $x + dx$. Эти плоскости вырезают на дуге AB элемент ds а сумма рассматриваемых элементов dS равна поверхности, образованной вращением элемента ds кривой, имеющего, ординату y. Эта поверхность представляет собой полосу шириной ds и длиной $2\pi y$; ее площадь равна поэтому $2\pi y\,ds$. После этого остается лишь просуммировать по всем элементам ds, и формула приобретает вид:

$$S\xi = 2\pi \int_s xy\,ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} xy \frac{ds}{dx}\,dx.$$

С другой стороны, площадь S равна сумме площадей $2\pi y\,ds$ всех полос:

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \frac{ds}{dx}\,dx.$$

Применим эти формулы к частному случаю.

227. Сферический пояс. — *Сферическим поясом* называют часть поверхности сферы, заключенную между двумя параллельными плоскостями. Сферический пояс представляет собой, следовательно, поверхность, образованную вращением дуги AB окружности вокруг диаметра Ox. Его площадь и центр тяжести определяются поэтому предыдущими формулами.

Пусть a — радиус, тогда уравнение окружности будет

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

отсюда

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad dy = -\frac{x}{y}\,dx,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{a\,dx}{y};$$

следовательно,

$$y\frac{ds}{dx} = a.$$

Пусть x_0 и x_1 — абсциссы двух параллельных плоскостей, проведенных через концы A и B образующей дуги пояса;

формулы предыдущего n° принимают вид:

$$S\xi = 2\pi a \int_{x_0}^{x_1} x\, dx = \pi a (x_1^2 - x_0^2),$$

$$S = 2\pi a \int_{x_0}^{x_1} dx = 2\pi a (x_1 - x_0);$$

отсюда, разделив эти равенства почленно, получим:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Итак, *центр тяжести сферического пояса лежит в середине отрезка, соединяющего центры двух оснований.*

228. Теоремы Гюльдена.— Пусть AB есть дуга плоской кривой, отнесенной к двум прямоугольным осям Ox и Oy. Ордината центра тяжести дуги определяется формулой

$$s\eta = \int_{s} y\, ds,$$

где интеграл распространен по дуге AB.

С другой стороны, площадь поверхности вращения S, образованной той же дугой при ее вращении вокруг Ox, равна

$$S = 2\pi \int_{s} y\, ds.$$

Исключая интеграл, получаем

$$S = s 2\pi\eta.$$

Отсюда имеем первую теорему Гюльдена:

Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг прямой, лежащей в ее плоскости, равна произведению длины дуги на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

Рассмотрим далее плоскую фигуру с площадью S, отнесенную к двум прямоугольным осям Ox и Oy; ордината η ее центра тяжести определяется формулой

$$S\eta = \int_S y\, dS,$$

где интеграл распространен на все элементы dS площади S.

Предположим, что площадь S заставляют вращаться вокруг оси Ox. Допустим при этом, что площадь S целиком расположена по одну сторону от этой оси. Элемент площади dS с ординатой y опишет кольцевой бесконечно тонкой объем, измеряемый произведением площади его сечения dS на его длину $2\pi y$.

Объем V тела, образованного вращением всей площади S, выразится интегралом от всех элементарных объемов:

$$V = 2\pi \int_S y\, dS.$$

Исключая из двух предыдущих равенств интеграл, получим:

$$V = S \cdot 2\pi\eta.$$

Отсюда имеем вторую теорему Гюльдена:

Объем, образованный вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры вне ее, равен произведению площади фигуры S на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

229. Поверхность и объем тора. — Теоремы Гюльдена позволяют непосредственно определить поверхность и объем тора.

Тор есть кольцевая фигура, образованная вращением круга радиуса a вокруг прямой, расположенной в плоскости круга на расстоянии $c > a$ от его центра. Геометрический центр круга есть в то же время его центр тяжести; при вращении вокруг оси он опишет окружность длиной $2\pi c$. Длина окружности и площадь образующего круга равны соответственно $2\pi a$ и πa^2.

Площадь поверхности тора равна поэтому, на основании первой теоремы Гюльдена:

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi c = 4\pi^2 ac;$$

объем тора, в силу второй теоремы Гюльдена, равен:

$$V = \pi a^2 \cdot 2\pi c = 2\pi^2 a^2 c.$$

ГЛАВА X

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 1. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБРАТИМЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ

230. Содержание принципа. — Принцип виртуальных работ, или виртуальных перемещений в первый раз в его общей форме был высказан Лагранжем; он дал общее правило для определения условий равновесия материальных систем без трения и привел его к общему уравнению, выражающему эти условия. Это уравнение носит название *общего уравнения статики*. Мы будем называть *аналитической статикой* ту часть статики, которая основана на применении принципа виртуальных работ.

231. Определения. Виртуальное перемещение и виртуальная работа. — Пусть M есть материальная точка, к которой приложена в числе других сила F. Предположим, что этой точке сообщают произвольное бесконечно малое совместимое со связями перемещение $\overrightarrow{MM'}$: это перемещение называют *виртуальным перемещением точки*, в отличие от *действительного перемещения*, которое точка получает на самом деле под действием приложенных к ней сил. Элементарную работу силы F на перемещении $\overrightarrow{MM'}$ называют *виртуальной работой* F на этом перемещении. Виртуальная работа равняется, таким образом, скалярному произведению двух векторов F и $\overrightarrow{MM'}$. Мы будем записывать это произведение в виде

$$(F\overrightarrow{MM'}),$$

так что будем иметь

$$(F\overrightarrow{MM'}) = F \cdot MM' \cos(F, \overrightarrow{MM'}).$$

К понятию виртуальной работы можно применить все то, что было сказано о работе в динамике точки.

Перемещение $\overrightarrow{MM'}$ обозначают также через $\delta \boldsymbol{s}$, чтобы отличить его от действительного бесконечно малого перемещения $d\boldsymbol{s}$ точки M. Подобно тому как проекции вектора $d\boldsymbol{s}$ на оси суть dx, dy, dz, проекции вектора $\delta \boldsymbol{s}$ обозначаются через δx, δy, δz.

Бесконечно малые величины, отмеченные знаком d, представляют собою дифференциалы, и в дальнейшем мы сохраним за ними это название; величины же, отмеченные знаком δ, мы будем называть *вариациями*, чтобы отличить их от дифференциалов.

Если обозначить через X, Y, Z проекции на оси силы $\boldsymbol{F}$, то аналитическое выражение виртуальной работы на перемещении $\delta \boldsymbol{s}$ будет:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Предположим, что виртуальное перемещение $\delta \boldsymbol{s}$ происходит за бесконечно малый промежуток времени δt; вектор

$$\boldsymbol{v} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\delta t} = \frac{\delta \boldsymbol{s}}{\delta t},$$

направленный и ориентированный, как $\overrightarrow{MM'}$, называется *виртуальной скоростью*, сообщенной точке M. Виртуальную работу силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $\overrightarrow{MM'}$ можно записать также, заменяя $\overrightarrow{MM'}$ через $\boldsymbol{v}\delta t$,

$$Fv\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v})\ \delta t,$$

так как угол силы $\boldsymbol{F}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$ тот же, что и с перемещением $\overrightarrow{MM'}$.

Если обозначить через v_x, v_y, v_z проекции виртуальной скорости $\boldsymbol{v}$, имеющие значения

$$v_x = \frac{\delta x}{\delta t}, \quad v_y = \frac{\delta y}{\delta t}, \quad v_z = \frac{\delta z}{\delta t},$$

то виртуальная работа силы F может быть также написана в виде

$$(Xv_x + Yv_y + Zv_z)\,\delta t,$$

или в виде скалярного произведения

$$(\boldsymbol{Fv})\,\delta t.$$

232. Основная лемма и формулировка принципа для систем с обратимыми перемещениями без трения. — Принцип виртуальных перемещений допускает две различные формулировки в зависимости от природы связей, наложенных на систему, т. е. в зависимости от того, будут ли связи двусторонними или односторонними.

Мы будем предполагать во всем дальнейшем, что связи *не зависят от времени и действуют без трения.*

Когда говорят, что связи не зависят от времени, то выражают этим тот факт, что положения и конфигурации, которые связи допускают для системы, не зависят от времени и что элементарные перемещения, совместимые со связями, зависят лишь от положения и конфигурации системы, но не от времени.

Это условие проще всего осуществляется, если связи выражены уравнениями между координатами точек системы, не содержащими времени.

При этом необходимо различать два случая. Связи могут быть такими, что они, допуская для системы какое-нибудь перемещение, допускают и противоположное, т. е. такое, при котором перемещение каждой точки лишь изменяет свою ориентацию. Это имеет место в том случае, когда связи выражены уравнениями (конечными или дифференциальными) между координатами точек системы. Мы будем говорить в этом случае, что перемещения системы *обратимы* и что связи *двусторонние*, или *удерживающие.*

Но может также случиться, что связи, допуская некоторые перемещения, не допускают им противоположных. В этом случае связи называются *односторонними, или неудерживающими.* Это будет иметь место, когда связи выражаются неравенствами. Например, когда некоторое твердое тело лежит на столе, то мы можем поднять его вверх, движение же в противоположную сторону невозможно. Мы оставим пока в стороне такие случаи и сформулируем принцип только для систем с обратимыми перемещениями.

Разделим, как и прежде, силы, действующие на точки системы, на два класса: *прямо приложенные*, или *данные*, или также *активные силы*, которые можно по желанию приложить к системе, и *силы связи*, или *реакции связей*, которые возникают в системе автоматически как следствие первых сил, из-за наличия связей.

Принцип виртуальных перемещений для систем с обратимыми перемещениями может быть теперь сформулирован так:

Принцип. — *Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы при всяком совместимом со связями (виртуальном) перемещении системы сумма элементарных работ прямо приложенных сил была равна нулю.*

Доказательство этого принципа основывается на следующей лемме.

Основная лемма. — *Реакции связей, действующих без трения, обладают тем свойством, что сумма их работ на всяком виртуальном перемещении равна нулю; в частности это верно и для действительных перемещений.*

Эта лемма представляет собой индуктивное обобщение известных нам физических фактов. Мы увидим в следующих параграфах, как можно ее проверить на большом числе частных случаев. Можно, однако, становясь на общую точку зрения и в целях логического изложения, рассматривать эту лемму как определение связей, действующих без трения (идеальных связей).

233. Доказательство принципа виртуальных перемещений. — Рассмотрим систему материальных точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$, подчиненных данным связям и находящихся под действием прямо приложенных сил. Требуется доказать, что для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ прямо приложенных сил на всяком виртуальном перемещении, была равна нулю.

Прежде всего, это условие необходимо. Действительно, если равновесие имеет место, то каждая точка M находится в равновесии под действием всех приложенных к ней сил, как данных, так и реакций связей. Эти силы имеют поэтому равнодействующую, равную нулю, и сумма их элементарных работ равна нулю для любого перемещения точки. Такое же заключение справедливо для каждой точки, поэтому сумма элементарных работ всех сил равна нулю для всякого перемещения системы, совместимо оно со связями или нет. Если же рассматривать только перемещения, совместимые со связями, то на них сумма элементарных работ реакций связи в отдельности равна нулю на основании предыдущей леммы, и, следовательно, сумма элементарных работ прямо приложенных сил тоже равна нулю.

С другой стороны, высказанное условие и достаточно. Предположим, что система предоставлена, без начальных скоростей, действию прямо приложенных сил. Тогда можно утверждать, что если условие имеет место, система будет в равновесии, т. е. что равнодействующая всех сил, действующих на какую-нибудь точку системы, будет равна нулю для каждой точки.

Предположим противное, т. е. что равновесия не будет. Так как начальные скорости равны нулю, то точки, не находящиеся в равновесии, переместятся по направлению равнодействующей сил для каждой точки, и это *действительное* перемещение будет совместимо со связями, так как оно выполняется на самом деле. Дадим системе виртуальное перемещение, совпадающее с этим действительным перемещением; сумма элементарных работ всех сил на нем будет положительна, так как каждая точка перемещается в сторону равнодействующей, приводящей точку в движение. Но работа сил связи равна нулю на основании леммы, так как рассматриваемое перемещение совместимо со связями; поэтому работа прямо приложенных сил положительна, что противоречит условию.

234. Применение принципа виртуальных перемещений к случаю точки, которая может двигаться без трения по неподвижной кривой или поверхности. — Если точка M может двигаться без трения по неподвижной кривой или поверхности, то сила связи представляет собой нормальную реакцию этой кривой или поверхности. Поэтому выполнение основной леммы здесь очевидно. Реакция в этом случае не производит работы на перемещении, совместимом со связью, ибо последнее, будучи расположено на линии или поверхности, перпендикулярно к реакции связи.

Принцип возможных перемещений может быть поэтому применен в данном случае, и мы сейчас убедимся, что он приводит к условию равновесия.

Если точка M может двигаться по кривой, то работа силы F, приложенной к точке, на перемещении точки по кривой может обратиться в нуль лишь в том случае, когда эта сила равна нулю или нормальна к кривой, в этом именно и заключается необходимое и достаточное условие равновесия точки на кривой.

Если точка может двигаться по поверхности, то работа силы $\boldsymbol{F}$ может быть равна нулю при любом направлении перемещения точки на поверхности лишь в том случае, когда сила равна нулю или нормальна ко всем этим перемещениям, т. е. когда сила направлена по нормали к поверхности; в этом именно и заключается необходимое и достаточное условие равновесия точки на поверхности.

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К РАВНОВЕСИЮ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

235. Одно свойство эквивалентных систем сил: эквивалентность систем сил с точки зрения работы, произведенной над твердым телом. — Силы связи в свободном твердом теле представляют собой равные и прямо противоположные действия и противодействия, которые попарно оказывают друг на друга точки тела;

эти силы взаимодействия удерживают точки тела на неизменных расстояниях между собой. Лемма, которая служит основанием для принципа виртуальных перемещений, оправдывается для этих сил связи, в силу следующей общей теоремы:

Теорема. — *Если две системы сил, приложенных в определенных точках твердого тела, эквивалентны друг другу, то сумма элементарных работ сил одна и та же для обеих систем, каково бы ни было элементарное перемещение тела.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что сумма работ сил, входящих в данную систему, не изменяется, когда над этой системой выполняют одну из элементарных операций.

Эта инвариантность уже установлена для сложения и разложения сил, приложенных к одной и той же точке твердого тела. Остается только проверить ее для одной из двух последних элементарных операций (так как они приводятся одна к другой), например, для переноса силы F в какую-нибудь точку M линии ее действия.

Эта проверка непосредственно очевидна. В самом деле, элементарная работа силы F, приложенной в точке M, равна произведению $F\delta t$ на проекцию скорости точки M на направление силы F. Но эта проекция одна и та же для всех точек M линии действия силы F: она равна скорости *скольжения* этой прямой ($n^\circ 61$).

Из этой теоремы вытекает высказанное в начале этого n° следствие, относящееся к работе сил связи:

Следствие: — *При всяком виртуальном перемещении твердого тела сумма виртуальных работ сил связи равна нулю.*

В самом деле, силы связи, будучи равными и прямо противоположными друг другу, образуют систему, эквивалентную нулю, и потому сумма их элементарных работ обращается в нуль. Таким образом, каково бы ни было перемещение твердого тела, достаточно учитывать лишь работу прямо приложенных сил.

19 Зак. 958.

236. Элементарная работа пары сил, действующей на твердое тело. — Пусть на твердое тело действует пара с осевым моментом $\boldsymbol{G}$. Дадим этому телу элементарное перемещение, происходящее в течение бесконечно малого промежутка времени δt.

Движение твердого тела приводится к мгновенному поступательному движению со скоростью $\boldsymbol{u}$ и к мгновенному вращению с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Вращение $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбранного центра приведения, и $\boldsymbol{\omega}\delta t$ есть элементарный угол, на который тело поворачивается за бесконечно малый промежуток времени δt. Будем называть вектор $\boldsymbol{\omega}\delta t$ элементарным вращением твердого тела. Мы имеем тогда следующую теорему:

Теорема. — *Элементарная работа пары $\boldsymbol{G}$, приложенной к твердому телу, которому сообщено какое-нибудь элементарное перемещение, равна скалярному произведению осевого момента пары на элементарное вращение тела, т. е.*

$$(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega})\,\delta t.$$

Для доказательства теоремы возьмем начало координат на линии действия одной из сил пары; пусть $\boldsymbol{P}$ — другая сила, имеющая проекции X, Y, Z и приложенная в точке (x, y, z). Проекции G_x, G_y, G_z момента $\boldsymbol{G}$ пары на оси приводятся к моментам силы $\boldsymbol{P}$ относительно этих осей, т. е. к

$$G_x = yZ - zY, \quad G_y = zX - xZ, \quad G_z = xY - yX.$$

Выберем начало координат за центр приведения движений твердого тела. Мгновенное движение тела приводится к поступательному движению со скоростью $\boldsymbol{u}$ и к вращению с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг начала. При поступательном перемещении тела сумма работ сил пары равна нулю, поэтому работа пары приводится к работе, произведенной при элементарном вращении $\boldsymbol{\omega}\delta t$, т. е. к работе силы $\boldsymbol{P}$ при этом вращении. Эта элементарная работа выражается в виде

$$(Xv_x + Yv_y + Zv_z)\,\delta t,$$

где v_x, v_y, v_z суть проекции скорости точки (x, y, z) приложения силы $\boldsymbol{P}$ при вращении $\boldsymbol{\omega}$. Обозначив через p, q, r проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси, можем написать:

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx;$$

подставляя эти значения в выражение для элементарной работы, получим:

$$[p(yZ - zY) + q(zX - xZ) + r(xY - yX)]\,\delta t,$$

т. е.

$$(pG_x + qG_y + rG_z)\,\delta t = (\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega})\,\delta t,$$

что и доказывает теорему.

237. Сумма элементарных работ сил, приложенных к твердому телу. — Возьмем произвольную точку O твердого тела за центр приведения данных сил и движений тела. Силы приводятся к результирующей силе $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке O, и к паре с моментом $\boldsymbol{G}$. Движение тела приводится к мгновенному поступательному движению со скоростью $\boldsymbol{u}$ точки O и к мгновенному вращению $\boldsymbol{\omega}$. Элементарное перемещение точки O есть $\boldsymbol{u}\delta t$, элементарное вращение равно $\boldsymbol{\omega}\delta t$.

Отсюда имеем следующую теорему:

Сумма элементарных работ сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарной работы результирующей $\boldsymbol{R}$, приложенной к точке O:

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\,\delta t,$$

и элементарной работы результирующей пары $\boldsymbol{G}$:

$$(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega})\,\delta t.$$

Сумма этих работ есть

$$[(\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega})]\,\delta t.$$

В частности, если результирующий момент сил, приложенных к твердому телу, относительно точки O равен нулю, то сумма элементарных работ этих сил приводится к работе результирующей силы, приложенной в точке O, которая предполагается при этом связанной с твердым телом.

238. Применение принципа виртуальных перемещений к равновесию свободного твердого тела. — Так как основная лемма выполняется в случае свободного твердого тела, то принцип виртуальных перемещений может быть применен к выводу условий равновесия тела. Необходимое и достаточное условие равновесия заключается в том, что сумма элементарных работ сил, прямо приложенных к телу, должна быть равна нулю на всяком виртуальном перемещении, т. е. в данном случае, на самом общем перемещении свободного твердого тела.

На основании полученного выше выражения работы, для равновесия необходимо и достаточно, чтобы при любой скорости поступательного движения $\boldsymbol{u}$ и любом вращении $\boldsymbol{\omega}$ имело место условие

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{R}) + (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{G}) = 0. \qquad (1)$$

Так как $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ произвольны, то можно положить $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{G}$, что приводит уравнение (1) к виду $R^2 + G^2 = 0$, откуда $R = G = 0$. Мы вновь получаем, таким образом, известное условие равновесия. *Для равновесия свободного твердого тела необходимо и достаточно, чтобы силы, прямо приложенные к телу, составляли систему векторов, эквивалентную нулю.*

Заметим, что так как $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{G}$ представляют собою результирующую силу и результирующий момент для центра приведения O, то условие $\boldsymbol{R} = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы сумма элементарных работ сил была равна нулю для всякого виртуального поступательного перемещения твердого тела, а условие $\boldsymbol{G} = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы сумма элементарных работ была равна нулю для всякого виртуального вращения тела вокруг точки O. Именно из этих соображений и говорят, что $R=0$ есть условие равновесия *для поступательного движения*, а $G=0$ есть условие равновесия *для вращательного движения тела.*

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К РАВНОВЕСИЮ НЕСВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

239. Твердое тело, имеющее неподвижную точку. — Когда твердое тело имеет неподвижную точку, то силы связи представляют собою реакции тех внешних тел, которые обеспечивают неподвижность этой точки. Условие отсутствия трения заключается в том, что реакции эти приводятся к одной результирующей, проходящей через неподвижную точку, без пары. Влияние трения равносильно действию пары, стесняющей свободное вращение вокруг неподвижной точки. В том случае, когда пары нет, сумма виртуальных работ реакций приводится, как мы видим (n° 237), к работе их результирующей, приложенной к неподвижной точке; эта работа равна нулю, так как точка приложения силы неподвижна. Таким образом, в согласии с леммой (n° 232) работа сил связи равна нулю для всех перемещений, совместимых со связями, и потому принцип виртуальных перемещений применим к данному случаю.

Условие равновесия твердого тела выводится отсюда непосредственно. Единственное перемещение, совместимое со связями, есть произвольное вращение $\omega\delta t$ вокруг неподвижной точки. Условие (1) предыдущего n°, выражающее то обстоятельство, что сумма элементарных работ активных сил равна нулю, приводится к виду:

$$(G\omega)=0,$$

в предположении, что неподвижная точка принята за центр приведения (в этом случае $u=0$). Так как направление вектора ω может быть взято произвольным, то $G=0$.

Полученное равенство является необходимым и достаточным условием равновесия твердого тела, имеющего неподвижную точку: *результирующий момент прямо приложенных сил относительно неподвижной точки должен быть равен нулю.*

Замечание. — Закрепление точки может быть осуществлено различными способами. Точка может быть закреплена непосредственно, как в случае волчка, опирающегося концом своей оси о подставку, имеющую углубление, или косвенно, например, при помощи системы осей вращения, как в часто встречающемся случае подвеса Кардана.

240. Тело, имеющее неподвижную ось. — Силами связи являются в данном случае реакции опор, которые удерживают ось неподвижной. Для отсутствия трения, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы эти реакции могли быть приведены к силам, приложенным в точках оси. Тогда, в согласии с леммой, эти силы не будут производить работы при всяком перемещении, совместимом со связями, т. е. оставляющем неподвижными точки оси. Следовательно, принцип виртуальных перемещений применим в этом случае, и условие равновесия может быть из него выведено. Единственное виртуальное перемещение есть вращение $\omega\delta t$ вокруг неподвижной оси. Уравнение (1) n° 238 приводится к виду:

$$(G\omega) = 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы вектор G был равен нулю или перпендикулярен к ω, т. е. перпендикулярен к неподвижной оси. Это приводит к известному условию: *для равновесия твердого тела, имеющего неподвижную ось, необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент прямо приложенных сил относительно этой оси был равен нулю.*

Практически закрепление оси твердого тела достигается прямыми способами. Обычно закрепляются две точки оси, при помощи подшипников и т. п. Можно также закреплять и большее число точек, как это обычно делают для двери, вращающейся на шарнирах.

241. Скольжение, качение и верчение без трения поверхности, связанной с телом, по неподвижной поверхности. — Предположим, что поверхность S, связанная с твердым телом, вынуждена постоянно касаться неподвижной поверхности S', причем точка касания может каким-то образом перемещаться по обеим поверхностям. В этом случае говорят, что две касающиеся друг друга поверхности *скользят*, *катятся* и *вертятся* одна по другой (n° 75).

Силы связи представляют собою в данном случае реакции, приложенные к движущемуся телу и производимые точками неподвижной поверхности, расположенными достаточно близко от точки касания, чтобы между двумя телами могли возникнуть молекулярные взаимодействия.

Говорят, что трения нет, если эти реакции имеют равнодействующую, проходящую через точку касания и нормальную к обеим поверхностям. В этом случае основная лемма верна, так как равнодействующая реакций, приложенная в точке касания движущегося тела, нормальна ко всякому элементарному перемещению этой точки, совместимому со связями (все такие перемещения лежат в общей касательной плоскости к обеим поверхностям), и потому сумма виртуальных работ сил связи равна нулю.

Предположим теперь, что поверхность S, связанная с телом, вынуждена катиться и вертеться без скольжения по неподвижной поверхности S'. Силы связи в этом случае, как и в предыдущем, представляют собою реакции, производимые неподвижной поверхностью. Попрежнему говорят, что трения нет, если эти реакции имеют равнодействующую, проходящую через точку касания; при этом принимают, что равнодействующая приложена в этой точке твердого тела. Но так как скорость точки касания, по предположению, равна нулю при всяком перемещении, совместимом со связями, то работа равнодействующей, приложенной к этой точке, также равна нулю, что согласуется с основной леммой. Следовательно, в этом случае можно применить принцип виртуальных перемещений к выводу условий равновесия тела.

Предположим, наконец, что линейчатая поверхность, связанная с твердым телом, опирается на неподвижную линейчатую поверхность вдоль общей образующей и может только катиться по этой неподвижной поверхности, как это имеет место для катка, катящегося по неподвижной плоскости. Трения нет, если силы связи имеют равнодействующую, проходящую через образующую касания, причем виртуальная работа равнодействующей будет равна нулю при качении тела. Принцип виртуальных перемещений может быть применен в этом случае и даст условия равновесия.

В общем случае, предполагающем скольжение, условие равновесия заключается в том, что прямо приложенные силы имеют равнодействующую, проходящую через точку касания и нормальную к обеим поверхностям. В случае качения и верчения без скольжения необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая прямо приложенных сил проходила через точку касания, но она не обязательно должна быть нормальной к поверхностям. В случае простого качения с образующей касания условие равновесия твердого тела состоит в том, что равнодействующая прямо приложенных сил должна проходить через эту образующую. При этих условиях виртуальная работа сил, приложенных к телу, в самом деле равна нулю, как и работа реакций, и на том же основании.

242. Простое скольжение твердого тела, положенного на неподвижную поверхность. Равновесие винта. — Предположим сначала, что плоская поверхность, связанная с твердым телом, наложена на неподвижную плоскость и может свободно скользить по этой последней, как, например, ползун в своих направляющих. В этом случае говорят, что тело скользит без трения, если реакции неподвижной плоскости на твердое тело приводятся к одной результирующей (без пары), нормальной к обеим плоскостям. Предполагают, что эта результирующая приложена в некоторой точке твердого тела; ее работа на всяком виртуальном перемещении, т. е.

перемещении, параллельном неподвижной плоскости, очевидно равна нулю. Основная лемма, следовательно, верна в этом случае, и применение принципа виртуальных перемещений возможно. Для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы силы, прямо приложенные к телу, имели равнодействующую, нормальную к плоскости, так как в этом случае работа прямо приложенных сил равна нулю на всяком перемещении, совместимом со связями.

Предположим теперь, что некоторая кривая поверхность, связанная с твердым телом, точно накладывается на неподвижную кривую поверхность, по которой она может скользить свободно. Примеры такого рода мы имеем в случае вала, лежащего в подшипниках, или в случае поверхности нарезки винта, опирающегося на нарезку в гайке.

Для отсутствия трения необходимо, чтобы реакции, производимые на поверхность движущегося твердого тела бесконечно малым элементом неподвижной поверхности, имели равнодействующую, проходящую через этот элемент и нормальную к общей касательной плоскости. Эта равнодействующая, будучи приложена в точке твердого тела, которая может скользить по элементу неподвижной поверхности, нормальна к перемещению точки приложения и не производит работы. Таким образом, основная лемма верна, и принцип виртуальных перемещений применим.

Найдем, в качестве приложения, условия равновесия винта, который может двигаться в неподвижной гайке.

Винт в гайке может иметь только винтовое движение, при котором он вращается вокруг своей оси и в то же время двигается поступательно и равномерно вдоль этой оси. Длина p, на которую он перемещается вдоль оси за время одного полного оборота, называется *шагом* винта.

Приведем силы, прямо приложенные к винту, к силе $\boldsymbol{R}$, приложенной в какой-либо точке оси, и к паре с моментом $\boldsymbol{G}$. Пусть $\boldsymbol{u}$ — скорость виртуального поступательного перемещения и $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость виртуального вращения, сообщенных винту при винтовом движении; оба вектора направлены по оси винта. Условие равновесия будет иметь вид:

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Пусть R' есть проекция силы $\boldsymbol{R}$ на ось винта и M — результирующий момент пары относительно этой оси, на которой выбрана положительная ориентация. Предыдущее векторное уравнение может быть написано в алгебраической форме:

$$R'u + M\omega = 0,$$

откуда

$$\frac{M}{R'} = -\frac{u}{\omega} = \frac{-p}{2\pi}.$$

Таким образом, *для равновесия винта необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент активных сил относительно оси винта, с одной стороны, и сумма проекций сил на эту ось, с другой стороны, находились между собой в отношении шага винта к* 2π *и имели, кроме того, противоположные знаки.*

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К МЕХАНИЗМАМ. РАВНОВЕСИЕ ПРОСТЫХ МАШИН

243. Предварительная проверка основной леммы. — Механизмы представляют собой соединения твердых тел, подчиненных некоторым связям. Тела, входящие в состав механизмов, могут опираться на неподвижные тела или друг на друга, они могут также быть связанными между собой шарнирами, цепями, нитями, ремнями и т. п.

Необходимо убедиться, что основная лемма верна для этих различных видов связей. Мы сделали это уже для неподвижных опор. Рассмотрим теперь случай, когда два тела связаны между собой шарниром или опираются одно на другое в общей точке или вдоль общей линии или поверхности. Возьмем одно из двух тел за подвижную систему отсчета; работа сил взаимодействия этих тел на абсолютном перемещении равна сумме работ тех же сил на перемещениях: переносном и относительном. В переносном движении оба тела движутся как одна неизменяемая система, и работы сил действия и противодействия, равные по величине и противоположные по знаку, дают в сумме нуль. Остается определить лишь работу сил, действующих со стороны тела, принятого за подвижную систему отсчета, на движущееся тело, что приводит к случаю, разобранному в предыдущем n^0. Таким образом, если трения нет, то виртуальная работа сил связи равна нулю для всякого перемещения, совместимого с условиями, наложенными на систему.

Цепи составляются из колец, представляющих собой твердые тела, которые могут скользить, катиться и вертеться одни по другим, а также по другим телам, неподвижным или движущимся, таким как блоки, барабаны и т. п. Так как цепи натянуты (что всегда предполагается), то все предыдущие рассуждения можно применить и к этому виду связей.

Связи между различными звеньями механизма могут осуществляться также нитями или шнурами, которые рассматривают как идеально гибкие и нерастяжимые. Когда говорят, что нить идеально *гибкая* и *нерастяжимая*, под этим понимают: 1^0 что нить совершенно не имеет *жесткости*, т. е. не оказывает никакого сопротивления обвертыванию ее вокруг цилиндра или блока; 2^0 что длины элементарных дуг между двумя бесконечно близкими точками нити остаются неизменными при различных деформациях нити. Материальные точки нити, достаточно близкие для того, чтобы между ними могли действовать молекулярные силы, сохраняют при этом расстояния между собою неизменными. Это заключение может быть законным, очевидно, лишь при том условии, если сечение нити достаточно мало, и им можно пренебречь по сравнению с радиусами кривизны, которые нить вынуждена иметь при наматывании ее на цилиндр.

К такому виду связей относятся шнурки, канаты, тросы, ремни и т. п. Относительно всех этих видов связей можно повторить то, что только что было сказано о нити, однако с тем меньшей степенью практической точности, чем больше сечения.

Принцип виртуальных перемещений можно поэтому применять ко всякой системе, связи которой относятся к только что рассмотренным нами категориям. Таковы, например, блоки подвижные и неподвижные, зубчатые колеса, валы, оси, подшипники (в частности, шариковые) и т. д.

Машиной называют всякий механизм, служащий для уравновешивания одной силы, называемой *сопротивлением*, посредством другой, которая называется *движущей силой*. Если передаточные звенья машины принадлежат к различным рассмотренным здесь видам связей, то принцип виртуальных перемещений может быть применен для вывода условий равновесия. Мы будем предполагать, что это имеет место, и выведем принцип Галилея, относящийся к равновесию машин.

244. Равновесие простых машин. Принцип Галилея. — Простые машины представляют собою системы с полными связями. Под этим подразумевают, что положение всех частей машины полностью определяется положением одной из ее точек, причем сама эта точка может двигаться только по определенной кривой. Положение машины может быть поэтому определено при помощи только одного параметра, фиксирующего положение указанной точки на ее траектории.

Рассмотрим подобную машину, находящуюся под действием двух прямо приложенных сил: *движущей силы* P, приложенной в точке A, и *сопротивления* R, приложенного в точке B. Чтобы вывести условие равновесия, сообщим машине некоторое виртуальное перемещение. Пусть в этом виртуальном перемещении u есть скорость точки A и v — скорость точки B; условие равновесия заключается в том, что сумма виртуальных работ сил P и R должна быть равна нулю, т. е.

$$[(Pu) + (Rv)]\, \delta t = 0.$$

Пусть u' и v' — алгебраические значения проекций скоростей $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ на направления сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно; тогда предыдущее векторное соотношение приводится к алгебраическому уравнению

$$Pu' + Rv' = 0, \text{ откуда } \frac{P}{R} = -\frac{v'}{u'}.$$

При равновесии движущая сила и сопротивление находятся между собою в отношении, обратном отношению проекций соответствующих скоростей их точек приложения на направления этих сил. Это условие можно выразить в виде следующего правила, сформулированного еще Галилеем: *что выигрывается в силе, то теряется в скорости.*

К основным видам простых машин, применяемых в технике, к которым, если пренебречь трением, может быть приложено предыдущее правило, относятся рычаг, блоки, неподвижный и подвижный, ворот, приводимый в движение непосредственно рукояткой или посредством зубчатых колес, различные типы весов, винт, бесконечный винт, домкрат, представляющий собою комбинацию винта с рычагом, и т. д. Подробный обзор машин такого рода был бы, однако, более уместен в курсе машиноведения, нежели здесь.

В частности, можно было бы применить предыдущее правило к машинам, предназначенным для поднятия грузов и приводимым в действие рукояткой. Движущая сила в этом случае действует на рукоятку в сторону ее перемещения, сопротивление же есть вес груза. Движущая сила и сопротивление находятся в отношении, обратном отношению скорости, сообщенной рукоятке, к скорости поднятия груза.

В действительности, движущие силы, определенные на основании указанного теоретического правила, должны быть значительно увеличены, так как трение далеко не так ничтожно, чтобы им можно было пренебречь. Желая дать читателю некоторое представление о влиянии трения, укажем в качестве примера, что в случае неподвижного блока движущую силу необходимо увеличить приблизительно на 20%, в случае винта, движущегося в гайке, — на 50%, в случае бесконечного винта — на 60%. Изучение простых машин с учетом трения не относится уже к теоретической механике, оно составляет одну из задач теории механизмов. Мы, однако, скажем несколько слов о трении в следующей главе.

245. К вопросу о сочлененных системах. Теорема Мориса Леви. — Плоская стержневая система (n° 201) называется *строго неизменяемой*, если достаточно удалить из нее только один стержень, чтобы сделать ее изменяемой. Кроме того, она представляет собой систему *мгновенно изменяемую*, если отбрасывание только одного стержня уже позволяет при помощи бесконечно малого изменения системы сблизить между собой или удалить друг от друга два узла, которые этот стержень соединял. Теорема Мориса Леви утверждает, что при этих условиях усилия, действующие на стержни, не зависят от деформаций и определяются на основании общих принципов статики. Докажем эту теорему, применяя принцип виртуальных перемещений.

Пусть требуется определить усилия, действующие на стержень AB. Закрепим сначала один из стержней системы, отличных от AB и оканчивающихся в точке A, тогда система будет неподвижна в своей плоскости. Если отбросим после этого стержень AB и заменим его силой $\boldsymbol{P}$, с которой он действует на точку B, то получим систему с полными связями, находящуюся в равновесии. Дадим системе бесконечно малое виртуальное перемещение, и пусть δr — изменение длины AB при этом перемещении. Работа силы $\boldsymbol{P}$ (если считать P положительной в случае растяжения) будет $-P\delta r$; пусть, с другой стороны, виртуальная работа сил, прямо приложенных к узлам системы, обозначена через $\mathcal{T}$. Условие равновесия сил имеет вид:

$$-P\delta r + \mathcal{T} = 0, \text{ откуда } P = \frac{\mathcal{T}}{\delta r},$$

и P определяется этой формулой.

Следует заметить, что это доказательство с таким же успехом можно применить и к пространственным стержневым системам.

§ 5. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ СТАТИКИ

246. Общее уравнение статики. — Рассмотрим систему из n материальных точек

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots M_n(x_n, y_n, z_n),$$

подчиненных связям, которые выражаются уравнениями, не содержащими времени. Связи предполагаются свободными от трения, так что принцип виртуальных перемещений оказывается применимым.

Пусть F_i есть равнодействующая сил, прямо приложенных к точке M_i, и X_i, Y_i, Z_i — ее проекции на оси координат. Пусть далее δs_i есть виртуальное перемещение точки M_i и δx_i, δy_i, δz_i — его проекции на те же оси. На основании принципа виртуальных перемещений необходимые и достаточные условия равновесия выражаются уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i \delta s_i) = 0, \tag{1}$$

которое обычно пишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \tag{1'}$$

Это уравнение должно иметь место для всех виртуальных перемещений δx_i, δy_i, δz_i.

Уравнение (1) носит название *общего уравнения статики*. Но оно может применяться лишь к системам с обратимыми движениями и со связями без трения. Мы рассмотрим далее различные методы исключения вариаций и определения положений равновесия в случаях, когда силы известны и зависят только от положения точек системы.

247. Голономные системы. — Связь называется *голономной*, если она выражается уравнением в конечной форме между координатами точек системы. Система, все связи которой голономны, называется *голономной системой*.

Каждая голономная связь отнимает у системы одну из её степеней свободы и уменьшает, следовательно, число возможных положений. Однако существуют связи, не входящие в эту категорию. Они уменьшают не число возможных *положений* системы, а лишь число *движений*, которые переводят систему из одного данного положения в другое.

Так, можно связать две точки, движущиеся в плоскости, условием, чтобы их скорости имели одинаковую величину в каждый момент. Эта связь не является голономной, ибо она не ограничивает совокупности возможных положений: два положения первой точки и два положения второй всегда должны быть соединены путями одинаковой длины, пробегаемыми за одинаковое время двумя точками, имеющими равные скорости.

Мы уже встречались со связями, наложенными на твердое тело и не являющимися голономными. Это — классический случай качения и верчения без скольжения поверхности тела по неподвижной поверхности. Эта связь разлагается на две, одна из которых голономна, другая нет. Условие касания двух поверхностей ограничивает число возможных положений тела и голономно; условие того, что скорость точки касания тела с неподвижной поверхностью равна нулю, ограничивает только совокупность движений, которые переводят тело из одного положения в другое, и это условие не является голономным.

Неголономные связи необходимо выражаются дифференциальными *неинтегрируемыми* соотношениями между координатами точек системы.

Первый обратил внимание на различие между этими двумя видами связи физик Г. Герц; он назвал связи первой категории *голономными*, системы же, связи которых не входят в эту категорию, носят с тех пор название *неголономных*. Так как значение их для статики невелико, мы не будем здесь ими заниматься.

Рассмотрим голономную систему n точек. Предположим, что связи выражаются h уравнениями между координатами этих точек:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_h(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

число h уравнений должно быть менее числа $3n$ координат, так как иначе $3n$ координат, а следовательно, и положение системы могли бы быть определены из этих уравнений, и движение было бы невозможно. Положим поэтому

$$h = 3n - k.$$

Если $k = 1$, то говорят, что система с *полными связями*, так как остается лишь одна независимая координата. О такой системе говорят также, что она имеет *одну* степень свободы. В общем случае имеется k координат, значения которых остаются произвольными; их можно рассматривать как независимые параметры, при помощи которых определяется положение системы. В этом случае говорят, что система имеет k степеней свободы.

Вариации координат, совместимые со связями, должны удовлетворять следующим уравнениям, которые получаются полным дифференцированием уравнений (2) в δ:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \ _n}\delta z_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_h}{\partial y_1}\delta y_1 + \dots + \frac{\partial f_h}{\partial z_n}\delta z_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Эти h (или $3n - k$) уравнений между $3n$ вариациями координат показывают, что k из этих вариаций остаются произвольными: мы будем называть их ***независимыми вариациями***; тогда остальные, которые выражаются через них из предыдущих уравнений, будут *зависимыми*.

Зависимые вариации выражаются линейными функциями от k независимых вариаций в результате решения системы (3). Подставим их значения в уравнение (1), представляющее собой общее уравнение статики. Так как это уравнение после указанной подстановки будет содержать лишь k независимых вариаций, то оно должно удовлетворяться при произвольных значениях последних; каждый из k коэффициентов при этих вариациях должен поэтому в отдельности обращаться в нуль. Таким способом мы получаем k уравнений равновесия между координатами точек системы и проекциями прямо приложенных сил. Эти k новых уравнений в соединении с $3n-k$ уравнениями связей (2) определяют значения координат для положений равновесия, если известны прямо приложенные силы; в случае же неизвестных сил, эти силы могут быть определены из тех же уравнений и выразятся, следовательно, как функции от координат точек системы. Тогда говорят, что силы *позиционны*.

248. Метод множителей Лагранжа. Определение реакций. — Исключение вариаций из общего уравнения статики может быть выполнено более изящно применением *метода множителей Лагранжа*. Он заключается в следующем.

Умножим h (или $3n-k$) уравнений (3) соответственно на коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ и сложим с уравнением (1). Определим затем неопределенные множители λ, приравнивая нулю коэффициенты при h зависимых вариациях. Тогда коэффициенты при k независимых вариациях также должны обратиться в нуль. Мы получаем, таким образом, $3n$ совместных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial x_i}=0,\\ Y_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_i}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial y_i}=0,\\ Z_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z_i}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial z_i}=0,\\ (i=1,\ 2,\ldots\ n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Предположим теперь, что силы (X_i, Y_i, Z_i) или известны, или являются чисто *позиционными*, т. е. даны как функции координат точек системы. Уравнения (2) и (4) представляют собой систему $3n+h$ совместных уравнений, позволяющих определить $3n$ неизвестных координат x, y, z и h множителей λ для положения равновесия.

При помощи коэффициентов λ можно определить *силы связи*, т. е. реакции, которые нужно ввести, чтобы заменить то или другое из уравнений (2).

Если отбросить связь $f_1=0$, то для того, чтобы уравнения равновесия (4) остались без изменения, к силе (X_i, Y_i, Z_i), действующей на точку M_i, необходимо присоединить силу, имеющую проекции

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_i}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_i}.$$

Таким образом, эффект связи $f_1=0$ по отношению к точке M_i в точности сводится к действию этой силы. По этой причине указанную силу и называют реакцией, происходящей от связи $f_1=0$. Направляющие коэффициенты этой реакции равны $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y_i}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z_i}$; следовательно, она нормальна к поверхности, выражающейся уравнением

$$f_1(x_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots z_n)=0,$$

если рассматривать в нем координаты x_i, y_i, z_i точки M_i как текущие, а координаты остальных точек как параметры, имеющие данные значения.

П р и л о ж е н и е. — Применим этот способ к случаю точки $M(x, y, z)$, движущейся без трения по поверхности, определяемой уравнением

$$f(x, y, z)=0,$$

предполагая, что проекции X, Y, Z движущей силы выражаются данными функциями от координат x, y, z. Условие равновесия в форме общего уравнения статики имеет вид:

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=0.$$

Оно должно иметь место для всякого перемещения по поверхности, т. е. для перемещения, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0.$$

Умножим это уравнение на λ и сложим его с предыдущим; по методу неопределенных множителей получим, приравнивая нулю коэффициенты при каждой вариации,

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0, \qquad Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Эти три уравнения в соединении с уравнением поверхности определяют четыре неизвестные x, y, z и λ для положения равновесия. Зная λ, находим проекции реакции поверхности в виде

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

Эта реакция нормальна к поверхности, в согласии с общей теорией.

249. Голономные системы в лагранжевых координатах. — Если голономная система n точек имеет k степеней свободы, ее положение определяется k независимыми параметрами. В этом случае можно предположить, что координаты точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ системы выражены в виде явных функций от k параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$ между которыми не существует никакой зависимости, посредством формул:

$$\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1, q_2, \ldots q_k),\\ y_i&=y_i(q_1, q_2, \ldots q_k), \quad (i=1, 2, \ldots n).\\ z_i&=z_i(q_1, q_2, \ldots q_k).\end{aligned}$$

Параметры q называются *лагранжевыми координатами системы*.

Виртуальное перемещение системы выражается через k произвольных вариаций δq этих координат формулами:

$$\begin{aligned}
\delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_r}\delta q_r + \ldots \\
\delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\delta q_r + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots n) \\
\delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\delta q_r + \ldots
\end{aligned}$$

Если подставить эти значения в общее уравнение статики

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \, \delta x_i + Y_i \, \delta y_i + Z_i \, \delta z_i) = 0, \tag{1'}$$

то последнее примет вид:

$$\sum_{r=1}^{k} Q_r \delta q_r = 0,$$

где положено

$$Q_r = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right).$$

Так как вариации δq произвольны, то это уравнение распадается на систему следующих k уравнений, которые и являются уравнениями равновесия:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, \quad Q_k = 0.$$

Если силы (X_i, Y_i, Z_i) даны или зависят только от положения или конфигурации системы, т. е. от параметров q, то эти k уравнений определят значения k лагранжевых координат, которым соответствует положение равновесия системы.

Замечание. — Большое преимущество лагранжевых координат заключается в удобстве их применения к системам с конечным числом степеней свободы, каково бы ни было число точек системы. Так, в случае твердого тела мы имеем дело с бесконечным множеством точек, и практически невозможно написать все уравнения связей. Наоборот, положение тела зависит лишь от шести лагранжевых координат. Ничто не мешает также применить этот способ к непрерывным средам, так как декартовы координаты точек системы могут быть связаны с лагранжевыми координатами общими формулами. В этом случае число уравнений связей в декартовых координатах также было бы бесконечно.

250. Системы, находящиеся под действием консервативных сил. Силовая функция. — Силы, прямо приложенные к системе материальных точек, называются *консервативными* (в их совокупности), если они позиционные и если сумма их элементарных работ на всяком перемещении системы есть полный дифференциал функции U от $3n$ координат точек системы, т. е. если тождественно выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \,\delta x_i + Y_i \,\delta y_i + Z_i \,\delta z_i) = \delta U.$$

Это тождество распадается на $3n$ условий

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Функция U координат точек системы есть *силовая функция.*

Может также быть, что сумма элементарных работ прямо приложенных сил есть полный дифференциал функции U от лагранжевых координат, но это может иметь место лишь для перемещений, *совместимых со связями*. В этом случае имеем:

$$\sum_{i=1}^{k} Q_r \,\delta q_r = \delta U.$$

Написанное тождество распадается на k следующих

$$Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, k).$$

Этот случай может иметь место и без того, чтобы существовала силовая функция в собственном смысле (как она введена для декартовых координат), но когда он встречается, можно сказать, в обобщенном смысле, что существует *силовая функция в лагранжевых координатах.*

Если существует силовая функция в координатах x, y, z, т. е. без учета связей, то существует, очевидно, и силовая функция в лагранжевых координатах, которая выводится из первой, если выразить x, y, z в координатах q.

Если существует силовая функция в том или другом смысле, то для положений равновесия имеем $\delta U = 0$. В этом заключается, как известно, необходимое условие максимума или минимума функции U. Таким образом, *положения системы, для которых силовая функция имеет максимум или минимум, представляют собой, вообще говоря, положения равновесия системы.*

Можно показать, что положения системы, для которых силовая функция принимает наибольшее значение, представляют собой положения устойчивого равновесия. Но вопрос об устойчивости равновесия консервативной системы относится скорее к динамике, чем к статике. Мы встретимся с ним в динамике системы при обобщении теоремы Лежен-Дирихле, уже доказанной для точки (n° 147).

251. Равновесие весомой системы. — Одним из наиболее важных случаев консервативных сил является тот, когда единственная прямо приложенная сила есть сила тяжести. Докажем, что в этом случае существует силовая функция. Предположим, что ось z вертикальна и ориентирована в сторону действия силы тяжести. Элементарная работа силы тяжести для точки массы m и веса mg есть $mg\,\delta z$; следовательно, сумма элементарных работ для всей системы равна

$$g \sum m\delta z = Mg\delta\zeta,$$

где M есть общая масса, Mg — вес системы и ζ — ордината ее центра тяжести. Силовая функция равна поэтому $Mg\zeta$. Положениями равновесия весомой системы (с обратимыми перемещениями) будут, следовательно, такие положения, для которых изменение уровня центра тяжести равно нулю при элементарном перемещении системы, т. е., вообще говоря, такие положения, для которых центр тяжести занимает самое высокое или самое низкое из возможных положений. В последнем случае, на основании только что упомянутой обобщенной теоремы Лежен-Дирихле, мы будем иметь положение устойчивого равновесия.

При применении этой теоремы к весомой системе предполагается, что центр тяжести системы может подниматься или опускаться. Может, в частности, случиться, что центр тяжести системы остается на одном и том же уровне для различных возможных положений системы, так что последняя будет в равновесии во всех этих положениях. В этом случае говорят, что равновесие *безразличное*, или *астатическое*. С таким равновесием мы встречаемся в случае тяжелого твердого тела, вынужденного скользить по горизонтальной плоскости, или опертого на неподвижную опору в своем центре тяжести, или также в случае весов с двумя чашками, центр тяжести которых совпадает с точкой подвеса коромысла.

Мы возвратимся к этой теореме в динамике системы.

§ 6. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕОБРАТИМЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ

252. Односторонние связи. — Связи, рассматриваемые до сих пор, выражались уравнениями, и перемещения системы, совместимые со связями, были обратимыми. Связи, выражающиеся неравенствами, называются *односторонними*. В противоположность им связи, выражающиеся равенствами, называются *двусторонними*.

Легко можно привести, и мы это уже делали, очень простые примеры односторонних связей. Если движущаяся точка находится на одной стороне непроницаемой поверхности, через которую она не может перейти, но с которой может сойти без всякого сопротивления, то связь выражается неравенством. Действительно, если точка движется по поверхности, то ее координаты удовлетворяют уравнению последней

$$f(x, y, z) = 0.$$

Функция f принимает положительные значения с одной стороны от поверхности и отрицательные значения с другой стороны; поэтому, если точка движется по поверхности со стороны положительной области и может сойти с поверхности только в эту область, то связь выражается неравенством (соединенным с равенством)

$$f(x, y, z) \geqslant 0.$$

Если две точки M и M' связаны между собой гибкой и нерастяжимой нитью длины l, то расстояние между ними может сделаться меньше l, но не может быть больше этой длины. Эта связь тоже выражается неравенством (соединенным с равенством)

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \leqslant l^2.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть на голономную систему наложено некоторое число односторонних связей и, кроме того, другие связи, которые могут быть двусторонними. Необходимо различать два рода положений системы: *обыкновенные* положения, при которых односторонние связи удовлетворяются только в смысле неравенств, и *граничные* положения, при которых по крайней мере одна из этих связей удовлетворяется и в смысле равенства.

При обыкновенных положениях системы односторонние связи ничем не ограничивают виртуальных перемещений системы, они в этом случае уже не являются связями, и их можно не учитывать при применении принципа виртуальных перемещений. Мы имеем здесь в точности случай, изученный выше, Предположим теперь, что система находится в граничном положении. Мы можем исключить на том же основании все односторонние связи, которые при данном положении системы имеют место только в смысле неравенств, и рассматривать лишь связи, которые удовлетворяются и в смысле равенств. Эти связи допускают среди прочих и необратимые перемещения. Однако когда мы рассматриваем какое-нибудь необратимое перемещение, необходимо делать различие между оставшимися односторонними связями. Одни из них при этом перемещении удовлетворяются в смысле равенств, для других дело обстоит иначе. Первые ведут себя при этом как двусторонние связи. Вторые, наоборот, перестают действовать при этом перемещении и не играют в нем никакой роли: эффект их действия может проявиться лишь в том, чтобы не допустить противоположного перемещения. Поэтому при данном необратимом перемещении эти связи можно вовсе не рассматривать. Принцип виртуальных перемещений может быть распространен на случай необратимых перемещений, но при этом он несколько видоизменяется. Это изменение относится прежде всего к основной лемме, служащей основанием принципа (n° 232). Она должна быть дополнена следующим образом:

253. Лемма. — *Пусть некоторая материальная система находится под действием данных сил и занимает данное положение (положение равновесия или нет). Для всякого обратимого или необратимого виртуального перемещения, сумма работ реакций связей, действующих в этом положении системы, равна нулю или положительна. Сумма работ реакций связей всегда равна нулю при действительном перемещении.*

Для обратимых перемещений эта формулировка леммы совпадает с прежней, поэтому достаточно рассмотреть необратимые перемещения.

Если сначала рассмотрим виртуальные перемещения, то принцип верен: 1° для точки, движущейся по поверхности и могущей сойти с нее в одну сторону, ибо работа реакции поверхности, предполагаемой жесткой, положительна, если точка виртуально удаляется от поверхности; 2° для двух точек, которые удерживаются натянутой нитью, но могут приближаться друг к другу, так как сумма работ реакций, поскольку они существуют в натянутой нити, положительна при виртуальном приближении точек друг к другу; 3° для двух твердых поверхностей, которые опираются одна на другую, так как если их виртуально удалять друг от друга, сумма работ реакций, действующих в точке прикосновения, положительна.

Если рассмотреть теперь действительное необратимое перемещение системы, то сумма работ реакций будет равна нулю, так же как и сами реакции. В самом деле, если точка, движущаяся по одной стороне поверхности, действительно покидает эту поверхность, она не производит на нее давления; если две точки действительно приближаются друг к другу, они не натягивают нить, их связывающую; если две поверхности удаляются, они не опираются уже одна на другую.

Распространяя лемму на другие случаи, мы постулируем ее как принцип, являющийся индуктивным обобщением наших физических знаний.

Принцип виртуальных перемещений для случая односторонних связей и необратимых перемещений принимает следующую форму:

254. Принцип виртуальных перемещений. — *Для равновесия материальной системы, подчиненной односторонним связям и находящейся в граничном положении, необходимо и достаточно, чтобы сумма виртуальных работ прямо приложенных сил была равна нулю для всех обратимых перемещений и равна нулю или отрицательна для всех необратимых перемещений, если и те и другие совместимы со связями, наложенными на систему.*

Условие необходимо, так как, если каждая точка системы находится в равновесии, то сумма виртуальных работ всех активных сил и сил связи равна нулю. Сумма работ сил связи равна нулю или положительна для перемещения, совместимого со связями, поэтому сумма работ активных сил будет равна нулю или отрицательна.

Условие также и достаточно по той же причине, как для случая двусторонних связей. Система не может притти в движение, так как сумма работ всех сил будет положительна на этом действительном перемещении. А так как работа сил связи равна нулю, согласно лемме, то работа активных сил будет также положительна, что противоречит условию.

Замечание. — Можно всегда избежать обращения к принципу виртуальных перемещений, выраженному в этой более сложной форме. В большинстве случаев предпочитают, и это всегда законно, применять принцип в его первоначальной форме, как если бы все связи были двусторонними. Потом *á posteriori* проверяют, действуют ли силы связи на самом деле в ту сторону, в какую они могут действовать. Например, если речь идет о натянутых нитях, то необходимо проверить, что в найденном положении равновесия системы нити действительно находятся под действием растягивающих, а не сжимающих сил.

§ 7. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

255. Относительное равновесие. Введение сил инерции переносного движения. — Материальная точка или система находятся в относительном равновесии, если действующие на них активные силы удерживают их в состоянии относительного покоя, т. е. покоя по отношению к подвижной системе отсчета. Так как обыкновенно оси, связанные с Землей, рассматривают в статике как неподвижные, то подвижными осями чаще всего служат оси, которые движутся по определенному закону, относительно Земли.

Как было показано в динамике точки, условия равновесия относительно подвижных осей можно рассматривать так, как если бы оси были неподвижны. Для этого достаточно к силам, которые действовали бы на различные точки системы в этом последнем случае, прибавить единственную фиктивную силу, *силу инерции переносного движения*. В самом деле, в случае относительного равновесия сложная центробежная сила равна нулю (n° 168).

Для наблюдателя, который перемещался бы вместе с подвижными осями и производил лишь статические опыты, ничто не отличало бы фиктивную силу от других сил: она обнаруживалась бы теми же опытами и измерялась бы совершенно таким же способом, как и остальные силы [1]. Но для наблюдателя, связанного с другой системой осей, оказывается гораздо проще сохранить силы которые он измеряет в своей системе отсчета, и при изучении равновесия относительно осей, принимаемых им за подвижные, ввести новые силы из динамических соображений.

Следует сделать важное замечание, относящееся к экспериментам на поверхности Земли. Если относить систему к осям, движущимся по отношению к Земле, нужно прибавить силу инерции переносного движения, происходящую от этого относительного движения, ко всем фиктивным силам, которые появляются при движении относительно Земли: к центробежной силе и сложной центробежной силе, происходящим от вращения земного шара. Эта последняя не будет равна нулю в случае равновесия относительно осей, движущихся по отношению к Земле, ибо точка, неподвижная в этих осях, имеет не равную нулю скорость по отношению к Земле.

Но центробежная сила, происходящая от вращения Земли, включается в вес, а сложная центробежная сила в большинстве случаев пренебрежимо мала. Поэтому почти всегда, заменяя притяжение Земли весом, можно рассматривать всякое движение относительно Земли так, как если бы Земля была неподвижна. В таком случае достаточно принимать в расчет лишь силу инерции

---

[1]) Едва ли нужно напоминать, что сила тяжести, представляющая собой, с точки зрения динамики, кажущуюся силу, послужила типичной силой для построения статики.

переносного движения, происходящую от движения осей по отношению к земному шару.

256. Равномерное вращение системы отсчета. — Если подвижные оси координат вращаются равномерно с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, то сила инерции переносного движения, которую нужно приложить к материальной точке, отнесенной к этой системе осей, совпадает, как известно (п° 170), с центробежной силой вращательного движения.

Центробежная сила перпендикулярна к оси вращения и стремится удалить от нее движущуюся точку. Если масса точки есть m и ее расстояние от оси вращения r, то центробежная сила равна по величине

$$m\,\omega^2 r.$$

Элементарная работа этой силы на бесконечно малом перемещении точки, при котором r меняется на dr, есть

$$m\,\omega^2 r\,dr = d\,\frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Следовательно, центробежная сила имеет силовую функцию $\frac{1}{2}m\,(\omega r)^2$, т. е. является консервативной силой.

Если бы вместо одной материальной точки мы рассматривали систему материальных точек, силовая функция центробежных сил для нее была бы $\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2$.

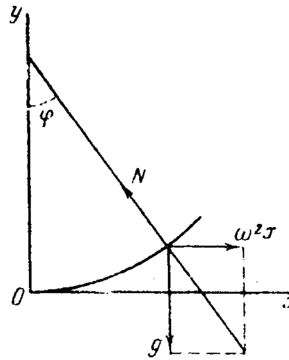
257. Относительное равновесие тяжелой точки на поверхности вращения, вращающейся вокруг своей оси. Приложение. — Проведем в вертикальной плоскости горизонтальную ось Ox и ось Oy вертикально вверх (фиг. 40). Построим в плоскости Oxy кривую $y=f(x)$. При вращении вокруг оси Oy эта кривая опишет поверхность вращения, ось которой вертикальна. Предположим, что эта поверхность вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг своей оси, и найдем положение относительного равновесия тяжелой точки M, которая движется по поверхности. Мы можем предположить, что точка перемещается по некоторой заданной кривой, которая сама увлекается вращением поверхности.

Пусть x, y — координаты точки M в положении равновесия, φ — угол, составленный нормалью к кривой с вертикалью, N — нормальная реакция поверхности. Так как массу точки можно принять за единицу, то ее вес есть g, и центробежная сила $\omega^2 x$. Первая сила вертикальна, вторая горизонтальна, и их сумма должна уравновесить N; отсюда имеем, в проекциях на оси, два уравнения:

$$\omega^2 x = N \sin\varphi, \quad g = N\cos\varphi.$$

Исключая N, получаем условие равновесия

$$\frac{\omega^2 x}{g} = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (1)$$



Фиг. 40.

Рассмотрим два приложения этой формулы. Предположим сначала, что образующая кривая есть окружность радиуса a, касательная к Ox в начале координат (фиг. 40) и расположенная над этой осью. В этом случае $x = a \sin\varphi$; следовательно, положение равновесия на окружности определяется формулой

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\omega^2 a}{g}.$$

Здесь поверхность вращения есть сфера. Если угловая скорость ω неограниченно возрастает, φ стремится к $\pi : 2$, и положение равновесия приближается к экватору (никогда его не достигая).

В качестве второго примера найдем, какова должна быть образующая кривая, чтобы точка находилась в равновесии при всяком ее положении на этой кривой.

Уравнение равновесия (1) должно удовлетворяться при любом значении x. Заменив в нем $\operatorname{tg}\varphi$ через $\frac{dy}{dx}$, мы получим дифференциальное уравнение искомой кривой

$$\frac{\omega^2 x\,dx}{g} = dy,$$

откуда, интегрируя и предполагая начало координат на кривой, будем иметь:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Кривая есть парабола, имеющая ось вращения осью симметрии. Этот результат используется в конструкции центробежных регуляторов.

258. Изменение веса и вертикали с широтой. — Вблизи от поверхности Земли вес есть равнодействующая земного притяжения и центробежной силы, развивающейся при вращении Земли вокруг своей оси.

Мы будем считать Землю шаром, радиус которого приближенно равен 6300 *км*. Притяжение Земли на единицу массы равно $fM : R^2$, где M — масса Земли и f — постоянная тяготения. Эту силу, направленную к центру Земли, мы будем обозначать через F.

Земля делает один оборот вокруг своей оси в течение одних звездных суток, т. е. в течение 86 164 *сек*; ее угловая скорость, выраженная в 1/*сек*, равна поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164}.$$

Центробежная сила, действующая на единицу массы, есть $\omega^2\rho$, где через ρ обозначено расстояние точки от земной оси. На широте λ на поверхности сферы имеем $\rho = R\cos\lambda$. Центробежная сила (перпендикулярная к земной оси и лежащая в плоскости меридиана) имеет поэтому значение:

$$\chi = \omega^2 R\cos\lambda.$$

Численное значение величины $\omega^2 R$ (представляющей собой ускорение) равно приблизительно 3,5 *см/сек*^{2}. Центробежная сила остается поэтому всегда малой по сравнению с притяжением.

Сила тяжести g есть равнодействующая сил F и χ. Если обозначим через γ острый угол между направлением отвесной линии (совпадающим с направлением g) и плоскостью экватора, то весьма малый угол $\gamma - \lambda$ представляет собой *отклонение вертикали*, вызванное вращением Земли. Так как проекции g на плоскость экватора и земную ось равны соответствующим проекциям $F + \chi$, то имеют место равенства

$$g \cos \gamma = F \cos \lambda - \chi = (F - \omega^2 R) \cos \lambda,$$

$$g \sin \gamma = F \sin \lambda.$$

Пусть g_0 есть напряжение силы тяжести на экваторе (где λ и γ равны нулю); на основании первой из предыдущих формул имеем:

$$g_0 = F - \omega^2 R;$$

и тогда обе формулы могут быть переписаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} g \cos \gamma &= g_0 \cos \lambda, \\ g \sin \gamma &= (g_0 + \omega^2 R) \sin \lambda = g_0 (1 + \varepsilon) \sin \lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где положено

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{g_0},$$

так что ε есть весьма малое число (около 0,005), квадратом которого можно пренебречь.

Умножим уравнения (2) соответственно сначала на $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$ и сложим, потом на $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$ и вычтем первое из второго; таким способом находим следующие два соотношения:

$$\left.\begin{aligned} g &= g_0 [\cos (\lambda - \gamma) + \varepsilon \sin^2 \lambda], \\ \sin (\gamma - \lambda) &= \varepsilon \sin \lambda \cos \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Последнее показывает, что разность $\gamma - \lambda$ очень мала, порядка ε. Поэтому можем положить с точностью до малых величин второго порядка по отношению к ε:

$$\cos(\lambda - \gamma) = 1, \quad \sin(\gamma - \lambda) = \gamma - \lambda, \quad \varepsilon \cos\gamma = \varepsilon \cos\lambda,$$

и уравнения (3) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} g &= g_0 (1 + \varepsilon \sin^2\lambda), \\ \gamma - \lambda &= \varepsilon \sin\lambda \cos\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Первое из соотношений (4) позволяет определить напряжение силы тяжести на широте λ, а второе — отклонение вертикали. Напряжение силы тяжести возрастает вместе с широтою и принимает на полюсе наибольшее значение. Отклонение вертикали наибольшее на широте 45°, где оно несколько меньше 10′.

Чтобы получить наилучшее совпадение с опытами, нужно величине ε в формулах (4) дать значение

$$\varepsilon = 0{,}00530.$$

ГЛАВА XI

ТРЕНИЕ

§ 1. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

259. Трение. — В теоретической механике твердые тела рассматривают как абсолютно неизменяемые, а их поверхности как совершенно гладкие, так что реакции, которые они оказывают друг на друга, нормальны к поверхностям тел в точке их касания. Это именно мы предполагали до сих пор. Опыт, однако, показывает, что этот чисто теоретический случай является предельным и в действительности никогда не достигается. Например, пусть некоторое тяжелое тело опирается своей плоской поверхностью на горизонтальную плоскость. Как мы знаем, горизонтальная сила, достаточная для того, чтобы заставить тело скользить по этой плоскости, вместо того чтобы быть сколь угодно малой, должна стать больше некоторого значения. Итак, когда два твердых тела опираются одно на другое, в точках касания тел развивается, кроме допущенной выше нормальной реакции, *касательная реакция*, которая оказывает влияние на равновесие или движение тела и называется *трением*.

Эта реакция зависит лишь от относительных положений и движений обоих тел; мы можем поэтому предполагать, что одно из этих тел неподвижно. Если это допустить, то опыт показывает, что трение не следует одним и тем же законам в случаях, когда другое тело находится в покое или в движении. Кроме того, в случае движения необходимо отличать *трение скольжения*, которое появляется, когда две поверхности, находящиеся в соприкосновении, скользят одна по другой, от *трения качения* и *трения верчения*, которые возникают, когда движущаяся поверхность катится и вертится по неподвижной поверхности.

Рассмотрим эти различные случаи, начиная с законов трения скольжения.

260. Статическое трение. — Пусть твердое тело, находящееся под действием данных сил, опирается на неподвижную поверхность, так что вызывает постоянную нормальную реакцию этой последней. Если, кроме того, сила, действующая тангенциально к поверхности, стремится заставить тело скользить по ней, возникает касательная реакция поверхности, прямо противоположная силе. Эта реакция препятствует скольжению тела и возрастает вместе с касательной активной силой до предельного максимума, после чего начинается скольжение. Наибольшую касательную реакцию T называют *трением при начале движения* (*frottement au départ* *). На основании опытов Кулона и Морена, трение при начале движения подчиняется приближенно следующим законам:

1°. Трение при начале движения зависит от состояния поверхностей, находящихся в соприкосновении, но не зависит от размеров этих поверхностей.

2°. Оно пропорционально нормальной составляющей давления тела на поверхность, или, что то же самое, нормальной составляющей реакции.

Постоянное отношение f трения T к нормальной составляющей N реакции называется *коэффициентом трения*, т. е.

$$T = fN.$$

Коэффициент трения, представляющий собой отношение двух сил, есть поэтому число отвлеченное (не зависящее от выбора единиц).

Рассмотрим твердое тело, опирающееся на поверхность. Так как величина площади касания не оказывает влияния на силу трения, мы можем привести движущуюся поверх-

*) В русской литературе для T принят термин *статическое трение*. *(Прим. перев.)*

ность к точке M. Пусть P есть сила, приложенная к точке M, N' — ее нормальная составляющая и T' — касательная составляющая, так что N' прямо противоположна нормальной реакции N, и T' прямо противоположна силе трения I. Точка M останется в покое, пока T' меньше трения при начале движения, т. е. пока

$$T' \leqslant fN'.$$

Обозначим через φ' угол между силой P и нормалью к поверхности, тогда

$$T' = N' \operatorname{tg} \varphi'.$$

Если ввести угол φ с помощью равенства

$$f = \operatorname{tg} \varphi, \tag{1}$$

то условие того, чтобы точка M оставалась неподвижной на поверхности, примет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi' < \operatorname{tg} \varphi,$$

следовательно, угол между силой P и нормалью к поверхности должен быть меньше угла φ, определенного формулой (1) и называемого *углом трения*. Наоборот, движение начнется, как только угол между силой P и нормалью к поверхности станет больше угла трения.

Отсюда следует, что поверхность в состоянии развить всякую реакцию R, лишь бы только линия ее действия проходила внутри кругового конуса, ось которого нормальна к поверхности и образующие которого наклонены к этой нормали под углом φ. Этот конус, вершина которого находится в точке M, называется *конусом трения*.

261. Динамическое трение. — Если поверхности, находясь в соприкосновении, скользят друг по другу, то между ними все время действуют тангенциальные реакции, которые называют силами *динамического трения*. Законы динамического трения следующие:

1°. Динамическое трение прямо противоположно относительной скорости тела.

2°. Оно, как и трение статическое, не зависит от площади соприкосновения поверхностей и прямо пропорционально нормальному давлению, производимому телом на поверхность.

3°. Оно не зависит в заметной степени от скорости.

4°. Оно зависит тесным образом от природы поверхностей, находящихся в соприкосновении, от их материала, их твердости, степени полировки и т. д. Но для одних и тех же поверхностей коэффициент динамического трения заметно меньше коэффициента трения при начале движения.

262. Преимущества и неудобства, создаваемые трением. — Влияние трения может быть как полезным, так и вредным. В статическом состоянии трение чаще всего оказывается для нас полезным, так как оно увеличивает устойчивость и позволяет осуществить равновесие в тех случаях, когда без трения оно было бы невозможно. Но трение может быть полезным также и с динамической точки зрения; благодаря ему локомотив может привести в движение состав, и благодаря трению же оказывается возможным торможение. В движущихся машинах трение, вообще говоря, оказывается вредным не только потому, что оно является причиной изнашивания, но также и потому, что оно поглощает часть работы, производимой движущими силами. Поэтому в машинах следует сводить его к минимуму, улучшая качество поверхностей, находящихся в соприкосновении, так как свойства этих поверхностей оказывают значительное влияние на величину коэффициента трения.

Самым эффективным средством для уменьшения трения является смазка при помощи масла или другого смазочного материала. Смазка заменяет *сухое трение* тел, находящихся в соприкосновении, *жидким трением*, при котором тела скользят по слою смазки.

Следующая таблица показывает, что: 1° существует значительная разница между трением при начале движения и динамическим трением и 2° коэффициент трения между различными материалами уменьшается при употреблении смазки.

Тела, находящиеся в соприкосновении, и их свойства	Коэффициент трения при начале движения	Коэффициент динамического трения
Дерево по дереву (сухое)	0,50	0,36
Дерево по металлу (тоже)	0,60	0,42
Металл по металлу (тоже)	0,19	0,18
Дерево или металл по коже . . .	0,47	0,30
Камень по камню	—	0,76
Дуб по дубу, волокна параллельны	0,62	0,48
Дуб по дубу, волокна перпендикулярны	—	0,34
Дерево по дереву (густая смазка) .	0,20	0,07
Металл по дереву (тоже)	0,12	0,08
Металл по металлу (тоже)	0,10	0,09
Металл по коже (тоже)	—	0,20

Мы рассмотрим теперь решение некоторых задач статики, при которых приходится учитывать трение скольжения.

263. Равновесие с трением твердого тела, опирающегося на плоскость. — Рассмотрим твердое тело, находящееся под действием одной силы F и опирающееся на неподвижную плоскость в нескольких точках, не лежащих на одной прямой. Необходимыми и достаточными условиями равновесия тела в этом случае будут следующие: 1°, сила F должна быть ориентирована так, чтобы она прижимала тело к плоскости; 2° она должна составлять с нормалью к плоскости угол, меньший угла трения; 3° линия действия силы должна пересекать плоскость внутри опорного многоугольника.

Эти условия необходимы: первое — для того, чтобы сила F могла быть уравновешена реакциями плоскости (которые действуют лишь в одну сторону); второе — чтобы не было скольжения; третье — чтобы мог обратиться в нуль результирующий момент реакций относительно той точки, в которой линия действия F пересекает плоскость.

Они и достаточны, так как если они имеют место, то силу F можно разложить на параллельные и одинаково ориентированные силы, приложенные в вершинах опорного многоугольника, так что они уравновешены сопротивлением неподвижной плоскости.

Если тело опирается на плоскость своей плоской гранью, то условия равновесия будут те же, за исключением того, что опорный многоугольник будет заменен выпуклой линией (опорной линией), представляющей собою границу площади соприкосновения.

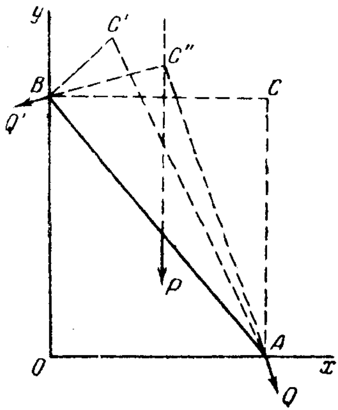
Устойчивость равновесия может в этом случае рассматриваться с двух точек зрения. Равновесие нарушается или при опрокидывании тела, или при его скольжении по плоскости. Против первой возможности мы будем гарантированы тем больше, чем дальше от краев опорного многоугольника сила F пересекает плоскость; против второй — чем меньше будет угол между силой F и нормалью к плоскости по сравнению с критическим углом (с углом трения).

264. Наклонная плоскость. — Предыдущие рассуждения можно применить к тяжелому телу веса P, на которое, кроме веса, действует сила F, приложенная к его центру тяжести. Пусть тело опирается на наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол α. Условия равновесия будут следующие: 1° равнодействующая $P+F$, приложенная к центру тяжести, должна быть ориентирована так, чтобы она прижимала тело к плоскости; 2° она должна пересекать эту плоскость внутри опорного многоугольника; 3° она должна составлять с нормалью к плоскости угол, меньший угла трения.

Рассмотрим, в частности, тот случай, когда тело находится только под действием своего веса, так что первое условие всегда выполняется. Условия равновесия заключаются тогда в том, что центр тяжести должен лежать на вертикали, пересекающей опорный многоугольник, и угол α плоскости с горизонтом должен быть меньше угла трения. Устойчивость будет тем больше, чем меньше будет угол α, что очевидно без доказательства.

265. Равновесие лестницы. — Рассмотрим условия равновесия лестницы, опирающейся своими концами на горизонтальный пол и вертикальную стену, ось которой лежит в вертикальной плоскости, перпендикулярной к стене.

Заметим сначала, что равновесие было бы невозможно, если бы не было трения лестницы о пол. В самом деле, прямо приложенными силами являются собственный вес лестницы и дополнительный вес человека или нескольких человек, которые по ней поднимаются; эти силы имеют вертикальную равнодействующую P, приложенную в некоторой точке лестницы. Если бы реакция пола была вертикальна, она вместе с равнодействующей P приводилась бы или к одной вертикальной силе, или к паре. Ни в одном из этих случаев горизонтальная или наклонная реакция стены не могла бы их уравновесить.



Фиг. 41.

Проведем через ось лестницы вертикальную плоскость, пересекающую пол по оси Ox и стену по оси Oy. Пусть A есть точка опоры лестницы о пол и B — точка опоры ее о стену (фиг. 41). Восставим из этих точек соответственно перпендикуляры AC и BC к полу и стене. Проведем потом через эти же точки наклонные AC' и BC', составляющие с проведенными нормалями в прямом направлении (от Ox к Oy) соответственно углы φ и φ', являющиеся углами трения для пола и стены. Точка C', определенная таким образом, зависит лишь от положения лестницы, но не от грузов, которые она поддерживает. Докажем следующую теорему:

Лестница будет или не будет находиться в равновесии, смотря по тому, расположена точка C' со стороны стены или с противоположной стороны от линии действия равнодействующей **P** *веса лестницы и грузов, которые она поддерживает.*

Действительно, чтобы равновесие имело место, необходимо, чтобы сила P могла быть разложена на две силы, приложенные в точках A и B и составляющие с нормалями AC и BC углы, меньше соответствующих углов трения; причем эти углы должны быть отложены от нормалей в сторону положительного вращения. Тогда эти две составляющие пересекутся в точке C'' (на линии действия P) справа от точки C' (фиг. 41), и точка C' будет лежать со стороны стены от линии действия P.

С другой стороны, чтобы равновесие не могло иметь места, необходимо, чтобы сила P раскладывалась на две составляющие, приложенные в точках A и B и образующие с нормалями AC и BC углы, бо́льшие углов трения и отложенные от нормалей попрежнему в сторону прямого вращения. Эти две составляющие пересекаются тогда в точке C'' (на линии действия P) слева от C', и C' находится от линии действия P со стороны, противоположной стене.

Так как условия, необходимые в каждом из этих двух случаев, исключают одно другое, то они также и достаточны.

Если угол наклона лестницы к вертикали меньше угла CAC', т. е. угла трения по отношению к полу, то точка C' окажется по другую сторону от вертикальной стены, и равновесие будет иметь место, как бы ни была расположена линия действия равнодействующей P, т. е. каковы бы ни были положение и величина грузов, поддерживаемых лестницей. Это — единственное условие, при котором равновесие соединено с полной практической безопасностью.

Если угол наклона лестницы к вертикали превосходит угол трения по отношению к полу, то точка C' оказывается с той же стороны от стены, как и сила P; в этом случае на верхний конец лестницы всегда можно положить такой груз, который будет достаточен, чтобы сделать расстояние линии действия силы P до стены меньше, чем расстояние точки C' до стены, и этим заставить лестницу соскользнуть вниз. При этих условиях опасно полагаться на равновесие лестницы.

§ 2. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ И ВЕРЧЕНИЯ

266. Качение цилиндра по плоскости. — Рассмотрим простой случай, когда тяжелый цилиндр катится по горизонтальной плоскости, которой он теоретически касается по образующей. Физические твердые тела не являются абсолютно неизменяемыми; вследствие давления, производимого тяжелым цилиндром на неподвижную плоскость, и реакции плоскости, происходит деформация обоих тел, находящихся в соприкосновении; эти тела касаются уже не вдоль линии, а вдоль некоторой площадки, хотя и весьма узкой. Чтобы заставить цилиндр катиться по плоскости, необходимо поэтому преодолеть сопротивление этих двух тел деформации; в результате мы имеем сопротивление перемещению, представляющее собой *трение качения*.

Естественно допустить, что это сопротивление выражается парой, которая препятствует качению, и опыт показывает, что момент этой пары не может превзойти некоторого максимального значения M_0, называемого *предельным моментом* (*моментом трения качения*). Так как мгновенное вращение цилиндра, опирающегося на плоскость, происходит вокруг образующей касания, то равновесие будет иметь место, если результирующий момент движущих сил относительно этой образующей будет меньше предельного момента, движение же наступит, если момент движущих сил превзойдет предельный момент. В этом последнем случае допускают, что момент сопротивления в течение всего времени движения сохраняет одно и то же значение, равное предельному моменту M_0.

Предположим, что цилиндр имеет радиус r и что движущая сила F горизонтальна и приложена к оси цилиндра, нормально к ней. Сила тяги, необходимая для того, чтобы вызвать движение, должна удовлетворять условию:

$$Fr > M_0, \qquad \text{откуда } F > \frac{M_0}{r}.$$

Сила, определяемая условием

$$F_0 = \frac{M_0}{r},$$

называется *предельной тягой*. Во всех практических случаях предельная тяга значительно меньше той, которая была бы нужна, чтобы вызвать скольжение. Тогда сила, превосходящая предельную тягу, но меньшая той, которая требуется, чтобы вызвать скольжение, необходимо вызовет качение цилиндра. Если сила тяги достаточна, чтобы произвести и качение и скольжение, она может вызвать оба эффекта одновременно, но рассмотрение этих сложных условий относится уже к области динамики.

Необходимое и достаточное условие равновесия цилиндра, находящегося под действием силы F, заключается, следовательно, в том, что эта сила не должна превосходить предельной тяги. Если F в точности равна предельной тяге, то равновесие неустойчиво; и наоборот, оно устойчиво, если F меньше предельной тяги.

267. Параметр (или коэффициент) трения качения. — Эмпирические законы трения качения были установлены Кулоном и Мореном. Эти законы, представляющие собой довольно грубое приближение к действительности, могут быть высказаны в следующей форме:

1°. Величина предельной тяги F_0 пропорциональна величине груза P, т. е. пропорциональна весу цилиндра, увеличенному другими возможными грузами, которые он поддерживает.

2°. Предельная тяга обратно пропорциональна радиусу r катящегося цилиндра.

Таким образом, обозначая попрежнему через M_0 предельный момент, можно положить

$$F_0 = h\frac{P}{r}, \quad \text{откуда} \quad M_0 = hP,$$

где h есть коэффициент, называемый *параметром*, или *коэффициентом трения качения*.

Коэффициент трения качения, в противоположность тому, что имело место для коэффициента трения скольжения, есть уже не отвлеченное число, а величина, имеющая размерность. Его размерность — длина, так как отношение $F_0 : P$ двух сил есть отвлеченное число, и предыдущая формула дает

$$h = \left(\frac{F_0}{P}\right) r.$$

Поэтому, когда коэффициенту трения качения дают численные значения, необходимо одновременно указать выбранную единицу длины.

Если силу тяги F_0 заставить действовать на расстоянии ρ от плоскости, то будем иметь: $F_0\rho = hP$. Следовательно, если $\rho = h$, то $F_0 = P$. Отсюда возникает статическая интерпретация параметра h: он представляет собою плечо, которое должна иметь предельная тяга, чтобы она была равна весу цилиндра. Это плечо, на основании предыдущего, не зависит от радиуса цилиндра.

Коэффициент h зависит от природы касающихся тел, от их твердости, от степени полировки. Приведем для примера несколько значений этого коэффициента (за единицу длины принят метр):

Чугунная неотделанная отливка, катящаяся по железу	$h = 0{,}0035$
Чугунная полированная отливка по железу	$h = 0{,}0012$
Полированное железо по дороге мощеной щебнем	$h = 0{,}0045$
Полированное железо по каменной мостовой	$h = 0{,}009$

Всем этим результатам следует приписывать лишь весьма приблизительную точность.

268. Качение и верчение шара по **плоскости. Трение верчения.** — Рассмотрим тяжелый шар, опирающийся на неподвижную горизонтальную плоскость в точке касания O. Если бы существовало только трение скольжения, то самая незначительная пара, приложенная к шару, сообщила бы ему вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O. Вектор этого элементарного вращения можно было бы, вообще говоря, разложить на две составляющие: одну, лежащую в неподвижной плоскости и представляющую собой *качение*, и другую, нормальную к плоскости, — *верчение*. В действительности же оба эти вращения не обязательно должны иметь место. Если момент пары, приложенной к шару, не превышает некоторого предела, никакого движения не происходит. Плоскость оказывает, таким образом, сопротивление перемещению, обусловленное трением.

Если момент движущей пары параллелен неподвижной плоскости, то пара стремится вызвать качение шара по плоскости, и сопротивление, возникающее при этом, представляет собой *трение качения*.

Если момент движущей пары нормален к плоскости, то пара стремится вызвать верчение, и сопротивление, которое плоскость при этом оказывает, есть *трение верчения*.

Пара, момент которой расположен наклонно к плоскости, раскладывается на две, уже упомянутые: она стремится вызвать сразу два движения, и в результате возникают одновременно два вида сопротивления.

Законы трения в случае сферы аналогичны тем, которые мы имели в случае цилиндра.

Сопротивление качению выражается парой, момент которой не может превзойти некоторого наибольшего значения G_r, называемого *предельным моментом качения*; сопротивление верчения также выражается парой, момент которой не может превзойти наибольшего значения G_p, называемого *предельным моментом верчения*.

Если составляющие движущего момента превосходят предельные моменты, то возникает движение, и пока качение и верчение имеют место, соответствующие моменты сопротивления сохраняют предельные значения G_r и G_p.

Эти предельные моменты пропорциональны весу шара (увеличенному соответствующим образом, если имеются другие грузы, которые он должен поддерживать), но не зависят от его радиуса. Таким образом, если обозначить через P полный груз, то будем иметь:

$$G_r = h_1 P, \quad G_p = h_2 P,$$

где h_1 и h_2 представляют собой два коэффициента, из которых первый есть *коэффициент трения качения*, а второй — *коэффициент трения верчения*. Как в предыдущем случае, эти два коэффициента имеют размерность длины; их значение поэтому зависит от выбора единицы длины, которая в каждом случае должна быть установлена. Параметр качения h_1 имеет значения, аналогичные тем, которые мы имели для него в случае качения цилиндра в предыдущем n^0. Параметр верчения h_2 оказывается, вообще говоря, в 5—10 раз меньше, чем h_1, и само верчение, как правило, происходит гораздо быстрее, чем качение.

Аналогичные рассуждения, очевидно, могут быть применены к тому случаю, когда рассматриваются два тела, которые имеют выпуклые поверхности произвольной формы, касающиеся друг друга в одной точке, и могут катиться и вертеться одно по другому. Для учета сопротивления качению и верчению одного тела по другому и в этом случае вводят две предельные пары, одну с моментом G_r трения качения и другую с моментом G_p трения верчения. Эти пары подчиняются законам, которые аналогичны только что рассмотренным. Равновесие нарушается лишь в том случае, если движущие моменты превосходят эти предельные моменты сопротивления.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие к первому изданию 5

Введение

НАЧАЛА ТЕОРИИ ВЕКТОРОВ

§ 1. Векторы. Операции над векторами 7
§ 2. Системы векторов 17
§ 3 Эквивалентные системы векторов 23
§ 4. Приведение системы векторов. Элементарные операции 28
§ 5. Параллельные векторы 33
§ 6. Векторное дифференцирование и интегрирование . . 36

Часть первая

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. Движение. Скорость. Ускорение 38
§ 2. Относительные движения. Сложение скоростей . . . 50

Глава II. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Простые движения твердого тела 58
§ 2. Сложение мгновенных поступательных движений и мгновенных вращений 64
§ 3. Распределение скоростей в движущемся твердом теле 68
§ 4. Непрерывное движение плоской фигуры в ее плоскости 75

§ 5. Непрерывное движение твердого тела 81
§ 6. Конечные перемещения твердого тела 86

Глава III. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Об ускорении в относительном движении точки . . 91
§ 2. Распределение ускорений в плоской фигуре, движущейся в своей плоскости 95
§ 3. Распределение ускорений в движущемся твердом теле 109

Часть вторая

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ. ДИНАМИКА ТОЧКИ

Глава IV. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ. ФИЗИЧЕСКИЕ СИЛЫ. ЕДИНИЦЫ

§ 1. Основные начала 115
§ 2. Физические силы. Притяжение. Вес. Упругие силы 125
§ 3. Основные единицы измерения 131

Глава V. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Уравнения движения 135
§ 2. Приложение. Движение тяжелой точки в пустоте . . 138
§ 3. Внутренние уравнения движения. Центростремительная сила и центробежная сила 140
§ 4. Теорема площадей 142
§ 5. Работа силы 145
§ 6. Силовое поле. Силовая функция 150
§ 7. Теорема живой силы 156
§ 8. Движение точки под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию 161
§ 9. Колебательное движение простое, затухающее и вынужденное 164
§ 10. Движение планеты вокруг Солнца 170
§ 11. Равновесие точки. Устойчивость равновесия . . . 177

Глава VI. ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ КРИВОЙ ИЛИ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Движение точки по неподвижной кривой 181
§ 2. Теория простого маятника 183
§ 3. Циклоидальный маятник 189
§ 4. Движение точки по неподвижной поверхности . . . 192
§ 5. Сферический маятник 196

Глава VII. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. Уравнения относительного движения 208
§ 2. Движение точки относительно поверхности Земли . 212
§ 3. Движение тяжелой точки в пустоте относительно поверхности Земли 214
§ 4. Отклонение свободного маятника. Маятник Фуко . . . 219

Часть третья

СТАТИКА

Глава VIII. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 1. Начала статики. Равновесие точки 225
§ 2. Необходимые условия равновесия, общие для всех материальных систем 228
§ 3. Условия равновесия свободного твердого тела . . . 230
§ 4. Равновесие несвободного твердого тела 238
§ 5. Равновесие веревочного многоугольника 246
§ 6. Плоские стержневые (или сочлененные) системы . . 252
§ 7. Равновесие нитей 257

Глава IX. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 1. Определение и общие свойства центра тяжести . . 266
§ 2. Определение центра тяжести сплошных тел 269
§ 3. Центры тяжести некоторых простых фигур 273
§ 4. Поверхности вращения. Теоремы Гюльдена 278

Глава X. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 1. Принцип виртуальных работ для систем с обратимыми перемещениями 283

§ 2. Применение принципа виртуальных перемещений к равновесию свободного твердого тела 288
§ 3. Применение принципа виртуальных перемещений к равновесию несвободного твердого тела 293
§ 4. Применение принципа виртуальных перемещений к механизмам. Равновесие простых машин 298
§ 5. Общее уравнение статики 303
§ 6. Принцип виртуальных работ для систем с необратимыми перемещениями 312
§ 7. Относительное равновесие 316

Глава XI. ТРЕНИЕ

§ 1. Трение скольжения 323
§ 2. Трение качения и верчения 331