

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ. ТЕРМОДИНАМИКА И КОСМОЛОГИЯ

М.: Наука, 1974, 520 стр.

Книга Р. Толмена содержит обстоятельное изложение физических и математических основ специальной и общей теории относительности и наблюдаемых эффектов, которые из нее следуют. Наибольшая часть книги посвящена релятивизации основных разделов классической физики.

В рамках сначала специальной, затем общей теории относительности рассмотрены механика частицы и динамика сплошных механических сред, электронная теория и динамика электромагнитных сред. Особое внимание уделено вопросам релятивистского обобщения термодинамики покоящихся и движущихся сред.

И наконец, примерно треть книги занимает изложение космологических моделей, ставших уже классическими, но интересных и важных до сих пор.

Содержание

Предисловие редактора	13
ГЛАВА I ВВЕДЕНИЕ	15
§ 1. Цель книги	15
§ 2. Метод изложения	21
§ 3. Точка зрения	22
ГЛАВА II СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	26
Часть I. Два основных постулата и преобразования Лоренца	26
§ 4. Введение	26
§ 5. Первый постулат, или принцип относительности	26
§ 6. Второй постулат теории относительности	29
§ 7. Необходимость изменения прежних представлений о пространстве и времени	30
§ 8. Преобразования Лоренца	32
§ 9. Правила преобразования пространственных и временных интервалов. Сокращение Лоренца и растяжение времени	36
§ 10. Преобразование скорости	38
§ 11. Преобразование лоренцева множителя	40
§ 12. Преобразование ускорения	40
Часть II. Изложение специальной теории относительности с помощью четырехмерной геометрии	41
§ 13. Пространственно-временной континуум	41
§ 14. (3+1)-мерное пространство—время	42
§ 15. Геометрия пространства — времени	43
§ 16. Сигнатура линейного элемента и три типа интервалов	44
§ 17. Лоренцевы повороты осей	45
§ 18. Переход в систему собственных координат	46
§ 19. Применение тензорного анализа в специальной теории относительности	47
§ 20. Упрощение тензорного анализа в случае специальной теории	50

относительности. Галилеевы координаты	
§ 21. Четырехмерный аппарат и постулаты специальной теории относительности	52
ГЛАВА III СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И МЕХАНИКА	55
Часть I. Динамика частицы	55
§ 22. Законы сохранения массы и импульса	55
§ 23. Масса движущейся частицы	56
§ 24. Правило преобразования массы	58
§ 25. Определение силы и правило ее преобразования	58
§ 26. Работа и кинетическая энергия	60
§ 27. Соотношения между массой, энергией и импульсом	61
§ 28. Четырехмерное описание механики частицы	63
§ 29. Применения динамики частицы	65
а) Масса быстрого электрона	66
б) Связь между силой и ускорением	66
в) Приложения динамики частицы в электромагнетизме	67
г) Проверка взаимной связи массы, энергии и импульса	69
Часть II. Динамика сплошных механических сред	70
§ 30. Основные постулаты	70
§ 31. Сохранение импульса и компоненты тензора натяжений t_{ij}	72
§ 32. Уравнения движения, выраженные через тензор натяжений t_{ij}	72
§ 33. Уравнение непрерывности	74
§ 34. Формулы преобразований для тензора натяжений t_{ij}	74
§ 35. Формулы преобразований для плотностей массы и импульса	77
§ 36. Выражение результатов через (абсолютные) натяжения p_{ij}	80
§ 37. Четырехмерная формулировка механики сплошных сред	82
§ 38. Применения механики сплошных сред	85
а) Масса и импульс конечной системы	85
б) Момент количества движения системы конечных размеров	88
в) Угольник (пример)	91
г) Случай замкнутой статической системы	92
ГЛАВА IV СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	96
Часть I. Электронная теория	96
§ 39. Полевые уравнения Максвелла — Лоренца	96
§ 40. Правила преобразования E , H и ρ	98
§ 41. Сила, действующая на движущийся заряд	100
§ 42. Энергия и импульс электромагнитного поля	101
§ 43. Тензор электромагнитных натяжений	103
§ 44. Формулы преобразований для электромагнитных плотностей и натяжений	104
§ 45. Совместное механическое и электромагнитное воздействие	105

§ 46. Четырехмерная формулировка электронной теории	108
а) Уравнения поля	108
б) Четырехмерное выражение силы, действующей на заряд	110
в) Четырехмерное выражение для электромагнитного тензора энергии—импульса	111
§ 47. Применение электронной теории	112
Часть II. Макроскопическая теория	113
§ 48. Уравнения поля покоящегося вещества	113
§ 49. Уравнения, определяемые свойствами покоящегося вещества	114
§ 50. Уравнения поля в четырехмерном виде	115
§ 51. Четырехмерная формулировка материальных уравнений	116
§ 52. Основные уравнения поля для движущегося вещества в обычной векторной записи	117
§ 53. Уравнения для движущегося вещества в обычной векторной записи	120
§ 54. Применения макроскопической теории	121
а) Сохранение электрического заряда	121
б) Граничные условия	121
в) Джоулево тепло	123
г) Электромагнитная энергия и импульс	125
д) Тензор энергии—импульса	127
е) Сравнение с экспериментальными данными	128
ГЛАВА V СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕРМОДИНАМИКА	129
Часть I. Термодинамика покоящихся систем	129
§ 55. Введение	128
§ 56. Первый закон термодинамики и нулевая точка отсчета энергии	131
§ 57. Второй закон термодинамики и нулевая точка отсчета энтропии	132
§ 58. Теплота, свободная энергия и термодинамический потенциал	134
§ 59. Основные условия для термодинамических переходов и равновесия	136
§ 60. Условия для переходов и равновесия в однородных системах	138
§ 61. Равномерность распределения температуры при тепловом равновесии	142
§ 62. Необратимость и скорость переходов	143
§ 63. Конечное состояние изолированной системы	146
§ 64. Энергия и энтропия идеального одноатомного газа	147
§ 65. Энергия и энтропия излучения абсолютно черного тела	150
§ 66. Равновесие между водородом и гелием	151
§ 67. Равновесие между веществом и излучением	154
Часть II. Термодинамика движущихся систем	158
§ 68. Два закона термодинамики для движущихся систем	158
§ 69. Лоренцевы преобразования термодинамических величин	159
а) Объем и давление	160
б) Энергия	161
в) Работа	162
г) Теплота	163

д) Энтропия	164
е) Температура	164
§ 70. Некоторые приложения	166
а) Цикл Карно для системы, изменяющей скорость	166
б) Динамика теплового излучения	169
§ 71. Четырехмерный подход в термодинамике	169
ГЛАВА VI ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	173
Часть I. Основные принципы общей теории относительности	173
§ 72. Введение	173
§ 73. Принцип ковариантности	174
а) Оправдание принципа ковариантности	174
б) Следствия принципа ковариантности	175
в) Способ получения ковариантных выражений	176
г) Ковариантное выражение для интервала	177
д) Ковариантное выражение для траекторий свободных частиц и световых лучей	179
§ 74. Принцип эквивалентности	182
а) Формулировка принципа эквивалентности. Метрика и гравитация	182
б) Принцип эквивалентности и относительность движения	184
в) Обоснование принципа эквивалентности	186
г) Обобщение законов специальной теории относительности с помощью принципа эквивалентности. Естественные и собственные координаты	187
д) Интервал и траектория в присутствии гравитационных полей	189
§ 75. Зависимость гравитационного поля и метрики от распределения материи и энергии. Принцип Маха	191
§ 76. Поля, соответствующие специальной теории относительности. Тензор Римана — Кристоффеля	193
§ 77. Гравитационные поля в пустоте. Свернутый тензор Римана — Кристоффеля	194
§ 78. Гравитационные поля при наличии материи и энергии	195
Часть II. Элементарные применения общей теории	199
§ 79. Простейшие следствия принципа эквивалентности	199
а) Пропорциональность веса и массы	199
б) Воздействие гравитации на ход часов	199
в) Парадокс часов	201
§ 80. Ньютонова теория как первое приближение	204
а) Движение свободной частицы в слабом гравитационном поле	205
б) Уравнение Пуассона как приближение к уравнениям Эйнштейна	206
§ 81. Единицы, используемые в релятивистских вычислениях	208
§ 82. Интервал Шварцшильда	209
§ 83. Три «решающих опыта» теории относительности	212
а) Движение перигелия	215
б) Гравитационное отклонение, света	216

в) Гравитационное смещение спектральных линий	218
ГЛАВА VII РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА	222
Часть I. Некоторые общие принципы механики	222
§ 84. Основные уравнения релятивистской механики	222
§ 85. Свойства тензора энергии — импульса. Общее выражение в случае идеальной жидкости	223
§ 86. Механика идеальной жидкости	226
§ 87. Уравнения механики в лангранжевой форме	230
§ 88. Закон сохранения энергии — импульса для конечных систем	233
§ 89. Плотности энергии и импульса, записанные в виде дивергенции	236
§ 90. Предельные значения некоторых величин на больших расстояниях от изолированной системы	237
§ 91. Масса, энергия и импульс изолированной системы	239
§ 92. Вычисление энергии квазистатической изолированной системы при помощи интеграла только по занимаемому ею	241
Часть II. Решение уравнений поля	243
§ 93. Общие эйнштейновские решения уравнений поля в случае слабых полей	243
§ 94. Интервалы для систем, обладающих сферической симметрией	246
§ 95. Статический сферически симметричный интервал	248
§ 96. Внешнее и внутреннее решения Шварцшильда	252
§ 97. Энергия сферы из идеальной жидкости	255
§ 98. Нестатический сферически симметричный интервал	257
§ 99. Теорема Биркгоффа	260
§ 100. Более общая форма интервала	261
ГЛАВА VIII РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	265
Часть I. Ковариантное обобщение теории электричества	265
§ 101. Введение	265
§ 102. Обобщенная электронная теория Лоренца. Уравнения	265
§ 103. Движение заряженной частицы	267
§ 104. Тензор энергии—импульса	268
§ 105. Обобщенная макроскопическая теория	269
Часть II. Некоторые приложения релятивистской электродинамики	270
§ 106. Сохранение электрического заряда	270
§ 107. Гравитационное поле заряженной частицы	272
§ 108. Распространение электромагнитных волн	274
§ 109. Тензор энергии—импульса изотропного излучения	276
§ 110. Гравитационная масса изотропного излучения	278
§ 111. Тензор энергии—импульса направленного потока излучения	279
§ 112. Гравитационное поле направленного потока излучения	280
§ 113. Гравитационное воздействие пучка света	281
а) Интервал в окрестности ограниченного пучка света	281
б) Скорость пробного светового луча вблизи пучка	282
в) Ускорение пробных частиц вблизи пучка	284

§ 114. Гравитационное воздействие светового пакета	283
а) Вид интервала вблизи траектории светового пакета, проходящего конечный отрезок пути	285
б) Скорость пробного луча света вблизи пакета	288
в) Ускорение пробных частиц вблизи пакета	289
§ 115. Гравитационное взаимодействие световых лучей и частиц	292
§ 116. Обобщенный эффект Допплера	294
ГЛАВА IX РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА	297
Часть I. Расширение термодинамики в общей теории относительности	297
§ 117. Введение	297
§ 118. Релятивистский аналог первого закона термодинамики	298
§ 119. Релятивистский аналог второго закона термодинамики	299
§ 120. К интерпретации релятивистского второго закона термодинамики	301
§ 121. К интерпретации теплоты в релятивистской термодинамике	303
§ 122. О применении в термодинамике сопутствующих систем координат	307
Часть II. Применение релятивистской термодинамики	309
§ 123. Применение первого закона термодинамики к изменениям статического состояния системы	309
§ 124. Применение второго закона термодинамики к изменениям статического состояния системы	311
§ 125. Условия статического термодинамического равновесия	313
§ 126. Статическое равновесие в случае сферически симметричного распределения жидкости	313
§ 127. Химическое равновесие в гравитирующей жидкой сфере	317
§ 128. Тепловое равновесие в гравитирующей жидкой сфере	318
§ 129. Тепловое равновесие в статическом поле общего типа	322
§ 130. О расширении в релятивистской термодинамике возможностей для протекания обратимых процессов с конечными скоростями	326
§ 131. О возможности протекания необратимых термодинамических процессов, не приводящих к конечным состояниям с максимальной энтропией	332
§ 132. Заключение	336
ГЛАВА X КОСМОЛОГИЯ	337
Часть I. Статические космологические модели	337
§ 133. Введение	337
§ 134. Однородная статическая Вселенная	339
§ 135. Эйнштейновский интервал	341
§ 136. Интервал в пространстве де Ситтера	342
§ 137. Интервал в специальной теории относительности	343
§ 138. Геометрия Вселенной Эйнштейна	343
§ 139. Плотность и давление материи в эйнштейновской Вселенной	346
§ 140. Частицы и свет эйнштейновской Вселенной	348
§ 141. Сравнение свойств эйнштейновской модели с реальной Вселенной	351
§ 142. Геометрия Вселенной де Ситтера	353

§ 143. Отсутствие вещества и излучения в деситтеровской Вселенной	355
§ 144. Пробные частицы и световые лучи в деситтеровской Вселенной	356
а) Уравнение геодезической	356
б) Орбиты частиц	358
в) Поведение лучей света во Вселенной де Ситтера	360
г) Допплер-эффект в деситтеровской Вселенной	361
§ 145. Сравнение модели де Ситтера с реальной Вселенной	366
Часть II. Нестатические однородные космологические модели	367
§ 146. Преимущества нестатических моделей	367
§ 147. Предположения, лежащие в основе нестатических моделей	368
§ 148. Вывод формулы интервала из предположения о пространственной изотропии	370
§ 149. Общие свойства интервала	377
а) Некоторые формулы для интервала	377
б) Внутренняя геометрия модели	378
в) Сдвиг начала координат	379
г) физическая интерпретация интервала	381
§ 150. Плотность и давление в нестатической Вселенной	382
§ 151. Изменение энергии со временем	386
§ 152. Изменение количества вещества со временем	388
§ 153. Движение частиц в модели	389
§ 154. Распространение лучей света в модели	393
§ 155. Допплер-эффект в модели	396
§ 156. Зависимость доплер-эффекта от расстояния	399
§ 157. Временная эволюция закрытых моделей	401
а) Общие черты эволюции (R вещественно, $\rho_{00} \geq 0$, $p_0 \geq 0$)	402
б) Зависимость критической функции от R	403
в) $\Lambda > \Lambda_E$. Монотонные Вселенные типа M_1	405
г) $\Lambda = \Lambda_E$. Асимптотические Вселенные типа A_1 и A_2	106
д) $0 < \Lambda < \Lambda_E$. Монотонные Вселенные типа M_2 и осциллирующие Вселенные типов O_1 и O_2	407
е) $\Lambda \leq 0$. Осциллирующие Вселенные типа O_1	408
§ 158. Зависимость эволюции от времени для открытых моделей	409
§ 159. Неустойчивость статической Вселенной Эйнштейна	412
§ 160. Модели с постоянным количеством вещества	414
§ 161. Модели, расширяющиеся из статического начального состояния	415
§ 162. Монотонно расширяющиеся модели с нестатическим начальным состоянием	418
§ 163. Осциллирующие модели ($\Lambda = 0$)	418
§ 164. Открытая модель Эйнштейна—де Ситтера ($\Lambda = 0$, $R_0 = \infty$)	421
§ 165. Исследование отброшенных малых величин в рассмотренных моделях,	422

§ 165 *. Эффект неоднородности в космологических моделях	425
Часть III. Релятивистская термодинамика нестатических однородных космологических моделей	433
§ 166. Следствие первого закона релятивистской термодинамики	433
§ 167. Следствие второго закона релятивистской термодинамики	435
§ 168. Условия термодинамического равновесия в статической Вселенной Эйнштейна	436
§ 169. Условия обратимости и необратимости в нестатических моделях	438
§ 170. Термодинамика модели, заполненной пылевидным веществом	440
§ 171. Термодинамика модели, заполненной излучением черного тела	440
§ 172. Невозможность периодических движений без сингулярных состояний	443
§ 173. Интерпретация обратимого расширения обычным наблюдателем	445
§ 174. Аналитическое исследование последовательных расширений и сжатий в закрытой модели с $\Lambda = 0$	449
а) Верхняя граница расширения	450
б) Время, необходимое для достижения максимума	451
в) Время, нужное для полного сжатия	451
г) Поведение вблизи предельного сжатия	452
§ 175. Термодинамика необратимых колебаний	454
Часть IV. Реальная Вселенная и однородные нестатические модели	458
§ 176. Введение	458
§ 177. Данные наблюдений	460
а) Абсолютная звездная величина ближайших туманностей	460
б) Поправки к видимым величинам более далеких туманностей	462
в) Расстояния до туманностей, вычисленные с помощью видимых величин	466
г) Связь наблюдаемого красного смещения с звездной величиной и расстоянием	467
д) Соотношение между видимым диаметром, звездной величиной и расстоянием	470
е) Диаметры и массы туманностей	472
ж) Распределение туманностей в пространстве	473
з) Плотность вещества во Вселенной	474
§ 178. Координаты туманности и светимость	475
§ 179. Координаты туманности и астрономическое расстояние до нее	478
§ 180. Координаты и видимый диаметр	480
§ 181. Распределение числа туманностей в пространстве	481
§ 182. Расстояние до туманности и ее красное смещение	483
§ 183. Связь плотности с пространственной кривизной и космологической постоянной	486
§ 184. Связь между красным смещением и скоростью исчезновения вещества	489
§ 185. Соответствие между моделью и реальной Вселенной	491

§ 186. Несколько общих замечаний относительно космологических моделей	496
а) Однородность	497
б) Пространственная кривизна	497
в) Развитие во времени	499
§ 187. Наша окрестность как образ Вселенной в целом	501
Приложение I. Обозначения	503
Приложение II. Некоторые формулы векторного анализа	505
Приложение III. Несколько формул тензорного анализа	506
Приложение IV. Важнейшие константы	510
Литература	512
Именной указатель	515
Предметный указатель	517

Предметный указатель

Вектор Пойнтинга 103	Идеальный газ 147
- тока 108, 116, 119, 265, 270	Излучение, масса 278
Второе начало термодинамики 132, 158, 169, 299, 301	- поток 279
Второй постулат теории относительности 29	- тензор энергии — импульса 27s, 225
Геодезические линии 180	- черного тела 150
Гравитационные волны 246	- - - динамика 169
Граничные условия электродинамики 121, 122	Излучения поле неизотропное 226
Давление жидкости 225—227	Изотропия пространства 368, 370
Движение планет 212	Интервал 44, 177, 189
Джоулево тепло 123, 124	- в нестатической изотропной Вселенной 370
Диаметр туманности видимый 470	- де Ситтера 342
- - - связь с координатами туманности 480	- Шварцшильда 209
- - вычисление 472	- Эйнштейна 342
Допплер-эффект 465	Кеннеди—Торндайка опыт 28, 38
Евклидово пространство 44	Количество теплоты 134
Жидкость идеальная 224, 225	- - релятивистская интерпретация 303
Замкнутая упругая система, статика 92	Конечное состояние системы 146, 332
Звездная величина 460, 463, 467, 470	Координатное расстояние туманности, зависимость от светимости 478
- - абсолютная 460	- - - связь с астрономическим расстоянием 478
- - болометрическая 463, 479	Координаты галилеевы 50
- - видимая 460—162, 466, 467, 468	- естественные 187
- - визуальная 461, 470	- собственные 46, 187
- - фотографическая 463, 464, 465, 474, 479	- сопутствующие 307, 371
Зона избегания 473	Космические лучи 70, 389, 392, 424, 490
Идеальная жидкость 226	

- Космологическая постоянная 169, 198, 347, 351, 405—108, 418, 486
- Космологические модели, общие замечания 19, 24, 338, 367, 496
- - нестатические однородные 367
- - - - - временная эволюция закрытых моделей 401
- - - - - открытых моделей 409
- - - - - вывод выражения для интервала 370
- - - - - геометрия 378
- Космологические модели
 - нестатические однородные, допущение о пространственной изотропии 368
 - - - - - изменение количества вещества со временем 388
 - - - - - энергии со временем 386
 - Лемэтра с сохранением массы 414
 - механика 368
 - - - - - монотонно расширяющиеся из нестатического начального состояния 418
 - - - - - статического начального состояния 415
 - обратимое и необратимое поведение 426, 438, 440, 445, 454
 - - - - - осциллирующее поведение 407, 408, 411, 418, 449, 454
 - - - - - открытая Эйнштейна—де Ситтера 421
 - - - - - отношение к реальной Вселенной 491
 - - - - - перенос начала координат 379, 477
 - - - - - периодическое поведение 407, 443
 - - - - - плотность вещества 385
 - - - - - и давление 382
 - - - - - связь с кривизной пространства и космологической постоянной 486
- - - - - поведение световых лучей 393
- - - - - частиц 389
- - - - - превращение вещества в излучение 368, 423, 448, 456, 489
- - - - - применение термодинамики 433
- - - - - различные выражения интервала и их интерпретация 377, 381
- - - - - с переходом вещества в излучение 448, 455, 489
- - - - - Фридмана с сохранением энергии 414
- - - эффект Доплера 396, 399
- - - модель де Ситтера 342
- - - вывод вида интервала 342
- - - геометрия 353
- - - нулевые давление и плотность 355
- - - поведение частиц и света 356
- - - сравнение с реальной Вселенной 366, 488, 490
- - - эффект Доплера 361
- - статические 337
- Космологические модели
 - статические, модель Эйнштейна 343
 - - - вывод вида интервала 342, 343
 - - - геометрия 343
 - - - давление и плотность 346
 - - - нестабильность 412
 - - - поведение частиц и света 348
 - - - сравнение с реальной Вселенной 351
 - - - термодинамическое равновесие 436
 - - - эффект Доплера 351
- Красное смещение 463, 468, 493
- - зависимость от расстояния 469, 470
- - относительное 465
- Лоренца сокращение 36
- Лоренца — Фицджеральда сокращение 36

Лоренцевы повороты 45
Макроскопическая плотность 79
- электродинамика 261
Максвелла уравнения 113
Максвелла — Лоренца уравнения 96,
266
Масса излучения 278
- поперечная 67
- продольная 67
- соотношение с энергией и
импульсом 61
- туманности, измерение 473
- частицы 56
- электрона 66
Материальные уравнения
электродинамики 114, 116, 120,
270
Натяжения механические 72, 74, 80,
223
- электромагнитные 103, 127
Ньютонова теория 204
Обратимость и необратимость 132,
300, 302, 438
Оператор Даламбера 275
Опыт Майкельсона — Морли 27
Отклонение света в гравитационном
поле 216, 292
Относительность движений любого
рода 184
- равномерного прямолинейного
движения 26
Первый закон термодинамики 131,
158, 298
- постулат относительности 26
Перигелий, движение 215
Планка закон 151
- формула 464
Плотность вещества во Вселенной
474
Показатель цвета 462—465
Поле гравитационное 193—199
- - заряженной частицы 272
- - потока излучения 280
- - слабое 243

- - сферически симметричное 246,
248, 257
- электромагнитное 96, 108, 115, 117,
265, 269
Постоянная Стефана 150
- Хаббла 484, 496
Постоянные важнейшие 510, 511
Потенциал векторный 98
- гравитационный 190
- ньютонов 205
- обобщенный электродинамический
108, 265
- скалярный 98
- термодинамический 134
Преобразования Галилея 34
- Лоренца 32
- - для давления 160
- - - количества тепла 163
- - - лоренцева множителя 40
- - - массы 58
- - - механических плотностей и
натяжений 76, 79, 80
- - - объема 160
- - - работы 162
- - - силы 58
- - - скорости 38
- - - температуры 164—166
- - - ускорения 40
- - - электромагнитного поля 98, 118
- - - электромагнитных плотностей и
натяжений 104
- - - энергии 161
- - - энтропии 164
Принцип ковариантности 174
- Маха 191
- относительности 26
- эквивалентности 182
Псевдотензор потенциальной
энергии и импульса 232
Равновесие в мире Эйнштейна 412,
436
Равновесие между веществом и
излучением 154
- водородом и гелием 151

- тепловое 142, 318, 322
- термодинамическое 136, 138, 313
- химическое 140, 317
- Разбегание туманностей 493
- Размерность пространства — времени 42
- Растяжение времени 37
- Римана — Кристоффеля тензор 193
- - - свернутый 194
- Света и частиц взаимодействия 285
- Светимость туманности 467, 477
- - связь с координатами 475, 478
- Свободная энергия 134
- Сила Минковского 64
- Символы Кристоффеля 181
- Собственные величины, использование 20
- координаты 46, 187, 188
- Сокращение длины 36
- Сохранение массы, энергии и импульса в общей теории относительности 233, 236, 268, 292
- - - для механической системы 70—74, 85—88
- - - - частиц 55, 61, 62, 64
- - - - электромагнитной системы 101—105
- момента количества движения 88
- электрического заряда 97, 121, 270
- Среда, зависимость от свойств 223
- механическая 223
- Стефана—Больцмана уравнение 150
- Температура туманности видимая 464
- Тензор метрический 49, 190
- Римана — Кристоффеля 193, 194
- электромагнитного поля 109, 115, 266
- энергии — импульса для вещества 82, 196, 223, 262—264
- - - - идеальной жидкости 224
- - - - излучения 225, 276, 280
- - - - электромагнитного поля; 112, 127, 268
- Тензорный анализ 47—55, 506
- Теорема Шура 374, 379
- Тепловой показатель 463—465
- Термодинамический потенциал 134
- Туманности, диаметры и массы 272
- звездные величины 460, 462
- - и видимый диаметр 470
- - и красное смещение 467
- - и расстояния 466
- Туманности, координаты и астрономическое расстояние 478
- и видимый диаметр 480
- и красное смещение 483
- и светимость 475
- распределение в пространстве 473, 474, 481
- расстояния 466
- Уравнение Пуассона 192, 195, 206
- Сакура—Тетроде 149
- Хаббла постоянная 484, 496
- Цикл Карно релятивистский 166
- Часов парадокс 201
- Часы, влияние потенциала на ход 199
- Электродинамика 96, 265
- Эмиссионная теория света 29
- Энергии—импульса тензор для вещества 83, 196, 224
- - - - идеальной жидкости 225
- - - - излучения 226, 276, 279
- - - - электромагнитного поля 112, 127, 280
- Энергии несохранение 229
- Энергия в термодинамике 131
- Энтропия, вектор 172, 300
- в термодинамике 132, 133
- Эффект Допплера 294, 465
- - в модели де Ситтера 361
- - - - Эйнштейна 351
- - в нестатических моделях 386

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Существует много книг по теории относительности. Их число все время растет, так что современному читателю представляется большой выбор монографий и учебников различной степени полноты и трудности. Но среди всех этих книг сохраняют свою неувядающую ценность книги тех лет, когда теория относительности была еще молодой наукой, полной неожиданностей и парадоксов. В каждой науке от ее молодости остаются классические книги, написанные теми, кто был в рядах ее творцов и первых пропагандистов. Такие книги не могут утратить своего значения; они и сейчас увлекают читателя вниманием к физическому содержанию теории и спокойным, неторопливым стилем изложения. Такого стиля, так нам кажется, не хватает многим новым книгам — именно это делает жизнь многих из них слишком краткой. Напротив, книге Толмена, по которой учились уже несколько поколений физиков (первое издание ее вышло в 1934 г., последнее — в 1969 г.), выпала долгая жизнь. К сожалению, в русском переводе она так и не была издана своевременно и не получила у нас должной популярности. Но и сейчас книга не будет забыта на полке: ее и сейчас полезно внимательно прочесть, так как она по своему характеру не дублирует никакую другую книгу и содержит очень много полезного материала.

Книга Толмена была в свое время одобрена самим Эйнштейном — его отзыв помещен на суперобложке.

Естественно, что книга Толмена требует дополнений. Однако их оказалось бы слишком много, и мы решили ограничиться короткими примечаниями, помещенными в конце соответствующих разделов. За подробным изложением новых задач и теорий, за ссылками на новые книги и статьи читателя следует отослать, например, к книге Вейнберга «Гравитация и космология», перевод которой выходит почти одновременно.

В одном месте решено дополнить изложение статьей самого автора. В тот год, когда вышло в свет первое английское издание книги, Толмен опубликовал известную работу «Эффект неоднородности в космологических моделях». Ее результаты не вошли в книгу. Перевод ее мы поместили после § 165.

Небольшое количество устаревшего материала, связанного с ядерными реакциями в звездах, мы сократили. Об этом сказано в примечаниях.

Я. Смородинский

Дубна, 30 декабря 1973 г.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Цель книги

У этой книги есть три задачи: первая состоит в том, чтобы последовательно и достаточно полно изложить то, что в теории относительности Эйнштейна хорошо известно и общепринято; вторая — обобщить термодинамику так, чтобы она была согласована со специальной, а также и с общей теорией относительности, и, наконец, использовать релятивистские механику и термодинамику для построения и интерпретации космологических моделей.

Специальная теория относительности излагается в первых трех главах, посвященных следствиям двух постулатов теории в области кинематики, механики и электромагнетизма. Эти постулаты формулируются в главе II, носящей название «Специальная теория относительности»; в этой же главе рассказывается кратко об опытах, которые их подтверждают. После этого излагаются кинематические следствия этих постулатов: сначала обычным способом, когда кинематика соотносится с некоторой выделенной трехмерной системой декартовых осей с закрепленным в ней набором часов; затем более абстрактным, квазигеометрическим способом, основанным на понятии четырехмерного пространственно-временного континуума. В главе III «Специальная теория относительности и механика» излагается сначала механика частицы, потом и механика сплошных сред. Изложение основано на системе постулатов, построенной путем добавления законов сохранения массы, равенства действия и противодействия.

При этом мы сможем изложить все достаточно полно без ссылок на аналогию с электродинамикой, рассматривая все на макроскопическом уровне.

Наконец, в главе IV «Специальная теория относительности и электродинамика» мы закончим рассмотрение обычного материала, показав тесную связь, которая существует между специальной теорией относительности и электродинамикой.

В первой части главы IV будет показано, как привести лоренцевскую теорию электрона в соответствие со специальной теорией относительности, считая, конечно, что в разумных

пределах допустим классический подход к микроскопическим объектам, несмотря на очевидную необходимость квантовой электродинамики.

Во второй части главы будет изложена макроскопическая электродинамика движущихся сред, развитая Минковским, которая является релятивистским обобщением исходной максвелловской теории покоящихся сред.

В главе V «Специальная теория относительности и термодинамика» мы переходим к менее известным приложениям специальной теории относительности. В первой части этой главы будет рассмотрено, как теория относительности видоизменяет классическую термодинамику покоящихся систем. Дело в том, что релятивистское соотношение между массой и энергией позволяет естественным образом выбрать для термодинамической системы начальную точку отсчета энергии и по изменению массы в ходе всевозможных физико-химических процессов дает возможность судить об изменении энергии системы. При этом приобретает смысл рассмотрение таких, например, задач, как проблема термодинамического равновесия между водородом и гелием или между веществом и излучением при наличии процессов их взаимопревращения. Исследование этих вопросов также дается в этой части главы*). Во второй части этой главы мы дадим релятивистское обобщение, которое пригодное для изучения движущихся систем. Хотя все результаты, которые можно получить при таком приложении теории относительности к термодинамике, были получены еще Планком и Эйнштейном всего через два года после появления специальной теории, в дальнейшем этой области уделялось очень мало внимания. Дело, по-видимому, было в том, что долго не удавалось осознать существенное различие между соотношением

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.1)$$

связывающим энергию движущейся частицы E с ее собственной энергией E_0 и скоростью u , и соотношением

$$Q = Q_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (1.2)$$

связывающим количество теплоты Q с собственной теплотой Q_0 и скоростью. Отсутствие интереса к этому разделу теории относительности объяснялось еще и тем, что не были известны

*) Эта часть книги наиболее устарела; она подверглась в переводе некоторому сокращению. (Прим. ред.)

физические системы, требующие его приложений. Однако для дальнейшего обобщения термодинамики в рамках общей теории относительности требуется знание термодинамики Планка — Эйнштейна. Поэтому в конце главы IV мы дадим четырехмерную формулировку второго закона термодинамики в специальной теории относительности и будем исходить из нее при переходе к общей теории относительности.

В главе VI «Общая теория относительности» излагаются фундаментальные принципы, лежащие в основе общей теории относительности, и некоторые достаточно простые их приложения. В первой части главы обсуждаются три краеугольных постулата, лежащих в основе теории: принцип ковариантности, принцип эквивалентности и гипотеза Маха. Здесь мы будем придерживаться той точки зрения, впервые выдвинутой Кретчманом, что принцип ковариантности имеет только формально-логический характер и не может приводить к каким-либо физическим следствиям. В то же время, следуя Эйнштейну, мы будем подчеркивать важность ковариантной формы записи при выборе физических аксиом, так как только она позволяет избавиться от обвинений во внесении неявных предположений, которые могут возникнуть при использовании кинематики какой-нибудь конкретной системы отсчета. Обсуждая принцип эквивалентности следует особо подчеркнуть, что его роль состоит не только в том, что он естественным образом обобщает открытый Галилеем закон равенства скоростей всех тел, падающих в пустоте, но и в его физической общности, позволяющей сохранить общую идею относительности для всех видов движения, включая, наряду с равномерным движением, движение ускоренное и вращательное. Термин «гипотеза Маха» будет употребляться для обозначения той общей идеи, что геометрия пространства — времени целиком определяется распределением материи и энергии, иными словами, обязательно имеются какие-то полевые уравнения, связывающие компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ с компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Принимая полевые уравнения, предложенные Эйнштейном, мы во многих разделах книги будем удерживать в них космологический член (Λ -член), который хотя и не имеет прямого эмпирического обоснования, но формально ничему не противоречит и даже необходим в некоторых космологических моделях, которые вполне заслуживают обсуждения.

Во второй части главы VI будут даны элементарные приложения общей теории относительности. Сюда войдут: парадокс часов, который возник в специальной теории относительности и оставался столь загадочным вплоть до создания общей теории относительности; ньютоновская теория тяготения, являющаяся первым и очень близким приближением к эйнштей-

новской теории, а также три решающих эксперимента по проверке общей теории относительности.

Глава VII «Релятивистская механика» разделена на две части. Одна из них посвящена общим принципам механики, а другая — решениям полевых уравнений.

В первой части главы после того, как на примере идеальной жидкости будет исследована природа тензора энергии — импульса и фундаментальных уравнений механики, мы перепишем уравнения механики в виде, содержащем явно псевдотензорную плотность потенциальной гравитационной энергии — импульса \mathfrak{t}_μ^ν . Это позволит получить выведенные Эйнштейном обобщенные законы сохранения энергии и импульса, установить связь энергии и гравитационной массы и показать, что в случае слабых полей энергия системы принимает обычный ньютоновский вид с выделенной явно потенциальной энергией тяготения.

Во второй части главы VII сначала будут найдены эйнштейновские решения полевых уравнений в случае слабых полей. Затем мы обсудим свойства этих решений для специальных случаев (сферической симметрии и т. п.), а также получим явные выражения для символов Кристоффеля и компонент тензора энергии — импульса, которые понадобятся нам в дальнейшем.

В главе VIII «Релятивистская электродинамика» общая теория относительности будет распространена на электронную теорию Лоренца и на макроскопическую теорию Минковского. Затем последует множество приложений: мы получим выражение релятивистского тензора энергии — импульса в задаче об излучении черного тела и рассмотрим два явления: гравитационное взаимодействие световых лучей и частиц и обобщенный эффект Допплера, которые имеют особое значение при интерпретации данных астрономических наблюдений.

В главе IX «Релятивистская термодинамика» будет рассмотрено дальнейшее обобщение термодинамики, основанное на общей теории относительности, и будут даны ее приложения. При этом выяснится, что принципов релятивистской механики самих по себе достаточно для формулировки аналога обычного первого закона классической термодинамики. Аналог второго закона термодинамики получается путем ковариантного обобщения той четырехмерной формулировки второго закона, которую он принимает в специальной теории относительности. Поскольку выбранная аналогия первого закона, как указано выше, не дает ничего, кроме общепринятых результатов теории относительности, то особенности релятивистской термодинамики целиком определяются релятивистским вторым законом. В связи с этим тщательно анализируется смысл постулата, положенного в основу этого закона. Форма этого закона рассматривается

как наиболее вероятное обобщение обычного второго закона, поскольку она является прямой ковариантной переформулировкой обычного второго закона (в дальнейшем, конечно, его следует считать постулатом), справедливость которого может установить лишь эксперимент. Вслед за этим обсуждением последует ряд приложений, на примере которых будет продемонстрировано существенное различие между выводами релятивистской термодинамики и, казалось бы, наиболее вероятными выводами, получаемыми путем непосредственной экстраполяции обычных результатов классической термодинамики.

Так, например, для статических систем будет обнаружено, что физико-химическое равновесие между взаимодействующими веществами, согласно измерениям локального наблюдателя, оказывается таким же, как и в классической теории, однако при этом выявится и нечто новое, а именно обязательное возникновение температурных градиентов для предотвращения протекания теплоты из областей с более высоким гравитационным потенциалом в области с более низким потенциалом, поскольку все виды энергии имеют вес, так же как и обычная масса.

Перейдя затем к нестатическим системам, мы покажем, что здесь имеется конечный класс таких термодинамических процессов, которые могут протекать с конечной скоростью и при этом обратимо, в отличие от требований классической термодинамики, где система и ее окружение только в том случае могут вернуться в начальное состояние, когда процесс протекает бесконечно медленно. В дальнейшем выяснится, что подобные термодинамические выводы находят оправдание в самих принципах релятивистской механики, поскольку эти последние позволяют построить космологические модели, которые могут расширяться до некоторого конечного предела, а затем возвращаться в исходное состояние с точно противоположными скоростями. И наконец, будет обнаружено, что в необратимых процессах, идущих с конечной скоростью, энтропия может возрастать безгранично, вопреки утверждениям классической физики о существовании конечного состояния с максимальной энтропией — состояния полного покоя. Эту новую разновидность термодинамического поведения, которую следует считать в основном результатом видоизменения закона сохранения энергии в общей теории относительности, можно будет в дальнейшем обнаружить на примере космологических моделей, имеющих право на существование в соответствии с принципами релятивистской механики.

Книгу завершает глава X «Космология», после которой идут приложения, содержащие полезные формулы и важнейшие константы.

В первой части этой главы мы покажем, что единственно возможными моделями статической и однородной Вселенной являются модели Эйнштейна и де Ситтера, и обсудим некоторые их существенные свойства безотносительно к тому, хорошо описывают эти модели реальную Вселенную или нет. Затем мы обратимся к нестатическим однородным моделям, которые можно построить с учетом ряда свойств реальной Вселенной, включая, конечно, красное смещение света от внегалактических туманностей. В данном случае нас будет больше всего интересовать, как сопоставить свойства моделей и результаты астрономических наблюдений, при этом способы получения последних обсуждаться не будут. Мы рассмотрим также и такие теоретически возможные свойства указанных моделей, которые в реальной Вселенной пока не обнаружены. Это вполне оправдано, ибо на современной стадии эмпирических наблюдений любая известная модель может претендовать не больше чем на весьма приблизительное отражение реальной Вселенной.

Самый важный пробел автора — это отсутствие среди материала, излагаемого обычно в связи с приложениями специальной теории относительности, раздела, касающегося релятивистской статистической механики газа, разработанной Ютнером [1] и отчасти автором этой книги [2]. Указанный пробел, пожалуй, можно оправдать стремлением избежать в настоящей работе, насколько это возможно, всякого микроскопического анализа. Кроме того, пока известно не так уж много физических ситуаций, где это логически неизбежное расширение теории действительно необходимо.

При изложении общей теории относительности не нашли отражения попытки создать единую полевую теорию, призванную объединить явления электромагнетизма и гравитации в рамках единого «геометрического» подхода. Дело в том, что вплоть до настоящего времени результаты подобных построений либо оказывались эквивалентными обычным релятивистским обобщениям теории электромагнетизма, изложенным в этой книге, либо, будучи привлекательны математически, тем не менее не обладали доказанной физической ценностью. Кроме того, трудно подавить интуитивное ощущение того, что успехи построения единой теории будут связаны с применением микроскопического подхода, который выходит за рамки этой книги.

Наиболее важные нововведения данной книги по сравнению с прежними книгами по теории относительности состоят в том, что в ней впервые изложена термодинамика, построенная на основе общей теории относительности, и материал, посвященный нестатическим моделям Вселенной. Кроме того, на основе релятивистского соотношения между массой и энергией найдены условия термодинамического равновесия, показано, как реля-

тивистское выражение для энергии сводится в случае слабых полей к ньютоновскому, содержащему потенциал тяготения, получены явные выражения компонент тензора энергии — импульса для некоторых полей специального вида, исследован тензор энергии — импульса излучения и рассмотрено гравитационное взаимодействие световых лучей и частиц.

§ 2. Метод изложения

При изложении материала мы будем стараться прежде всего выявить физическую сущность предположений и выводов и вскрыть физический смысл их внутренних связей, не стремясь при этом к математической общности и тем более к математической строгости. По ходу изложения мы будем широко пользоваться языком и методами тензорного анализа, основные формулы которого приведены для удобства читателей в Приложении III. При этом, однако, мы ни в коем случае не собираемся защищать ту ложную позицию, что ковариантное описание исчерпывается возможностями тензорного языка, и будем без зазрения совести использовать эйнштейновскую плотность гравитационного псевдотензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$, если нужно спасти величины, подчиняющиеся законам сохранения и являющиеся релятивистскими аналогами энергии и импульса.

Увлечшись математическими построениями или геометрическими аналогиями, и читатель, и автор могут легко забыть о главной задаче — раскрытии физической сущности предмета исследования. Во избежание этого мы будем часто переводить математические выражения на язык физических понятий. Упор будет делаться на первостепенную с точки зрения физики важность собственных величин, таких, как собственная длина, собственное время, температура, микроскопические плотности и т. д., значения которых могут определяться локальным наблюдателем, использующим обычные методы измерений. Мы особо обсудим, как из координат туманностей получают астрономические оценки их удаленностей.

При изложении специальной теории относительности мы не будем предполагать никаких специальных соотношений между единицами длины и времени, и полученные нами формулы будут явно содержать скорость света c . Однако при изложении общей теории относительности мы будем пользоваться той системой единиц, в которой скорость света и постоянная гравитации равны единице. При этом становится менее ясным прямой физический смысл формул и возможность их непосредственных применений, но значительно упрощается форма записи. Переход к обычным системам единиц читатель может себе облегчить при помощи таблицы из Приложения IV.

При построении механики частицы мы используем прием, близкий к тому, что применялся Льюисом и автором этой книги. Суть его состоит в объединении кинематики специальной теории относительности с законами сохранения массы и импульса. Механика сплошных сред Лауэ будет получена нами при дальнейшем развитии той же самой методики с использованием формулы преобразования для силы, взятой из динамики частицы. Нам кажется, что релятивистскую механику легче всего построить и понять именно при таком подходе, а не с помощью аналогий с электромагнитной теорией или на основе вариационных принципов, как это сделано автором в его более ранней книге [3].

Обращаясь к более общим вопросам, связанным с формой изложения, заметим, что лучше всего было бы следовать строго дедуктивному пути в изложении такой стройной, продуманной теории, как теория относительности. При таком подходе нужно было бы начинать с основных понятий, определений и постулатов, а затем уже строить всю логическую систему рассуждений. Основные понятия и определения составляют материал для всех наших построений; постулаты же вместе с теоремами, выведенными из них с помощью логики (или другой науки, более фундаментальной, чем та, которую мы развиваем), приведут нас к некоторым существенным высказываниям, относящимся к нашему материалу. Полезность такой логической конструкции для объяснения явлений реального мира определится тем, насколько удачно можно установить взаимно однозначное соответствие между исходным материалом и полученными следствиями, с одной стороны, и между основными объектами и закономерностями, наблюдаемыми на практике,— с другой; иными словами, тем, насколько хорошо наша конструкция могла бы служить картой, по которой можно найти дороги во внешнем мире. Хотя в данной книге мы не будем предпринимать попытки сконструировать подобную логическую систему рассуждений и не будем интересоваться таким привлекательным для логиков вопросом, как поиск наименьшего числа взаимонезависимых и совместных постулатов, тем не менее мы все же надеемся, что наш метод изложения выиграет от того, что мы все время будем помнить о существовании такого идеала.

§ 3. Точка зрения

В этой книге мы будем по мере возможности придерживаться макроскопического и феноменологического подхода. В случае релятивистской механики это оказывается возможным благодаря понятию механической среды, в которой тензор энергии — импульса определяется через такие величины, как собственная

макроскопическая плотность вещества ρ_{00} и собственное давление p_0 , которые могут быть непосредственно измерены локальным наблюдателем. Мы избежим, таким образом, введения собственной *микроскопической* плотности вещества ρ_0 . В релятивистской термодинамике метод исследования, естественно, является макроскопическим по самой природе этой науки, если мы, конечно, не прибегаем к ее механико-статистическим обоснованиям. Так, например, величину φ_0 мы будем принимать за плотность энтропии термодинамической жидкости или рабочего вещества, которую локальный наблюдатель измеряет в заданной точке в интересующий нас момент времени обычными термодинамическими методами, пренебрегая тем фактом, что жидкость состоит из отдельных атомов и фотонов. Переходя к электродинамике, мы не можем уже целиком оставаться в рамках макроскопического подхода, так как, несмотря на возможность использовать феноменологическую электродинамику Минковского движущихся сред, приходится рассматривать распространение волн такой высокой частоты, что для их правильного описания необходимо привлекать некоторые формулы квантовой электродинамики.

Мы, конечно, кладем в основу дальнейших построений эйнштейновскую теорию относительности. Оправданием этому служит эмпирическое подтверждение основ специальной и общей теории относительности. Для специальной теории это — эксперимент Майкельсона — Морли, эксперимент Кеннеди по обнаружению преобразования времени и деситтеровский анализ орбит двойных звезд. Для общей теории это — движение перигелия Меркурия, отклонение света, проходящего вблизи Солнца, и влияние разности гравитационных потенциалов на длину волны света. Конечно, в будущем неизбежны какие-то изменения в структуре теоретической физики. Однако множество испытаний, выдержанных теорией относительности, и ее внутренняя логическая стройность позволяют нам верить, что она сохранится и в будущем и что мы можем ее считать надежным фундаментом для макроскопических исследований.

Судя по современному состоянию физики, можно ожидать, что будущие серьезные изменения в теории относительности, по всей вероятности, произойдут в связи с изучением микроскопических явлений, включающих электромагнитные и гравитационные поля вблизи отдельных элементарных частиц *). Здесь понадобится некоторое сближение точек зрения современной теории относительности и квантовой механики, что может произойти

*) Позиции теории относительности сейчас еще более укрепились. Если и можно ожидать серьезных ее изменений, то это может случиться на расстояниях порядка $(\gamma \hbar / c^3)^{1/2} \sim 10^{-33}$ см. (Прим. ред.)

либо, как склонен думать Эйнштейн, в результате статистического описания квантовых явлений, вытекающего из современной единой теории поля, либо, как склонны считать приверженцы квантовой механики, путем некоторого совместного обобщения квантовой механики и квантовой электродинамики. Во всяком случае теория относительности в сегодняшнем виде явно не годится для изучения микроскопических явлений. К счастью, в проблемах небесной механики и космологии нам нет нужды думать об этих трудностях, так как интересующие нас масштабы настолько велики, что наиболее естественно подходить к исследуемым явлениям с макроскопической точки зрения.

Сделаем еще одно замечание, касающееся точки зрения, принятой в этой книге. Следует, по-видимому, отметить весьма отвлеченный, идеализированный характер моделей Вселенной, которые рассмотрены в последней главе. Модели всегда будут намного проще, чем наше реальное окружение. Так, мы вынуждены пренебрегать при их построении отдельными деталями в известной структуре Вселенной или заменять, например, действительное распределение материи непрерывным распределением жидкости. Оправдание подобных идеализаций состоит в том, что при этом сильно упрощается математическое описание. Напомним, что из аналогичных соображений в старой механике приходится вводить невесомые твердые стержни или в классической кинетической теории газа — идеально упругие сферические молекулы. Такие приближения всегда оправданы, если в рассматриваемой упрощенной картине наша физическая интуиция удерживает существенные черты реальности.

В дополнение к совершенно очевидным упрощениям, сделанным при построении космологических моделей, следует принять еще некоторые предположения, касающиеся тех свойств моделей, которые в реальном мире пока не являются установленными. Так, например, поскольку найдено, что распределение внегалактических туманностей приблизительно однородно вплоть до расстояний порядка 10^8 световых лет, то мы обычно предполагаем однородное распределение вещества по всему пространству в наших моделях, даже если и будем подчеркивать, что в реальной Вселенной это не так. Кроме того, мы будем изучать влияние различных предположений, касающихся величины пространственной кривизны и космологической постоянной, поскольку действительные их значения до сих пор неизвестны.

Наконец, в наших поисках гипотетических свойств, которыми Вселенная могла бы обладать в согласии с принятой теорией, мы не будем пренебрегать космологическими моделями, относительно которых заранее известно, что они отличаются от

реального мира в существенных чертах. Так, например, изучение моделей, заполненных одним лишь излучением или заполненных равновесной смесью идеального газа и излучения, может привести к полезным результатам. Мы считаем, что возможность построить космологические модели, отражающие существенные черты действительной Вселенной, должна приносить интеллектуальное удовлетворение и уверенность; в то же время построение космологических моделей с интересными теоретическими свойствами помогает раскрывать новые возможности для наблюдений, даже если эти модели отличаются в какой-то мере от реальной Вселенной. Во всяком случае модели должны, конечно, строиться в соответствии с принятыми физическими теориями, так как именно стремление ученого строить свои теории в логическом соответствии с остальной физикой отличают их от домыслов чудака.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ЧАСТЬ I

ДВА ОСНОВНЫХ ПОСТУЛАТА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

§ 4. Введение

В этой главе мы кратко изложим принципы, которые лежат в основе специальной теории относительности Эйнштейна, и кинематические следствия этой теории. Эта часть теории относительности имеет ограниченную область применимости, так как она позволяет сравнивать измерения лишь таких наблюдателей, которые движутся неускоренно относительно друг друга и находятся в областях пространства и времени, где гравитацией можно пренебречь. В тех случаях, когда наблюдатели находятся в состоянии более сложного относительного движения или в областях, где гравитацией пренебречь нельзя, приходится прибегать к помощи общей теории относительности.

Можно считать, что специальная теория относительности построена на двух постулатах. Начнем с их рассмотрения.

§ 5. Первый постулат, или принцип относительности

Первый постулат теории относительности гласит: *невозможно обнаружить равномерное поступательное движение системы в свободном пространстве или в какой-либо гипотетической эфирной среде, которая могла бы это пространство заполнять.*

Согласно этому постулату можно говорить об относительном движении двух систем, но бессмысленно говорить об абсолютной скорости отдельной системы в свободном пространстве. Из постулата следует, что общие законы физики при описании явлений в свободном пространстве не должны зависеть от скорости конкретной системы координат, используемой для установления этих законов, так как в противном случае можно было бы придать некий абсолютный смысл различным скоростям. Такая формулировка часто оказывается наиболее удобной для получения следствий этого постулата.

Первый постулат оправдывается общими соображениями простоты и естественности; он непринужденно входит в ньютоновскую систему понятий, согласно которой свободное простран-

ство рассматривается как пустое. Однако казалось, что с появлением эфирной теории света возникла возможность придавать определенный смысл различным скоростям движения через эфир и что физические законы должны приобретать особенно простой вид в системе координат, покоящейся относительно эфира.

Поэтому с точки зрения гипотезы эфира сам постулат либо его следствия потребовали экспериментальной проверки. Вообще говоря, эффективность дедуктивного подхода к физике всегда зависит от успеха, с которым этот подход может отображать взаимосвязи явлений реального мира. Отсюда следует, что не обязательно заниматься прямой проверкой самих постулатов, если могут быть проверены их следствия. Однако мы испытываем чувство большего интеллектуального удовлетворения, когда можем выбрать постулаты так, что доступна их прямая экспериментальная проверка.

Счастливым образом положение с прямой проверкой первого постулата в специальной теории относительности оказалось весьма удовлетворительным. Во-первых, укажем на хорошо известный опыт Майкельсона и Морли по проверке гипотезы неподвижного эфира. Майкельсон и Морли пытались обнаружить скорость движения Земли через неподвижный эфир. Однако нулевой эффект, полученный в первой постановке этого опыта и во всех его многочисленных повторениях, исключая результаты Миллера*), оставляет мало сомнений в том, что никакой скорости относительно эфира опыты не обнаружили (даже порядка 30 км/сек, которая могла возникнуть из-за движения Земли по ее орбите). Среди повторений наиболее удачен опыт Кеннеди [6, 7], в котором экспериментальная ошибка при наблюдении нулевого эффекта была сведена до ± 2 км/сек или даже меньше.

Хорошо известно также, что сам по себе результат, полученный в опыте Майкельсона — Морли, можно объяснить не прибегая к гипотезе неподвижного эфира, если предположить, что тела, движущиеся через эфир, испытывают в направлении своего движения так называемое сокращение Лоренца — Фицджеральда. Это сразу решает вопрос, так как вносит необходимое

*) Обзор результатов, полученных вплоть до 1926 г., можно найти в статье Миллера [4]. В этой статье указывается также на отсутствие эффекта дрейфа Земли, который мог бы ожидать из-за ее полной скорости орбитального движения. Отмечен, однако, эффект, соответствующий скорости примерно 10 км/сек вдоль оси с апексом в созвездии Дракона. Этот эффект может возникать из-за скорости движения через эфир около 200 км/сек и может частично компенсироваться сокращением Лоренца — Фицджеральда. Более поздний расчет Миллера содержится в другой его статье [5].

[См. книгу С. И. Вавилова «Экспериментальные основы теории относительности». Сейчас мало кто сомневается в правильности первоначального вывода Майкельсона и Морли. (Прим. ред.)]

искажение в движущийся интерферометр Майкельсона, приводя к нулевому эффекту. Поэтому особенно приятно, что мы имеем теперь второй опыт для прямого подтверждения рассматриваемого постулата — наблюдения Кеннеди; в его постановке эффект движения Земли через неподвижный эфир должен был бы регистрироваться и при наличии реального сокращения Лоренца — Фицджеральда. В этом эксперименте использовался интерферометр Майкельсона с плечами неравной длины. Это позволяет двум вновь сведенным пучкам создать интерференционную картину. При этом устройство интерферометра таково, что разность временных интервалов, за которые пучки проходят от источника до точки их сведения, довольно значительна. Предполагая, что эфир неподвижен и существует сокращение Лоренца — Фицджеральда, связанное с движением через эфирную среду, можно показать, что указанная временная разность очень просто зависит от разности длин плечей и от скорости движения аппаратуры через эфир. Таким образом, если длина волны света источника не зависит от этой скорости, то следует ожидать сдвига интерференционных полос, связанного с суточными изменениями скорости аппаратуры в эфире из-за обращения Земли вокруг своей оси и с годовыми изменениями, происходящими из-за вращения Земли по ее орбите. Этот опыт, естественно, был очень труден, но в конечном итоге Кеннеди и Торндайк [8] убедительно показали отсутствие эффекта в пределах экспериментальной ошибки, соответствующей скорости всего лишь ± 10 км/час.

В дополнение к опытам Майкельсона — Морли и Кеннеди — Торндайка было проведено множество других экспериментов различного характера, однако эффект движения Земли сквозь эфир ни в одном из них не был обнаружен [9]. Некоторые из них весьма любопытны, но два решающих опыта, придуманных Майкельсоном и Кеннеди, наиболее важны и наиболее просто связаны с пространственно-временными представлениями специальной теории, относительности. Для того чтобы объяснить эти эксперименты, не отказываясь от гипотезы о неподвижном эфире, необходимо вводить неправдоподобные предположения, вроде того, что изменение длины или сокращение Лоренца — Фицджеральда могут приводить в опыте Майкельсона в точности к нулевым результатам; или же, что изменения частоты света или масштаба времени компенсируют эффект в опыте Кеннеди; т. е. предположения о том, что природа так хитро устроена, что наличие неподвижного эфира невозможно обнаружить. В теории относительности, однако, мы с самого начала исходили из предположения, что абсолютная скорость не может иметь никакого смысла. Следовательно, не представляют ничего неожиданного и результаты проделанных экспериментов. Более того, в ходе

развития рассматриваемой теории мы получим простую, непри-
нужденную замену предположений относительно изменений мас-
штабов длины и времени, которые надо было вводить весьма
искусственным и произвольным образом, для того чтобы сохра-
нить гипотезу неподвижного эфира.

§ 6. Второй постулат теории относительности

Кроме первого постулата в основе специальной теории отно-
сительности лежит еще второй: *скорость света в свободном про-
странстве одинакова для всех наблюдателей вне зависимости от
относительных скоростей источника света и наблюдателя.* Этот
постулат на самом деле можно считать комбинацией двух пред-
положений. Одно из них известно из эфирной теории света — не-
зависимость скорости света от скорости источника. Другое явля-
ется следствием первого постулата и формулируется так: не
имеет никакого смысла абсолютная скорость источника, можно
вести лишь относительную скорость источника и наблюдателя.

Сделаем еще одно важное замечание. Можно считать, что
второй постулат вытекает из волновой теории света, которая
предполагает, что свободное пространство заполнено некоей упру-
гой средой — эфиром, в то время как первый постулат отражает
противоположную, совершенно естественную точку зрения Нью-
тона, согласно которой свободное пространство должно быть пу-
стым. Неудивительно, что объединение принципов столь различ-
ной природы должно было существенно изменить наши прост-
ранственно-временные представления.

Когда Эйнштейн создал специальную теорию относитель-
ности, не было никаких экспериментальных данных о независи-
мости скорости света от скорости источника и второй постулат был
принят благодаря его близости волновой теории света. В насто-
ящее время, однако, экспериментальных данных уже достаточ-
но, чтобы с определенностью исключить кажущуюся естествен-
ной альтернативную возможность — обычное сложение скорости
света и скорости источника (предположение, выдвигающееся
так называемой эмиссионной теорией света).

Наиболее убедительные данные, противоречающие простому
сложению скорости света со скоростью источника, были получе-
ны Комстоком [10] и де Ситтером [11], занимавшимися расче-
том движения двойных звезд. Рассмотрим такой удаленный дуб-
лет, предполагая, что скорость света связана аддитивно со ско-
ростью источника. Тогда очевидно, что время, за которое свет
доходит до Земли от данного члена дублета, должно значитель-
но сокращаться, если в момент испускания света звезда сближа-
ется с Землей, и должно увеличиваться, когда звезда расходится
с Землей. Анализ, проведенный де Ситтером, показал, что воз-

возможные в этом случае эффекты можно описать, вводя некий искусственный эксцентриситет рассчитываемой орбиты. Однако орбиты всех обнаруженных дублетов обладают малыми эксцентриситетами, откуда вытекает, что скорость света не может приобретать сколько-нибудь значительную долю скорости источника.

В дополнение к этому очень сильному подтверждению принципа постоянства скорости света имеется еще и ряд оптических экспериментов. Все они указывают на несостоятельность различных модификаций эмиссионной теории света, сходящихся в том, что скорость света от движущегося источника должна представляться векторной суммой обычной скорости света c и скорости источника v , но расходящихся далее в предположениях о величине скорости света, отраженного зеркалом. Имеются три предположения, частично уже нами рассмотренные:

1) возбужденная часть вещества, из которого состоит зеркало, действует как новый источник, и отраженный свет имеет ту же самую скорость c относительно зеркала, что и свет относительно первоначального источника [12];

2) отраженный свет имеет скорость c относительно зеркального отражения своего источника [13];

3) на протяжении всего пути свет сохраняет скорость c относительно своего первоначального источника [14].

Оптические эксперименты, противоречащие первым двум предположениям, найти нетрудно [15, 16]. Однако третье предположение лежит в основе хорошо продуманной эмиссионной теории Ритца, оптические опыты по проверке которой трудны экспериментально, поскольку зависят от эффектов второго порядка по v/c . Однако Ла-Роза и автор этой книги отмечали [17], что если справедлива теория Ритца, опыт Майкельсона — Морли с лучом света от Солнца, а не от земного источника должен был бы привести к сдвигу интерференционной картины за счет орбитальной скорости движения Земли вокруг Солнца. Такой опыт был проделан Миллером*), однако никаких эффектов обнаружено не было [18].

§ 7. Необходимость изменения прежних представлений о пространстве и времени

Будем теперь считать, что оба постулата теории относительности экспериментально обоснованы. Посмотрим, как они влияют на наши представления о природе пространства и времени.

*) Миллер провел пять серий наблюдений с использованнем солнечного света в обсерватории Маунт Вильсон в 1924 г. При сравнении этих результатов с данными, полученными непосредственно до и после основного эксперимента с помощью ацетиленовой лампы, оказалось, что они полностью совпадают.

Поскольку первый постулат есть естественное следствие ньютоновской точки зрения, что свободное пространство является пустым, а второй — естественное следствие противоположного предположения, что все пространство заполнено неподвижным эфиром, можно ожидать, что совместное рассмотрение этих постулатов должно привести к выводам, противоречащим нашему прежнему пониманию природы пространства и времени. Проиллюстрируем это на простом примере.

Рассмотрим источник света S (рис. 1) и две системы: A — движущуюся *по направлению* к источнику S , B — от него. Наблюдатели в обеих системах отмеряют определенные расстояния aa'

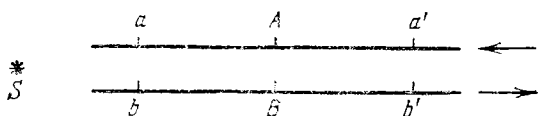


Рис. 1.

и bb' , равные, скажем, одному километру, чтобы измерить скорость света, определив время, необходимое свету для прохождения этих расстояний.

Согласно первому постулату теории относительности нельзя придать смысла абсолютным скоростям этих двух систем, но можно говорить об их скоростях относительно источника. Согласно же второму постулату измеряемая наблюдателем скорость не может зависеть от относительной скорости источника и наблюдателя.

Тогда мы приходим к заключению, что время, необходимое свету для прохождения расстояния от a до a' , должно равняться времени распространения света от b до b' , несмотря на то что A движется к источнику, а B — от него. На первый взгляд кажется, что этот результат противоречит здравому смыслу. Однако если оба постулата теории относительности справедливы, то, очевидно, наше обычное представление о природе пространства и времени не совсем правильно.

Дело, по всей вероятности, в том, что наша интуиция в области пространственных и временных явлений рождается на основании пока еще весьма ограниченного опыта человечества в этой области.

Разобранный пример и экспериментальное подтверждение постулатов специальной теории относительности заставляют нас признать необходимость детального изучения соотношений, связывающих результаты пространственных и временных измерений, которые производятся наблюдателями, находящимися в состоянии относительного движения. Мы займемся этим в следу-

ющем параграфе; при этом мы будем не только стремиться развить корректные методы рассмотрения кинематических задач, но и попытаемся улучшить наше понимание процессов пространственно-временных измерений.

§ 8. Преобразования Лоренца

Изучим теперь основную проблему — проблему связи пространственных и временных измерений, производимых наблюдателями, которые находятся в состоянии относительного движения. Для этого рассмотрим две системы пространственно-временных координат S и S' (рис. 2), движущихся с относительной скоростью V^*), по которой для простоты направим ось x . В каждой из систем заданы праввинтовые системы декартовых пространственных координат, как указано на рисунке, и имеются

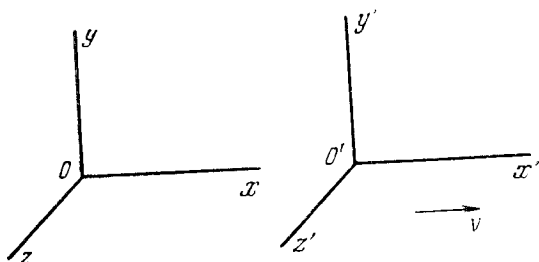


Рис. 2.

наборы часов, расположенные через соответствующие интервалы в направлении движения.

Таким образом, *положение* любой данной точки пространства, в которой происходит некоторое событие, можно определить либо ее пространственными координатами x, y, z в системе S , либо координатами x', y', z' в системе S' . Время события определяется по показаниям часов t и t' в обеих системах.

Для простоты системы выбираются так, что декартовы оси Ox и $O'x'$ параллельны друг другу, а *время* в обеих системах отсчитывается с момента совпадения начал координат O и O' .

Далее возникает специфическая проблема: как получить уравнения преобразований, связывающие переменные этих двух систем? Поставим задачу более точно. Пусть *определенный* кине-

*) Будем пользоваться прописной буквой V для обозначения относительной скорости двух систем отсчета, а строчными буквами v и v' для обозначения скорости точки относительно этих систем отсчета.

матический процесс изучается наблюдателем, движущимся вместе с системой S' , который описывает его развитие с помощью величин x' , y' , z' и t' . Надо найти систему преобразований этих величин, приводящую к правильному описанию *того же самого* процесса в переменных x , y , z и t , которые используются наблюдателем, движущимся вместе с системой S .

Впервые такого рода выражения получил Лоренц, и потому их обычно называют лоренцевскими правилами преобразований или преобразованиями Лоренца, однако вся их важность была оценена лишь Эйнштейном, рассмотревшим их с точки зрения относительности всякого движения. Эти преобразования могут быть записаны в виде

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (8.1)$$

где V — относительная скорость двух систем, а c — скорость света. Или, выражая нештрихованные величины через штрихованные, получаем

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.2)$$

Эти уравнения с необходимостью вытекают из первого и второго постулатов теории относительности при естественных предположениях о евклидовости мира, об однородности пространства и времени и т. д. Мы ограничимся здесь утверждением, что это действительно так.

Согласно первому постулату теории — бессмысленности абсолютной скорости — две системы S и S' , введенные выше, должны полностью быть эквивалентны в смысле их пригодности для описания физических явлений. Следовательно, правила преобразования от переменных системы S к переменным системы S' должны иметь тот же самый вид, что и правила обратного преобразования, конечно, с точностью до знака относительной скорости V . Это условие выполняется на самом деле, поскольку система уравнений (8.2), полученная из системы (8.1), полностью совпадает с последней по форме, если в ней заменить $+V$ на $-V$.

В соответствии со вторым постулатом относительности скорость света должна быть одинаковой в обеих рассматриваемых системах координат. Чтобы убедиться в этом, заметим, что правила преобразований Лоренца оставляют инвариантной следующую величину:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (8.3)$$

Последнее становится очевидным, если подставить соотношения

(8.2) в выражение (8.3):

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 &= \\ &= \left(\frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right)^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 \left(\frac{dt' + (V dx'/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right)^2 = \\ &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Из инвариантности этого выражения, однако, сразу следует, что измеряемая скорость света будет одной и той же в обеих системах, поскольку если распространение импульса света со скоростью c относительно системы S описывается уравнением

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0, \quad (8.5)$$

то тот же импульс будет распространяться с той же скоростью c в системе S' согласно уравнению

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0. \quad (8.6)$$

Итак, мы убедились, что правила преобразований Лоренца соответствуют двум постулатам теории относительности. Отметим также, что эти правила находятся в соответствии с нашими представлениями об однородности пространства и времени. Далее, если относительная скорость систем V мала по сравнению со скоростью света, найденные правила сводятся к так называемым галилеевым правилам преобразований

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (8.7)$$

Эти правила были установлены на основании опытов при малых скоростях и считались точными по представлениям Галилея и Ньютона о природе пространства и времени.

Надо также отметить, что множество лоренцевых преобразований для всех систем, находящихся в состоянии относительного неускоренного движения, образует группу, т. е. конечный результат последовательных преобразований между системами координат эквивалентен единственному преобразованию от первоначальной системы к конечной. Укажем еще, что преобразования становятся мнимыми, если относительная скорость двух систем V больше скорости света. Этот результат совпадает с выводом, который будет сделан в следующем параграфе, что величину скорости света c следует рассматривать как верхний предел для относительных скоростей материальных систем.

Из полученных преобразований Лоренца путем несложных преобразований можно вывести ряд уравнений, которые позволяют наиболее простым образом интерпретировать результаты измерений геометрических и кинематических величин.

§ 9. Правила преобразования пространственных и временных интервалов. Сокращение Лоренца и растяжение времени

С помощью обычного дифференцирования уравнений (8.1) легко получить соотношения

$$dx' = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - V dx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.1)$$

Будем считать, что малые величины dx , dy , dz , dt и dx' , dy' , dz' , dt' определяются в результате производимых в обеих системах пространственных и временных измерений интервалов, которые характеризуют различия пространственно-временных положений двух последовательно происходящих событий. С помощью уравнений (9.1) удобно сравнивать результаты измерений стержней и показания часов в обеих системах.

Допустим, что производятся измерения длин двух стержней, установленных параллельно оси x в каждой из систем, причем есть способ сравнивать нанесенные на эти стержни масштабные отметки, когда стержни скользят относительно друг друга. В качестве изучаемых событий будем рассматривать совмещение масштабных делений одной линейки с масштабными делениями другой.

Выясним сперва, как будет выглядеть отрезок dx' , отложенный для измерения стержня в системе S' , при измерении его в системе S . Для этого рассмотрим совпадения между крайними точками dx' и масштабными отметками на стержне из системы S , которые представляются одновременными в системе S . Так как эти совпадения являются одновременными в системе S , имеем

$$dt = 0. \quad (9.2)$$

Подставляя это условие в систему уравнений (9.1), получаем

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{или} \quad dx = dx' \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad (9.3)$$

откуда следует вывод, что длина отрезка dx' , отмеренного на стержне, перемещающемся с системой S' , в системе S уменьшается и равняется $dx' \sqrt{1 - V^2/c^2}$ в единицах системы S , если положение его концов представляется одновременным в этой системе.

Произведем обратный мысленный эксперимент. Найдем, как изменяется длина отрезка dx , отложенного на стержне из системы S , если одновременно зафиксировать положение обоих его концов в системе S' . Поскольку теперь одновременное наблюдение производится в системе S' , согласно последнему уравнению

(9.1) имеем

$$dt' = \frac{dt - V dx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 0. \quad (9.4)$$

Подставляя этот результат в первое из соотношений (9.1), находим

$$dx' = dx \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (9.5)$$

В итоге приходим к выводу, что стержень, движущийся вместе с системой S , сокращается в том же отношении, что и выше, когда его концы одновременно фиксировались в системе S' .

Таким образом, ситуации оказываются взаимозаменяемыми и находятся в полном соответствии друг с другом. В обоих случаях мы приходим к выводу, что стержень сокращается в отношении $\sqrt{1 - V^2/c^2}:1$, когда он движется со скоростью V относительно системы, в которой производятся измерения его длины. (За единицу принята длина стержня в покое.)

В свете постулатов теории относительности полученный результат, называемый сокращением Лоренца, следует считать совершенно *реальным*. Надо, правда, помнить об экспериментальных трудностях прямых наблюдений такого рода эффектов*). Подчеркнем, что рассмотренный нами эффект отличается от гипотетического сокращения Лоренца — Фицджеральда, с помощью которого они пытались объяснить результаты опыта Майкельсона — Морли. Действительно, нами получено симметричное соотношение между результатами двух измерений стержней, находящихся в состоянии относительного движения, в то время как гипотеза Лоренца — Фицджеральда требует изменения длины единственного эталонного стержня, которое зависит от его собственной скорости в неподвижном эфире.

Обращаясь теперь ко второму и третьему уравнениям системы (9.1), сразу замечаем, что результаты измерений, получаемых в двух системах отсчета, не будут отличаться, если измеряемые отрезки расположены перпендикулярно к направлению движения. Так, не должна изменяться длина стержня, движущегося в направлении, перпендикулярном к нему самому, когда измерения производятся по масштабным делениям оси, параллельной стержню. Последнее непосредственно согласуется с возможностью прямых сравнений длин двух линеек, которые смещаются под прямыми углами по отношению к своим протяженностям. В самом деле, в этом случае утверждение, что концы одной из линеек совпадают с концами другой, справедливо вне зависимости от движения наблюдателя.

*) См., например, Я. А. Смородинский, В. А. Угаров, УФН 107, 141 (1972). (Прим. ред.)

С помощью уравнений (9.1) можно также сравнивать показания часов, находящихся в состоянии относительного движения. Допустим, что временной интервал между двумя событиями, которые происходят в одной и той же точке в системе S' , измеряется *единственными* часами в этой системе. Определим соответствующие показания по часам системы S . Так как оба события происходят в одной и той же точке в системе S' , из первого уравнения (9.1) получаем

$$dx' = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 0. \quad (9.6)$$

Подставляя выражение (9.6) в четвертое из уравнений (9.1) находим

$$dt' = dt \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad \text{или} \quad dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (9.7)$$

откуда заключаем, что временной интервал между двумя событиями, равный dt' , если его измерять по часам системы S' , оказывается *бóльшим*, равным $dt'/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, при измерении его по часам, покоящимся в системе S .

Точно так же можно найти, как изменяется временной интервал dt между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке в системе S , в зависимости от того, измеряется ли он *единственными* часами, покоящимися в системе S , или с помощью часов, покоящихся в системе S' . В этом случае, поскольку оба события происходят в одной и той же точке в системе S , имеем

$$dx = 0. \quad (9.8)$$

Подставляя это условие в четвертое из уравнений (9.1), немедленно получим

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.9)$$

Итак, мы опять приходим к выводу, что временной интервал между двумя событиями, равный dt , если его измеряют некоторыми часами, будет больше, если его измерят часами, относительно которых первые часы движутся.

Отметим, что ситуации с временными измерениями, так же как ситуации с измерениями длин стержней, симметричны и вполне согласованы. Так, в обоих случаях масштаб единицы времени, отсчитываемого по часам, покоящимся относительно наблюдаемого объекта, оказывается растянутым в отношении $1 : \sqrt{1 - V^2/c^2}$ по сравнению с масштабной единицей на часах, движущихся со скоростью V относительно этого объекта.

Мы должны считать, что *растяжение времени* и сравнение хода часов представляют собой свойства часов, находящихся

в относительном движении, полностью проверяемые на опыте (если не думать об экспериментальных трудностях), точно так же как лоренцево сокращение есть свойство масштабов, находящихся в относительном движении, проверяемое на опыте. Подобно тому, как эксперимент Майкельсона — Морли можно рассматривать как прямую проверку лоренцева сокращения, эксперимент Кеннеди — Торндайка есть прямая проверка растяжения времени.

Прежде чем закончить этот параграф, приведем четвертое из уравнений (9.1) к виду, в котором оно находит частое применение. Разделим его для этого на интервал dt , что дает

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1 - \frac{V\dot{x}}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.10)$$

Это соотношение связывает результаты, получаемые в системах S и S' при измерении временных интервалов dt и dt' между двумя событиями, близкими во времени и в пространстве. При этом измеряемая в системе S проекция пространственного интервала на ось x равна расстоянию, покрываемому со скоростью \dot{x} за время dt .

§ 10. Преобразования скорости

С помощью уравнений (8.1) и (9.10) легко найти выражения для преобразования скорости к новой системе отсчета. Дифференцируя первые три уравнения (8.1) по t' и подставляя в них значение dt'/dt из (9.10), получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{\dot{x} - V}{1 - \dot{x}V/c^2} & \text{или} & & u'_x &= \frac{u_x - V}{1 - u_x V/c^2}, \\ \dot{y}' &= \frac{\dot{y} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \dot{x}V/c^2} & \text{или} & & u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - u_x V/c^2}, \\ \dot{z}' &= \frac{\dot{z} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \dot{x}V/c^2} & \text{или} & & u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - u_x V/c^2}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где точки над величинами означают дифференцирование по времени, введенному в данной конкретной системе координат. Так, например, x -овые компоненты скоростей в двух системах имеют вид

$$u_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad u'_x = \dot{x}' = \frac{dx'}{dt'}.$$

Смысл полученных правил преобразования следующий: если наблюдатель в системе S находит, что некоторая точка движется с постоянной скоростью $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, то ее скорость $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$, измеренная наблюдателем в системе S' , может быть вычислена по уравнениям (10.1).

Уравнения для обратного перехода можно найти, выразив нештрихованные величины через штрихованные. Это можно сделать двумя способами: либо разрешив уравнения (10.1) относительно нештрихованных величин, либо заменив в них штрихованные величины на нештрихованные и наоборот, поменяв при этом знак скорости V .

Согласно первому постулату теории относительности результаты такой замены должны совпадать с первоначальными выражениями. Наиболее удобными обычно бывают уравнения преобразования в виде, получаемом разрешением соотношений (10.1) относительно нештрихованных величин, так как именно в этом виде уравнения преобразования наиболее употребительны. Поэтому мы выпишем уравнения, обратные уравнениям (10.1), и в дальнейшем будем записывать все преобразования в виде, разрешенном относительно штрихованных переменных. Таким образом, запишем:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x V/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + u'_x V/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + u'_x V/c^2}. \quad (10.2)$$

Все уравнения преобразования сразу указывают на то, что скорость света c следует рассматривать как верхний предел возможных скоростей. Этот вывод проще сделать на основании уравнений (10.2). Относительная скорость двух систем фигурирует в них с положительным знаком. Предположим теперь, что скорость системы S' относительно системы S равна предельной величине c . Будем считать, что в системе S' пролетает частица, которая также имеет предельную скорость $u'_x = c$ в направлении движения системы S' . Однако согласно первому из уравнений (10.2) скорость этой частицы относительно системы S все же останется равной скорости света:

$$u_x = \frac{c + c}{1 + c^2/c^2} = c, \quad (10.3)$$

что и требовалось доказать.

В дополнение к этому указанию на предельный характер скорости света в дальнейшем мы обнаружим, что для того, чтобы придать материальной частице эту предельную скорость относительно системы, в которой частица вначале покоилась, требуется сообщить ей бесконечную энергию. Кроме того, не следует забывать и о причинной связи событий, особенно существенной при

макроскопических рассмотрений. Если исходить из нее, то можно показать, что причинный импульс не может передаваться со скоростью, большей скорости света, в противном случае это привело бы к возможности перехода к системам координат, в которых следствие предшествовало бы причине ([3], § 52).

§ 11. Преобразование лоренцева множителя

Величина $\sqrt{1-u^2/c^2}$ определяет лоренцево сокращение тела, которое движется со скоростью u относительно данной системы координат. Эта величина будет очень часто встречаться при дальнейших рассмотрении. Поэтому выпишем для нее отдельно правило преобразования, полученное с помощью уравнений (10.2):

$$\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{\sqrt{1-u'^2/c^2} \sqrt{1-V^2/c^2}}{1+u'_x V/c^2}, \quad (11.1)$$

где

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \quad (11.2)$$

§ 12. Преобразование ускорения

Еще раз продифференцировав уравнения (10.2), получим правила преобразования ускорения. Выпишем их в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)^{-3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \dot{u}'_x, \\ \dot{u}_y &= \left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)^{-2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \dot{u}'_y - u'_y \frac{V}{c^2} \left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)^{-3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \dot{u}'_x, \\ \dot{u}_z &= \left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)^{-2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \dot{u}'_z - u'_z \frac{V}{c^2} \left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)^{-3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \dot{u}'_x. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Отметим одно интересное обстоятельство. Из соотношений (10.2) вытекает, что, если скорость постоянна в системе S' , она постоянна и в системе S . Из уравнений же (12.1) следует, что постоянное ускорение в системе S' , вообще говоря, не приводит к постоянному ускорению в системе S . В самом деле, компоненты ускорения в S зависят не только от ускорения в S' , но также и от компонент скорости в этой системе, которые изменяются со временем.

При преобразованиях скорости (10.2) и ускорения (12.1) предполагается, конечно, что речь идет об описании движения частицы в некоторой определенной точке ее пути.

ЧАСТЬ II

ИЗЛОЖЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
С ПОМОЩЬЮ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 13. Пространственно-временной континуум

В первой части этой главы мы обсудили следствия постулатов теории относительности. Была обнаружена тесная связь между пространственными и временными измерениями. Ее легко увидеть, сравнивая обычные галилеевы преобразования (8.7) с лоренцевыми преобразованиями (8.1). Например, галилеево преобразование времени

$$t' = t \quad (13.1)$$

указывает на универсальность времени по отношению к любому наблюдателю, в то время как соответствующее уравнение Лоренца

$$t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (13.2)$$

утверждает, что нет единственного универсального времени для всех наблюдателей. Другими словами, при переходе к новой системе координат нельзя отсчитывать время прежним способом — по часам, сохраняющим свое состояние движения в прежней системе отсчета, если считать, что законы физики должны выражаться в форме, неизменной для всех систем координат.

Справедливость постулатов теории относительности указывает на неточность прежнего понимания пространства и времени как двух независимо существующих континуумов — трехмерного континуума, в котором мы определяем пространственное положение объектов, и независимого одномерного континуума, в котором производятся временные измерения. Такое представление не давало правильной связи между результатами пространственных и временных измерений.

Альтернативная концепция о пространстве — времени как комбинированном четырехмерном континууме впервые была введена Минковским и оказалась в этом отношении весьма плодотворной.

Займемся формулировкой специальной теории относительности в этом новом подходе. Значение его мы сразу оценим, как только обнаружим явные его преимущества. Прежде всего, развивается правильное восприятие пространственно-временных явлений. Далее, при новом подходе исчезает выделенность осей в направлении относительного движения систем отсчета, существовавшая прежде.

Квазигеометрический язык, используемый при изучении свойств четырехмерного континуума, достаточно прост и часто подсказывает решения, которые трудно найти с помощью других способов.

Так, например, если бы Эйнштейн отказался от четырехмерного формализма, ему вряд ли удалось бы развить общую теорию относительности.

Эта часть второй главы в основном будет посвящена изучению математических свойств так называемого «плоского» пространства — времени, пригодного для описания явлений в специальной теории относительности. Однако многие выводы окажутся фундаментальными для последующего рассмотрения «кривого» пространства — времени общей теории относительности.

§ 14. (3+1)-мерное пространство — время

Чтобы выяснить природу пространственно-временного континуума, полезно сразу перейти на язык четырехмерной геометрии. На этом языке пространство — время можно рассматривать как соответствующее гиперпространство четырех измерений, в котором удобно задавать четыре взаимно перпендикулярные оси для отсчета значений координат x , y , z и t при описании пространственно-временных явлений. В соответствии с таким подходом место, в котором произошло событие, и момент времени, когда оно произошло, задаются положением единственной точки четырехмерного континуума.

При этом бессмысленно считать, что все направления в гиперпространстве эквивалентны. Например, считать, что распространение во времени имеет ту же самую природу, что и распространение в пространстве, поскольку мы рассматриваем явления в системе из четырех взаимно ортогональных осей. Это было бы подобным тому, чтобы давление и объем считать величинами одной природы лишь на том основании, что они откладываются под прямыми углами на графике диаграммы pv . То, что различие между пространственными и временной осями в нашем гиперпространстве существует, совершенно очевидно. Можно, например, измерить стержень, сначала направив его по оси x , а потом повернуть его и измерить его размеры по шкале оси y , но невозможно направить его вдоль оси, на которой откладываются временные интервалы. Другими словами, невозможно произвольное физическое вращение стержня в пространстве — времени. Время, таким образом, нельзя рассматривать просто как четвертую компоненту пространства. Оно приобретает смысл лишь как особая, выделенная компонента пространства — времени. Это различие обычно подчеркивается тем, что

говорят о пространственно-временном континууме как $(3+1)$ -мерном, а не просто четырехмерном. $(3+1)$ -мерный характер континуума пространства — времени полностью определяет выбор геометрии. Мы убедимся в этом ниже, в § 16.

§ 15. Геометрия пространства — времени

Итак, мы предопределили выбор геометрии, введя пространственно-временной континуум. Теперь мы должны надлежащим образом приспособить математический аппарат для записи следствий постулатов теории относительности. Одно из наиболее фундаментальных и существенных следствий — инвариантность относительно преобразований Лоренца выражения

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (15.1)$$

Это выражение было введено выше (см. (8.4)). Определим теперь вид геометрии пространства — времени, руководясь этим свойством инвариантности.

Исходя из инвариантности выражения (15.1), примем в качестве элемента интервала 4-мерного гиперпространства, выраженного через x , y , z и t , следующее выражение *):

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2. \quad (15.2)$$

Так как такой элемент интервала в пространстве является объектом, существующим независимо от любого конкретного задания осей координат, то он инвариантен при любых преобразованиях координат. Следовательно, выбор выражения (15.2) в качестве отправного пункта обеспечивает необходимую инвариантность не только относительно группы лоренцевых преобразований, которые не изменяют вид правой части выражения (15.2), но и относительно любых возможных преобразований координат. Это дополнительное свойство проявится в полной мере, когда мы перейдем к рассмотрению общей теории относительности.

Известно, что от вида линейного элемента полностью зависит природа данной геометрии **). Поэтому выбор выражения (15.2) уже предопределил все геометрические свойства пространства — времени. Найдем теперь какое-нибудь достаточно простое свойство и убедимся в пользу геометрического подхода в теории относительности.

*) Естественно, что выбор отрицательного знака при пространственных компонентах и положительного для временной совершенно условен. Будем придерживаться этого наиболее распространенного способа.

***) Исключая возможные дальнейшие предположения относительно связности пространства и способов идентификации точек.

§ 16. Сигнатура линейного элемента и три типа интервалов

Квадратичная форма, линейный элемент (15.2), характеризуется отрицательными знаками перед пространственными компонентами dx^2 , dy^2 , dz^2 и положительным при временной компоненте c^2dt^2 . Это различие знаков отражает, как уже подчеркивалось выше, различие в природе пространственных и временных движений.

Сигнатура нашей квадратичной формы, равная минус двум, соответствует трем отрицательным знакам и одному положительному и не изменяется при любых *действительных* преобразованиях координат. Поэтому различие между временной и пространственными координатами всегда сохраняется, и мы всегда можем отличить времениподобную координату от других по ее знаку. Если ввести *мнимые* преобразования координат, сигнатура квадратичной формы изменится, однако координаты все же можно различать, если знать, является действительной или мнимой связь этих координат с реальными физическими величинами.

Переходя в выражении (15.2) к мнимым пространственным координатам

$$x = i\tilde{x}, \quad y = i\tilde{y}, \quad z = i\tilde{z}, \quad ct = \tilde{u}, \quad (16.1)$$

получим

$$ds^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 + d\tilde{u}^2. \quad (16.2)$$

Сигнатура при этом становится равной +4. Имея в виду эту простую формулу, часто говорят, что геометрия, используемая в специальной теории относительности, соответствует четырехмерному евклидову (плоскому) пространству. Формула (16.2) в ряде случаев упрощает математическую трактовку. Однако на самом деле этот прием, давая небольшие упрощения, может приводить и к некоторой путанице и часто вынуждает переходить для выяснения физического смысла к обычным пространственно-временным координатам. Поэтому мы откажемся от применения мнимых координат (16.1) в этой книге.

Рассмотрим выражение для интервала в его первоначальном виде:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2. \quad (16.3)$$

Отметим, что в противоположность геометриям, в которых сигнатура равна числу координат, в данном случае свойства интервалов могут быть различными. Можно различать интервалы по относительной величине временной и пространственной компонент. Будем называть интервал *пространственноподобным* (времяподобным), если величина $dx^2 + dy^2 + dz^2$ больше (меньше), чем величина c^2dt^2 , и *сингулярным*, если эти величины равны.

Для пространственноподобного интервала всегда можно найти (§ 18) лоренцевы преобразования к так называемым собственным координатам, когда временная компонента становится равной нулю. Таким образом, величину пространственноподобного интервала всегда можно определить физическим путем, т. е. сравнивая его с соответствующим образом движущейся и ориентированной масштабной линейкой. Точно так же величину времениподобного интервала можно определять с помощью часов. Величины же сингулярных интервалов в любом случае остаются нулевыми.

Найденная нами возможность однозначных непосредственных измерений интервалов с помощью обычных физических методов согласуется со свойством инвариантности интервалов относительно преобразований координат. Заметим также, что в результате проведенного обсуждения мы нашли физическую интерпретацию геометрическим результатам.

§ 17. Лоренцевы повороты осей

Вводя геометрию, связанную с пространственно-временным континуумом, мы, конечно, не обязаны пользоваться только какой-то одной определенной системой координат x , y , z и t . При желании всегда можно перейти к любому новому набору четырех координат, если их функциональная связь с первоначальными координатами известна. Из различных возможных преобразований отберем для нужд специальной теории относительности только те, что не изменяют формы элемента интервала, т. е. не добавляют смешанные произведения к сумме квадратов:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2. \quad (17.1)$$

Введение преобразований более общего вида становится необходимым лишь в общей теории относительности. Объясним это на более геометрическом языке. В самом деле, пространство — время, введенное в специальной теории относительности, — плоское и позволяет использовать прямоугольные координаты, в которых интервал выражается простой формулой (17.1). Следовательно, введение криволинейных координат не может дать никаких преимуществ до тех пор, пока не введено «кривое» пространство — время общей теории относительности.

Замены координат, оставляющие инвариантной форму (17.1), включают:

а) преобразования, которые геометрически означают перенос начала координат, например:

$$x' = x + x_0, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (17.2)$$

где x_0 — константа;

б) преобразования, которые можно рассматривать как пространственные вращения осей, например:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (17.3)$$

где θ — угол вращения в плоскости xy ; и, наконец,

в) преобразования Лоренца, связанные с изменением скорости системы пространственных осей, причем такой пример уже приводился:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (17.4)$$

То, что преобразования (17.2) и (17.3) не изменяют вида правой части (17.1), можно проверить непосредственно, а инвариантность формы (17.1) относительно преобразований (17.4) уже была доказана выкладками (8.4).

Преобразования (17.4) могут быть также записаны в виде

$$x' = x \operatorname{ch} \varphi - ct \operatorname{sh} \varphi, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = ct \operatorname{ch} \varphi - x \operatorname{sh} \varphi, \quad (17.5)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arcsch} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (17.6)$$

Заметим, что сходство выражений (17.3) и (17.5) позволяет назвать преобразования (17.5) мнимыми вращениями в xt -плоскости и использовать термин «лоренцев поворот осей» применительно к преобразованиям Лоренца.

§ 18. Переход в систему собственных координат

Из возможных преобразований Лоренца нас часто будут интересовать те, что позволяют переходить к так называемым *собственным координатам* для данного интересующего нас интервала ds . Если интервал *пространственноподобный*, его временная компонента в собственных координатах равна нулю, если *времениподобный* — нулю равняются пространственные координаты. Преобразование к собственным координатам возможно всегда. Рассмотрим интервал, квадрат которого в первоначальных координатах имеет вид

$$ds^2 = -dx^2 + c^2 dt^2. \quad (18.1)$$

Можно считать, что для простоты предварительно был совершен поворот, в результате чего исчезли y - и z -компоненты. Из уравнений (9.1) получаем

$$dx' = \frac{dx - (V/c) c dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (18.2)$$

$$c dt' = \frac{c dt - (V/c) dx}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (18.3)$$

Если интервал (18.1) пространственноподобный, абсолютная величина dx больше, чем $c dt$, и можно, очевидно, выбрать значение V/c меньшим возможного верхнего предела ± 1 , как раз так, чтобы выражение (18.3) обращалось в нуль. Тогда выражение для интервала при переходе к штрихованным компонентам принимает вид

$$ds^2 = -dx'^2. \quad (18.4)$$

С другой стороны, если интервал носит времениподобный характер, абсолютная величина $c dt$ будет больше величины dx и можно подобрать значение V/c , которое обратит в нуль левую часть уравнения (18.2), а выражение для интервала соответственно преобразует к виду

$$ds^2 = dt'^2. \quad (18.5)$$

Из соотношения (18.4) видно, что, переходя к собственным координатам, т. е. к системе осей, движущихся с некоторой определенной скоростью, мы всегда можем определить величину любого пространственноподобного интервала прямым измерением с помощью масштабной линейки, соответствующим образом ориентированной и движущейся. Аналогично, из соотношения (18.5) следует, что всегда можно определить величину какого-либо времениподобного интервала путем прямого его измерения с помощью часов, движущихся соответствующим образом.

Как отмечалось выше, эти переходы позволяют физически интерпретировать полученные из геометрических соображений математические результаты.

§ 19. Применение тензорного анализа в специальной теории относительности

Одно из больших преимуществ геометрического подхода — это простота применения тензорного анализа при рассмотрении физических проблем. Сводка формул тензорного анализа дана в Приложении III.

В настоящем параграфе рассмотрим лишь определения, из которых следуют все свойства тензоров. В следующем параграфе мы покажем, что в случае плоского пространства — времени специальной теории относительности возможны некоторые упрощения.

В пространстве или, точнее, в четырехмерном континууме, соответствующем четырем обобщенным координатам (x_1, x_2, x_3, x_4) , тензор ранга r определяется как таблица 4^r величин, которые относятся к данной точке континуума и преобразуются по некоторым определенным правилам при переходе к новым

координатам, заданным через первоначальные:

$$\begin{aligned}x'^1 &= x'^1(x^1, x^2, x^3, x^4), \\x'^2 &= x'^2(x^1, x^2, x^3, x^4), \\x'^3 &= x'^3(x^1, x^2, x^3, x^4), \\x'^4 &= x'^4(x^1, x^2, x^3, x^4).\end{aligned}\tag{19.1}$$

Тензор нулевого ранга, или скаляр S , задается единственной величиной, не зависящей от преобразований координат. Другими словами, при любой замене системы координат должно выполняться равенство

$$S' = S.\tag{19.2}$$

Контравариантный тензор ранга единица, или вектор A^α , определяется набором четырех величин:

$$A^\alpha = (A^1, A^2, A^3, A^4),\tag{19.3}$$

которые преобразуются при переходе к новой системе согласно уравнению

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha.\tag{19.4}$$

Здесь $\partial x'^\mu / \partial x^\alpha$ — это величина, характеризующая в соответствии с (19.1) данную точку континуума; двойное появление в (19.4) «немного» индекса α означает, что по нему производится суммирование, причем $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Ковариантный тензор ранга единица B_α определяется набором четырех величин:

$$B_\alpha = (B_1, B_2, B_3, B_4),\tag{19.5}$$

которые преобразуются при заменах координат следующим образом:

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} B_\alpha.\tag{19.6}$$

Контравариантный тензор ранга два $T^{\alpha\beta}$ задается шестнадцатью величинами:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} & T^{14} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} & T^{24} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} & T^{34} \\ T^{41} & T^{42} & T^{43} & T^{44} \end{pmatrix},\tag{19.7}$$

а правило преобразования их выглядит так:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}.\tag{19.8}$$

И наконец, *ковариантный* тензор того же ранга $S_{\alpha\beta}$ определяется набором шестнадцати величин, преобразующихся следующим образом:

$$S'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} S_{\alpha\beta}. \quad (19.9)$$

Подобным же образом определяются тензоры смешанной контравариантной и ковариантной природы и тензоры более высоких рангов. В общем виде правило их преобразования можно записать так:

$$T'^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\sigma} \dots T^{\alpha\beta\dots}_{\delta\epsilon\dots}. \quad (19.10)$$

Двойное появление индексов в подобных тензорных выражениях всегда будет означать, что по парам совпадающих («немых») индексов производится суммирование по четырем значениям: 1, 2, 3, 4. Заметим еще, что скаляр не обязательно относить к какой-либо точке континуума, в то время как тензоры более высоких рангов следует, вообще говоря, связывать с некоторой заданной точкой, так как коэффициенты $\partial x'^\mu/\partial x^\alpha$ и т. д., появляющиеся при преобразованиях, могут, вообще говоря, иметь разные значения для различных точек среды. Можно, конечно, строить тензорные поля, связывая с каждой точкой данного континуума определенные значения тензора поля.

Рассмотрим случай, когда *метрические свойства* континуума заданы выражением

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}), \quad (19.11)$$

где скалярная мера элемента интервала ds соответствует бесконечно малому вектору dx^μ . Фундаментальный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ приобретает здесь особую важность. Свяжем с ним величину g (нескалярную), равную детерминанту:

$$g = |g_{\mu\nu}|, \quad (19.12)$$

и контравариантный тензор $g^{\mu\nu}$, определив его через нормированный минор:

$$g^{\mu\nu} = \frac{|g_{\mu\nu}|_{\text{minor}}}{g}. \quad (19.13)$$

С помощью этих двух фундаментальных тензоров можно ввести операции поднимания и опускания индексов, позволяющих получать сопряженные тензоры различных степеней ковариантности или контравариантности:

$$T^{\dots\alpha\dots} = g^{\alpha\beta} T^{\dots\beta\dots} \quad \text{и} \quad T^{\dots\alpha\dots} = g_{\alpha\beta} T^{\dots\beta\dots}. \quad (19.14)$$

Этим мы можем закончить формулировку определений, лежащих в основе тензорного анализа. Все остальные свойства тензоров и правила тензорного анализа могут быть получены с помощью этих определений. Так, все способы нахождения новых тензоров, изложенные в Приложении III: сложение, умножение, свертывание, ковариантное дифференцирование и т. д., могут быть проверены следующим образом. Именно, компоненты тензоров, полученных в конечном итоге, должны преобразовываться при заменах координат в соответствии с правилами преобразований, которые выше были постулированы в качестве общих определений тензоров.

Важнейшие преимущества тензорного анализа в качестве аппарата математической физики выявляются в двух обстоятельствах.

Во-первых, это очень краткий и удобный язык для формулирования физических законов. Например, единственное тензорное уравнение

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = 0 \quad (19.15)$$

включает в себя 256 различных уравнений, в чем легко убедиться, если перечислить все возможные значения 1, 2, 3, 4 индексов μ , ν , σ и τ . Поэтому результаты, которые можно получить с помощью тензорного анализа, было бы трудно получить, так сказать, «вручную».

Во-вторых, физические законы, выраженные с помощью тензорных соотношений, имеют один и тот же вид во всех системах координат. В самом деле, из общего правила преобразования (19.10) сразу вытекает, что любое тензорное уравнение

$$T_{\rho\sigma}^{\mu\nu\dots} = 0 \quad (19.16)$$

переходит в выражение точно того же вида:

$$T'_{\rho\sigma}^{\mu\nu\dots} = 0, \quad (19.17)$$

если перейти от координат (x^1, x^2, x^3, x^4) к координатам (x'^1, x'^2, x'^3, x'^4) . Ниже, в § 21 и в § 73, мы убедимся, что это важное свойство очень близко к природе постулатов специальной и общей теории относительности.

§ 20. Упрощение тензорного анализа в случае специальной теории относительности. Галилеевы координаты

В случае плоского пространственно-временного континуума специальной теории относительности тензорный анализ несколько упрощается. Действительно, в соответствии с определением (15.2) общему выражению для элемента интервала можно

придать особенно простой вид:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (20.1)$$

Здесь введены так называемые *галилеевы координаты*, которые выражаются через прежние пространственные и временную переменные следующим образом:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct. \quad (20.2)$$

В этих новых координатах лоренцевы преобразования (17.4), соответствующие переходу к новой системе пространственных осей, движущихся относительно первоначальных в x -направлении со скоростью V , принимают вид

$$x'^1 = \frac{x^1 - x^4 V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^4 = \frac{x^4 - x^1 V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (20.3)$$

а коэффициенты $\partial x'^\mu / \partial x^\alpha$ и т. д., возникающие согласно правилам преобразования тензоров при заменах координат, оказываются равными

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} = \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = -\frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1. \quad (20.4)$$

Остальные произведения, соответствующие всем остальным комбинациям индексов, равняются нулю.

Далее, при использовании в специальной теории относительности галилеевых координат (20.2) коэффициент лоренцева сокращения $\sqrt{1 - u^2/c^2}$, относящийся к точке, которая движется со скоростью u , определяется в соответствии с выражением (20.1) весьма простым способом:

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{ds}{dx^4}, \quad (20.5)$$

где времениподобный интервал ds — элемент 4-мерной траектории этой движущейся точки.

Отметим также, что в специальной теории относительности метрический тензор, соответствующий интервалу (20.1), имеет обычные галилеевы компоненты:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = 1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (20.6)$$

Поэтому поднимание и опускание индексов по правилу (19.14) для координат вида (20.2) приводит лишь к изменению знаков определенных компонент. Так, связь вектора A_μ с сопряженным вектором A^μ оказывается тривиальной:

$$A_i = -A^i \quad (i = 1, 2, 3), \quad A_4 = A^4. \quad (20.7)$$

Связь же сопряженных тензоров $T_{\mu\nu}$ и $T^{\mu\nu}$ имеет вид

$$T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu}, \text{ исключая } T_{i4} = -T^{i4} \text{ и } T_{4i} = -T^{4i} \text{ при } i=1, 2, 3. \quad (20.8)$$

Можно еще добавить, что применение в специальной теории относительности координат (20.2) сильно упрощает некоторые тензорные операции. Так, например, становится несложным построение нового тензора путем ковариантного дифференцирования, как показывает формула (33) из Приложения III. В частном случае для ковариантной производной тензора $T^{\mu\nu}$ имеем

$$(T^{\mu\nu})_{;\alpha} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \quad (20.9)$$

Аналогичным образом определение дивергенции или свернутой ковариантной производной выглядит просто как

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \quad (20.10)$$

вместо запутанных выражений, которые неизбежно возникают при использовании координат более общего типа. Поэтому в специальной теории относительности тензорный аппарат оказывается весьма удобным.

§ 21. Четырехмерный аппарат и постулаты специальной теории относительности

Чтобы завершить рассмотрение геометрического четырехмерного подхода к специальной теории относительности, найдем его связь с обоими постулатами теории. Сделать это можно край-не простым способом.

Из обсуждения, проведенного в § 5, следует, что *первый постулат* специальной теории выполняется, если законы физики в отсутствие гравитационного воздействия одинаковы для всех наблюдателей, находящихся в состоянии равномерного относительного движения. Это легко установить, если с помощью геометрического метода сформулировать физические законы в виде тензорных уравнений, в которых используются тензоры, имеющие один и тот же физический смысл во всех системах координат (под системами координат тут подразумеваются различные наборы декартовых осей, находящихся в состоянии равномерного относительного движения). Действительно, тензорные уравнения (19.16) и (19.17), если они справедливы в одной системе координат, справедливы и во всех других системах. Это, однако, и дает нужное соответствие с первым постулатом при условии, конечно, что наши тензоры обладают свойствами, найденными в § 20.

Реальная задача построения тензоров с компонентами, имеющими один и тот же смысл в различных инерциальных системах отсчета, может быть решена тремя различными способами. Можно *определить* тензор, задав его компоненты в некоей произвольной системе отсчета вида (20.2), а затем, непосредственно выполняя преобразования Лоренца, убедиться, что заданные таким образом компоненты в самом деле сохраняют прежний физический смысл в другой системе отсчета. Можно действовать другим способом: *определить* тензор, задавая физические величины в *собственной* системе отсчета. Ввиду выделенности собственной системы координат эти величины будут иметь тот же физический смысл и в любой другой инерциальной системе. Третий возможный способ построения тензора — это путь последовательных переходов от более простых тензоров, чей физический смысл хорошо известен, к более сложным тензорам. Для примера приведем простейшие тензоры, которые часто используются в такого рода построениях. Это — скалярный элемент интервала ds ; ковариантный вектор, соответствующий малому сдвигу координат, dx^μ ; ковариантные векторы обобщенной «скорости» и обобщенного «ускорения» dx^μ/ds , d^2x^μ/ds^2 , где ds — времениподобный интервал, являющийся элементом 4-траектории движущейся частицы.

Соответствие между ковариантным подходом и вторым постулатом установить даже еще проще. Согласно второму постулату скорость света в свободном пространстве должна быть одинаковой для различных наблюдателей, находящихся в состоянии равномерного относительного движения, что вытекает из того же обстоятельства, что и основные особенности пространственно-временного континуума в специальной теории относительности (§ 15).

Согласно определению (15.2) элемент интервала в этом континууме, записанный в обычных пространственных и временных координатах (x, y, z, t) , имеет вид

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (21.1)$$

так что 4-траектория светового импульса, распространяющегося со скоростью c , определяется из условия

$$ds = 0. \quad (21.2)$$

Действительно, применяя его к предыдущему выражению, немедленно получаем соотношение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2. \quad (21.3)$$

Однако, если перейти теперь к некоему другому набору координат (x', y', z', t') , соответствующих новой инерциальной

системе отсчета, легко убедиться, что *форма выражения* для интервала не изменится из-за лоренцевых преобразований. Останется прежней и *величина* интервала ds , поскольку он является скаляром. Таким образом, в новых координатах скорость света будет по-прежнему определяться в соответствии со вторым постулатом через соотношение

$$\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2 = c^2. \quad (21.4)$$

Итак, аппарат четырехмерной геометрии весьма удобен для рассмотрения явлений в специальной теории относительности, и далее мы будем его широко использовать. Что же касается общей теории относительности, ее трудно даже представить себе вне ковариантного подхода.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
И МЕХАНИКА

ЧАСТЬ I

ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ

§ 22. Законы сохранения массы и импульса

Рассмотрим теперь, как идеи специальной теории относительности модифицируют прежнюю ньютоновскую механику. Обратимся сначала к механике частиц, которой пока будет достаточно для наших нужд, а затем, во второй части, перейдем к изучению динамики непрерывной механической среды.

В добавление к уже полученным кинематическим следствиям специальной теории относительности, в аксиоматическую основу механики взаимодействующих частиц положим два закона сохранения — массы и импульса.

Для системы взаимодействующих между собой частиц эти законы требуют, чтобы полная масса системы частиц оставалась постоянной, т. е.

$$\sum_i m_i = \text{const}, \quad (22.1)$$

где сумма берется по массам всех частиц системы. Подобным же образом должна оставаться постоянной каждая x -, y -, z -компонента полного импульса системы:

$$\sum m u_x = \text{const}, \quad \sum m u_y = \text{const}, \quad \sum m u_z = \text{const}. \quad (22.2)$$

В каждом из этих уравнений суммируются проекции импульсов всех частиц на данное направление *). По принципу относительности эти уравнения должны оставаться справедливыми во всех инерциальных системах координат.

Так как ньютоновская система механики также включает идеи относительности движения и сохранения массы и импульса, уравнения (22.1) и (22.2) должны выполняться для всех

*) Такое рассмотрение применимо к системам частиц, которые взаимодействуют только путем столкновений. Мы не будем касаться более сложных систем, где полям также приписываются непрерывные распределения массы и импульса.

инерциальных систем уже в теории Ньютона. Однако ньютоновская и релятивистская механики существенно отличаются уравнениями преобразования, описывающими переходы от одной системы координат к другой. В ньютоновской механике используются галилеевы преобразования (8.7) и предполагаются справедливыми законы сохранения (22.1) и (22.2) во всех системах координат при условии, что масса частицы не зависит от скорости. В релятивистской механике мы имеем уже более сложные лоренцевы преобразования, которые также следует объединить с уравнениями (22.1) и (22.2), однако в предположении, что масса частицы уже зависит от ее скорости. Этот вопрос мы разберем в следующем параграфе.

§ 23. Масса движущейся частицы

Покажем, что масса частицы должна зависеть от ее скорости, если законы сохранения справедливы во всех системах координат. Рассмотрим сначала сохранение массы и импульса в двух различных системах координат S и S' в простейшем случае лобового упругого столкновения двух одинаковых частиц.

Будем считать, что в первой системе координат (назовем так для удобства штрихованную систему S') частицы до столкновения движутся со скоростями $+u'$ и $-u'$ вдоль оси x так, что между ними происходит лобовое столкновение. Так как по предположению обе частицы совершенно одинаковы и упруги, очевидно, что они в первый момент после столкновения придут в состояние покоя. Затем, испытав действие упругих сил, частицы начнут обратное движение по их первоначальным путям с относительными скоростями $-u'$ и $+u'$, т. е. со скоростями, прежними по величине, но обратными по направлению. Таким образом, в этой системе координат процесс столкновения явно происходит в соответствии с законом сохранения массы и импульса.

Введем теперь новую систему координат S , движущуюся относительно первой в направлении x со скоростью $-V$. Используя эту новую систему, обозначим через u_1 и u_2 скорости частиц до столкновения. Допуская, что массы зависят от скоростей, будем считать, что до столкновения имеются две частицы с массами m_1 и m_2 . Далее, обозначим через M суммарную массу двух частиц в тот момент времени, когда частицы при столкновении пришли в состояние относительного покоя и, следовательно, обе движутся со скоростями $+V$ относительно рассматриваемой системы координат S .

Согласно законам сохранения, которые должны выполняться и в новой системе координат, общая масса и общий импульс двух частиц должны быть одними теми же и до столкновения

и в момент остановки, так что можно записать:

$$m_1 + m_2 = M \quad (23.1)$$

и

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = MV. \quad (23.2)$$

Воспользовавшись теперь правилами преобразования для скорости (10.2), можно, очевидно, выразить скорости u_1 и u_2 через их значения $+u'$ и $-u'$ относительно первоначальной системы координат S' . В результате получим

$$u_1 = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{-u' + V}{1 - u'V/c^2}. \quad (23.3)$$

Объединяя последние четыре уравнения, легко получить из них отношение масс частиц:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + u'V/c^2}{1 - u'V/c^2}. \quad (23.4)$$

С помощью преобразования (11.1) оно принимает вид

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}. \quad (23.5)$$

Таким образом, если две частицы обладают одинаковыми массами покоя, равными, скажем, m_0 , то их массы при движении со скоростью u обратно пропорциональны $\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Таким образом, выражение массы движущейся частицы через ее скорость и массу покоя m_0 имеет вид

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (23.6)$$

Хотя выражение для массы движущейся частицы (23.6) найдено на простейшем примере лобового столкновения двух частиц [19], вообще говоря, несложно показать, что то же самое выражение мы получим при рассмотрении любых столкновений [20]. Укажем также на то, что это выражение, в котором под u будем подразумевать полную скорость, обеспечивает справедливость законов сохранения массы и импульса во всех системах координат для любого вида столкновения между двумя частицами [19]. Кроме того, имеются, конечно, и экспериментальные подтверждения справедливости полученного выражения — это опыты по измерению массы движущегося электрона, которые мы обсудим в § 29. Можно без колебаний принять это выражение, как правильно описывающее массу движущейся частицы в общем случае.

Интересно, что в соответствии с (23.6) масса частицы оказывается бесконечной при скорости, равной скорости света. Это согласуется с нашим предыдущим утверждением, сделанным в § 10, о том, что скорость света надо рассматривать как верхний предел возможных скоростей.

В заключение заметим, что для того, чтобы выполнялись законы сохранения массы и импульса, необходимо приписывать массу потенциальной энергии упругой деформации. Это следует из уравнений, найденных в случае лобового столкновения, которые приводят к результату

$$M > \frac{2m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (23.7)$$

Полная масса двух частиц в момент, когда они находятся в состоянии относительного покоя, больше той, которую они имеют при скорости V и общей массе покоя недеформированных частиц $2m_0$.

§ 24. Правило преобразования массы

Согласно уравнению (23.6) масса данной частицы различна в системах координат, движущихся с различными скоростями. Из уравнения (11.1) для преобразования множителя $\sqrt{1-u^2/c^2}$ легко получить правило преобразования массы:

$$m = m' \frac{1 + u'_x V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (24.1)$$

Дифференцируя по времени и упрощая результат, находим правило преобразования для изменения массы частицы с изменением ее скорости:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm'}{dt'} + \frac{m'V}{c^2} \left(1 + \frac{u'_x V}{c^2}\right)^{-1} \frac{du'_x}{dt'}. \quad (24.2)$$

§ 25. Определение силы и правило ее преобразования

Так как масса движущейся частицы изменяется со скоростью, становится невозможным определить силу, как в ньютоновской механике, двумя способами: как произведение массы на ускорение и как скорость изменения импульса. Оказывается, удобно сохранить последнее определение, поскольку тогда принцип равенства действия и противодействия совпадает с законом сохранения импульса, принятым нами ранее как аксиома.

Итак, зададим силу \mathbf{F} , действующую на частицу с массой m и скоростью \mathbf{u} , векторным выражением*):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{u}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{1-u^2/c^2} \right); \quad (25.1)$$

в компонентах это записывается так:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_x}{1-u^2/c^2} \right), \\ F_y &= \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), \\ F_z &= \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right). \end{aligned} \quad (25.2)$$

Надо заметить, что согласно этим определениям сила и ускорение могут, вообще говоря, не совпадать по направлению, в отличие от того, что было в ньютоновской механике. Преимущество этих определений состоит не только в том, что сохраняется принцип равенства действия и противодействия, но и в том, что упрощается интерпретация электромагнитных явлений. В этом мы убедимся в § 29.

Так как нам уже известны правила преобразования (10.2), (12.1), (24.1), (24.2) всех величин, стоящих в правых частях (25.2), легко получить и уравнения для преобразования компонент силы. Они могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} F_x &= F'_x + \frac{u'_y V}{c^2 + u'_x V} F'_y + \frac{u'_z V}{c^2 + u'_x V} F'_z, \\ F_y &= \frac{c^2 \sqrt{1-V^2/c^2}}{c^2 + u'_x V} F'_y, \\ F_z &= \frac{c^2 \sqrt{1-V^2/c^2}}{c^2 + u'_x V} F'_z. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Эти правила преобразования получены для частного случая сил, действующих на частицу и изменяющих ее движение. Заметим, однако, что частицы могут изменять состояние движения не только из-за взаимного воздействия друг на друга, но и под влиянием иных, более сложных механических систем или при взаимодействии электромагнитного характера. Если мы желаем сохранить во всех разделах физики закон равенства

*) Мы включили m_0 внутрь скобок под знак дифференцирования. Это делает соотношение (24.2) применимым также, когда изменяется собственная масса частицы, например в случае притока теплоты.

действия и противодействия, а тем самым и закон сохранения импульса, очевидно, что для всех сил вне зависимости от вида систем, на которые эти силы могут действовать, должны быть справедливы одинаковые правила преобразований. Это обстоятельство окажется очень важным для обобщения динамики, включающего в себя механику сплошных сред.

§ 26. Работа и кинетическая энергия

Как и в ньютоновской механике, удобно определить проделанную над частицей работу как произведение действующей на частицу силы на расстояние, пройденное частицей, т. е. с помощью равенства

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (26.1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение частицы. Будем также считать, что энергия, приобретенная частицей под действием силы, равна работе, проделанной над этой частицей.

В случае, когда мы производим работу над свободной частицей, легко определить увеличение ее кинетической энергии через изменение ее скорости. Подставляя в уравнение (26.1) определение силы (25.1), можно подсчитать увеличение кинетической энергии частицы следующим образом:

$$dE = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{u} dm = m\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} + u^2 dm. \quad (26.2)$$

Подставляя сюда выражение массы как функции скорости (23.6), получаем

$$dE = \frac{m_0 u du}{(1-u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_0 u^3/c^2 du}{(1-u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0 c^2 du}{(1-u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (26.3)$$

Отсюда видно, что, как и в ньютоновской механике, кинетическая энергия, сообщенная частице, является функцией лишь изменения ее скорости независимо от вида пути, на котором это изменение произошло. Далее, из уравнения (26.1) и из принципа равенства действия и противодействия следует, что при упругом столкновении в результате взаимодействия двух частиц происходит увеличение кинетической энергии одной частицы и соответствующее равное по величине уменьшение кинетической энергии другой частицы. Таким образом, и в релятивистской механике имеется аналог прежнего закона сохранения живой силы для упругих соударений.

Интегрируя выражение (26.3) от 0 до u , находим, что частица, имеющая массу покоя m_0 и скорость движения u , обладает

кинетической энергии, равной

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_0 c^2. \quad (26.4)$$

При скоростях, малых по сравнению со скоростью света, эта формула, как и следовало ожидать, сводится к известному ньютоновскому выражению для кинетической энергии

$$E = \frac{1}{2} m_0 u^2. \quad (26.5)$$

§ 27. Соотношения между массой, энергией и импульсом

Рассмотрим теперь очень важное соотношение между массой и энергией, не имеющее аналога в механике Ньютона. Согласно § 23 и § 26 и масса и энергия частицы зависят от скорости и возрастают вместе с ней. Подставим выражение массы как функции скорости (23.6) в формулы (26.3) и (26.4), описывающие увеличение кинетической энергии с ростом скорости. Мы обнаружим, что прирост кинетической энергии частицы из-за увеличения ее массы выражается замечательно простым соотношением:

$$dE = c^2 dm, \quad (27.1)$$

а полная кинетическая энергия частицы окажется равной

$$E = c^2 (m - m_0), \quad (27.2)$$

где m_0 — масса покоя частицы. Согласно этим уравнениям изменение кинетической энергии в эргах равно изменению массы в граммах, помноженному на квадрат скорости света в *см/сек*.

Посмотрим теперь на различные следствия этой замечательной пропорциональности между увеличением массы и увеличением кинетической энергии.

Поскольку мы приняли, что закон сохранения массы есть фундаментальный постулат, справедливый не только для системы частицы, но и для произвольных систем, то из пропорциональности массы и кинетической энергии, вообще говоря, сразу следует, что любая изолированная система всегда способна произвести кинетическую энергию в количестве, определяемом написанной теоретической формулой. Конечно, с практической точки зрения получить эту энергию не всегда одинаково просто.

Таким образом, мы можем сказать, что закон сохранения массы обеспечивает закон сохранения энергии.

Далее, пропорциональность между кинетической энергией и увеличением массы, вместе с законами сохранения массы и энергии, немедленно приводит к тому, что энергии в любой

форме соответствует определенное количество массы. К примеру, если движущаяся частица переходит в состояние покоя, она теряет и добавочную массу ($m - m_0$) и кинетическую энергию $c^2(m - m_0)$. При этом имеет смысл предположить, что масса и энергия, связанные, когда частица движется, остаются связанными и когда частица покоится, т. е. при любых состояниях частицы. Действительно, если частица останавливается, передавая упругим образом свою энергию другой частице, например, благодаря силам вязкости, возникающим в картине столкновений с гипотетическими упругими молекулами, то соображений, изложенных в § 26, достаточно, чтобы показать, что энергия и импульс передаются в правильном соотношении. Кроме того, мы убедились в § 23, что следует приписывать массу и потенциальной энергии, возникающей в процессе упругого столкновения в соответствии с соотношением (23.7). Поэтому мы постулируем, в самом общем виде, что энергия E всегда связана с соответствующим количеством массы m , равным

$$m = \frac{E}{c^2}. \quad (27.3)$$

В качестве еще одного следствия связи массы с энергией (27.3) естественно предположить, что справедливо и обратное соотношение, т. е. связь энергии с любой заданной массой. Мы так и поступим, постулируя соотношение

$$E = mc^2 \quad (27.4)$$

для энергии, связанной с массой m , имеющей любую природу. Это соотношение указывает на громадный запас энергии в частице, равный m_0c^2 даже в том случае, когда частица находится в состоянии покоя. Этот вывод может казаться несколько более странным, нежели другие наши предыдущие заключения, однако он логически правилен*).

Наконец, в качестве важного следствия связи массы и энергии отметим то обстоятельство, что передача энергии с необходимостью предполагает наличие импульса. Например, если имеется некоторое количество энергии E , которое перемещается (с каким-либо телом) со скоростью u , то связанный с этой энергией импульс равняется

$$\mathbf{G} = m\mathbf{u} = \frac{E}{c^2}\mathbf{u}. \quad (27.5)$$

Кроме переноса энергии при движении тел, мы должны еще учесть возможность передачи энергии при воздействии на движущ-

*) Это было написано в годы, когда ядерная физика только зарождалась. (Прим. ред.)

щуюся систему внешних сил. Например, рассмотрим стержень, движущийся вдоль своей оси под действием сил, действующих на оба его конца. Пусть над стержнем производится работа на заднем его конце, а стержень производит ее на другом. Тогда в дополнение к передаче энергии вместе с движущимся стержнем будет существовать и поток энергии от заднего конца стержня к переднему. *Чтобы передача импульса была возможной при любой форме передачи энергии, примем*

$$g = \frac{s}{c^2}. \quad (27.6)$$

Это есть общее соотношение между плотностью импульса g и плотностью потока энергии s . Выражение (27.6) не содержит никаких ограничений на механизмы передачи энергии и будет играть фундаментальную роль в дальнейшем изложении.

§ 28. Четырехмерное описание механики частицы

Итак, мы ввели все основные принципы, необходимые для построения механики частицы. Убедимся теперь в простоте, с которой они выражаются на четырехмерном языке, введенном в конце предыдущей главы.

Фундаментальное представление о четырехмерном пространственно-временном континууме дает формулу (20.1):

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \quad (28.1)$$

в качестве выражения для бесконечно малого интервала в этом континууме, записанного в прямоугольных, так называемых галилеевых координатах:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct. \quad (28.2)$$

Тогда 4-мерный импульс частицы определяется как произведение массы покоя частицы m_0 на ее 4-мерную скорость:

$$m_0 \frac{dx^\mu}{ds} = \left(m_0 \frac{dx^1}{ds}, m_0 \frac{dx^2}{ds}, m_0 \frac{dx^3}{ds}, m_0 \frac{dx^4}{ds} \right). \quad (28.3)$$

Выражая в соответствии с (28.2) 4 компоненты этого вектора через наши обычные координаты x , y , z и t , легко получить

$$m_0 \frac{dx^1}{ds} = \frac{m_0}{c \sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dx}{dt}, \quad m_0 \frac{dx^2}{ds} = \frac{m_0}{c \sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dy}{dt}, \quad (28.4)$$

$$m_0 \frac{dx^3}{ds} = \frac{m_0}{c \sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dz}{dt}, \quad m_0 \frac{dx^4}{ds} = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

где

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (28.5)$$

Отсюда сразу видно, что для взаимодействующих частиц фундаментальные законы сохранения компонент импульса $m_0 u_x / \sqrt{1-u^2/c^2}$ и т. д., массы $m_0 / \sqrt{1-u^2/c^2}$ и энергии $m_0 c^2 / \sqrt{1-u^2/c^2}$ могут быть объединены в одно простое выражение:

$$\sum m_0 \frac{dx^\mu}{ds} = \text{const}, \quad (28.6)$$

где сумма берется по всем частицам системы. Это выражение *не является* тензорным соотношением, поскольку его левая часть представляет собой сумму векторов, взятых в различных точках пространства — времени (§ 19), а правая часть не является тензором даже по форме. Выражение (28.6) записано в определенном виде координатах (28.2) и демонстрирует простоту четырехмерного способа записи.

Если теперь мы рассмотрим *частицу в свободном пространстве*, на которую не влияют другие тела, то мы получим для описания ее движения очень простое и важное тензорное уравнение:

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \text{const}. \quad (28.7)$$

В прямоугольных координатах (28.2) последняя формула есть уравнение прямой, или геодезической линии. Этот результат может быть записан в следующем виде:

$$\delta \int ds = 0. \quad (28.8)$$

Это тензорное (скалярное) уравнение справедливо во всех системах координат.

Заключение о том, что 4-мерная траектория *свободной частицы* является геодезической линией, станет очень существенным, когда мы перейдем к общей теории относительности.

Если рассмотреть *луч света*, то он будет не только геодезической линией, но будет удовлетворять дополнительному условию

$$ds = 0, \quad (28.9)$$

о котором мы уже говорили в § 21.

В том случае, когда *на частицу действуют силы*, также удобнее пользоваться тензорным языком. Можно ввести **контравариантный вектор** F^μ , называемый силой Минковского, которую можно определить уравнением

$$F^\mu = c^2 \frac{d}{ds} \left(m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right), \quad (28.10)$$

где m_0 — собственная масса частицы, измеряемая локальным наблюдателем, dx^μ/ds — ее обобщенная скорость, а дифференцирование $d(\quad)/ds$ по 4-мерной траектории производится с учетом возможных изменений собственной массы частицы m_0 , например, из-за теплового излучения.

Выражение (28.10) надо рассматривать как тензорное уравнение, определяющее F^μ во всех системах координат. При выборе координат (28.2) легко вычислить величины отдельных компонент F^μ , а именно:

$$\begin{aligned} F^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), & F^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), \\ F^3 &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), & F^4 &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{c \sqrt{1-u^2/c^2}} \right), \end{aligned} \quad (28.11)$$

где u — обычная скорость частицы. Используя выражения для обычных компонент силы (25.2) и соотношение между массой и энергией (27.4), запишем компоненты F^μ в координатах (28.2) в виде

$$F^\mu = \left(\frac{F_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dE}{c dt} \right). \quad (28.12)$$

Тем самым продемонстрирована возможность использования компонент обычной силы для построения 4-вектора, что окажется полезным в дальнейшем.

Так как в согласии с тем, что было сказано в § 25, силы любой природы должны подчиняться одинаковым законам преобразования, то все они должны обладать описанными сейчас свойствами. Знание таких свойств может оказаться полезным, особенно в случае отсутствия другой информации (см. в § 54, в).

§ 29. Применения динамики частицы

Мы заканчиваем обсуждение динамики частицы в том виде, в каком это необходимо для дальнейшего. Мы принимаем все ее результаты не только в силу экспериментальных подтверждений в тех случаях, когда оказалось возможным проверить различие между предсказаниями релятивистской и ньютоновской механики. Нас убеждает также логическая стройность теории и ее согласие с основаниями физики. Поскольку эта стройность и гармония возникают благодаря согласованности очень многих факторов, мы можем быть уверены в правильности выводов теории даже до их экспериментального подтверждения.

В заключение кратко рассмотрим несколько применений динамики частицы, иллюстрирующих как согласованность теории и эксперимента, так и логическую стройность и простоту, отмеченные выше.

а) *Масса быстрого электрона.* Увеличение массы частицы с ростом скорости, полученное в § 23, является фундаментальным выводом релятивистской механики и служит отправным пунктом для дальнейших следствий. По этой причине особенно существенно, что выражение $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ для массы движущейся частицы (23.6) хорошо подтверждено большим числом измерений, проведенных над быстрыми β -частицами и катодными частицами. Первое более или менее качественное подтверждение зависимости массы от скорости было дано в работе Кауфмана *).

б) *Связь между силой и ускорением.* Как уже отмечалось в § 25, силу, действующую на частицу, можно определить как скорость изменения ее импульса, т. е.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{u}) = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\} \mathbf{u}. \quad (29.1)$$

Очевидно, что в релятивистской механике сила \mathbf{F} и ускорение $d\mathbf{u}/dt$, вообще говоря, не будут иметь одно и то же направление, как это было в ньютоновской механике.

Из разложения силы (29.1) на две компоненты: параллельную ускорению и параллельную скорости, сразу видна причина этого явления. Поскольку ускорение само по себе ведет к изменению массы частицы, мы должны ожидать изменения импульса в направлении уже существующей скорости \mathbf{u} , так же как и в направлении ускорения $d\mathbf{u}/dt$. Следовательно, для произвольного случая сила может иметь компоненты и в направлении ускорения, и в направлении скорости.

Сила также может быть разложена на компоненты, параллельную и перпендикулярную ускорению. Пусть, например, частица движется в плоскости xy со скоростью

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}. \quad (29.2)$$

Нетрудно убедиться [22], что для того, чтобы придать этой частице ускорение в направлении оси y , следует приложить, кроме силы F_y , дополнительную силу F_x , действующую под прямым углом и равную по величине

$$F_x = \frac{u_x u_y}{c^2 - u_x^2} F_y. \quad (29.3)$$

*) Описание и критику этих измерений можно найти в статье [21].

Это разложение силы полезно также и для понимания соотношения между силой и ускорением. Дополнительная компонента силы в направлении оси x необходима, если частица уже имеет компоненту скорости u_x в этом направлении. Она компенсирует импульс в данном направлении, возникающий из-за изменения массы даже в том случае, когда скорость в этом направлении остается постоянной.

Из выражений (29.1) или (29.3) видно, что сила и ускорение имеют одно и то же направление в двух случаях: в случае *поперечного ускорения*, когда сила действует под прямым углом к имеющейся уже скорости, и в случае *продольного ускорения*, когда сила действует в том же направлении, что и скорость. В случае поперечного ускорения выражение (29.1) принимает вид

$$F = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{du}{dt}, \quad (29.4)$$

а для продольного задается следующим образом:

$$F = \frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{du}{dt}. \quad (29.5)$$

Эти формулы позволяют понять, почему $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$, иногда называют поперечной массой частицы, а $m_0/(1-u^2/c^2)^{3/2}$ — продольной массой. Следует, однако, подчеркнуть, что лишь первая из этих величин, $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ (которую можно рассматривать как фундаментальное выражение для массы частицы, поскольку именно эта величина дает импульс при умножении на скорость частицы), сохраняется, когда частица взаимодействует при столкновении.

в) *Приложения динамики частицы в электромагнетизме.* Развитие полной теории электромагнетизма требует серьезного обсуждения. Однако уже сейчас можно продемонстрировать, как некоторые задачи электромагнетизма могут быть решены с помощью аппарата динамики частицы.

Типичной задачей такого сорта является задача о нахождении силы, с которой заряд e , движущийся равномерно со скоростью V (для простоты, скажем, в направлении оси x), действует на второй заряд e_1 , находящийся недалеко от первого. Чтобы решить эту задачу, выберем сначала систему координат, в которой заряд e покоится и, следовательно, создает обычное электрическое поле. В этой системе координат сила, действующая на e_1 , определяется просто кулоновским законом электростатического отталкивания. Используя затем правила преобразования сил (25.3), можно перейти в систему, в которой заряд e движется определенным образом.

Если считать, что заряд e равномерно движется вдоль оси x со скоростью V и рассмотреть момент времени, когда он находится в начале координат, то сила, действующая на e_1 , как легко показать [23], задается выражениями

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{ee_1}{s^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left\{x + \frac{V}{c^2} (yu_y + zu_z)\right\}, \\ F_y &= \frac{ee_1}{s^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right) y, \\ F_z &= \frac{ee_1}{s^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right) z, \end{aligned} \quad (29.6)$$

где x , y , z и u_x , u_y , u_z означают координаты и компоненты скорости заряда e_1 в рассматриваемой системе отсчета, s введено для сокращения записи и равняется

$$s = \sqrt{\left\{x^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}}. \quad (29.7)$$

Этот результат может быть получен более привычным способом. Для этого сначала надо определить электрическое и магнитное поля, создаваемые движущимся зарядом e , а затем найти силу, действующую на другой движущийся заряд e_1 . Прделанный выше вывод указывает на то, что довольно сложное действие электрического и магнитного полей на заряд e_1 подчиняется обычному кулоновскому закону при соответствующем выборе системы координат. Общие соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей в различных системах координат будут рассмотрены в главе, посвященной теории электромагнетизма.

Аналогичным образом динамика частицы может применяться к другим электромагнитным задачам. Представим опять, что заряд e , как и в предыдущей задаче, равномерно движется по оси x со скоростью V , а заряд e_1 будем считать локализованным в определенный фиксированный момент времени на оси y в точке $y=y$. Пусть e_1 при этом движется таким образом, что проекция его скорости на ось x равна V , как и у заряда e , а в направлении оси y — некоторой величине u_y . Очевидно, что простое качественное рассмотрение этой задачи с помощью специальной теории относительности приводит к выводу, что заряд e_1 должен просто получить ускорение в направлении оси y и сохранить неизменной компоненту скорости в направлении оси x . Действительно, с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с зарядом e , это явление — результат обычного электростатического отталкивания. Интересно, однако, выяснить в деталях, как это происходит.

Подставляя значения координат и компонент скорости заряда e_1 , приведенные выше, в уравнения (29.6), мы получаем для компонент силы, действующей на e_1 , следующие выражения:

$$F_x = \frac{ee_1}{s^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{Vu_y}{c^2} y, \quad F_y = \frac{ee_1}{s^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 y. \quad (29.8)$$

На первый взгляд кажется удивительным, что сила, действующая на заряд e_1 , имеет компоненту в направлении оси x , поскольку ускорение производилось лишь в направлении оси y . Вспоминая, однако, вывод предыдущего параграфа о том, что сила и ускорение не обязательно одинаково направлены, получаем, комбинируя два предыдущих выражения, следующее соотношение:

$$F_x = \frac{Vu_y}{c^2 - V^2} F_y. \quad (29.9)$$

При $u_x = V$ оно сводится к соотношению между компонентами силы (29.3), полученному выше в качестве необходимого условия для ускорения лишь в направлении оси y . Приложение динамики частиц к другим электромагнитным явлениям предлагается провести читателю самому.

г) *Проверка взаимной связи массы, энергии и импульса.* Одно из самых важных следствий специальной теории относительности Эйнштейна — это соотношения между массой, энергией и импульсом, полученные в § 27. Имеются несколько видов экспериментов, в которых проверяется справедливость этих соотношений.

Первое из этих соотношений связывает увеличение кинетической энергии с увеличением массы (см. (27.1)). С качественной точки зрения увеличение скорости непременно ведет к возрастанию кинетической энергии. Поэтому все эксперименты по обнаружению возрастания массы со скоростью согласуются с общей идеей одновременного увеличения энергии и массы. Однако среди экспериментов по проверке соотношения между массой и скоростью были такие [24], где частицы приобретали скорость, проходя через определенную разность потенциалов. При этом скорость вычислялась путем приравнивания релятивистского выражения для кинетической энергии (26.4) работе, проделанной электрическими силами по ускорению частицы. Следовательно, эти эксперименты могут рассматриваться уже как количественное подтверждение соотношения между увеличением массы и увеличением кинетической энергии при том условии, конечно, что мы считаем справедливыми простейшие законы теории электричества.

Обратимся к более общим представлениям, приводящим к соотношениям (27.3) и (27.4), которые говорят о том, что все виды энергии связаны с массой E/c^2 и все виды масс — с энергией mc^2 . Прямые макроскопические эксперименты по проверке этих соотношений, подобные, например, измерению количества теплоты или инерции, были бы, очевидно, малоуспешны из-за большой величины переводного коэффициента c^2 .

В атомной физике, однако, сфера применимости релятивистских представлений была недавно сильно расширена. Качественные предположения [26] о том, что энергия падающих на землю космических лучей может переходить в собственные массы покоя пар положительных и отрицательных электронов, подтвердились в опытах Андерсона [25] и Блэккета и Оккиалини [26]. Андерсоном и Неддермайером проведены также опыты с γ -лучами [27], давшие количественные результаты*). Оказалось, что γ -лучи достаточно больших энергий могут приводить к образованию пар положительных и отрицательных электронов, т. е. рождают частицы с отличной от нуля массой покоя и кинетической энергией. Далее, давно обсуждавшаяся возможность существования внутриядерных процессов, сопровождающихся преобразованием масс покоя в обычные формы энергий, нашла блестящие количественные подтверждения в опытах Олифанта, Кинсея, Резерфорда [29], доказавших, что дефект массы при соединении ядер изотопов лития Li^7 и Li^6 соответственно с изотопами водорода H^1 и H^2 , приводящем к образованию гелия He^4 , в точности равняется кинетической энергии образующихся в этих реакциях α -частиц.

И наконец, блестящее количественное подтверждение связи импульса и переданной энергии (27.5), вытекающей из предположения об эквивалентности массы и энергии, найдено в опытах по измерению давления света. Следует указать на значительную точность, достигнутую в этих опытах при проверке теоретически ожидаемого соотношения (27.6) между плотностью импульса и плотностью потока энергии.

ЧАСТЬ II

ДИНАМИКА СПЛОШНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СРЕД

§ 30. Основные постулаты

В классической ньютоновской механике после динамики частиц обычно переходят к изложению динамики твердого тела, кинематическое состояние которого можно задать с помощью шести чисел, определяющих положение и ориентацию тела, и шести соответствующих импульсов. В релятивистской механике,

*) Более полная теория изложена в статье Оппенгеймера и Плэзита [23].

когда мы хотим описать состояние тела конечных размеров, мы обнаруживаем, что требуется, вообще говоря, бесконечное число переменных, поскольку возмущения, возникающие в одной из частей тела, могут передаваться в другую его часть лишь со скоростью, меньшей скорости света. В релятивистской механике наиболее близким к твердому телу может считаться такое, в котором возмущения распространяются с предельной скоростью — скоростью света. Представление об абсолютно твердом теле, все части которого испытывают воздействие в один и тот же момент времени, становится неоправданной абстракцией. Поэтому следует сразу перейти к механике сплошных сред, развитие которой восходит к трудам Лауэ.

В качестве аксиоматической основы теории примем постулаты специальной теории относительности, а также законы сохранения массы и импульса во всех системах координат, используемых в механике частиц*). Привлечем также найденные выше правила преобразования сил и соотношение между массой и энергией.

При таком подходе теория упругого континуума может рассматриваться как естественное развитие механики частицы. Однако нельзя сказать, что она будет просто следствием механики частицы, поскольку мы не будем пытаться выводить свойства континуума из релятивистского поведения частиц и молекул, образующих этот континуум. Даже в более старой, ньютоновской механике попытки строгого обоснования механики упругого континуума, исходящие из свойств частиц, не были вполне удовлетворительны; в настоящее время подобные построения осложняются не только релятивистскими закономерностями, но также необходимостью учитывать квантовомеханическое поведение отдельных частиц. Поэтому более разумно строить механику сред на аксиоматической основе, используя лишь макроскопические понятия, не затрагивающие квантовой механики. К этому мы теперь и перейдем.

*) Соотношение между массой, энергией и импульсом лежит, очевидно, в основе современной физики элементарных частиц. Точность наиболее аккуратных формул этой теории (в явлениях, описываемых квантовой электродинамикой), подтвержденных экспериментом, составляет примерно 6 значащих цифр (ошибка составляет две-три единицы на 10^{-6}). Такова современная точность предсказаний специальной теории относительности. Дальнейшее повышение точности очень трудно из-за того, что мы не умеем описывать процессы сильного взаимодействия, учитывать аккуратно размеры и структуру нуклонов и т. д.

Особенно тщательно показана независимость скорости света от его частоты. Скорость света оказывается одинаковой для видимого спектра и для радиоволн с точностью до 10-го знака. Это было проверено наблюдениями колебаний яркости пульсаров в разных частях спектра (отсутствие сдвига фаз между колебаниями). (Прим. ред.)

§ 31. Сохранение импульса и компоненты тензора натяжений t_{ij}

Наш первый принцип, на котором мы хотим остановиться,— это закон сохранения импульса. Чтобы он выполнялся, будем считать, как и прежде, что сила равняется скорости изменения импульса, и потребуем равенства сил действия и противодействия внутри нашей упругой среды. Рассмотрим, как это может быть выполнено.

Введем декартов набор осей координат x, y, z и определим компоненты тензора натяжений t_{ij} в любой точке данной среды в виде таблицы из девяти величин:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix}. \quad (31.1)$$

Величины t_{ij} —это нормальные и тангенциальные компоненты силы, действующей в среде на единичную поверхность в данной точке, в соответствии с обычным значением символа t_{ij} как компоненты силы, параллельной i -й оси и действующей на единичную площадку, нормальную к j -й оси; причем сила создается веществом, лежащим со стороны меньших значений координат x_j .

При этом определении тензора натяжений t_{ij} принцип равенства действия и противодействия будет справедлив, если считать, что $-t_{ij}$ задает силу, которая параллельна i -й оси, и создается единичную поверхность, нормальную к j -й оси, и создается веществом, расположенным со стороны *больших* значений координат x_j . Как это осуществить, будет показано в следующем параграфе.

§ 32. Уравнения движения, выраженные через тензор натяжений t_{ij}

На основании предыдущего мы можем теперь найти выражение для уравнения движения среды через тензор натяжений t_{ij} .

С одной стороны, можно вычислить результирующую силу, действующую на единичный кубик среды, если учесть разность натяжений на его параллельных гранях. Например, если мы рассмотрим компоненты силы в направлении оси x и возьмем две грани, перпендикулярные оси y , то можно считать, что сила, действующая на нижнюю из этих граней, равна t_{xy} , а согласно постулированному равенству действия и противодействия считать, что сила, действующая на верхнюю грань, равна $-(t_{xy} + \partial t_{xy} / \partial y)$. Следовательно, с учетом натяжений на обеих гранях полный вклад в компоненту силы в направлении x равен $-\partial t_{xy} / \partial y$.

Складывая силы, действующие на три пары параллельных граней, получаем выражение

$$f_x = -\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \quad (32.1)$$

в качестве полной силы, действующей на единичный кубик вещества в направлении оси x .

Обобщая, можно написать

$$f_i = -\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \quad (32.2)$$

как определение силы, действующей в i -м направлении на единичный объем. Двойное появление немого индекса j указывает, как и всегда, на суммирование по трем координатам x, y, z .

С другой стороны, поскольку f_i есть компонента силы, действующей на единичный объем, то $f_i \delta v$ — компонента силы, действующей на бесконечно малый объем вещества δv . Приравняем ее скорости изменения импульса в объеме, т. е. запишем

$$f_i \delta v = \frac{d}{dt} (g_i \delta v), \quad (32.3)$$

где g_i — плотность i -й компоненты импульса в данной точке.

Подставляя (32.2) в (32.3), запишем уравнение движения элемента δv в виде

$$-\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \delta v = \frac{d}{dt} (g_i \delta v) = \frac{dg_i}{dt} \delta v + g_i \frac{d}{dt} (\delta v). \quad (32.4)$$

Это выражение можно упростить, так как для скорости изменения плотности импульса, очевидно, справедливо выражение

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + u_x \frac{\partial g_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial g_i}{\partial y} + u_z \frac{\partial g_i}{\partial z} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad (32.5)$$

где первый член есть изменение плотности импульса в данной точке, второй член — изменение, происходящее из-за движения элемента с компонентами скорости u_j . Скорость изменения объема δv можно выразить так:

$$\frac{d}{dt} (\delta v) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \delta v = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta v. \quad (32.6)$$

Подставляя выражения (32.5) и (32.6) в соотношение (32.4) и упрощая его, получаем уравнение движения рассматриваемой

среды в достаточно простом виде:

$$-\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + g_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_i u_j). \quad (32.7)$$

Это соотношение объединяет три отдельных уравнения, соответствующих различным значениям индекса i : x , y и z ; по немому индексу j здесь следует производить суммирование.

§ 33. Уравнение непрерывности

Преыдущие три уравнения вытекают из постулата сохранения импульса. Теперь на основании закона сохранения массы получим дополнительно к ним уравнение непрерывности

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (33.1)$$

или

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (33.2)$$

где ρ — плотность массы в рассматриваемой точке. Поскольку плотность импульса \mathbf{g} по определению равняется плотности потока массы, это уравнение есть не что иное, как следствие нашего постулата сохранения массы.

§ 34. Формулы преобразований для тензора натяжений t_{ij}

Итак, с помощью законов сохранения массы и импульса получены уравнения движения (32.7) и уравнение непрерывности (33.2) в случае сплошных сред. Согласно первому постулату теории относительности поведение среды во всех инерциальных системах координат будет описываться теми же самыми уравнениями. Однако, чтобы использовать соотношения, связывающие такие величины, как тензор натяжений t_{ij} , плотность импульса \mathbf{g} и плотность массы ρ , мы должны уметь находить значения этих величин в любой системе координат.

В настоящем параграфе мы найдем формулы преобразований, позволяющие вычислять компоненты тензора t_{ij} , если известны компоненты t_{ij}^0 , измеренные наблюдателем, движущимся вместе со средой и находящимся в рассматриваемой точке. В следующем параграфе мы получим преобразования, позволяющие вычислять также величины ρ и \mathbf{g} через величины, которые могут быть измерены непосредственно обычными методами.

При нахождении преобразований для t_{ij} , \mathbf{g} и ρ мы будем основываться на том, что мы уже знаем о свойствах лоренцевых преобразований.

Возможно, следует подчеркнуть, что именно введение лоренцевых преобразований определяет существенные черты релятивистской механики непрерывных сред, поскольку уравнения движения (32.7) и уравнения непрерывности (33.2) будут справедливы также во всех системах координат и в ньютоновской механике, если использовать галилеевы преобразования вместо лоренцевых.

Найдем теперь, как преобразуется тензор натяжений t_{ij} при переходе от одной системы отсчета к другой. Компоненты тензора были определены через силы и площади, на которые они действуют, а мы уже знаем формулы преобразований для этих величин. При преобразовании выражений для площадей появляются лоренцевы сокращения (§ 9), существование которых есть следствие фундаментальных законов преобразования для пространственных и временных измерений. При преобразованиях компонент силы можно воспользоваться результатами § 25, поскольку, как уже указывалось в этом параграфе, формулы преобразований для сил любого происхождения должны быть одинаковыми, если мы считаем, что закон сохранения импульса справедлив всегда, во всех системах координат.

Для простоты предположим, что наша первоначальная система координат S ориентирована так, что вещество в рассматриваемой точке среды движется относительно этой системы со скоростью u , параллельной оси x , т. е. компоненты скорости в направлениях осей y и z равны нулю. Введем вторую систему так называемых собственных координат S^0 , которые в рассматриваемом случае должны, согласно определению, перемещаться в направлении оси x системы S со скоростью

$$u = V. \quad (34.1)$$

Тогда вещество в данной точке будет находиться в состоянии покоя в системе S^0 , т. е.

$$u_x^0 = u_y^0 = u_z^0 = 0. \quad (34.2)$$

Теперь легко выразить компоненты t_{ij} , связанные с системой S , через компоненты t_{ij}^0 , заданные в системе S^0 . Подставляя выражения скорости (34.1) и (34.2) в формулы для сил (25.3), сразу получаем преобразование, связывающее результаты измерений силы в двух системах:

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad F_z = F_z^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (34.3)$$

Далее, отмечая, что лоренцевым сокращениям (9.3) будут подвергаться лишь площади, нормальные к y - и z -осям, можно записать следующие правила преобразований:

$$A_x = A_x^0, \quad A_y = A_y^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad A_z = A_z^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (34.4)$$

где индексы указывают направления нормалей.

Возвращаясь теперь к данному выше определению компонент тензора натяжений (31.1) через силы, действующие на единичные площади, легко видеть, что преобразования будут иметь вид *)

$$\begin{aligned} t_{xx} &= t_{xx}^0, & t_{xy} &= \frac{t_{xy}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & t_{xz} &= \frac{t_{xz}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ t_{yx} &= t_{yx}^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, & t_{yy} &= t_{yy}^0, & t_{yz} &= t_{yz}^0, \\ t_{zx} &= t_{zx}^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, & t_{zy} &= t_{zy}^0, & t_{zz} &= t_{zz}^0. \end{aligned} \quad (34.5)$$

Уравнения относятся к частному случаю, когда оси системы S направлены так, чтобы скорость u в рассматриваемой точке была параллельна оси x .

Поскольку в собственной системе координат скорость в рассматриваемой точке равна нулю, в этой системе справедливы обычные законы ньютоновской механики, которые ведут, как известно, к симметрии тензора натяжений, т. е. в системе S_0 для t_{ij}^0 должны выполняться соотношения

$$t_{xy}^0 = t_{yx}^0, \quad t_{yz}^0 = t_{zy}^0, \quad t_{xz}^0 = t_{zx}^0. \quad (34.6)$$

Однако на основании (34.5) можно сделать важное заключение, что тензор натяжений в системе S несимметричен, так что, вообще говоря, если точка движется в данной системе координат, то следует ожидать, что

$$t_{ij} \neq t_{ji}. \quad (34.7)$$

Заметим, что важность формул (34.5) состоит в том, что они позволяют найти натяжения в быстро движущемся веществе через известные выражения для натяжений в покоящемся.

*) Эти правила преобразований отличаются от тех, что даны в предыдущей книге автора [3] в § 122, поскольку натяжения там были определены для единичного собственного объема вещества. Приведенное определение через силу, действующую на единичную площадку в некоторой произвольной системе координат, выбрано согласно Лауэ [30].

§ 35. Формулы преобразований для плотностей массы и импульса

Выше были получены уравнения (34.5), позволяющие вычислять натяжения в любой заданной точке среды через натяжения, измеренные наблюдателем, движущимся с этой точкой. Теперь, как намечалось в начале предыдущего параграфа, мы найдем уравнения, позволяющие вычислять плотность массы ρ и плотность импульса g_i через величины, которые могут быть измерены наблюдателем, движущимся с веществом. Вывод этих соотношений — уже более сложная и громоздкая задача, и для этого мы должны будем использовать релятивистские соотношения между массой, энергией и импульсом, которые составляют ту часть аксиоматического базиса, сформулированного в § 30, которая до сих пор не находила применений.

С помощью этих соотношений мы сначала получим выражение для импульса движущегося объема среды через его массу (или энергию), скорость и величины натяжений. Это выражение в свою очередь позволит нам определить силу, действующую на данный объем вещества, когда изменятся его импульс и скорость, а следовательно, вычислить проделанную работу и увеличение энергии, когда его скорость увеличится от нуля до некоторого заданного значения. Тогда мы будем в состоянии определить массу, энергию и импульс движущегося вещества через его скорость u и массу, энергию и натяжения, измеренные наблюдателем, движущимся вместе с этим веществом. Перейдем к этой задаче.

Из наших представлений о связи между плотностью импульса и плотностью потока энергии (27.6) вытекает, что импульс движущегося объема вещества, в котором имеются натяжения, создается не только благодаря непосредственному движению самой массы, но и за счет потока энергии, возникающего вследствие работы, производимой натяжениями, которые действуют на грани рассматриваемого объема. Таким образом, если имеется вещество плотности ρ , движущееся со скоростью u , которую мы примем для простоты параллельной оси x , можно выразить плотность импульса в x -, y - и z -направлениях в виде

$$g_x = \rho u + \frac{t_{xx}u}{c^2}, \quad g_y = \frac{t_{xy}u}{c^2}, \quad g_z = \frac{t_{xz}u}{c^2}. \quad (35.1)$$

Здесь $t_{xx}u$, $t_{xy}u$ и $t_{xz}u$, очевидно, являются плотностями потока энергии в соответствующих направлениях, связанных с действием натяжений, а знаменатель c^2 учитывает различие единиц измерения массы и энергии. Итак, получен важный и интересный результат в релятивистской механике, заключающийся в том, что в напряженном теле возникают компоненты импульса, перпендикулярные к направлению движения.

Полный импульс малого объема среды v можно выразить тогда согласно (35.1) в виде

$$G_x = \frac{E + t_{xx}v}{c^2} u, \quad G_y = \frac{t_{xy}v}{c^2} u, \quad G_z = \frac{t_{xz}v}{c^2} u, \quad (35.2)$$

где для удобства полная масса выражена через энергию E , поделенную на c^2 . Теперь из определения силы как скорости изменения импульса мы можем написать, что

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{E + t_{xx}v}{c^2} u \right), \\ F_y &= \frac{d}{dt} \left(\frac{t_{xy}v}{c^2} u \right), \\ F_z &= \frac{d}{dt} \left(\frac{t_{xz}v}{c^2} u \right) \end{aligned} \quad (35.3)$$

суть компоненты силы, которую надо приложить к веществу, находящемуся в объеме v , чтобы придать этому веществу скорость u , параллельную оси x .

Мы можем теперь вычислить величины работы и энергии, необходимой для того, чтобы заданный элемент деформированного материала увеличил свою скорость от нуля до нужного значения. Рассмотрим выделенный объем вещества v^0 , содержащий энергию E^0 и испытывающий натяжения t_{ij}^0 , который приобретает скорость от нуля до заданной вследствие адиабатического ускорения, параллельного оси x . Под адиабатичностью подразумевается, что параметры, описывающие состояние вещества (т. е. величины v^0 , E^0 и t_{ij}^0), остаются неизменными с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с веществом. Вследствие лоренцева сокращения (9.3) объем, движущийся со скоростью u , уменьшается следующим образом:

$$v = v^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (35.4)$$

а в соответствии с формулами преобразований для натяжений (34.5) в течение всего процесса ускорения должно выполняться равенство

$$t_{xx} = t_{xx}^0. \quad (35.5)$$

Тогда скорость возрастания энергии в объеме, очевидно, равняется

$$\frac{dE}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} - t_{xx} \frac{dv}{dt}, \quad (35.6)$$

где первый член — скорость, с которой производится работа под действием деформирующих сил, приложенных к данному объе-

му, размеры которого уменьшаются в направлении оси x из-за сокращения Лоренца, а второй есть работа, производимая в единицу времени силами натяжения, действующими на элемент объема, который претерпевает лоренцево сокращение в направлении оси x .

Вводя обозначение u вместо dx/dt и подставляя вместо компоненты F_x выражение (35.3), можно переписать уравнение (35.6) так:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt} \frac{u^2}{c^2} + E \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt} + t_{xx} \frac{u^2}{c^2} \frac{dv}{dt} + t_{xx} v \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt} - t_{xx} \frac{dv}{dt},$$

с учетом того, что компонента t_{xx} постоянна в соответствии с условием (35.5). Последнее выражение далее можно привести к виду

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{d}{dt} (E + t_{xx}v) = (E + t_{xx}v) \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt}.$$

Проинтегрируем теперь левую и правую части этого выражения, считая, что скорость меняется от 0 до u ; окончательно получаем

$$E + t_{xx}v = \frac{E^0 + t_{xx}^0 v^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (35.7)$$

Нулевой индекс здесь указывает на то, что соответствующие величины измеряются наблюдателем, покоящимся относительно среды.

Последнее уравнение позволяет уже записать выражения для плотностей массы и импульса. Для этого разделим выражение (35.7) на объем v , используем соотношение (35.4) между v и v^0 равенство t_{xx} и t_{xx}^0 (см. (35.5)) и заменим плотность энергии массой, введя множитель c^2 ; в результате получим выражение для плотности массы в виде

$$\rho = \frac{\rho_{00} + t_{xx}^0 u^2/c^4}{1 - u^2/c^2}, \quad (35.8)$$

где ρ_{00} — собственная плотность вещества, измеряемая наблюдателем, движущимся вместе с этим веществом. Объединяя затем результаты (35.1) и (34.5), находим проекции плотностей импульса:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{c^2 \rho_{00} + t_{xx}^0}{1 - u^2/c^2} \frac{u}{c^2}, \\ g_y &= \frac{t_{xy}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{u}{c^2}, \\ g_z &= \frac{t_{xz}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{u}{c^2}. \end{aligned} \quad (35.9)$$

Эти выражения позволяют находить плотность массы ρ и импульса g_i в данной точке среды, движущейся со скоростью u , используя скорость, плотность ρ_{00} и натяжения t_{ij}^0 , измеряемые наблюдателем, движущимся вместе с веществом. Эти выражения имеют простой вид за счет специального выбора координат, при котором направление движения параллельно оси x ; в остальном они являются общими.

Следует особо отметить, что эти уравнения получены без каких-либо ссылок на микроскопическое поведение отдельных частиц, из которых, вообще говоря, состоит вещество, а изучаемые величины, такие, как плотность, скорость и натяжения, считаются макроскопически измеримыми. Чтобы подчеркнуть это, нами использован символ ρ_{00} как обозначение собственной *макроскопической* плотности вещества, измеряемой локальным наблюдателем, поскольку символ ρ_0 с одним индексом обычно означает гипотетическую *микроскопическую* плотность. Как было замечено в § 30, приняв макроскопическую точку зрения, мы избежали необходимости рассматривать квантовомеханическое поведение отдельных частиц.

§ 36. Выражение результатов через (абсолютные) натяжения p_{ij}

Найденные правила преобразования для компоненты тензора натяжений и плотностей масс и импульса дают, очевидно, совместно с уравнениями движения и непрерывности полный аппарат для изучения механики сплошных сред. Как будет показано ниже, развитый нами формализм принимает чрезвычайно простую форму, если ввести новый набор величин p_{ij} :

$$p_{ij} = t_{ij} + g_i u_j, \quad (36.1)$$

где t_{ij} — компоненты введенного ранее тензора натяжений, заданного в рассматриваемой точке, а g_i и u_j — соответствующие компоненты плотности импульса и скорости в этой точке.

В согласии с этим определением и соотношением (34.6) в специальном случае собственной системы координат, которая движется вместе с рассматриваемой точкой, мы получаем простые соотношения:

$$p_{ij}^0 = p_{ji}^0 = t_{ij}^0 = t_{ji}^0. \quad (36.2)$$

Используя этот результат вместе с правилами преобразования тензора натяжений (34.5) и плотности импульса (35.9), легко найти правила преобразований и для случая координат более общего типа, когда вещество в данной точке движется в

направлении оси x со скоростью u :

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{\rho_{xx}^0 + \rho_{00}u^2}{1 - u^2/c^2}, & p_{xy} &= \frac{\rho_{xu}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & p_{xz} &= \frac{\rho_{xz}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ p_{yx} &= \frac{\rho_{yx}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & p_{yy} &= \rho_{yy}^0, & p_{yz} &= \rho_{yz}^0, \\ p_{zx} &= \frac{\rho_{zx}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & p_{zy} &= \rho_{zy}^0, & p_{zz} &= \rho_{zz}^0. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Далее, правила преобразования плотности массы и плотности импульса (35.8) и (35.9) можно теперь переписать в виде

$$\rho = \frac{\rho_{00} + \rho_{xx}^0 u^2/c^4}{1 - u^2/c^2} \quad (36.4)$$

и

$$g_x = \frac{c^2 \rho_{00} + \rho_{xx}^0}{1 - u^2/c^2} \frac{u}{c^2}, \quad g_y = \frac{\rho_{xy}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{u}{c^2}, \quad g_z = \frac{\rho_{xz}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{u}{c^2}. \quad (36.5)$$

Наконец, с помощью определения (36.1) уравнения движения (32.7) могут быть выражены на новом языке в крайне простой форме:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial t} = 0, \quad (36.6)$$

а уравнение непрерывности (33.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (36.7)$$

Поскольку выражения (36.2)—(36.5) позволяют вычислить все величины, фигурирующие в уравнении движения (36.6) и в уравнении непрерывности (36.7), через величины, которые измеримы обычными методами локальным наблюдателем, движущимся вместе с веществом, мы имеем в компактной и удобной форме все, что необходимо для рассмотрения механики сплошных сред. Уравнения преобразований (36.3)—(36.5) упрощены за счет специального выбора направления осей, при котором скорость среды u в данной точке параллельна оси x .

Интересно отметить, что, хотя натяжения t_{ij} , определенные как силы, действующие на единичную площадку в среде, несимметричны (см. (34.5)), за исключением системы собственных координат, новые величины p_{ij} , как видно из соотношений (36.2)

и (36.3), образуют симметричный тензор во всех системах координат.

Так как силы, соответствующие натяжениям t_{ij} , описывают действие одной части среды на другую, поверхности, на которые действуют эти натяжения, покоятся относительно среды. Поэтому величины t_{ij} иногда называют компонентами *относительных* натяжений. С другой стороны, новые величины p_{ij} определяют согласно формуле (36.6) скорость изменения плотности импульса в данной точке, фиксированной в пространстве относительно выбранной системы координат. По этой причине величины p_{ij} иногда называют компонентами тензора *абсолютных* натяжений, как мы и сделали в заглавии этого параграфа.

Введение новых величин p_{ij} — большой шаг вперед, так как от них легко перейти к обобщенным симметричным четырехмерным тензорам, что придает формализму механики сплошных сред очень простой ковариантный вид. К описанию этого мы и перейдем в следующем параграфе.

§ 37. Четырехмерная формулировка механики сплошных сред

Чтобы перевести аппарат механики сплошных сред на четырехмерный язык, вернемся к фундаментальному представлению о четырехмерном пространственно-временном континууме, наделенном системой галилеевых координат (x^1, x^2, x^3, x^4) , которые связаны с пространственными и временной координатами выражением (19.1):

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct. \quad (37.1)$$

Для описания состояния механической среды в данной точке пространства — времени введем симметричный четырехмерный тензор $T^{\mu\nu}$ — так называемый тензор энергии — импульса. Десять независимых компонент тензора $T^{\mu\nu}$ выберем так, чтобы они были по возможности просто связаны с десятью величинами p_{ij} , g_i и ρ , которые мы использовали в механике сплошных сред, и так, чтобы прийти к единственному тензорному уравнению очень простого вида, эквивалентному трем уравнениям движения и уравнению непрерывности, которое было нам нужно ранее.

Для того чтобы составить тензор энергии — импульса, введем собственные координаты $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ так, чтобы рассматриваемый в данной точке элемент среды имел нулевую скорость относительно выбранной системы координат

$$\frac{dx_0^1}{ds} = \frac{dx_0^2}{ds} = \frac{dx_0^3}{ds} = 0. \quad (37.2)$$

Тогда компоненты тензора энергии — импульса $T^{\mu\nu}$ могут быть заданы следующей простой таблицей:

$$T_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p_{xx}^0 & p_{xy}^0 & p_{xz}^0 & 0 \\ p_{yx}^0 & p_{yy}^0 & p_{yz}^0 & 0 \\ p_{zx}^0 & p_{zy}^0 & p_{zz}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2\rho_{00} \end{pmatrix}. \quad (37.3)$$

Очевидно, что это выражение полностью определяет компоненты тензора в данной точке, а следовательно, и во всех системах координат, так как из общего соотношения (19.8) можно получить следующее правило преобразования для $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^\beta} T_0^{\alpha\beta}. \quad (37.4)$$

Это выражение задает компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ в любой нужной нам системе координат (x^1, x^2, x^3, x^4) , если известны все компоненты тензора в собственных координатах (формула (37.3)).

Легко убедиться в полезности введенного нами 4-тензора. Перейдем от первоначальных координат $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$, в которых рассматриваемый элемент вещества покоится в данной точке, к системе координат, где этот элемент вещества движется параллельно оси x со скоростью u . Для этого в лоренцевых правилах преобразования (20.3) положим скорость V равной $-u$. В результате получим формулы

$$x^1 = \frac{x_0^1 + ux_0^4/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x^2 = x_0^2, \quad x^3 = x_0^3, \quad x^4 = \frac{x_0^4 + ux_0^1/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (37.5)$$

Затем с помощью формулы (20.4) найдем величины всех исчезающих производных в уравнении (37.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial x_0^1} &= \frac{\partial x^4}{\partial x_0^4} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ \frac{\partial x^1}{\partial x_0^4} &= \frac{\partial x^4}{\partial x_0^1} = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ \frac{\partial x^2}{\partial x_0^2} &= \frac{\partial x^3}{\partial x_0^3} = 1. \end{aligned} \quad (37.6)$$

Подставляя выражения (37.6) в уравнение (37.4) и учитывая, что $T_0^{\alpha\beta}$ задан таблицей (37.3), получаем компоненты

тензора $T^{\mu\nu}$ в виде

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{xx}^0 + \rho_{00} u^2}{1 - u^2/c^2} & \frac{\rho_{xy}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \frac{\rho_{xz}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \frac{c^2 \rho_{00} + \rho_{xx}^0 u}{1 - u^2/c^2} \frac{u}{c} \\ \frac{\rho_{yx}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \rho_{yy}^0 & \rho_{yz}^0 & \frac{\rho_{xy}^0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2} c} \\ \frac{\rho_{zx}^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \rho_{zy}^0 & \rho_{zz}^0 & \frac{\rho_{xz}^0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2} c} \\ \frac{c^2 \rho_{00} + \rho_{xx}^0 u}{1 - u^2/c^2} \frac{u}{c} & \frac{\rho_{xy}^0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2} c} & \frac{\rho_{xz}^0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2} c} & \frac{c^2 \rho_{00} + \rho_{xx}^0 u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} \end{pmatrix}. \quad (37.7)$$

Сравнивая теперь эти величины с величинами, определенными формулами (36.3) — (36.5) предыдущего параграфа, видим, что рассматриваемый тензор можно записать в виде простой симметричной таблицы:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} & c g_x \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} & c g_y \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} & c g_z \\ c g_x & c g_y & c g_z & c^2 \rho \end{pmatrix}. \quad (37.8)$$

Отсюда следует, что компоненты этого тензора имеют один и тот же физический смысл во всех системах галилеевых координат.

Полезность введения тензора энергии — импульса очевидна, так как полученные ранее уравнения движения и непрерывности можно теперь объединить в чрезвычайно простой формуле:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (37.9)$$

Вспомянув определение координат (37.1), легко убедиться, что формула (37.9) соответствует четырем уравнениям, если придавать индексу μ различные значения 1, 2, 3, 4 и суммировать по немому индексу ν . Таким образом, этот способ записи эквивалентен нашей предыдущей записи уравнений движения и уравнения непрерывности в виде (36.6) и (36.7) соответственно.

Поскольку $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\nu$ есть выражение для свернутой ковариантной производной от $T^{\mu\nu}$, справедливое при нашем простом выборе координат, то последнее уравнение можно считать тензорным соотношением, что, в согласии со сказанным в § 21,

обеспечивает соответствие этого соотношения с постулатами теории относительности. Следовательно, полученное нами здесь уравнение (37.9), где $T^{\mu\nu}$ определено в виде (37.3), может теперь само по себе считаться вполне удовлетворительной основой механики сплошных сред. Это основное соотношение приобретает особую ценность при переходе к общей теории относительности.

§ 38. Применения механики сплошных сред

Очевидно, что система механики, построение которой мы завершаем, значительно отличается от ньютоновской механики. Эти отличия отчетливо видны на примере уравнений (36.4) и (36.5), указывающих не только на то, что масса движущегося тела зависит от скорости частиц, но и на то, что масса и импульс зависят от натяжений и что существуют компоненты импульса в теле, в котором действуют натяжения, направленные под прямым углом к направлению движения.

Прямая экспериментальная проверка этих дополнительных отличий между ньютоновской и релятивистской механиками была бы особенно важной из-за того, что построение механики общей теории относительности существенно основано на настоящих результатах. К тому же следует отметить, что из выше-найденных уравнений вытекает, что отличия от ньютоновской механики будут существовать даже для малых скоростей, если натяжения $p_{ij}^0 = t_{ij}^0$ достаточно велики. Тем не менее в механике до сего времени неизвестны простые примеры, в которых эти натяжения были бы настолько большими, чтобы возникали значительные отклонения от ньютоновской механики. Это, конечно, неприятно с точки зрения экспериментальной проверки новой механики, но, с другой стороны, это означает, что неизвестны механические явления, которые противоречили бы новой теории.

Следовательно, поскольку непосредственные опыты по проверке новой механики неосуществимы, наша вера в справедливость ее следствий зависит от согласованности этой теории с остальной физикой и ее внутренней самосогласованности и стройности. Такая внутренняя стройность должна стать, как мы надеемся, очевидной благодаря методу изложения теории, который был нами выбран. Видимая стройность теории еще усилится, после того как мы получим некоторые следствия теории и покажем, насколько это в наших силах, их рациональную природу и взаимосвязь с другими областями физики.

а) *Масса и импульс конечной системы.* Первоначально уравнения движения и уравнение непрерывности были получены в дифференциальной форме. Посмотрим теперь, какие следствия

вытекают из этих уравнений тогда, когда можно проинтегрировать их по конечному объему.

Рассмотрим сначала уравнение непрерывности (33.1). Интегрируя его по некоторому фиксированному объему пространства, можно выразить скорость изменения массы, заключающейся в этом объеме, следующим образом:

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \iiint \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (38.1)$$

Выполняя интегрирование по частям, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \iint |g_x|_x^{x'} dy dz - \iint |g_y|_y^{y'} dx dz - \iint |g_z|_z^{z'} dx dy. \quad (38.2)$$

Здесь пределы интегрирования по поверхности, ограничивающей объем, обозначены символами x , x' и т. д. Итак, мы связали скорость изменения массы внутри рассматриваемого объема с плотностью потока через ограничивающую его поверхность. Для *изолированной системы* это приводит к закону сохранения массы, а также к закону сохранения энергии в силу связи этих двух величин.

Подобным же образом, исходя из уравнений движения в их первоначальной форме, мы можем путем интегрирования получить сведения о скорости изменения импульса конечной системы. Для этого имеются две возможности, связанные с тем, что уравнения движения могут выражаться либо через натяжения t_{ij} , либо через натяжения p_{ij} .

Сначала рассмотрим уравнения движения во второй из указанных форм (36.6), которая несколько проще.

Как и выше, проведем интегрирование по определенному *фиксированному объему пространства* и получим для скорости изменения i -й компоненты импульса внутри этого объема выражение

$$\frac{dG_i}{dt} = \int \frac{\partial g_i}{\partial t} dv = - \iiint \left(\frac{\partial p_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (38.3)$$

Выполняя затем интегрирование по частям, перепишем его так:

$$\frac{dG_i}{dt} = \int \frac{\partial g_i}{\partial t} dv = - \iint |p_{ix}|_x^{x'} dy dz - \iint |p_{iy}|_y^{y'} dx dz - \iint |p_{iz}|_z^{z'} dx dy, \quad (38.4)$$

где пределы интегрирования по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, обозначены здесь символами x , x' и т. д. Получив соотношение (38.4), мы связали тем самым скорость изменения импульса внутри рассматриваемого пространственного объема с величинами p_{ij} , заданными на поверхности, ограничивающей этот объем. В случае *изолированной системы* это приводит, естественно, к закону сохранения импульса.

Мы можем также рассматривать уравнения движения в их прежней форме (32.4):

$$\frac{d}{dt}(g_i \delta v) = - \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \delta v. \quad (38.5)$$

Эта формула дает скорость изменения импульса бесконечно малого элемента вещества, занимающего в данный момент объем δv , в отличие от найденного ранее выражения для скорости изменения плотности импульса в данной точке. На этот раз вместо интегрирования по фиксированному объему пространства мы проинтегрируем *по объему, находящемуся в данный момент внутри поверхности, которая ограничивает этот объем вещества*, и получим для скорости изменения импульса этого вещества следующее выражение:

$$\frac{d |G_i|}{dt} = \frac{d}{dt} \int g_i \delta v = - \iiint \left(\frac{\partial t_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial t_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{iz}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (38.6)$$

Или, выполняя интегрирование по частям, можно переписать (38.6) в виде

$$\frac{d |G_i|}{dt} = \frac{d}{dt} \int g_i \delta v = - \iiint |t_{ix}|_x^{x'} dy dz - \iiint |t_{iy}|_y^{y'} dx dz - \iiint |t_{iz}|_z^{z'} dx dy, \quad (38.7)$$

где пределы интегрирования по ограничивающей поверхности обозначены буквами x , x' и т. д. и используется символ $|G_i|$ для обозначения импульса заданного количества вещества, отличного от импульса G_i , принадлежащего заданному объему пространства. Уравнение (38.7) связывает скорость изменения импульса данного количества вещества с силами, действующими на него, и сводится опять-таки к закону сохранения импульса изолированной системы.

В заключение настоящего параграфа укажем, что формулы (38.2) и (38.4) для скоростей изменения массы и трех компонент импульса вещества, находящегося в данном объеме пространства, могут быть выражены на четырехмерном тензорном

языке с помощью единственного обобщенного уравнения. Чтобы сделать это, выпишем уравнения движения и уравнение непрерывности в виде (37.9):

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{38.8}$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса, определенный в § 37. Интегрируя по пространственным переменным x^1, x^2, x^3 в пределах выделенного нами объема, получаем

$$\iiint \left(\frac{\partial T^{\mu 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{\mu 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial T^{\mu 4}}{\partial x^4} \right) dx^1 dx^2 dx^3 = 0. \tag{38.9}$$

Выполняя затем интегрирование по частям и производя перегруппировку, переписываем последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial T^{\mu 4}}{\partial x^4} dx^1 dx^2 dx^3 = & - \iint \left. T^{\mu 1} \right|_{x^1}^{x'^1} dx^2 dx^3 - \\ & - \iint \left. T^{\mu 2} \right|_{x^2}^{x'^2} dx^1 dx^3 - \iint \left. T^{\mu 3} \right|_{x^3}^{x'^3} dx^1 dx^2, \end{aligned} \tag{38.10}$$

где пределы интегрирования по ограничивающей поверхности обозначены символами x^1, x'^1 и т. д.

Этот результат может быть назван законом сохранения энергии — импульса в применении к областям конечных размеров. Считая, что компоненты $T^{\mu\nu}$ заданы формулой (37.8), видим, что для $\mu=1, 2, 3$ это соотношение связывает скорость изменения во времени x^4 компонент импульса данной области с условиями на ее границе, что эквивалентно трем уравнениям (38.4). А для $\mu=4$ оно связывает граничные условия со скоростью изменения массы или энергии и эквивалентно уравнению (38.2). Таким образом, уравнения (38.10) согласуются с представлением, что за изменения массы, энергии и импульса вещества, заключенного в данной области, ответствен поток, пересекающий ее границу. В случае же изолированной системы эти уравнения сводятся, как мы убедились, к законам сохранения массы, энергии и импульса.

б) *Момент количества движения системы конечных размеров.* Обычно нас будет в первую очередь интересовать величина момента количества движения для конечной системы, а не для некоторого фиксированного в пространстве объема. Для конечной системы можно определить компоненту момента количества движения, скажем, относительно оси z , задав ее обычным образом, как интеграл:

$$M_z = \int (xg_y - yg_x) dv, \tag{38.11}$$

взятый по объему, который заполнен веществом, образующим систему; x и y здесь являются координатами бесконечно малого объема вещества dv , а g_x и g_y — соответствующими компонентами плотности импульса в данной точке. Дифференцируя это соотношение по времени и используя выражение (38.5) для скорости изменения импульса в элементе dv , легко получить

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dt} &= \frac{d}{dt} \int (xg_y - yg_x) dv = \\ &= \int \left(-x \frac{\partial t_{yj}}{\partial x_j} + y \frac{\partial t_{xj}}{\partial x_j} + u_x g_y - u_y g_x \right) dv \quad (38.12) \end{aligned}$$

в качестве выражения для скорости изменения во времени z -компоненты полного момента количества движения системы.

После громоздких выкладок это выражение можно переписать в виде, показывающем, каким образом должны действовать на систему внешние силы, чтобы изменился ее момент количества движения. Интегрируя по частям первые два члена в последнем выражении, получаем

$$\begin{aligned} \int \left(-x \frac{\partial t_{yj}}{\partial x_j} + y \frac{\partial t_{xj}}{\partial x_j} \right) dv &= \iiint \left(-x \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} - x \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} - \right. \\ &\quad \left. - x \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + y \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + y \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + y \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \iint \left[-xt_{yx} + yt_{xx} \right]_x^{x'} dy dz + \iint \left[-xt_{yy} + yt_{xy} \right]_y^{y'} dx dz + \\ &+ \iint \left[-xt_{yz} + yt_{xz} \right]_z^{z'} dx dy + \iiint (t_{yx} - t_{xy}) dx dy dz, \quad (38.13) \end{aligned}$$

где пределами интегрирования служит поверхность, ограничивающая систему и обозначенная символами x , x' и т. д. Далее, свойство симметрии тензора p_{ij} , заложенное в его определении (36.1), позволяет написать

$$t_{yx} - t_{xy} = p_{yx} - g_y u_x - p_{xy} + g_x u_y = -(u_x g_y - u_y g_x). \quad (38.14)$$

Подставляя теперь соотношения (38.13) и (38.14) в уравнение (38.12), получаем искомое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dt} &= - \iint \left[xt_{yx} - yt_{xx} \right]_x^{x'} dy dz - \iint \left[xt_{yy} - yt_{xy} \right]_y^{y'} dx dz - \\ &\sim \iint \left[xt_{yz} - yt_{xz} \right]_z^{z'} dx dy. \quad (38.15) \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что скорость изменения момента количества движения системы равна вращающему моменту внешних сил, действующих на нее извне. В случае *изолированной системы*, когда эти силы отсутствуют, выражение (38.15), очевидно, приводит к закону сохранения момента количества движения:

$$\frac{dM_z}{dt} = 0. \quad (38.16)$$

Чтобы окончательно завершить наше рассмотрение момента количества движения, подчеркнем еще одно существенное различие между релятивистской и ньютоновской механиками. Применим первоначальное выражение (38.11) к случаю, когда система находится в состоянии равномерного движения по прямой линии, так что импульс $\mathbf{g} dv$ каждого элемента объема системы есть постоянная, не зависящая от времени. Для такой системы можно было бы ожидать, что момент количества движения также не будет зависеть от времени. Тем не менее, дифференцируя (38.11) по времени в том предположении, что величина $\mathbf{g} dv$ для каждого элемента постоянна, получаем для скорости изменения момента количества движения во времени выражение

$$\frac{dM_z}{dt} = \int (u_x g_y - u_y g_x) dv. \quad (38.17)$$

В ньютоновской механике, поскольку скорость \mathbf{u} и плотность импульса \mathbf{g} направлены одинаково, это выражение должно равняться нулю. Действительно, мы должны в этом случае подставить в (38.17) $g_y = \rho u_y$ и $g_x = \rho u_x$, что обращает скобку в последнем выражении в нуль. Напротив, в релятивистской механике сразу видим из уравнений (35.1) и (35.2), что среда, в которой действуют натяжения, может иметь импульс, направленный под прямым углом к направлению движения. В самом деле, в релятивистской механике связь натяжения с подинтегральным выражением в (38.17) задается уравнением (38.14), полученным выше:

$$u_x g_y - u_y g_x = t_{xy} - t_{yx}.$$

Следовательно, в релятивистской механике ввиду того, что тензор натяжений несимметричен, момент количества движения тела, испытывающего натяжение, может, вообще говоря, изменяться во времени, даже в том случае, когда тело находится в состоянии равномерного движения по прямой линии. Внешний крутящий момент при этом необходим для того, чтобы скомпенсировать это изменение и поддерживать тело в состоянии равномерного движения.

в) Угольник (пример). Рассмотрим кажущийся парадоксальным случай — движение напряженного угольника как любопытный пример того, что крутящий момент может быть необходим для поддержания испытывающего натяжения тела в состоянии равномерного поступательного движения [31].

Рассмотрим угольник, изображенный на рис. 3, надетый на ось в угле B , на который действуют силы F_1 и F_2 на двух его концах A и C . Будем считать, что угольник находится в равновесии в системе собственных координат S^0 и что оба его плеча равны в этой системе координат:

$$l_1^0 = l_2^0,$$

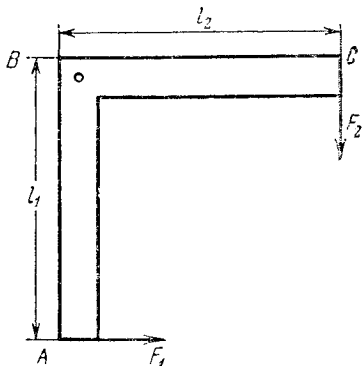


Рис. 3.

и силы, на них действующие, также равны между собой:

$$F_1^0 = F_2^0.$$

Найдем теперь, как все это описывается в новой системе координат S , относительно которой угольник движется в направлении x со скоростью V . В этой новой системе координат длина плеча l_1 , параллельного оси y , будет, очевидно, той же самой, что и в системе S^0 :

$$l_1 = l_1^0,$$

но другое плечо, параллельное направлению движения, будет меньше из-за лоренцева сокращения:

$$l_2 = l_2^0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Далее, согласно правилам преобразования сил (25.3), силы, действующие на плечи угольника, в новой системе равны

$$F_1 = F_1^0, \quad F_2 = F_2^0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

С помощью полученных формул для сил и для плеч угольника вычислим теперь вращающий момент относительно точки B :

$$F_1 l_1 - F_2 l_2 = F_1^0 l_1^0 - F_2^0 l_2^0 (1 - V^2/c^2) = F_1^0 l_1^0 V^2/c^2 = F_1 l_1 V^2/c^2.$$

Очевидно, что угольник не поворачивается вокруг оси B , независимо от того, рассматривается ли он в системе S^0 или в

системе S . Следовательно, мы получили простой пример напряженного тела, находящегося в состоянии равномерного поступательного движения, которое должно тем не менее подвергаться действию крутящего момента для сохранения этого состояния движения.

Этот результат находится в полном согласии с выводами, сделанными в предыдущем разделе параграфа, поскольку, как легко показать, момент количества движения системы действительно растет из-за притока в нее энергии, в точности согласующегося с величиной крутящего момента. Так как сила F_1 производит за секунду в точке A работу, равную F_1V , поток энергии именно такой величины непрерывно входит в систему в точке A и вытекает из системы через точку крепления B , где действует сила, равная F_1 , но противоположно направленная. Тогда из принятого нами соотношения между массой и энергией следует, что масса, равная F_1V/c^2 , ежесекундно входящая в систему в точке A , увеличивает момент количества движения системы в

$$F_1 \frac{V}{c^2} V l_1 = F_1 l_1 \frac{V^2}{c^2} \text{ раз.}$$

Итак, величина крутящего момента, действующего на рассматриваемый угольник, оказалась той же, что мы получили раньше, т. е. мы нашли полное решение поставленной задачи, в которой не осталось ничего парадоксального.

г) *Случай замкнутой статической системы.* Трудности, которые могут возникать при изучении равномерного поступательного движения напряженного тела, продемонстрированные на примере угольника, на который действует крутящий момент, но который при этом не вращается, исчезают, если разобрать случай замкнутой статической системы. В приведенном выше примере это соответствовало бы рассмотрению напряженного угольника вместе с опорой, на которой закреплена ось и на которой закреплены пружины, являющиеся как бы носителями сил F_1 и F_2 , действующих на концах угольника.

Вообще говоря, мы будем понимать под замкнутой статической системой жесткую конструкцию, которая остается в состоянии покоя относительно системы собственных координат S^0 , так что не требуется внешних сил, чтобы удержать ее в этом состоянии.

Тогда, поскольку такие системы в отсутствие внешних сил будут находиться в состоянии равномерного поступательного движения относительно любого набора лоренцевых координат S , очевидно, что нет нужды в крутящем моменте для поддержания этого равномерного движения, и согласно условию (38.16) момент количества движения системы в целом не будет изменяться со временем.

Более того, с помощью некоторых подсчетов можно доказать, что выражения массы и импульса для такой замкнутой системы имеют очень простую форму. Покажем это.

Прежде всего введем систему собственных координат S^0 , уравнения движения (36.6) в которой выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial p_{ij}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i^0}{\partial t} = 0. \quad (38.18)$$

Так как скорость всех частей системы равна нулю в этих координатах, плотность импульса g_i^0 будет повсюду равняться нулю в соответствии с правилами (36.5), так что можно переписать последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial p_{ij}^0}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ix}^0}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}^0}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}^0}{\partial z} = 0. \quad (38.19)$$

Проинтегрируем теперь это выражение по объему, прилежащему одной стороной к плоскости, перпендикулярной оси x и разрезающей систему в некоторой произвольной точке, скажем x' , а с другой стороны охваченному некой поверхностью, лежащей целиком вне системы. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \iiint \left(\frac{\partial p_{ix}^0}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}^0}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}^0}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint |p_{ix}^0|_x^{x'} dy dz + \iint |p_{iy}^0|_y^{y'} dx dz + \iint |p_{iz}^0|_z^{z'} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (38.20)$$

где пределы соответствующих однократных интегрирований обозначены буквами x , x' и т. д. Поскольку, однако, все эти пределы, кроме x' , расположены вне системы, все «натяжения» p_{ij}^0 на этих пределах обращаются в нуль, кроме p_{ix}^0 на поверхности $x=x'$, а следовательно, соотношение (38.20) превращается в условие

$$\iint p_{ix}^0 dy dz = 0, \quad (38.21)$$

где интеграл берется по плоскости, перпендикулярной к оси x и разрезающей систему в некоторой произвольной точке. Умножая это выражение на dx и интегрируя по всей системе, получаем следующее полезное соотношение:

$$\iiint p_{ix}^0 dx dy dz = 0,$$

или, поскольку плоскость, разрезающая систему, может быть

взята перпендикулярной к любой из трех осей, запишем его в общем виде:

$$\iiint p_{ij}^0 dx dy dz = 0. \quad (38.22)$$

Последний результат позволяет найти простое выражение для массы и импульса всей системы в любой системе координат S . Для простоты примем, что наша система движется относительно S в направлении x со скоростью u . Тогда можно вычислить полную массу системы, интегрируя по всему объему выражение для плотности массы (36.4), а именно:

$$m = \int \rho dv = \int \frac{\rho_{00} + \rho_{xx}^0 u^2/c^4}{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2} dv^0. \quad (38.23)$$

Здесь элемент объема dv заменен элементом собственного объема с учетом лоренцева сокращения. Используя условие (38.22), находим следующую простую формулу:

$$m = \int \frac{\rho_{00}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} dv^0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (38.24)$$

где m_0 — масса покоя системы. Выполняя теперь аналогичное интегрирование и используя выражения для плотности импульса (36.5), немедленно получаем, что компоненты полного импульса системы имеют вид

$$G_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u_x, \quad G_y = G_z = 0. \quad (38.25)$$

Итак, мы видим, что масса и импульс замкнутой статической системы определяются с помощью тех же самых простых соотношений, которые были найдены для частиц. Таким образом, не возникает никаких усложнений из-за того, что импульс и скорость в релятивистской механике не параллельны друг другу. Если система подвергается воздействию внешних сил, которые не создают крутящих моментов, не приводят к тому, что может быть названо квазистационарным адиабатическим ускорением, не изменяющим внутренние условия в данной точке системы с точки зрения локального наблюдателя, передвигающегося с системой, то можно установить, что и к этим явлениям применим развитый нами аппарат динамики частицы.

В то же время, последний результат позволяет считать механику частицы, на которую действуют внешние силы, частным случаем механики сплошных сред, если рассматривать частицу как замкнутую стационарную систему, слишком малую, чтобы на нее мог действовать крутящий момент, и при условии, что внут-

ренное состояние частицы остается неизменным с точки зрения локального наблюдателя. Справедливость обоих выводов указывает на внутреннюю согласованность развитых нами систем механики.

В заключение можно отметить, что если обобщить сделанные выше выводы о статических системах так, чтобы они относились как к механическим, так и к электрическим явлениям, то мы придем к объяснению хорошо известного опыта Траутона и Нобла. Этот опыт показывает, что электрический конденсатор, движущийся вместе с Землей, не обнаруживает стремления поворачиваться вокруг своей оси. Вычисления показывают, что поле заряженного конденсатора, находящегося в движении, должно создавать крутящий момент, действующий на материал, из которого построен конденсатор, и необходимо провести длинные и громоздкие вычисления чтобы доказать, что этот крутящий момент достаточен для того, чтобы увеличить момент количества движения материала, из которого построен конденсатор, даже тогда, когда конденсатор сам не вращается за счет проходящего через него потока энергии. Однако, если рассматривать совместно поле и материал, из которого состоит конденсатор, как образующие замкнутую статическую систему, можно, в соответствии с предыдущим обсуждением, сразу заключить, что эта система как целое будет находиться в состоянии равномерного поступательного движения и не будет при этом стремиться повернуться вокруг собственной оси.

Этот вывод и экспериментальные данные, конечно, отвечают требованиям первого постулата специальной теории относительности.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ

§ 39. Полевые уравнения Максвелла — Лоренца

В этой главе мы рассмотрим применение специальной теории относительности к электродинамике, причем в первой части этой главы мы будем исходить из электронной теории Лоренца, а во второй — из макроскопических представлений.

Развитие классической ньютоновской механики основывалось на обычных галилеевых преобразованиях пространства и времени (8.7), в то время как релятивистская механика Эйнштейна явно использовала преобразования Лоренца (8.1). В результате обе теории различались существенным образом.

Однако применение специальной теории относительности к электродинамике вносит в нее гораздо меньше изменений, поскольку электродинамика сама по себе, в том виде, который ей придал Лоренц, уже приводила по существу к формулам преобразования названных потом его именем.

Вследствие малых различий между классической и релятивистской электродинамикой мы можем в релятивистской электродинамике также положить в основу хорошо известные полевые уравнения Максвелла — Лоренца, которые мы запишем в векторной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \quad (39.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (39.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (39.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \frac{\mathbf{u}}{c}, \quad (39.4)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическая и магнитная напряженности поля соответственно, ρ — плотность электрических зарядов, \mathbf{u} — скорость, с которой они перемещаются, и c — скорость света.

Эти уравнения предложены Лоренцем как основа электродинамики задолго до возникновения квантовой механики. Смысл микроскопических величин, входящих в эти уравнения, не всегда полностью отвечает современным представлениям. Так, например, величины ρ и \mathbf{u} , стоящие в этих уравнениях, означают микроскопическую зарядовую плотность и скорость, которые можно задать, если это необходимо, даже для точки внутри электрона, а \mathbf{E} и \mathbf{H} рассматриваются как силы, действующие на единичный заряд и единичный магнитный полюс, даже при таких условиях, когда на самом деле никаких экспериментов с реально существующими пробными зарядами и полюсами для измерения этих величин поставить нельзя.

Эта трудность с аксиомами Лоренца неизбежна, если их рассматривать с микроскопической точки зрения, однако ко времени написания этой книги никакой более полной удовлетворительной теории не создано и имеется уверенность, что заключения, сделанные на основании теории Лоренца, должны иметь много общего с выводами будущей теории. Далее, во второй части настоящей главы, мы уделим внимание феноменологическому рассмотрению электродинамики движущихся тел, являющемуся более близким аналогом к полностью макроскопическому подходу, которого мы придерживались при изложении механики в предыдущей главе.

Начнем с нескольких хорошо известных результатов, которые следуют непосредственно из лоренцевых полевых уравнений.

Если взять дивергенцию от выражения (39.4) и использовать условие (39.1), сразу получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (39.5)$$

так как член $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ тождественно равен нулю. Это уравнение есть условие непрерывности плотности заряда, отражающее закон сохранения полного заряда.

Далее, если рассмотреть полевые уравнения (39.1) — (39.4) для случая свободного пространства (т. е. при плотности $\rho = 0$), можно легко преобразовать их с помощью соотношения (13) из Приложения II к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (39.6)$$

и

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (39.7)$$

Это — известные волновые уравнения, описывающие распространение электромагнитных возмущений в свободном пространстве со скоростью c .

Наконец, если ввести скалярный потенциал φ и векторный потенциал \mathbf{A} с помощью уравнений

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (39.8)$$

и

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (39.9)$$

то можно показать, что эти новые величины могут быть выбраны так, что будут удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho \quad (39.10)$$

и

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\rho \frac{\mathbf{u}}{c}. \quad (39.11)$$

Решения этих уравнений известны:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\rho]}{r} dv \quad (39.12)$$

и

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{[\rho \mathbf{u}]}{r} dv. \quad (39.13)$$

Интегрирование здесь производится по всему пространству; r — расстояние от рассматриваемой точки до элемента объема dv ; квадратные скобки означают, что стоящие в них величины взяты в момент времени, опережающий интересующий нас момент на величину r/c . Выражения (39.12) и (39.13) вместе с соотношениями (39.8) и (39.9) полностью определяют поля через распределения зарядов и токов.

§ 40. Правила преобразования \mathbf{E} , \mathbf{H} и ρ

Основы электродинамики, постулированные в виде полевых уравнений (39.1) — (39.4), справедливых в некоторой специальной системе координат, надо теперь обобщить в соответствии с основными представлениями специальной теории относительности. Начнем с того, что потребуем согласно двум постулатам относительности, чтобы уравнения в одной и той же форме описывали электромагнитные явления во всех инерциальных системах координат; затем, чтобы правила преобразования кинематических величин, стоящих в этих постулированных уравнениях, совпадали с преобразованиями Лоренца; и, наконец, чтобы правила преобразования вновь введенных величин \mathbf{E} , \mathbf{H} и ρ при

переходе от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой, совпадали с правилами обратных преобразований с точностью до изменения знака относительной скорости этих систем координат.

Рассматривая переход от одной системы координат S к другой S' , движущейся относительно первой со скоростью V , направленной для простоты по оси x , легко убедиться, что все перечисленные условия могут быть выполнены, если считать справедливыми преобразования Лоренца для координат x, y, z и t (8.1) и для компонент u_x, u_y и u_z скорости \mathbf{u} в виде (10.1), а в качестве правил преобразований электромагнитных величин — уравнения, предложенные Эйнштейном*):

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (40.1)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (40.2)$$

$$\rho = \frac{\rho' (1 + u'_x V/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (40.3)$$

Используя эти правила преобразований совместно с прежними правилами преобразований координат и скоростей, можно найти после довольно длинных вычислений, что полевые уравнения (39.1)—(39.4) действительно не изменяют формы, если в них подставить штрихованные величины вместо нештрихованных. Разрешая далее только что введенные уравнения относительно штрихованных величин, находим, что уравнения для

*) Формулы преобразования Лоренца для электромагнитного поля можно привести к очень простому виду, если ввести комплексный вектор

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{E} - i\mathbf{H}.$$

Введя еще «комплексные» компоненты

$$F_+ = F_x + iF_y = F_-^*, \quad F_- = F_x - iF_y = F_+, \quad F_0 = F_z,$$

нетрудно показать, что преобразование Лоренца вдоль оси z («поворот» в плоскости zt) описывается так:

$$F' = F e^a, \quad F'^* = F^* e^{-a},$$

где параметр a , называемый быстротой, связан с скоростью $\beta = v/c$ формулой

$$\beta = \tanh a.$$

При пространственных поворотах F и F^* преобразуются, как обычные векторы. При отражении F и F^* переходят друг в друга. (Прим. ред.)

обратных преобразований имеют тот же самый вид с точностью до знака при скорости V . Следовательно, эти уравнения удовлетворяют требованиям теории относительности.

Совместное появление компонент \mathbf{E}' и \mathbf{H}' в (40.1) и (40.2), как для \mathbf{E} , так и для \mathbf{H} , указывает на то, что разделение электромагнитного поля на электрическую и магнитную части зависит от характера движения используемой системы отсчета. Поля, считающиеся чисто электростатическими в системе S' , могут иметь магнитные компоненты в системе S^*).

Надо отметить также, что правило преобразования плотности заряда (40.3) оставляет инвариантным полный электрический заряд, так как, используя соотношение (11.1), можно переписать уравнение (40.3) в виде

$$\frac{\rho}{\rho'} \frac{\sqrt{1-u'^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (40.4)$$

откуда следует, что результаты измерений плотности заряда в двух системах обратно пропорциональны лоренцевым факторам, и, таким образом, величины полного заряда в них совпадают, т. е.

$$e = e'. \quad (40.5)$$

Это согласуется с тем, что электрический заряд принимает лишь дискретные значения, которые можно измерить простым счетом числа электронов и протонов, поэтому он является инвариантом относительно различных наблюдателей. Можно сказать, что из этой инвариантности следует закон преобразования (40.3).

§ 41. Сила, действующая на движущийся заряд

В добавление к четырем уравнениям поля первоначальная теория Лоренца включала в число основных постулатов пятое уравнение, определяющее силу, которая действует на движущийся электрический заряд. Однако принятый нами метод построения теории позволяет получить это важное уравнение с помощью формул преобразования для сил, найденных в механике частицы, и, следовательно, нет нужды вводить его в качестве самостоятельного постулата [32].

*) В релятивистской электродинамике остается разделение на электроподобные и магнитоподобные поля. Разделение основано на знаке инварианта $E^2 - H^2$. Если он положителен, то существует система отсчета, в которой поле чисто электрическое; если он отрицателен, то существует система, в которой поле чисто магнитное. Наконец, полю световой волны отвечает нулевое значение этого инварианта. (Прим. ред.)

Рассмотрим заряд e , движущийся относительно системы S с некоторой заданной скоростью V , и для простоты выберем оси системы S таким образом, чтобы движение заряда происходило в направлении оси x , т. е.

$$u_x = V, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0. \quad (41.1)$$

Прежде чем вычислить силу, действующую на этот движущийся заряд в системе S , найдем силу, действующую на него во второй системе координат S' , которая движется относительно системы S с той же самой скоростью V , что и заряд e . Поскольку в системе S' заряд покоится, то сила, действующая на него в этой системе, есть просто произведение заряда на электрическую напряженность (в соответствии с определением напряженности как силы, действующей на единичный покоящийся заряд), т. е.

$$F'_x = e'E'_x, \quad F'_y = e'E'_y, \quad F'_z = e'E'_z. \quad (41.2)$$

Используя формулы преобразования для силы (25.3), условие инвариантности электрического заряда (40.5) и правила преобразования для компонент напряженности электрического поля (40.1), а также значения (41.1) величин u_x , u_y и u_z , немедленно получаем

$$F_x = eE_x, \quad F_y = e\left(E_y - \frac{u_x H_z}{c}\right), \quad F_z = e\left(E_z + \frac{u_x H_y}{c}\right). \quad (41.3)$$

Отбрасывая теперь специальное условие — движение в направлении оси x , — можем написать в общем случае для силы, действующей на заряд e , который движется со скоростью u , векторное выражение

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]\right) \quad (41.4)$$

или для силы, действующей на единичный заряд,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]. \quad (41.5)$$

Последнее выражение является пятым фундаментальным уравнением теории электромагнетизма Максвелла — Лоренца.

§ 42. Энергия и импульс электромагнитного поля

Используя найденное уравнение и четыре полевые уравнения, можно с помощью известных методов получить выражения для энергии и импульса электромагнитного поля. Эти выражения настолько важны в теории относительности, что мы приведем их вывод со всеми подробностями.

Согласно уравнениям (41.5) та часть силы, действующей на движущийся заряд, которая создается магнитным полем, нормальна к направлению движения. Следовательно, в этом случае сила не производит никакой работы над зарядом, и полная скорость, с которой электромагнитное поле производит работу над заряженным веществом, находящимся внутри данной поверхности, определяется лишь напряженностью электрического поля

$$\frac{dW}{dt} = \int_N (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) dv. \quad (42.1)$$

Здесь ρ — плотность электрического заряда, а интегрирование производится по некоторому *объему, фиксированному в пространстве*. Преобразуем теперь это выражение, заменяя $\rho \mathbf{u}$ его значением (39.4) и добавляя к подинтегральному выражению величину, которая, как видно из уравнения (39.3), равна нулю. Получаем

$$\frac{dW}{dt} = - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{2} \right) dv - c \int (\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) dv. \quad (42.2)$$

Далее, с помощью известного соотношения векторного анализа (уравнение 17, Приложение II) это выражение можно переписать в виде

$$\frac{dW}{dt} = - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{2} \right) dv - c \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n d\sigma, \quad (42.3)$$

где в последнем члене интегрирование производится по поверхности, ограничивающей данный объем, а индекс n означает, что берется внешняя нормальная компонента от соответствующего вектора.

Последнее уравнение имеет простую интерпретацию, если вспомнить о законе сохранения энергии, как об одном из наших основных постулатов. Действительно, мы можем считать, что скорость, с которой производится работа над веществом внутри ограничивающей его поверхности, равна скорости, с которой энергия электромагнитного поля поступает внутрь через эту поверхность; тогда первый член, стоящий в правой части уравнения (42.3), можно интерпретировать как скорость изменения энергии электромагнитного поля внутри рассматриваемого объема, а второй член — как поток электромагнитной энергии, пересекающий границу этого объема в единицу времени. Плотность электромагнитной энергии при этом выражается хорошо известной формулой

$$\rho = \frac{E^2 + H^2}{2}, \quad (42.4)$$

а плотность потока энергии, или вектор Пойнтинга, имеет вид

$$\mathbf{s} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (42.5)$$

Используя соотношение между массой, энергией и импульсом, введенное в § 27, найдем плотность соответствующей электромагнитной массы

$$\rho = \frac{1}{c^2} \frac{E^2 + H^2}{2} \quad (42.6)$$

и плотность импульса

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (42.7)$$

§ 43. Тензор электромагнитных натяжений

С помощью основных уравнений мы можем также получить известное максвелловское выражение для тензора натяжений электромагнитного поля, играющее важную роль в теории относительности. Для этого найдем, как электромагнитное поле изменяет импульс электрически заряженного вещества (изменение энергии мы нашли в предыдущем параграфе).

Скорость, с которой электромагнитное поле изменяет импульс заряженного вещества, находящегося внутри данной поверхности, можно записать с помощью (41.5) в виде

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \int \rho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] \right) dv, \quad (43.1)$$

где интегрирование опять производится по некоторому *объему, фиксированному в пространстве*. Подставляя сюда вместо ρ и $\rho\mathbf{u}/c$ соответствующие величины из полевых уравнений (39.1) и (39.4), последнее соотношение переписываем так:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \int \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right) dv = \\ &= \int \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \right) dv, \end{aligned}$$

что, с учетом (39.3) и (42.7), принимает вид

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \int \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right) dv. \quad (43.2)$$

Здесь \mathbf{g} — плотность электромагнитного импульса поля. Или, рассматривая для определенности проекцию импульса на ось x и расписывая по компонентам векторы, стоящие в правой части

(43.2), приведем после довольно длинных тождественных преобразований к следующему выражению:

$$\frac{dG_x}{dt} = \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y + H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z + H_x H_z) - \frac{\partial g_x}{\partial t} \right] dv. \quad (43.3)$$

Этот результат очень просто интерпретировать, если тензор натяжений переписать в виде симметричных выражений

$$p_{ii} = -\frac{1}{2} (E_i^2 - E_j^2 - E_k^2 + H_i^2 - H_j^2 - H_k^2), \quad (43.4)$$

$$p_{ij} = -(E_i E_j + H_i H_j),$$

которые позволяют придать соотношению (43.3) более общий вид:

$$\frac{dG_t}{dt} + \int \frac{\partial g_t}{\partial t} dv = - \iiint \left(\frac{\partial p_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (43.5)$$

Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dG_t}{dt} + \int \frac{\partial g_t}{\partial t} dv = & - \iiint |p_{ix}|_x^{x'} dy dz - \\ & - \iiint |p_{iy}|_y^{y'} dx dz - \iiint |p_{iz}|_z^{z'} dx dy, \end{aligned} \quad (43.6)$$

где пределы интегрирования обозначены буквами x , x' и т. д. Из этих уравнений видно, что изменение полного импульса внутри заданной поверхности, происходящее по механическим причинам и из-за воздействия электромагнитного поля, можно вычислить, зная величины электромагнитных натяжений на этой поверхности, которые мы определили выражениями (43.4). Таким образом, оправдывается название «электромагнитные натяжения» для величин p_{ij} .

§ 44. Формулы преобразований для электромагнитных плотностей и натяжений

В двух последних параграфах получены выражения для величин, которые могут рассматриваться как плотность электромагнитной массы, плотность электромагнитного импульса и как компоненты тензора электромагнитных натяжений. А так как все эти величины выражаются с помощью уравнений (42.6), (42.7) и (43.4) через напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} ,

можно, очевидно, получить правила преобразования этих новых величин при переходе от одной системы координат к другой, используя преобразования (40.1) и (40.2) для компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Выкладки при этом оказываются довольно длинными и утомительными, но, в сущности, простыми. Преобразования от системы S к другой системе S' , движущейся относительно первой со скоростью V , параллельной оси x , в конечном итоге приводят к результатам:

$$\rho = \frac{\rho' + \rho'_{xx} V^2/c^4 + 2g'_x V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (44.1)$$

$$g_x = \frac{(c^2 \rho' + \rho'_{xx}) V/c^2 + (1 + V^2/c^2) g'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad g_y = \frac{\rho'_{xy} V/c^2 + g'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (44.2)$$

$$\rho_{xx} = \frac{\rho'_{xx} + \rho' V^2 + 2g'_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \rho_{yy} = \rho'_{yy}, \quad (44.3)$$

$$\rho_{xy} = \frac{\rho'_{xy} + g'_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \rho_{yz} = \rho'_{yz}.$$

Правила преобразования остальных компонент рассматриваемых величин можно найти из уже полученных, используя симметрию относительно проекций y и z и симметрию тензора ρ_{ij} .

Особо отметим, что эти уравнения принимают тот же вид, что и уравнения (36.3) — (36.5) для аналогичных механических величин, если скорость системы координат S' специально положить равной $V = u$, а компоненты импульса g'_x , g'_y и g'_z считать нулевыми, что соответствует выбору собственных координат в механике. Можно показать также, что правила преобразований не будут по виду отличаться от тех, что использовались в механике и при более общих заменах систем координат.

§ 45. Совместное механическое и электромагнитное воздействие

В предыдущей главе в § 38 мы обсуждали эффект механического воздействия на среду, состоящий в изменении массы (или энергии) и импульса внутри данного объема, фиксированного в пространстве, и получили соответствующие выражения. В этой главе в § 42 и § 43 были получены аналогичные выражения, описывающие изменения тех же величин при электромагнитном воздействии на вещество. Теперь мы сравним их и рассмотрим эффект совместного механического и электромагнитного воздействия. Условимся различать механические и

электромагнитные величины с помощью индексов «мех» и «эм» и для простоты будем считать, что двойное появление индекса « j » в данном члене означает суммирование по проекциям пространственных координат x , y и z .

Тогда, используя уравнения (38.1) и (38.3), можно выразить эффект *механического воздействия* на массу и импульс в данном пространственном объеме следующим образом:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} [\rho]_{\text{мех}} dv = - \int \frac{\partial}{\partial x_j} [g_j]_{\text{мех}} dv, \quad (45.1)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial t} [g_i]_{\text{мех}} dv = - \int \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{ij}]_{\text{мех}} dv. \quad (45.2)$$

С другой стороны, учтем, что скорость, с которой производится работа над веществом, равна скорости увеличения его массы, умноженной на c^2 . Тогда с помощью уравнений § 42 и § 43 эффекты *электромагнитного воздействия* на *механические* массу и импульс данного пространственного объема можно выразить так:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} [\rho]_{\text{мех}} dv = - \int \frac{\partial}{\partial t} [\rho]_{\text{эм}} + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_j]_{\text{эм}} dv, \quad (45.3)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial t} [g_i]_{\text{мех}} dv = - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [g_i]_{\text{эм}} + \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{ij}]_{\text{эм}} \right\} dv. \quad (45.4)$$

Так как в общем случае механическое и электромагнитное воздействия на массу и импульс существуют совместно, мы попытаемся теперь объединить эти уравнения так, чтобы найти полную скорость изменения этих величин. Однако прежде мы обсудим разницу в подходах, которые использовались при получении механических и электромагнитных уравнений.

Уравнения механики были получены чисто макроскопическим путем. Величины ρ , \mathbf{g} и p_{ij} , стоящие в них, имеют макроскопический характер и определяются с помощью уравнений (36.3) — (36.5) через макроскопические величины, которые могут быть непосредственно измерены локальным наблюдателем, движущимся вместе с рассматриваемой средой. Далее, теоретические основы этих уравнений механики не содержат в себе никаких микроскопических аспектов и развиваются как естественные, хотя не всегда однозначные, обобщения результатов макроскопических опытов по проверке сохранения массы и импульса, по проверке постулатов специальной теории относительности и из результатов феноменологического изучения свойств упругих тел, находящихся в покое. Следовательно, можно ожидать, что построенная на таких основаниях теория не должна зависеть от результатов квантовой механики.

Напротив, электромагнитная теория до сих пор рассматривалась нами микроскопически, как это принято в классической электронной теории Лоренца. Величины $[\rho]_{\text{мех}}$, $[\rho]_{\text{эм}}$, $[\mathbf{g}]_{\text{мех}}$ и $[p_{ij}]_{\text{эм}}$, стоящие в (45.3) и (45.4), имеют микроскопический характер и считаются заданными в определенной точке пространства и в фиксированный момент времени даже в том случае, когда трудно придумать какие-либо реальные эксперименты для измерения этих величин.

Итак, следует ожидать, что наши взгляды могут измениться в результате появления строгого аппарата квантовой электродинамики, хотя многие выводы, относящиеся к макроскопическим явлениям, должны по-прежнему остаться справедливыми.

Макроскопический характер величин в выражениях (45.1) и (45.2) и микроскопический характер величин в выражениях (45.3) и (45.4) делает логически несовместимым непосредственный учет сразу обоих видов воздействия на механические плотность и импульс. Но если предположить, что корректные процессы усреднения, которые превратят микроскопические плотности в макроскопические, оставят неизменными уравнения (45.3) и (45.4), то можно считать совместное рассмотрение двух видов воздействия оправданным. В этом случае можно после некоторых преобразований получить

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho]_{\text{мех}} + \frac{\partial}{\partial t} [\rho]_{\text{эм}} + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_j]_{\text{мех}} + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_j]_{\text{эм}} \right\} dv = 0 \quad (45.5)$$

и

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [g_i]_{\text{мех}} + \frac{\partial}{\partial t} [g_i]_{\text{эм}} + \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{ij}]_{\text{мех}} + \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{ij}]_{\text{эм}} \right\} dv = 0. \quad (45.6)$$

Собирая механические и электромагнитные величины одинаковой природы и переходя к дифференциальной форме, можем написать для зависимостей полных плотностей массы и импульса от времени следующие выражения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \quad (45.7)$$

и

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (45.8)$$

Эти уравнения имеют ту же самую форму, что и наши первоначальные уравнения движения и непрерывности (36.6) и (36.7) в случае чисто механического движения.

§ 46. Четырехмерная формулировка электронной теории

а) *Уравнения поля.* Уравнения поля (39.1) — (39.4), на которых основана электронная теория, легко записать на четырехмерном языке, уже использованном при исследовании свойств пространственно-временного континуума. В ряде случаев это приводит к большому выигрышу.

Чтобы получить эти выражения, воспользуемся, как и прежде, галилеевыми координатами (20.2):

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct, \quad (46.1)$$

которые всегда можно ввести в плоском пространстве — времени специальной теории относительности, в которой квадрат интервала имеет простой вид:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (46.2)$$

Введем еще два вектора, необходимых для дальнейшего.

Первый из них, так называемый *вектор тока* J^μ , может быть, вообще говоря, определен в любой системе координат с помощью формулы

$$J^\mu = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (46.3)$$

где ρ_0 — собственная плотность электрических зарядов в рассматриваемой точке, измеряемая локальным наблюдателем, а dx^μ/ds — обобщенная скорость движения этой плотности. При специальном выборе координат (46.1) компоненты вектора тока, очевидно, записываются так:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \left(\rho_0 \frac{dx^1}{ds}, \rho_0 \frac{dx^2}{ds}, \rho_0 \frac{dx^3}{ds}, \rho_0 \frac{dx^4}{ds} \right) = \\ &= \left(\rho_0 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^1}{dx^1}, \rho_0 \frac{dx^2}{ds} \frac{dx^2}{dx^2}, \rho_0 \frac{dx^3}{ds} \frac{dx^3}{dx^3}, \rho_0 \frac{dx^4}{ds} \right) = \\ &= \left(\rho \frac{u_x}{c}, \rho \frac{u_y}{c}, \rho \frac{u_z}{c}, \rho \right), \end{aligned} \quad (46.4)$$

так как

$$\frac{ds}{dx^1} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (46.5)$$

представляет собой множитель, учитывающий лоренцево сокращение движущегося заряда.

Второй нужный нам вектор — это *четырёхмерный потенциал* Φ^μ , который можно определить, задав его компоненты в координатной системе (46.1), через обычный вектор-потенциал \mathbf{A} и

скалярный потенциал φ , введенные выше уравнениями (39.8) — (39.11):

$$\Phi^\mu = (A_x, A_y, A_z, \varphi). \quad (46.6)$$

Совершая лоренцевы преобразования над компонентами вектора Φ^μ по формулам (39.12) и (39.13), можно показать, что связь \mathbf{A} и φ сохраняется во всех системах координат типа (46.1).

С помощью 4-вектора *ковариантного* потенциала Φ_μ можно ввести *тензор электромагнитного поля* $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (46.7)$$

В координатах (46.1) четырехмерный потенциал Φ_μ будет иметь согласно (20.7) компоненты

$$\Phi_\mu = (-A_x, -A_y, -A_z, \varphi). \quad (46.8)$$

Тогда, пользуясь формулами (38.8) и (38.9), легко выразить через электрические и магнитные напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} все компоненты $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} \downarrow \rightarrow \nu \\ \mu \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & H_z - H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (46.9)$$

Контравариантные компоненты в соответствии с общими правилами (20.8) имеют при этом вид

$$F^{\mu\nu} = \begin{matrix} \downarrow \rightarrow \nu \\ \mu \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & H_z - H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (46.10)$$

Теперь мы можем с помощью введенных величин свести лоренцевские полевые уравнения к двум очень простым по форме уравнениям:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (46.11)$$

и

$$\partial F^{\mu\nu} / \partial x^\nu = J^\mu. \quad (46.12)$$

Пользуясь определением $F_{\mu\nu}$ в виде (46.7), легко установить, что первое из этих уравнений является тождеством. Как тензорное уравнение, оно справедливо во всех системах координат, если справедливо в одной из них (см. уравнение (41), Приложение III). Второе уравнение надо рассматривать как независимый постулат. Оно представляет собой тензорное соотношение, поскольку в используемых нами простых координатах $\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\nu$ — это свертка ковариантной производной $F^{\mu\nu}$.

Придавая индексам μ , ν и σ различные значения 1, 2, 3, 4 и расписывая по компонентам J^μ , $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$ в соответствии с определениями (46.4), (46.9), (46.10), легко показать, что первое из уравнений, (46.11), эквивалентно набору уравнений

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (46.13)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned} \quad (46.14)$$

в то время как второе уравнение, (46.12), эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho \quad (46.15)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \rho \frac{u_x}{c}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \rho \frac{u_y}{c}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \rho \frac{u_z}{c}. \end{aligned} \quad (46.16)$$

Эти уравнения — не что иное, как запись в компонентах четырех уравнений поля (39.1) — (39.4), на которых основана лоренцевская электронная теория. Таким образом, два уравнения (46.11) и (46.12) могут служить удобным отправным пунктом при исследовании электромагнитных явлений.

б) *Четырехмерное выражение силы, действующей на заряд.* В дополнение к этой возможности формулировать лоренцевы

полевые уравнения на четырехмерном языке, следует отметить, что выражение для силы (41.4), т. е. пятое фундаментальное уравнение теории Лоренца, также носит четырехмерный характер. Чтобы убедиться в этом, проще всего рассмотреть построенное ковариантного вектора F^μ из компонент обычной силы и скорости изменения энергии по следующей схеме:

$$F^\mu = \left(\frac{F_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dE}{c dt} \right). \quad (46.17)$$

В самом деле, используя пятое фундаментальное уравнение (41.4), подставим в (46.17) выражения для компонент силы F_x , F_y и F_z , действующей на заряд e , движущийся со скоростью u , а вместо dE/dt — выражение совершаемой над этим зарядом работы. Тогда с помощью уравнений (40.1), (40.2) и (40.5) легко убедиться в том, что величины, заданные соотношением (46.17), преобразуются как компоненты контравариантного вектора. В согласии с формулой (28.12) видно, что F^μ обладает необходимыми свойствами силы любой природы.

Далее, подставляя в выражение (28.10) для силы, действующей на движущуюся частицу, компоненты F^μ из (46.17),

$$F^\mu = c^2 \frac{d}{ds} \left(m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right), \quad (46.18)$$

немедленно получаем ожидаемый результат:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] \right) \quad (46.19)$$

и

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = e (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}).$$

в) *Четырехмерное выражение для электромагнитного тензора энергии — импульса.* Наконец, отметим, что можно построить из тензора электромагнитных натяжений p_{ij} и плотностей электромагнитной массы ρ и импульса g_i электромагнитный тензор энергии — импульса $[T^{\mu\nu}]_{\text{эм}}$, формально подобный механическому тензору $[T^{\mu\nu}]_{\text{мех}}$, поскольку правила преобразований (44.1) — (44.3) электромагнитных величин совпадают с правилами преобразований соответствующих механических величин.

Тензор энергии — импульса электромагнитного поля надо задать следующим образом:

$$[T^{\mu\nu}]_{\text{эм}} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} & [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_x \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} & [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_y \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} & [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_z \\ [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_x & [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_y & [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_z & \frac{E^2 + H^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (46.20)$$

Максвелловские натяжения определены здесь, как и выше:

$$\begin{aligned} \rho_{ii} &= -\frac{1}{2}(E_i^2 - E_j^2 - E_k^2 + H_i^2 - H_j^2 - H_k^2), \\ \rho_{ij} &= -(E_i E_j + H_i H_j). \end{aligned} \quad (46.21)$$

Если допустить обсуждавшуюся в § 45 возможность совместного рассмотрения соответствующих механических и электрических величин, очевидно, что уравнения движения (45.7) и уравнение непрерывности (45.8) для системы, в которой происходят и механические и электрические явления, можно записать в виде единого ковариантного уравнения:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \{ [T^{\mu\nu}]_{\text{мех}} + [T^{\mu\nu}]_{\text{эм}} \} = 0. \quad (46.22)$$

§ 47. Применение электронной теории

На этом мы можем закончить обсуждение связи между специальной теорией относительности и электродинамикой, основанной на электронной теории Лоренца, так как изложенного материала нам достаточно для дальнейших применений.

Мы выяснили, что электронная теория Лоренца может быть принята в рамках специальной теории относительности практически без изменений, если только считать, что фундаментальные уравнения справедливы во всех системах координат, движущихся равномерно относительно друг друга, а не в выделенной системе координат, покоящейся относительно гипотетического эфира. Это положение позволяет и далее использовать большинство выводов лоренцевской теории, до тех пор пока они не будут модифицированы при квантовомеханическом подходе. Однако мы не станем здесь рассматривать подобные вопросы.

Одно из наиболее важных применений теории Лоренца вытекает из возможности написания электромагнитных уравнений Максвелла для вещества, описывающих усредненное поведение электронов, которые в этом веществе содержатся. Существенным моментом при таком рассмотрении является связь «макро-

скопических» величин E , D , H , B , J и ρ максвелловской теории с результатами усреднения «макроскопических» величин E , H , u и ρ электронной теории, а также то, что найденные таким образом «макроскопические» величины удовлетворяют максвелловским уравнениям для вещества. Эта задача была успешно решена самим Лоренцем для вещества, находящегося в покое, а случай движущегося вещества был изучен с применением специальной теории относительности Борном [33] и Далленбахом [34].

Однако для целей этой книги нет нужды детально рассматривать такой способ вывода электромагнитных уравнений для вещества из уравнений электромагнитной теории. В части II настоящей главы эти уравнения будут рассмотрены с более строгой феноменологической точки зрения. Такой путь более близок к тому, каким мы пользовались в механике сплошной среды, и не будет связан с трудностями, которые встречаются при применении специальной теории относительности для исследования свойств микроскопических полей в квантовой механике и в квантовой электродинамике.

ЧАСТЬ II

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 48. Уравнения поля покоящегося вещества

Рассмотрим макроскопические электромагнитные свойства вещества, следуя методу Минковского [35]. Прежде всего мы примем, что, в согласии с доступными экспериментальными данными, процессы в покоящемся веществе правильно описываются теорией Максвелла, а затем получим свойства движущегося вещества, применяя формулы специальной теории относительности. Так как результаты любого опыта по изучению электромагнитных свойств покоящегося вещества описываются как поведение физических объектов в пространстве и времени, а переход к описанию в новой системе координат, в которой изучаемое вещество обладает любой заданной постоянной скоростью, совершается с помощью специальной теории относительности, то указанный метод должен привести к электромагнитной теории, применимой к любому телу, находящемуся в состоянии равномерного движения. Кроме того, мы обнаружим, что эта теория также описывает системы тел с различными скоростями при том условии, что эти тела разделены свободным пространством. Для более сложных видов движения эта теория дает по крайней мере первое приближение.

В теории Максвелла уравнения поля для *покоящегося вещества*, которые связывают напряженность электрического поля \mathbf{E} , электрическую индукцию \mathbf{D} , напряженность магнитного поля \mathbf{H} и магнитную индукцию \mathbf{B} с плотностью заряда ρ и током проводимости \mathbf{J} , имеют вид векторных выражений:

$$\operatorname{div}^0 \mathbf{D}^0 = \rho^0, \quad (48.1)$$

$$\operatorname{div}^0 \mathbf{B}^0 = 0, \quad (48.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t^0}, \quad (48.3)$$

$$\operatorname{rot}^0 \mathbf{H}^0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^0}{\partial t^0} + \mathbf{J}^0 \right), \quad (48.4)$$

где нулевые индексы указывают на то, что значения соответствующих величин измерены в собственной системе координат S^0 , где рассматриваемое вещество покоится.

Считается, что величины, стоящие в этих уравнениях, могут быть измерены макроскопическим способом. Так, \mathbf{E}^0 , \mathbf{D}^0 , \mathbf{H}^0 и \mathbf{B}^0 суть силы, действующие на единичный электрический заряд и на единичный магнитный полюс. Хотя такие измерения в идеале содержат в себе предельный переход, их можно считать реальными макроскопическими измерениями, проводимыми с помощью пробных зарядов, помещенных в рассматриваемой точке в продольные или поперечные полости. Величины ρ^0 и \mathbf{J}^0 определяются как макроскопические плотности заряда и тока в некотором элементе объема, который можно считать бесконечно малым, хотя на самом деле его размеры намного превышают расстояния между молекулами. Таким образом, до тех пор, пока мы ограничиваемся задачами, не связанными с очень малыми интервалами пространства или времени, выбранный нами путь не будет связан с квантовомеханическими свойствами вещества, которые, конечно, должна учитывать микроскопическая теория

§ 49. Уравнения, определяемые свойствами покоящегося вещества

Для полного описания электромагнитных явлений четырех уравнений поля недостаточно. Они должны быть дополнены соотношениями, которые связывают фигурирующие в этих уравнениях величины с параметрами вещества. Для простоты приведем эти соотношения в том простом виде, в котором их использовал Максвелл:

$$\mathbf{D}^0 = \varepsilon \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{B}^0 = \mu \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{J}^0 = \sigma \mathbf{E}^0; \quad (49.1)$$

здесь ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — электрическая проводимость, которые мы будем считать известными функциями координат и времени.

Хотя уравнения поля (48.1)—(48.4), вообще говоря, справедливы и для неоднородных и анизотропных тел, дальнейшие выводы, зависящие от сделанного выбора «материальных» уравнений (49.1), применимы лишь к случаю изотропного вещества, в отсутствие вынуждающих внешних электрических сил другой природы, например, тепловой или химической.

§ 50. Уравнения поля в четырехмерном виде

До сих пор, применяя специальную теорию относительности к механике и к электронной теории, мы вводили вначале координаты (x, y, z) и координату t , соответствующие трехмерному пространству и одномерному времени, а затем переходили к координатам (x^1, x^2, x^3, x^4) , соответствующим четырехмерному пространственно-временному континууму, либо использовали их параллельно. Простота и удобство четырехмерного подхода были при этом очевидны. Теперь при изучении электромагнитных явлений в веществе мы сразу используем все преимущества этого мощного метода, записывая с самого начала все основные уравнения в четырехмерном виде. Переводить же полученные результаты на старый язык будем лишь тогда, когда это будет нужно.

Обратимся для этого к ранее введенным пространственно-временным координатам (20.2):

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct, \quad (50.1)$$

которым соответствует простое выражение (20.1) для интервала:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (50.2)$$

Введем также два антисимметричных *электромагнитных тензора* $F^{\mu\nu}$ и $H^{\mu\nu}$, определив их компоненты в *собственной* системе координат $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$, относительно которой вещество покоится, через величины, фигурирующие в уравнениях Максвелла (§ 48):

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow & \rightarrow & \nu \\ \mu & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & B_z^0 & -B_y^0 & -E_x^0 \\ -B_z^0 & 0 & B_x^0 & -E_y^0 \\ B_y^0 & -B_x^0 & 0 & -E_z^0 \\ E_x^0 & E_y^0 & E_z^0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (50.3)$$

и

$$H_{\mu\nu} = \begin{matrix} \downarrow \rightarrow \nu \\ \mu \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & H_z^0 & -H_y^0 & -D_x^0 \\ -H_z^0 & 0 & H_x^0 & -D_y^0 \\ H_y^0 & -H_x^0 & 0 & -D_z^0 \\ D_x^0 & D_y^0 & D_z^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (50.4)$$

Введем еще *вектор тока* J_μ , задав его компоненты в собственной системе координат следующим образом:

$$J_\mu = \left(\frac{J_x^0}{c}, \frac{J_y^0}{c}, \frac{J_z^0}{c}, \rho^0 \right). \quad (50.5)$$

С помощью введенных тензоров можно записать уравнения Максвелла как тензорные уравнения:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (50.6)$$

и

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J^\mu. \quad (50.7)$$

Поскольку эти уравнения тензорные, то они справедливы во всех системах координат, если они справедливы в одной. Записав, однако, эти уравнения в собственных координатах, легко установить их тождественность уравнениям Максвелла, воспользовавшись определением стоящих в них тензоров. При этом оказывается, что уравнения (50.6) эквивалентны уравнениям (48.2) и (48.3), а уравнения (50.7) — уравнениям (48.1) и (48.4). Теперь можно считать, что мы нашли уравнения в простой форме, справедливой, когда вещество находится как в состоянии равномерного движения, так и в состоянии покоя.

Эти уравнения применимы и к случаю нескольких тел, движущихся с различными постоянными относительными скоростями и разделенных пустым пространством. Действительно, можно задать тензоры $F^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$ и J^μ внутри каждого из этих тел по формулам (50.3) — (50.5), используя системы собственных координат, движущихся с веществом, добываясь, таким образом, того, чтобы уравнения Максвелла для покоящегося вещества были справедливы для каждого тела в отдельности.

§ 51. Четырехмерная формулировка материальных уравнений

Материальные уравнения (49.1), связывающие смещение, индукцию и ток со свойствами вещества, легко переписать на четырехмерном языке в виде тензорных уравнений [36]:

$$H_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} = \epsilon F_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (51.1)$$

$$\begin{aligned} (g_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}F_{\delta\beta} + g_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}) \frac{dx^\alpha}{ds} = \\ = \mu (g_{\alpha\beta}H_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}H_{\delta\beta} + g_{\alpha\delta}H_{\beta\gamma}) \frac{dx^\alpha}{ds}. \end{aligned} \quad (51.2)$$

и

$$J^\alpha - J_\beta \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\sigma}{c} g_{\beta\gamma} F_{\gamma\alpha} \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (51.3)$$

Здесь ϵ , μ и σ — соответственно диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и проводимость вещества, измеряемые движущимся вместе с веществом локальным наблюдателем, а dx^α/ds и dx^β/ds — компоненты «скорости» вещества в точке наблюдения.

Учитывая, что в собственных координатах dx^α/ds равно единице при $\alpha=4$, а для остальных возможных значений равно нулю, легко убедиться, что соотношения (51.1)—(51.3) в собственных координатах принимают первоначальный свой вид (49.1). Следовательно, новые выражения для дополнительных уравнений справедливы в одной из систем координат, а потому, вследствие тензорного их характера, справедливы и в любой системе координат. Эти уравнения применимы также и в том случае, когда имеется несколько тел, находящихся в состоянии равномерного относительного движения и разделенных пустым пространством.

§ 52. Основные уравнения поля для движущегося вещества в обычной векторной записи

Итак, в двух предыдущих параграфах были получены ковариантные выражения для уравнений поля и дополнительных уравнений, которые пригодны, когда вещество находится в состоянии равномерного движения, так же как и в том случае, когда оно покоится. Таким образом, мы завершили построение основ макроскопической электродинамики движущегося вещества. Хотя при переводе их на другой язык не может добавиться ничего существенно нового, тем не менее возможно, что мы достигнем несколько лучшего понимания физической сущности теории, если вернемся к обычной векторной форме записи.

Для этого вернемся к тензорам $F^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$ и g^μ , которые были определены выше в собственных координатах, и условимся теперь обозначать теми же самыми символами без верхнего индекса нуль их компоненты в любой системе координат типа (50.1). Исходя из возможности выражения первоначальных уравнений Максвелла в виде (50.6) и (50.7), можно, вообще говоря, записать уравнения для вещества, движущегося

с постоянной скоростью, так же как и для покоящегося вещества, в первоначальной максвелловской форме (48.1) — (48.4):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (52.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (52.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (52.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right). \quad (52.4)$$

Кроме того, используя правила тензорных преобразований (19.10) и принятые ранее определения стоящих в этих уравнениях величин, легко получить правила преобразований этих величин из данной системы координат $S(x, y, z, t)$ в новую систему $S'(x', y', z', t')$, соответствующую новым осям, движущимся в направлении старой оси x со скоростью V , т. е. связать значения этих величин с их прежними значениями:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} B'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} B'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (52.5)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (52.6)$$

$$D_x = D'_x, \quad D_y = \frac{D'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad D_z = \frac{D'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (52.7)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} D'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} D'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (52.8)$$

$$J_x = \frac{J'_x + \rho' V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad J_y = J'_y, \quad J_z = J'_z, \quad (52.9)$$

и

$$\rho = \frac{\rho' + J'_x V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (52.10)$$

Отметим ряд интересных следствий, вытекающих из полученных результатов.

Рассматривая случай пустого пространства $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\mathbf{J} = 0$ и $\rho = 0$, находим, что уравнения принимают тот же вид (§ 39 и § 40), что и соответствующие уравнения электронной

теории в отсутствие вещества. Это указывает на внутреннюю согласованность обоих примененных методов.

Величины, стоящие в приведенных выше уравнениях (52.1) — (52.4), не имеют простого физического смысла, кроме того, что они являются компонентами тензоров, введенных в предыдущих параграфах. С помощью правил преобразования (52.5) — (52.10) можно, однако, найти значения этих величин в любой интересующей нас системе координат S , зная их значения, измеряемые непосредственно локальным наблюдателем, использующим собственные координаты S^0 , в которых вещество покоится.

Используя эту возможность вместе с уравнениями преобразования сил (25.3), легко показать, что силы \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* (которые определяются локальным наблюдателем по их действию на единичные электрический и магнитный заряды, движущиеся вместе с веществом) вычисляются по формулам

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right] \quad (52.11)$$

и

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{D} \right], \quad (52.12)$$

т. е. выражаются через силы, действующие на единичный заряд и единичный полюс, которые движутся с веществом со скоростью \mathbf{u} . Эти выражения помогают понять физическую природу рассматриваемых величин.

Представляет также физический интерес разбить полный ток \mathbf{J} на ток проводимости \mathbf{C} и конвекционный ток $\rho\mathbf{u}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C} + \rho\mathbf{u}. \quad (52.13)$$

Теперь с помощью преобразований (52.9) и (52.10) можно получить выражения для тока проводимости и плотности заряда в веществе, движущегося параллельно оси x со скоростью V :

$$C_x = C_x^0 \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad C_y = C_y^0, \quad C_z = C_z^0, \quad (52.14)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{C_x^0 V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (52.15)$$

В случае заряженного изолятора, движущегося со скоростью V в направлении оси x , это приводит к тому, что величина \mathbf{J} , фигурирующая в уравнениях поля (52.4), будет иметь чисто конвекционную природу:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{V} = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (52.16)$$

в согласии с замечательным открытием, сделанным Роуландом, доказавшим существование конвекционных токов.

В более общих случаях разбиение полного тока на ток проводимости и конвекционный ток зависит от используемой системы координат. Даже в том случае, когда плотность заряда в собственных координатах равна нулю, плотность заряда и конвекционный ток могут появляться в других системах в соответствии с (52.15), при том, однако, условии, что в собственных координатах ток проводимости отличен от нуля. Возможность наблюдения различными наблюдателями различного числа положительных и отрицательных зарядов в элементе объема вещества может быть объяснена с микроскопической точки зрения, если заметить, что она реализуется только тогда, когда имеется относительное движение двух зарядов, и что она связана со следствиями понятия одновременности в специальной теории относительности [30].

§ 53. Материальные уравнения для движущегося вещества в обычной векторной записи

Уравнения, связывающие смещение, индукцию и ток со свойствами вещества, заданные в собственных координатах в § 49 и в тензорной форме в § 51, легко записать теперь в векторной форме с помощью уравнений предыдущего параграфа.

Определим по аналогии с (52.11) и (52.12) два новых вектора:

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{H} \right], \quad (53.1)$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{E} \right]. \quad (53.2)$$

Тогда первые два уравнения примут простой вид:

$$\mathbf{D}^* = \varepsilon \mathbf{E}^* \quad \text{и} \quad \mathbf{V}^* = \mu \mathbf{H}^*. \quad (53.3)$$

Используя еще выражения для тока проводимости (52.14), можно написать уравнения

$$C_x = \sigma \sqrt{1 - u^2/c^2} E_x^*, \quad C_y = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} E_y^*, \quad C_z = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} E_z^*, \quad (53.4)$$

если скорость движения вещества \mathbf{u} считать параллельной оси x . Этот результат можно рассматривать как аналог закона Ома для движущегося вещества.

§ 54. Применения макроскопической теории

Итак, мы полностью сформулировали основные уравнения макроскопической электродинамики, записав их и в четырехмерном и в обычном трехмерном виде. Из дальнейшего станет ясным, что при этом мы совсем немного отступили от обычного изложения. Отметим еще некоторые следствия из теории, важные либо для ее понимания, либо для дальнейшей работы.

а) *Сохранение электрического заряда.* Используя второе из двух фундаментальных уравнений (50.6) и (50.7) макроскопической теории, а именно

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J^\mu, \quad (54.1)$$

можно сразу получить закон сохранения электрического заряда. Дифференцируя (54.1) по x^μ , находим

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0, \quad (54.2)$$

причем нуль справа возникает из-за антисимметрии $H^{\mu\nu}$. Разложив на компоненты левую часть в (54.2), приходим к результату

$$\frac{\partial J^1}{\partial x^1} + \frac{\partial J^2}{\partial x^2} + \frac{\partial J^3}{\partial x^3} + \frac{\partial J^4}{\partial x^4} = 0, \quad (54.3)$$

или, в координатах (50.1), компоненты J^μ в обычной векторной записи (§ 52) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (54.4)$$

Так как \mathbf{J} следует рассматривать как сумму тока конвекции и тока проводимости, то можно считать, что последнее уравнение гарантирует сохранение полного электрического заряда.

б) *Граничные условия.* Из уравнений поля, записанных в § 52, можно получить граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными свойствами [37], которые очень близки к тем, что известны из максвелловской теории покоящегося вещества. Однако в случае движущегося вещества ситуация несколько осложняется, поскольку уравнения поля содержат выражения $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$, т. е. скорости изменения векторов напряженностей в данной точке пространства, а эти векторы, вообще говоря, могут иметь разрывный характер в точке, которая в данный момент лежит на движущейся границе. Если, однако, определять скорость изменения во времени в точке,

движущейся с той же скоростью \mathbf{u} , что и среда, оператором

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla), \quad (54.5)$$

то можно ожидать, что мы получим конечную скорость изменения даже внутри граничного слоя.

Учитывая это, можно переписать уравнения поля (52.4) в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} + \left(\frac{\mathbf{u}}{c} \nabla\right) \mathbf{D} - \frac{\mathbf{J}}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{c} \nabla\right) \mathbf{D} \quad (54.6)$$

и заключить, что величины, стоящие слева, будут везде конечными за счет соответствующей формы правой части (54.6). Другими словами, раскладывая векторы левой части по компонентам и выражая ток \mathbf{J} как сумму тока проводимости \mathbf{C} и тока конвекции $\rho\mathbf{u}$, мы приходим к заключению о конечности следующих трех величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{u_y}{c} \frac{\partial D_x}{\partial y} + \frac{u_z}{c} \frac{\partial D_x}{\partial z} - \rho \frac{u_x}{c} - \frac{C_x}{c}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial D_y}{\partial x} + \frac{u_y}{c} \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{u_z}{c} \frac{\partial D_y}{\partial z} - \rho \frac{u_y}{c} - \frac{C_y}{c}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial D_z}{\partial x} + \frac{u_y}{c} \frac{\partial D_z}{\partial y} + \frac{u_z}{c} \frac{\partial D_z}{\partial z} - \rho \frac{u_z}{c} - \frac{C_z}{c}. \end{aligned} \quad (54.7)$$

Чтобы использовать эти результаты, выберем для простоты координаты так, чтобы в точке наблюдения граница раздела сред была параллельна плоскости yz . Далее, так как дифференцирование по y и z будет приводить, очевидно, к конечным результатам, а ток проводимости конечен по предположению, мы можем, очевидно, отбросить некоторые члены, стоящие в (54.7), и считать конечными более простые величины:

$$\begin{aligned} \frac{u_x}{c} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} - \rho \right), \quad - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial D_y}{\partial x} - \rho \frac{u_y}{c}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial D_z}{\partial x} - \rho \frac{u_z}{c}. \end{aligned} \quad (54.8)$$

Первое из этих выражений приводит к тому, что

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} - \rho \quad (54.9)$$

является конечной величиной, или

$$\Delta D_x = \omega, \quad (54.10)$$

где ΔD_x — скачок компоненты электрической индукции, нормальной к граничной поверхности, возникающий за счет зарядов, распределенных на этой поверхности с плотностью ω . Оставшиеся два выражения можно объединить с условием (54.9), что дает следующие конечные величины:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \left(\frac{u_z}{c} \frac{\partial D_x}{\partial x} - \frac{u_x}{c} \frac{\partial D_z}{\partial x} \right)$$

и

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} - \left(\frac{u_x}{c} \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{u_y}{c} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right),$$

или, поскольку компоненты скорости \mathbf{u} постоянны, из последних выражений можно заключить, что величины

$$H_y - \left(\frac{u_z}{c} D_x - \frac{u_x}{c} D_z \right)$$

и

$$H_z - \left(\frac{u_x}{c} D_y - \frac{u_y}{c} D_x \right) \quad (54.11)$$

изменяются непрерывным образом при прохождении через границу. Эти величины, однако, являются тангенциальными компонентами ранее введенного вектора (52.12):

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{D} \right].$$

Исследуя подобными методами уравнение поля (52.3), можно получить, что в общем случае

$$\Delta D_n = \omega, \quad \Delta B_n = \Delta E_t^* = \Delta H_t^* = 0. \quad (54.12)$$

Эти условия определяют наличие или отсутствие разрывов у нормальных или тангенциальных компонент векторов при пересечении границы раздела двух сред; они применимы также на границе раздела между веществом и свободным пространством. В выражении для \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* в этом случае следует подставить скорость вещества \mathbf{u} .

в) *Джоулево тепло*. Рассмотрим изменение энергии малого элемента вещества из-за воздействия электромагнитного поля. Очевидно, что это изменение может происходить либо за счет механической работы, совершаемой пондеромоторными силами, порожденными полем, либо за счет джоулевой теплоты, образующейся внутри элемента из-за электромагнитного воздействия.

Поэтому малое приращение энергии элемента объема δE можно выразить в виде суммы проделанной работы δQ и выделенной теплоты δW :

$$\delta E = \delta W + \delta Q. \quad (54.13)$$

Если же для простоты ограничиться случаем, когда работа производится лишь при движении элемента как целого в поле сил, то джоулеву теплоту можно выразить так:

$$\delta Q = -\delta W + \delta E = -F_x \delta x - F_y \delta y - F_z \delta z + \frac{dE}{c dt} c \delta t, \quad (54.14)$$

где F_x , F_y и F_z — компоненты силы электромагнитного происхождения, действующей на элемент.

Однако в соответствии с заключениями, сделанными в главе III, все силы, какого бы они ни были происхождения, должны подчиняться одним и тем же правилам преобразования, а следовательно, согласно (28.12) мы можем объединить величины, фигурирующие в (54.14), следующим образом:

$$F_\mu = \left(\frac{-F_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{-F_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{-F_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dE}{c dt} \right), \quad (54.15)$$

где u — обычная скорость элемента. Этим самым мы образуем новый ковариантный вектор в пространстве — времени с координатами

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct. \quad (54.16)$$

Используя определение (54.14), можно теперь переписать формулу приращения джоулевой теплоты в ковариантном виде:

$$\delta Q = \sqrt{1-u^2/c^2} F_\mu \delta x^\mu. \quad (54.17)$$

Однако в соответствии с правилами тензорного анализа $F_\mu \delta x^\mu$ должен быть скалярным инвариантом, т. е. одним и тем же во всех системах координат, так что можно принять формулу

$$\delta Q = \sqrt{1-u^2/c^2} \delta Q_0 \quad (54.18)$$

в качестве общего выражения, связывающего приращение теплоты δQ и скорость элемента объема вещества u , измеренные в любой заданной системе координат, с приращением теплоты δQ_0 , измеренным в собственных координатах локальным наблюдателем. Ценность этого результата станет ясной лишь ниже, когда мы убедимся в соответствии полученного выражения

с правилами преобразования для теплоты, которые будут найдены при построении *релятивистской термодинамики*.

г) *Электромагнитная энергия и импульс*. С помощью уравнений поля легко получить выражения, позволяющие находить скорость изменения энергии и импульса внутри поверхности, лежащей в пустом пространстве и окружающей тела, на которые действуют электромагнитные силы.

Умножим скалярно уравнение (52.3) на \mathbf{H} , а уравнение (52.4) на \mathbf{E} . Вычитая из первого выражения второе, получаем

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + c(\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) = 0. \quad (54.19)$$

Проинтегрируем это выражение по объему, заключенному внутри неподвижной поверхности, окружающей рассматриваемую систему. С помощью известных соотношений векторного анализа (уравнение (17), Приложение II) приходим к соотношению

$$\int \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \right) dv = -c \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n d\sigma. \quad (54.20)$$

Здесь в правой части интегрирование производится по поверхности, окружающей рассматриваемый объем, а индекс n означает проекцию данного вектора на внешнюю нормаль.

Для объема, не содержащего вещества, (54.20) превращается, очевидно, в обычное соотношение:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{2} \right) dv = -c \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n d\sigma, \quad (54.21)$$

где в левой части стоит известное выражение для скорости увеличения энергии, и поэтому правая часть должна характеризовать поток энергии через границу.

Возвращаясь к более общему уравнению (54.20), можно сделать вывод, что левая часть в нем должна давать скорость увеличения энергии и при наличии вещества, так как граница, по предположению, располагается в свободном пространстве, окружающем это вещество. Уравнение (54.20) можно, следовательно, использовать для вычисления скорости, с которой изменяется энергия внутри фиксированной поверхности, находящейся в свободном пространстве, окружающем материальную систему. Для этого интегрировать надо по объему, заключенному внутри поверхности. Это уравнение аналогично уравнению (42.3) из электронной теории, однако оно не дает однозначного выражения для плотности электромагнитной энергии и импульса *внутри вещества*.

Аналогичным образом из уравнений поля можно получить выражения для скорости изменения импульса вещества, находящегося внутри замкнутой поверхности,—именно, умножая уравнение (52.1) на \mathbf{E} и прибавляя к нему векторное произведение (52.4) на \mathbf{B} , находим

$$\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - E\rho + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} = 0. \quad (54.22)$$

Заменив знаки на противоположные, разбив \mathbf{J} на ток конвекции $\rho\mathbf{u}$ и на ток проводимости \mathbf{C} и используя уравнение (52.3), последнее выражение можно переписать в виде

$$\rho \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) + \frac{\mathbf{C}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \times \mathbf{B}] - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \\ - (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \times \mathbf{D} = 0. \quad (54.23)$$

Вводя электрическую и магнитную поляризации с помощью формул

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \mathbf{E} \quad (54.24)$$

и

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{H}, \quad (54.25)$$

можно записать:

$$\rho \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) + \frac{\mathbf{C}}{c} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{P} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \\ + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \times \mathbf{B}] = \\ = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H}. \quad (54.26)$$

Рассмотрим теперь x -компоненту этого выражения и возьмем от нее интеграл по области, находящейся внутри фиксированной границы, расположенной в свободном пространстве, окружающем нашу систему. После несложных, но довольно громоздких преобразований можно прийти к следующему результату:

$$\int \left\{ \rho \left(E_x + \frac{u_x}{c} B_z - \frac{u_z}{c} B_x \right) + \frac{C_x}{c} B_z - E_x \operatorname{div} \mathbf{P} + P_x \operatorname{rot} E_x + M_x \operatorname{rot} H_x + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [D_x B_z] \right\} dv = \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y + H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z + H_x H_z) \right\} dv. \quad (54.27)$$

Это уравнение аналогично уравнению (43.3) из электронной теории, а величины, частные производные которых стоят в пра-

вой части, представляют собой знакомые выражения максвелловских электромагнитных натяжений ρ_{xx} , ρ_{xy} , ρ_{xz} . Если внутри рассматриваемой поверхности вещество отсутствует совсем, последняя формула принимает следующий вид:

$$\int \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_x dv = \int - \left(\frac{\partial \rho_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{xz}}{\partial z} \right) dv, \quad (54.28)$$

где в левой части стоит известное выражение для скорости возрастания x -компоненты импульса, а правая часть, которую можно представить в виде поверхностного интеграла, определяет поток импульса через эту поверхность.

Следовательно, возвращаясь к более общему уравнению (54.27), можно сделать вывод, что его левая часть должна выражать скорость увеличения импульса и при наличии вещества, поскольку граница, по предположению, проходит в свободном пространстве, окружающем вещество. Таким образом, это уравнение можно использовать для вычисления скорости увеличения импульса путем интегрирования по заданному объему. Однако мы и здесь не придем к однозначному выражению для электромагнитных натяжений *внутри вещества*.

д) *Тензор энергии — импульса*. Так как в макроскопической теории мы не можем однозначно задать плотности электромагнитной энергии и импульса и электромагнитные натяжения внутри вещества, то нельзя однозначно ввести и тензор энергии — импульса $[T^{\mu\nu}]$ электромагнитного поля. Предлагалось несколько различных способов его построения, однако общепринятым ни один из них так и не стал ([38], § 35).

Согласно представлению о связи плотностей импульса и потока энергии (§ 27) такой тензор должен быть симметричным относительно компонент $T^{4\mu}$ и $T^{\mu 4}$ и, по-видимому, и относительно других компонент, поскольку микроскопическое рассмотрение в электронной теории приводит к полностью симметричному тензору. Если вещество отсутствует, макроскопическая теория однозначно приводит к тензору энергии — импульса в точно той же форме, что и в теории Лоренца.

Даже при неоднозначной записи компонент этого тензора в переменных, взятых из уравнений поля, кажется разумным предположить справедливость уравнения

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \{ [T^{\mu\nu}]_{\text{мех}} + [T^{\mu\nu}]_{\text{эм}} \} = 0, \quad (54.29)$$

описывающего макроскопическое поведение системы, обладающей как механическими, так и электромагнитными свойствами.

Тензор $[T^{\mu\nu}]_{,m}$ в последнем выражении следует считать симметричным *).

е) *Сравнение с экспериментальными данными.* Как отмечалось в начале этого параграфа, макроскопическая электромагнитная теория, которая была развита с помощью специальной теории относительности, немногим отличается от обычного метода изложения электромагнетизма. Действительно, при рассмотрении свободного пространства и покоящихся тел мы убеждаемся, что эта теория идентична максвелловской теории. Поэтому мы можем быть уверенными, что она находится в соответствии с большим количеством экспериментальных фактов.

Для движущихся тел отмечалось согласие с опытами Роу-ланда предсказаний теории, основанных на уравнении (52.6) и на том факте, что ток проводимости, определяемый формулой (53.4), пропорционален (с точностью до членов порядка u^2/c^2) вектору $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + [\mathbf{u}/c \times \mathbf{B}]$.

Можно также показать, что развитая теория удовлетворительно объясняет результат эксперимента Рентгена — Эйхенвальда с магнитным полем, возникающим при вращении диэлектрика в электрическом поле, и результат эксперимента Г. А. Вильсона по измерению поверхностного заряда, возникающего при вращении диэлектрика в магнитном поле. Эти опыты плохо объяснялись теорией Герца движущихся диэлектриков и были объяснены лишь теорией Лоренца. Наконец, особое внимание привлекают опыты М. Вильсона и Г. А. Вильсона [39], которые повторили первоначальный вильсоновской эксперимент, используя, однако, искусственно созданный диэлектрик, обладающий заметной магнитной проницаемостью. Предсказания теории Лоренца и предсказания, однозначно вытекающие из развитой в этой главе макроскопической электродинамики, в этом случае расходились. Экспериментальные данные подтвердили результат последней.

*) Вопрос о тензоре энергии — импульса в веществе до сих пор остается темой дискуссий. Это связано с тем, что сами понятия энергии и импульса в среде теряют ту наглядность, которую они имели в вакууме. Переход от E и B к D и H есть операция сложная, связанная с усреднениями по времени и пространству; при этом соотношения перестают быть локальными, так что D и H зависят, вообще говоря, от значений E и B во всем пространстве — времени. В результате все величины на самом деле зависят от разных внешних параметров. Читателя можно отослать к статьям В. Л. Гинзбурга и Д. В. Скобельцына. УФН 110 (1973), в которых он найдет и нужные литературные ссылки. (Прим. ред.)

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕРМОДИНАМИКА

ЧАСТЬ I

ТЕРМОДИНАМИКА ПОКОЯЩИХСЯ СИСТЕМ

§ 55. Введение

В этой главе мы обсудим, как связаны между собой специальная теория относительности и термодинамика. При этом окажется, что возникают два разных вопроса.

С одной стороны, специальная теория относительности дает нам простое соотношение между массой и энергией, которое позволяет вычислять изменение количества энергии термодинамической системы по изменению ее массы. Для термодинамики это новое соотношение особенно полезно тогда, когда мы отвлекаемся от движения рассматриваемой системы как целого, поскольку оно позволяет находить состояния термодинамического равновесия для таких процессов, в которых мы можем судить об изменении энергии, которое сопровождает этот процесс, лишь по тому изменению массы, которое при этом происходит.

С другой стороны, специальная теория относительности снабдила нас, в форме преобразования Лоренца, методом перевода результатов измерений локального наблюдателя, покоящегося относительно термодинамической системы, на язык, которым будет выражать свои результаты наблюдатель, движущийся относительно данной системы. Как показали впервые Планк и Эйнштейн, таким образом можно прийти к термодинамической теории движущихся систем.

В первой части этой главы мы рассмотрим термодинамику покоящихся систем. Сначала будут изложены хорошо известные разделы классической теории, которые окажутся полезными нам в дальнейшем, затем будут введены в термодинамику релятивистские соотношения между массой и энергией и с их помощью решены две конкретные задачи: вычисление условий равновесия между водородом и гелием и между веществом и излучением с учетом их возможных взаимных превращений.

Во второй части мы рассмотрим лоренцевы преобразования термодинамических величин и собственно термодинамику движущихся систем. При этом мы сформулируем в ковариантном виде термодинамические принципы, что поможет нам впоследствии при обобщении термодинамики в область общей теории относительности.

Прежде чем перейти к делу, еще раз особо подчеркнем макроскопический и феноменологический характер термодинамического подхода. Конечно, термодинамические принципы в какой-то мере могут быть обоснованы с помощью микроскопических методов статистической механики. Тем не менее как по историческим причинам, так и по самому существу дела оба закона классической термодинамики разумнее рассматривать как формулировки, обобщающие результаты многочисленных макроскопических экспериментов. Даже так называемый третий закон термодинамики, несмотря на то, что смысл его проясняется лишь в статистической интерпретации энтропии, первоначально был сформулирован без помощи такой интерпретации, а ныне его роль исходного принципа оправдана и подтверждена экспериментальным материалом. Феноменологический характер термодинамических законов и разнообразие областей, в которых они были проверены экспериментально, дают нам уверенность в правильности термодинамических предсказаний даже в тех случаях, когда термодинамика используется в совершенно новых ситуациях.

Так как, по крайней мере в настоящее время, специальная теория относительности носит в основном макроскопический характер, то кажется естественным попытаться построить релятивистскую термодинамику. Конечно, строить фундаментальную теорию, которая была бы со всех точек зрения удовлетворительна, задача не только трудная, но даже еще и не совсем ясная. Однако в этом направлении все же был достигнут некоторый прогресс [1, 2], когда в качестве отправного пункта использовалась классическая, а не квантовомеханическая статистика.

В связи с феноменологическим характером термодинамики полезно еще раз подчеркнуть и феноменологический характер релятивистских рассуждений. Действительно, можно провести любопытную параллель между формулировкой первого постулата теории относительности, обобщающей эмпирический вывод о невозможности обнаружить движение Земли через гипотетический эфир, и формулировкой второго закона термодинамики, обобщающего вывод о невозможности построить так называемый вечный двигатель второго рода. Точно так же, формулировка второго постулата теории относительности, обобщающая результаты измерений скорости света от движущихся источников,

имеет нечто общее с первым законом термодинамики, основанным на таких опытах, как измерения механического эквивалента теплоты.

Экспериментальные основания специальной теории относительности, возможно, не столь обширны, как в термодинамике. Кроме того, часто заключения, вытекающие из теории относительности, получаются в результате сложной цепочки рассуждений и выводов и введения каких-то дополнительных гипотез. Тем не менее нет оснований опасаться, что сам процесс объединения двух теорий приведет к большей неопределенности, так что мы можем говорить со значительной степенью уверенности об основных принципах релятивистской термодинамики. Конечно, те приложения теорий, в которых приходится принимать большое число дополнительных гипотез, требуют и большой осторожности. Тем не менее в этом и заключается одна из главных задач теоретической физики: не ограничиваться описанием сложными формулами уже известных фактов, но проникать во все более новые, еще не исследованные области, к которым еще только начинает обращаться человеческая любознательность.

§ 56. Первый закон термодинамики и нулевая точка отсчета энергии

В соответствии с идеями, которые лежат в основе термодинамики, энергия, содержащаяся в системе, является определенной функцией ее состояния и может изменяться лишь с изменением состояния системы. Когда такие изменения состояния происходят, то с точки зрения термодинамики важно различать два разных типа процессов, которые изменяют содержание энергии, именно — за счет теплового потока или в результате совершенной работы.

Различая эти две возможности, первый закон термодинамики выражает принцип сохранения энергии в виде

$$\Delta E = Q - A, \quad (56.1)$$

где ΔE — увеличение энергии, сопровождающее некоторое определенное изменение состояния системы, а Q и A — соответственно, приток тепла в систему извне и работа, проделанная системой над внешними телами в результате того определенного процесса, который привел к данному изменению состояния. Это уравнение можно рассматривать как выражение принципа сохранения энергии, поскольку оно исключает возможность исчезновения или возникновения энергии внутри какой-либо области, отождествляя изменение энергии в ней с потоком энергии через ее границу в виде теплоты или работы.

Специальная теория относительности никак не нарушает наших представлений о сохранении и локализации энергии*), а также никак не влияет на наше представление о возможности различать теплоту и работу. Следовательно, при объединении термодинамики со специальной теорией относительности первый закон, очевидно, можно оставить в виде (56.1).

Однако теория относительности существенно *дополняет* прежнюю формулировку, вводя добавочное соотношение между энергией и массой, как об этом говорилось в § 27 и § 29, г. Согласно этому новому соотношению увеличение энергии системы ΔE можно выразить через приращение массы Δm :

$$\Delta E = c^2 \Delta m, \quad (56.2)$$

где c — скорость света.

Эта формула позволяет производить термодинамические вычисления в тех случаях, когда об энергии системы можно судить лишь по изменениям массы.

Кроме того, хотя первый закон в виде (56.1) говорит лишь об относительном изменении энергии и ничего не говорит о начале отсчета, обобщенное релятивистское соотношение

$$E = c^2 m, \quad (56.3)$$

показывает, что разумно связать нулевую точку отсчета энергии с отсутствием каких-либо масс в системе.

§ 57. Второй закон термодинамики и нулевая точка отсчета энтропии

Кроме энергии E в термодинамике вводится еще одна функция состояния системы — ее энтропия S . При этом, подобно тому как первый закон термодинамики связывает с поглощаемой теплотой и с совершаемой работой изменение энергии системы, которое происходит при некотором процессе, изменяющем состояние системы, второй закон термодинамики связывает изменение энтропии системы с характером процесса, который привел к изменению состояния.

Чтобы дать определение энтропии и сформулировать второй закон, надо начать с разделения процессов на необратимые и обратимые. Первые протекают так, что после изменения состояния системы не представляется возможным *ни систему, ни окружающую ее среду* вернуть к их первоначальному состоянию (реальные процессы всегда бывают необратимыми). Обратимые процессы — процессы идеализированные (они отвечают

*) Именно релятивистская связь массы с энергией подкрепляет наше представление о локализации энергии

предельному случаю реальных процессов, когда эффективность реальных процессов возрастает), которые отличаются тем свойством, что *и систему и окружающую среду* можно вернуть к их первоначальным состояниям.

Помня об этом различии, зададим изменение энтропии системы, которым сопровождается изменение ее состояния, интегралом

$$\Delta S = \int_{\text{обрат}} \frac{dQ}{T}, \quad (57.1)$$

где T — температура каждого элемента теплоты dQ , перенесенного через границу из окружающей среды в систему, а интегрирование производится по идеально обратимому процессу, с помощью которого можно было бы произвести рассматриваемое изменение состояния. Тогда, пользуясь этим определением, второй закон термодинамики можно записать в обобщенном виде:

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T}, \quad (57.2)$$

где интеграл может быть вычислен для любого процесса, который приводит к переходу системы из начального состояния в конечное, а знак «больше» относится к необратимым процессам.

Согласно этим выражениям и представлению об энтропии системы как об определенной функции ее состояния, очевидно, что величина $\int dQ/T$ будет иметь одно и то же максимальное значение для всех обратимых процессов, приводящих к данному изменению состояния системы, и меньшие значения для любых необратимых процессов, приводящих к тому же самому изменению состояния. Таким образом, второй закон дает нам критерий обратимости и необратимости процессов и позволяет хотя бы частично описать характерные особенности этих процессов. Это позволит нам в дальнейшем прийти к интересным и важным заключениям.

Чтобы завершить рассмотрение природы энтропии, исследуем вопрос о полном количестве энтропии, которое может содержаться в системе. Подобно тому как первый закон не определяет нулевой точки отсчета энергии, так и последние два соотношения, составляющие сущность второго закона, выражают изменение энтропии, но ничем не помогают в выборе нулевой точки. Нулевую точку отсчета энергии, как мы видели, естественно задать с помощью соотношения между массой и энергией, установленного специальной теорией относительности. Нулевая точка для энтропии — точнее, удобная точка отсчета — определяется так называемым третьим законом термодинамики, открытым и сформулированным Нернстом и Планком.

Согласно третьему закону термодинамики при температуре, равной абсолютному нулю, энтропия не изменяется ни при каких изменениях состояния системы:

$$\Delta S_{T=0} = 0, \quad (57.3)$$

если система как в начале, так и в конце представляет собой чисто кристаллическое вещество (или квантовую жидкость (*ред.*)).

Исходя из этого закона, для всех чисто кристаллических веществ удобно принять, что энтропия равна нулю при абсолютном нуле температуры:

$$S_{T=0} = 0. \quad (57.4)$$

Тогда значением энтропии при других условиях будем считать ее приращение, которое соответствует изменению состояния от этого исходного до любого другого. Приняв это условие, увеличение энтропии, сопровождающее некоторое изменение состояния, можно определить, вычтя сумму значений энтропий, которые описывают рассматриваемые вещества в начальном состоянии, из суммы, определяющей энтропию конечного состояния.

Как указывалось выше, в § 55, более глубокое понимание природы третьего закона термодинамики приходит лишь при статистическом толковании энтропии, которое, если говорить не совсем точно, приписывает идеальному кристаллу при абсолютном нуле нулевое значение энтропии, что соответствует отсутствию какого-либо беспорядка в таком кристалле. Микроскопическое рассмотрение оказывается существенным для критической оценки применений третьего закона к случаям, когда в системах протекают внутриядерные реакции или происходит полный переход вещества в излучение, о чем мы будем говорить в § 66 и § 67. Однако с принятой нами точки зрения, если мы хотим остаться, насколько это возможно, в рамках макроскопического феноменологического подхода, существенно подчеркнуть, что третий закон термодинамики можно рассматривать (по крайней мере в применении к обычным химическим реакциям) как эмпирическое правило, которое подтверждается массой данных, полученных главным образом под руководством Нернста и Льюиса.

§ 58. Теплота, свободная энергия и термодинамический потенциал

В дополнение к основным термодинамическим величинам — энергии и энтропии — оказывается полезным ввести еще три величины: W , F и Φ , которые для простоты мы будем называть обычными терминами: теплосодержанием, свободной энергией и термодинамическим потенциалом соответственно.

Если ограничиться рассмотрением систем с одинаковыми давлением и температурой по всему объему, названные величины можно определить уравнениями

$$W = E + pv, \quad (58.1)$$

$$F = E - TS, \quad (58.2)$$

$$\Phi = E - TS + pv = W - TS, \quad (58.3)$$

где E , S , T , p и v — соответственно энергия, энтропия, температура, давление и объем рассматриваемой системы.

Из написанных выражений следует, что W , F и Φ соответствуют величинам χ , ψ и ξ в обозначениях Гиббса [40]. Далее, F есть свободная энергия, впервые введенная Гельмгольцем [41], а Φ — величина, которую химики обычно тоже называют свободной энергией [42]. Природа этих трех новых величин и причины, побудившие их так назвать, станут ясными из дальнейшего изложения.

Рассмотрим теперь для примера систему с *постоянным давлением*. Будем считать, что оно поддерживается таким образом, что единственная работа, которую система способна выполнить над окружающей средой, совершается при изменении объема против сил давления. Тогда из уравнения (58.1) следует:

$$\Delta W = \Delta E + p \Delta v = \Delta E + A,$$

откуда, используя первый закон (56.1), получаем

$$\Delta W = Q. \quad (58.4)$$

Следовательно, для рассматриваемых процессов приток теплоты равен увеличению теплосодержания. Называть эту величину теплосодержанием не вполне обоснованно, так как, вообще говоря, приведенное выше простое выражение выполняется далеко не для всех процессов. К тому же название «теплосодержание» предполагает (в соответствии с отвергнутой калористической теорией) неправильное использование термина «теплота» в качестве характеристики количества энергии, реально содержащегося внутри системы, вместо правильного его понимания как характеристики количества энергии, передаваемого через границу, отделяющую систему от окружающей среды.

Обратимся теперь к случаю системы, находящейся при *постоянной температуре*. Тогда уравнение (58.2) можно записать в виде

$$\Delta F = \Delta E - T \Delta S.$$

Используя затем первый и второй законы термодинамики (56.1)

и (57.2), подставим в полученное соотношение выражения

$$\Delta E = Q - A, \quad T \Delta S \geq Q, \quad (58.5)$$

что приводит к следующему результату:

$$A \leq -\Delta F. \quad (58.6)$$

В согласии с этим неравенством работа, которую может выполнить над окружающей средой система, находящаяся при постоянной температуре, не должна превышать уменьшения величины, называемой свободной энергией. Это оправдывает ее название, хотя надо еще раз подчеркнуть, что полученный результат справедлив только для изотермических процессов.

Наконец, рассмотрим систему, которая поддерживается и при *постоянной температуре*, и при *постоянном давлении*. Тогда из (58.3) следует соотношение

$$\Delta \Phi = \Delta E - T \Delta S + p \Delta v.$$

Используя снова первый и второй законы в виде (58.5), получаем выражение

$$A - p \Delta v \leq -\Delta \Phi. \quad (58.7)$$

Следовательно, для систем, находящихся в указанных условиях, полная работа, которая может быть проделана системой над окружающей средой (если исключить ту часть, что производится против сил давления), не может превосходить уменьшения термодинамического потенциала Φ .

§ 59. Основные условия для термодинамических переходов и равновесия

Используя предыдущие результаты, можно теперь найти условия, при которых термодинамическая система будет стремиться изменить свое состояние или будет стремиться остаться в состоянии равновесия. Разберем сперва случай изолированной системы, не взаимодействующей с окружающей средой, затем перейдем к системам, сохраняющим постоянный объем и постоянную температуру, и, наконец, рассмотрим систему, в которой поддерживаются постоянные давление и температура.

В случае *изолированной* системы при любом изменении ее состояния передаваемая теплота Q равна нулю вследствие принятого условия об отсутствии взаимодействия с окружающей средой. Тогда, подставив $Q=0$ во второй закон термодинамики (57.2), получим

$$\Delta S \geq 0 \quad (59.1)$$

в качестве необходимого условия, которое должно выполняться при любых изменениях состояния изолированной системы. Согласно этому результату энтропия изолированной системы не может уменьшаться, а должна возрастать со временем, если в системе протекают необратимые процессы, а в идеальном случае, когда процессы обратимы, энтропия должна оставаться постоянной. Далее, пусть система находится в состоянии с максимальным из всех возможных значений энтропии, так что никакое изменение условий не может приводить к дальнейшему росту энтропии. Запишем это в виде

$$\delta S = 0. \quad (59.2)$$

Тогда эта система, очевидно, находится в условиях термодинамического равновесия, и дальнейшие переходы вообще невозможны. В применении к простым однородным системам это условие означает, что достаточно сохранять энергию и объем системы постоянными, чтобы добиться отсутствия взаимодействия с окружающей средой.

Обратимся теперь к случаю систем, испытывающих внешние воздействия, при которых, однако, их *объем и температура* остаются *постоянными*. Поскольку такие системы вследствие постоянства их объема не выполняют внешней работы, из первого закона (56.1) следует:

$$\Delta E = Q.$$

Подставляя этот результат в выражение второго закона (57.2) и используя условие постоянства температуры, получаем

$$T \Delta S \geq \Delta E$$

или, вспоминая определение свободной энергии (58.2), перепишем это соотношение проще:

$$-\Delta F \geq 0. \quad (59.3)$$

Найденное условие выполняется с необходимостью при любых изменениях состояния, если объем и температура системы остаются при этом постоянными. Согласно (59.3) свободная энергия системы, находящейся при данных условиях, может со временем либо уменьшаться, либо оставаться постоянной, а условие термодинамического равновесия состоит в минимальности свободной энергии, что записывается в виде

$$\delta F = 0. \quad (59.4)$$

Точно так же для систем, которые испытывают внешние воздействия, *не изменяющие*, однако, *давление и температуру*, можно записать

$$\Delta E = Q - p \Delta v,$$

что вытекает из первого закона; а привлекая второй закон, получаем ограничение на термодинамический потенциал

$$-\Delta \Phi \geq 0. \quad (59.5)$$

Это необходимое условие, которое справедливо для любых переходов, оставляющих неизменными давление и температуру. Условие для состояния равновесия имеет вид

$$\delta \Phi = 0. \quad (59.6)$$

Полученные условия изменения термодинамических величин и равновесия окажутся весьма полезными для предсказаний поведения физико-химических систем. Первая пара условий (59.1) и (59.2), справедливых для изолированных систем, по-видимому, наиболее фундаментальна, так как, присоединяя к системе область достаточно больших размеров (или, если это возможно, рассматривая Вселенную как целое), мы можем изучать с их помощью любую интересующую нас ситуацию. Третья пара условий (59.5) и (59.6), справедливых для систем, поддерживаемых при постоянных давлении и температуре, оказывается особенно полезной, так как мы часто интересуемся условиями равновесия при заданных значениях этих параметров (например, при постоянном атмосферном давлении и комнатной температуре).

§ 60. Условия для переходов и равновесия в однородных системах

Чтобы с помощью найденных выше закономерностей, описывающих термодинамические переходы и состояние равновесия, находить поведение любой конкретной системы, надо знать зависимость энтропии, свободной энергии или термодинамического потенциала системы от переменных, в которых описывается состояние этой системы. Формы этой зависимости, конечно, различны для различных систем. В настоящем параграфе мы рассмотрим простые однородные системы. Это можно сделать с помощью уравнения, объединяющего требования первого и второго законов.

Начнем с простой системы с однородными давлением, температурой и составом, состояние которой полностью задается величиной энергии E , объема v и содержанием (в молях)

n_1, n_2, \dots, n_n различных веществ, входящих в эту систему. Так как энтропия системы S есть определенная функция ее состояния, можно, очевидно, согласно правилам дифференциального исчисления выразить зависимость энтропии этой системы от переменных, определяющих ее состояние, следующим образом:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial v} dv + \frac{\partial S}{\partial n_1} dn_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial n_n} dn_n. \quad (60.1)$$

Далее, для бесконечно малых обратимых переходов, состоящих лишь в изменении энергии и объема, в соответствии с первым и вторым законами справедливо соотношение

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dE + p dv}{T}. \quad (60.2)$$

Отсюда получаем для частных производных по энергии и объему хорошо известные выражения:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{p}{T}, \quad (60.3)$$

где p и T — давление и температура. Подставляя эти выражения в уравнение (60.1), можно переписать его в более привычном виде:

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dv + \frac{\partial S}{\partial n_1} dn_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial n_n} dn_n. \quad (60.4)$$

С помощью этого уравнения и определений свободной энергии и термодинамического потенциала, данных выше, можно получить полезные выражения для зависимости этих величин от переменных, определяющих состояние системы. Для этого сначала продифференцируем выражения (58.2) и (58.3), которыми определяются свободная энергия и термодинамический потенциал, что дает

$$dF = dE - S dT - T dS, \quad (60.5)$$

$$d\Phi = dE - S dT - T dS + v dp + p dv, \quad (60.6)$$

а затем подставим сюда выражение для dS в виде (60.4).

В результате приходим к трем внешне похожим выражениям для зависимости энтропии, свободной энергии и термодинамического потенциала от состояния системы:

$$ds = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dv + \left(\frac{\partial S}{\partial n_1} \right)_{E,v} dn_1 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial n_n} \right)_{E,v} dn_n, \quad (60.7)$$

$$dF = -S dT - p dv - T \left(\frac{\partial S}{\partial n_1} \right)_{E,v} dn_1 - \dots - T \left(\frac{\partial S}{\partial n_n} \right)_{E,v} dn_n, \quad (60.8)$$

$$d\Phi = -S dT + v dp - T \left(\frac{\partial S}{\partial n_1} \right)_{E,v} dn_1 - \dots - T \left(\frac{\partial S}{\partial n_n} \right)_{E,v} dn_n, \quad (60.9)$$

где во избежание путаницы нижними индексами у скобок указываются величины, которые остаются постоянными при дифференцировании энтропии по переменным, определяющим состав системы.

Последние уравнения записаны так, чтобы было ясно, что энтропию следует рассматривать как функцию энергии, объема и состава; свободную энергию — как функцию температуры, объема и состава, а термодинамический потенциал — как функцию температуры, давления и состава. Учитывая это, находим полезные соотношения между частными производными по переменным, определяющим состав:

$$-T \left(\frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{E,v} = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{T,v} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{T,p}. \quad (60.10)$$

Индексы у скобок здесь обозначают переменные, от которых зависят (дополнительно к тем, что определяют состав) величины S , F и Φ .

С помощью всех этих соотношений легко ответить на вопрос: как может изменяться из-за химических реакций состав однородной системы, включающей данные вещества? Рассмотрим, к примеру, любую возможную для этих веществ химическую реакцию и обозначим через $\delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n_i, \dots, \delta n_n$ изменения, которые могут происходить в составе при условии, что реакция протекает с бесконечно малой скоростью. Последнее позволяет считать, что реакция сопровождается бесконечно малым изменением энтропии, или свободной энергии, или термодинамического потенциала, если выполняются соответствующие условия постоянства E и v , T и v или T и p , т. е.

$$\begin{aligned} (\delta S)_{E,v} &= \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{E,v} \delta n_i, \\ (\delta F)_{T,v} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{T,v} \delta n_i, \\ (\delta \Phi)_{T,p} &= \sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{T,p} \delta n_i, \end{aligned} \quad (60.11)$$

где суммирование производится по всем веществам, участвующим в реакции.

Вспомним теперь (§ 59), что максимум энтропии, минимум свободной энергии или термодинамического потенциала служат при соответствующих условиях критериями термодинамического равновесия. Тогда, с учетом (60.10), можно сказать, что критерием химической устойчивости всегда может служить одно из следующих трех условий:

$$\sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{E, v} \delta n_i = 0, \quad (60.12)$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{T, v} \delta n_i = 0, \quad (60.13)$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{T, p} \delta n_i = 0. \quad (60.14)$$

Выбор того или иного из них в данной конкретной задаче диктуется лишь соображениями удобства. Эти соотношения справедливы для любой химической системы, равновесной с точки зрения термодинамики.

В случае системы, не находящейся в состоянии химического равновесия, приведенные выражения отличны от нуля не для всех возможных реакций.

Рассмотрим, к примеру, однородную изолированную систему с постоянными энергией и объемом. Допустим, что в ней протекает реакция, для которой величина, определяемая левой частью выражения (60.12), больше нуля. Тогда развитие этой реакции должно приводить к возрастанию энтропии, и это будет происходить до тех пор, пока коэффициенты $(\partial S/\partial n_i)$ не достигнут значений, при которых окажется выполненным условие равновесия (см. § 63). Хотя критерии химической устойчивости, данные выше, были получены для химических реакций в конечных однородных системах при определенных внешних условиях, однако их можно применять и в более общих случаях, поскольку возможность протекания химической реакции определяется лишь условиями в данной точке, интересующей нас. Так, если φ — плотность энтропии в выбранной точке, реакция в этой точке не будет протекать при выполнении условия (ср. с (60.12))

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c_i} \right)_{\rho, \bar{v}} \delta c_i = 0. \quad (60.15)$$

Здесь величины $(\partial \varphi/\partial c_i)_{\rho, \bar{v}}$ означают скорость изменения

плотности энтропии при постоянстве плотности энергии ρ и удельного объема \bar{v} , а величины δc_i — бесконечно малые изменения концентрации различных реагирующих веществ и продуктов в ходе реакции при заданных условиях.

§ 61. Равномерность распределения температуры при тепловом равновесии

Мы уделили достаточное внимание аппарату термодинамики, чтобы перейти к получению интересующих нас следствий. В этом параграфе и в двух следующих мы рассмотрим три известных правила обычной классической термодинамики:

1. В состоянии теплового равновесия температура всегда одинакова во всех частях системы.

2. Термодинамические процессы, идущие с конечной скоростью, всегда необратимы.

3. В конечном состоянии изолированная система обладает максимальной энтропией, и дальнейшие процессы в ней невозможны.

Эти три правила были получены в свое время с помощью представлений классической термодинамики настолько простым и непосредственным путем, что кажутся неизбежными. Поэтому они часто принимаются за основу философского понимания природы всей Вселенной в целом. Однако когда мы в последней части этой книги распространим термодинамику на общую теорию относительности, то увидим, что все три принципа следует рассматривать не как правила, а скорее как исключения.

Для того чтобы исследовать распределение температуры при тепловом равновесии, рассмотрим передачу малого количества теплоты dQ от одной части изолированной системы с температурой T_1 к другой, находящейся при более низкой температуре T_2 . Согласно второму закону термодинамики (57.2) приращение энтропии этих частей системы не могут быть меньше определенных значений

$$dS_1 \geq -\frac{dQ}{T_1} \quad \text{и} \quad dS_2 \geq \frac{dQ}{T_2}.$$

Отсюда для изменения энтропии всей системы в целом имеем

$$dS \geq \frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} > 0, \quad (61.1)$$

причем величина эта больше нуля ввиду того, что по предположению $T_1 > T_2$.

Таким образом, изолированная система, разные части которой находятся при различных температурах, не может пребы-

вать в состоянии теплового равновесия, так как в такой системе возможен процесс, ведущий к увеличению энтропии, и, следовательно, не выполняется условие равновесия (59.2). Итак, в классической термодинамике справедливо следующее утверждение: тепловой поток всегда направлен из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой, и равномерность распределения температуры по всей системе есть необходимое условие теплового равновесия.

Однако в дальнейшем при развитии релятивистской термодинамики это заключение придется немного изменить в случае, когда в различных частях рассматриваемой системы действуют разные гравитационные потенциалы (см. § 129). Грубо говоря, причиной для исправления послужило то обстоятельство, что теплоте следует приписать массу. Следовательно, при передаче теплоты из области с более высоким гравитационным потенциалом в область с более низким потенциалом количество теплоты, полученное при более низком его значении, оказывается большим первоначального (исходящего из области с более высоким значением потенциала), а потому анализ, который приводит к (61.1), становится неверным. Если ввести температуру как величину, измеряемую локальным наблюдателем в собственной системе отсчета, то релятивистское рассмотрение с необходимостью приводит к наличию в состоянии теплового равновесия определенного температурного градиента, который будет препятствовать распространению теплового потока из области с более высоким гравитационным потенциалом в области с более низким потенциалом.

§ 62. Необратимость и скорость переходов

Второе правило классической термодинамики, на котором мы хотим сейчас остановиться, формулируется так: термодинамические процессы, протекающие с конечной скоростью, всегда необратимы. Обычно его связывают с общепринятым представлением о том, что термодинамический процесс непременно должен протекать с бесконечно малой скоростью, для того чтобы эффективность его все время была максимальной, что обеспечивает в свою очередь обратимость этого процесса. Подробный анализ того, как применяется эта идея на конкретном, наиболее характерном примере, сделает принцип более ясным и укажет пути дальнейшего обобщения тогда, когда мы будем рассматривать термодинамику в рамках общей теории относительности.

В качестве примера термодинамической системы, достаточно типичной для иллюстрации различного рода процессов, рассмотрим смесь газов, заключенных в цилиндре с подвижным

поршнем. Всякое изменение термодинамического состояния этой системы связано либо с обменом энергией между системой и окружающей средой в виде теплоты или работы, либо же с изменением внутренних условий. Рассмотрим эти три возможности по порядку.

Прежде всего, наши знания явлений теплопроводности позволяют сказать, что передача теплоты между системой и окружающей средой может происходить с конечной скоростью лишь при наличии конечного температурного градиента. Этот процесс будет связан с передачей теплоты из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой, а следовательно, согласно формуле (61.1) этот процесс всегда сопровождается возрастанием энтропии системы и окружающей среды, взятых как целое.

Так как это целое можно уже рассматривать как изолированную систему, такое увеличение энтропии должно приводить к необратимости в соответствии со свойствами изолированных систем (§ 59). Отсюда вывод: для того чтобы процесс был обратимым, в системе не должно происходить передачи теплоты с конечной скоростью.

Обратимся теперь к случаю обмена энергией между системой и окружающей средой при совершении работы. Такой процесс происходит при расширении газа, который заставляет двигаться поршень, совершая таким образом работу над каким-то внешним устройством, предназначенным для накопления потенциальной энергии. При этом для обратимости процесса надо, чтобы силы, действующие на внешнее устройство в процессе расширения, были бы не меньше s . Ясно, что так не может быть при конечной скорости расширения: во-первых, при конечной скорости движения поршня возникает трение, во-вторых, движение газа в пространстве, освобождаемое поршнем, не может происходить достаточно быстро, чтобы в процессе расширения поддерживалось такое давление на поршень, как и в период сжатия. Поскольку таким способом можно рассматривать и другие случаи совершения работы, мы приходим к общему утверждению, что система не может выполнять работы над окружающей средой в результате процесса, идущего с конечной скоростью, который был бы при этом еще и обратимым.

Далее, система не может взаимодействовать обратимым образом и со средой при конечной скорости передачи теплоты или работы, поэтому мы должны привлечь к рассмотрению возможные внутренние процессы. При этом, так как обратимая система не может взаимодействовать с окружающей средой, такую систему можно считать изолированной. Для этой системы процессы, согласно (59.1), не должны приводить к увеличению энтропии, если мы хотим, чтобы они были обратимы.

В качестве внутренних процессов в рассматриваемой системе мы можем встретить: передачу теплоты внутри цилиндра от одной порции газа к другой за счет разности давлений, диффузию одной из газовых компонент из области с более высокой концентрацией в область с более низкой концентрацией, химические взаимодействия газов между собой. Ни один из этих процессов, однако, не может протекать без увеличения энтропии, т. е. без нарушения обратимости, если скорость его конечна.

Передача энергии внутри системы в виде теплоты или в результате совершаемой работы сразу приводит к необратимости, так же как обмен между системой и окружающей средой, рассмотренный выше. Поэтому мы налагаем условие постоянства температуры и давления по всему объему цилиндра. Далее, диффузия одного моля газа при постоянной температуре из области с концентрацией c_1 в область с концентрацией c_2 сопровождается возрастанием энтропии, равным $R \ln(c_1/c_2)$, безотносительно к скорости этого процесса. И наконец, из наших знаний химической кинетики и условия (59.1), которое всегда выполняется при переходах в изолированных системах, следует, что если и возможна какая-либо химическая реакция, не приводящая к возрастанию энтропии, то в среднем должно установиться такое равновесие между прямой и обратной реакциями, при котором состав смеси будет оставаться постоянным.

Итак, на примере этой простой системы мы приходим к заключению, что не существует никаких процессов (независимо от того, происходит или нет взаимодействие системы со средой), которые *одновременно* и были бы обратимыми, и протекали бы с конечной скоростью. Изученная система достаточно типична для того, чтобы возвести этот вывод в ранг общего правила классической термодинамики.

Остается указать на причины, по которым это правило нарушается при объединении термодинамики с общей теорией относительности. Они заключаются в возможности изменений собственного объема элемента вещества, измеряемого локальным наблюдателем, возникающих при изменениях гравитационного потенциала, которыми пренебрегают в классической теории. Выше мы пришли к заключению, что обратимое увеличение объема газа не может происходить с конечной скоростью из-за возникающего при этом трения и вследствие падения давления при распространении газа на больший объем при отводе поршня. В релятивистской механике, однако, существует возможность такого изменения *собственного* объема, при котором отсутствует трение и сохраняется равенство внутреннего и внешнего давлений. А это, естественно, приводит к отличиям от обычной термодинамики.

§ 63. Конечное состояние изолированной системы

Третий закон классической термодинамики, который мы хотим здесь рассмотреть, гласит: конечное состояние изолированной системы всегда будет состоянием с максимальным значением энтропии, в котором никакое дальнейшее ее изменение не возможно. Это правило в классической термодинамике довольно просто обосновать, исходя из первого и второго законов термодинамики.

Согласно первому закону классической термодинамики энергия изолированной системы должна оставаться постоянной, а в соответствии со вторым законом (§ 59, § 62) энтропия системы должна со временем возрастать в результате каких-либо реальных термодинамических переходов, в ней происходящих. Следовательно, если есть верхний предел, т. е. максимальное из возможных значений энтропии для данной системы, то этим значением и определяется конечное состояние, из которого в соответствии с условием (59.2) дальнейшие переходы невозможны.

Доказательство того, что такое наивысшее значение энтропии должно существовать, можно детально провести методами классической термодинамики на примере любой конкретной изолированной системы, выбранной в качестве типичной. Из общих соображений очевидно, что энтропию системы следует считать функцией ее энергии, объема и определенного числа других параметров, описывающих внутреннюю конфигурацию системы и ее состав. В случае же изолированной системы, так как ее энергия постоянна, остается рассмотреть зависимость энтропии лишь от объема и от внутренних параметров. Для более конкретного объекта — газа, не ограниченного в пространстве никакими стенками, зависимость оказывается такой, что при постоянной энергии конечное состояние с максимальной энтропией достигается при бесконечном расширении газа и при его полной диссоциации на отдельные атомы. Для систем же, существующих за счет внутренних связей, конечное состояние с максимальной энтропией достигается в том случае, когда внутренние переменные принимают наиболее выгодные значения в области изменений, ограниченной заданием значения энергии.

Для примера рассмотрим однородную систему с постоянной энергией и объемом. Согласно выводам § 60 возможность данной химической реакции в ней определяется с учетом (60.12) условием

$$\sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{E, v} \delta n_i > 0, \quad (63.1)$$

где каждое из δn_i означает здесь изменение количества какого-либо из взаимодействующих веществ (в молях) при том условии, что реакция развивается с бесконечно малой скоростью. А поскольку величина любой частной производной $(\partial S/\partial n_i)$ в действительности уменьшается с возрастанием n_i , очевидно, что в итоге непрерывные реакции должны приводить к максимальному значению энтропии.

В результате подобных рассуждений, проведенных в рамках классической термодинамики, мы приходим к выводу, что изолированные системы в конечных состояниях должны обладать максимальными из возможных значений энтропии, при которых дальнейшие процессы уже невозможны. Однако при обобщении термодинамики в общей теории относительности это заключение модифицируется, поскольку в релятивистской механике не требуется постоянства величины, соответствующей полной собственной энергии изолированной системы, а это снимает требование на условия возрастания энтропии, которое накладывается в классической термодинамике законом сохранения энергии.

§ 64. Энергия и энтропия идеального одноатомного газа

В целях подготовки к последующим приложениям полезно изучить несколько объектов с идеализированными свойствами. В этом параграфе будут получены выражения для энергии и энтропии идеального одноатомного газа.

Будем считать, что давление, объем и температура такого газа связаны газовым законом:

$$pv = NkT, \quad (64.1)$$

где N — число молекул газа в данном объеме, а k — постоянная Больцмана, которая равна обычной фигурирующей в газовых законах константе R , относящейся к одному молю газа, поделенной на число молекул в моле (т. е. на число Авогадро A):

$$k = R/A. \quad (64.2)$$

Далее, согласно эксперименту и простейшим представлениям кинетической теории газов можно записать

$$C_v = \frac{3}{2}Nk \quad \text{и} \quad C_p = \frac{5}{2}Nk \quad (64.3)$$

в качестве теплоемкостей такого газа при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно. В дополнение среднюю

кинетическую энергию, которую имеют молекулы при температуре T , примем равной *)

$$E_{\text{кин}} = \frac{3}{2} NkT. \quad (64.4)$$

Воспользуемся нулевой точкой отсчета энергии, выбранной в § 56 согласно эйнштейновскому соотношению между массой и энергией. Тогда полная энергия изучаемого нами газа складывается из *масс покоя* отдельных частиц m и указанного значения кинетической энергии, что составляет

$$E = Nmc^2 + \frac{3}{2} NkT. \quad (64.5)$$

Этот результат окажется полезным тогда, когда мы захотим рассмотреть процессы перехода вещества в излучение или перехода одного вида атома в другой (образование гелия из водорода и т. п.), в которых расходуется запас внутренней энергии Nmc^2 .

Зависимость энтропии идеального газа от температуры и объема можно записать в виде

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{p dv}{T}, \quad (64.6)$$

поскольку величина $(C_v dT + p dv)$ представляет собой теплоту, поглощаемую при обратимых изменениях температуры и объема. Подставляя значения C_v и v из (64.1) и (64.3) и интегрируя, получаем выражение для энтропии N молекул идеального одноатомного газа при температуре T и давлении p :

$$S = \frac{5}{2} Nk \ln T - Nk \ln p + \text{const.} \quad (64.7)$$

Вводя теперь на основании газовых законов концентрацию газа c с помощью соотношения

$$p = \frac{N}{v} kT = c kT, \quad (64.8)$$

можно переписать выражение для энтропии в следующей эквивалентной форме:

$$S = \frac{3}{2} Nk \ln T - Nk \ln c + \text{const.} \quad (64.9)$$

*) Для достаточно легких молекул и при достаточно высоких температурах это выражение принимает вид

$$E = 3NkT.$$

Вывод этого выражения можно найти в работах [1, 2].

Величину постоянной интегрирования в уравнении (64.7) примем пропорциональной числу молекул N , а в остальном, конечно, неопределенной до тех пор, пока не выбрана некоторая конкретная нулевая точка отсчета энтропии. Как и выше, согласно третьему закону термодинамики (§ 57) будем считать, что энтропия принимает нулевое значение, когда вещество находится в чисто кристаллическом состоянии при абсолютном нуле. Тогда, зная теплоту обратимого перехода из кристаллического состояния в газообразное, можно определить постоянную в (64.7). Это легко сделать теоретически*). В результате получается известное выражение Сакура—Тетроде для энтропии одноатомного газа:

$$S = \frac{5}{2} Nk \ln T - Nk \ln p + Nk \ln \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} (ke)^{\frac{5}{2}}}{h^3}. \quad (64.10)$$

Вводя концентрацию, перепишем это выражение следующим образом:

$$S = \frac{3}{2} Nk \ln T - Nk \ln c + Nk \ln \frac{(2\pi mk)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{h^3}. \quad (64.11)$$

Теперь видно, что аддитивная постоянная зависит от массы молекулы данного газа m , и от некоторых универсальных констант: оснований натуральных логарифмов e , постоянной Больцмана k и постоянной Планка h . Зависимость энтропии одноатомного газа от этих величин, установленную выше, можно считать сейчас достаточно хорошо подтвержденной опытами.

Величину, определяемую уравнениями (64.10) и (64.11), часто называют абсолютной энтропией газа. Однако поскольку такое название может дезориентировать читателя, подчеркнем, что эта величина вне зависимости от ее происхождения, теоретического или экспериментального, представляет собой возрастание энтропии при переходе вещества из кристаллического состояния, в котором оно находилось при температуре абсолютного нуля, в заданное состояние идеального одноатомного газа.

Для удобства практических вычислений уравнения (64.10) и (64.11) могут быть переписаны в следующем виде:

$$S = \frac{3}{2} R \ln T - R \ln c + \frac{3}{2} R \ln M + S_0, \quad (64.12)$$

$$S = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln p + \frac{3}{2} R \ln M + S'_0. \quad (64.13)$$

Энтропия S здесь отнесена к одному молю газа при заданной концентрации c или при заданном давлении p ; остальные символы

*) Вывод можно найти, например, в книге [43].

имеют следующие значения: R — газовая постоянная, выраженная в калориях, поделенных на моль и на градус по Цельсию; T — абсолютная температура в единицах той же шкалы; M — молекулярный вес газа в граммах; c — концентрация в единицах *моль/см³*; p — парциальное давление в атмосферах, а постоянные имеют значения [44]

$$S_0 = -11,0533, \quad (64.14)$$

$$S'_0 = -2,29852 \quad (64.15)$$

в калориях, поделенных на моль и на градус. Выражения (64.12) и (64.15), конечно, справедливы лишь для одноатомных газов.

Можно рассмотреть также газы, имеющие более сложные молекулы. Тогда придется учитывать вращение каждой молекулы как целого, а если необходимо, то и колебания атомов внутри молекул. Однако выражения для энергии и энтропии таких газов в дальнейшем нам не понадобятся.

§ 65. Энергия и энтропия излучения абсолютно черного тела

В этом параграфе мы выведем известные выражения для энергии и энтропии излучения, испускаемого абсолютно черным телом, которые необходимы нам для последующих приложений.

Как показано в работе Стефана и Больцмана, плотность энергии излучения u , заключенного в некоторой полости и находящегося в равновесии с ее стенками при температуре T , задается формулой

$$u = aT^4, \quad (65.1)$$

где a — постоянная Стефана, равная [44]

$$a = 7,6237 \cdot 10^{-15}, \quad (65.2)$$

если ее выражать в эргах, поделенных на *см³* и на градус в четвертой степени. Далее, давление, создаваемое этим излучением, задается выражением

$$p = \frac{a}{3} T^4. \quad (65.3)$$

Из соотношения (65.1) следует, что полная энергия «черного излучения», заключенного в объеме v при температуре T , выражается в виде

$$E = avT^4. \quad (65.4)$$

Кроме того, с помощью введенных соотношений можно, очевидно, найти, что в случае обратимого изотермического расширения рассматриваемого объема поглощенная теплота равняется

$$dQ = dE + dW = aT^4 dv + \frac{1}{3} aT^4 dv = \frac{4}{3} aT^4 dv.$$

Отсюда для увеличения энтропии в полости с ростом температуры имеем

$$dS = \frac{4}{3} aT^3 dv,$$

Это выражение можно теперь проинтегрировать и найти полное возрастание энтропии при увеличении объема от 0 до v . Именно, полная энтропия равновесного излучения, находящегося при температуре T в полости, занимающей объем v , определяется следующим выражением:

$$S = \frac{4}{3} avT^3. \quad (65.5)$$

Более того, эта величина, строго говоря, является абсолютной энтропией такого излучения, поскольку она совпадает с увеличением энтропии, происходящим при реальном процессе введения излучения внутрь полости.

В заключение параграфа запишем важную для дальнейшего характеристику излучения черного тела — энергетическое распределение излучения по различным частотам. Оно задается знаменитым законом Планка:

$$du = 8\pi \frac{h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu. \quad (65.6)$$

§ 66. Равновесие между водородом и гелием

В качестве хорошего примера релятивистского соотношения между массой и энергией в термодинамике рассмотрим образование гелия из водорода, происходящее согласно квазихимической реакции



Если, как это, по-видимому, разумно предположить, атом водорода состоит из одного протона и одного электрона, а атом гелия — из ядра, образованного четырьмя протонами и двумя электронами, то подобная ядерная реакция (66.1) возможна на

самом деле *). Далее, поскольку масса атома гелия значительно меньше, чем масса четырех атомов водорода, в этом процессе следует ожидать большого выделения теплоты, а следовательно, в согласии с качественно справедливым во всех случаях принципом Бертелло, имеется большая вероятность протекания такой реакции. В настоящем параграфе мы вычислим условия равновесия этого гипотетического процесса [45].

Начнем с того, что выпишем для удобства критерий химического равновесия в форме (60.14):

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{T,p} \delta n_i = 0, \quad (66.2)$$

где каждая из величин δn_i определяет изменение числа молей какого-либо из веществ, участвующих в реакции, при условии ее бесконечно малой скорости, а величины $(\partial \Phi / \partial n_i)$ — соответствующие скорости изменения термодинамического потенциала системы при постоянных температуре и давлении, отнесенные к одному молю рассматриваемого вещества. Применим этот критерий к реакции между водородом и гелием (66.1), обозначив индексами 1 и 2 водород и гелий соответственно. Условие равновесия в этом случае выглядит так:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right)_{T,p} \delta n_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \right)_{T,p} \delta n_2 = 0.$$

Поскольку из каждых четырех атомов водорода получается один атом гелия, имеем

$$-\delta n_1 = 4\delta n_2,$$

и, следовательно, условие равновесия можно переписать в виде

$$-4 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right)_{T,p} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \right)_{T,p} = 0. \quad (66.3)$$

Для того чтобы использовать это уравнение в данной задаче, мы должны предположить, что и водород и гелий оба доста-

*) Содержание этого параграфа очень устарело. В действительности образование атомов гелия, например, в Солнце, по-видимому, результат цепочки двух реакций: $p+p \rightarrow d+e^++\nu$, $d+d \rightarrow \text{He}$. Мы, однако, оставляем эту главу без изменений, как пример достаточно интересных оценок, сделанных на очень раннем этапе возникновения астрофизики. Отметим, что автор не знал еще ничего о нейтронах и считал ядро гелия состоящим из четырех протонов и двух электронов. Но, вероятно, не совсем бесполезно посмотреть, о чем думали физики в начале 30-х годов. Так как нейтрино уходят за пределы объема, в котором происходят реакции, то обратная реакция не осуществляется. Поэтому тот тип равновесия, который исследуется здесь, на самом деле не существует. (Прим. ред.)

точно разрежены, чтобы их можно было рассматривать как идеальные одноатомные газы с некоторыми парциальными давлениями и с определенной температурой смеси. Тогда термодинамический потенциал одного моля водорода (или гелия), находящегося в этой смеси, можно считать равным действительному термодинамическому потенциалу одного моля указанного газа, находящегося в чистом состоянии при данной температуре и при данном давлении. Величина же термодинамического потенциала для газа, находящегося в чистом состоянии, может быть вычислена через его энергию E , давление p , объем v и температуру T в соответствии с определением (58.3):

$$\Phi = E + pv - TS.$$

Тогда условие равновесия (66.3) можно представить в следующем виде:

$$(E_2 + p_2 v - TS_2) - 4(E_1 + p_1 v - TS_1) = 0. \quad (66.4)$$

Здесь индексы 1 и 2, как и прежде, означают водород и гелий; E_1 и E_2 — их энергии, а S_1 и S_2 — энтропии на моль чистого водорода или гелия при температуре T и давлениях p_1 и p_2 соответственно, причем последние являются парциальными давлениями в равновесной смеси.

В данном случае из релятивистского соотношения между массой и энергией следует, что разность энергий, заключенных в одном моле гелия и четырех молях водорода, подсчитанных по формуле (64.5), равна

$$E_2 - 4E_1 = (M_2 - 4M_1)c^2 - \frac{9}{2}RT, \quad (66.5)$$

где M_1 и M_2 — молекулярные веса водорода и гелия. Из формулы (66.5) вытекает, что возможности энергосвыделения определяются различием внутренних кинетических энергий рассматриваемых молекул. Далее, с помощью газовых законов найдем произведение давления на объем:

$$p_2 v - 4p_1 v = -3RT. \quad (66.6)$$

И наконец, используя уравнение Сакура — Тетроде в виде (64.13), получаем выражение для энтропии:

$$-TS_2 + 4TS_1 = \frac{15}{2}RT \ln T - RT \ln \frac{p_1^4}{p_2} + \frac{3}{2}RT \ln \frac{M_1^4}{M_2} + 3TS'_0. \quad (66.7)$$

Подставляя найденные выражения в условие равновесия (66.4) и преобразуя его, находим равновесную постоянную реакции:

$$\ln \frac{p_2}{p_1^4} = -\frac{(M_2 - 4M_1)}{RT} c^2 - \frac{15}{2} \ln T + \frac{3}{2} \ln \frac{M_2}{M_1^4} - \frac{3S'_0}{R} + \frac{15}{2}, \quad (66.8)$$

где p_1 и p_2 — равновесные давления водорода и гелия.

Чтобы с помощью этого уравнения получить численные результаты, подставим в него молекулярные веса одноатомного водорода и гелия: 1,0078 и 4,002 г. Значения других величин возьмем из статьи [44]: скорость света $c = 2,99796 \cdot 10^{10}$ см/сек, газовую постоянную $R = 8,31360 \cdot 10^7$ эрг/град·моль или 1,98643 кал/град·моль, а постоянную S'_0 положим равной $S'_0 = -2,29852$ кал/град·моль, откуда вытекает, что равновесные давления p_1 и p_2 оказываются выраженными в атмосферах. Подставляя эти значения и переходя к десятичным логарифмам, получаем с точностью, достаточной для наших целей, соотношение

$$\ln \frac{p_2}{p_1^4} = \frac{1,371 \cdot 10^{11}}{T} - 7,5 \ln T + 5,648. \quad (66.9)$$

Или, введя полное давление смеси

$$p = p_1 + p_2 \quad (66.10)$$

и учитывая с помощью параметра α примесь гелия, диссоциирующего на водород в условиях равновесия, перепишем предыдущее уравнение в виде *)

$$\ln \frac{256p^3\alpha^4}{(1-\alpha)(1+3\alpha)^3} = -\frac{1,371 \cdot 10^{11}}{T} + 7,5 \ln T - 5,648. \quad (66.11)$$

§ 67. Равновесие между веществом и излучением

В качестве второго термодинамического применения релятивистского соотношения между массой и энергией рассмотрим другой возможный процесс — переход вещества в излучение. Этот процесс, называемый часто аннигиляцией материи, может происходить в результате объединения отрицательного электрона и протона или отрицательного и положительного электронов.

*) Заключительную часть параграфа мы опускаем. Изложенный в ней материал о распределении элементов во Вселенной совсем потерял смысл. Кроме того, он не имеет прямого отношения к содержанию книги. Изложение современного состояния вопроса читатель может найти в [46] и [49] (численные значения констант мы оставили старыми). (Прим. ред.)

когда заряды частиц взаимно нейтрализуются и полная масса частиц переходит в энергию электромагнитного излучения. Естественно, что в настоящий момент никаких данных о существовании этих процессов нет, хотя по крайней мере при столкновении отрицательных и положительных электронов их существование в высшей степени вероятно*).

Найдем условие термодинамического равновесия между веществом и излучением. Такое исследование впервые было проведено Штерном [47], а позднее, с несколько другой точки зрения, было выполнено автором этой книги [48].

В этой задаче наиболее удобно применить критерий равновесия в виде (59.2):

$$(\delta S)_{E,v} = 0, \quad (67.1)$$

по которому энтропия системы, поддерживаемой при постоянных энергии и объеме, должна иметь максимальное значение.

При выводе мы будем считать, что вещество представляет собой одноатомный идеальный газ, и предположим, что и вещество и излучение достаточно разрежены, так что можно пренебречь взаимодействием и подсчитывать полную энергию и энтропию системы как сумму обычных выражений для отдельных компонент.

Полную энергию системы из N молекул с массой m запишем согласно уравнениям (64.5) и (65.4) следующим образом:

$$E = Nmc^2 + \frac{3}{2} NkT + avT^4, \quad (67.2)$$

где v — объем, а T — температура системы. В первом члене здесь учтена внутренняя энергия, связанная с массой молекул, что необходимо, ибо мы рассматриваем переход вещества в излучение; другие два члена определяют кинетическую энергию одноатомных молекул и энергию излучения соответственно. Энтропию такого газа наиболее удобно выразить через концентрацию, воспользовавшись формулой (64.9):

$$S = \frac{3}{2} Nk \ln T - Nk \ln c + \text{const}, \quad (67.3)$$

а энтропию излучения с помощью (65.5):

$$S = \frac{4}{3} avT^3. \quad (67.4)$$

*) Читателю, конечно, известно, что все процессы аннигиляции действительно открыты и что, например, антипротон, аннигилируя с протоном, превращается не только в электромагнитное излучение, но и в мезоны. Этот параграф также в переводе подвергнут сокращению. (Прим. ред.)

Аддитивная постоянная в (67.3) должна быть пропорциональной числу молекул N . В остальном же она произвольна, и выбор ее определяет начальную точку отсчета энтропии. Удобно выбрать одинаковые точки отсчета энтропии в выражениях (67.3) и (67.4), чтобы можно было рассматривать взаимное превращение вещества и излучения. Положим постоянную в (67.3) для простоты равной $Nk \ln be^{\frac{5}{2}}$, а b выберем так, чтобы обеспечить одинаковость начальных точек отсчета. Складывая затем оба выражения, получаем полную энтропию смеси в виде

$$S = \frac{3}{2} Nk \ln T - Nk \ln \left(\frac{N}{v} \right) + Nk \ln be^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} avT^3. \quad (67.5)$$

В соответствии с нашим критерием равновесия эта величина должна быть максимальной при постоянной энергии и постоянном объеме. Варьируя ее по числу частиц N и по температуре T , находим необходимое условие для равновесия

$$\delta S = \left\{ \frac{3}{2} k \ln T - k \ln \left(\frac{N}{v} \right) - k + k \ln be^{\frac{5}{2}} \right\} \delta N + \left(\frac{3}{2} \frac{Nk}{T} + 4avT^2 \right) \delta T = 0 \quad (67.6)$$

и дополнительное уравнение, выражающее постоянство энергии:

$$\delta E = \left(mc^2 + \frac{3}{2} kT \right) \delta N + \left(\frac{3}{2} Nk + 4avT^3 \right) \delta T = 0. \quad (67.7)$$

Решая совместно эти два уравнения, сразу получаем искомое выражение для концентрации одноатомного газа, находящегося в равновесии с излучением при температуре T , а именно:

$$\frac{N}{v} = bT^{\frac{3}{2}} e^{-mc^2 kT}. \quad (67.8)$$

Отсюда следует, что равновесная концентрация вещества должна увеличиваться с ростом температуры.

Чтобы из этого выражения можно было получать конкретные значения равновесной концентрации вещества при любой заданной температуре, нужно знать величину постоянной b . У нас, естественно, нет никаких прямых эмпирических данных относительно этой величины. Однако из теоретических соображений величину этой постоянной нужно выбрать так, чтобы точ-

ка начала отсчета энтропии и для вещества и для излучения была одной и той же. Решая эту задачу, Штерн предполагал, что как в случае полости, содержащей излучение, так и в случае вещества в чисто кристаллическом состоянии энтропия должна становиться исчезающе малой при понижении температуры до абсолютного нуля. В первом случае это предположение кажется вполне разумным, поскольку при абсолютном нуле не может быть вообще никакого излучения. Во втором — утверждение не столь очевидно, так как оно справедливо лишь для той части энтропии вещества, которая связана с неупорядоченным расположением и движением составляющих это вещество атомов, в пренебрежении другими возможными вкладами. Тем не менее это предположение, по-видимому, является наиболее оптимальным из всех, что мы в состоянии сделать в настоящее время.

Предполагая оправданным выбор полной энтропии вещества в виде приращения над значением энтропии при абсолютном нуле, приписываемым чистому кристаллу, легко проделать остальное. Очевидно, что член в (67.5), содержащий постоянную b , можно положить равным последнему члену в (64.11), выражающему увеличение энтропии при переходе вещества из кристаллического состояния в газовое при температуре абсолютно нулю, т. е.

$$Nk \ln be^{\frac{5}{2}} = Nk \ln \frac{(2\pi mk)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{h^3}.$$

Находя отсюда b и подставляя результат в (67.8), получаем штерновское выражение для концентрации одноатомного газа, находящегося в равновесии с излучением при температуре T :

$$\frac{N}{v} = \left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} e^{-mc^2/kT}. \quad (67.9)$$

Для практических расчетов подставим сюда значения универсальных констант и придем к результату

$$c = 3,143 \cdot 10^{-4} M^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} e^{-1,081 \cdot 10^{13} M/T}, \quad (67.10)$$

где c — концентрация в молях на $см^3$, а M — молекулярный вес в граммах.

Из этих выражений легко видеть, что равновесная концентрация вещества должна быть крайне низкой (исключая сверхвысокие температуры) из-за экспоненциального множителя со степенью $-mc^2/kT$. Таким образом, для газа, состоящего из

простых нейтральных частиц, масса которых может превращаться в излучение (например, нейтронного газа), равновесная концентрация даже при температуре 10^9 градусов составит всего лишь

$$c = 10^{-4663} \text{ моль/см}^3 \text{ или } N = 6,06 \cdot 10^{-4663} \text{ молекул/см}^3. \quad (67.11)$$

Вместо того чтобы изучать равновесие между излучением и газом, состоящим из нейтральных частиц, рассмотрим более близкий к действительности случай: равновесие между излучением и смесью электронов и протонов с массами m_1 и m_2 или положительных и отрицательных электронов, рождаемых излучением в равном количестве для сохранения электрической нейтральности. Эти задачи легко решаются методом, использованным выше, причем вместо (67.9) получается следующий результат:

$$\frac{N}{v} = \left(\frac{2\pi \sqrt{m_1 m_2} k}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} e^{-(m_1 + m_2)c^2/2kT}, \quad (67.12)$$

который справедлив при равных концентрациях N/v двух различных сортов частиц. В показателе отрицательной экспоненты теперь стоит средняя масса двух частиц $(m_1 + m_2)/2$. Естественно, что выражение (67.12) также дает очень низкую концентрацию вещества при равновесном состоянии*).

ЧАСТЬ II

ТЕРМОДИНАМИКА ДВИЖУЩИХСЯ СИСТЕМ

§ 68. Два закона термодинамики для движущихся систем

В части I этой главы была развита классическая термодинамика покоящихся систем. Влияние теории относительности сказалось лишь на определении энергии системы. Теперь мы обратимся к более глубокому следствию теории относительности, которая, как впервые показали Планк [50, 51] и Эйнштейн [52], приводит к созданию удовлетворительной теории термодинамических систем, движущихся относительно осей координат, используемых наблюдателем.

В основу теории оказалось возможным положить оба закона термодинамики, записанные в их прежней форме: изменение

*) Конец параграфа мы опускаем, так как автора беспокоит вопрос о том, почему все вещество не переходит в излучение. Мы сейчас знаем, что наш мир несимметричен по заряду, так что нуклоны не могут аннигилировать (нет антинуклонов). Поэтому полученная формула для равновесного состояния не имеет отношения к реальному миру. (Прим. ред.)

энергии системы, выраженное через поглощенную теплоту и выполненную работу:

$$\Delta E = Q - A, \quad (68.1)$$

и изменение энтропии, выраженное через поглощенную теплоту и температуру:

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T}. \quad (68.2)$$

При использовании этих выражений выяснится, однако, что стоящие в них величины, такие, как энергия, энтропия, теплота, работа и температура, можно относить к системам координат, в которых рассматриваемые термодинамические системы не обязательно покоятся, а могут находиться в состоянии равномерного поступательного движения.

Можно считать, что (68.1) и (68.2) выражают первый и второй законы термодинамики для систем, находящихся в состоянии равномерного движения, так как, по правилам преобразования величин, стоящих в этих уравнениях, справедливость уравнений в системе координат, относительно которых эти термодинамические системы движутся, эквивалентна их справедливости в собственных координатах, в которых системы покоятся. В самом деле, в собственных координатах эти выражения являются обычными формулировками первого и второго законов термодинамики, для которых, как мы предполагали, существует адекватное эмпирическое подтверждение.

Обратимся теперь к рассмотрению правил лоренцевых преобразований введенных величин.

§ 69. Лоренцевы преобразования термодинамических величин

Для наших целей нам почти всегда бывает достаточно ограничиться простыми системами, содержащими термодинамические жидкости, которые передают всестороннее давление, но не сопротивляются сдвигу и состояния которых могут определяться двумя переменными, например энергией и объемом или температурой и давлением. Такие ограничения обычны в термодинамическом подходе, и введения их достаточно, чтобы мы сейчас ограничились преобразованиями Лоренца только для объема, давления, энергии, работы, теплоты, энтропии и температуры.

Первые четыре из этих величин — механической природы, и правила их преобразования либо были уже приведены, либо вытекают из тех, что уже были рассмотрены, и от их переноса в термодинамику не следует ожидать каких-либо изменений. Тем не менее в целях единообразия мы еще раз обсудим, исходя из прежних принципов, преобразования Лоренца для этих величин, учитывая упрощения, которые возникают от принятых

нами ограничений на действующие в жидкости напряжения. Правила преобразования термодинамических величин — теплоты, энтропии и температуры — должны быть, согласно предварительным замечаниям, такими, чтобы выполнение двух законов термодинамики (68.1) и (68.2) в любых заданных координатах было эквивалентно их выполнению в собственных координатах. Это требование, дополненное еще одним условием, которое возникнет при выводе правила преобразования энтропии, оказывается достаточным для получения однозначного решения.

Будет показано, что наиболее удобны правила преобразования, связывающие определенные величины из данной системы координат S с соответствующими величинами, измеряемыми в собственных координатах S^0 локальным наблюдателем, который движется вместе с изучаемой термодинамической системой.

Займемся выводом этих преобразований.

а) *Объем и давление.* Рассмотрим термодинамическую систему с объемом v , которая движется равномерно со скоростью u . В соответствии с нашими предыдущими результатами лоренцево сокращение объема определяется соотношением

$$v = v_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (69.1)$$

где v_0 — объем, измеряемый в собственных координатах.

При выводе правила преобразования для давления p будем исходить из определения давления как силы, действующей на единичную площадку, и из известных уже лоренцевых преобразований для силы. Для простоты выберем направления осей координат так, чтобы скорость u была параллельна оси x . Преобразования Лоренца для сил F_x , F_y и F_z , которые действуют на элементы поверхности системы, перпендикулярные к выбранным осям координат, вытекают из правил преобразования для силы (25.3):

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad F_z = F_z^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (69.2)$$

где F_x^0 , F_y^0 и F_z^0 — силы, действующие на те же самые поверхности, но в собственной системе координат S^0 . Однако, поскольку площадка, перпендикулярная к оси x , не подвергается лоренцеву сокращению, а площадки, нормальные к другим двум осям, сокращаются в отношении $\sqrt{1 - u^2/c^2} : 1$, мы сразу можем сделать вывод, что

$$p = p_0. \quad (69.3)$$

Легко убедиться, что этот результат — просто частный случай общего правила преобразования для компонент тензора натяжений (34.5) в рассматриваемом нами случае, когда натяжения

сводятся к гидростатическому давлению:

$$p = t_{xx} = t_{yy} = t_{zz}, \quad t_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \quad (69.4)$$

б) *Энергия*. Чтобы получить выражение для энергии нашей движущейся системы, рассмотрим сначала систему, находящуюся в покое при тех внутренних условиях, которые мы здесь рассматриваем, а затем определим работу, которую следует совершить для придания ей нужной скорости путем квазистационарного адиабатического ускорения, не нарушающего внутренних условий, определяемых локальным наблюдателем. Сначала получим выражение для силы, действующей в течение процесса ускорения.

С помощью полученного нами общего соотношения между плотностью количества движения и плотностью потока энергии (§ 27 и § 35) можно найти плотность количества движения ρ и давления p потока, имеющего скорость \mathbf{u} :

$$\mathbf{g} = \rho \mathbf{u} + \frac{p\mathbf{u}}{c^2}, \quad (69.5)$$

где первый член — плотность количества движения, связанная с перемещением массы жидкости, а второй член учитывает дополнительное количество движения, связанное с потоком энергии, возникающим из-за работы, которая совершается над жидкостью действующим на нее давлением. Используя соотношение между массой и энергией, можно записать

$$\mathbf{G} = \frac{E + pv}{c^2} \mathbf{u} \quad (69.6)$$

в качестве выражения для полного импульса жидкости в объеме v в полном соответствии с предыдущим более общим выражением (35.2). Это приводит нас к искомому выражению для внешней силы, вызывающей ускорение системы:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{E + pv}{c^2} \mathbf{u} \right). \quad (69.7)$$

Теперь легко вычислить проделанную работу и увеличение энергии при изменении скорости. Работа, очевидно, складывается из работы, проделанной внешней силой \mathbf{F} , и работы сил давления p по изменению объема системы. Следовательно, скорость изменения энергии можно положить равной

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - p \frac{dv}{dt}. \quad (69.8)$$

Применим эту формулу к рассматриваемому процессу, используя условия (69.1) и (69.3), которые перепишем еще раз:

$$p = p_0, \quad v = v_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (69.9)$$

Будем теперь считать, что p_0 и v_0 здесь постоянны, так как по предположению объем и давление не изменяются в процессе ускорения системы. Учитывая постоянство давления p и подставляя (69.7) вместо \mathbf{F} , получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt} \frac{u^2}{c^2} + p \frac{u^2}{c^2} \frac{dv}{dt} + \frac{E + pv}{c^2} u \frac{du}{dt} - p \frac{dv}{dt}$$

или, после преобразований, следующее выражение:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{d}{dt} (E + pv) = \frac{E + pv}{c^2} u \frac{du}{dt},$$

которое нетрудно проинтегрировать. Результат таков:

$$E + pv = \frac{\text{const}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Константу в этом выражении найдем, положив $u=0$, что позволяет переписать его в виде

$$E + pv = \frac{E_0 + p_0 v_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (69.10)$$

или, привлекая (69.9), находим искомое правило преобразования энергии в окончательном виде:

$$E = \frac{E_0 + p_0 v_0 u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (69.11)$$

Заметим, что этот результат — применение предыдущего уравнения (35.7) к частному случаю, когда натяжения сводятся просто к гидростатическому давлению.

в) *Работа*. Подсчитаем работу по изменению внутреннего состояния системы при том условии, что *скорость ее и остается постоянной*. Учтем, однако, то нетривиальное обстоятельство, что в релятивистской механике импульс системы может изменяться даже при постоянной скорости, если изменяется энергия системы, а следовательно, должна существовать внешняя сила, которая производит работу и поддерживает постоянной скорость. Работу dA по изменению внутреннего состояния при постоянной скорости можно выразить так:

$$dA = p dv - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{G}, \quad (69.12)$$

где в первом члене учитывается работа, совершаемая против сил давления, во втором — работа, выполняемая внешней силой. Подставляя в последнюю формулу выражение (69.6) и используя условие постоянства скорости, получаем

$$dA = p dv - \frac{u^2}{c^2} d(E + pv). \quad (69.13)$$

Привлекая соотношения (69.1), (69.3) и (69.10), преобразуем это выражение к виду

$$dA = \sqrt{1 - u^2/c^2} p_0 dv_0 - \frac{u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} d(E_0 + p_0 v_0),$$

или

$$dA = \sqrt{1 - u^2/c^2} dA_0 - \frac{u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} d(E_0 + p_0 v_0). \quad (69.14)$$

Итак, получено выражение для работы dA через величины, измеряемые в собственных координатах.

г) *Теплота*. Все величины, правила преобразования которых были рассмотрены, связаны с механикой, и нам не надо было вводить никаких новых принципов, помимо тех, которые уже были в механике. Выясним теперь, как преобразуется первая из величин немеханического происхождения — теплота. Правила преобразования для нее мы получим, если потребуем, чтобы выражение первого закона термодинамики (68.1) было бы справедливо как в выбранной системе координат S , так и в собственных координатах S^0 . Согласно (68.1) напомним для малого элемента поглощенной теплоты

$$dQ = dE + dA. \quad (69.15)$$

Подставим сюда выражения dE и dA , найденные по формулам (69.11) и (69.14) с учетом того, что внутреннее состояние системы изменяется, а скорость ее остается постоянной. В результате получаем

$$dQ = \frac{dE_0 + d(p_0 v_0) u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \sqrt{1 - u^2/c^2} dA_0 - \frac{dE_0 + d(p_0 v_0) u^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2} c^2},$$

или

$$dQ = \sqrt{1 - u^2/c^2} (dE_0 + dA_0).$$

Однако, так как первый закон термодинамики безусловно справедлив в собственных координатах, положим

$$dQ_0 = dE_0 + dA_0. \quad (69.16)$$

Сравнение последних двух формул однозначно приводит нас к правилу преобразования для теплоты в виде

$$dQ = \sqrt{1 - u^2/c^2} dQ_0, \quad (69.17)$$

или

$$Q = \sqrt{1 - u^2/c^2} Q_0.$$

Найденное преобразование позволяет утверждать, что первый закон термодинамики справедлив в любой данной системе координат S , если он справедлив в собственных координатах S^0 . Это согласуется с аргументацией, приведенной в § 68 при установлении основных принципов. Преобразование (69.17) находится также в полном соответствии с уравнением (54.18), полученным при рассмотрении эффекта Джоуля.

д) *Энтропия*. До сих пор мы накладывали чисто механическое условие: рассматриваемая система должна была либо покоиться, либо находиться в состоянии равномерного движения. Для получения правила преобразования энтропии потребуем, чтобы, кроме этого, энтропия системы не изменялась при обратимом адиабатическом изменении скорости, происходящем без поглощения теплоты. Это требование, очевидно, не противоречит нашему общему пониманию обратимых процессов и смыслу понятия энтропии.

Рассмотрим покоящуюся термодинамическую систему, внутреннее состояние которой описывается энтропией S_0 . Пусть эта система затем ускоряется до скорости u обратимым и адиабатическим образом без изменения внутреннего состояния системы, т. е. при постоянном значении как собственной энтропии S_0 , так и ее значения S относительно той системы координат, которая сейчас используется. Тогда мы сразу приходим к простому закону преобразования для энтропии:

$$S = S_0. \quad (69.18)$$

В качестве дополнительного довода отметим, что этот результат согласуется с механико-статистической интерпретацией энтропии, использующей понятие вероятности. Действительно, вероятность нахождения системы в данном состоянии, очевидно, не может зависеть от скорости наблюдателя относительно этой системы.

е) *Температура*. И наконец, второй закон термодинамики (68.2) и правила преобразования теплоты и энтропии, выведенные выше, позволяют найти закон преобразования температуры путем следующих несложных выкладок. Согласно второму закону имеем

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T}.$$

Подставляя сюда уравнения (69.17) и (69.18), получаем

$$\Delta S_0 \geq \int \frac{\sqrt{1-u^2/c^2} dQ_0}{T}.$$

С другой стороны, в собственных координатах второй закон должен сохранять простой классический вид:

$$\Delta S_0 \geq \int \frac{dQ_0}{T_0},$$

так что можно сразу написать правило преобразования температуры в виде

$$T = \sqrt{1-u^2/c^2} T_0. \quad (69.19)$$

Таким образом, преобразования всех трех немеханических величин Q , S и T выбраны так, что справедливость законов термодинамики в избранной системе координат S эквивалентна их справедливости в собственных координатах S^0 . Именно такое оправдание выбора фундаментальных законов выдвигалось в § 68.

В заключение для удобства соберем вместе полученные правила преобразования термодинамических величин

$$\begin{aligned} v &= v_0 \sqrt{1-u^2/c^2}, \quad p = p_0, \quad E = \frac{E_0 + p_0 v_0 u^2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ dA &= \sqrt{1-u^2/c^2} dA_0 - \frac{u^2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} d(E_0 + p_0 v_0), \quad (69.20) \\ dQ &= \sqrt{1-u^2/c^2} dQ_0, \quad S = S_0, \quad T = \sqrt{1-u^2/c^2} T_0. \end{aligned}$$

Добавление редактора. Закон преобразования температуры при переходе в движущуюся систему координат не может быть на самом деле получен однозначно (Ott*). Приведенное в книге преобразование (69.19)

$$T = T_0 \sqrt{1-\beta^2} \equiv \frac{1}{\gamma} T_0$$

было введено Планком и Эйнштейном. Неоднозначность связана с произволом в определении количества тепла. Передача энергии от одной системы к другой связана с изменением импульса и массы. При этом возникают по крайней мере две возможности определения переданного тепла. В планковской формулировке количество тепла определяется как количество энергии за вычетом работы $-c\beta dp$ (p — импульс). В системе покоя по определению $dE_0 = dQ_0$ (при постоянном объеме). В движущейся системе координат

$$dE = \gamma dQ_0, \quad dp = \frac{1}{c} \gamma \beta dQ_0,$$

где dQ_0 — количество теплоты в системе покоя. Тогда

$$dQ_p = dE - c\beta dp = \gamma(1-\beta^2) dQ_0 = \frac{1}{\gamma} dQ_0.$$

*) Н. Ott, Z. f. Phys. 175, 70 (1963).

С другой стороны, если за dQ принять полную переданную энергию, то

$$dQ_v = dE = \gamma dQ_0$$

Нетрудно убедиться, что первое определение связано с процессом передачи энергии при постоянном импульсе, а второе — при постоянной скорости.

В релятивистской механике импульс и скорость системы не пропорциональны друг другу, а потому эти два определения оказываются не тождественными.

Такой произвол в определении температуры движущегося тела не приводит ни к каким трудностям, так как термодинамический процесс, по существу, рассматривается в системе покоя. Физическая задача возникает лишь тогда, когда надо описать передачу теплоты между двумя телами, движущимися с разными скоростями. Эта задача, конечно, не сводится к чистой кинематике.

В кинетической теории Гизе температура входит в формулу для распределения Больцмана — Максвелла. Для описания этого распределения в движущейся системе координат вводят 4-вектор

$$\theta_\alpha = \frac{u_\alpha}{kT_0},$$

где u_α — 4-скорость ($\gamma\beta$, γ). Скалярное произведение $p^\alpha\theta_\alpha$ (p — импульс частицы) заменяет обычную величину ϵ/kT . Здесь также по желанию можно T_0/γ обозначить через T .

Отметим, что описание равновесного распределения газа формулой Больцмана предполагает существование какого-то сосуда — стенок, ограничивающих объем газа. Вектор θ_α , по сути дела, и указывает на систему отсчета, связанную со стенками.

§ 70. Некоторые приложения

Из найденных соотношений немедленно вытекает, что термодинамические уравнения для движущихся систем отличаются от тех, которые описывают покоящиеся системы, начиная лишь с членов второго порядка по u/c . Поэтому вряд ли можно рассчитывать, что удастся легко проверить на опыте модифицированную термодинамику. Однако существуют два простых мысленных опыта, которые мы здесь изложим для иллюстрации внутренней стройности теории.

а) *Цикл Карно для системы, изменяющей скорость.* В качестве первого приложения рассмотрим простой обратимый цикл, состоящий в переносе теплоты от покоящегося резервуара к движущемуся. Этот процесс можно рассматривать как аналог цикла Карно из обычной термодинамики. На этом примере мы убедимся во внутренней непротиворечивости найденного нами правила преобразования температуры.

Рассмотрим простую систему S (паровую машину), содержащую жидкость, которую поддерживают при постоянном давлении $p = p_0$ в течение всего цикла, и два тепловых резервуара: R_1 , находящийся при температуре T_1 и покоящийся, и R_2 , находящийся при температуре T_2 и движущийся со скоростью u .

Пусть в начальном состоянии (*a*) система покоится, имея ту же самую температуру $T_a = T_1$, что и резервуар R_1 , объем v_a , и обладает запасом энергии E_a . Будем считать, что *первая часть* цикла состоит в переходе к состоянию (*b*) путем обратимого изобарического поглощения теплоты, поступающей из резервуара R_1 . Эта теплота Q_1 , передаваемая резервуаром, и совершаемая при этом работа A_1 входят, очевидно, в соотношения

$$Q_1 = E_b - E_a + p(v_b - v_a) \quad (70.1)$$

и

$$A_1 = p(v_b - v_a). \quad (70.2)$$

На *втором участке* цикла переведем систему в некоторое новое состояние (*c*). Для этого обратимым адиабатическим образом придадим системе ускорение до той же самой скорости u , что и у резервуара R_2 , поддерживая в системе неизменными внутренние условия, контролируемые локальным наблюдателем, движущимся вместе с ней. В ходе этого процесса не должно происходить никакого теплового обмена, и проделанная работа равняется

$$A_2 = E_b - E_c. \quad (70.3)$$

Сделаем предположение, что температура системы в состоянии (*c*) такая же, что и у резервуара R_2 , и предположим, что *третий участок* цикла состоит в обратимой передаче некоторого количества теплоты Q_2 , величину которого определим ниже. Работа A_3 , совершаемая системой во время этого процесса, будет складываться из работы, связанной с изменением объема при постоянном давлении, и работы, связанной с изменением количества движения при сохраняющейся скорости u . Используя уравнение (69.13), запишем поглощенную теплоту и работу, проделанную на этом участке, в виде

$$Q_2 = Q_2 \quad (70.4)$$

и

$$A_3 = p(v_d - v_c) - (u^2/c^2) \{E_d - E_c + p(v_d - v_c)\}. \quad (70.5)$$

Наконец, предположим, что переданной на этом участке теплоты как раз достаточно, чтобы система могла вернуться в свое прежнее состояние (*a*) путем обратимого замедления, при котором остаются неизменными внутренние условия, фиксируемые локальным наблюдателем. Итак, мы построили цикл так, что в конечном итоге не произошло никакой передачи теплоты, а совершаемая работа равняется

$$A_4 = E_d - E_a. \quad (70.6)$$

Так как мы цикл замкнули, можно воспользоваться законами термодинамики.

Согласно первому закону термодинамики суммарная теплота, поглощаемая системой за полный цикл, должна равняться всей проделанной работе, поскольку в конце цикла система возвращается в прежнее состояние с первоначальным запасом энергии, т. е. можно записать:

$$Q_1 + Q_2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \quad (70.7)$$

Выделяя отсюда Q_2 и подставляя значения остальных величин, приходим к результату

$$Q_2 = \{(E_d + pv_d) - (E_c + pv_c)\} \{1 - u^2/c^2\}. \quad (70.8)$$

Однако согласно соотношению (69.10) можно подставить сюда выражения

$$E_d + pv_d = \frac{E_a + pv_a}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{и} \quad E_c + pv_c = \frac{E_b + pv_b}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

поскольку цикл был построен таким образом, что внутренние параметры системы, измеряемые локальным наблюдателем, движущимся вместе с ней, остаются одинаковыми для состояний (d) и (a) и для состояний (c) и (b). Учитывая это, перепишем (70.8) в виде

$$Q_2 = \{E_a - E_b + p(v_a - v_b)\} \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

или, привлекая условие (70.1), получаем следующий результат:

$$Q_2 = -Q_1 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (70.9)$$

С другой стороны, в соответствии со вторым законом термодинамики, очевидно, справедливо соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (70.10)$$

так как полное изменение энтропии системы после окончания цикла должно равняться нулю.

Объединяя выражения (70.9) и (70.10), приходим к окончательному результату:

$$T_2 = T_1 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (70.11)$$

Для изучаемого нами процесса величина T_1 , стоящая в последнем выражении, — это температура системы S (паровой машины), когда она находится в покое, а T_2 — значение, до которого опускается температура системы, когда скорость ее достигает значения u в результате процесса, не изменяющего в системе внутренних условий, фиксируемых локальным наблюдателем, который движется вместе с этой системой. Последнее выражение полностью совпадает с правилом преобразования температуры (69.19), которое было получено несколько иным способом.

б) *Динамика теплового излучения.* В качестве второго применения метода, развитого в этой главе, рассмотрим динамику полости, испускающей черное излучение и имеющей скорость u .

В соответствии с закономерностями (65.3) и (65.4) энергия и давление такой системы выражаются следующим образом:

$$E_0 = av_0 T_0^4 \quad (70.12)$$

и

$$p_0 = \frac{1}{3} a T_0^4, \quad (70.13)$$

если они измеряются локальным наблюдателем, который движется с той же самой скоростью, что и рассматриваемая полость. Тогда, используя преобразование (69.11), перепишем выражение для энергии в координатах системы отсчета, относительно которой полость движется со скоростью u :

$$E = \frac{av_0 T_0^4 + \frac{1}{3} av_0 T_0^4 u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = E_0 \frac{1 + \frac{1}{3} u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (70.14)$$

а импульс системы, в соответствии с соотношениями (69.6) и (69.10), выразим так:

$$\mathbf{G} = \frac{av_0 T_0^4 + \frac{1}{3} av_0 T_0^4 \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{4}{3} \frac{E_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{u}{c^2}. \quad (70.15)$$

Любопытно, что эти выражения для энергии и импульса движущейся полости согласуются с выражениями, полученными Мозенгейлом [53] непосредственно из электромагнитной теории излучения, без явного использования теории относительности.

§ 71. Четырехмерный подход в термодинамике

В ходе изучения динамики механических сред оказалось возможным сформулировать законы сохранения массы, энергии и импульса на языке четырехмерной геометрии. Все они записались в виде единственного очень компактного уравнения (37.9):

$$\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\nu = 0. \quad (71.1)$$

Компоненты фигурирующего здесь тензора энергии — импульса $T^{\mu\nu}$ задаются через плотности массы, энергии, импульса и натяжений с помощью таблицы (37.8). Уравнение (71.1) можно применять совместно с первым законом термодинамики для исследования внутренних энергетических переходов в механической среде.

В настоящем параграфе будет также дана ковариантная формулировка второго закона термодинамики, которая в дальнейшем сыграет важную роль при распространении термодинамики на общую теорию относительности.

Для начала выпишем второй закон термодинамики в его прежнем виде (68.2). Затем возьмем малый элемент какой-либо конкретной термодинамической жидкости или среды в качестве системы, к которой мы будем применять этот закон. Если объем этого элемента δv , а φ — значение плотности энтропии в точке, в окрестности которой расположен этот элемент, величина энтропии элемента равна $\varphi \delta v$. Тогда, очевидно, изменение энтропии элемента, происходящее за бесконечно малое время δt , с помощью второго закона можно связать с потоком теплоты δQ , входящим в элемент за этот интервал времени, и с температурой T в рассматриваемой точке, записав

$$\frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (71.2)$$

Раскрывая левую часть этого выражения, получаем

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \delta v + \varphi \frac{d\delta v}{dt} \right) \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Подставив сюда затем явные выражения для полных производных по времени через частные производные, приходим к результату

$$\begin{aligned} & \left(u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \delta v \delta t + \\ & + \left(\varphi \frac{\partial u_x}{\partial x} + \varphi \frac{\partial u_y}{\partial y} + \varphi \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \delta v \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}. \end{aligned}$$

Здесь u_x , u_y и u_z — компоненты скорости жидкости в рассматриваемой точке. Объединяя часть членов в последнем выражении, перепишем его в более простом виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi u_z) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \delta v \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (71.3)$$

или, выражая u_x , u_y , u_z и δv через координаты x , y , z и t , приходим к следующему результату:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (71.4)$$

Для того чтобы переписать это выражение ковариантным образом, обратимся теперь к фундаментальному понятию четырехмерного пространственно-временного континуума, который

характеризуется интервалом (20.1):

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \quad (71.5)$$

записанным в пространственно-временных координатах (x^1, x^2, x^3, x^4) , где

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct. \quad (71.6)$$

Используя эти координаты, перепишем (71.4) в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\varphi \frac{dx^1}{dx^4} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\varphi \frac{dx^2}{dx^4} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\varphi \frac{dx^3}{dx^4} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^4} \right] \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q}{T}$$

и после очевидных преобразований придем к выражению

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\varphi \frac{ds}{dx^4} \frac{dx^1}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\varphi \frac{ds}{dx^4} \frac{dx^2}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\varphi \frac{ds}{dx^4} \frac{dx^3}{ds} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi \frac{ds}{dx^4} \frac{dx^4}{ds} \right) \right] \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (71.7)$$

Формула для интервала (71.5) позволяет, однако, сразу сказать, что ds/dx^4 определяет лоренцево сокращение рассматриваемого объема вещества, движущегося со скоростью u :

$$ds/dx^4 = \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (71.8)$$

Кроме того, поскольку энтропия согласно формуле (69.18) инвариантна относительно лоренцевых преобразований, можно, очевидно, записать преобразование плотности энтропии в виде

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (71.9)$$

Тогда из формул (71.8) и (71.9) следует, что

$$\varphi \frac{ds}{dx^4} = \varphi_0. \quad (71.10)$$

Кроме того, согласно правилам преобразования теплоты и температуры (69.17) и (69.19) можно положить

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (71.11)$$

где T_0 и δQ_0 — температура элемента объема и подводимое к нему тепло, измеряемые локальным наблюдателем, движущимся вместе с этим элементом.

Перепишем теперь с помощью соотношений (71.10) и (71.11) второй закон (71.7) следующим образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\varphi_0 \frac{dx^1}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\varphi_0 \frac{dx^2}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\varphi_0 \frac{dx^3}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \right) \right] \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (71.12)$$

Используя условное обозначение суммирования, представим последнюю формулу в более обобщенном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (71.13)$$

Введем теперь *вектор энтропии* S^μ через собственную плотность энтропии φ_0 и обобщенную плотность потока dx^μ/ds :

$$S^\mu = \varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (71.14)$$

Это определение позволяет придать нашему результату окончательный, очень простой вид:

$$\frac{\delta S^\mu}{\partial x^\mu} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (71.15)$$

Последние три формулы, (71.12), (71.13) и (71.15), выражают требования второго закона термодинамики в нужной нам четырехмерной форме, которая справедлива в любой пространственно-временной системе координат типа (71.6). Они представляют собой тензорные уравнения ранга нуль, записанные в прямоугольных координатах, но могут быть ценой небольших изменений переписаны в тензорной форме, справедливой и в криволинейных координатах. В таком виде они уже могут служить основой для дальнейшего обобщения термодинамики на общую теорию относительности.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ЧАСТЬ I

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**§ 72. Введение**

Можно считать, что теория относительности Эйнштейна основана на фундаментальной идее об относительности всякого движения. Согласно этой идее, мы можем обнаружить и измерить движение любого тела по отношению к другим телам, но не можем придать какой-либо смысл его абсолютному движению.

Специальная теория относительности лишь частично использует эту общую идею, так как предполагает только относительность равномерного поступательного движения в области свободного пространства, где можно пренебречь гравитационными эффектами. Это предположение приводит нас к заключению, что физические законы, описывающие явления в свободном пространстве, не должны зависеть от скорости данного наблюдателя, который производит измерения с целью найти эти законы, и, следовательно, должны иметь одну и ту же форму и содержание относительно любых декартовых осей, находящихся в состоянии относительного равномерного поступательного движения. Основанная на этом специальная теория относительности показывает, как надо записать законы физики, чтобы они выполнялись в любой системе движущихся без ускорения декартовых координат, если только можно пренебречь гравитационными эффектами. В то же время специальная теория относительности не содержит никаких гипотез, касающихся относительности любых видов движения, не обсуждает форму законов физики в случае более общих систем координат, к примеру, для пространственной системы координат, движущейся неравномерно, и никак не учитывает влияния гравитации.

Напротив, общая теория относительности, к обсуждению которой мы теперь переходим, пытается уже полностью использовать фундаментальную идею относительности всех видов движения. Во-первых, это сразу приводит к рассмотрению физических законов в любых системах пространственно-временных

координат и к заключению, что эти законы должны выражаться в форме, не зависящей от конкретного выбора пространственно-временных координат, так как в противном случае различия в форме могли бы дать критерий, позволяющий находить абсолютное движение пространственных осей, используемых при построении различных систем координат. Во-вторых, намеченная таким образом программа включает уже рассмотрение эффектов гравитационного воздействия. Это вытекает из того факта, что выражение уравнений физики *в форме*, не зависящей от системы координат, вообще говоря, не запрещает изменения их *численных значений* при переходах от одной системы координат к другой; связывая такое изменение численных значений с наблюдаемым изменением гравитационного поля, можно исключить понятие абсолютного движения и сохранить идею относительности всех видов движения. Именно это ведет к полной теории гравитационного воздействия. Следовательно, путем естественного расширения фундаментальных положений общая теория относительности приводит к удовлетворительному решению двух проблем, которые остались нетронутыми в специальной теории относительности.

Предположение, заключающееся в том, что законы физики можно выражать в форме, не зависящей от выбора системы координат, называется *принципом ковариантности*, а гипотеза, позволяющая ввести в рассмотрение гравитацию, называется *принципом эквивалентности* по причинам, которые станут ясными ниже. Мы можем теперь предпринять детальное обсуждение этих двух принципов и наиболее прямых их следствий.

§ 73. Принцип ковариантности

В соответствии с принципом ковариантности общие законы физики могут выражаться в форме, не зависящей от выбора пространственно-временных координат. В настоящем параграфе мы сначала обсудим основания для введения этой гипотезы, теоретическую и практическую природу следствий, вытекающих из нее, а также обсудим, как ею надо пользоваться. Затем мы рассмотрим два простых, но важных применения этой гипотезы: получим ковариантную формулу для пространственно-временного интервала и ковариантные выражения уравнений движения свободных частиц и световых лучей.

а) *Оправдание принципа ковариантности.* Как уже указывалось в предыдущем параграфе, наше первоначальное стремление ввести принцип ковариантности обуславливалось желанием полностью использовать идею относительности всех видов движения. Если бы общие законы физики не выражались в форме, общей для всех пространственно-временных систем координат, мы

могли бы принять различие их форм в разных системах координат как доказательство различий в абсолютном движении пространственных систем отсчета, используемых для построения пространственно-временных систем координат. Этого мы избежим, если введем принцип ковариантности, хотя, как мы увидим дальше (об этом мы уже говорили), одной инвариантной записи недостаточно для воплощения идеи относительности всех видов движения.

Хотя идея об относительности движения и послужила поводом для введения принципа ковариантности, однако имеются и более веские основания для его оправдания. Как подчеркивал Эйнштейн, законы физики следует рассматривать, как некоторую условную запись результатов экспериментальных наблюдений, которые в конце концов сводятся к анализу пространственно-временных совпадений*). Регистрация этих пространственно-временных совпадений выполняется обычно в некоторой удобной системе пространственно-временных координат. Однако реальное физическое поведение не может никоим образом зависеть от используемой системы отсчета, которая вводится экспериментатором любым произвольным способом, подсказанным ему соображениями удобства или просто его фантазией. Исходя из этой независимости физической реальности от выбора системы координат, мы приходим к убеждению, что законы физики — какими бы они ни были в действительности — могут быть выражены в форме, никак не зависящей от выбора конкретной системы координат. Этот вывод подтверждается большими успехами математиков по разработке соответствующего языка, в частности тензорного исчисления, позволяющего ковариантным образом записывать геометрические и физические соотношения. Таким образом, мы можем в любом случае расценивать принцип ковариантности как неизбежную аксиому и рассматривать его просто как (возможно, трудную, но теоретически разрешимую) задачу для математиков о нахождении формул для конкретных физических законов, которые были бы инвариантными относительно преобразований координат.

б) *Следствия принципа ковариантности.* Полное признание неизбежности принципа ковариантности непосредственно сказывается на нашей оценке теоретических следствий, которые могут из него вытекать. Если физические законы, в чем бы они ни заключались, всегда можно выразить в ковариантном виде (достаточно лишь исследователю проявить известную изобретательность), то сразу очевидно, что принятие принципа ковариантности не может наложить никаких существенных ограничений на природу физических законов. Тогда те самые доводы, что все-

*) Как и везде в этой книге, мы касаемся лишь микроскопических явлений.

ляют в нас непоколебимую уверенность в справедливости принципа ковариантности, делают в то же время этот принцип бесплодным, неспособным привести к каким-либо неизбежным следствиям. К этому заключению впервые пришел Кречман [54], и с ним согласился Эйнштейн [55].

Тем не менее, как подчеркивал Эйнштейн, явное использование принципа ковариантности все же должно иметь важное значение для наших исследований физических аксиом. При рассмотрении аксиом мы стремимся исключить случайные предположения, которые могут возникнуть из-за применения каких-либо конкретных систем координат. Из этого, однако, вытекают реально важные заключения, что мы можем принять в качестве аксиомы не те законы, которые выглядят особенно просто в какой-то особой системе координат, а те, которые просто выражаются в виде ковариантных уравнений, не зависящих от выбора системы координат. Существует еще и совсем теоретическое оправдание для таких рассуждений: даже без веры в необходимую простоту природы ясно, что любой прогресс нашего понимания всегда происходит путем последовательных приближений и начинается с использования наиболее простых выражений, а для того, чтобы избежать случайных предположений, надо формулировать теорию на ковариантном языке. Поэтому принцип ковариантности имеет на самом деле большую эвристическую ценность. Это иллюстрируется, например, тем фактом, что практически было бы совершенно невозможно принять за основную гипотезу ньютоновский закон гравитации, поскольку его выражение в ковариантной записи слишком сложно как для истолкования, так и для применений.

в) *Способ получения ковариантных выражений.* Практическое применение принципа ковариантности сильно упрощается, если для решения нашей задачи о записи фундаментальных аксиом или законов физики в ковариантном виде использовать аппарат тензорного исчисления, развитый Риччи и Леви-Чивитой. Действительно, как мы уже убедились в § 19, тензорное выражение физического закона сохраняет свой вид во всех пространственно-временных системах координат. Поэтому изложение общей теории относительности следует начать с выражения фундаментальных физических постулатов в виде тензорных уравнений. Последнее намного облегчается тем обстоятельством, что мы нашли уже тензорные формулировки многих законов специальной теории относительности.

Хотя тензорный анализ играет громадную роль в развитии общей теории относительности, было бы ошибочным предполагать, что мы должны ограничиться лишь тензорными уравнениями при исследовании основных законов физики (такого рода заблуждения приводили иногда в прошлом к печальным

результатам). Тот факт, что все тензорные уравнения с необходимостью ковариантны, не запрещает конечно, существования ковариантных уравнений, не являющихся тензорными. Действительно, часто применяемые ковариантные уравнения, связывающие тензорные плотности вместо тензоров, представляют собой особенно простой и хорошо известный пример. Другой пример — это вывод Эйнштейном уравнений релятивистской механики в ковариантной форме, содержащих псевдотензорную плотность потенциальной энергии — импульса, который оказался весьма существенным для понимания механики; мы не колеблясь используем его в нашей книге.

г) *Ковариантное выражение для интервала.* При изложении специальной теории относительности мы нашли, что законы физики удобно рассматривать с помощью четырехмерной геометрии пространства — времени, характеризуемой формулой для элементарного интервала

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (73.1)$$

где x , y , z и t — обычные пространственные и временная переменные. Ниже, изучая общую теорию относительности, мы поймем, что представление о четырехмерном пространственно-временном континууме в ней еще более необходимо, и, в соответствии с принципом ковариантности, будем нуждаться в ковариантном выражении интервала, определяющем геометрию. В качестве предварительного шага попытаемся придать ковариантный вид формуле для интервала (73.1) из специальной теории относительности.

Выражение для интервала (73.1) не является полностью ковариантным, так как оно сохраняет форму только на ограниченном классе преобразований, о которых шла речь в § 17. Этот класс включает в себя лоренцевы преобразования к новым наборам переменных x' , y' , z' , t' , которые соответствуют новым декартовым осям, движущимся с постоянной скоростью относительно старых. Но при более общих преобразованиях, соответствующих, например, переходам к ускоренным осям или даже просто к пространственным полярным координатам, эта формула не сохраняет своего вида.

Легко, однако, переписать формулу для интервала ковариантным образом, так как легко разглядеть в (73.1) записанный в «прямоугольных» координатах частный случай общего тензорного соотношения:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (73.2)$$

которое справедливо в любых координатах; следует лишь подставить надлежащие величины для компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и просуммировать по немym индексам: $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$.

Чтобы разобраться в этом детально, во-первых, заметим, что наше ковариантное выражение (73.2) действительно эквивалентно первоначальному выражению для интервала (73.1), если компоненты метрического тензора принимают особенно простые значения:

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1, \quad g_{44}=c^2, \quad (73.3)$$

$$g_{\mu\nu}=0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Во-вторых, покажем, что при любом произвольном переходе к новым координатам вид формулы (73.2) остается неизменным.

Чтобы доказать последнее, рассмотрим произвольный переход к некоторому набору обобщенных (криволинейных) координат x^1, x^2, x^3, x^4 , связанных с первоначальными (прямоугольными) координатами x, y, z, t каким-либо способом:

$$x^\mu = x^\mu(x, y, z, t), \quad (73.4)$$

который не нарушает обязательных условий непрерывности и однозначности. Используя эту связь между двумя системами координат, дифференциалы старых переменных можно выразить через новые:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial x}{\partial x^4} dx^4, \quad (73.5)$$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial t}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial t}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial t}{\partial x^4} dx^4.$$

Возводя их в квадрат и подставляя в (73.1), получаем выражение

$$ds^2 = \left[-\left(\frac{\partial x}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x^1}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial t}{\partial x^1}\right)^2 \right] (dx^1)^2 +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \left[-\left(\frac{\partial x}{\partial x^4}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x^4}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x^4}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial t}{\partial x^4}\right)^2 \right] (dx^4)^2 +$$

$$+ 2 \left[-\frac{\partial x}{\partial x^1} \frac{\partial x}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x^1} \frac{\partial y}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x^1} \frac{\partial z}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial t}{\partial x^1} \frac{\partial t}{\partial x^2} \right] dx^1 dx^2 +$$

$$+ \dots, \quad (73.6)$$

которое, как видно, сохраняет форму (73.2), что и требовалось доказать.

Далее, форма (73.6) говорит о том, что $g_{\mu\nu}$ будет всегда симметричным по μ и ν . Также непосредственно виден тензорный характер $g_{\mu\nu}$, поскольку, в согласии с постулированной инвариантностью интервала, мы можем написать для любой пары

систем координат x'^{μ} и x^{μ} эквивалентные выражения:

$$ds^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (73.7)$$

откуда сразу следует правило преобразования $g'_{\mu\nu}$:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}, \quad (73.8)$$

которое согласуется с общим уравнением (19.10), данным как определение тензоров.

Итак, полученное для элемента интервала ковариантное тензорное выражение (73.2) позволяет вводить в специальной теории относительности не только наши обычные координаты x , y , z , t , но также использовать любой набор координат x^1 , x^2 , x^3 , x^4 , который мы только пожелаем ввести. На данном этапе мы оправдали применение этой ковариантной формулы лишь в отсутствие гравитационного воздействия, когда справедливы на самом деле положения специальной теории относительности. Тем не менее мы покажем далее с помощью принципа эквивалентности (§ 74, д), что имеется вполне реальное оправдание для использования той же самой формулы и в более общем случае, когда существует гравитационное воздействие и когда не удается найти систему координат, позволяющую выразить формулу интервала для всего пространства — времени в целом в первоначальном простом виде (73.1).

д) *Ковариантное выражение для траекторий свободных частиц и световых лучей.* В качестве второго примера проведения идеи ковариантности можно рассмотреть ковариантную запись уравнений, описывающих движение свободных частиц и световых лучей. Возможность получения таких ковариантных выражений была уже показана в § 28 при обсуждении четырехмерной трактовки механики частицы в рамках специальной теории относительности. Несколько более полное рассмотрение с настоящей точки зрения будет, однако, безусловно полезным.

Согласно специальной теории относительности поведение свободной частицы подчиняется первому закону движения Ньютона, т. е. свободная частица должна двигаться по прямой линии с постоянными компонентами скорости:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z, \quad (73.9)$$

где x , y , z и t — обычные пространственные и временная переменные. Комбинируя эти выражения с формулой для пространственно-временного интервала (73.1), можно переписать их в

четырёхмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{u_x}{\sqrt{c^2 - u^2}}, & \frac{dy}{ds} &= \frac{u_y}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{u_z}{\sqrt{c^2 - u^2}}, & \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - u^2}}. \end{aligned} \quad (73.10)$$

Рассматривая этот результат, видим, что четырёхмерная скорость свободной частицы представляет собой вектор с постоянными компонентами и, следовательно, четырёхмерная траектория частицы должна быть прямой линией.

После повторного дифференцирования этих выражений по элементу интервала условия, накладываемые на четырёхмерную траекторию, переписываются в виде

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2} = 0. \quad (73.11)$$

Кроме того, эти условия можно также выразить согласно известным свойствам прямой линии единственным уравнением:

$$\delta \int ds = 0, \quad (73.12)$$

которое утверждает, что интервал вдоль траектории экстремален относительно малых вариаций, исчезающих на пределах интегрирования. Это окончательное выражение представляет собой тензорное (скалярное) уравнение, не связанное с какой-либо конкретной системой отсчета, и приводит к одинаковым результатам во всех системах координат.

Таким образом, мы не встречаем никаких трудностей при нахождении ковариантного выражения, описывающего движение свободной частицы в рамках специальной теории относительности. Более того, скоро (§ 74,д) мы убедимся с помощью принципа эквивалентности в том, что ковариантное выражение для траектории (73.12), так же как и ковариантное выражение для интервала, справедливо и при наличии гравитационных полей, когда становится невозможным найти координаты, в которых формула для интервала записывалась бы во всем пространстве в простом виде (73.1). В этом случае уравнение (73.12) является общим условием для геодезических линий, частным случаем которых является и прямая линия.

Для практического использования условия, налагаемого на геодезические линии, обычно удобно заменить его эквивалентными уравнениями:

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \{\mu\nu, \sigma\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (73.13)$$

которые легко получить из формулы (73.12) обычным способом — подстановкой в нее общей формулы для интервала (73.2). Сим-

вол, фигурирующий в (73.13) и состоящий из трех индексов, заключенных в фигурные скобки, называется символами Кристоффеля *) первого рода и определяется следующим образом:

$$\{\mu\nu, \sigma\} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (73.14)$$

Квадратными скобками будем обозначать символы Кристоффеля второго рода:

$$[\mu\nu, \sigma] \equiv \Gamma_{\mu\nu, \sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (73.15)$$

Заметим, что ни та, ни другая величина не является тензором. Из (73.13) сразу видно, что в случае «плоского» пространства — времени специальной теории относительности уравнения геодезических линий принимают простой вид (73.11), поскольку компоненты метрического тензора, соответствующие координатам x, y, z, t , постоянны, и следовательно, символы Кристоффеля равны нулю.

Далее, уравнения световых лучей будут теми же самыми, что и в случае частиц, но с дополнительным ограничением:

$$ds = 0, \quad (73.16)$$

которое уже обсуждалось в § 21. Оно отражает постоянство скорости света в свободном пространстве.

Найденные нами ковариантные выражения для интервала и уравнений движения частиц и световых лучей — типичные примеры ковариантной формулировки законов специальной теории относительности, в результате которой возникает возможность использовать любые удобные криволинейные координаты x^1, x^2, x^3, x^4 вместо обычных прямоугольных координат x, y, z, t . Ниже (в § 74, д) мы выясним с помощью принципа эквивалентности, в какой мере справедливо применение этих ковариантных выражений не только в случае «плоского» пространства — времени специальной теории относительности, но также и в случае «кривого» пространства — времени, которое удается связать с существованием постоянных гравитационных полей.

*) В переводе мы заменили обозначения автора для символов Кристоффеля в виде скобок на более привычные: $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ и $\Gamma_{\mu\nu, \sigma}$. Заметим, что через Γ обычно обозначают коэффициенты, определяющие параллельный перенос, — коэффициенты аффинной связности. Эти коэффициенты вводятся в аффинной геометрии и, вообще говоря, для своего определения не требуют знания метрического тензора $g_{\mu\nu}$. Выражение Γ через g справедливо в метрической геометрии, которая здесь и используется. (Прим. ред.)

§ 74. Принцип эквивалентности

Мы можем теперь перейти к рассмотрению принципа эквивалентности, который является вторым основным постулатом общей теории относительности и с необходимостью приводит к введению гравитационных полей и «кривого» пространства — времени. Сначала обсудим, как нам сформулировать этот принцип, ибо сделать это несколько сложнее, чем в случае принципа ковариантности.

а) *Формулировка принципа эквивалентности. Метрика и гравитация.* Принцип эквивалентности отражает существенную аналогию между результатами, которые получает наблюдатель, производящий измерения в гравитационном поле и использующий при этом равномерно движущуюся систему отсчета, и результатами другого наблюдателя, который производит измерения в отсутствие гравитационного поля, но находится в системе отсчета, движущейся ускоренно. Качественно сразу ясно, что какой-то элемент соответствия между такого рода измерениями должен существовать, так как оба наблюдателя будут обнаруживать ускорение всех своих частиц относительно своих систем отсчета.

Чтобы точно сформулировать принцип эквивалентности, сопоставим гипотетический предельный случай, когда наблюдатель движется без ускорения в однородном гравитационном поле, со случаем наблюдателя, движущегося равноускоренно в области свободного пространства, где гравитационными полями можно пренебречь. В такой постановке принцип эквивалентности соответствует утверждению, что результаты, полученные двумя наблюдателями, которые выполняют некоторые физические эксперименты, должны быть идентичными (конечно, при том условии, что ускорение наблюдателя, находящегося в свободном пространстве, относительно неускоренной системы координат, допускаемое специальной теорией относительности, равно по величине и противоположно по направлению гравитационному ускорению, которое обнаруживает другой наблюдатель).

Можно дать другое выражение принципа эквивалентности, которое часто оказывается более удобным для использования. Постулируя полную эквивалентность двух указанных наблюдателей, мы будем утверждать, что эта эквивалентность должна сохраняться, когда мы аналогичным образом изменяем их состояния движения. Так, например, если наблюдателю, находящемуся в гравитационном поле, предоставить свободно падать с естественным ускорением, характерным для этого поля, а ускорение, придаваемое наблюдателю в свободном пространстве, свести к нулю, они должны опять-таки получить идентичные результаты в любом заданном эксперименте, который каждый из них в со-

стоянии выполнить. Другими словами, для наблюдателя, свободно падающего в однородном гравитационном поле, эффекты гравитации должны исчезнуть. Следовательно, принцип эквивалентности можно еще сформулировать так: в случае однородного гравитационного поля всегда можно перейти к таким пространственно-временным координатам, что эффекты гравитации не будут сказываться.

В общем случае неоднородных полей формулировку принципа эквивалентности надо видоизменить, поскольку естественное гравитационное ускорение может быть различным в различных частях поля. Тем не менее для достаточно малых областей мы можем по-прежнему считать, что эффекты гравитации в них могут быть сведены на нет в свободно падающей системе отсчета, которая испытывает естественное ускорение, соответствующее силам тяготения, действующим в этих областях. Это, например, иллюстрируется временным и частичным исчезновением силы притяжения, которое происходит в лифте, свободно падающем на поверхность Земли. Следовательно, принцип эквивалентности мы можем в окончательном виде сформулировать так: всегда в любой интересующей нас пространственно-временной точке возможен переход к координатам, в которых эффекты гравитации исчезают в окрестности этой точки. При этом окрестность должна быть малой настолько, чтобы пространственными и временными изменениями гравитации можно было пренебречь.

Итак, допускаемая принципом эквивалентности возможность существования постоянных во времени гравитационных полей, которые не могут быть полностью исключены никаким выбором системы координат, сразу приводит к тесной связи между метрикой и гравитацией. В специальной теории относительности, как мы видели, всегда могут быть выбраны координаты x, y, z, t такие, что для всего пространства — времени формула для интервала записывается в простом виде:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (74.1)$$

где метрический тензор имеет *постоянные* значения:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (74.2)$$

Однако, согласно изложенному выше, в случае постоянных гравитационных полей уже нельзя найти координаты, для которых компоненты метрического тензора определялись бы этими величинами, за исключением окрестностей некоторых выделенных точек. Поэтому следует использовать более общую формулу для интервала:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (74.3)$$

с произвольной зависимостью компонент метрического тензора от координат:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4). \quad (74.4)$$

Обнаруженную таким образом тесную связь между метрикой и гравитацией надо, конечно, исследовать более точно, что мы и сделаем ниже. Однако, используя язык четырехмерной геометрии, мы уже сейчас можем сказать, что в отсутствие гравитационных полей пространство — время является «плоским», наличие же какого-либо постоянного гравитационного поля эквивалентно введению метрики какого-нибудь определенного «кривого» пространства.

б) *Принцип эквивалентности и относительность движения.* Теперь мы рассмотрим связь принципа эквивалентности с фундаментальной идеей относительности всех видов движения.

Первый шаг в реализации этой идеи заключался во введении принципа ковариантности, согласно которому уравнения физики могут быть выражены в форме, одинаковой для всех систем отсчета. Таким образом, исчезает возможность использовать существенные различия в формах как критерий абсолютных различий в движении. Тем не менее, как уже упоминалось, одного этого недостаточно, чтобы последовательно провести идею относительности всех видов движения, так как численные коэффициенты в разных системах могут быть различными, и это обстоятельство можно было бы использовать для получения критерия абсолютного движения. С этой точки зрения, однако, введение принципа относительности можно рассматривать как второй шаг по проведению идеи относительности всех видов движения. Действительно, с помощью этого принципа мы можем, если это требуется, интерпретировать различие в численных коэффициентах в разных системах координат как результат изменения гравитационного поля, а не изменения абсолютного движения систем отсчета.

Чтобы показать это на конкретном примере, разберем простой случай, когда два наблюдателя находятся в свободном пространстве, причем один из них находится в состоянии покоя или равномерного движения, а другой движется ускоренно. Несмотря на то, что принцип ковариантности позволяет обоим наблюдателям описывать, например, движение свободных частиц уравнениями одного и того же вида, очевидно, что они должны получать существенно различные конкретные результаты. В самом деле, с точки зрения первого наблюдателя, свободные частицы, находящиеся в непосредственной близости от него, покоятся, тогда как второй наблюдает движение этих пробных частиц из-за собственного ускорения. Это различие может показаться второму наблюдателю неким критерием абсолютного характера его уско-

рения, если он не учтет принцип эквивалентности, который дает ему законное право, приписать ускорение свободных частиц присутствию гравитационного поля.

Математически это выглядит так. Пусть покоящийся наблюдатель использует систему координат, соответствующую обычным пространственным переменным и времени x, y, z и t , и формулу для интервала

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2. \quad (74.5)$$

С другой стороны, пусть второй наблюдатель движется относительно первого с ускорением a по направлению оси x и использует координаты x', y', z' и t' , выражающиеся через нештрихованные:

$$x' = x - \frac{1}{2} at^2, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (74.6)$$

в соответствии с обычным переходом к ускоренной системе отсчета, который вполне оправдан, по крайней мере, при малых скоростях. Подставляя (74.6) в (74.5), найдем, как выглядит формула интервала для второго наблюдателя:

$$ds^2 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + (c^2 - a^2 t'^2) dt'^2 - 2at' dx' dy'. \quad (74.7)$$

Сравнивая теперь формулы (74.5) и (74.7), мы сразу замечаем их существенное различие, несмотря на тот факт, что обе формулы находятся в соответствии с общим ковариантным выражением интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

так как в одном случае метрический тензор $g_{\mu\nu}$ составлен просто из постоянных $-1, c^2, 0$, а в другом — из значительно более сложных величин. Кроме того, это различие немедленно отражается в том, что экспериментальные результаты рассматриваемых наблюдателей также различны. Таким образом, хотя оба наблюдателя могут использовать для описания движения свободных частиц одни и те же заранее известные ковариантные уравнения (73.13)

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

первый наблюдатель, используя эти уравнения, придет к обычному результату

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (74.8)$$

в то время как второй наблюдатель получит более сложный результат, который для частиц с пренебрежимо малыми скоростями

имеет вид

$$\frac{d^2 x'}{ds^2} = \frac{-a}{c^2 - a^2 t'^2}, \quad \frac{d^2 y'}{ds^2} = \frac{d^2 z'}{ds^2} = \frac{d^2 t'}{ds^2}. \quad (74.9)$$

Тем не менее, согласно принципу эквивалентности, второй наблюдатель может отнести это различие экспериментальных результатов (разные значения компонент метрического тензора) за счет гравитационного поля, а не какого-то абсолютного свойства своего состояния движения.

Итак, мы приходим к выводу, что принцип эквивалентности позволяет нам при желании интерпретировать изменения в численных значениях коэффициентов в уравнениях физики при переходах к новым системам координат как изменения гравитационного поля, а не как изменения абсолютного движения системы отсчета. Этого уже достаточно для сохранения идеи относительности любого движения. Таким образом, те изменения результатов, которые мы обычно считаем вызванными переходами от систем отсчета, находящихся в состоянии покоя, к ускоренным системам, могут быть отнесены за счет изменений гравитационного поля, которые возникают, когда система отсчета остается в покое, а остальная Вселенная ускоряется в противоположном направлении. Таким образом, как ускорение, так и скорость участвуют в картине относительности. Точно так же эффекты, сопровождающие переход от покоящейся системы к вращающейся, можно отнести только за счет относительного вращения осей системы и гравитирующих тел остальной Вселенной.

Ниже мы приведем еще примеры, подтверждающие справедливость идеи относительности всех видов движения; особенно поучительным оказывается так называемый парадокс часов (§ 79, в). Можно считать теперь, что после введения принципа эквивалентности полностью исключена сама возможность возникновения каких-либо противоречий.

в) *Обоснование принципа эквивалентности.* Хотя общая идея относительности любых движений дает нам основания принять принцип эквивалентности, можно оправдать его введение и более непосредственным образом. В отличие от принципа ковариантности, принцип эквивалентности нельзя принимать как неизбежную физическую аксиому, поскольку последний предполагает вполне определенную связь между системами координат и гравитационными полями, которая может быть или правильной, или неправильной. Следовательно, он отличается от принципа ковариантности и в том отношении, что с необходимостью должен приводить к вполне определенным физическим выводам, а окончательное подтверждение принципа эквивалентности должно вытекать из согласия этих выводов с опытами.

Простейший из этих выводов состоит в том, что гравитационное ускорение всех свободных тел, находящихся в одном и том

же гравитационном поле, должно быть одинаковым, поскольку наличие и величина этого ускорения должны зависеть лишь от выбора системы координат. Следовательно, открытие Галилея, состоящее в том, что все тела в пустоте падают с одинаковой скоростью, с большой точностью проверенное впоследствии для обычного вещества Этвешем, а для радиоактивного — Саузернсом, может рассматриваться как прямое подтверждение принципа эквивалентности*).

В дополнение к этим простым, но тем не менее очень общим и хорошо проверенным следствиям принципа эквивалентности, общая теория относительности приводит к ньютоновской теории гравитации в качестве первого (и очень точного) приближения, в чем мы убедимся в § 80. Следовательно, хорошо подтвержденные законы небесной механики также могут быть заложены в фундамент, на котором покоится общая теория относительности.

Наконец, наша уверенность в общей теории относительности получает подтверждение в трех, так называемых, решающих экспериментах (§ 83), которые позволяют отличить предсказания приближенной теории Ньютона от предсказаний более точной теории Эйнштейна. Итак, мы можем считать, что все постулаты теории выбраны весьма удачно.

Кроме чисто экспериментальных оправданий принципа эквивалентности, нам очень существенно и то, что предположение об отсутствии гравитационных эффектов для свободно падающего тела для нас интуитивно очень естественно; все, что мы получаем, таким образом, воспринимается нами как очень стройная, простая и эффективная картина. Конечно, одно только интуитивное восприятие естественности и логической простоты, ясности и эффективности, в которых мы узнаем безошибочно глубину мысли и гений Эйнштейна, не может само по себе обеспечить согласие с экспериментальными и наблюдаемыми фактами. Однако эти качества должны быть необходимыми свойствами всякого принципа, который человек хочет использовать как фундаментальный постулат в науке, и их присутствие в случае принципа эквивалентности служит существенным аргументом в его пользу.

г) *Обобщение законов специальной теории относительности с помощью принципа эквивалентности. Естественные и собственные координаты.* Согласно принципу эквивалентности мы всегда можем выбрать координаты так, чтобы эффекты гравитации исчезли в окрестности интересующей нас точки; при этом

*) Сейчас наиболее точные опыты, подтвердившие принцип эквивалентности, принадлежат Дикке и Брагинскому. Согласно этим опытам, ускорение разных тел в одном и том же гравитационном поле отличается во всяком случае не больше чем на 10^{-12} . (Прим. ред.)

размеры окрестности должны быть настолько малыми, чтобы пространственными и временными изменениями гравитации в ней можно было пренебречь. В отсутствие же гравитации можно считать, что выполняются законы специальной теории относительности. Следовательно, принцип эквивалентности можно также понимать как утверждение, что в малой окрестности какой-либо выбранной точки всегда возможен переход к координатам, в которых выражения физических законов, даваемые общей теорией относительности, сводятся к соответствующим выражениям специальной теории относительности, записанным в обычных пространственных и временной переменных x , y , z , и t , иначе говоря, в так называемых галилеевых координатах, введенных в § 20:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct.$$

Такие координаты в данном случае могут быть названы *естественными координатами* для заданной точки. В этих координатах, в соответствии с формулами для интервала в специальной теории относительности, компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в выбранной точке определяются просто числами -1 , $+1$ и 0 , и первые производные от $g_{\mu\nu}$ по этим координатам равны в этой точке нулю. Однако вторые производные могут, вообще говоря, и отличаться от нуля, исключая простой случай плоского пространства — времени. Ниже мы убедимся, что предположение приближенной справедливости специальной теории относительности в малой окрестности какой-либо фиксированной точки пространства — времени эквивалентно приближенной замене искривленной поверхности касательной плоскостью в данной точке при геометрическом рассмотрении.

В каждой данной пространственно-временной точке можно ввести бесконечное множество различных систем естественных координат, которое может быть получено различными поворотами пространственных осей, а также лоренцевыми преобразованиями, отвечающими различным скоростям начала координат. Среди этих различных систем нас особенно часто будет интересовать такая, в которой наблюдатель с его измерительными приборами или какие-то отдельные предметы, например определенная частица вещества, покоятся, по крайней мере в данный момент, относительно пространственных осей. Такие системы могут быть названы *собственными системами координат* для наблюдателя или рассматриваемого предмета. Переход к ним, естественно, возможен всегда (см. § 18).

Таким образом, предоставленная принципом эквивалентности возможность использования естественных координат дает нам мощный способ формулирования общих законов физики. Действительно, мы можем теперь потребовать, чтобы физические

законы, будучи выраженными в естественных координатах, всегда принимали бы в заданной точке вид, заранее известный из специальной теории относительности. Это дает способ проверки пригодности различных ковариантных выражений в качестве общих физических законов, позволяющий отбрасывать те, что не согласуются с принципом эквивалентности. Этот способ, конечно, не обязательно приведет нас к однозначным результатам, поскольку возможно существование нескольких обобщений законов специальной теории относительности, обладающих требуемыми свойствами. Тем не менее во многих случаях самое простое из возможных обобщений приводит нас к разумному результату.

д) *Интервал и траектория в присутствии гравитационных полей.* При обсуждении принципа ковариантности (см. § 73, г и § 73, д) уже отмечалось, что ковариантные выражения специальной теории относительности для интервала и для траекторий свободных частиц и световых лучей применимы и в «кривом» пространстве — времени, связанном с постоянными гравитационными полями. Мы должны теперь показать, что это действительно согласуется с требованиями принципа эквивалентности.

Для того чтобы проверить это для случая интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (74.10)$$

мы прежде всего должны доказать, что всегда существует преобразование, которое обращает в нуль первые производные от компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в любой выбранной точке. Это есть не что иное, как известная из дифференциальной геометрии теорема о возможности введения «геодезических» координат. Чтобы выполнить это, перенесем начало координат в интересующую нас точку, а затем перейдем от нештрихованных координат к штрихованным при помощи подстановки

$$x^\alpha = g_{\mu}^{\alpha} x'^{\mu} - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha})_0 g_{\mu}^{\alpha} g_{\nu}^{\beta} x'^{\mu} x'^{\nu}, \quad (74.11)$$

где $(\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha})_0$ — символы Кристоффеля первого рода, заданные в начале координат. Теперь легко убедиться, что в начальной точке новой системы координат выполняется соотношение *)

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}} = 0. \quad (74.12)$$

Обеспечив требуемое постоянство метрического тензора в начале координат, дальнейшее преобразование к координатам, в которых компоненты $g_{\mu\nu}$ в данной точке — это либо ± 1 , c^2 , 0, либо ± 1 , 0, можно произвести аналогичным способом. Следова-

*) См., например, монографию Эддингтона [56], гл. III, § 36.

тельно, выбор ковариантного выражения (74.10) в качестве выражения для интервала в общей теории относительности как при наличии, так и в отсутствие гравитационных полей согласуется с требованиями принципа эквивалентности.

Перейдем теперь к рассмотрению ковариантного выражения

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (74.13)$$

описывающего в специальной теории относительности траектории свободных частиц или световые лучи (73.13). Сразу видно, что опять-таки это выражение удобно принять как постулат, справедливый в общей теории относительности в присутствии гравитационных полей. Действительно, в естественных координатах символы Кристоффеля в (73.13) в выбранной нами точке обращаются в нуль согласно (74.12), и общая формула (74.13) сведется к выражению (73.11) из специальной теории относительности:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = 0. \quad (74.14)$$

Далее, дополнительное ограничение

$$ds=0, \quad (74.15)$$

накладываемое в специальной теории относительности при рассмотрении световых лучей, может быть, очевидно, приближенно принято как общее условие и при наличии гравитационных полей, а потому уравнения для геодезических линий (74.13) можно перенести и на случай движения частиц или световых лучей в гравитационном поле. Это является значительным шагом вперед в построении полной теории гравитации, который должен быть, конечно, оправдан со временем данными астрономических наблюдений.

Фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ встречается как в формуле для интервала (74.10), так и в формуле для траектории (73.13). В формуле для интервала он появляется в виде набора метрических величин, которые определяют природу геометрии пространства — времени, связывая величины различных интервалов с соответствующими разностями координат. В уравнениях движения первые производные $g_{\mu\nu}$ по координатам появляются в символах Кристоффеля первого рода в определенной аналогии с производными ньютоновского гравитационного потенциала в прежних уравнениях движения. Отсюда следует двойственный характер фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$, ибо десять входящих в него независимых величин можно рассматривать либо как компоненты *метрического тензора*, либо как *гравитационные потенциалы* в теории тяготения Эйнштейна. Зависимость геомет-

рии пространства — времени, а следовательно, и свойств самого пространства от гравитации, возникающая из-за дуальности фундаментального тензора, — замечательный вывод общей теории относительности.

Несколько абстрактный характер формулы интервала (74.10) не должен затемнить ее прямую связь с наблюдаемыми свойствами материи. Любой интервал, выраженный формулой (74.10), будет либо пространственноподобным, либо времениподобным, либо сингулярным в зависимости от того, отрицательна, положительна или равна нулю величина ds^2 . Переходя к надлежащим образом выбранным собственным координатам x, y, z, t , выражение для любого пространственноподобного интервала можно привести к виду

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (74.16)$$

а выражение для любого времениподобного интервала — к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2.$$

Это позволяет определить *собственные длины* прямо по метрическим отметкам, а *собственное время* отсчитывать по часам. Точно так же уравнения движения (74.13) имеют непосредственное отношение к экспериментальной ситуации, поскольку времениподобный интервал ds является собственным временем для локального наблюдателя, движущегося с данной частицей, и скорость изменения координат этой частицы с изменением ds может быть найдена путем непосредственных измерений.

§ 75. Зависимость гравитационного поля и метрики от распределения материи и энергии. Принцип Маха

В дополнение к принципам ковариантности и эквивалентности мы должны, очевидно, ввести в теорию гравитации некоторые дополнительные элементы. В самом деле, с помощью уже введенных двух принципов мы научились интерпретировать фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ в метрическом смысле — им определяется геометрия пространства — времени — и в его гравитационном аспекте — им определяется движение частиц и световых лучей. Однако мы не касались пока действительной зависимости величин $g_{\mu\nu}$ от координат, если не считать весьма общего утверждения, что пространство — время является «плоским» в отсутствие внутреннего гравитационного воздействия и «кривым» при наличии постоянных гравитационных полей. Следовательно, мы должны теперь ввести третий принцип релятивистской теории гравитации, а именно: точную формулировку закона, отражающего зависимость метрического и гравитационного полей от состояния

пространства — времени, знание которой позволит вычислять гравитационные эффекты при заданных распределениях материи и энергии.

Согласно ньютоновской теории тяготения действие гравитации в какой-либо точке пространства в данный момент определяется расположением окружающей материи, и эта общая идея, соответствующим образом модифицированная, должна быть включена в релятивистскую теорию гравитации, поскольку ньютоновская теория в любом случае оказывается чрезвычайно точным первым приближением. В теории Ньютона зависимость гравитационного потенциала ψ от распределения плотности вещества ρ дается уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 4\pi k \rho, \quad (75.1)$$

где k — гравитационная постоянная. В релятивистской теории гравитации его следует модифицировать: во-первых, из-за необходимости вычислять десять компонент метрического тензора (или гравитационных потенциалов) $g_{\mu\nu}$ вместо единственного гравитационного потенциала ψ в ньютоновской теории; во-вторых, специальная теория относительности дает нам соотношение между массой, энергией и импульсом, показывающее, что ковариантные выражения должны определяться всеми десятью компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$, а не какой-нибудь единственной выделенной величиной, которую можно назвать плотностью материи.

Наша главная цель, следовательно, состоит в том, чтобы получить аналог уравнения Пуассона — ковариантное уравнение, связывающее $g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ и приводящее в первом приближении к результатам ньютоновской теории. Однако, прежде чем приступить к полному разрешению этой задачи, целесообразно рассмотреть два специальных случая: случай, когда поля соответствуют специальной теории относительности, и случай полей в пустоте вблизи гравитирующих тел.

Общая гипотеза, что метрическое поле определяется распределением материи и энергии, может быть названа принципом Маха *).

*) Принципом Маха эту гипотезу назвал Эйнштейн [55], поскольку считал ее обобщением взглядов Маха, который полагал, что инерция должна быть следствием взаимодействия тел. В то время Эйнштейн думал, что принцип Маха необходим для введения Λ -члена в уравнения поля. Впоследствии, однако, выяснилось, что без этого члена можно обойтись.

Взгляды Маха, по-видимому, не выдержали экспериментальных проверок. Сейчас нет ни малейших указаний на какую-либо связь между распределением масс во Вселенной и массой какого-либо тела или частицы. (*Прим. ред.*)

§ 76. Поля, соответствующие специальной теории относительности. Тензор Римана — Кристоффеля

Специальную теорию относительности можно рассматривать как теорию, развитую в предположении о «плоском» пространстве — времени и в пренебрежении внутренними гравитационными полями; ее выводы, следовательно, будут приближенно справедливыми для так называемого *свободного* пространства на больших расстояниях от гравитирующих тел. Обратимся теперь к ковариантным условиям, приводящим к «плоскому» пространству — времени специальной теории относительности.

Начнем с того, что введем тензор Римана — Кристоффеля с помощью символов Кристоффеля первого рода

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma_{\mu\sigma}^{\tau} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}. \quad (76.1)$$

В тензорном характере этого выражения легко убедиться. Далее, из определения символов Кристоффеля первого рода (73.14) видно, что $R_{\mu\nu\sigma}^{\tau}$ составлен лишь из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его первых и вторых производных по координатам. Более того, можно показать, что все тензоры, которые можно построить из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ без обращения к производным выше второго порядка, являются функциями $g_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu\sigma}^{\tau}$.

Условие того, что пространство — «плоское», может быть получено приравниванием нулю тензора Римана — Кристоффеля, что приводит нас к ковариантному уравнению

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = 0. \quad (76.2)$$

Это уравнение, очевидно, является *необходимым* условием, так как мы знаем, что в случае «плоского» пространства — времени всегда можно выбрать координаты, в которых компоненты $g_{\mu\nu}$ будут постоянными; следовательно, обратятся в нуль все величины в тензоре Кристоффеля. Можно также доказать, что равенство нулю тензора Римана — Кристоффеля есть *достаточное* условие для возможности выбора координат, в которых все компоненты $g_{\mu\nu}$ постоянны (впервые было показано Липшицем [57]).

Тензорное уравнение (76.2) выражает, таким образом, условия, необходимые для применимости специальной теории относительности и для отсутствия постоянных гравитационных полей, которые не могут быть исключены путем специального выбора системы координат. В действительности найдено, что плотность материи во Вселенной приближенно однородна (для расстояний

по крайней мере 10^8 световых лет), насколько это удалось установить в 100-дюймовый телескоп обсерватории Маунт Вильсон *).

Таким образом, нет никаких оснований считать, что имеется какая-либо область во Вселенной, в которой можно было бы преобразованием координат полностью избавиться от действия гравитационного поля. В самом деле, даже присутствие физической измерительной аппаратуры создает неисчезающее гравитационное поле. Другими словами, то, что мы называли до сих пор *свободным* пространством, в котором должна строго выполняться специальная теория относительности, в действительности в реальной Вселенной не существует и является лишь идеализацией. Тем не менее ясно, что законы специальной теории относительности приближенно верны в постоянном гравитационном поле на поверхности Земли и выполняются с очень высокой степенью точности в межгалактическом пространстве. Поэтому нам кажется вполне оправданным использование специальной теории относительности как абстрактной идеализации.

§ 77. Гравитационные поля в пустоте. Свернутый тензор Римана — Кристоффеля

Поскольку условие равенства нулю тензора Римана — Кристоффеля исключает присутствие постоянных гравитационных полей, мы должны, очевидно, изыскать более слабые ограничения на гравитационное поле в пустом пространстве в соседстве с гравитирующими телами.

Можно получить это условие, свернув тензор Римана — Кристоффеля, полагая $\sigma = \tau$ в (76.1) и суммируя по τ . Это дает нам тензор

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad (77.1)$$

который с помощью уравнения (37) из Приложения III, перестановки слагаемых и порядка суммирования по немym индексам может быть записан проще:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \ln \sqrt{-g} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \sqrt{-g}. \quad (77.2)$$

В качестве полевых уравнений в пустом пространстве, но вблизи от гравитирующих масс, Эйнштейн предложил соотношение

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (77.3)$$

*) Расширение возможностей наблюдений не опровергает эту гипотезу и для расстояний до 10^{10} световых лет. (Прим. ред.)

Оно, очевидно, справедливо, если удовлетворяется условие «плоского» пространства — времени (76.2), но может выполняться и при менее строгих ограничениях.

Теоретическая оправданность выбора этого уравнения станет ясной из следующего параграфа, где мы получим его как предельный случай более общего выражения — уравнения для гравитационного поля при наличии материи; мы имеем также точное эмпирическое подтверждение справедливости уравнения (77.3) — данные по движению планет (см. § 83).

§ 78. Гравитационные поля при наличии материи и энергии

Займемся теперь разрешением фундаментальной проблемы, поставленной в § 75, а именно, получим ковариантное соотношение, связывающее гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$ и компоненты тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Такое соотношение можно расценивать как соответствующий релятивистский аналог уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 4\pi k\rho, \quad (78.1)$$

которое связывает в ньютоновской теории тяготения единственный гравитационный потенциал ψ с плотностью материи ρ и гравитационной постоянной k .

При решении этой фундаментальной проблемы у Эйнштейна имелось несколько наводящих соображений. Во-первых, согласно предварительной постановке проблемы (§ 75) можно ожидать, что релятивистский аналог уравнения Пуассона будет соотношением, связывающим все десять гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ с распределением материи и энергии, которое описывается десятью компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Во-вторых, в соответствии с принципом ковариантности желательно выразить это соотношение в ковариантной форме, т. е. надо будет построить такой тензор второго ранга из $g_{\mu\nu}$ и его производных по координатам, что его можно будет затем приравнять тензору энергии — импульса. В-третьих, поскольку в уравнении Пуассона нет производных от ньютоновского потенциала выше второй, естественно предположить, что (хотя бы в первом приближении) искомым тензор также не будет содержать производных от $g_{\mu\nu}$ выше второй. И наконец, из принципа эквивалентности следует, что тензор энергии — импульса является величиной, дивергенция которой может быть сведена к нулю в любой заданной точке путем выбора естественной системы координат, так как в специальной теории относительности в галилеевых координатах

справедливо соотношение (37.9):

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (78.2)$$

полученное нами при рассмотрении в § 37 механики сплошных сред.

Эти соображения оказались для Эйнштейна достаточными, чтобы написать в качестве релятивистского аналога уравнения Пуассона соотношение

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (78.3)$$

Здесь $R_{\mu\nu}$ — свернутый тензор Римана — Кристоффеля; R — инвариант, полученный дальнейшим свертыванием этого тензора; Λ — так называемая космологическая постоянная, смысл которой обнаружится ниже; κ — константа, связанная с обычной постоянной гравитации некоторым множителем (что будет показано в § 80, где уравнение Пуассона будет получено из (78.3) в качестве первого приближения), и $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса, который определяют в общей теории относительности, придавая его компонентам в собственных координатах (а следовательно, и в любой системе естественных координат) значения, которые были бы в согласии со специальной теорией относительности.

Соотношение (78.3) вполне удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Оно приводит в случае слабых гравитационных полей к уравнению Пуассона в качестве первого приближения, как будет показано в § 80. Оно связывает десять гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и их производные с компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Это уравнение удовлетворяет принципу релятивистской ковариантности, так как записано в тензорном виде, а потому справедливо во всех системах координат, если справедливо в одной. Оно не содержит также производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка.

Кроме того, следует отметить, что введенное соотношение обеспечивает справедливость условия (78.2), записанного в естественных координатах самым общим образом. Действительно, легко показать, пользуясь определением тензора Римана — Кристоффеля, что соотношение

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \right)_\nu = 0 \quad (78.4)$$

является тождественным при любом значении постоянной Λ . Последнее же приводит к тому, что в качестве фундаментального уравнения механики, справедливого в любой системе координат,

мы имеем

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} = 0 \quad (78.5)$$

или в специальном случае естественных координат, когда символы Кристоффеля исчезают, получаем

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (78.6)$$

В связи с этими уравнениями надо подчеркнуть два следующих обстоятельства. Во-первых, что можно показать, что

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}$$

с произвольной постоянной Λ есть наиболее общий тензор второго ранга, построенный лишь из $g_{\mu\nu}$ и его производных первого и второго порядка, свернутая ковариантная производная которого (78.4) должна тождественно равняться нулю. Во-вторых, что эти четыре тождественных соотношения должны выполняться, иначе решение десяти уравнений поля (78.3) для десяти компонент $g_{\mu\nu}$ не будет допускать четырехмерных преобразований координат — условие, которое нельзя нарушать.

Мы видим, что есть силы, которые заставляют нас принять, по крайней мере условно, уравнения Эйнштейна (78.3) в качестве уравнения поля релятивистской теории гравитации. Полное оправдание введения этих соотношений, естественно, зависит от соответствия их предсказаний результатам наблюдений. Чтобы решить этот вопрос, можно было бы сделать следующее: воспользоваться полевыми уравнениями (78.3) с какими-либо заданными распределениями материи и энергии для предсказания зависимости тензора $g_{\mu\nu}$ от используемых координат, а затем сравнить результаты этого предсказания с наблюдаемыми величинами $g_{\mu\nu}$. Теоретически наблюдаемые величины $g_{\mu\nu}$ могут быть, конечно, получены прямыми измерениями пространственноподобных и времениподобных интервалов и последующим применением формулы $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Практически, однако, такие прямые измерения не могут быть выполнены с точностью, достаточной хотя бы для того, чтобы различить «плоское» и «кривое» пространство. Источник наших точных знаний $g_{\mu\nu}$ — наблюдения за движениями астрономических тел с последующим извлечением $g_{\mu\nu}$ из выражения для траекторий

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (78.7)$$

Поднимая индексы, можно переписать полевые уравнения (78.3) в различных формах:

$$-\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (78.8)$$

$$-\kappa T_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu}^{\nu} + \Lambda g_{\mu}^{\nu}, \quad (78.9)$$

$$-\kappa T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}; \quad (78.10)$$

свертывая (78.9), мы, очевидно, получаем

$$\kappa T = R - 4\Lambda. \quad (78.11)$$

В пустом пространстве, когда равны нулю все компоненты тензора энергии—импульса, легко найти, используя (78.8) и (78.11), что полевые уравнения приобретают простой вид:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (78.12)$$

Однако (как уже отмечалось в предыдущем § 77) в пустом пространстве движение планет описывается в действительности с громадной точностью более простыми уравнениями:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (78.13)$$

Следовательно, если использовать то, что (см., например, уравнение (82.10)) эффекты от Λ -члена возрастают с увеличением размеров рассматриваемой области, можно заключить, что теоретическая константа Λ (введенная выше лишь с целью получить наиболее общее выражение тензора второго ранга с исчезающей ковариантной производной (78.4)) либо действительно равна нулю, либо в любом случае настолько мала, что эффекты от нее пренебрежимы в области с размерами порядка Солнечной системы. Таким образом, во многих наших расчетах мы вполне оправданно можем считать, что $\Lambda = 0$, и записывать уравнения поля в более простом виде:

$$-\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (78.14)$$

и

$$\kappa T = R, \quad (78.15)$$

причем последнее уравнение есть результат свертки предыдущего.

С другой стороны, можно показать, что для больших областей эффекты должны возникать даже от очень малых величин Λ . Следовательно, имея в виду космологические задачи, мы все же не будем отвергать возможность того, что Λ , называемая обычно *космологической постоянной*, отлична от нуля.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы рассматривать ряд простых применений общей теории относительности, причем часть из них будет особенно важной для иллюстрации соответствия между теоретическими выводами и данными наблюдений.

ЧАСТЬ II
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 79. Простейшие следствия принципа эквивалентности

Мы уже отмечали, что, в отличие от принципа ковариантности, принцип эквивалентности нельзя считать неизбежной физической аксиомой. Напротив, его надо считать постулатом, следствия которого надо проверить наблюдениями и опытами. Рассмотрим некоторые простые качественные и полуколичественные следствия, вытекающие непосредственно из этого принципа, без обращения к полному аппарату общей теории относительности.

а) *Пропорциональность веса и массы.* Важнейшее из таких следствий принципа эквивалентности, уже упомянутое в § 74, в, состоит в том, что гравитационное ускорение всех тел, находящихся в одном и том же гравитационном поле, должно быть одинаковым, поскольку наличие ускорения и его величина зависят, согласно этому принципу, лишь от выбора системы координат. Этот вывод находится в прямом соответствии с фундаментальным открытием Галилея: различные тела падают в гравитационном поле Земли с одинаковыми ускорениями.

Поскольку гравитационное ускорение тела g у поверхности Земли связывается с помощью ньютоновского второго закона движения с его массой m и с гравитационной силой, действующей на это тело, т. е. с весом, при помощи уравнения

$$W = mg, \quad (79.1)$$

предыдущий вывод эквивалентен утверждению, что должна существовать постоянная пропорциональность между массами и весами различных тел. Прецизионная и исчерпывающая проверка этой пропорциональности была сделана для обычного вещества Этвешем [58], подобный же эксперимент с радиоактивными веществами был выполнен Саузерном [59]. Результаты обоих экспериментов находятся в полном согласии с теоретическими предсказаниями.

б) *Воздействие гравитации на ход часов.* Согласно принципу эквивалентности имеется соответствие между результатами, получаемыми равномерно ускоренным наблюдателем, проделывающим измерения вне гравитационных полей, и результатами,

которые получает покоящийся наблюдатель, проводящий те же эксперименты в однородном гравитационном поле. Поскольку нетрудно приближенно вычислить результаты, которые получает ускоренный наблюдатель, то мы имеем простой метод исследования некоторых эффектов гравитации.

Таким путем можно, например, найти разность скоростей хода часов, помещаемых в точках с различными значениями гравитационного потенциала. Представим себе наблюдателя, находящегося вне каких-либо внутренних гравитационных полей, который движется с постоянным ускорением g и снабжен двумя одинаково устроенными часами, размещенными друг от друга на расстоянии h вдоль линии, параллельной направлению ускорения. Допустим, что часы характеризуются естественным периодом τ_0 , и пусть световой сигнал посылается в конце каждого периода от одних часов к другим, что позволяет сравнивать их скорости хода.

Так как время, необходимое сигналу для того, чтобы пройти расстояние между часами, приближенно равно

$$t = h/c$$

(где c — скорость света), часы, расположенные впереди, будут приобретать дополнительную скорость в направлении движения, равную

$$v = gt = g(h/c)$$

к моменту времени, когда их достигнет свет, испущенный у задних часов. При сравнении скорости хода часов обнаружится, что из-за обычного эффекта Допплера период задних часов, измеренный с помощью световых сигналов, приближенно выражается в единицах периода передних часов как

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \tau \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right). \quad (79.2)$$

Согласно принципу эквивалентности этот результат можно интерпретировать как описывающий аналогичную ситуацию, когда эти же часы, разделенные расстоянием h , покоятся в однородном гравитационном поле g . Тогда из (79.2) немедленно следует соотношение

$$\tau_2 = \tau_1 \left(1 + \frac{\Delta\psi}{c^2}\right), \quad (79.3)$$

связывающее периоды τ_2 и τ_1 двух одинаково устроенных часов, если разность значений гравитационного потенциала между точками их нахождения равна $\Delta\psi = gh$. При этом часы, находящиеся в меньшем гравитационном потенциале, имеют больший период.

Далее, так как временные измерения можно производить, посылая свет с частотой, соответствующей какой-либо данной спектральной линии, то различные атомы одного и того же вещества могут играть роль одинаково устроенных часов — качество, необходимое для справедливости найденного соотношения. Следовательно, используя (79.3) вместе с соотношением между периодом и длиной волны света, мы сразу приходим к заключению, что должен наблюдаться сдвиг $\delta\lambda$, приближенно равный

$$\delta\lambda = \lambda \frac{\Delta\psi}{c^2}, \quad (79.4)$$

если первоначальная длина волны света равняется λ и он проходит разность гравитационных потенциалов $\Delta\psi$ при распространении из начала координат в точку наблюдения. Экспериментальная проверка этого эффекта будет рассмотрена более подробно в § 83, в связи с тремя так называемыми «решающими опытами» в теории относительности.

в) *Парадокс часов*. Предыдущего соотношения между скоростью хода часов и гравитационным потенциалом уже достаточно для разрешения известного парадокса часов. Последний возникает, когда поведение часов рассматривают в свете принципов специальной теории относительности, не принимая в расчет положений общей теории относительности.

Рассмотрим двое одинаково устроенных часов A и B , первоначально находящихся вместе и в покое. Затем мгновенно разгоним с помощью силы F_1 часы B до скорости u , с которой они начнут равномерно удаляться от часов A . При этом примем, что время, в течение которого они свободно движутся, много больше того, которое было необходимо для их ускорения. По истечении этого времени приложим к этим часам вторую силу F_2 , по направлению обратную первой, которая приведет их в состояние покоя, а затем заставит часы B двигаться по направлению к A со скоростью $-u$. И наконец, когда часы опять окажутся вблизи A , мгновенным воздействием третьей силы F_3 возвратим их в прежнее состояние покоя.

Так как по предположению временные интервалы, необходимые для ускорения и для замедления часов B , малы по сравнению со временем равномерного движения, можно написать, в соответствии с замедлением часов в специальной теории относительности (§ 9), соотношение

$$\Delta t_A = \frac{\Delta t_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \Delta t_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right). \quad (79.5)$$

Это выражение связывает измеренные величины Δt_A и Δt_B , для обоих часов, — интервалов времени, которые часы B затрачивают

на движение от часов A и возвращение обратно. Последнее выражение позволяет сделать вывод, что часы B должны отсчитать по окончании указанного эксперимента меньшее число делений, чем часы A . Тем не менее на первый взгляд этот результат, полученный совершенно корректно в рамках специальной теории относительности, оказывается несовместным с идеей относительности всякого движения. Действительно, согласно этой идее мы должны получить тот же результат, если считать, что часы B покоятся, а часы A движутся со скоростью $-u$ и возвращаются со скоростью $+u$. Поскольку весь расчет аналогичен, то теперь A оказываются часами, которые должны отсчитать меньшее количество делений.

Этот кажущийся парадокс легко разрешается, однако, в общей теории относительности, если учесть, что рассмотренные постановки данного опыта несимметричны. Действительно, часы A в первом варианте опыта ни разу не подвергаются воздействию каких-либо сил, в то время как на часы B последовательно воздействуют силы F_1 , F_2 и F_3 , изменяющие относительное движение часов. Для правильного описания эксперимента в случае, когда часы A считаются движущимися, а B покоящимися, надо предположить, что изменения в относительном движении часов происходят за счет мгновенных включений однородных гравитационных полей, которые, действуя на часы A , вызывают нужные изменения их скорости без введения каких-либо сил, в то время как действие прежних сил на часы B должно их удерживать в покое. Таким образом, мы приходим к правильному описанию того же эксперимента на новом языке, и нам легко вычислить соотношение между двумя измерениями временных интервалов Δt_A и Δt_B .

Прежде всего введем обозначения:

$$\Delta t_A = \tau_A + \tau'_A + \tau''_A + \tau'''_A \quad (79.6)$$

и

$$\Delta t_B = \tau_B + \tau'_B + \tau''_B + \tau'''_B, \quad (79.7)$$

где τ_A и τ_B — измеренные по двум часам A и B , соответственно, временные интервалы, в течение которых часы A движутся с одинаковой скоростью u ; τ'_A , τ''_A , τ'''_A и τ'_B , τ''_B , τ'''_B — интервалы, за которые происходят три изменения скорости часов A : в начале, в середине и в конце эксперимента — из-за мгновенных включений соответствующих гравитационных полей. Будем считать, что эти интервалы малы по сравнению со временем, в течение которого A находится в состоянии равномерного движения, в соответствии с предшествующим описанием эксперимента.

Так как теперь A — движущиеся часы, мы можем согласно специальной теории относительности записать с заданной

степенью точности:

$$\tau_A = \tau_B \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right), \quad (79.8)$$

в противоположность предыдущему соотношению (79.5), где B — движущиеся часы. Кроме того, поскольку как те, так и другие часы в начале и в конце эксперимента, когда включаются поля, находятся практически при одном и том же значении гравитационного потенциала, можно, очевидно, с достаточной степенью точности записать, что

$$\tau'_A = \tau'_B \quad \text{и} \quad \tau''_A = \tau''_B. \quad (79.9)$$

С другой стороны, в гравитационном поле, действующем в середине эксперимента и обращающем движение A , часы A и B находятся уже на большом расстоянии друг от друга. Поэтому в соответствии с нашим предыдущим рассмотрением справедливо соотношение

$$\tau'_A = \tau'_B \left(1 + \frac{\Delta\psi}{c^2} \right), \quad (79.10)$$

где $\Delta\psi$ — разность значений гравитационных потенциалов для A и B , взятых в один и тот же момент времени.

Эту разность легко задать через расстояние h , разделяющее часы, и гравитационное ускорение g в виде

$$\Delta\psi = hg.$$

Кроме того, можно, очевидно, положить

$$h = \frac{1}{2} u \tau_B,$$

так как $2h$ — суммарное расстояние, которое покрывается со скоростью u , а также записать, что

$$g = \frac{2u}{\tau_B},$$

поскольку $2u$ — полное изменение скорости за время τ_B .

Используя последние три соотношения, можно выразить (79.10) в более удобном виде:

$$\tau'_A = \tau'_B + \tau_B \frac{u^2}{c^2}, \quad (79.11)$$

а комбинируя это уравнение с предыдущими (79.6) — (79.9), получаем

$$\begin{aligned} \Delta t_A &= \tau_B \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) + \tau'_B + \tau'_B + \tau_B \frac{u^2}{c^2} + \tau''_B = \\ &= \tau_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) + \tau'_B + \tau'_B + \tau''_B. \end{aligned}$$

Или в заданном приближении с учетом того, что штрихованные величины малы по сравнению с τ_B , имеем

$$\Delta t_A = \Delta t_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right). \quad (79.12)$$

Сравнивая этот результат с предыдущим (79.5), видим, что независимо от того, движутся ли часы A или часы B , мы получаем с заданной степенью точности одинаковые выражения для относительных показаний двух часов. Чтобы решить эту проблему без приближений, надо привлечь уже полный аппарат общей теории относительности.

Описанное решение известного парадокса часов, возникающего в специальной теории относительности,— особенно поучительный пример того, как оправдывается представление об относительности всех видов движения, которое возникает, если принять общую теорию относительности.

Подобное же рассуждение может быть с успехом использовано для определения разности хода двух часов, когда одни помещены в центре вращающейся платформы, а другие — на ее краю. Если считать, что платформа вращается, то часы на периферии должны идти медленнее, чем часы в центре. Если, наоборот, считать, что платформа покоится, а остальное пространство вращается в противоположном направлении, более медленный ход периферических часов мы могли бы объяснить тем, что они находятся при более низком гравитационном потенциале, в соответствии с гравитационной интерпретацией центробежных сил. Общая идея относительности всех видов движения будет, таким образом, опять-таки сохранена, так как мы с одинаковым успехом можем считать, что вращается платформа или вращается остальное пространство*).

§ 80. Ньютонова теория как первое приближение

В качестве следующего приложения общей теории относительности покажем, что ньютонову теорию тяготения можно рассматривать как первое приближение к более строгому решению задач общей теории относительности; при этом окажется, что величина g_{44} из общей теории относительности тесно связана с гравитационным потенциалом ϕ теории Ньютона.

Чтобы убедиться в этом, покажем, что, во-первых, движение свободной частицы, определяемое ньютоновыми уравнениями, согласуется в первом приближении с предсказаниями релятивистских уравнений движения; во-вторых, что уравнение Пуас-

*) Экспериментально «парадокс часов» был продемонстрирован при облете вокруг Земли. См. добавление редактора после § 83. (Прим. ред.)

сона можно считать первым приближением к более общим уравнениям Эйнштейна. Ограничимся пока рассмотрением частиц, движущихся в очень слабых статических полях со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света, ибо теория Ньютона была развита как раз для такого рода ситуаций. Тогда формула для интервала будет лишь слегка отличаться от соответствующей формулы специальной теории относительности, которая в галилеевых координатах выглядит так:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2; \quad (80.1)$$

компоненты этой формы $g_{\mu\nu}$ будут близки к значениям из специальной теории относительности:

$$g_{11} \approx g_{22} \approx g_{33} \approx -1, \quad g_{44} \approx 1, \quad g_{\mu\nu} \approx 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad (80.2)$$

и не будут зависеть от времени:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^4} = 0. \quad (80.3)$$

Кроме того, мы можем задать приближенно компоненты обобщенной скорости рассматриваемой частицы, положив

$$\frac{dx^1}{ds} \approx \frac{dx^2}{ds} \approx \frac{dx^3}{ds} \approx 0, \quad \frac{dx^4}{ds} \approx 1. \quad (80.4)$$

а) *Движение свободной частицы в слабом гравитационном поле.* Теперь легко найти характер движения свободной пробной частицы в таком слабом поле.

Из специальной теории относительности (§ 74, д) следует, что траектории свободных частиц, вообще говоря задаются уравнениями геодезических линий (74.13):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

Для нашего упрощенного случая благодаря (80.4) они сводятся при $\sigma = 1, 2, 3$ к приближенным выражениям

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d(x^4)^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0. \quad (80.5)$$

Далее, используя определение символов Кристоффеля (73.14) и приближенные величины $g_{\mu\nu}$ (80.2), можно записать:

$$\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma} \right),$$

где знаки суммирования опущены. Учитывая к тому же статическую природу полей (80.3), приходим к упрощенному

соотношению

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}, \quad (80.6)$$

подстановка которого в (80.5) позволяет найти уравнение

$$\frac{d^2 x^{\sigma}}{d(x^4)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (80.7)$$

Этот результат, однако, легко переписать в форме, близкой к ньютоновой теории тяготения, если ввести обычные пространственные и временные переменные через галилеевы координаты

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct \quad (80.8)$$

и связать ньютоновский потенциал ψ с g_{44} выражением

$$\frac{\psi}{c^2} = \frac{g_{44}}{2} = \text{const}$$

или

$$\frac{\psi}{c^2} = \frac{g_{44} - 1}{2}, \quad g_{44} = 1 + \frac{2\psi}{c^2}. \quad (80.9)$$

Аддитивная константа здесь должна быть выбрана так, чтобы потенциал ψ стремился к нулю в свободном пространстве на больших расстояниях от гравитирующих тел, где $g_{44} \approx 1$, как этого требует специальная теория относительности. Подставляя (80.8) и (80.9) в (80.7), мы можем записать этот результат в привычной ньютоновской форме:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (80.10)$$

б) *Уравнение Пуассона как приближение к уравнениям Эйнштейна.* В заключение, чтобы полностью оправдать предложенную выше интерпретацию ньютоновского потенциала ψ , мы должны также показать, что релятивистские уравнения Эйнштейна дают нам в первом приближении ту же самую зависимость ψ от распределения материи, что и уравнение Пуассона в ньютоновой теории тяготения.

Начнем с того, что если выражение для тензора энергии — импульса (37.8) из специальной теории относительности записать в координатах (x^1, x^2, x^3, x^4) , то все компоненты этого тензора в нашем случае приближенно обратятся в нуль, исключая компоненту

$$T^{44} = c^2 \rho,$$

если только мы имеем дело со слабым статическим полем и если тензор механических натяжений p_{ij} пренебрежимо мал по сравнению с плотностью энергии, как это бывает в обычных задачах.

Кроме того, вследствие особенно простого выбора значений компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (см. (80.2)), позволяющего поднимать и опускать тензорные индексы, мы в данном случае имеем

$$T^{44} = T_4^4 = T_{44} = T = c^2\rho, \quad (80.11)$$

в то время как все другие компоненты $T_{\mu\nu}$ тензора энергии — импульса равны нулю.

Далее, сопоставляя (80.11) с уравнениями (78.14) и (78.15), видим, что в нашем случае релятивистские уравнения дают простой результат:

$$-\kappa c^2\rho = R_{44} - \frac{1}{2}\kappa c^2\rho g_{44}, \quad (80.12)$$

или

$$R_{44} = -\frac{\kappa c^2\rho}{2}.$$

Рассмотрим теперь выражение (77.1) для $R_{\mu\nu}$. Учтем, что произведениями символов Кристоффеля можно пренебречь из-за слабости поля, а производные по времени равны нулю, поскольку мы рассматриваем статическое поле. Тогда можно переписать (80.12) так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma_{44}^\sigma = \frac{\kappa c^2\rho}{2}.$$

Подставляя сюда (80.6), переписываем последнее выражение в нужном виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{g_{44}}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{g_{44}}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{g_{44}}{2} \right) = \frac{\kappa c^2\rho}{2}. \quad (80.13)$$

Это уравнение уже полностью соответствует уравнению Пуассона (75.1) из ньютоновой теории тяготения, в чем легко убедиться, если снова, как и в (80.9), воспользоваться соотношением

$$\frac{\psi}{c^2} = \frac{g_{44}}{2} + \text{const}$$

и заменить κ на величину

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^4}, \quad (80.14)$$

где k — обычная гравитационная постоянная, а c — скорость света.

Итак, мы показали, что ньютонова теория — это первое приближение к более полной теории гравитации, следующей из общей теории относительности. Более того, поскольку, как можно показать, ньютонова теория является чрезвычайно точным

приближением для напряженностей полей, с которыми мы обычно сталкиваемся, можно считать, что все хорошо изученные законы небесной механики подтверждают и релятивистскую теорию гравитации.

§ 81. Единицы, используемые в релятивистских вычислениях

Соотношение (80.14) приписывает определенную величину константе κ в уравнениях Эйнштейна (78.3). Она выражается через обычную гравитационную постоянную k и скорость света c . Следовательно, из этих уравнений можно получить уже численные результаты, которые можно сравнить с результатами наблюдений. Используя величины [44]*)

$$c = 2,99796 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} \text{ и } k = 6,664 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2, \quad (81.1)$$

получаем

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^4} = 2,073 \cdot 10^{-48} \text{ сек}^2/\text{см} \cdot \text{г}. \quad (81.2)$$

Таким образом, численное значение κ зависит, во-первых, от выбора системы единиц (мы приняли систему СГС) и, во-вторых, от выбора размерности компонент тензора энергии — импульса $T^{\mu\nu}$ (которые заданы у нас в галилеевых координатах матрицей (37.8) и имеют размерность плотности энергии, а не плотности массы, как это иногда принимается).

Однако выбором новой системы единиц мы можем достичь некоторых упрощений в написании релятивистских уравнений и уничтожить всякий произвол в выборе размерности $T^{\mu\nu}$. Чтобы сделать это, можно сохранить сантиметры в качестве единицы длины, но выбрать единицы времени и массы так, чтобы скорость света в свободном пространстве c и гравитационная постоянная превратились в единицы

$$c = 1 \text{ и } k = 1. \quad (81.3)$$

При таком выборе единиц энергия и масса данной системы, в соответствии с (27.4), имеют одну и ту же численную величину:

$$E = m, \quad (81.4)$$

так что обе отмеченные выше возможности выбора размерности $T^{\mu\nu}$ ведут теперь к одинаковым численным результатам. Кроме того, постоянная κ определяется теперь просто как

$$\kappa = 8\pi, \quad (81.5)$$

*) Современные значения:
 $c = 2,99793 \cdot 10^{10} \text{ см/сек},$
 $k = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2.$

и релятивистское уравнение (78.8) может быть записано следующим образом:

$$-8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (81.6)$$

Все вычисления далее будут проводиться в этих единицах. Результаты, однако, всегда можно перевести в систему СГС с помощью следующих соотношений, связывающих длину, время и массу L , T и M в единицах СГС с их величинами l , t и m в новых единицах:

$$\begin{aligned} L &= l \text{ см}, \\ T &= \frac{t}{2,998 \cdot 10^{10}} = 3,335 \cdot 10^{-11} t \text{ сек}, \\ M &= \frac{(2,998 \cdot 10^{10})^2}{6,664 \cdot 10^{-8}} m = 1,349 \cdot 10^{28} m \text{ г}. \end{aligned} \quad (81.7)$$

§ 82. Интервал Шварцшильда

В качестве особенно важного применения общей теории относительности мы получим теперь выражение для линейного элемента (формула интервала) в пустом пространстве, окружающем гравитирующую точечную частицу. Полное решение этой проблемы было впервые получено Шварцшильдом [60] и имеет большое значение, поскольку с его помощью можно описывать гравитационное поле, окружающее Солнце, а также для вывода формул трех «решающих опытов», в которых обнаруживаются различия между предсказаниями ньютоновой теории тяготения и более точными предсказаниями общей теории относительности.

Метод решения этой проблемы хорошо известен, так что для наших целей будет достаточно лишь наметить его основные черты. Учитывая статический и сферически симметричный характер поля, окружающего гравитирующую точечную частицу, можно (§ 95) выбрать координаты r , θ , φ и t , в которых линейный элемент имеет простой вид:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2, \quad (82.1)$$

где λ и ν зависят только от r . Далее, компоненты тензора энергии — импульса T_{μ}^{ν} , соответствующие этой формуле интервала (см. ниже уравнение (95.3)), принимают значения

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right), \\ 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (82.2)$$

$$8\pi T_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu),$$

где штрихи означают дифференцирование по r , а космологическая постоянная Λ положена равной нулю.

В пустом пространстве, окружающей рассматриваемую нами частицу, все компоненты тензора энергии — импульса, очевидно, равны нулю. Комбинируя первое и третье из полученных уравнений, мы приходим к результату

$$\lambda' = -v', \quad (82.3)$$

а комбинируя первое со вторым, получаем

$$v'' + v'^2 + \frac{2v'}{r} = 0. \quad (82.4)$$

Последнее уравнение, как легко убедиться, имеет решение

$$e^v = a + \frac{b}{r}, \quad (82.5)$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Далее, следует ожидать, что на больших расстояниях от частицы, т. е. при $r \rightarrow \infty$, линейный элемент приобретает вид, соответствующий специальной теории относительности:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + dt^2, \quad (82.6)$$

где $e^\lambda = e^v = 1$ в единицах, принятых в предыдущем параграфе. Тогда уравнение (82.5) может быть переписано так:

$$e^v = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (82.7)$$

Здесь постоянная a положена равной единице, а постоянная b заменена на $-2m$, где m , как это будет видно из физического обсуждения, имеет смысл массы частицы*). Далее, согласно (82.3) мы имеем

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (82.8)$$

Если подставить теперь два последних выражения в первое и третье из соотношений (82.2), то $T_1^1 = T_4^4$, как это и требуется обратятся в нуль.

*) Величина $2m$ или в обычных единицах

$$r_g = \frac{2km}{c^2}$$

называется *гравитационным радиусом*. Он играет важную роль масштаба. На расстояниях $r \gg r_g$ гравитационные эффекты малы (формулы часто разлагают по степеням r/r_g). Напротив, при $r \sim r_g$ релятивистские эффекты становятся определяющими. Для Земли $r_g = 0,886$ см, для Солнца $r_g = 2,96$ км (Прим. ред.).

Подставляя окончательно (82.7) и (82.8) в общее выражение (82.1), мы можем написать линейный элемент в окрестности притягивающей точечной частицы — решение Шварцшильда — в виде

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-2m/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2. \quad (82.9)$$

Так как этот результат был получен с помощью выражений для компонент тензора (82.2), в которых было положено $\Lambda=0$, то это решение соответствует, согласно (78.12) и (78.13), уравнениям Эйнштейна для случая пустого пространства:

$$R_{\mu\nu}=0.$$

Легко, однако, использовать полное выражение для тензора энергии — импульса (см. (95.3)), не пренебрегая космологическим членом, и получить

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2. \quad (82.10)$$

Это соответствует более общим уравнениям в пустом пространстве:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Сравнивая два выражения для линейного элемента (82.9) и (82.10), мы видим, что, как уже отмечалось в § 78, действие Λ -члена на поле, окружающее притягивающую точечную частицу, усиливается с увеличением размеров рассматриваемой области. Следовательно, поскольку движение планет в действительности описывается с большой точностью формулой (82.9), мы можем заключить, что Λ -член во всяком случае настолько мал, что не дает заметных эффектов в области порядка размеров Солнечной системы.

Частный вид линейного элемента Шварцшильда (82.9) зависит, конечно, от выбора системы координат; зачастую удобнее использовать его выражения в других системах координат. Подставляя \bar{r} вместо r с помощью соотношения

$$r = \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r}, \quad (82.11)$$

получаем линейный элемент Шварцшильда в виде

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{(1-m/2\bar{r})^2}{(1-m/2\bar{r})^2} dt^2, \quad (82.12)$$

а используя «прямоугольные координаты»

$$x = \bar{r} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \bar{r} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \bar{r} \cos \theta, \quad (82.13)$$

можно переписать его следующим образом:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{(1-m/2r)^2}{(1+m/2r)^2} dt^2, \quad (82.14)$$

где теперь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Эти новые координаты могут быть названы изотропными, поскольку формула для интервала симметрична по x , y и z . На больших расстояниях от центральной частицы, где члены порядка $(m/r)^2$ и выше пренебрежимы по сравнению с единицей, последнее выражение для линейного элемента Шварцшильда имеет приближенный вид:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2, \quad (82.15)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

§ 83. Три «решающих опыта» теории относительности *)

Зададимся теперь вопросом: насколько соответствует шварцшильдовское выражение для линейного элемента, найденное для притягивающей точечной частицы, астрономическим наблюдениям? Методы исследования этого соответствия хорошо известны, так что для наших целей будет достаточно лишь их беглого описания **).

Рассмотрим для начала движение планет в гравитационном поле Солнца. Если планеты принять за свободные частицы, их пространственно-временные траектории будут задаваться, согласно общей теории относительности (§ 74, д), уравнением геодезических линий (74.13):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (83.1)$$

Так как поле, окружающее Солнце, можно рассматривать как создаваемое притягивающей точечной частицей, значения символов Кристоффеля, стоящих в (83.1), будут теми же, что и для шварцшильдовского элемента (82.9).

*) К трем классическим опытам сейчас добавился еще и четвертый — запаздывание сигнала от планеты при прохождении его вблизи диска Солнца. (Прим. ред.)

***) Мы следуем здесь изложению Эддингтона [56] (§ 58, § 59).

Именно, те из компонент, которые не обращаются в нуль, определяются (см. (95.2)) следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \frac{dv}{dr}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{32}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \frac{dv}{dr}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & & (83.2) \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \frac{dv}{dr}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

При этом мы использовали шварцшильдовские значения λ и ν , задаваемые (82.7) и (82.8).

Подставляя выражения (83.2) в (83.1), находим четыре уравнения, соответствующие возможным значениям $\sigma=1, 2, 3, 4$, которым должно подчиняться движение планет:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \\ + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \frac{dv}{dr} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (83.3)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (83.4)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad (83.5)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (83.6)$$

Эти уравнения легко упростить, выбрав координаты так, чтобы планеты первоначально двигались в плоскости $\theta = (1/2)\pi$. Тогда $d\theta/ds$ и $\cos \theta$ оказываются равными нулю в начальный момент времени, а, значит, согласно (83.4) они равны нулю всегда. Следовательно, уравнения движения принимают более простой вид:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \frac{dv}{dr} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \quad (83.7)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (83.8)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (83.9)$$

Эти уравнения несложно решить, так как первоначальное уравнение для линейного элемента (82.1) дает один интеграл,

а уравнения (83.8) и (83.9) легко могут быть проинтегрированы. Таким образом, мы получаем

$$e^{\lambda} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - e^{\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2}, \quad \frac{dt}{ds} = ke^{-\nu}$$

в качестве первых интегралов рассматриваемых уравнений, причем h и k здесь — постоянные интегрирования. Комбинируя первое и третье из этих уравнений и подставляя величины (82.7) и (82.8) для λ и ν , получаем релятивистские уравнения движения планет:

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2m}{r} \left(1 + r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} \right) = k^2 - 1, \quad (83.10)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h. \quad (83.11)$$

Здесь r и φ — введенные выше пространственные координаты, m и k — постоянные, а ds — элемент собственного времени, измеренного локальными часами, движущимися вместе с планетой.

Итак, мы получили релятивистские уравнения для орбит планет в виде, удобном для сравнения с ньютоновскими уравнениями, вытекающими из обычных законов сохранения энергии и момента количества движения. Они имеют вид

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{2m}{r} = \text{const}, \quad (83.12)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \quad (83.13)$$

где m — масса Солнца, выраженная в единицах § 81; r и φ следует рассматривать как обычные полярные координаты, а dt — как обычный временной интервал, который использовался в дорелятивистском подходе, не учитывавшем влияние движения и кривизны на пространственные и временные измерения.

В самом деле, эффекты движения и кривизны должны быть ничтожными для малых скоростей планет и для почти «плоского» пространства — времени, окружающего*) Солнце, а дополни-

*) Согласно шварцшильдовскому линейному элементу пространственная геометрия вокруг Солнца должна определяться формулой интервала

$$du^2 = \frac{dr^2}{1-2m/r} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

вместо обычной формулы для плоского пространства

$$du^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

тельный член $r^2 d\varphi^2/ds^2$, стоящий в (83.10), должен быть очень мал по сравнению с единицей (как квадрат поперечной скорости планеты, поделенной на квадрат скорости света). Это обстоятельство отражает большую точность выводов обычной ньютоновской теории гравитации в небесной механике.

Имеются тем не менее три следствия, получаемые с помощью шварцшильдовского линейного элемента, которые позволяют обнаружить различие между релятивистской и ньютоновской теориями гравитации. Этими следствиями мы теперь и займемся.

а) *Движение перигелия.* Первый из трех решающих для теории относительности опытов связан с тем, что релятивистское уравнение (83.10) отличается от аналогичного уравнения Ньютона (83.12) дополнительным членом. Это приводит к орбитам планет с медленно вращающимся перигелием, в отличие от совершенно замкнутых эллиптических орбит старой теории.

Подставив (83.11) в (83.10), продифференцировав по φ и положив для простоты

$$u = 1/r, \quad (83.14)$$

получим в качестве релятивистского уравнения для орбитального движения планет

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \quad (83.15)$$

Это уравнение следует сравнить с аналогичным ньютоновским уравнением

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}. \quad (83.16)$$

Однако даже на поверхности Солнца член $2m/r$ приблизительно равен $4 \cdot 10^{-6}$, а на таких расстояниях, как расстояние до Земли, он еще меньше и равен примерно $2 \cdot 10^{-8}$. Следовательно, пространство вокруг Солнца достаточно плоское, так что шварцшильдовские значения координат r , θ и φ , задающие положение планет, практически не будут отличаться от соответствующих значений, найденных в пренебрежении пространственной кривизной.

Далее, соотношение между бесконечно малым собственным временем ds , измеряемым на планете, и координатным временем dt должно определяться при нашем выборе линейного элемента уравнением

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 1 - \left(\frac{1}{1-2m/r} \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2m}{r} \right),$$

где второй член очень мал по сравнению с единицей, так, например, для Земли он приблизительно равен $3 \cdot 10^{-8}$. Следовательно, при описании движения планет можно не различать также и два вида времени.

Наше настоящее рассмотрение — конкретная иллюстрация того факта, что отклонения компонент $g_{\mu\nu}$ от их галилеевых значений, очень малые с метрической точки зрения, могут быть, однако, очень важными с гравитационной точки зрения.

Поскольку дополнительный член $3mu^2$ в правой части (83.15), как легко видеть, используя (83.11), весьма мал по сравнению с m/h^2 , различие между релятивистским и ньютоновским уравнениями очень незначительно. Следовательно, за решение релятивистского уравнения (83.15) можно принять в первом приближении хорошо известное решение ньютоновского уравнения (83.16):

$$u = \frac{m}{h^2} \{1 + e \cos(\varphi - \omega)\}, \quad (83.17)$$

где e — эксцентриситет орбиты, а ω — долгота перигелия. Подставляя это решение в (83.15), получаем в качестве удовлетворительного второго приближения выражение

$$u = \frac{m}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \left(\varphi - \omega - \frac{3m^2}{h^2} \varphi \right) \right\}. \quad (83.18)$$

Из вида его сразу следует, что за время одного полного оборота планеты долгота перигелия ее ньютоновского эллипса должна смещаться на величину

$$\delta\omega = \frac{6\pi m^2}{h^2}. \quad (83.19)$$

Меркурий — единственная из планет Солнечной системы, для которой предсказанное смещение оказывается настолько значительным, что его можно с уверенностью измерить. Предсказанное смещение долготы перигелия для Меркурия равно $42,9''$ за 100 лет, а наблюдаемое смещение равняется $43,5''$ [61]. Соответствие результатов можно считать вполне удовлетворительным.

б) *Гравитационное отклонение света.* Вторая из трех решающих проверок — это отклонение света при прохождении его через гравитационное поле вблизи Солнца.

Согласно общей теории относительности (см. § 74, д) траектории световых лучей, как и свободных частиц, должны определяться уравнениями геодезических линий с дополнительным условием $ds=0$ для интервала. Следовательно, если ввести это условие, наши предыдущие уравнения для планетных орбит будут применимы и в случае распространения световых лучей в поле притягивающей точечной частицы. Более того, из (83.11) видно, что это дополнительное условие может быть просто учтено, если положить $h=\infty$ в (83.15); это дает уравнения для траектории световых лучей вблизи притягивающей точечной частицы с массой m :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2 \quad (83.20)$$

при

$$u = 1/r. \quad (83.21)$$

В отсутствие возмущающего члена $3mu^2$ решением (83.20) является прямая линия

$$r \cos \varphi = R, \quad (83.22)$$

которая проходит на расстоянии R от притягивающей точки. Подставив снова (83.22) в (83.20), получим второе приближение:

$$r \cos \varphi = R - \frac{m}{R} (r \cos^2 \varphi + 2r \sin^2 \varphi). \quad (83.23)$$

Переходя к декартовым координатам, что возможно в пространстве, близком к евклидову, которое окружает Солнце, мы можем переписать последнее выражение в виде

$$x = R - \frac{m}{R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (83.24)$$

Для больших значений y это дает

$$x = R - \frac{m}{R} (\pm 2y),$$

где верхний знак соответствует положительным y , нижний — отрицательным. Следовательно, угол между асимптотическими направлениями лучей равен

$$\theta = \frac{4m}{R}. \quad (83.25)$$

Лучи света, касающиеся солнечного диска, должны отклоняться согласно этой формуле на угол в 1,75 угловой секунды. Это предсказание можно проверить, определяя во время полного солнечного затмения видимое положение звезды, свет которой проходит вблизи солнечного диска. Результаты наблюдений прекрасно согласуются с теорией. Первая и очень точная проверка релятивистской теории была сделана английской экспедицией, наблюдавшей солнечное затмение 1919 года. Наиболее надежные в настоящее время данные получены Кэмпбелом и Трамплером (экспедиция Ликской обсерватории, 1922 г.); $1,72'' \pm 0,11''$ и $1,82'' \pm 0,15''$ для двух камер различных размеров [62].

Полезно отметить, что релятивистское выражение для отклонения света вблизи объекта с массой m (83.25) вдвое больше того, которое получается в *обычной* ньютоновской теории для частиц, распространяющихся со скоростью света.

Чтобы получить ньютоновский результат, рассмотрим частицу, летящую приблизительно параллельно оси y и встречающую массивную частицу m на расстоянии $x=R$. Ускорение в направлении оси x тогда равно

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{mx}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

или с точностью, достаточной для наших целей,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = - \frac{mR}{(R^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Решив последнее уравнение и выбрав константы интегрирования так, чтобы $(dx/dy) = 0$ и $x = R$ при $y = 0$, получим приближенное выражение для траектории при больших y :

$$x = R - \frac{m}{R} (\pm y),$$

откуда видно, что угол между асимптотическими направлениями

$$\theta = \frac{2m}{R}$$

в два раза меньше предыдущего результата (83.25)*).

Из-за столь резкого расхождения результатов релятивистской и квазиньютоновской теорий описанный опыт становится особенно важным.

в) *Гравитационное смещение спектральных линий.* Третий решающий для общей теории относительности опыт — это нахождение зависимости длины волны света от гравитационного потенциала источника, его испускающего. Мы уже приближенно рассматривали такую задачу в § 79, б с помощью принципа эквивалентности. Используя шварцшильдовский линейный элемент, мы можем теперь более детально исследовать, насколько должно смещаться частота спектральной линии света, испущенного с поверхности Солнца или звезды. Сделать это очень легко.

С одной стороны, из шварцшильдовского линейного элемента (82.9) и условия $ds = 0$ для траектории света вытекает, что скорость света, излучаемого поверхностью звезды, задается в координатах r и t выражением

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (83.26)$$

и, как видно, не зависит от времени. Мы можем, следовательно, заключить, что последовательность световых импульсов, разделенных координатными периодами δt во время испускания с по-

*) Можно исходить из (83.17). Для луча, проходящего вблизи Солнца, $h = R$ и $e = R/m$. Тогда из (83.17), полагая $\omega = 0$,

$$r \cos \varphi = R - \frac{m^2}{R} = R - \frac{m}{R} (r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi).$$

Эта формула отличается от (83.23) отсутствием коэффициента 2 в скобках, что и приводит к вдвое меньшему эффекту. (*Прим. ред.*)

верхности звезды, должна разделяться теми же координатными периодами и при достижении покоящегося наблюдателя.

С другой стороны, из шварцшильдовского линейного элемента следует, что собственный период δs для покоящегося атома и его координатный период δt связаны соотношением

$$\delta s = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \delta t. \quad (83.27)$$

Однако, поскольку собственный период атома не должен зависеть от его положения и поскольку, как отмечалось выше, координатный период света в данном случае не изменяется при распространении, можно записать

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t}{\delta s} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2m/r)}} \approx 1 + \frac{m}{r} \quad (83.28)$$

для отношения наблюдаемых длин световых волн, соответствующих данной спектральной линии, испускаемой в одном случае с поверхности звезды на расстоянии r , а в другом — на большом расстоянии от звезды, вблизи местонахождения наблюдателя.

Для света, излучаемого с поверхности Солнца, это ведет к очень малому «красному смещению»:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2,12 \cdot 10^{-6}. \quad (83.29)$$

А для очень плотного спутника Сириуса смещение должно быть примерно в 30 раз больше. Из работ Ст. Джона [63] и Адамса [64] следует, что согласно наблюдаемым теоретических результатов в обоих случаях удовлетворительно.

Итак, можно считать, что описанные решающие опыты подтверждают общую теорию относительности. Эти подтверждения особенно важны, если учесть, что в то время, когда Эйнштейн создал свою теорию, единственным достоверно известным из этих трех явлений было движение перигелия Меркурия, а два других эффекта гравитации никогда не наблюдались даже качественно, пока не были предсказаны общей теорией относительности.

Замечательно также то, что развитая Эйнштейном теория относительности ни в коем случае не является простым следствием попыток объяснения известного уже различия между наблюдаемой орбитой Меркурия и предсказываемой ньютоновской теорией. Общая теория относительности — сложное теоретическое здание, построенное на фундаментальных принципах, главным оправданием которых служит присущая им внутренняя логика и общность. Необычайный успех теории, созданной чисто умозрительным путем, опасность которого была столь очевидна еще со времен Галилея, делает честь гениальности ее создателя.

Подтверждения теории относительности, полученные в результате наблюдений, дают нам право рассматривать ее как убедительное расширение ньютоновской теории и побуждают перейти к дальнейшему развитию теории, несмотря на то, что опытные проверки окажутся сейчас не всегда возможными.

Добавления редактора. Классические три эффекта дополнены сейчас четвертым. Шапиро*) предложил измерять время прохождения радиосигнала до Земли при радиолокации от планеты или спутника Марса (см. ниже п. IV).

По существу, опыты такого типа дают возможность проверить только первый поправочный коэффициент к ньютоновской теории тяготения.

Если записать метрику в виде

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{2x}{r} + 2\beta \left(\frac{x}{r} \right)^2 - \dots \right\} dt^2 - \left\{ 1 - 2\gamma \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \dots \right\} \times \\ \times [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)],$$

где $x = \frac{1}{2} r_g$, $r_g = 2\gamma M_{\odot} / c^2$ — гравитационный радиус Солнца, то наблюдения могут дать только сведения о коэффициентах β и γ . Разные эффекты дают сведения о разных комбинациях β и γ , однако точность обработки и наблюдений пока еще недостаточна, чтобы определить их значения с хорошей точностью.

Приведем данные о результатах опытов, проведенных до 1972 г.

I

В связи с развитием радиолокационных методов измерения астрономических расстояний появилась возможность более точного сравнения наблюдаемого движения планет с теорией. Применение методов радиолокации восходит к Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси**) (1944), которые обсуждали вопрос о радиолокации Луны.

Вопрос о движении перигелия Меркурия осложнился после того, как Дике обратил внимание на искажения гравитационного поля из-за возможной сплюснутости Солнца***). Поэтому сейчас необходимо из данных о движении планет извлекать сведения и о форме Солнца.

Последние данные о движении перигелия Меркурия, полученные Шапиро и др.****), показывают, что наблюдаемый эффект согласуется с предсказанным с точностью 2% в предположении, что поле Солнца сферически симметрично. Эффект сплюснутости довольно велик. Сплюснутость 10^{-4} привела бы к смещению перигелия на 7" в 100 лет.

Отметим, что движение перигелия, о котором сейчас идет речь, составляет лишь 10% от суммарного движения перигелия Меркурия 575" в 100 лет, связанного в основном (~534") с возмущением других планет. В частности, на долю возмущений Венерой приходится 278".

Для других планет измерения очень неточные, все же для Венеры и Земли можно констатировать грубое согласие с теорией.

II

Отклонение луча света в поле Солнца представляет собой эффект, который очень трудно выделить в чистом виде. Здесь наиболее четкие результаты по-

*) Ср. M. S. Longair, Rep. Progr. Phys. 34, 1125 (1972).

**) Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, УФН 29, 251 (1946).

***) R. Dicke and G. Goldberg, Phys. Rev. Lett, 18, 313 (1967).

****) I. I. Shapiro, G. H. Pettengill, M. E. Ash, R. P. Ingalls, D. B. Campbell, R. B. Dicke, Phys. Rev. Lett. 28, 1597 (1972).

лучаются при измерении отклонений сигнала, посланного с искусственного спутника Марса *). Согласно с теорией оказалось в пределах 5%.

Другой хороший способ состоит в наблюдении изменения углового расстояния двух радиосточников 2С 273 и 3С 273 **). Измерения дали согласие с теорией с ошибкой 15%. В другой работе ***) аналогичные измерения дали для углового отклонения $1,77'' \pm 0,20''$.

III

Гравитационное смещение спектральных линий для неподвижного источника лучше всего было измерено на Земле. Измерялась (методом Мессбауэра) частота γ -кванта, излучаемая радиоактивным источником, помещенным на высоте 20,5 м над поверхностью Земли ****). Согласно с теорией оказалось в пределах 10%. Этот эффект проверяет лишь ньютоновский член в метрике (он практически не чувствителен к величине β и вовсе не чувствителен к γ).

Интересно отметить измерение эффекта, произведенное на самолетах, которые совершили кругосветные рейсы: одни с востока на запад, другие с запада на восток *****)). Изменение хода атомных часов связано в этих опытах с эффектом специальной теории относительности и с влиянием ньютоновского потенциала. Формула, связывающая собственное время Δt с временем земного наблюдателя, имеет вид (с точностью до членов $1/c^2$)

$$\Delta t = \Delta t \left(1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{2\Omega v + v^2}{2c^2} \right),$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли, v — скорость самолета (>0 при движении на восток и <0 при движении на запад) и h — высота полета.

Опыт дал согласие с теорией (ошибка $\sim 15\%$).

IV

«Четвертый эффект» — изменение времени прохождения сигнала от Меркурия и Венеры до Земли (влияние поля Солнца *****) — дал согласие с формулой теории.

$$\Delta t \approx \frac{2r_{\odot}}{c} \left\{ 1 + \ln \frac{4r_e r_p}{R_{\odot}^2} \right\};$$

r_{\odot} — гравитационный радиус Солнца (1,5 км), R_{\odot} — радиус Солнца, r_e и r_p — расстояния от Солнца до Земли и до планеты, Δt — запаздывание сигнала, когда сигнал проходит вблизи края диска Солнца. Ошибка составляла 5%. Из этих опытов можно было оценить величину γ .

Современная обработка данных по движению перигелия Меркурия приводит к оценкам

$$\gamma = 1,0 \pm 0,1, \quad \beta = 1,1 \pm 0,2$$

(см. обзор Шапиро *****)).

*) D. Muhloman, R. Ekerö, Fomolont, Phys. Rev. Lett. 24, 1377 (1970).

**) G. Seilstadt, R. Sramex, K. Weiler, Phys. Rev. Lett. 24, 1373 (1970).

***) R. Paund, G. Rebka, Phys. Rev. Lett. 4, 337 (1960).

****) Hefele a. Keatring, Science 108, 000 (1972).

*****) I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls, W. B. Smith, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. F. Jungen, G. H. Pettengill, Phys. Rev. Lett. 26, 1132 (1971).

*****) I. I. Shapiro, Gen. Rel. Grav. 1, 135 (1972).

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 84. Основные уравнения релятивистской механики

В этой главе мы обратимся к более подробному изложению некоторых следствий релятивистской механики, которые либо будут существенны для нас в дальнейшем, либо кажутся нам особенно интересными. Все они содержатся, в конце концов, в уравнениях Эйнштейна

$$-8\pi T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (84.1)$$

которые дают связь распределения энергии и материи с геометрией пространства — времени в форме равенства тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$ выражению, составленному из фундаментального метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его производных. Задача релятивистской механики — исследовать с помощью этого уравнения законы, которые управляют тензором энергии — импульса, определяя тем самым поведение материи и энергии.

Для многих задач полное уравнение (84.1) не нужно. В правой его части стоит величина, тензорная дивергенция которой, как известно, тождественно равна нулю, откуда сразу следует, что

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \quad (84.2)$$

С помощью одного этого простого уравнения уже можно сделать много важных заключений о поведении вещества и энергии. Прежде всего, поскольку уравнение (84.2), если его записать в естественных координатах:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (84.3)$$

совпадает по форме с фундаментальными уравнениями механики в специальной теории относительности, то естественно принять (84.2) в качестве фундаментальных уравнений механики в общей теории относительности.

Развернем это выражение, применяя правила ковариантного дифференцирования; тогда фундаментальные уравнения механики (84.3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T^{\mu\alpha} = 0, \quad (84.4)$$

а опуская индекс μ , — в виде

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T_{\mu}^{\alpha} = 0. \quad (84.5)$$

Далее, вводя вместо тензора энергии — импульса соответствующую тензорную плотность

$$\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g}, \quad (84.6)$$

последнее уравнение можно переписать с помощью известных преобразований (уравнение (47), Приложение III) в более простой форме:

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (84.7)$$

или

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (84.8)$$

§ 85. Свойства тензора энергии — импульса. Общее выражение в случае идеальной жидкости

Чтобы извлечь физические заключения из фундаментальных уравнений механики, мы должны их применить к какой-либо физической среде, для которой известна явная зависимость тензора энергии — импульса от наблюдаемых свойств среды. Для этого нам необходимо знать явное выражение тензора $T^{\mu\nu}$ через величины, которые измеряются на опыте с помощью обычных методов. Из принципа эквивалентности следует, что такие выражения можно получить путем ковариантного обобщения тензора энергии — импульса из специальной теории относительности.

В специальной теории относительности в случае чисто механической среды, когда состояния в каждой точке могут определяться механическими натяжениями p_{ij}^0 и плотностью ρ_{00} , измеряемыми локальным наблюдателем, мы нашли следующее

выражение для тензора энергии — импульса *):

$$T_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho_{xx}^0 & \rho_{xy}^0 & \rho_{xz}^0 & 0 \\ \rho_{yx}^0 & \rho_{yy}^0 & \rho_{yz}^0 & 0 \\ \rho_{zx}^0 & \rho_{zy}^0 & \rho_{zz}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{00}^0 \end{pmatrix}. \quad (85.1)$$

При этом была использована специальная система галилеевых координат, относительно которой в рассматриваемый момент времени вещество в данной точке покоилось. Из принципа эквивалентности, однако, следует, что и в общей теории относительности тензор энергии — импульса механической среды должен иметь тот же самый вид, если он записан в собственных координатах $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ рассматриваемой точки. Таким образом, матрица (85.1) задает тензор энергии — импульса механической среды в общей теории относительности, определяя его компоненты в специальной системе — системе собственных координат. Чтобы получить выражение этого тензора в любой другой системе координат (x^1, x^2, x^3, x^4) , надо лишь применить правило преобразования тензоров:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^\beta} T_0^{\alpha\beta}, \quad (85.2)$$

позволяющее находить нужные компоненты с помощью производных, связывающих новую систему координат с первоначальной собственной системой; в итоге эти компоненты оказываются выраженными через собственные плотность ρ_{00} и натяжения ρ_{ij}^0 , измеряемые локальным наблюдателем обычными физическими методами. И наоборот, если известны компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ в данной системе координат, можно вычислить собственные натяжения и плотность с помощью обратных преобразований.

Хотя соотношение (85.2) является общим выражением для тензора энергии — импульса механической среды, определяющим его в любой заданной системе координат, его конкретное содержание зависит от производных, связывающих эти координаты с некоторой системой собственных координат. В случае идеальной жидкости можно, однако, с помощью некоторых подстановок избавиться от явной зависимости от собственных координат и дать более прозрачное выражение для тензора энергии — импульса, зависящее от действительно используемых координат.

*) См. § 37. Напомним, что мы положили $c^2=1$ в согласии с выбором единиц, сделанным в § 81.

Идеальную жидкость мы определим как механическую среду, которая не сжимается под действием поперечных сил. Тогда единственной отличной от нуля компонентой тензора натяжений, определяемой локальным наблюдателем, будет та, что соответствует собственному гидростатическому давлению p_0 . Таким образом, тензор энергии — импульса будет задаваться в собственных координатах следующим простым набором компонент:

$$T_0^{11} = T_0^{22} = T_0^{33} = p_0, \quad T_0^{44} = \rho_{00}, \quad T^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (85.3)$$

Подставляя эти величины в общее выражение для тензора энергии — импульса (85.2), найдем

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^1} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^2} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^3} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^4} \rho_{00}, \quad (85.4)$$

где $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ — собственные координаты рассматриваемой точки, а (x^1, x^2, x^3, x^4) — интересующие нас координаты.

Это выражение можно упростить. Во-первых, свяжем компоненты контравариантного метрического тензора, соответствующие этим двум системам координат:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^\beta} g_0^{\alpha\beta}.$$

Подставив сюда затем обычные простые значения компонент метрического тензора в собственных координатах, получим

$$g^{\mu\nu} = -\frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^1} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^2} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^3} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^4}. \quad (85.5)$$

Во-вторых, мы можем написать для макроскопической скорости жидкости в выбранных координатах уравнение

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^1} \frac{dx_0^1}{ds} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^2} \frac{dx_0^2}{ds} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^3} \frac{dx_0^3}{ds} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4} \frac{dx_0^4}{ds},$$

которое, если учесть, что скорость не имеет пространственных компонент и имеет равную единице временную компоненту, сводится к равенству

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4}. \quad (85.6)$$

Подставляя (85.5) и (85.6) в (85.4), получаем тензор энергии — импульса идеальной жидкости в очень полезном и общем виде:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0. \quad (85.7)$$

Здесь ρ_{00} и p_0 — собственная макроскопическая плотность и дав-

ление жидкости, а величины dx^μ/ds — компоненты макроскопической скорости жидкости в используемой системе координат.

Так как поле излучения можно рассматривать как идеальную жидкость, характеризуемую плотностью и давлением с простым соотношением между ними (§ 65):

$$\rho_{00} = 3p_0, \quad (85.8)$$

то для них также можно использовать выражение (85.7), с учетом (85.8), в качестве тензора энергии — импульса этого излучения; dx^μ/ds при этом следует рассматривать как скорость наблюдателя относительно используемой системы координат, который не обнаруживает в среднем никакого потока энергии (смысл этого условия будет разъяснен ниже, в § 109).

Выражение для тензора энергии — импульса идеальной жидкости (85.7) окажется чрезвычайно полезным для наших дальнейших выводов. Для более сложных механических сред, в которых могут возникать поперечные натяжения, и для жидкостей, в которых существуют тепловые потоки, полученное выражение неприменимо. Кроме того, при наличии электромагнитных полей, более сложных, нежели изотропное поле излучения, мы должны будем использовать более общее выражение для тензора энергии — импульса, которое будет получено в следующей главе. Тем не менее с помощью моделей, имеющих свойства идеальной жидкости, может быть исследовано множество важных проблем.

§ 86. Механика идеальной жидкости

Чтобы понять физический смысл фундаментальных уравнений механики, обсужденных в § 84, применим их к случаю идеальной жидкости, воспользовавшись только что полученным выражением для тензора энергии — импульса. Из соображений простоты, для того чтобы глубже проникнуть в физическую сущность результатов, будем выражать их в собственных координатах рассматриваемой точки.

Очевидно, что в собственных координатах фундаментальные уравнения механики (84.4) примут вид

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (86.1)$$

из-за равенства нулю символов Кристоффеля. Далее, в собственных координатах компоненты метрического тензора задаются их галилсевыми значениями, и их первые производные исчезают в выбранной точке, так что мы можем записать:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \pm 1, 0, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (86.2)$$

Кроме того пространственные и временная компоненты скорости жидкости в интересующей нас точке имеют значения

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1. \quad (86.3)$$

И наконец, так как из общей формулы для интервала следует соотношение

$$1 = g_{11} \frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds} + 2g_{12} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \dots + g_{44} \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds},$$

то, продифференцировав обе его части, находим, что в выбранной точке должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{dt}{ds} \right) = 0, \quad (86.4)$$

поскольку все члены, кроме последнего, после дифференцирования и последующей подстановки (86.2) и (86.3) обращаются в нуль. Таким образом, в собственных координатах выбранной точки производные временной компоненты скорости исчезают, хотя производные пространственных компонент, вообще говоря, могут отличаться от нуля даже в этой точке.

Предыдущие уравнения и выражение (85.7) для тензора энергии — импульса идеальной жидкости

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + \rho_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} \rho_0 \quad (86.5)$$

— это все, что необходимо нам для дальнейшего исследования.

Положив в (86.1) $\mu=1$ и используя (86.5), обнаружим, что остаются всего два члена:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + (\rho_{00} + \rho_0) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

которые можно переписать с помощью (86.3) и (86.4) в виде

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + (\rho_{00} + \rho_0) \frac{du_x}{dt} = 0, \quad (86.6)$$

где du_x/dt — ускорение жидкости, параллельное оси x . Если мы вспомним, как выглядит по предположению вклад в импульс, связанный с работой механических сил, таких, как давление (§ 35), и учтем также то, что в используемых координатах скорость жидкости в рассматриваемой точке равна нулю, то сразу становится очевидным, что полученный выше результат является простым следствием обычного соотношения между силой и скоростью изменения импульса. Подобные же уравнения можно, конечно, написать и для $\mu=2$ и 3.

Для случая $\mu=4$ при подстановке (86.5) в (86.1) остаются только следующие члены:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_{00} + p_0) \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\rho_{00} + p_0) \frac{dy}{ds} \frac{dt}{ds} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_{00} + p_0) \frac{dz}{ds} \frac{dt}{ds} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho_{00} + p_0) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \right] - \frac{\partial p_0}{\partial t} = 0.$$

Согласно (86.3) и (86.4) их можно переписать в виде

$$\rho_{00} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_{00}}{\partial t} + p_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Умножая последнее уравнение на величину

$$\delta v_0 = \delta x \delta y \delta z, \quad (86.7)$$

где δv_0 — собственный бесконечно малый объем жидкости, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0, \quad (86.8)$$

которое означает, что в собственных координатах скорость изменения энергии элементарного объема жидкости может быть определена, как мы и ожидали, по скорости, с которой совершается работа против внешнего давления.

Таким образом, в собственных координатах уравнения релятивистской механики для идеальной жидкости приведут к выражениям, которым можно дать простую физическую интерпретацию в терминах измеряемых величин. Более того, если локальный наблюдатель находится в жидкости в состоянии покоя и изучает достаточно малый ее элемент такой, что гравитационной кривизной можно пренебречь, то найденные им законы механики совпадут с теми, которые мы получаем из законов сохранения энергии — импульса. Используя, далее, естественные координаты, в которых жидкость уже не покоится в выбранной точке, легко получить результаты, находящиеся в согласии с более сложными выражениями для энергии, импульса и тензора натяжений движущейся жидкости, полученными в специальной теории относительности (глава III). Однако при использовании более общих координат физический смысл уравнений механики оказывается менее прозрачным, в чем мы не раз убедимся впоследствии.

Итак, как было показано выше, для локального наблюдателя, покоящегося в жидкости и исследующего элемент объема окружающей среды настолько малый, что гравитационной кривизной в нем можно пренебречь, механические свойства жидкости совпадут с теми, которые отвечают обычным законам сохранения энергии и импульса. Более того, следует подчеркнуть, что в силу принципа эквивалентности мы должны ожидать таких же заключений для локального наблюдателя, который измеряет электро-

магнитные и термодинамические свойства малого элемента жидкости. Однако не надо забывать, что в общей теории относительности собственные координаты приводят к простым соотношениям лишь в малой окрестности точки, в которой они введены. Не следует впадать в заблуждение, что закон сохранения энергии — импульса в форме, приданной ему специальной теорией относительности, должен быть справедлив и в общей теории относительности в области конечных размеров.

Это можно проиллюстрировать с помощью полученного выше соотношения (86.8), связывающего скорость изменения энергии, измеряемую локальным наблюдателем в малом элементе окружающей его жидкости, со скоростью, с которой производится работа над окружающей средой. Этот результат, найденный для отдельного элемента, согласуется с тем, что мы могли бы получить, используя обычные законы сохранения и передачи энергии. Надо отметить, однако, что это соотношение, очевидно, справедливо для каждого из элементарных объемов, на которые можно разделить полный объем, занимаемый жидкостью, при условии конечности размеров системы. В дальнейшем мы убедимся, что, если давление по всему объему положительно, это приводит к тому, что возможны состояния изолированных систем, в которых собственная энергия ($\rho_{00}dV_0$) *каждого* элемента объема жидкости уменьшается, когда система расширяется, и увеличивается, когда система сжимается.

Тот факт, что полная сумма собственных энергий элементов объема жидкости, составляющих изолированную систему, не обязательно постоянна, кажется на первый взгляд весьма странным. В ньютоновой теории тяготения нам пришлось бы вводить в этом случае потенциальную энергию гравитационного поля, чтобы обеспечить справедливость закона сохранения энергии. В следующих двух параграфах мы увидим, как надо учитывать аналогичным образом потенциальную гравитационную энергию и импульс в общей теории относительности.

Последний результат — несохранение полной суммы собственных энергий элементарных объемов жидкости — играет важную роль для релятивистской термодинамики. Ниже мы увидим (§ 131), что это снимает ограничение на возможность возрастания энтропии изолированной системы, которое налагает в классической термодинамике обычный закон сохранения энергии.

В заключение особо отметим, что согласно (86.8) идеальная жидкость была определена таким образом, что локальный наблюдатель приходил к выводу об адиабатичности ее поведения, так как собственная энергия элементарного объема изменялась из-за выполнения внешней работы, а не за счет теплового потока. Нам следует помнить это обстоятельство, когда мы используем модель идеальной жидкости.

§ 87. Уравнения механики в лагранжевой форме

Выше, в § 84, законы сохранения были выведены из фундаментальных уравнений релятивистской механики и имели вид, вполне удобный для большинства приложений. Тем не менее мы запишем эти уравнения в другой форме, для того чтобы получить для конечных систем аналогии законов сохранения энергии и импульса. Это можно сделать несколько длинным, но хорошо известным путем, который мы сейчас наметим*).

Прежде всего выразим лагранжиан \mathfrak{L} через символы Кристоффеля первого рода:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}]. \quad (87.1)$$

Поскольку комбинация символов Кристоффеля в квадратной скобке не является тензором, \mathfrak{L} не есть скалярная плотность. Однако, так как выражение (87.1) принято как определение \mathfrak{L} во всех системах координат, можно найти величину \mathfrak{L} в любой системе и можно построить не тензорные, но тем не менее ковариантные выражения, определяющие \mathfrak{L} .

Варьируя плотность \mathfrak{L} по величинам, от которых \mathfrak{L} зависит, можно после значительных упрощений записать вариацию в виде

$$\delta \mathfrak{L} = [-\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}] \delta (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) + \left[-\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\beta} + \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\beta} \right] \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \right\}. \quad (87.2)$$

Если теперь рассматривать \mathfrak{L} как функцию двух новых переменных, которые мы определяем формулами

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad g_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}), \quad (87.3)$$

можно записать:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \quad (87.4)$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\beta} + \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\beta}. \quad (87.5)$$

С помощью этих двух выражений, дающих зависимость \mathfrak{L} от переменных $g^{\mu\nu}$ и $g_{\alpha}^{\mu\nu}$, мы получим несколько уравнений, содержащих \mathfrak{L} , которые будут полезны в дальнейшем. Так, сопоставляя (87.4) и (87.5) с выражением для свернутого тензора Римана —

*) Изложение следует книге Эддингтона [56] (§ 58, § 59).

Кристоффеля (77.1), нетрудно убедиться, что последний можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}. \quad (87.6)$$

Эта формула обнаруживает формальное сходство с уравнениями движения в классической лагранжевой форме, оправдывая название, которое мы дали функции \mathfrak{L} . Далее, умножая выражения (87.4) и (87.5) на $g^{\mu\nu}$ и $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ соответственно и производя некоторые упрощения, можно найти соотношения

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\mathfrak{L} \quad (87.7)$$

и

$$g_{\alpha}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} = 2\mathfrak{L}. \quad (87.8)$$

С их помощью легко вычислить скалярную плотность \mathfrak{H} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - g_{\alpha}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \mathfrak{L}. \end{aligned} \quad (87.9)$$

Теперь мы уже можем написать фундаментальные уравнения механики в форме обычной дивергенции. Для этого нам надо преобразовать второй член в полученном ранее уравнении (84.8). Согласно первоначальным уравнениям поля (84.1) можно записать:

$$\begin{aligned} -\delta\pi \mathfrak{L}_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} &= \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} = \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} + R d\sqrt{-g} - 2\Lambda d\sqrt{-g} = \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d\sqrt{-g} - 2\Lambda d\sqrt{-g} = \\ &= R_{\mu\nu} d(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) - 2\Lambda d\sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (87.10)$$

При переходе от второй строки к третьей было использовано уравнение (39) из Приложения III. Подставив сюда величину

$R_{\mu\nu}$, записанную через лагранжеву функцию (87.6), и величину $g_{\beta}^{\mu\nu}$, определенную в (87.3), получим

$$\begin{aligned}
 -8\pi\mathfrak{E}_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} &= g_{\beta}^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\right)-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}-g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}g_{\alpha}^{\mu\nu}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}g^{\mu\nu}-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^{\beta}}-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}-g_{\beta}^{\alpha}\mathfrak{L}-2g_{\beta}^{\alpha}\Lambda\sqrt{-g}\right]. \quad (87.11)
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего использования этого результата введем новую величину, которую можно назвать псевдотензорной плотностью энергии и импульса:

$$t_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{16\pi} \left[g_{\beta}^{\mu\nu} \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} + g_{\beta}^{\alpha}\mathfrak{L} + 2g_{\beta}^{\alpha}\Lambda\sqrt{-g} \right]. \quad (87.12)$$

В соответствии с этим определением и (87.11), мы, очевидно, можем написать:

$$\frac{\partial t_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}. \quad (87.13)$$

Подставляя теперь это выражение в (84.8), можно придать уравнениям механики вид обычной дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\mathfrak{E}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) = 0. \quad (87.14)$$

Это уравнение не является тензорным, так как величина t_{μ}^{ν} не настоящая тензорная плотность; дивергенция также здесь обычная, а не тензорная. Тем не менее определение плотности (87.12) t_{μ}^{ν} справедливо во всех системах координат, а последнее уравнение ковариантно и справедливо во всех системах координат. Таким образом, не возникает никаких сомнений в правильности этого замечательного результата Эйнштейна.

Заметим, что согласно определению t_{μ}^{ν} (87.12) и значениям величин, стоящих в нем и введенных предыдущими уравнениями этого параграфа, величина t_{ν}^{μ} в любой точке задается компонен-

тами метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и его первыми производными в этой точке. Далее, если использовать *естественные координаты* в выбранной точке, видно, что выражение для t_{μ}^{ν} сводится к следующему:

$$8\pi t_{\mu}^{\nu} = g_{\mu}^{\nu} \Lambda \sqrt{-g}. \quad (87.15)$$

Объединение его с выражением для тензора энергии — импульса (84.1) приводит в этих координатах к соотношению

$$-8\pi (\mathfrak{E}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) = \left(R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu}^{\nu} \right) \sqrt{-g}. \quad (87.16)$$

Однако, поскольку t_{μ}^{ν} не настоящая тензорная плотность, она не будет выглядеть столь же просто во всех других системах координат.

§ 88. Закон сохранения энергии — импульса для конечных систем

Новая формулировка законов механики позволяет получить важные выражения, которые можно рассматривать как релятивистские аналоги обычных законов сохранения энергии и импульса.

Начнем с того, что обозначим через x^1 , x^2 и x^3 координаты, соответствующие обычным пространственным координатам, а через x^4 — соответствующую обычной временной, и применим уравнение (87.14) к рассматриваемой конечной системе. Умножая затем (87.14) на $dx^1 dx^2 dx^3$ и, интегрируя при некотором заданном моменте «времени» x^4 по пространственному объему, занимаемому системой, после некоторой перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} \int \int \int \frac{\partial}{\partial x^4} (\mathfrak{E}_{\mu}^4 + t_{\mu}^4) dx^1 dx^2 dx^3 = & - \int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (\mathfrak{E}_{\mu}^1 + t_{\mu}^1) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} (\mathfrak{E}_{\mu}^2 + t_{\mu}^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\mathfrak{E}_{\mu}^3 + t_{\mu}^3) \right] dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (88.1)$$

Пределы интегрирования здесь соответствуют размерам рассматриваемой области: от x^1 до x'^1 , от x^2 до x'^2 и т. д. — и считаются не зависящими от «времени» x^4 . Поэтому (88.1) можно переписать, если проинтегрировать соответствующим образом в нем правую часть, в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^4} \int \int \int (\mathfrak{E}_{\mu}^4 + t_{\mu}^4) dx^1 dx^2 dx^3 = & - \int \int \int \left[\mathfrak{E}_{\mu}^1 + t_{\mu}^1 \Big|_{x^1}^{x'^1} dx^2 dx^3 - \right. \\ & \left. - \int \int \left[\mathfrak{E}_{\mu}^2 + t_{\mu}^2 \Big|_{x^2}^{x'^2} dx^1 dx^3 - \int \int \left[\mathfrak{E}_{\mu}^3 + t_{\mu}^3 \Big|_{x^3}^{x'^3} dx^1 dx^2. \right. \right. \end{aligned} \quad (88.2)$$

В этой форме уравнение (88.2) справедливо в любой системе координат вследствие его прямой связи с ковариантным

уравнением (87.14). Интерпретация и использование полученного уравнения часто облегчаются, если выбрать координаты так, чтобы граница интегрирования x^1, x'^1 и т. д., которая должна охватывать интересующую нас область, проходила как раз по разделу системы и окружающей среды. Так, например, квазидекартовы координаты x, y, z с пределами интегрирования от x до x' , от y до y' , от z до z' , соответствующими действительной границе системы, предпочтительнее для наших теперешних целей, чем, скажем, полярные координаты r, θ и φ с пределами интегрирования от 0 до r , от 0 до π и от 0 до 2π , из которых лишь r на самом деле определяет границу. Упрощение при надлежащем выборе координат происходит потому, что правая часть (88.2) в этом случае определяется лишь величинами $\mathfrak{Z}_\mu^1, t_\mu^1$ и т. д., заданными на границе системы, и не зависит от их значений внутри системы.

Выберем координаты указанным образом. Тогда из уравнения (88.2) следует, что левая часть, т. е. скорость изменения пространственного интеграла со «временем» x^4 , равна сумме поверхностных интегралов в правой части, величина которой полностью определяется условиями, заданными на границе раздела системы и окружающей ее среды.

Таким образом, уравнение (88.2) записано в такой форме, что его можно рассматривать как выражение закона сохранения, если правую часть (88.2) считать определением потока, пересекающего границу. Далее, если взять предельный случай «плоского» пространства — времени, когда применима специальная теория относительности, уравнение (88.2) может быть переписано в галилеевых координатах следующим образом:

$$\frac{d}{dx^4} \iiint T_{\mu}^4 dx^1 dx^2 dx^3 = - \iiint |T_{\mu}^1|_{x^1}^{x'^1} dx^2 dx^3 - \\ - \iiint |T_{\mu}^2|_{x^2}^{x'^2} dx^1 dx^3 - \iiint |T_{\mu}^3|_{x^3}^{x'^3} dx^1 dx^2, \quad (88.3)$$

так как $t_\mu^v = 0$ согласно (87.15), $\Lambda = 0$ для «плоского» пространства, а \mathfrak{Z}_μ^v должно быть равно T_{μ}^v , поскольку $V - \overline{g} = 0$ в выбранных координатах. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (38.10), мы увидим, что при $\mu = 1, 2, 3$ уравнение (88.3) полностью эквивалентно релятивистскому выражению — следствию закона сохранения трех компонент количества движения, а при $\mu = 4$ уравнение (88.3) совпадает с законом сохранения энергии *).

*) То, что индекс μ в (88.3) стоит внизу, а в (38.10) вверху, не существенно, поскольку из соотношения $(T^\mu)_\mu = 0$ следует и $(g_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu})_\nu = (T^\nu)_\nu = 0$ ввиду равенства $(g_{\alpha\mu})_\nu = 0$ (см. уравнение (35) из Приложения III).

Итак, можно считать, что уравнение (88.2) в общей теории относительности является аналогом обычного закона сохранения энергии — импульса, если принять величину

$$J_\mu = \iiint (\mathfrak{E}_\mu^4 + t_\mu^4) dx^1 dx^2 dx^3 \quad (88.4)$$

при $\mu = 1, 2, 3$ за определение импульса данной области и при $\mu = 4$ за определение ее энергии. Согласно этому определению можно теперь рассматривать величины \mathfrak{E}_μ^4 в качестве плотностей энергии и импульса вещества, а t_μ^4 — как плотность потенциальной гравитационной энергии и импульса. Введение потенциальной энергии и импульса, необходимое для аналогии с обычными законами сохранения энергии и импульса, приводит к тому, что полная собственная энергия изолированной системы может не быть постоянной, как было замечено в конце § 86.

Итак, с помощью (88.4) мы ввели величины J_μ , которые можно рассматривать как энергию и импульсы конечной системы, не составляющие, однако, настоящего ковариантного вектора. Тем не менее эти величины определены во всех системах координат формулой (88.4) и уравнения, в которых фигурируют J_μ , являются ковариантными, т. е. справедливыми во всех системах координат.

Физический смысл величин J_μ наиболее легко понять, применив их для описания изолированной системы. Рассмотрим изолированную систему с границей, находящейся в окружающем пустом пространстве на достаточном удалении, так что можно пренебречь кривизной пространства — времени для точек на границе и вне ее. Область пространства внутри этой поверхности можно тогда рассматривать как трубу в окружающем «плоском» пространстве — времени, и мы можем выбрать координаты так, чтобы они непрерывным образом переходили в какие-то галилеевы координаты специальной теории относительности, заданные вне трубы.

Легко видеть, что при таком выборе координат общий закон сохранения энергии — импульса (88.2) для такой изолированной системы переписывается в простой форме:

$$\frac{dJ_\mu}{dx^4} = 0, \quad (88.5)$$

поскольку правая часть (88.2) равна нулю. Последнее же следует из формулы (87.16) и нашего предположения, что кривизной пространства — времени на поверхности цилиндра можно пренебречь.

Далее, можно показать, что величины J_μ не зависят от преобразований системы координат внутри цилиндра, при том условии, однако, что преобразованные системы координат совпадают с галилеевой системой, заданной вне цилиндра. В подтвержде-

ние просто заметим, что всегда можно ввести дополнительную третью систему координат, которая вне цилиндра совпадала бы с обычной галилеевой системой, а внутри цилиндра в один момент «времени» x^4 (определенного вне цилиндра) совпадала бы с первоначальной системой, а в некоторый более поздний момент «времени» x^4 совпадала бы с преобразованной системой. Тогда, поскольку величины J_μ согласно (88.5) не должны зависеть от x^4 во всех трех системах координат, мы можем сделать вывод, что эти величины идентичны для всех трех систем координат.

В дополнение можно показать, что величины J_μ преобразуются как компоненты четырехмерного вектора при линейных преобразованиях, соответствующих переходам к каким-либо новым наборам галилеевых координат вне цилиндра. Строгое доказательство этого утверждения довольно сложно, и мы не будем его здесь проводить (см. книгу Паули [38]).

Подытоживая предыдущее, мы видим, что в случае изолированной системы физический смысл величин J_μ можно понять из того, что (1) при предельном переходе они переходят в величины, которые в специальной теории относительности приняты как энергия и импульс; (2) они подчиняются законам сохранения, если мы вводим координаты, переходящие в галилеевы в «плоском» пространстве — времени вне системы; (3) они не зависят от выбора системы координат внутри области, в которой существенно кривизна пространства — времени; (4) они зависят от выбора галилеевых систем координат в окружающем «плоском» пространстве — времени таким же образом, как и величина $m_0 dx^\mu/ds$, которую можно рассматривать (см. 28.4) как определение импульса и энергии частицы в специальной теории относительности. Эти замечания должны помочь нам представить себе физическую природу введенных величин.

§ 89. Плотности энергии и импульса, записанные в виде дивергенций

Для некоторых наших дальнейших применений законов сохранения энергии — импульса удобно переписать и сами плотности энергии и импульса ($\mathfrak{E}_\mu^4 + t_\mu^4$) в виде дивергенций. Для этого объединим выражения (84.1) для \mathfrak{E}_μ^v и (87.12) для t_μ^v следующим образом:

$$8\pi (\mathfrak{E}_\mu^v + t_\mu^v) = -\mathfrak{R}_\mu^v + \frac{1}{2} g_\mu^\nu \mathfrak{R} - \frac{1}{2} g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial g^{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} g_\mu^v \mathfrak{E}. \quad (89.1)$$

Интересно отметить, что Λ -член при этом исчезает из последнего выражения, даже если космологическая постоянная и не точно равна нулю. Подстановки величин (87.6) и (87.9) в правую

часть преобразуют (89.1) к виду

$$\begin{aligned} 8\pi (\mathfrak{E}_\mu^{\nu} + t_\mu^{\nu}) = \\ = -g^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \xi}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + g^{\alpha\nu} \frac{\partial \xi}{\partial g_\mu^{\alpha\alpha}} + \frac{1}{2} g_\mu^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_\gamma^{\alpha\beta}} \right) - \frac{1}{2} g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_\nu^{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Это можно записать и по-другому:

$$\begin{aligned} 8\pi (\mathfrak{E}_\mu^{\nu} + t_\mu^{\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(-g^{\alpha\nu} \frac{\partial \xi}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + \frac{1}{2} g_\mu^{\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_\gamma^{\alpha\beta}} \right) + \\ + g_\nu^{\alpha\nu} \frac{\partial \xi}{\partial g_\mu^{\alpha\alpha}} + g^{\alpha\nu} \frac{\partial \xi}{\partial g_\mu^{\alpha\alpha}} - \frac{1}{2} g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_\nu^{\alpha\beta}}. \quad (89.2) \end{aligned}$$

Пользуясь затем определениями величин, входящих в это выражение, можно показать путем довольно длинных последовательных преобразований [65], что сумма последних трех членов в полученном выражении тождественно равна нулю.

В правой части, таким образом, остается лишь дивергенция, т. е.

$$8\pi (\mathfrak{E}_\mu^{\nu} + t_\mu^{\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(-g^{\alpha\nu} \frac{\partial \xi}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + \frac{1}{2} g_\mu^{\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_\gamma^{\alpha\beta}} \right). \quad (89.3)$$

Это соотношение окажется полезным при нахождении релятивистских плотностей энергии и импульса.

§ 90. Предельные значения некоторых величин на больших расстояниях от изолированной системы

В следующем параграфе с помощью уравнения (89.3) мы получим выражения для полной энергии и импульса изолированной материальной системы. Предварительно вычислим предельные (соответствующие большим расстояниям от системы) значения некоторых величин, стоящих в правой части этого выражения.

При вычислениях используем систему квазигалилеевых координат (x, y, z, t) , которую выберем так, чтобы наша материальная система все время находилась вблизи начала координат $x=y=z=0$ и чтобы интервал принимал галилееву форму на очень больших расстояниях от начала координат. Вследствие этого интервал на достаточном удалении от начала координат можно описывать приближенной шварцшильдовской формулой (82.15), а именно:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2m}{r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2, \quad (90.1)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad m = \text{const}, \quad (90.2)$$

так как на достаточно больших расстояниях поле благодаря расположению системы сферически симметрично, а также статично в силу того, что система изолирована. Последнее означает, что мы считаем, что на этих расстояниях изменения, происходящие внутри системы, не влияют на метрику и что термодинамическими процессами, протекающими внутри системы, можно пренебречь. Будем опускать члены порядка (m/r) , считая их малыми по сравнению с единицей. Тогда легко убедиться в том, что символы Кристоффеля, соответствующие введенной метрике, имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\mu}^{\mu} &= -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^{\mu}}, & \Gamma_{\mu\mu}^{\nu} &= \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^{\nu}}, \\ \Gamma_{\nu\mu}^{\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} &= \pm \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^{\nu}} \begin{cases} \mu = 4, \\ \mu \neq 4, \end{cases} & \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (90.3)$$

где μ , ν и σ — различные индексы. Заметим, что практически в соответствии с (90.2) часть этих величин исчезает, поскольку не зависит от r и $x^4 = t$.

С помощью этих выражений для символов Кристоффеля и выражения (87.5) для $\partial \mathfrak{L} / \partial g_{\alpha}^{\mu\nu}$ можно получить в явном виде величины, стоящие в правой части (89.3), которые будут необходимы нам в следующем параграфе. Вычислим их с той же степенью точности, что и символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{\alpha 4}} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{14}} = -\Gamma_{14}^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{4\mathfrak{e}}^{\mathfrak{e}} = 0, \\ g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_2^{\alpha 4}} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_2^{14}} = -\Gamma_{14}^2 = 0, \\ g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{\alpha 4\alpha}} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{44}} = -\Gamma_{44}^1 = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}, \\ g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{\alpha\beta}} &= -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{11}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{22}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{33}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{44}} = \\ &= +\Gamma_{11}^1 - \frac{1}{2} \Gamma_{1\mathfrak{e}}^{\mathfrak{e}} - \frac{1}{2} \Gamma_{1\mathfrak{e}}^{\mathfrak{e}} + \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{44}^1 = \\ &= \frac{m}{r^2} \left\{ -\frac{\partial r}{\partial x} - \left(-\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \right\} = \\ &= \frac{2m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией относительно x , y , и z и заменив производные r по координатам направляющими косинусами радиуса-вектора, запишем эти выражения окончательно в виде

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_1^{\alpha 4}} = g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_2^{\alpha 4}} = g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_3^{\alpha 4}} = 0, \quad (90.4)$$

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_1^{\alpha 4}} = -\frac{m}{r^2} \cos(nx),$$

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_2^{\alpha 4}} = -\frac{m}{r^2} \cos(ny), \quad (90.5)$$

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_3^{\alpha 4}} = -\frac{m}{r^2} \cos(nz),$$

$$g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_1^{\alpha \beta}} = \frac{2m}{r^2} \cos(nx),$$

$$g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_2^{\alpha \beta}} = \frac{2m}{r^2} \cos(ny), \quad (90.6)$$

$$g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_3^{\alpha \beta}} = \frac{2m}{r^2} \cos(nz).$$

Этот перечень формул дает нам на больших расстояниях от материальной системы предельные значения тех величин, которые будут нам необходимы, в следующем параграфе.

§ 91. Масса, энергия и импульс изолированной системы

С помощью найденных выше величин мы можем теперь получить выражения для энергии и компонент импульса изолированной системы. Исходя из (88.4) и (89.3), выразим энергию системы в виде

$$U = J_4 = \iiint (\mathfrak{E}_4 + \mathfrak{t}_4) dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_4^{\alpha 4}} + \frac{1}{2} g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_4^{\alpha \beta}} \right) dx dy dz, \quad (91.1)$$

что справедливо, если интегрирование производится по достаточно большому объему, окружающему рассматриваемую систему. Пусть этот объем имеет вид сферы радиуса r вокруг начала координат. Уславливаясь суммировать по дважды встречающемуся индексу γ и используя теорему Гаусса, преобразуем первые три члена суммы в поверхностные интегралы. Подставляя

в правую часть (91.1) предельные величины (90.5) и (90.6), соответствующие достаточно большим r , получаем

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \int \frac{2m}{r^2} \{ \cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) \} d\sigma + \\ + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\alpha}} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz. \quad (91.2)$$

Сразу видно, что первый член в этом выражении равен m . Второй член в этом выражении не может быть вычислен в явном виде, поскольку в нем производится интегрирование по всему объему сферы, включая область, окружающую начало координат, где вид интервала неизвестен. Тем не менее, так как U — постоянная, в соответствии с законами сохранения энергии для изолированной системы (88.5) и поскольку m — постоянная, по определению характеризующая статическое поле на больших расстояниях, очевидно, что второй член правой части (91.2) также должен быть постоянным, а следовательно, должен быть равен просто нулю, так как интеграл не может неограниченно изменяться с постоянной конечной скоростью. Таким образом, энергия изолированной системы выражается формулой Эйнштейна:

$$U = m. \quad (91.3)$$

Импульс системы в используемых координатах может быть определен подобным же образом. В соответствии с определениями (88.4) и (89.3) компоненты импульса в направлении оси x можно записать в виде

$$J_1 = \int \int \int (\mathfrak{I}_1^4 + \mathfrak{I}_1^4) dx dy dz = \frac{1}{8\pi} \int \int \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\nu\alpha}} \right) dx dy dz.$$

Поступим с этим выражением так же, как и с (91.1), т. е. отбросим нулевые члены, пользуясь (90.4), и в результате получим

$$J_1 = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\nu\alpha}} \right) dx dy dz = 0. \quad (91.4)$$

В итоге компоненты импульса J_1 , J_2 и J_3 и энергия $J_4 = U$ изолированной материальной системы, находящейся все время в начале квазигалилеевой системы координат, задаются набором

$$J_\mu = (0, 0, 0, m). \quad (91.5)$$

Три компоненты импульса оказываются равными нулю, конечно, из-за специального выбора системы координат, при котором

наша система покоится в начале координат. Величина m , полученная для энергии системы, также вполне понятна, она указывает, что полная энергия изолированного объекта — это величина, входящая в шварцшильдовское приближение, которое определяет гравитационное поле на больших расстояниях от объекта.

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, отмеченным уже в конце § 88, что компоненты J_μ преобразуются подобно компонентам ковариантного вектора при линейных преобразованиях, соответствующих заменам одной системы галилеевых координат другой в окружающем «плоском» пространстве — времени. Тогда согласно (91.5) можно записать для J^μ более общее контрвариантное выражение:

$$J^\mu = m \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (91.6)$$

в котором можно считать, что dx^μ/ds соответствует приближенно скорости системы как целого относительно используемой системы координат.

§ 92. Вычисление энергии квазистатической изолированной системы при помощи интеграла только по занимаемому ею пространству

Для некоторых целей оба найденных выше выражения для энергии изолированной системы

$$U = \iiint (\mathfrak{E}_4^4 + t_4^4) dx dy dz \quad \text{и} \quad U = m \quad (92.1)$$

могут оказаться неудобными. Недостаток первого выражения состоит в том, что интегрирование в нем должно производиться по объему значительно большему, чем действительные размеры системы, так как t_4^4 , вообще говоря, не равна нулю в пустом пространстве. Второе же выражение обладает тем недостатком, что оно не дает никаких рецептов для вычисления энергии по действительным распределениям материи и излучения внутри системы. Для частного класса систем (назовем их квазистатическими) можно получить другие выражения, в некоторых отношениях более удобные.

Подставляя в первое из двух выражений (92.1) плотность потенциальной энергии t_4^4 (87.12), получаем

$$U = \iiint \left(\mathfrak{E}_4^4 + \frac{\mathfrak{g}}{16\pi} - \frac{1}{16\pi} g_4^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz.$$

Космологический член здесь опущен, так как мы будем применять эту формулу лишь к малым системам, относительно которых

допустимо утверждение, что они окружены «плоским» пространством — временем. Подставляя сюда выражение для \mathfrak{E} (87.9), имеем

$$U = \iiint \left[\mathfrak{E}_4^4 - \frac{\mathfrak{R}}{16\pi} + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) - \frac{1}{16\pi} g_4^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right] dx dy dz.$$

Кроме того, взяв выражение для \mathfrak{R} в соответствии с (78.11):

$$\mathfrak{R} = 8\pi \mathfrak{E} = 8\pi (\mathfrak{E}_1^1 + \mathfrak{E}_2^2 + \mathfrak{E}_3^3 + \mathfrak{E}_4^4),$$

разложив третий член подынтегральной функции и объединив его с четвертым, перепишем выражение для U следующим образом:

$$\begin{aligned} U = & \iiint \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{16\pi} \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_1^{\alpha\beta}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_2^{\alpha\beta}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_3^{\alpha\beta}} \right) \right] dx dy dz + \frac{1}{16\pi} \iiint g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (92.2)$$

Далее, введем теперь условия, что координаты (x, y, z, t) — квазигалилеева типа, как и в двух предыдущих параграфах, и что физическая система постоянно находится в начале координат. Тогда второй интеграл в правой части (92.2) легко вычислить с помощью теоремы Гаусса; при этом область интегрирования удобно выбрать в виде сферы достаточно большого радиуса, а значения на ее границе — в виде предельных величин (90.6). Величина этого интеграла оказывается равной $(1/2)t$ и согласно (91.3) равна также $(1/2)U$. Учитывая последнее, перепишем (92.2) так:

$$\begin{aligned} U = & \iiint (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{8\pi} \iiint g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (92.3)$$

И наконец, определим квазистатическую систему как систему, в которой изменения происходят за «время» t , настолько большое, что в правой части (92.3) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым. Естественно, что это выполняется строго лишь для состояний медленно меняющихся или равновесных. Для энергии таких систем мы можем использовать простое выражение [65]:

$$U = \iiint (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3) dx dy dz. \quad (92.4)$$

Это выражение обладает тем значительным преимуществом, что интегрирование в нем можно производить лишь по области, действительно занимаемой веществом или электромагнитным полем, поскольку величины \mathfrak{E}_μ^ν равны нулю в пустом пространстве.

ЧАСТЬ II
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

§ 93. Общие эйнштейновские решения уравнений поля
в случае слабых полей

Как упоминалось в начале этой главы, все законы релятивистской механики содержатся в уравнениях Эйнштейна

$$-8\pi T_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2} R g_\mu^\nu + \Lambda g_\mu^\nu, \quad (93.1)$$

которые связывают тензор энергии — импульса с геометрией пространства — времени. В первой части мы изучили те следствия механики, которые вытекают из условия равенства нулю тензорной дивергенции тензора энергии — импульса T_μ^ν , возникающего из-за того, что дивергенция правой части (93.1) равна нулю тождественно. Теперь мы перейдем к более общей проблеме решения десяти дифференциальных уравнений (93.1) и тем самым свяжем компоненты тензора энергии — импульса T_μ^ν с компонентами метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

Для случая достаточно слабых полей эта проблема была полностью решена приближенным решением Эйнштейна для этих уравнений поля. В случае сильных полей мы не можем получить общего решения полевых уравнений, но, вводя специальные предположения относительно физической природы рассматриваемой системы, можем написать ряд упрощенных выражений, связывающих компоненты T_μ^ν с компонентами метрики $g_{\mu\nu}$ и ее производными. Эти выражения оказываются полезными при решении уравнений в некоторых частных случаях.

Приступим теперь к нахождению общего приближенного решения, впервые полученного Эйнштейном. Для этого рассмотрим слабое гравитационное поле, которое допускает введение координат, мало отличающихся от галилеевых. Компоненты метрического тензора в этом случае будут выглядеть следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (93.2)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — постоянные галилеевы значения $g_{\mu\nu}$: ± 1 и 0 , а $h_{\mu\nu}$ — малые добавки. Величины $h_{\mu\nu}$ и их производные по координатам

будем считать членами первого порядка, а квадратами их будем пренебрегать. Удобно также ввести величины

$$h_{\mu}^{\lambda} = \delta^{\lambda\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad h = h_{\alpha}^{\alpha} = \delta^{\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda}, \quad (93.3)$$

где $\delta^{\mu\nu}$ — галилеевы значения $g^{\mu\nu}$. Рассмотрим теперь выражение для свернутого тензора Римана — Кристоффеля (77.1). Естественно исключить из него члены высших порядков, что дает

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right\} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial^2 h_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 h_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Производя перегруппировки и замены немых индексов и используя определения (93.3), последнюю строку можно переписать так:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} \right). \quad (93.4)$$

Покажем теперь, что это соотношение можно разбить на два следующих:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \quad (93.5)$$

и

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} = 0. \quad (93.6)$$

Действительно, в соответствии с (93.5) и нашим первоначальным выражением для тензора энергии — импульса (93.1) мы можем, очевидно, опуская космологический член, написать:

$$\begin{aligned} -16\pi T_{\mu}^{\nu} &= 2R_{\mu}^{\nu} - g_{\mu}^{\nu} R = \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = \\ &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right). \quad (93.7) \end{aligned}$$

Это «волновое уравнение» имеет хорошо известное решение, близкое к тому, что используется в теории запаздывающих потенциалов:

$$\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[-16\pi T_{\mu}^{\nu}]}{r} dx dy dz. \quad (93.8)$$

Интегрирование здесь производится по всему пространственному объему; r является расстоянием от точки наблюдения, в которой мы вычисляем $\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}h\right)$, до соответствующего элемента объема $dx dy dz$; квадратные скобки указывают на то, что следует использовать значения T_{μ}^{ν} , соответствующие моменту времени более раннему, нежели интересующий нас (при этом интервал между ними должен равняться времени, которое необходимо для того, чтобы сигнал, обладающий единичной скоростью, дошел от рассматриваемого объема интегрирования $dx dy dz$ до точки наблюдения).

Покажем теперь, что это решение совместно с условием (93.6). Дифференцируя (93.8), можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(h_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\alpha} h \right) = -4 \int \frac{[(\partial/\partial x^{\alpha}) T_{\mu}^{\alpha}]}{r} dx dy dz.$$

Согласно (93.7), однако, тензор энергии — импульса T_{μ}^{α} — величина первого порядка, а потому, в соответствии с фундаментальным соотношением (84.5), дивергенция тензора энергии — импульса является величиной второго порядка. Следовательно, с заданной степенью точности получаем

$$\frac{\partial h_{\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}.$$

Подставляя в (93.6) последнее выражение и аналогичное выражение для ν , легко проверить, что найденное соотношение обеспечивает справедливость условия (93.6).

Итак, мы убедились в том, что полученное Эйнштейном выражение (93.8)

$$\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = -4 \int \frac{[T_{\mu}^{\nu}]}{r} dx dy dz \quad (93.9)$$

действительно является приближенным решением уравнений поля. Это решение очень полезно в случае слабых полей, поскольку позволяет непосредственно вычислить малые отклонения $h_{\mu\nu}$ метрического тензора от его галилеевых значений, если тензор энергии — импульса известен как функция координат. Хотя методика, приводящая к решению (93.9), годна лишь в случае слабых полей, следует особо отметить, что она не налагает никаких ограничений на скорость вещества, создающего поле. Это большой шаг вперед по сравнению с рассмотрением на ньютоновском уровне, на котором были плохо известны и механизм, и скорость распространения гравитационных эффектов.

В соответствии с истолкованием правой части выражения (93.9) мы должны, очевидно, сделать вывод, что гравитационные эффекты в рассматриваемой системе координат распространяются с единичной скоростью, т. е. с той же скоростью, что и свет. Кроме того, поскольку (93.7) имеет вид «волнового уравнения», можно, очевидно, ожидать, что существуют гравитационные волны, которые распространяются и переносят энергию с той же самой скоростью. Процессы испускания и поглощения этих волн, переносящих, естественно, лишь крайне малые количества энергии, были исследованы Эйнштейном [66].

Тирринг и Лэнс [67] использовали решения (93.9) для обсуждения того, как влияет вращение центрального астрономического тела на окружающее его гравитационное поле и, следовательно, на движение спутников. Эффекты, вызываемые такими вращениями, оказались, однако, в действительности слишком малыми, чтобы представлять практический интерес для астрономов. Тирринг нашел еще одно применение этих решений в другой аналогичной задаче; он вычислил гравитационное поле внутри тонкой вращающейся материальной оболочки [68]. Результат оказался весьма интересным и прозрачным физически: вращение оболочки приводит, как и следовало ожидать, к возникновению сил, аналогичных центробежным и кориолисовым силам в обычной механике. В следующей главе эйнштейновские решения (93.8) будут использованы для нахождения гравитационных полей, создаваемых пучками и импульсами света.

§ 94. Интервалы для систем, обладающих сферической симметрией

Хотя у нас нет общего решения полевых уравнений Эйнштейна, исключая разобранный уже случай слабых полей, мы можем все же часто догадаться, какой вид должно иметь решение, руководствуясь характером рассматриваемой физической проблемы, а затем исследовать свойства этого предполагаемого решения. Так, например, если интересующая нас физическая система обладает пространственной сферической симметрией, координаты удобно выбрать так, чтобы форма интервала отражала свойства симметрии.

Приведем наиболее общий вид сферически симметричного интервала:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2 + 2a dr dt. \quad (94.1)$$

Здесь λ , μ , ν и a — функции только r и t , а коэффициенты $-e^\lambda$, $-e^\mu$ и $+e^\nu$ заданы в экспоненциальной форме для того, чтобы пространственные координаты r , θ и φ явным образом отличались от временной t .

Эту общую форму сферически симметричного интервала легко, однако, упростить, сделав ряд преобразований. Начнем с того, что введем новую пространственную переменную r' , определив ее уравнением

$$r'^2 = e^{\mu} r^2. \quad (94.2)$$

Подставив ее в (94.1) и опустив штрих, легко убедиться, что интервал примет вид

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2 + 2a dr dt, \quad (94.3)$$

где λ , ν и a — уже новые функции новых переменных r и t .

Попытаемся теперь исключить в (94.3) смешанные произведения. Для этого введем новую переменную t' с помощью уравнения

$$dt' = \eta (a dr + e^{\nu} dt), \quad (94.4)$$

где η — интегрирующий множитель, превращающий правую часть в полный дифференциал. В соответствии с (94.4) имеем

$$e^{\nu} dt'^2 + 2a dr dt = \frac{dt'^2}{\eta^2 e^{\nu}} - \frac{a^2}{e^{\nu}} dr^2. \quad (94.5)$$

Подставив это в (94.3) и опустив штрихи, придадим выражению для интервала простой стандартный вид:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt'^2, \\ \lambda = \lambda(r, t), \quad \nu = \nu(r, t), \quad (94.6)$$

где λ и ν — функции, зависящие только от введенных выше r и t [69].

Возможность исключения единственного смешанного произведения путем введения интегрирующего множителя (94.4) сильно упрощает рассмотрение задач со сферической симметрией.

Для наших целей, однако, более удобна несколько иная запись сферически симметричных интервалов. Она следует из (94.6), если ввести новую переменную r' с помощью соотношения

$$\frac{dr'}{r'} = e^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{dr}{r}. \quad (94.7)$$

Используя эту подстановку и опуская штрихи, можно выразить интервал в виде

$$ds^2 = -e^{\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2, \\ \mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t), \quad (94.8)$$

где μ и ν — функции участвующих здесь r и t . Путем дальнейших очевидных преобразований приведем последнее выражение

к виду

$$ds^2 = -e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\nu dt^2, \quad (94.9)$$

$$\mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Две последние системы координат могут быть названы изотропными.

§ 95. Статический сферически симметричный интервал

Приступим к более подробному обсуждению общих формул, предложенных выше в качестве решений уравнений поля. Чтобы получить из них решения в явном виде, необходимы точные выражения символов Кристоффеля и компонент тензора энергии — импульса через величины, в которых записаны интервалы.

Начнем наше рассмотрение с физических систем, которые являются и статическими, и сферически симметричными. Тогда согласно (94.6) мы можем выразить наш интервал в стандартной форме:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (95.1)$$

$$\lambda = \lambda(r), \quad \nu = \nu(r).$$

Символы Кристоффеля первого рода, соответствующие этой форме интеграла, легко вычислить, используя их определение (73.14); в результате получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda', & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{32}^3 &= \text{ctg } \theta, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ & & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', & & & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu', \end{aligned} \quad (95.2)$$

где штрих означает дифференцирование по r . Символы, содержащие все прочие наборы индексов, исчезают.

Используя эти величины для символов Кристоффеля, мы можем вычислить компоненты $R_{\mu\nu}$ свернутого тензора Римана — Кристоффеля, определяемого выражением (77.2), а компоненты $T_{\mu\nu}$ тензора энергии — импульса получить согласно его определению (81.6). Последний наиболее просто выражается в виде смешанного тензора. Неисчезающие его компоненты выглядят

следующим образом:

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v''}{2} - \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{v' - \lambda'}{2r} \right) - \Lambda, \quad (95.3) \\ 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda. \end{aligned}$$

При нахождении величин (95.2) и (95.3) мы использовали выражение для интервала (94.6).

Можно, конечно, провести аналогичные вычисления и для случая изотропного интервала (94.8):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2, \\ \mu &= \mu(r), \quad \nu = \nu(r). \end{aligned} \quad (95.4)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие этому интервалу, в случае статической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{32}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{33}^1 &= - \left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu' \right) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', & \Gamma_{33}^2 &= - \sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \\ \Gamma_{22}^1 &= - \left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu' \right), & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu - \mu} \nu', \\ \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \end{aligned} \quad (95.5)$$

где штрихи, как и прежде, означают дифференцирование по r , а все другие символы оказываются равными нулю.

Выпишем также неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие этой форме интервала:

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \nu'}{2} + \frac{\mu' + \nu'}{r} \right) - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= -e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu' + \nu'}{2r} \right) - \Lambda, \quad (95.6) \\ 8\pi T_4^4 &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) - \Lambda. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь систему, образованную из *идеальной жидкости*. Перепишем еще раз определение тензора энергии — импульса идеальной жидкости (85.7):

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0, \quad (95.7)$$

или с опущенным индексом:

$$T_\mu^\nu = (\rho_{00} + p_0) g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_\mu^\nu p_0. \quad (95.8)$$

Поскольку, однако, мы ограничиваемся рассмотрением статической задачи, компоненты «скорости» жидкости для обонх исследуемых интервалов выглядят так:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{1}{2}\nu}. \quad (95.9)$$

Подставляя эти величины в (95.8), получаем компоненты тензора энергии — импульса:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = \rho_{00}, \quad (95.10)$$

которые можно для идеальной жидкости подставить в (95.3) и (95.6).

Прежде всего, найденное в случае идеальной жидкости равенство между радиальным натяжением T_1^1 и поперечными натяжениями $T_2^2 = T_3^3$ позволяет получить очень простое выражение для градиента давления. А именно, приравнявая T_1^1 и T_2^2 , взятые из (95.3), получаем

$$e^{-\lambda} \left(\frac{v''}{2} - \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{v' - \lambda'}{2r} - \frac{v'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Умножая это уравнение на $2/r$ и перегруппировывая члены, переписываем его в виде

$$e^{-\lambda} \left(\frac{v''}{r} - \frac{v'}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - e^{-\lambda} \lambda' \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^3} + e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{r} \right) \frac{v'}{2} = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с (95.3) и (95.10), находим, что оно эквивалентно уравнению

$$\frac{dp_0}{dr} + (\rho_{00} + p_0) \frac{v'}{2} = 0, \quad (95.11)$$

которое является релятивистским аналогом ньютоновского

выражения для зависимости давления от гравитационного потенциала:

$$\frac{dp}{dr} + \rho \frac{d\psi}{dr} = 0.$$

Тот же результат (95.11) получается и в случае изотропных координат, если произвести те же операции: приравнять выражения T_1^1 и T_2^2 из (95.6), затем умножить полученное соотношение на $2/r$ и произвести соответствующую перегруппировку.

Таким образом, в случае сферически симметричной статической системы, состоящей из *идеальной жидкости*, мы можем придать интервалу стандартную форму:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \\ \lambda &= \lambda(r), \quad \nu = \nu(r), \end{aligned} \quad (95.12)$$

причем

$$\begin{aligned} 8\pi p_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \\ 8\pi p_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) + \Lambda, \\ 8\pi p_{00} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\ \frac{dp_0}{dr} &= - \frac{(\rho_{00} + p_0) \nu'}{2}, \end{aligned} \quad (95.13)$$

или в изотропной форме:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2, \\ \mu &= \mu(r), \quad \nu = \nu(r), \end{aligned} \quad (95.14)$$

причем

$$\begin{aligned} 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \nu'}{2} + \frac{\mu' + \nu'}{r} \right) + \Lambda, \\ 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu' + \nu'}{2r} \right) + \Lambda, \\ 8\pi p_{00} &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) - \Lambda, \\ \frac{dp_0}{dr} &= - \frac{(\rho_{00} + p_0) \nu'}{2}. \end{aligned} \quad (95.15)$$

В заключение следует заметить, что, выражая интервал через распределения плотности и давления, надо помнить, что си-

стема (95.13) или (95.15) выражает лишь исходные три условия. Это позволяет нам при разрешении этих систем заменять более сложное из двух выражений для давления более простым и физически прозрачным выражением для градиента давления.

§ 96. Внешнее и внутреннее решения Шварцшильда

Прежде чем начать изучение интервалов более сложного вида, покажем, как использовать соотношения, найденные в предыдущем параграфе, для получения явных выражений рассмотренных в нем интервалов. В § 82 мы уже пользовались соотношениями (95.3), получив с их помощью выражения для интервала вблизи точечной притягивающей частицы. Можно, однако, убедиться, что оно равно применимо и к пустому пространству, окружающему конечную статическую сферически симметричную систему. Поэтому впредь будем называть этот результат *внешним решением Шварцшильда*.

Чтобы получить это внешнее решение, будем исходить из выражения для интервала (95.1):

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (96.1)$$

и положим равными нулю все компоненты тензора энергии — импульса (95.3), поскольку мы ищем решение для пустого пространства, окружающего сферу из вещества. Последнее дает нам три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= 0, \\ -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) - \Lambda &= 0, \quad (96.2) \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= 0, \end{aligned}$$

которые, как легко проверить, имеют решение, позволяющее представить интервал в виде (§ 82)

$$\begin{aligned} ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\ + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2, \quad (96.3) \end{aligned}$$

где $2m$ — константа.

Это решение справедливо повсюду в пустом пространстве вне сферы и должно переходить внутри сферы в другое решение, зависящее от свойств вещества, из которого состоит эта сфера.

Чтобы получить такое *внутреннее решение*, разберем вслед за Шварцшильдом частный случай (см. [60], стр. 424), когда рассматриваемая сфера заполнена несжимаемой идеальной жидкостью, имеющей постоянную собственную плотность ρ_{00} . Тогда в соответствии с (95.13) будем считать, что внутренность сферы описывается уравнениями

$$8\pi\rho_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \quad (96.4)$$

$$8\pi\rho_{00} = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \quad (96.5)$$

$$\frac{d\rho_0}{dr} = - \frac{(\rho_{00} + \rho_0) v'}{2}. \quad (96.6)$$

Попытаемся их разрешить, используя условие постоянства плотности внутри сферы ρ_{00} и предполагая, что давление на границе сферы равно нулю.

Поскольку ρ_{00} и Λ постоянны, второе из уравнений, (96.5), нетрудно проинтегрировать. Напишем сразу результат (в справедливости которого легко убедиться, производя дифференцирование):

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} r^2 + \frac{C}{r}.$$

Здесь C — константа интегрирования; приравняем ее нулю, чтобы уничтожить особенность в начале координат, и перепишем решение в виде

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad \text{где } R^2 = \frac{3}{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}. \quad (96.7)$$

Далее, имея в виду найти выражение для v , проинтегрируем уравнение (96.6); результат благодаря постоянству ρ_{00} оказывается очень простым:

$$(\rho_{00} + \rho_0) = \text{const } e^{-\frac{1}{2}v}.$$

Комбинируя его затем с выражениями (96.4) для ρ_0 и (96.5) для ρ_{00} , получаем

$$e^{\frac{1}{2}v} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{r} \right) = \text{const},$$

а подставляя сюда величину $e^{-\lambda}$ из (96.7), приходим к уравнению

$$e^{\frac{1}{2}v} \left(\frac{2}{R^2} + \frac{v'}{r} - \frac{rv'}{R^2} \right) = \text{const},$$

которое, как мы убедимся в дальнейшем, имеет решение

$$e^{1/2 v} = A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad (96.8)$$

где A и B — константы интегрирования.

Исходя из (96.7) и (96.8), мы можем теперь записать внутреннее решение Шварцшильда для жидкой сферы, имеющей постоянную плотность ρ_{00} , в следующем виде:

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + [A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}]^2 dt^2, \quad (96.9)$$

или, производя подстановку

$$\sin \chi = \frac{r}{R}, \quad (96.10)$$

в виде выражения

$$ds^2 = -R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi + \sin^2 \theta d\varphi^2) + (A - B \cos \chi)^2 dt^2, \quad (96.11)$$

из которого следует, что пространственная геометрия внутри жидкости совпадает с геометрией четырехмерной сферической «поверхности».

Давление, соответствующее интервалу (96.9), легко найти с помощью (96.4). Выпишем результат:

$$8\pi p_0 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{3B \sqrt{1 - r^2/R^2} - A}{A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}} \right) + \Lambda. \quad (96.12)$$

Пренебрегая членами, содержащими Λ , которые во всяком случае могут быть существенными лишь на больших расстояниях от начала координат, мы можем затем приравнять нулю давление на границе сферы $r=r_1$ и сшить на этой границе внутреннее решение (96.9) с внешним решением (96.3), придавая стоящим в них константам следующие значения:

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho_{00}}, \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{4\pi}{3} \rho_{00} r_1^3. \quad (96.13)$$

Этим завершается исследование поставленной проблемы.

Для того чтобы найденное решение было действительным, должны выполняться неравенства

$$r_1^2 < R^2, \quad r_1^2 < \frac{3}{8\pi\rho_{00}}, \quad 2m < r_1, \quad (96.14)$$

которые накладывают верхний предел на возможные размеры сферы с данной плотностью и на массу сферы при данном радиусе. Эти ограничения, однако, настолько слабы, что до сих пор не привели ни к каким противоречиям с данными астрофизических наблюдений *).

§ 97. Энергия сферы из идеальной жидкости

Прежде чем закончить обсуждение свойств сферических жидких объемов, покажем, как получить одно весьма простое выражение для полной энергии сферы в квазистатическом случае [65]. Простейший способ решения этой задачи — представление интервала в изотропном виде:

$$ds^2 = -e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\nu dt^2, \quad (97.1)$$

$$\mu = \mu(r), \quad \nu = \nu(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Поскольку координаты x, y, z, t , в которых выражается этот интервал, являются квазигалилеевыми и становятся просто галилеевыми на большом удалении от начала координат, можно записать, согласно (92.4), выражение для энергии рассматриваемой сферы, описываемой интервалом (97.1), следующим образом:

$$U = \iiint (\mathfrak{T}_4^4 - \mathfrak{T}_1^1 - \mathfrak{T}_2^2 - \mathfrak{T}_3^3) dx dy dz =$$

$$= \iiint (T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) e^{\frac{1}{2}(3\mu+\nu)} dx dy dz. \quad (97.2)$$

Подставим сюда, далее, вместо компонент тензора энергии — импульса их выражения через плотность ρ_{00} и давление p_0 (95.10); получаем

$$U = \iiint (\rho_{00} + 3p_0) e^{\frac{1}{2}(3\mu+\nu)} dx dy dz. \quad (97.3)$$

И наконец, замечая, что собственный пространственный объем, соответствующий координатному интервалу $dx dy dz$, равняется

$$dV_0 = e^{\frac{3}{2}\mu} dx dy dz, \quad (97.4)$$

перепишем выражение для энергии статической идеальной жидкой сферы в простой, физически прозрачной форме:

$$U = \int (\rho_{00} + 3p_0) e^{\frac{1}{2}\nu} dV_0, \quad (97.5)$$

*) Более подробный анализ задачи Шварцшильда, в частности вопрос о физическом смысле так называемого «горизонта» $r=2m$, см.: Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, § 100, «Наука», 1973. (Прим. ред.)

где интегрирование следует производить по всему объему рассматриваемой сферы.

Для достаточно слабых полей, т. е. полей, создаваемых сферами, малыми настолько, что ньютонова теория тяготения может рассматриваться как удовлетворительное приближение, выражение (97.5) сводится к соответствующему ньютоновскому аналогу. Убедимся в этом.

В случае слабых полей можно ввести согласно (80.9) обычный ньютоновский потенциал ψ^*):

$$\psi = \frac{1}{2} (g_{44} - 1) = \frac{1}{2} (e^\nu - 1) \approx \frac{1}{2} \nu,$$

и подставить его в выражение для энергии сферы (97.5). Тогда приближенно:

$$e^{1/2\nu} = 1 + \psi. \quad (97.6)$$

В результате получаем

$$U = \int (\rho_{00} + 3p_0) (1 + \psi) dV_0 = \\ = \int \rho_{00} dV_0 + \int \rho_{00} \psi dV_0 + 3 \int p_0 dV_0 + 3 \int p_0 \psi dV_0. \quad (97.7)$$

Это выражение можно, однако, переписать в более наглядной форме. Поскольку слабые поля ψ малы по сравнению с единицей, а p_0 для обычного вещества мало относительно ρ_{00} , мы можем пренебречь последним членом в (97.7) по сравнению с другими членами, а во втором и в третьем членах можем опустить нулевые индексы, которые означают, что соответствующие величины измеряются в собственной системе координат. В итоге имеем

$$U = \int \rho_{00} dV_0 + \int \rho \psi dV + 3 \int p dV. \quad (97.8)$$

Ньютоновская теория позволяет сделать дальнейшие преобразования. Интегрируя по полному объему сферы с радиусом r_1 , получаем

$$3 \int p dV = 3 \int_0^{r_1} 4\pi r^2 p dr = \left[4\pi r^3 p \right]_0^{r_1} - \int_0^{r_1} 4\pi r^3 dp = - \int_0^{r_1} 4\pi r^3 dp,$$

поскольку давление обращается в нуль на границе сферы r_1 . С другой стороны, полную радиальную силу, равную $-4\pi r^2 dp$ и действующую извне на сферический слой вещества dM_r , ограниченный радиусами r и $r+dr$, мы можем приравнять гравитационному притяжению, которое испытывает этот слой:

$$3 \int p dV = \int_0^r \frac{M_r}{r} dM_r.$$

*) Скорость света c в (80.9), как и раньше, положена равной единице.

Или окончательно, так как правая часть этого соотношения выражает, очевидно, работу, необходимую для того, чтобы перенести все вещество, содержащееся в этом слое, на бесконечность, можно воспользоваться обычным выражением для потенциальной энергии и написать:

$$3 \int p dV = - \int \frac{1}{2} \rho \psi dV, \quad (97.9)$$

Подставляя затем (97.9) в (97.8), получаем полную энергию сферического объема жидкости:

$$U = \int \rho_{00} dV_0 + \int \frac{1}{2} \rho \psi dV. \quad (97.10)$$

Таким образом, в ньютоновском приближении релятивистская формула для полной энергии жидкой сферы сводится к сумме полной собственной энергии и потенциальной гравитационной энергии обычной ньютоновской теории. Этот результат, естественно, укрепляет нашу уверенность в практических преимуществах эйнштейновского метода, использующего псевдотензорную плотность потенциальной гравитационной энергии и импульса t_{ν}^{μ} .

§ 98. Нестатический сферически симметричный интервал

Обратимся теперь к наиболее сложному случаю — *нестатическому* сферически симметричному интервалу. Предположим, что в соответствии с (94.6) можно записать решение в стандартной форме:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2, \\ \lambda = \lambda(r, t), \nu = \nu(r, t). \quad (98.1)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие этому интервалу, имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda', & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \dot{\lambda}, & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{14}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \end{aligned} \quad (98.2)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{41}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}, \\
 \Gamma_{32}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} v', \\
 \Gamma_{33}^1 &= -r \sin \theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} v', \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2} \dot{v},
 \end{aligned} \tag{98.2}$$

где штрих означает дифференцирование по r , точка — по t ; все остальные символы исчезают.

Используя эти значения для символов Кристоффеля, можно вычислить неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса *):

$$\begin{aligned}
 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\
 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v''}{2} - \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{v' - \lambda'}{2r} \right) + \\
 &\quad + e^{-v} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda} v}{4} \right) - \Lambda, \tag{98.3} \\
 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\
 8\pi T_4^1 &= -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
 8\pi T_1^4 &= e^{-v} \frac{\dot{\lambda}}{r}.
 \end{aligned}$$

Интересно сравнить эти выражения для компонент тензора энергии — импульса с соответствующими выражениями (95.3), полученными в статическом случае. Как указывал Лемэтр, разница только в том, что появляются дополнительные члены в компонентах поперечных тензоров натяжений T_2^2 и T_3^3 и новые отличные от нуля компоненты T_4^1 и T_1^4 . Грубо говоря, переход от статического случая к нестатическому соответствует появлению поперечной волны, связанной с радиальным потоком энергии.

*) Эти величины для символов Кристоффеля и для компонент тензора энергии — импульса были вычислены Б. Подольским и автором. Величины для T_{μ}^{ν} согласуются с результатами Лемэтра [69], рассматривавшего этот же интервал.

Можно, конечно, ввести в рассматриваемом нами случае сферической симметрии изотропные координаты и предположить, что решение согласно (94.8) имеет вид

$$ds^2 = -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2, \\ \mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t). \quad (98.4)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие этому интервалу, равны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', \\ \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2} e^{\mu-\nu} \dot{\mu}, & \Gamma_{22}^1 &= -\left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu'\right), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{22}^4 &= \frac{1}{2} r^2 e^{\mu-\nu} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ \Gamma_{14}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, & \Gamma_{24}^2 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', & & \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{41}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{32}^3 &= \text{ctg } \theta, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \\ \Gamma_{33}^1 &= -\left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu'\right) \sin^2 \theta, & \Gamma_{42}^2 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{43}^3 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{33}^4 &= \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta e^{\mu-\nu} \dot{\mu}, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\mu} \nu', \\ \Gamma_{34}^3 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2} \dot{\nu}, \end{aligned} \quad (98.5)$$

где штрих опять-таки означает дифференцирование по r , точка — по t , а символы со всеми прочими комбинациями индексов равняются нулю.

Неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие этой форме интервала, выглядят следующим

образом*):

$$\begin{aligned}
 8\pi T_1^1 &= -e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'v'}{2} + \frac{\mu' + v'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{2} \right) - \Lambda, \\
 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu' + v'}{2r} \right) + \\
 &\quad + e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{2} \right) - \Lambda, \\
 8\pi T_4^4 &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) + \frac{3}{4} e^{-\nu} \dot{\mu}^2 - \Lambda, \\
 8\pi T_4^1 &= e^{-\mu} \left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}v'}{2} \right), \\
 8\pi T_1^4 &= -e^{-\nu} \left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}v'}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{98.6}$$

§ 99. Теорема Биркгоффа

Выражение (98.3) для тензора энергии — импульса, соответствующее стандартной форме интервала (98.1), дает возможность получить без труда важную теорему, доказанную впервые Биркгоффом [70].

Рассмотрим сферически симметричное тело, окруженное пустым пространством, свободным от вещества и излучения. В этом пустом пространстве все компоненты тензора энергии — импульса (98.3) равны нулю, в частности, T_4^1 и $T_1^4 = 0$, откуда вытекает, что

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{99.1}$$

Однако при условии $\dot{\lambda} = 0$ выражение для тензора энергии — импульса (98.3) становится по форме идентичным выражению (95.3), найденному в статическом случае; следовательно, в пустом пространстве, окружающем сферу, опять-таки справедливо внешнее решение Шварцшильда (§ 96)

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{99.2}$$

где m , как и раньше, — постоянная, не зависящая от времени, так что остается справедливым (99.1).

*) Впервые эти величины для символов Кристоффеля и для компонент тензора энергии — импульса были вычислены Б. Подольским. Впоследствии эти результаты проверялись Динглем с помощью полученных им более общих формул, которые приведены у нас ниже, в § 100.

Таким образом, одного только условия сферической симметрии достаточно, чтобы получить внешнее статическое решение Шварцшильда в пустом пространстве, окружающем сферу, заполненную веществом *).

В сфере могут происходить сферически симметричные пульсации, не сопровождающиеся какими-либо потерями массы или энергии, в форме гравитационных волн. Реальная потеря энергии требует отказа от условия пустоты пространства вокруг сферы и допущения потоков вещества и излучения в нем.

§ 100. Более общая форма интервала

В заключение настоящей главы приведем символы Кристоффеля и компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие более общему виду интервала, которые были вычислены Динглем [71].

Дингль исходил из следующей формы интервала:

$$ds^2 = -A(dx^1)^2 - B(dx^2)^2 - C(dx^3)^2 + D(dx^4)^2. \quad (100.1)$$

Здесь A , B , C и D — произвольные функции координат; все эти четыре функции должны быть существенно положительными, чтобы x^1 , x^2 , x^3 были пространственноподобными, а x^4 — времениподобными координатами. Эта форма интервала является более общей, нежели все рассмотренные нами ранее. Единственное предположение состоит в том, что можно избавиться от перекрестных произведений; но при этом не предполагается сферической симметрии.

Символы Кристоффеля, соответствующие такому интервалу, таковы:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \Gamma_{11}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^1} & \Gamma_{21}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^2} & \Gamma_{31}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^3} & \Gamma_{41}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^4} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2B} \frac{\partial A}{\partial x^2} & \Gamma_{21}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^1} & \Gamma_{31}^2 = 0 & \Gamma_{41}^2 = 0 \\ \Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{2C} \frac{\partial A}{\partial x^3} & \Gamma_{21}^3 = 0 & \Gamma_{31}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^1} & \Gamma_{41}^3 = 0 \\ \Gamma_{11}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial A}{\partial x^4} & \Gamma_{21}^4 = 0 & \Gamma_{31}^4 = 0 & \Gamma_{41}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^1} \\ \Gamma_{12}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^2} & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2A} \frac{\partial B}{\partial x^1} & \Gamma_{32}^1 = 0 & \Gamma_{42}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^1} & \Gamma_{22}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^2} & \Gamma_{32}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^3} & \Gamma_{42}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^4} \end{array}$$

*) Теорема Биркгоффа представляет обобщение теоремы Ньютона о том, что поле сферического распределения масс эквивалентно полю точечного источника. (Прим. ред.)

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{12}^3 = 0 \\
 \Gamma_{12}^4 = 0 \\
 \Gamma_{13}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{13}^2 = 0 \\
 \Gamma_{13}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{13}^4 = 0 \\
 \Gamma_{14}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{14}^2 = 0 \\
 \Gamma_{14}^3 = 0 \\
 \Gamma_{14}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^1}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2C} \frac{\partial B}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{22}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial B}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{23}^1 = 0 \\
 \Gamma_{23}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{23}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{23}^4 = 0 \\
 \Gamma_{24}^1 = 0 \\
 \Gamma_{24}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{24}^3 = 0 \\
 \Gamma_{24}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^2}
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{c}
 \Gamma_{32}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{32}^4 = 0 \\
 \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2A} \frac{\partial C}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2B} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{33}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{33}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial C}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{34}^1 = 0 \\
 \Gamma_{34}^2 = 0 \\
 \Gamma_{34}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{34}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^3}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \Gamma_{42}^3 = 0 \\
 \Gamma_{42}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{43}^1 = 0 \\
 \Gamma_{43}^2 = 0 \\
 \Gamma_{43}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{43}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{44}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial D}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{44}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{44}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{44}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^4}
 \end{array}
 \right.$$

(100.2)

а компоненты тензора энергии — импульса T_{μ}^{ν} определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 -8\pi T_1^1 = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{BC} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^2)^2} \right) - \frac{1}{BD} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^2)^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{CD} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^3)^2} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{BC^3} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CB^3} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^3} \right)^2 \right\} - \right. \\
 & - \frac{1}{BD^3} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DB^3} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial B}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
 & - \frac{1}{CD^3} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DC^3} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial C}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
 & - \frac{1}{BCD} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^2} + \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} - \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} \right\} - \\
 & \left. - \frac{1}{ABC} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^1} - \frac{1}{ABD} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} - \frac{1}{ACD} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} \right] + \Lambda,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-8\pi T_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AC} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^1)^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{AD} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^1)^2} \right) - \frac{1}{CD} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^3)^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{AC^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CA^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad - \frac{1}{AD^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DA^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial A}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{CD^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DC^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial C}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{ACD} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} - \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} \right\} - \\
&\quad \left. - \frac{1}{ABC} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{1}{ABD} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} - \frac{1}{BCD} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} \right] + \Lambda, \\
-8\pi T_3^3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} \right) - \frac{1}{AD} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^1)^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{BD} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^2)^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{AB^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{BA^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^2} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad - \frac{1}{AD^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DA^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial A}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{BD^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DB^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial B}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{ABD} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} - \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial B}{\partial x^4} \right\} - \\
&\quad \left. - \frac{1}{ABC} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^3} - \frac{1}{ACD} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} - \frac{1}{BCD} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} \right] + \Lambda, \\
-8\pi T_4^4 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} \right) + \frac{1}{AC} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^1)^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{BC} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^2)^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{AB^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{BA^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{AC^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CA^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{BC^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CB^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^3} \right)^2 \right\} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{ABC} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^3} \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{ABD} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{ACD} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \frac{1}{BCD} \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} \Big] + \Lambda, \\
& -8\pi AT_2^1 = -8\pi BT_1^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial x^1 \partial x^2} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^2} + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{BC} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{1}{BD} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^2} \right], \\
& -8\pi AT_3^1 = -8\pi CT_1^3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{1}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial x^1 \partial x^3} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^3} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \frac{1}{CB} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \frac{1}{CD} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^3} \right], \\
& -8\pi BT_3^2 = -8\pi CT_2^3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{1}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2 \partial x^3} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^3} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \frac{1}{DB} \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \frac{1}{DC} \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^3} \right], \\
& -8\pi AT_4^1 = +8\pi DT_1^4 = \\
& \quad = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^4} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^1 \partial x^4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{1}{DB} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{DC} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^4} \right], \\
& -8\pi BT_4^2 = +8\pi DT_2^4 = \\
& \quad = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2 \partial x^4} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2 \partial x^4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial x^4} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^4} + \frac{1}{CB} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{DC} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^4} \right], \\
& -8\pi CT_4^3 = +8\pi DT_3^4 = \\
& \quad = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^3 \partial x^4} + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^3 \partial x^4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial A}{\partial x^4} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^4} + \frac{1}{BC} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \frac{1}{BD} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^4} \right]. \quad (100.3)
\end{aligned}$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ЧАСТЬ I

КОВАРИАНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

§ 101. Введение

В этой главе мы кратко рассмотрим обычное обобщение электродинамики в общей теории относительности, которое может быть сделано на основе электродинамики специальной теории, изложенной в главе IV. Мы рассмотрим также несколько приложений, которые нам понадобятся впоследствии.

Мы начнем с релятивистского обобщения электронной теории Лоренца, не обращая внимания на ее трудности, о которых мы уже говорили и которые связаны с тем, что теория Лоренца развивается на основе микроскопической точки зрения, игнорируя те ограничения на строгое микроскопическое рассмотрение, которые возникают в соответствии с современным состоянием квантовой теории.

После этого мы уделим немного внимания обобщению той макроскопической теории, которая была развита во второй части главы IV.

§ 102. Обобщенная электронная теория Лоренца. Уравнения поля

В специальной теории относительности мы показали (§ 46), что уравнения Максвелла — Лоренца можно записать с помощью двух векторов, заданных в галилеевых координатах: *обобщенного потенциала* φ^μ , определенного через обычный векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ :

$$\varphi^\mu = (A_x, A_y, A_z, \varphi), \quad (102.1)$$

и *обобщенной плотности тока* J^μ , компоненты которой выража-

ются через собственную плотность заряда ρ_0 и скорость dx^μ/ds или, иначе, через плотность заряда ρ и плотность тока $\rho \mathbf{u}$, заданные в любой системе координат:

$$J^\mu = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\rho \frac{u_x}{c}, \rho \frac{u_y}{c}, \rho \frac{u_z}{c}, \rho \right). \quad (102.2)$$

Эти два вектора позволяют объединить уравнения Максвелла — Лоренца, заданные в галилеевых координатах, которые допустимы и в специальной теории относительности, записав их в виде двух уравнений:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} \quad (102.3)$$

и

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J^\mu. \quad (102.4)$$

Первое уравнение здесь выражает антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ через обобщенный потенциал Φ^μ , а второе связывает этот тензор с вектором тока.

Оба уравнения надо считать справедливыми в «плоском» пространстве — времени специальной теории относительности и записанными в галилеевых координатах. Из принципа эквивалентности, однако, следует, что в общей теории относительности соответствующие им уравнения должны иметь тот же самый вид, если они заданы в естественных координатах рассматриваемой точки. Следовательно, разумно предположить, что путем простой ковариантной формулировки приведенных выше уравнений специальной теории относительности можно получить обобщенные релятивистские уравнения. Займемся этим.

Поставленная задача очень проста. Определения обобщенного потенциала и тока (102.1) и (102.2) вообще не нуждаются в модификации, ибо, задав эти векторы в одной из систем координат, мы можем найти их по правилам тензорных преобразований во всех системах координат. А чтобы получить ковариантную формулировку самих уравнений, нам следует лишь заменить обычное дифференцирование ковариантным. Тогда в качестве уравнений электромагнитного поля в общей теории относительности получим

$$F_{\mu\nu} = (\Phi_\mu)_\nu - (\Phi_\nu)_\mu = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} \quad (102.5)$$

и

$$(F^{\mu\nu})_\nu = J^\mu. \quad (102.6)$$

Заметим, что по внешнему виду первое уравнение вообще не отличается от первоначального, так как оба члена, которые возникают при замене обычного дифференцирования ковариантным и содержат символы Кристоффеля, взаимно уничтожаются.

§ 103. Движение заряженной частицы

В дополнение к уравнениям поля надо ввести в теорию выражение, описывающее движение заряженных частиц. Оно естественно получается путем ковариантного обобщения пятого фундаментального уравнения Максвелла — Лоренца (41.4), дающего силу, которая действует на частицу, движущуюся в электромагнитном поле. Это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\Gamma_{\alpha\beta}^\mu\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{e}{m_0} F_\alpha^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} = 0. \quad (103.1)$$

где e/m_0 — отношение заряда частицы к ее массе покоя, а $F_\alpha^\mu = g^{\mu\nu} F_{\nu\alpha}$ — введенный выше тензор электромагнитного поля. Мы убедимся ниже, что это уравнение учитывает совместное воздействие гравитационного и электромагнитного полей на частицу.

Чтобы показать, что полученное уравнение является разумным обобщением обычного способа задания силы, действующей на заряженную частицу, надо показать, во-первых, что, выражение (103.1) на самом деле записано ковариантным образом, т. е. что оно справедливо во всех системах координат, если оно справедливо в одной, и, во-вторых, что оно сводится в естественных координатах к обычному выражению для силы, действующей на движущуюся частицу.

Чтобы показать ковариантность выражения (103.1), заметим, что его можно переписать в виде

$$\left[\left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)_\alpha + \frac{e}{m_0} F_\alpha^\mu \right] \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right) = 0, \quad (103.2)$$

из которого следует, что оно является тензорным уравнением ранга единица.

Чтобы показать, что в естественных координатах это выражение переходит в обычную формулу для электромагнитного поля, заметим, что символ Кристоффеля обращается в нуль из-за исчезновения гравитационных эффектов в свободно падающей системе отсчета. Используя выражение для тензора поля $F_{\mu\nu}$ в естественных координатах (46.9) и вспоминая, что в соответствии с (20.5) ds/dt можно рассматривать как множитель, характеризующий лоренцево сокращение $\sqrt{1-u^2}$ (где u — обычная скорость частицы в выбранных нами единицах), мы можем

написать вместо (103.1) четыре знакомых нам по форме уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= eE_x + e(u_y H_z - u_z H_y), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= eE_y + e(u_z H_x - u_x H_z), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= eE_z + e(u_x H_y - u_y H_x), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= e(u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z). \end{aligned} \quad (103.3)$$

В принятых нами здесь единицах мы узнаем в этих выражениях обычные уравнения, описывающие воздействие электромагнитного поля на импульс и энергию частицы.

§ 104. Тензор энергии — импульса

Для завершения перевода электродинамики Лоренца в релятивистский вид получим ковариантное выражение для электромагнитного тензора энергии — импульса. Его выражение через тензор поля $F_{\mu\nu}$ дается формулой

$$[T^{\mu\nu}]_{\text{эм}} = -g^{\nu\beta} F^{\mu\alpha} F_{\beta\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (104.1)$$

Легко убедиться, что это выражение действительно удовлетворяет всем необходимым требованиям. Очевидно, что оно ковариантно, поскольку является тензорным уравнением (ранга два). Далее, если использовать записанное в естественных координатах определение тензора поля $F_{\mu\nu}$ (46.9), можно найти, что (104.1) в этих координатах сводится к выражению для тензора энергии — импульса из специальной теории относительности, т. е. к формулам (46.20) и (46.21). Приведем для примера несколько типичных компонент $[T^{\mu\nu}]_{\text{эм}}$:

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \\ T^{12} &= -(E_x E_y + H_x H_y), \\ T^{14} &= (E_y H_z - E_z H_y), \\ T^{44} &= \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \end{aligned} \quad (104.2)$$

в системе единиц, где $c=1$.

Воспользуемся теперь обсужденной уже в § 45 возможностью объединения одноименных механических и электрических величин. Тогда закон сохранения энергии — импульса для системы,

обладающей и механическими и электрическими свойствами, запишется в виде ковариантного соотношения:

$$(T^{\mu\nu})_{,\nu} = ([T^{\mu\nu}]_{\text{мех}} + [T^{\mu\nu}]_{\text{эм}})_{,\nu} = 0, \quad (104.3)$$

являющегося аналогом выражения (46.22) из специальной теории относительности.

На этом закончим ковариантную формулировку электронной теории Лоренца, согласующуюся с требованиями общей теории относительности.

§ 105. Обобщенная макроскопическая теория

Как уже говорилось, электронная теория Лоренца не имеет вполне законченного вида из-за ее микроскопического характера. Поэтому интересно показать, что макроскопическую теорию, развитую во второй части главы IV, можно легко выразить в ковариантной форме, пригодной для общей теории относительности.

Аппарат макроскопической теории в специальной теории относительности строился с помощью двух антисимметричных тензоров поля $F^{\mu\nu}$ и $H^{\mu\nu}$ и вектора тока J^μ . Эти три тензора были определены в § 50 в системе галилеевых координат, относительно которой рассматриваемая электромагнитная среда в целом покоилась. В этих координатах указанные тензоры выражаются непосредственно через четыре известных максвелловских вектора: напряженность электрического поля \mathbf{E} , электрическое смещение \mathbf{D} , напряженность магнитного поля \mathbf{H} , магнитную индукцию \mathbf{B} , которые определяются наблюдателем, покоящимся относительно среды, а компоненты вектора тока определяются плотностью тока и электрического заряда, измеряемых тем же наблюдателем.

При построении макроскопической теории в рамках общей теории относительности можно, очевидно, непосредственно воспользоваться тензорами $F^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$ и J^μ , поскольку их можно ввести точно тем же способом, что и раньше, т. е. предположить, что локальный наблюдатель, использующий собственные координаты в выбранной точке, определяет компоненты соответствующих тензоров, которые затем по правилам тензорных преобразований можно перевести в любую нужную систему координат.

Прежде чем приступить к обобщению макроскопической теории, мы должны удостовериться в том, что уравнения в § 50 действительно заданы ковариантным образом. Для первого из двух уравнений это справедливо в его прежней форме

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (105.1)$$

из-за взаимного уничтожения символов Кристоффеля, которые

возникают при переходе к ковариантным производным, но исчезают ввиду антисимметрии тензора $F_{\mu\nu}$. Чтобы второе уравнение поля получить в ковариантной записи, достаточно обычное дифференцирование заменить ковариантным, т. е. написать

$$(H^{\mu\nu})_{;\nu} = J^{\mu}. \quad (105.2)$$

И наконец, чтобы замкнуть систему уравнений макроскопической теории, можно переписать в ковариантной форме и дополнительные уравнения, см. § 51:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} &= e F_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds}, \\ (g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} F_{\delta\beta} + g_{\alpha\delta} F_{\beta\gamma}) \frac{dx^{\alpha}}{ds} &= \\ &= \mu (g_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} H_{\delta\beta} + g_{\alpha\delta} H_{\beta\gamma}) \frac{dx^{\alpha}}{ds}, \quad (105.3) \\ J^{\alpha} - J_{\beta} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\alpha}}{ds} &= \frac{\sigma}{c} g_{\beta\gamma} F^{\gamma\alpha} \frac{dx^{\beta}}{ds}. \end{aligned}$$

Здесь ϵ , μ и σ — соответственно диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и проводимость вещества, измеряемые локальным наблюдателем, а dx^{α}/ds и dx^{β}/ds — обозначения макроскопической скорости среды в рассматриваемой точке. При введении этих дополнительных уравнений мы подразумеваем, конечно, что справедливо обычное приближение, предполагающее, что электромагнитное состояние вещества можно полностью характеризовать в каждой точке, если задать распределения скалярных величин ϵ , μ и σ .

Итак, включение макроскопической теории электромагнетизма в общую теорию относительности оказалось формально простой операцией. Однако полученные уравнения не столь уж просты, и до сих пор они получили лишь ограниченное применение.

ЧАСТЬ II НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 106. Сохранение электрического заряда

Теперь мы рассмотрим некоторые приложения релятивистской электродинамики, результаты которых мы используем в дальнейшем, однако они будут иметь ограниченную применимость вследствие несовершенства электронной теории Лоренца, которое мы уже отмечали выше.

Найдем для начала релятивистский аналог классического закона сохранения электрического заряда.

Вводя тензорные плотности (Приложение III, уравнение (48)), можно переписать второе из уравнений поля (102.6) в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mathfrak{J}^\mu, \quad (106.1)$$

а используя антисимметрию $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \mathfrak{J}^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (106.2)$$

Вместо плотности тока, однако, можно взять формулу (102.2), которая определяет J^μ , и переписать с ее помощью последнее уравнение так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) = 0, \quad (106.3)$$

где ρ_0 — собственная плотность заряда, определяемая локальным наблюдателем, а dx^μ/ds — «скорость» этого заряда.

Чтобы показать наиболее простым образом, что это выражение означает сохранение электрического заряда, удобно рассмотреть его в системе естественных координат данной точки x , y , z и t . Тогда, поскольку тензор $g_{\mu\nu}$ в данной точке будет иметь галилеевы значения, его первые производные по координатам исчезнут, и можно воспользоваться соответствующими соотношениями

$$\sqrt{-g} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} = 0$$

и переписать (106.3) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \right) = 0.$$

Поскольку dt/ds — множитель, характеризующий лоренцево сокращение, последнее соотношение можно переписать еще так:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (106.4)$$

где ρ — плотность заряда, а u_x , u_y , u_z — обычные компоненты скорости в выбранной системе отсчета.

Выражение (106.4) совпадает с обычным уравнением непрерывности для некоей «субстанции» с плотностью ρ . Таким образом, закон сохранения электрического заряда действительно содержится в исходной формуле, что и требовалось доказать.

§ 107. Гравитационное поле заряженной частицы

В качестве второго применения релятивистской электродинамики найдем гравитационное поле, создаваемое заряженной частицей.

Будем считать, что частица покоится в начале системы координат. Тогда, очевидно, можно выразить интервал в стандартной сферически симметричной форме:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (107.1)$$

где λ и ν — функции только от r , исчезающие при больших значениях r . Для того чтобы отыскать λ и ν , рассмотрим сначала электрическое поле, окружающее частицу.

Так как потенциал ϕ_μ в нашем случае — функция только от координаты r , то, подставляя эту функцию в выражение (102.5), которое вводит через этот потенциал полевой тензор $F_{\mu\nu}$, найдем, что единственными ненулевыми компонентами этого тензора могут быть

$$F_{21} = -F_{12}, F_{31} = -F_{13}, F_{41} = -F_{14}.$$

Легко, кроме того, показать, что первые две компоненты также должны исчезать. В самом деле, подставляя F_{21} во второе из двух полевых уравнений (106.1), найдем, что в пространстве, окружающем частицу, справедливы соотношения

$$\frac{\partial g^{2\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial r} [g^{22} g^{11} F_{21} \sqrt{-g}] = \frac{\partial}{\partial r} \left(F_{21} e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\nu)} \sin \theta \right) = 0,$$

откуда

$$F_{21} = \text{const} \cdot e^{\frac{1}{2}(\lambda-\nu)}.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для F_{31} . Далее, известно, что на больших расстояниях от частицы, где λ и ν стремятся к нулю и становятся справедливыми обычные уравнения для электромагнитного поля, компонента F_{21} должна обращаться в нуль. (Это следует из ее определения через напряженность магнитного поля.) Поэтому константу в последнем выражении надо положить равной нулю, откуда вытекает, что F_{21} , а также и F_{31} равны нулю повсюду.

Чтобы найти единственную неисчезающую компоненту полевого тензора F_{41} , еще раз воспользуемся уравнением (106.1):

$$\frac{\partial g^{4\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial r} [g^{44} g^{11} F_{41} \sqrt{-g}] = \frac{\partial}{\partial r} \left(-F_{41} r^2 e^{-\frac{1}{2}(\lambda+\nu)} \sin \theta \right) = 0,$$

из которого следует:

$$-F_{41} = F_{14} = \frac{e}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}, \quad (107.2)$$

где ε — постоянная интегрирования. Обычное определение F_{41} через напряженность электрического поля, справедливое в нашем случае на большом удалении от частицы, позволяет отождествлять $4\pi\varepsilon$ с зарядом частицы в принятых нами хевисайдовых, релятивистских единицах.

Получив это выражение для ненулевой компоненты тензора поля, мы можем теперь подставить его в определение тензора энергии — импульса (104.1). В итоге найдем

$$T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = T_4^4 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{r^4}. \quad (107.3)$$

Сравнивая затем (107.3) с соответствующими выражениями тензора энергии — импульса, записанными через λ и ν в (95.3), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\varepsilon^2}{r^4} &= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ \frac{4\pi\varepsilon^2}{r^4} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right), \\ \frac{4\pi\varepsilon^2}{r^4} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (107.4)$$

Космологическая постоянная Λ здесь положена равной нулю, поскольку она не представляет сейчас интереса. Система уравнений (107.4), как легко убедиться, имеет решение, соответствующее интервалу

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \frac{dr^2}{1 - 2m/r + 4\pi\varepsilon^2/r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\ & + \left(1 - 2m/r + 4\pi\varepsilon^2/r^2 \right) dt^2. \end{aligned} \quad (107.5)$$

Это выражение замечательно тем, что показывает, какой вклад дает энергия электрического поля, окружающего заряд, в кривизну пространства — времени. Оказывается, что для любой реальной заряженной частицы на достаточном удалении от нее гравитационный эффект, возникающий за счет энергии электрического поля, пренебрежимо мал по сравнению с тем, что возникает из-за наличия у частицы собственной массы m . Действительно, если рассмотреть частицу с массой и зарядом, которые обычно приписывают электрону, то эти масса и заряд дают вклады в кривизну (в соответствующих единицах), относящиеся как

$$\frac{4\pi\varepsilon^2/r^2}{2m/r} = \frac{2\pi\varepsilon^2}{m r} = \frac{1,5 \cdot 10^{-13}}{r}$$

(r сюда следует подставлять в сантиметрах). Итак, мы видим, что «искривление» пространства — времени, вызываемое наличием заряда, пренебрежимо мало по сравнению с эффектом, обусловленным массой, исключая крайне малые расстояния от частицы.

§ 108. Распространение электромагнитных волн

Исследуем теперь механизм распространения электромагнитных возмущений. При этом мы будем рассматривать пространственное изменение компонент полевых тензоров $F_{\mu\nu}$, имеющих довольно прямой физический смысл, поскольку изменение компонент потенциала φ_μ интерпретировать гораздо сложнее.

Следуя методу Эддингтона [56], мы можем написать с помощью полевых уравнений (102.5) и (102.6) (после того, как продифференцируем их по ν) следующее выражение:

$$J_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha\nu}^\alpha = g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\alpha\nu} - \varphi_{\beta\mu\alpha\nu}).$$

По известной теореме тензорного анализа (Приложение III, уравнение (43)) это можно переписать, если ввести тензор Римана — Кристоффеля, в виде

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu\alpha} - \varphi_{\beta\mu\nu\alpha}) - g^{\alpha\beta} (R_{\mu\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon\beta} + R_{\beta\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\mu\epsilon} - \\ & - R_{\beta\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon\mu} - R_{\mu\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\beta\epsilon}) = g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu} - \varphi_{\beta\mu\nu})_{,\alpha} - \\ & - g^{\alpha\beta} (R_{\mu\nu\alpha}^{\epsilon} F_{\epsilon\beta} - R_{\beta\nu\alpha}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu}) = g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu} - \varphi_{\beta\mu\nu})_{,\alpha} - R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu}. \end{aligned}$$

Далее, вычитая из выражения для $J_{\mu\nu}$ аналогичное выражение для $J_{\nu\mu}$, получаем

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu} - \varphi_{\nu\beta\mu} - \varphi_{\beta\mu\nu} + \varphi_{\beta\nu\mu})_{,\alpha} - \\ & - (R_{\mu\nu\alpha\epsilon} - R_{\nu\mu\alpha\epsilon}) F^{\epsilon\alpha} - R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu} + R_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu}. \end{aligned}$$

Используя теперь свойства симметрии рассматриваемых тензоров и применяя уравнение (42) из Приложения III, находим

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\nu\beta} - \varphi_{\nu\mu\beta} + R_{\mu\beta\nu}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon} + R_{\nu\mu\beta}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon} + R_{\beta\nu\mu}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon})_{,\alpha} - \\ & - 2R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu} + R_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu}. \end{aligned}$$

И наконец, воспользовавшись циклическими свойствами тензора Римана — Кристоффеля

$$R_{\mu\beta\nu}^{\epsilon} + R_{\nu\mu\beta}^{\epsilon} + R_{\beta\nu\mu}^{\epsilon} = 0,$$

приходим к окончательному результату:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} (F_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu})_{\beta\alpha} = J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} + \\ & + 2R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu} + R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu}. \end{aligned} \quad (108.1)$$

Оператор $g^{\alpha\beta}(\quad)_{\alpha\beta}$, стоящий в левой части этого выражения, является обобщением оператора Даламбера из нерелятивистской теории

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

так что уравнение (108.1) можно рассматривать как аналог волнового уравнения из обычной электромагнитной теории.

Вводя *естественные* координаты в рассматриваемой точке и замечая, что производные от символов Кристоффеля в этих координатах не исчезают, в то время как сами символы равняются нулю, перепишем (108.1) в виде

$$g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - F_{\epsilon\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\epsilon - F_{\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\epsilon \right] = \\ = J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} + 2R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_\mu^\epsilon F_{\epsilon\nu} + R_\nu^\epsilon F_{\epsilon\mu}. \quad (108.2)$$

В естественных координатах, однако, компоненты тензора $F_{\mu\nu}$ задаются непосредственно через напряженности полей согласно (46.9) и (46.10). Следовательно, в отсутствие тока J_μ и в пределе исчезающе малых напряженностей волновое уравнение, записанное в естественных координатах, принимает свой обычный вид:

$$-\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial t^2} = 0, \quad (108.3)$$

соответствующий единичной скорости распространения электромагнитных возмущений. Интересно отметить, однако, что этот результат получен лишь при исчезающе малых напряженностях полей, а следовательно, при исчезающе малых интенсивностях электромагнитных возмущений.

С помощью уравнения (108.3) можно дать новое подтверждение того, что путь светового луча можно определить в пространстве — времени геодезической линией, для которой $ds=0$. Решение уравнения (108.3), соответствующее плоской волне, имеет вид

$$F_{\mu\nu} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - t), \quad (108.4)$$

где A — амплитуда, λ — длина волны, l , m и n — направляющие косинусы, причем первые и вторые производные от всех этих величин исчезают. Этой волне в терминах геометрической оптики отвечает луч, распространяющийся с единичной скоростью

$$-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2 = 0,$$

при том условии, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

если описание производится в естественных координатах x, y, z и t . Этот результат, однако, можно переписать в виде, пригодном для всех систем координат, если принять, что во всех системах координат траектория светового луча является геодезической с дополнительным условием $ds=0$. Таким образом, наш первоначальный вывод получил дополнительное подтверждение.

§ 109. Тензор энергии — импульса изотропного излучения

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные с тензором энергии — импульса, для различных распределений электромагнитного излучения.

Известно, что случай неупорядоченного, хаотического электромагнитного излучения можно рассматривать с помощью механических величин, применяемых при описании идеальной жидкости. В § 85 мы уже указывали, что обычное выражение для тензора энергии — импульса идеальной жидкости*)

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0 \quad (109.1)$$

можно использовать и в случае равновесного электромагнитного излучения. Плотность и давление такого излучения, измеряемые локальным наблюдателем, относительно которого нет потока энергии, связаны простым соотношением:

$$\rho_{00} = 3p_0, \quad (109.2)$$

а величины dx^μ/ds , стоящие в (109.1), являются компонентами скорости этого наблюдателя относительно выбранной системы отсчета.

Рассматривая равновесное электромагнитное излучение как идеальную жидкость и находя таким образом тензор энергии — импульса этого излучения, мы поступаем не вполне корректно ввиду макроскопического характера такого подхода. Тем не менее интересно убедиться в том, что мы получим тот же самый результат, если соответствующим образом усредним [72] микроскопическое выражение для электромагнитного тензора энергии — импульса, найденное в § 104.

Введем для этого систему собственных координат, относительно которой в данный момент в рассматриваемой точке полный поток энергии равен нулю. В такой системе координат компоненты тензора энергии — импульса, если его рассматривать с микроскопической точки зрения, выражаются классическим образом через напряженности электрического и магнитного

*) Дальше Толмен использует термин «fluid» более широко. Иногда он переводится как «материя». (Прим. ред.)

полей, например (§ 104):

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \\ T^{12} &= -(E_x E_y + H_x H_y), \\ T^{14} &= (E_y H_z - E_z H_y), \\ T^{44} &= \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2). \end{aligned} \quad (109.3)$$

Чтобы можно было перейти от этих формул к соответствующим макроскопическим величинам, надо, чтобы в среднем были справедливы соотношения

$$E_x^2 = E_y^2 = E_z^2 \quad \text{и} \quad H_x^2 = H_y^2 = H_z^2, \quad (109.4)$$

в силу того что усредненные напряженности равновесного излучения не должны зависеть от направлений. Смешанные произведения окажутся равными нулю:

$$E_x E_y = E_y E_z = E_z E_x = 0 \quad \text{и} \quad H_x H_y = H_y H_z = H_z H_x = 0, \quad (109.5)$$

поскольку отсутствие фазовых соотношений делает положительные и отрицательные мгновенные значения такого типа произведений равновероятными; кроме того,

$$E_y H_z - E_z H_y = E_z H_x - E_x H_z = E_x H_y - E_y H_x = 0, \quad (109.6)$$

ибо система координат выбрана так, что в среднем поток энергии равняется нулю.

Применяя найденные правила усреднения к выражению для *макроскопического* тензора энергии — импульса (109.3), легко убедиться, что единственными его компонентами, не исчезающими после усреднения, будут

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = \rho_0, \quad T^{44} = \rho_{00}, \quad (109.7)$$

причем ρ_{00} и ρ_0 связаны соотношением

$$\rho_{00} = 3\rho_0, \quad (109.8)$$

в котором ρ_{00} — собственная макроскопическая плотность энергии в данной точке, т. е. усредненное выражение для плотности электромагнитной энергии в отсутствие вещества; три исчезающих компоненты максвелловских натяжений равны одной трети ρ_{00} каждая, т. е. давлению излучения ρ_0 .

Получив выражение для тензора энергии — импульса (109.7) в избранной системе координат, можно, конечно, записать его, пользуясь правилами тензорных преобразований, и в любой системе координат. Действительно, применяя тот же самый способ, который использовался в § 85 при получении общего выражения

для тензора энергии — импульса обычной идеальной жидкости, когда известны его компоненты в собственных координатах, мы сразу приходим к искомому выражению для тензора энергии — импульса равновесного излучения в виде

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0, \quad \rho_{00} = 3p_0, \quad (109.9)$$

где «скорость» dx^μ/ds надо теперь интерпретировать как скорость локального наблюдателя, для которого в среднем нет никакого потока энергии и которого поэтому можно считать движущимся вместе со всем излучением.

§ 110. Гравитационная масса изотропного излучения

Итак, мы показали, что выбор тензора энергии — импульса изотропного излучения, основанный на аналогии с идеальной жидкостью, вполне разумен. С помощью установленных формул мы можем теперь найти интересное свойство электромагнитного излучения — способность создавать гравитационное поле.

Рассмотрим статическую сферу, заполненную идеальной жидкостью. Интервал в этом случае можно задать так:

$$ds^2 = -e^{\mu} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^{\nu} dt^2. \quad (110.1)$$

Будем считать в соответствии с § 91, что масса сферы m равняется ее энергии U , а последнюю, согласно § 97, выразим в виде интеграла по всему объему жидкости, т. е.

$$m = U = \int (\rho_{00} + 3p_0) e^{\frac{1}{2}\nu} dV_0, \quad (110.2)$$

где dV_0 — элемент собственного объема жидкости.

Как следует из наших рассуждений, последнее выражение применимо не только к жидкой сфере, но и к смеси вещества и излучения. Далее, величина m может рассматриваться как характеристика способности сферы создавать гравитационное поле, поскольку в соответствии с определением, данным в § 90, эта величина должна совпадать с постоянной, стоящей в шварцшильдовском выражении для интеграла в случае пустого пространства, окружающего сферу. Учтем теперь то обстоятельство, что давление p_0 неупорядоченного излучения составляет одну треть плотности энергии ρ_{00} , а давление в веществе в обычных условиях составляет лишь незначительную долю от его плотности. Мы приходим тогда к интересному заключению, что изотропное излучение внутри жидкой сферы дает *вдвое* больший вклад в гравитационное поле сферы по сравнению с таким же количеством энергии в форме вещества.

Интересно сравнить это заключение с фактом, уже упомянутым в конце § 83, б, что гравитационное отклонение света, проходящего вблизи притягивающей его массы, *вдвое* больше того, что следует из ньютоновской теории для частицы, движущейся со скоростью света. В последующих параграфах мы найдем аналогичные различия в свойствах вещества и излучения и для других эффектов.

§ 111. Тензор энергии — импульса направленного потока излучения

Рассмотрев изотропное излучение, перейдем теперь к случаю направленного потока излучения. Вводя естественные координаты в точке наблюдения, мы, как и прежде, можем выразить компоненты тензора энергии — импульса (рассматриваемого с микроскопической точки зрения) через напряженности электрического и магнитного полей. Такие выражения уже выписывались в § 104 и в § 109. Перепишем здесь выражение (109.3), опустив для удобства один из индексов тензора энергии — импульса:

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \\ T_2^1 &= T_1^2 = (E_x E_y + H_x H_y), \\ T_4^1 &= -T_1^4 = (E_y H_z - E_z H_y), \\ T_4^4 &= \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2). \end{aligned} \quad (111.1)$$

Считая теперь для простоты, что излучение распространяется в направлении оси x , а электрическая напряженность направлена в плоскости поляризации по оси y , получим, согласно обычной электромагнитной теории света, соотношения

$$E_x = E_z = H_x = 0, \quad E_y = H_z.$$

Подставляя их в (111.1), находим, что единственными ненулевыми компонентами тензора энергии — импульса будут

$$-T_1^1 = T_4^4 = T_4^1 = -T_1^4 = \frac{E_y^2 + H_z^2}{2}. \quad (111.2)$$

Таким образом, все компоненты оказались численно равными выражению для плотности электромагнитной энергии.

Результат (111.2), полученный для микроскопической картины плоскополяризованного излучения, очевидно, должен быть справедлив в среднем и для некогерентного неполяризованного излучения. Поэтому будем считать, что общие макроскопические выражения для тензора энергии — импульса потока излучения,

направленного вдоль оси x , имеют вид

$$-T_1^1 = T_4^4 = T_4^1 = -T_1^4 = \rho, \quad (111.3)$$

где ρ — плотность излучаемой энергии в рассматриваемой точке, в которой введены *естественные координаты*.

§ 112. Гравитационное поле направленного потока излучения

Полученное выше выражение для тензора энергии — импульса направленного потока излучения позволяет определить создаваемое этим излучением гравитационное поле. Это возможно, однако, лишь для достаточно слабых полей, когда справедливы эйнштейновские приближенные решения уравнений поля, приведенные в § 93.

Метрический тензор в этом случае выражается в виде

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (112.1)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — постоянные галилеевы значения $g_{\mu\nu}$: $\pm 1, 0$, а $h_{\mu\nu}$ — малые добавки первого порядка. Введем теперь величины

$$h_{\mu}^{\lambda} = \delta^{\lambda\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad h = h_{\alpha}^{\alpha} = \delta^{\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda}, \quad (112.2)$$

где $\delta^{\mu\nu}$ — галилеевы значения тензора $g_{\mu\nu}$. Приближенные решения уравнений поля при этом записываются следующим образом:

$$\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = -4 \int \frac{[T_{\mu}^{\nu}]}{r} dx dy dz, \quad (112.3)$$

где интегрирование должно производиться по всему пространственному объему, r обозначает расстояние от элемента интегрирования $dx dy dz$ до точки, в которой мы хотим определить величину $\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right)$, а квадратные скобки означают, что величина T_{μ}^{ν} в элементе интегрирования относится к моменту времени более раннему, чем тот, для которого мы проводим вычисления, на интервал, равный времени, необходимому, чтобы сигнал прошел путь от объема $dx dy dz$ до точки наблюдения.

Далее, в приближении, которое мы используем, можно подставить в (112.3) выражение тензора T_{μ}^{ν} в естественных координатах (111.3), поскольку T_{μ}^{λ} — величина первого порядка, а выбранные координаты совпадают приближенно в каждой рас-

смаатриваемой точке с естественными координатами. Таким образом, для потока излучения, направленного по оси x , мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} h_1^1 - \frac{1}{2} h &= 4 \int \frac{[\rho] dV}{r}, \\ h_2^2 - \frac{1}{2} h &= h_3^3 - \frac{1}{2} h = 0, \\ h_4^4 - \frac{1}{2} h &= -4 \int \frac{[\rho] dV}{r}, \\ h_4^1 &= -h_1^4 = -4 \int \frac{[\rho] dV}{r}. \end{aligned} \quad (112.4)$$

Теперь с помощью (112.2) легко получить решение этих уравнений:

$$-h_{11} = -h_{44} = h_{14} = h_{41} = 4 \int \frac{[\rho] dV}{r}. \quad (112.5)$$

Остальные компоненты $h_{\mu\nu}$ равны нулю.

Найденное решение определяет гравитационное поле потока излучения, направленного по оси x , если поле достаточно слабое и использование эйнштейновских приближенных решений оправдано.

Вряд ли, однако, мы встретимся с нарушением этого условия в полях, создаваемых природными или искусственными пучками или импульсами излучения.

§ 113. Гравитационное воздействие пучка света

а) *Интервал в окрестности ограниченного пучка света.* Найденное выше выражение для гравитационного поля, создаваемого направленным потоком излучения, естественно попытаться применить для вычисления поля вблизи бесконечно длинного пучка света, протяженного, скажем, вдоль оси x от минус до плюс бесконечности. Это невозможно, однако, выполнить с помощью развитого метода, поскольку интегрирование в формуле (112.5) приводит в данном случае к бесконечным значениям $h_{\mu\nu}$, что вступает в противоречие с приближением, в котором получены решения уравнений.

Эта трудность, однако, не возникает, если рассматривать тонкий пучок излучения конечной длины l и постоянной линейной плотности ρ , который распространяется вдоль оси x от источника, находящегося в точке $x=0$, до поглотителя, расположенного в точке $x=l$. Из формулы (112.5) следует, что вклад излучения в гравитационный потенциал любой точки x, y, z ,

находящейся вблизи пучка, равняется

$$\begin{aligned}
 -h_{11} &= -h_{44} = h_{14} = h_{41} = 4 \int \frac{[\rho] dV}{r} = \\
 &= \int_{u=0}^{u=l} \frac{4\rho du}{[(x-u)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = 4\rho \ln \frac{[(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + (l-x)}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - x} \quad (113.1)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в том случае, когда пучок имеет *конечную длину* l , рассматриваемые величины могут быть сделаны сколь угодно малыми, если сделать малой плотность излучения ρ .

Следует отметить, что выражение (113.1) получено в предположении о *стационарности* пучка излучения, так что не было нужды явно вводить запаздывающие потенциалы. Отсюда, однако, следует, что полученное выражение неприменимо для моментов времени, близких к моментам возникновения или исчезновения пучка. Надо также помнить, что мы предположили, что излучение распространяется только вдоль оси x , пренебрегая дифракционными эффектами на границе пучка. И наконец, укажем, что рассматриваемое выражение дает вклад в поле лишь самого пучка излучения и пренебрегает вкладами от тел, являющихся источниками или поглотителями этого излучения. Последнее означает, что игнорируются также любые эффекты, возникающие вследствие изменений в движении или во внутреннем состоянии этих тел, которые могут быть связаны с потоком излучения. При выполнении всех этих условий можно считать, что формула (113.1) определяет гравитационное поле в окрестности пучка света конечной протяженности.

б) *Скорость пробного светового луча вблизи пучка.* Для того чтобы определить характер гравитационного поля вблизи пучка, рассмотрим сначала движение пробных световых лучей, а затем движение пробных частиц вблизи пучка.

Чтобы исследовать поведение пробных лучей, выпишем с помощью выражения (113.1) формулу интервала вблизи пучка:

$$ds^2 = -(1 - h_{11}) dx^2 - dy^2 - dz^2 + (1 + h_{11}) dt^2 - 2h_{11} dx dt.$$

Приравняв это выражение к нулю (как это следует делать для света) и поделив его затем на dt^2 , получим общее уравнение для скорости пробных лучей вблизи пучка:

$$(1 - h_{11}) \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + 2h_{11} \frac{dx}{dt} = 1 + h_{11}. \quad (113.2)$$

Рассмотрим сначала случай, когда пробные лучи движутся параллельно оси x (а следовательно, и пучку). Тогда уравнение

для скорости имеет решения

$$\frac{dx}{dt} = +1 \text{ и } \frac{dx}{dt} = -\frac{1+h_{11}}{1-h_{11}}. \quad (113.3)$$

Рассматривая далее случай, когда пробные лучи распространяются параллельно оси y , т. е. в плоскости, перпендикулярной пучку, приходим к следующим решениям:

$$\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{1+h_{11}}. \quad (113.4)$$

Из выражений (113.3) видим, что пробные лучи света, движущиеся параллельно пучку в том же самом направлении, что и свет в пучке, обладают единичной скоростью в любой точке поля; напротив, скорость пробного луча, движущегося в любом другом направлении, определяется, как и следовало ожидать, ориентацией этого луча в гравитационном поле изучаемого пучка, поскольку величина h_{11} зависит от их взаимного пространственного расположения (см. (113.1)).

Можно также найти ускорение пробного луча в этом гравитационном поле. Дифференцируя выражение (113.2), получаем уравнение для ускорения в общем виде:

$$2\left(\frac{dx}{dt} - h_{11} \frac{dx}{dt} + h_{11}\right) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{dx^2}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 1\right) \frac{dh_{11}}{dt} = 0. \quad (113.5)$$

Отсюда для частного случая, когда мгновенные значения компонент скорости пробного луча равняются

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \quad (113.6)$$

получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (113.7)$$

т. е. скорость такого пробного луча остается единичной и параллельной пучку, а следовательно, в соответствии с общим выражением (113.2), все время остаются нулевыми компоненты скорости, перпендикулярные пучку.

Этот результат весьма любопытен, так как означает, что в частном случае параллельных и одинаково направленных лучей света гравитационное взаимодействие между лучами не возникает. Этот вывод согласуется с предположением, что изучаемый пучок света стационарен, и подтверждается свойствами параллельных лучей, которые приходят от удаленных астрономических объектов.

в) Ускорение пробных частиц вблизи пучка. Найдем теперь, как гравитационное поле пучка излучения воздействует на пробные частицы, находящиеся первоначально в покое вблизи пучка.

Ускорение такой пробной частицы определяется согласно общему уравнению геодезической (74.13):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

В случае покоящейся частицы, т. е. при условиях

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1,$$

это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0.$$

Подставляя значения символов Кристоффеля, соответствующие гравитационному полю пучка (113.1), получаем в приближении, используемом при решении уравнений поля, следующие выражения:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial z}.$$

Далее, подставим сюда явное выражение для h_{44} из (113.1), справедливое в непосредственной близости с пучком. Тогда после некоторых преобразований получим для частицы, которая *вначале покоилась*, следующее выражение для параллельной пучку компоненты ускорения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\rho \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}, \quad (113.8)$$

а для компоненты ускорения в плоскости, перпендикулярной пучку, находим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2\rho y}{y^2 + z^2} \left\{ \frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{l-x}{[(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}. \quad (113.9)$$

Значения x , y , z в этих формулах задаются положением пробной частицы; напомним также, что световой пучок расположен вдоль оси x на отрезке от $x=0$ до $x=l$.

Если пробная частица расположена в точке, одинаково удаленной от обоих концов отрезка, вдоль которого распространяется свет, то общие выражения упрощаются. Ускорение в направлении, параллельном пучку, исчезает:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (113.10)$$

а выражение для ускорения, направленного к пучку, принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{2\rho l}{y \left[\left(\frac{1}{2} l \right)^2 + y^2 \right]^{3/2}}. \quad (113.11)$$

Полученные результаты для ускорения частицы в направлении, параллельном и перпендикулярном пучку света, замечательны по следующим причинам. Во-первых, оба выражения, и (113.8) и (113.9), ровно в *два раза* превосходят аналогичные результаты ньютоновской теории, если вместо пучка света взять материальный стержень, имеющий ту же плотность и ту же длину, что и пучок излучения. Это еще один пример (ср. с § 110), когда излучение создает более интенсивное гравитационное поле, нежели распределение вещества той же плотности.

Во-вторых, из формул (113.8) и (113.10) вытекает интересное следствие, а именно, что ускорение, параллельное пучку, направлено в сторону большего из отрезков, на которые делится его длина в том случае, когда частица расположена к одному из концов ближе, чем к другому. Если же частица помещена в точке, равноудаленной от обоих концов пучка, то ускорение равно нулю, а следовательно, если частица не расположена прямо на самом пути пучка, то нет никакого преобладающего гравитационного воздействия на нее в направлении распространения света. Таким образом, это воздействие отличается от эффекта светового давления, которое действует на частицу, находящуюся в пучке света, и направлено по потоку радиации; оно отлично и от комптоновского воздействия на электрон, расположенный в пучке, которое также преобладает в направлении распространения света.

§ 114. Гравитационное воздействие светового пакета

а) *Вид интервала вблизи траектории светового пакета, проходящего конечный отрезок пути.* Перейдем теперь к рассмотрению гравитационного поля вблизи траектории импульса излучения. Это более сложный случай, чем случай стационарного пучка, поскольку создаваемое поле не будет теперь статическим, и поэтому нам придется явно использовать запаздывающие потенциалы, чтобы найти гравитационное возмущение, производимое движущимся пакетом.

Рассмотрим пакет длиной λ с линейной плотностью ρ и с пренебрежимо малым поперечным сечением. Будем считать, что он распространяется по оси x от точки $x=0$ до $x=l$. Эти точки

могут рассматриваться либо как положения излучателя и поглотителя соответственно, либо просто как точки, ограничивающие некий изучаемый отрезок пути луча, в пренебрежении эффектами от различных его частей, лежащих вне изучаемого отрезка. Мы будем также пренебрегать (как и прежде) малыми гравитационными эффектами, которые могут возникать от излучателя или поглотителя, а также от возможных изменений их состояния. Такого рода ограничения оказываются необходимыми, чтобы обеспечить существование решения задачи. В частности, ниже мы придем к выводу, что метод, использованный нами для разрешения поставленной задачи, применим лишь в том случае, когда траектория импульса имеет конечную длину.

Выберем для простоты временную шкалу так, чтобы в момент времени $t=0$ передний фронт импульса пересекал точку $x=0$. Тогда в любой более поздний момент времени передний фронт находится в точке $x=t$, а задний фронт — в точке $x=t-\lambda$, поскольку скорость распространения света принята равной единице.

Зададим теперь в непосредственной близости от траектории пакета некоторую точку и вычислим с помощью уравнения (112.5) гравитационное поле, создаваемое импульсом в этой точке к моменту времени t . Поскольку в указанном выражении для гравитационного поля следует использовать запаздывающие потенциалы, то будем считать, что в точке $x=a$ находится передний фронт импульса, а в точке $x=b$ — задний в тот момент времени, когда пакет создает гравитационное возмущение, достигающее точки x, y, z в момент времени t . Тогда с помощью (112.5) находим, что гравитационные потенциалы в точке x, y, z в момент времени t равны

$$\begin{aligned}
 -h_{11} &= -h_{44} = h_{14} = h_{41} = 4 \int \frac{[\rho] dV}{r} = \\
 &= \int_{u=b}^{u=a} \frac{4\rho du}{[(x-u)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = 4\rho \ln \frac{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - (x-a)}{[(x-b)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - (x-b)}.
 \end{aligned}
 \tag{114.1}$$

Для того чтобы вычислить интеграл, надо задать координаты a и b как функции времени t . Сделать это при нашем выборе точки начала отсчета времени очень просто, так как значение $a=x$ определяет не только положение переднего фронта импульса, когда он порождает гравитационное возмущение, достигающее точки наблюдения в момент времени t , но означает также и момент времени, в который это возмущение создается. Следова-

тельно, $(t-a)$ — это интервал времени, за который гравитационное возмущение проходит расстояние от переднего фронта импульса до точки наблюдения. Поскольку поле распространяется с единичной скоростью, имеем

$$(t-a)^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2.$$

Разрешая это соотношение относительно a , получаем

$$a = \frac{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2(t-x)}. \quad (114.2)$$

Точно так же для b получаем выражение

$$b = \frac{(t-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2(t-\lambda-x)}. \quad (114.3)$$

При нашей постановке задачи эти формулы для a и b , определяющие положения переднего и заднего фронтов пакета, применимы лишь в том случае, когда фронты находятся внутри исследуемого отрезка $x = (0, l)$. Так как пакет начинает проходить этот отрезок пути в момент времени $t=0$ и поскольку величина $[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ определяет, очевидно, время, за которое гравитационное возмущение распространяется от начальной точки до точки наблюдения x, y, z , мы должны в соответствии с нашей договоренностью полностью пренебречь гравитационным возмущением, создаваемым импульсом за время, предшествующее моменту $t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$; поэтому положим

$$b = 0 \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \\ \text{до } t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + \lambda. \end{cases} \quad (114.4)$$

Точно так же, поскольку мы не принимаем во внимание гравитационное воздействие, производимое импульсом, когда он уже прошел точку $x=l$, будем считать, что

$$a = l \begin{cases} \text{от } t = l + [(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + \lambda, \end{cases} \quad (114.5)$$

и полностью пренебрежем гравитационным воздействием, создаваемым в более поздние моменты времени.

Подставив теперь найденные выражения для a и b в (114.1), получим явный вид гравитационных потенциалов в точке x, y, z

в заданный момент времени t :

$$\begin{aligned}
 -h_{11} &= -h_{44} = h_{14} = h_{41} = \\
 &= 4\rho \ln \frac{t-x}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}-x} \quad \text{от } t = [x^2+y^2+z^2]^{1/2} \\
 &\hspace{15em} \text{до } t = [x^2+y^2+z^2]^{1/2} + \lambda, \\
 &= 4\rho \ln \frac{t-x}{t-\lambda-x} \left\{ \begin{array}{l} \text{от } t = [x^2+y^2+z^2]^{1/2} + \lambda \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2}, \end{array} \right. \quad (114.6) \\
 &= 4\rho \ln \frac{[(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2} + (l-x)}{t-\lambda-x} \left\{ \begin{array}{l} \text{от } t = l + \\ \quad + [(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + \\ \quad + [(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2} + \lambda. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, почему наши вычисления справедливы лишь для конечных отрезков траектории. В случае траектории неограниченной протяженности второе из выражений для гравитационного потенциала, которое должно быть, очевидно, справедливым для любых моментов времени, на самом деле обращается в бесконечность в момент времени $t=x$, когда импульс проходит через точку наблюдения; это вступает в противоречие с примененным нами приближенным методом решения уравнений поля. При рассмотрении конечного отрезка траектории эта трудность исчезает, так как гравитационное воздействие учитывается лишь с момента времени $t=0$, т. е. с момента появления импульса в изучаемой области, который соответствует времени получения сигнала в точке наблюдения, равному

$$t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

Таким образом, никаких бесконечностей в данном случае возникнуть не может.

Предыдущие выражения получены в предположении, что излучение распространяется строго в направлении оси x , и, следовательно, не учитывают возможных дифракционных эффектов на границе пакета.

б) *Скорость пробного луча света вблизи пакета.* Чтобы изучить природу найденного выше гравитационного поля светового импульса, надо определить скорость распространения пробных лучей в этом поле. Мы могли бы, очевидно, избрать тот же самый метод, что применялся в § 113, б в случае стационарного пучка, и получили бы, естественно, те же самые выражения, что

и в указанном параграфе. Однако смысл их, конечно, был бы отличным от прежнего, поскольку h_{11} выражается теперь формулой (114.6), а не (113.1), что позволило бы получить правильную зависимость скорости от координат и времени. Для пробных лучей, движущихся параллельно траектории импульса (и в том же направлении, что и импульс), мы пришли бы, очевидно, к прежнему выводу о том, что скорость пробных лучей все время равна единице, т. е. к выводу об отсутствии гравитационного воздействия импульса на такие лучи.

в) *Ускорение пробных частиц вблизи пакета.* Теперь найдем гравитационное ускорение, получаемое пробной частицей, помещенной вблизи от траектории светового пакета. Если считать, что частица вначале покоится, ускорение, как и выше в § 113, в, будет определяться уравнением

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0.$$

Однако символы Кристоффеля в настоящем нестационарном случае выглядят несколько сложнее, чем в предыдущей задаче. Тем не менее нетрудно получить в заданном приближении уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{41}}{\partial t} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{44}}{\partial x} \right), \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Подставим в эти уравнения выражения для гравитационных потенциалов (114.6), считая для простоты, что пробная частица вначале покоится в точке $z=0$. Тогда ускорение, получаемое частицей в направлении траектории импульса, будет определяться формулами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2\rho \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{[x^2 + y^2]^{1/2}} \right) \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda, \end{cases} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2\rho \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-\lambda-x} \right) \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (114.7)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$= -2\rho \left(\frac{1}{t-\lambda-x} + \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right) \begin{cases} \text{от } t = l - \\ - [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + \\ + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} + \lambda. \end{cases}$$

А для ускорения частицы в направлении, нормальном к траектории, получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-2\rho y}{[x^2 + y^2]^{1/2} ([x^2 + y^2]^{1/2} - x)} \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda, \end{cases}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2}, \end{cases} \quad (114.8)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2\rho y}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2} \{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2} + (l-x)\}} \begin{cases} \text{от } t = l + \\ + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + \\ + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} + \lambda. \end{cases}$$

Из этих выражений видно, что ускорение, параллельное траектории импульса, сначала направлено в ту же сторону, что и движение импульса, а затем в противоположную. Ускорение же, нормальное к траектории импульса, сначала направлено в сторону траектории, а затем от нее. Выводы оказались не очень прозрачными, поэтому, для того чтобы лучше понять, как происходит процесс гравитационного взаимодействия, найдем полный эффект, создаваемый движением импульса на участке траектории от $x=0$ до $x=l$.

Проинтегрируем выражения (114.7) по соответствующему интервалу времени. Сложив затем полученные результаты и сократив довольно много членов, найдем, что *покоящаяся* пробная частица приобретает ускорение, параллельное направлению распространения пакета; после прохождения пакетом выделенного участка ускорение, параллельное этому направлению, равно

$$\int \frac{d^2 x}{dt^2} dt = 2\rho\lambda \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}. \quad (114.9)$$

Используя же (114.8), получим для компоненты ускорения в сторону траектории пакета выражение

$$\int \frac{d^2 y}{dt^2} dt = -\frac{2\rho\lambda}{y} \left\{ \frac{x}{[x^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{l-x}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}. \quad (114.10)$$

Обе формулы относятся к эффекту гравитационного воздействия только выделенной части траектории пакета от $x=0$ до $x=l$.

Если частица помещена в точку, равноудаленную от обоих концов рассматриваемого отрезка, эти общие выражения упрощаются и становятся аналогичными выражениям (113.10) и (113.11), полученным для стационарного пучка:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} dt = 0 \quad (114.11)$$

и

$$\int \frac{d^2y}{dt^2} dt = - \frac{2\rho\lambda l}{y \left[\left(\frac{1}{2} l \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}}. \quad (114.12)$$

Последние формулы, определяющие полное ускорение неподвижных пробных частиц в направлениях, параллельном и перпендикулярном траектории пакета, представляют значительный интерес.

Во-первых, так как они определяют полное ускоряющее воздействие пакета на частицу за время прохождения пакетом отрезка пути длиной l , можно получить среднее ускорение $\bar{a}_{\text{пак}}$, если поделить выражение (114.12) на l . Сравнивая этот результат с выражениями для мгновенных ускорений пробной частицы $a_{\text{пучка}}$, занимающей то же положение, но получающей ускорение от стационарного пучка, имеющего ту же длину l , мы получим следующий общий результат:

$$\frac{\bar{a}_{\text{пак}}}{a_{\text{пучка}}} = \frac{\lambda\rho_{\text{пак}}}{l\rho_{\text{пучка}}} = \frac{m_{\text{пак}}}{m_{\text{пучка}}}. \quad (114.13)$$

Этот результат представляется вполне разумным с точки зрения наших обычных физических представлений. Уже указывалось, что гравитационное воздействие пучка на пробную частицу в *два раза* сильнее того, что следует из ньютоновской теории, если пучок излучения заменить материальным твердым стержнем той же плотности и той же длины. Поэтому полученный результат можно рассматривать как еще один пример, в котором излучение обладает большей эффективностью в смысле гравитационных воздействий по сравнению с распределением покоящегося вещества, которое можно считать эквивалентным этому излучению.

Во-вторых, следует обратить особое внимание на то, что, как следствие формул (114.9) и (114.11), полное ускорение, параллельное траектории импульса, направлено в сторону большего из двух отрезков траектории, на которые она делится точкой, в которой находится пробная частица, и ускорение равно нулю, когда частица равноудалена от обоих концов траектории. В последнем случае, как и при рассмотрении стационарного пучка, если частица не находится на пути пакета и не испытывает ни

светового давления, ни комптоновского воздействия, на частицу не действуют никакие силы в направлении движения пакета, так как гравитационные воздействия от различных частей траектории сокращаются.

§ 115. Гравитационное взаимодействие световых лучей и частиц

Предыдущий материал излагался столь подробно [73] потому, что он позволяет почувствовать природу гравитационного взаимодействия световых лучей и частиц.

Наиболее существенной чертой полученных результатов является то, что гравитационное ускорение пробной частицы, которое она получает от некоторой части пучка света, в рассмотренном приближении оказывается в *два раза* больше того, что дает ньютоновская теория для твердого стержня при том условии, что средняя плотность вещества, заполняющего в последнем случае траекторию, совпадает с той, которая создается при прохождении света. С подобным различием результатов мы сталкиваемся не впервые. В § 83, б было найдено, что гравитационное отклонение лучей света при прохождении через поле, создаваемое притягивающей частицей, также примерно в *два раза* больше соответствующего результата ньютоновской теории, найденного при замене светового луча материальной частицей.

Такое двухкратное появление множителя 2 позволяет нам обсуждать вопрос о взаимном гравитационном взаимодействии частиц и световых лучей, оставаясь в значительной степени (в первом приближении) в рамках обычных представлений о законе сохранения импульса, не прибегая к помощи релятивистских законов сохранения, связанных с псевдотензором t_{μ}^{ν} , описывающим потенциальные гравитационные импульсы и энергию.

Смысл приближенного сохранения обычного импульса станет более прозрачным, если разобрать один простой пример. Выше с помощью уравнения (114.12) мы нашли выражение для полного ускорения, обязанного некоторому отрезку l траектории светового пакета, для пробной частицы, помещенной на расстоянии y от траектории, в точке, равноудаленной от обоих концов отрезка l . Умножив это выражение на массу частицы M и обозначив массу светового пакета через $m = \rho l$, получим полный импульс, приобретаемый частицей в направлении оси y :

$$\int M \frac{d^2 y}{dt^2} dt = - \frac{2mMl}{y \left[\left(\frac{1}{2} l \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (115.1)$$

С другой стороны, в согласии с § 83 мы можем считать, что коли-

чество движения, полученное пакетом, равно удвоенной величине эффекта, вычисленного на простой ньютоновской основе. Отсюда, учитывая, что скорость света приравнена единице, находим

$$\int m \frac{d^2 y}{dt^2} dt = \int_0^l \frac{2mMy}{\left[\left(\frac{1}{2}l - x\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2mMl}{y \left[\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (115.2)$$

Выражения (115.1) и (115.2) совпадают по абсолютной величине и противоположны по знаку, и мы видим здесь пример приближенного выполнения закона сохранения импульса, которое возникает без всякого учета импульса гравитационного поля.

Другой важный факт, установленный нами,— это то, что покоящаяся частица, равноудаленная от обоих концов рассматриваемого отрезка световой траектории, но расположенная вне ее, не получает после прохождения света никакого ускорения в направлении движения пакета. С точки зрения сохранения импульса это есть всего лишь утверждение, обратное более простому, именно, что свет, проходящий через поле покоящейся частицы между двумя точками, равноудаленными от этой частицы, не изменяет свой полный импульс. Такая обратная формулировка весьма важна для анализа астрономических наблюдений, а потому заслуживает отдельного рассмотрения.

Гравитационное поле, создаваемое покоящейся частицей, описывается, очевидно, сферически симметричным статическим интервалом

$$ds^2 = g_{11}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + g_{44} dt^2 \quad (115.3)$$

(см., например, формулу (82.12), где g_{11} и g_{44} — функции лишь от r). Если рассмотреть теперь луч света, проходящий через это поле, то, благодаря статическому характеру интервала, последовательные пакеты, распространяющиеся вдоль данной траектории, будут затрачивать одинаковое время Δt , чтобы пройти расстояние между двумя данными точками r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2 . Тогда два следующих друг за другом пакета, отдельных временным интервалом δt при пересечении первой из точек, будут разделены тем же интервалом δt и при пересечении второй точки. Далее, если эти точки равноудалены от рассматриваемой частицы ($r_1 = r_2$), то очевидно, что этот координатный временной интервал δt связан с собственным временным интервалом $\delta t_0 = \sqrt{g_{44}} \delta t$, одинаковым для локальных наблюдателей, находящихся в этих двух точках. Поэтому период и частота света, измеряемые наблюдателями, покоящимися в гравитационном поле рассматриваемой частицы, не будут изменяться при прохождении света от одной точки к другой, если значения гравитационного потенциала g_{44} в них одинаковы,— вывод,

который справедлив вообще для любых статических полей. Вспоминая соотношение между частотой и величиной полного импульса в направлении движения $g = hv/c$, мы убеждаемся еще раз в том, что полный импульс в направлении движения остается в этом опыте постоянным.

Этот вывод, конечно, справедлив лишь для статических полей. Возникает, однако, законный вопрос: не влияет ли возникающее движение частицы (которая первоначально покоилась и начала двигаться лишь под воздействием света) в свою очередь на поле, через которое свет еще должен пройти, и не приведет ли этот эффект второго порядка к изменению полного импульса в направлении движения? Точный анализ этого эффекта второго порядка оказывается весьма сложным. Можно, однако, рассуждать более грубо, считая, что гравитационные и световые возмущения распространяются с одной и той же фундаментальной скоростью. Тогда гравитационному возмущению от падающего элемента светового пучка трудно успеть прийти к частице и, изменив ее движение, изменить тем самым гравитационное поле в тех точках, через которые этот же элемент проходит в дальнейшем. Поэтому во всяком случае мы должны ожидать, что вклады второго порядка в полный импульс и частоту света, проходящего через гравитационное поле частицы, должны быть крайне малы по сравнению с поперечными (относительно направления движения импульса) эффектами первого порядка.

В качестве следствия обычно отмечают, что частота света, дающего отчетливые изображения удаленных астрономических объектов, не должна заметно изменяться при прохождении луча через гравитационные поля тел, встречающихся на его пути. Это заключение оказывается важным для интерпретации красного смещения света от внегалактических туманностей, поскольку, как указал Цвикки [74], гравитационное воздействие на частоту света, нереальное в силу приведенных соображений, могло бы в противном случае давать другое объяснение красному смещению, отличное от общепринятого объяснения, основанного на разбегании галактик.

§ 116. Обобщенный эффект Доплера

Закончим настоящую главу схематическим описанием важной проблемы: как воздействуют гравитационные поля и движения источника и наблюдателя на результаты измерений длин волн света.

Во-первых, для этого нам нужно знать вид интервала в области пространства, где происходит распространение света от источника к наблюдателю. Мы можем записать его в общем виде:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx dy + \dots + 2g_{34}dz dt + g_{44}dt^2. \quad (116.1)$$

Во-вторых, нам нужно знать положения источника (x_1, y_1, z_1) и наблюдателя (x_2, y_2, z_2) как функции времени t :

$$(x_1, y_1, z_1) = f_1(t), \quad (116.2)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = f_2(t). \quad (116.3)$$

Так как скорость света можно вычислить, если приравнять выражение для интервала (116.1) нулю, а траектории источника и наблюдателя определить выражениями (116.2) и (116.3), то можно вычислить момент приема t_2 наблюдателем светового импульса, испускаемого источником в некоторый заданный момент времени t_1 , как функцию этого времени t_1 , т. е. найти зависимость

$$t_2 = f(t_1). \quad (116.4)$$

Далее, дифференцируя эту формулу, можно получить выражение для временного интервала δt_2 , разделяющего моменты приема двух пакетов, как функцию от t_1 и от величины временного интервала δt_1 , разделяющего моменты испускания этих пакетов:

$$\delta t_2 = \frac{dt(t_1)}{dt_1} \delta t_1. \quad (116.5)$$

С помощью выражения для интервала (116.1) можно, однако, выразить собственный период пульсаций источника, измеряемый локальным наблюдателем, который движется вместе с ним:

$$\delta t_1^0 = \left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_1, y_1, z_1, t_1}^{\frac{1}{2}} \delta t_1. \quad (116.6)$$

Здесь $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ — компоненты скорости источника в момент испускания излучения. Точно так же собственный период пульсаций приходящего сигнала, измеряемый вторым наблюдателем, который перемещается вместе с приемником, должен выглядеть так:

$$\delta t_2^0 = \left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_2, y_2, z_2, t_2}^{\frac{1}{2}} \delta t_2, \quad (116.7)$$

где теперь dx/dt и т. д. — компоненты скорости этого наблюдателя в момент приема сигнала.

Подставим (116.6) и (116.7) в (116.5) и заметим, что собственный период δt_1^0 излучателя можно считать пропорциональным обычно измеряемой длине волны света λ , испускаемого светящимся веществом; наблюдаемый собственный период δt_2^0 сигнала, приходящего к поглотителю, можно принять пропорциональным наблюдаемой длине волны $\lambda + \delta\lambda$. Отсюда следует, что для наблюдателя, достаточно удаленного от источника, искомое

отношение длины волны поглощаемого света к первоначальной длине волны имеет вид *)

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2^0}{\delta t_1^0} = \frac{df(t_1)}{dt_1} \frac{\left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_2, y_2, z_2, t_2}^{1,2}}{\left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_1, y_1, z_1, t_1}^{1,2}}. \quad (116.8)$$

Этому общему выражению для сдвига длины световой волны можно придать конкретный вид, конечно, лишь тогда, когда известен вид гравитационного поля, соответствующего выбору определенного конкретного интервала (116.1), а также явный вид выражений (116.2) и (116.3), задающих движение излучателя и детектора.

Нужно также подчеркнуть, что из полученного выражения следует, что относительное изменение длины волны будет одним и тем же в любой части спектра. Необходимо также отметить, что найденное отношение длин — наблюдаемая величина, которая имеет одно и то же численное значение вне зависимости от вида употребляемых при вычислениях координат. Так, окончательный результат будет неизменным, если, прежде чем начать вычисления, преобразовать интервал к новым переменным — обстоятельство, которое, вероятно, не всегда учитывается. И наконец, заметим, что хотя окончательное выражение дает величину сдвига как функцию времени излучателя t_1 , можно, конечно, найти сдвиг как функцию времени получения сигнала t_2 , если мы знаем функцию (116.4).

Наше окончательное выражение можно рассматривать как уравнение для обобщенного эффекта Допплера. Действительно, величина его зависит не только от непосредственного эффекта движения источника и наблюдателя, изменяющего время прохождения света от одного объекта до другого; она зависит также от косвенного влияния этого движения, изменяющего соотношение между координатным временным интервалом и собственным временным интервалом, и, кроме того, от воздействия гравитационных потенциалов на величину скорости, с которой распространяется свет. Ниже, в главе X, мы используем изложенное рассмотрение обобщенного эффекта Допплера.

*) Поскольку скорость света мы определяем из условия $ds=0$, то полученное выражение оправдано в § 108 лишь для слабых электромагнитных возмущений. Вывод, основанный непосредственно на волновой оптике, можно найти у Лауэ [75].

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

ЧАСТЬ I

**РАСШИРЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ****§ 117. Введение**

При построении классической термодинамики фактически мы столкнулись с двумя ограничениями. Во-первых, мы молчаливо подразумевали, что изучаемые термодинамические системы покоятся относительно наблюдателя, и, во-вторых, считали, что системы либо вообще не испытывают воздействия гравитационных полей, либо поля эти настолько слабы и ограничены в пространстве, что можно пользоваться ньютоновой теорией тяготения и старыми, дорелятивистскими представлениями о природе пространства и времени. Для того чтобы избавиться от первого из этих ограничений, т. е. распространить термодинамическую теорию на движущиеся системы, нужно воспользоваться правилами преобразований из специальной теории относительности, которые позволяют сравнивать результаты измерений, производимых наблюдателями, произвольно движущимися относительно друг друга. Для того чтобы убрать и второе ограничение, т. е. сделать возможным теоретическое исследование термодинамических эффектов, вызываемых гравитационными полями любой интенсивности, а также изучение термодинамических свойств систем, размеры которых настолько велики, что кривизной пространства — времени пренебрегать уже нельзя, необходимо использовать более точную теорию гравитации и представления о природе пространства — времени, развитые в общей теории относительности.

В главе V было изложено обобщение термодинамики, впервые сделанное Планком и Эйнштейном в специальной теории относительности. При этом была не только получена термодинамическая теория движущихся систем, но также с помощью лоренцевых преобразований теплоты, работы, температуры и энтропии удалось глубже понять природу этих термодинамических величин. Введение же четырехмерной формулировки второго

закона термодинамики было первым шагом в направлении ковариантного обобщения.

В этой главе мы рассмотрим обобщение термодинамики в общей теории относительности и некоторые применения построенной таким образом релятивистской термодинамики. Для этого надо только обобщить развитую нами выше термодинамику специальной теории относительности путем, который кажется весьма простым и естественным. Поскольку релятивистская термодинамика была получена непосредственно из классической, можно быть уверенным в полученных результатах. Мы окончательно утвердимся в этом мнении, когда увидим на конкретных примерах, что выводы релятивистской термодинамики и релятивистской механики согласуются друг с другом.

Поскольку способы обобщения классической термодинамики как на базе специальной, так и на базе общей теории относительности почти очевидны и даже тривиальны, можно было бы ожидать, что заключения релятивистской термодинамики не должны качественно отличаться от заключений классической теории. Однако мы увидим, что из-за существенных различий между классическими и релятивистскими пространственно-временными представлениями в релятивистской термодинамике появляются качественно новые выводы. Это происходит тогда, когда размеры исследуемых систем настолько велики, что гравитационная кривизна становится существенной.

§ 118. Релятивистский аналог первого закона термодинамики

Первый закон классической термодинамики мы обычно выражаем в виде требования

$$\Delta E = Q - A. \quad (118.1)$$

Это соотношение можно рассматривать, во-первых, как закон сохранения энергии, поскольку оно связывает полное изменение энергии системы с количеством энергии, переданным через границу системы. Во-вторых, в этом соотношении отражено наличие двух способов передачи энергии — путем переноса ее тепловым потоком и за счет выполнения работы. Последнее обстоятельство окажется особенно важным для дальнейших применений второго закона термодинамики.

В релятивистской термодинамике, по аналогии с тем, как выводится классический первый закон, мы должны прежде всего удовлетворить общим принципам релятивистской механики, что, как мы уже видели в главе VII, приводит к нужному обобщению классических законов сохранения энергии и количества движения [76].

Напомним, что все законы сохранения релятивистской механики содержатся в уравнениях Эйнштейна

$$-\delta\pi T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (118.2)$$

связывающих тензор энергии — импульса с геометрией пространства — времени. Далее, мы знаем, что тензорная дивергенция правой части этого выражения тождественно равняется нулю. Поэтому уравнения поля сразу приводят к уравнениям механики, записанным в привычной форме, а именно:

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (118.3)$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (118.4)$$

Используя псевдотензорную плотность потенциальной энергии и импульса t_{μ}^{ν} , перепишем это выражение так, чтобы по виду оно совпадало с выражением классического закона сохранения энергии — импульса:

$$\frac{\partial (\mathfrak{E}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu})}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (118.5)$$

Потребуем теперь, чтобы все термодинамические процессы подчинялись законам механики в форме (118.5); тем самым мы введем в термодинамику вместо классических законов сохранения энергии и импульса — релятивистские. Заметим, что в классической термодинамике закон сохранения импульса не было нужды использовать явным образом, поскольку она ограничивалась рассмотрением лишь покоящихся систем.

Для полной аналогии с классическим первым законом термодинамики нам нужно еще установить и в релятивистском случае различие между тепловым потоком и совершаемой работой. Однако решение этого вопроса пока придется отложить, так как существо этого различия станет ясным лишь в ходе релятивистского обобщения второго закона термодинамики.

§ 119. Релятивистский аналог второго закона термодинамики

Начнем с того, что выпишем четырехмерную формулировку второго закона термодинамики, данную в § 71 в *галилеевых координатах*:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\varphi_0 \frac{dx^{\mu}}{ds} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (119.1)$$

Здесь φ_0 — собственная плотность энтропии в заданной точке в интересующий нас момент времени, измеряемая локальным

наблюдателем, покоящимся относительно термодинамической жидкости или рабочего вещества; dx^μ/ds — компоненты макроскопической «скорости» жидкости в данной точке в используемых координатах; δQ_0 — собственная теплота, измеряемая локальным наблюдателем, которая поступает в изучаемый элемент жидкости при собственной температуре T_0 за интервал времени наблюдения, входящий в формулу четырехмерного объема $\delta x \delta y \delta z \delta t$, а два знака — равенства и неравенства — относятся к случаям обратимых и необратимых процессов соответственно.

Кроме того, чтобы получить релятивистский аналог второго закона, надо привлечь обе фундаментальные идеи общей теории относительности, выражаемые принципом ковариантности и принципом эквивалентности. Согласно принципу ковариантности выбираемые аксиомы должны быть записаны в виде, общем для всех систем координат, во избежание неявных предположений, которые могут быть связаны с определенным выбором системы координат. Согласно же принципу эквивалентности эти аксиомы следует выбирать так, чтобы они совпадали с соответствующими выражениями специальной теории относительности при введении естественных координат в рассматриваемой точке.

Из сказанного вытекает, что корректное выражение второго закона термодинамики в общей теории относительности можно получить, просто записав формулу, найденную в специальной теории относительности (119.1), в ковариантном виде [77]:

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds}\right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (119.2)$$

Вводя вектор энтропии

$$S^\mu = \varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (119.3)$$

придадим (119.2) более компактную форму:

$$\mathfrak{C}_\mu^\mu \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (119.4)$$

Последнее выражение удовлетворяет, очевидно, принципу ковариантности, поскольку оно является тензорным выражением ранга нуль, ибо $(\varphi_0 dx^\mu/ds)_\mu$ есть скаляр как свернутая ковариантная производная от вектора; величина $\sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ есть скаляр, так как представляет собой элемент четырехмерного объема, выраженный в естественной мере*), и, наконец, величина $\delta Q_0/T_0$ — также скаляр, что очевидно ввиду ее независимости от

*) $\sqrt{-g}$ есть якобиан преобразования от прямоугольных координат, в которых элемент объема равен $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$. (Прим. ред.)

конкретного задания системы координат. Полученное выражение удовлетворяет также принципу эквивалентности, так как, будучи записанным в естественных координатах любой заданной точки, оно переходит в формулу (119.1) специальной теории относительности (свернутую ковариантную производную $(\varphi_0 dx^\mu/ds)_\mu$ для этого надо заменить обычной дивергенцией, а величину $\sqrt{-g}$ положить равной единице).

Итак, выражение (119.2) удовлетворяет всем условиям, выполнения которых, как мы теперь знаем, надо потребовать, а потому оно может быть принято в качестве формулировки релятивистского второго закона термодинамики. Отметим, что эта формулировка не является единственной, так как можно построить другие, более сложные ковариантные выражения, которые в случае плоского пространства — времени также переходят в формулировку второго закона в специальной теории относительности. Следовательно, введенное выражение (119.2) надо рассматривать как постулат, о полной справедливости которого можно судить лишь на основе результатов наблюдений.

Подчеркнем все же, что мы выбрали разумный путь, приняв непосредственную ковариантную формулировку второго закона специальной теории относительности: наш предыдущий опыт ковариантной формулировки релятивистских выражений для пространственно-временного интервала и геодезических линий вселил в нас уверенность, что, когда такая процедура возможна, она приводит к правильному результату. Отметим также, что теоретические следствия, вытекающие из постулированного в таком виде релятивистского закона, не противоречат остальным результатам теории относительности. В частности, мы найдем такие примеры, когда выводы релятивистской термодинамики можно проверить методами одной только релятивистской механики.

В заключение заметим, что для практических приложений обычно выгоднее использовать следующую, эквивалентную (119.2), форму:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (119.5)$$

которая выводится с помощью уравнения (46) из Приложения III.

§ 120. К интерпретации релятивистского второго закона термодинамики

Так как мы приняли, что релятивистский первый закон термодинамики есть просто другое выражение законов релятивистской механики, особенно важно ясно понять релятивистскую формулировку второго закона, так как именно второй закон определяет

характер релятивистской термодинамики. Попробуем детально разобраться в этом вопросе.

Прежде всего отметим, что различие между обратимыми и необратимыми процессами сохраняется и в релятивистской термодинамике из-за наличия двух знаков — равенства и неравенства — в выражении второго закона, причем первый из них относится к случаю обратимых процессов, а второй — к случаю необратимых.

Знак неравенства указывает также на то, что в случае необратимых процессов имеется различие между прямым и обратным течением времени, как и в обычной термодинамике. Действительно, формулировка второго закона термодинамики зависит от знака, приписываемого приращению координатного времени dx^4 , стоящему в левой части неравенства. Следовательно, если пренебречь возможностью флуктуаций, можно сказать, что принцип возрастания энтропии указывает на выделенное направление течения времени в релятивистской термодинамике, так же как и в классической. Это — полезное замечание в связи с тем, что для наглядности принципов теории относительности время часто представляют как четвертую ось, перпендикулярную обычному пространству; при этом теряются соображения (независимо от того, фундаментальны они или нет), на которых мы основываем направленность течения времени.

Следует также все время помнить, что существенно *макроскопический* и *феноменологический* характер термодинамических построений должен оставаться неизменным и при релятивистском обобщении теории. Всем величинам в релятивистской формулировке второго закона (119.2) следует придавать лишь чисто макроскопический смысл в соответствии с определенными эмпирическими рецептами, которые могут быть даны для измерения этих величин.

Так, φ_0 есть энтропия на единицу объема жидкости, измеренная в данной точке в данный момент времени локальным наблюдателем. Это — безусловно макроскопическая плотность в согласии с нашими воззрениями на природу энтропии и характеризует лишь достаточно крупные элементы жидкости, без связи с каким-либо микроскопическим анализом на уровне атомов и излучения.

Другой пример — это величины dx^μ/ds , компоненты четырехмерного вектора макроскопической «скорости» жидкости в некоторой точке и в некоторый момент времени. Так, величину dx^0/ds находят, наблюдая движение макроскопически выделенной точки в жидкости и определяя скорость изменения ее координаты x с помощью часов, движущихся вместе с данной точкой; dx^4/ds определяется по скорости изменения времени подобной координаты x^4 в данной точке с помощью тех же самых часов.

Аналогично, g есть детерминант, образованный из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$, измеренных макроскопически. Последнее особенно существенно, поскольку у нас сейчас просто нет никаких соображений о том, каков смысл этого тензора с точки зрения атомной теории. Кроме того, произведение вида $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ означает макроскопически бесконечно малый элемент четырехмерного объема.

Обращаясь, наконец, к правой части анализируемого выражения, заметим, что T_0 следует рассматривать как абсолютную температуру жидкости, измеряемую с помощью обычных способов локальным наблюдателем, покоящимся в данный момент в жидкости в выбранной точке; δQ_0 — теплота (измеряемая этим же локальным наблюдателем), которая втекает в элемент жидкости с собственным объемом δv_0 за бесконечно малое собственное время δt_0 . Эти величины выбраны так, чтобы они определяли тот же четырехмерный объем (в естественных координатах), что и произведение $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$. Тогда δQ_0 и T_0 сохраняют макроскопический характер теплоты и температуры старой термодинамики.

Очень важно подчеркнуть чисто макроскопический и феноменологический характер релятивистской термодинамики, так как это поможет избежать сложностей и неопределенностей, связанных с атомной точкой зрения, особенно в наше время, когда развитие атомной теории еще не завершилось. Такой эмпирический подход придает нам уверенность в правильности теории.

§ 121. К интерпретации теплоты в релятивистской термодинамике

В процессе придания второму закону термодинамики, найденному в специальной теории относительности, такого общего вида, который был бы пригоден для общей теории относительности, трудно сохранить точный смысл величины δQ_0 , стоящей в правой части формулы и обозначающей количество поглощаемой теплоты, измеренное локальным наблюдателем. Способ определения δQ_0 , приведенный выше, не свободен от произвола; поэтому мы поговорим сейчас об интерпретации этой величины [78].

Выпишем для этого релятивистский второй закон в его первоначальном виде (119.2):

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (121.1)$$

Предполагая известным смысл всех других величин в этом выражении, покажем с помощью принципа ковариантности, что δQ_0

всегда есть скаляр, величина которого пропорциональна величине $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ и не зависит никоим образом от системы координат.

В самом деле, во-первых, стоящие в (121.1) величины $(\varphi_0 dx^\mu/ds)_\mu$ и T_0 с необходимостью скалярны и значения их никак не связаны с выбором системы отсчета, поскольку первая из них — свернутая ковариантная производная от вектора, а относительно второй четко указано, как она может быть измерена локальным наблюдателем. Во-вторых, заметим, что величина $\sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ также скалярна и численное ее значение пропорционально бесконечно малому элементу объема $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ и не зависит от выбора координатной системы, поскольку она является выражением четырехмерного объема в естественной мере. Таким образом, последняя не рассмотренная еще в этом выражении величина δQ_0 в соответствии с принципом ковариантности также должна быть скаляром, с численным значением, пропорциональным бесконечно малому элементу объема $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$, и не должна зависеть от используемой системы координат так, чтобы постулированный нами закон, удовлетворяя требованию ковариантности, имел одинаковый смысл во всех системах координат.

Показав, что величина δQ_0 скалярна и значение ее не зависит от выбора системы координат, можно теперь определить ее значение в любой удобной в данном случае системе координат. Для этого зададим рассматриваемую точку в естественных координатах x, y, z, t ; из принципа эквивалентности следует, что такие координаты можно ввести всегда. В естественных координатах термодинамические законы, сформулированные с помощью специальной теории относительности, остаются справедливыми в малой окрестности изучаемой точки. Ковариантное дифференцирование в этих координатах сводится к обычному дифференцированию, а величина $\sqrt{-g}$ равняется единице, так что левая часть в выражении второго закона (121.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 = & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0 \frac{dx}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{dy}{ds} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_0 \frac{dz}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \delta t. \quad (121.2) \end{aligned}$$

Подставим сюда очевидные выражения

$$\frac{dx}{ds} = u_x \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = u_y \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = u_z \frac{dt}{ds},$$

где u_x, u_y и u_z — компоненты скорости жидкости, записанные в

обычном виде. Тогда правая часть (121.2) переписывается так:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} u_y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} u_z \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \delta t.$$

Однако согласно специальной теории относительности энтропия инвариантна относительно преобразований Лоренца, а следовательно, плотность энтропии должна содержать множитель лоренцева сокращения ds/dt , так что можно положить

$$\varphi = \varphi_0 \frac{dt}{ds},$$

где φ — плотность энтропии жидкости в выбранной нами системе координат. Производя эту подстановку, получаем вместо приведенного выше выражения

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi u_z) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t,$$

что можно переписать следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} u_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} u_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} u_z + \right. \\ \left. + \varphi \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \delta t,$$

или в виде

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t,$$

где под полной производной $d\varphi/dt$ подразумевается скорость изменения плотности энтропии в точке, движущейся вместе с жидкостью.

Вводя обозначение δv для объема жидкости, совпадающего в данный момент с координатным элементом пространства $\delta x \delta y \delta z$, получаем

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} \delta v + \varphi \frac{d}{dt} (\delta v) \right] \delta t = \frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t,$$

откуда находим окончательно

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 = \frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t \quad (121.3)$$

в качестве выражения левой части релятивистского второго закона (121.1) в естественных координатах для данной точки.

Отсюда видно, что левая часть выражения для второго закона отразит то возрастание за время δt , которое совершится с энтро-

пией малого элемента жидкости, занимающей пространственный объем $\delta x \delta y \delta z$. Далее, в соответствии с принципом эквивалентности к данной малой системе можно применить специальную релятивистскую термодинамическую теорию и связать возрастание энтропии в этой системе с теплотой и температурой посредством соотношения

$$\frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (121.4)$$

где δQ — теплота, поглощаемая этим элементом жидкости за время δt при температуре T , причем все эти три величины заданы в выбранной нами системе отсчета. Далее, так как отношение теплоты к температуре инвариантно при преобразованиях Лоренца, то мы можем считать

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (121.5)$$

где δQ_0 и T_0 — поглощаемая теплота и температура, которые измеряются локальным наблюдателем в системе собственных координат данного элемента жидкости.

Кроме того, в силу лоренцева сокращения элемента объема и лоренцева удлинения времени можно написать

$$\delta v \delta t = \delta v_0 \delta t_0, \quad (121.6)$$

где δv_0 — объем рассматриваемого элемента жидкости, измеренный в системе собственных координат, а δt_0 — отрезок собственного времени, за который происходит передача теплоты.

Итак, собирая все выражения (121.3) — (121.6), мы получим в естественных координатах соотношение

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (121.7)$$

совпадающее по форме с постулированным выше релятивистским вторым законом. При этом величина δQ_0 , стоящая в правой части, означает, как и полагается, теплоту (измеряемую локальным наблюдателем в данной точке в определенный момент времени), которая втекает в элемент жидкости, занимающий собственный объем δv_0 , за интервал собственного времени δt_0 . Пространственные и временные интервалы при этом определены так, что

$$\delta v_0 \delta t_0 = \delta v \delta t = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4. \quad (121.8)$$

Соотношение (121.7) выделено нами с помощью естественных координат. Тем не менее, если вспомнить, что величина δQ_0 , как мы ранее установили, является скаляром, этот вывод становится справедливым для любой системы координат. В самом деле, мы

не накладывали никаких ограничений на форму рассматриваемого элемента жидкости, так как поглощаемая теплота для рассматриваемых масштабов величин зависит лишь от произведения объема на временной интервал.

Далее, так как δQ_0 — это теплота, поглощаемая определенным элементом жидкости, то, как и в обычной термодинамике, тепловой поток надо рассматривать относительно интересующих нас жидкости или рабочего вещества, а не относительно выбранной системы пространственных координат.

И наконец, чтобы избежать неопределенностей, которые могут возникать при интегрировании выражения второго закона, отметим еще одно обстоятельство. Именно, при интегрировании второго закона каждый бесконечно малый элемент теплоты, входящий в рассматриваемую систему, должен быть поделен на температуру в месте пересечения им границы, отделяющей систему от окружающей среды, — условие, которое накладывается и в обычной термодинамике. Следовательно, мы можем рассматривать δQ_0 и T_0 как величины, измеряемые обычным образом наблюдателями, которые находятся на границе изучаемого элемента жидкости.

§ 122. О применении в термодинамике сопутствующих систем координат

В предыдущем параграфе мы нашли, что тепловой поток, вообще говоря, следует рассматривать относительно изучаемой жидкости, а не в какой-либо другой системе координат. В этом случае самое удобное для термодинамики — выбрать систему координат так, чтобы компоненты «скорости» потока были везде все время равны нулю, т. е.

$$\frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^3}{ds} = 0. \quad (122.1)$$

Такие системы координат принято называть *сопутствующими*; ими везде можно воспользоваться, так как их можно реализовать, задавая пространственную систему в виде сетки, построенной из отрезков, соединяющих близкие частицы, и перемещающейся вместе с жидкостью.

В сопутствующей системе координат следствия релятивистского второго закона становятся особенно простыми и понятными. Начнем с того, что формулировку закона (119.5), данную нами в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (122.2)$$

легко упростить, пользуясь тем обстоятельством, что соотношение

(121.1) справедливо для всех точек жидкости, именно:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (122.3)$$

Кроме того, поскольку все координаты взаимно независимы, перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \sqrt{-g} \frac{dx^4}{ds} \right) \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (122.4)$$

Эта форма записи имеет значительные преимущества. Во-первых, приравнивая элемент четырехмерного объема, расположенный в окрестности точки наблюдения, к выражению объема, записанному в естественной мере:

$$\delta v_0 dt_0 = \delta v_0 ds = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4, \quad (122.5)$$

легко найти, что (122.4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} (\varphi_0 \delta v_0) \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (122.6)$$

где δv_0 означает собственный объем элемента жидкости, постоянно пребывающего в данной бесконечно малой области пространства $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$, причем величина этого объема может быть определена в некоторый момент времени локальным наблюдателем, движущимся с этим элементом. И, во-вторых, можно, очевидно, представить последнее соотношение еще так:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} (\varphi_0 \delta v_0) \delta t_0 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (122.7)$$

где

$$\delta t_0 = \frac{dt_0}{dx^4} \delta x^4, \quad (122.8)$$

т. е. δt_0 — бесконечно малое приращение собственного времени, которое соответствует в любой момент приращению временной координаты δx^4 .

Формулировка второго закона в виде (122.6) оказывается весьма полезной, потому что содержит выражение скорости изменения собственной энтропии любого данного элемента жидкости по временной координате x^4 , которая определена во всех частях данной системы. Такой подход особенно полезен при рассмотрении конечных систем.

Форма записи (122.7) еще раз показывает справедливость нашей интерпретации δQ_0 . Действительно, левая часть в соотношении (122.7) отражает возрастание энтропии (с точки зрения локального наблюдателя), которое происходит за время δt_0 в элементе жидкости объема δv_0 . Но тогда из обычных принципов

термодинамики, которыми должен пользоваться локальный наблюдатель, вытекает, что δQ_0 — это количество теплоты, поглощаемое за это время данным элементом, с точки зрения этого наблюдателя. Но, с другой стороны, в соответствии с выражениями (122.5) и (122.8) имеем

$$\delta v_0 \delta t_0 = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4, \quad (122.9)$$

что совпадает с определением объема этого элемента (121.8) и промежутка времени, который затрачивает наблюдатель при измерении величины δQ_0 .

Из формулировки второго закона (122.7) легко также видеть, что локальный наблюдатель, изучающий термодинамические свойства элемента жидкости в непосредственной близости от него, должен использовать те же методы измерения энтропии, теплоты и температуры и критерии обратимости и необратимости, которые уже известны из классической термодинамики. Последнее подкрепляет нашу уверенность в справедливости релятивистской термодинамики и объясняет нам, почему существенной разницы в предсказаниях классической термодинамики и релятивистской можно ожидать лишь в приложениях к большим участкам Вселенной.

ЧАСТЬ II

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 123. Применение первого закона термодинамики к изменениям статического состояния системы

Приступим к изучению следствий, вытекающих из релятивистской термодинамики. Так как мы будем интересоваться прежде всего условиями статического термодинамического равновесия, то начнем с того, что выясним, какие ограничения накладывают принципы релятивистской механики на протекающие термодинамические процессы, не связанные с изменениями в окружающей среде.

Рассмотрим систему вместе с окружающей ее средой, которая находилась вплоть до некоторого начального момента «времени» x^4 в заданном статическом состоянии, так что в ней не происходило никаких изменений до времени x^4 . Предположим, что затем в системе происходят изменения, не сказывающиеся на состоянии окружающей среды. Пусть в результате этих изменений к моменту «времени» x''^4 система переходит в новое статическое состояние, после чего состояние системы от времениподобной координаты x^4 опять не зависит.

Так как по предположению этот переход не вызывает никаких изменений в окружающей среде, очевидно, что а) отсутствует

передача энергии или импульса между системой и окружающей средой, и б) распределение энергии и импульса в окружающей среде остается неизменным. Легко показать, однако, что эти условия выполняются лишь в том случае, когда процессы, происходящие внутри системы, не изменяют значений гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных $\partial g_{\mu\nu}/\partial x_\alpha$ и $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial x_\alpha \partial x_\beta$ на границе системы и вне ее.

Для того чтобы показать, что этого ограничения достаточно, чтобы энергия и импульс не передавались в систему из окружающей ее пространства, воспользуемся законом сохранения энергии — импульса конечных систем (88.2):

$$\frac{d}{dx^4} \iiint (\mathfrak{E}_\mu^4 + t_\mu^4) dx^1 dx^2 dx^3 = - \iiint \left[\mathfrak{E}_\mu^1 + t_\mu^1 \right]_{x^1}^{x^{11}} dx^2 dx^3 - \\ - \iiint \left[\mathfrak{E}_\mu^2 + t_\mu^2 \right]_{x^2}^{x^{12}} dx^1 dx^3 - \iiint \left[\mathfrak{E}_\mu^3 + t_\mu^3 \right]_{x^3}^{x^{13}} dx^1 dx^2. \quad (123.1)$$

Слева здесь стоит скорость изменения импульса и энергии системы ($\mu=1, 2, 3, 4$), правую же часть можно рассматривать как поток импульса и энергии через границу, отделяющую систему от окружающей среды, при том условии, что мы, как обычно, используем координаты, в которых пределы интегрирования совпадают с граничной поверхностью, отделяющей систему от окружающего пространства.

Вплоть до начального момента x'^4 , с которого начинаются изменения в системе, левая часть уравнения (123.1) равна нулю, так как система по предположению находится в это время в некотором заданном статическом состоянии. Следовательно, правая часть этого уравнения также равняется нулю вплоть до момента времени x'^4 . Однако правая часть постоянна вне зависимости от значения x'^4 , поскольку величины

$$-8\pi \mathfrak{E}_\mu^v = \mathfrak{R}_\mu^v - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g_\mu^v + \Lambda g_\mu^v \sqrt{-g} \quad (123.2)$$

и

$$16\pi t_\mu^v = -g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} + g_\mu^v \mathfrak{E} + 2\Lambda g_\mu^v \sqrt{-g} \quad (123.3)$$

полностью определяются значениями тензора $g_{\mu\nu}$ и значениями первых и вторых его производных, а по предположению эти величины постоянны на границе, задающей пределы интегрирования в правой части уравнения (123.1). Последнее приводит к тому, что обе части уравнения остаются все время равными нулю и не происходит никакой передачи энергии или импульса между системой и окружающей средой.

Покажем, что требования постоянства потенциалов и первых и вторых их производных достаточно, чтобы не происходило никаких изменений в распределении энергии и импульса окружающей среды. Напомним, что согласно (123.2) тензор энергии — импульса однозначно определяется значениями гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных. Следовательно, если все эти величины остаются постоянными во всех точках границ рассматриваемой системы, то не будут изменяться и распределения энергии и импульса в окружающей среде.

Итак, подводя итоги, устанавливаем, что согласно принципам релятивистской механики или, что то же, согласно первому закону релятивистской термодинамики термодинамическая система может переходить из одного статического состояния в другое, не вызывая при этом никаких изменений в окружающей среде, если на гравитационные потенциалы и их первые и вторые производные в точках на границе системы и вне ее наложены условия

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) = \delta \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = 0. \quad (123.4)$$

§ 124. Применение второго закона термодинамики к изменениям статического состояния системы

В предыдущем параграфе мы нашли условия, аналогичные тем, что накладывались в классической термодинамике обычным первым законом, при которых возможно изменение статического состояния системы, не вызывающее никаких изменений в окружающей среде. Выясним теперь, какие ограничения на возможные изменения статического состояния накладывает в этом случае второй закон.

Этот вопрос наиболее просто решается в системе сопутствующих координат, которую мы определили в § 122. Во всяком случае координатная система должна двигаться вместе с рассматриваемой термодинамической системой и до и после внутреннего перехода, так как по предположению начальное и конечное состояния — статические. Если же пользоваться сопутствующей системой отсчета и в течение перехода, можно выразить ограничения, накладываемые вторым законом, в следующем простом виде (см. (122.3)):

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (124.1)$$

Согласно (122.6) левую часть этого выражения можно рассматривать как приращение собственной энтропии за промежуток «времени» δx^4 , которое измеряется локальным наблюдателем

в элементе жидкости, занимающем «пространственную» область $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$, а в соответствии с соотношением (122.7) правая часть этого выражения определяется теплотой, измеряемой локальным наблюдателем, которая поступает в этот элемент жидкости в течение бесконечно малого отрезка собственного времени δt_0 , соответствующего интервалу δx^4 .

Если это выражение для данного элемента жидкости проинтегрировать по всему интервалу от x'^4 до x''^4 , в течение которого происходит изменение состояния, то получим

$$\int_{x'^4}^{x''^4} \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \int_{x'^4}^{x''^4} \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (124.2)$$

Здесь в левой части стоит полное изменение энтропии в изучаемом элементе объема, определяемое локальным наблюдателем, а в правой части (в соответствии с определением, данным в конце § 121) — сумма по всем элементам теплоты, проходящим через границу в рассматриваемый объем, причем каждый из элементов поделен на значение граничной температуры, определенное в момент пересечения границы и измеренное наблюдателем, находящимся на границе.

Если теперь выполнить второе интегрирование по всем элементам жидкости, составляющим рассматриваемую систему, то ясно, что в правой части (124.2) мы должны получить нуль:

$$\int_{x'^4}^{x''^4} \iiint \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq 0, \quad (124.3)$$

так как по предположению мы интересуемся лишь такими переходами, при которых в целом не происходит передачи теплоты через границу системы, а наш способ определения Q_0 и T_0 должен приводить к взаимному уничтожению вкладов от соседних элементов внутри системы.

Таким образом, релятивистское второе начало термодинамики накладывает на переходы системы из одного статического состояния в другое, происходящие без изменений в окружающей среде, следующее условие:

$$\left[\iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 \right]_{x''^4} \geq \left[\iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 \right]_{x'^4}. \quad (124.4)$$

Индексы x'^4 и x''^4 указывают на то, что значения интегралов берутся для начального и конечного состояний системы соответственно.

Для того чтобы подчеркнуть аналогию этого выражения с тем, что мы имели в классической термодинамике, мы можем

его интерпретировать как условие, наложенное на «энтропию» S , в соответствии с которым при переходах системы из одного статического состояния в другое ее энтропия может лишь возрасть или оставаться постоянной. Под величиной S при этом надо понимать полную проинтегрированную собственную энтропию всех элементов жидкости, составляющих систему:

$$S = \iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (124.5)$$

§ 125. Условия статического термодинамического равновесия

Пользуясь формулами, выведенными в предыдущих двух параграфах, мы можем теперь выразить условия статического термодинамического равновесия в конечной системе, которая не взаимодействует с окружающей средой, в виде вариационного уравнения

$$\delta \iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad (125.1)$$

с дополнительными условиями на границе системы

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) = \delta \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = 0. \quad (125.2)$$

Первое из этих уравнений — условие максимальности рассматриваемого интеграла, вытекающее из второго закона термодинамики, который утверждает (см. (124.4)), что эта величина может лишь возрасть, если она вообще изменяется при переходе системы из данного статического состояния в другое статическое состояние (при условии, что система не взаимодействует с окружающей средой). Второй же набор уравнений, как мы уже отмечали в § 123, выражает условие, достаточное для того, чтобы при изменении внутреннего состояния системы взаимодействие с окружающей средой действительно отсутствовало.

§ 126. Статическое равновесие в случае сферически симметричного распределения жидкости

Если в жидкой системе действуют только силы гравитационного притяжения, то состояние статического равновесия должно быть состоянием, обладающим сферической симметрией. Мы специально рассмотрим этот случай, применив к нему полученные выше критерии равновесия. Начнем с того, что перепишем выражение для интервала (94.9):

$$ds^2 = -e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\nu dt^2, \quad (126.1)$$

где

$$\mu = \mu(r), \quad v = v(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (126.2)$$

а изотропные координаты x, y, z, t выбраны так, чтобы пределы интегрирования, включающие всю интересующую нас область, лежали бы на реальной граничной поверхности, отделяющей эту область от окружающей среды. Такого рода координаты были использованы в § 123 для получения условий (125.2). Используя выбранную выше форму интервала, мы имеем

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}v} \quad \text{и} \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{1}{2}v}; \quad (126.3)$$

второе соотношение следует из равенства нулю пространственных компонент «скорости» рассматриваемой жидкости. Подставляя эти соотношения в (125.1) и учитывая (125.2) и (126.2), получаем условие статического термодинамического равновесия в виде

$$\delta \iiint \varphi_0 e^{\frac{3}{2}\mu} dx dy dz = 0 \quad (126.4)$$

при дополнительных условиях на границе области интегрирования

$$\delta\mu = \delta\mu' = \delta\mu'' = \delta v = \delta v' = \delta v'' = 0, \quad (126.5)$$

где штрихи означают дифференцирование по радиусу

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При нахождении условий равновесия мы вводим координаты x, y, z, t , поскольку, как отмечалось выше, они того же типа, что применялись при получении соотношений (125.2). Для упрощения дальнейших рассмотрений лучше перейти к полярным координатам r, θ, φ, t . Прежде всего перепишем в этих координатах выражение для интервала:

$$ds^2 = -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^v dt^2, \quad (126.6)$$

$$\mu = \mu(r), \quad v = v(r).$$

Выбирая затем область интегрирования в виде сферического слоя, заключенного между радиусами r_1 и r_2 , перепишем условие статического равновесия в случае сферического распределения жидкости следующим образом:

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} 4\pi \varphi_0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr = 0 \quad (126.7)$$

при дополнительных условиях

$$\delta\mu = \delta\mu' = \delta\mu'' = \delta v = \delta v' = \delta v'' = 0 \quad (\text{в точках } r_1 \text{ и } r_2). \quad (126.8)$$

Чтобы можно было применить критерий (126.7), надо задать в явном виде зависимость подинтегрального выражения от формы интервала и от состава жидкости.

Для этого, во-первых, перепишем выражения (95.15) для собственного давления p_0 и собственной макроскопической плотности ρ_{00} жидкости в соответствии с принятой выше формой интервала:

$$\begin{aligned} 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'v'}{2} + \frac{\mu' + v'}{r} \right), \\ 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu' + v'}{2r} \right), \\ 8\pi \rho_{00} &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right), \\ \frac{dp_0}{dr} &= -\frac{\rho_{00} + p_0}{2} v'. \end{aligned} \tag{126.9}$$

Во-вторых, воспользуемся формулой (51) из Приложения III, которая определяет бесконечно малый собственный пространственный объем жидкости, расположенный между радиусами r и $r+dr$:

$$v_0 = 4\pi e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr. \tag{126.10}$$

С ее помощью выразим собственную энтропию этого сферического слоя жидкости, определяемую локальным наблюдателем, в следующем виде:

$$S_0 = 4\pi \rho_0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr. \tag{126.11}$$

Обе величины, введенные с помощью (126.10) и (126.11), естественно, являются бесконечно малыми. Далее, отметим, что собственная энтропия элемента жидкости зависит от собственной его энергии, объема и состава тем же самым образом, что и в классической термодинамике (ср. с (60.4)). Следовательно, когда нам надо будет вводить вариацию выражения (126.11) в условие равновесия (126.7), мы сможем написать:

$$\delta S_0 = \frac{1}{T_0} \delta E_0 + \frac{p_0}{T_0} \delta v_0 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_1} \right)_{E_0, v_0} \delta n_1 + \dots + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_n} \right)_{E_0, v_0} \delta n_n, \tag{126.12}$$

где T_0 — собственная температура данного слоя жидкости, измеряемая локальным наблюдателем; E_0 — собственная энергия этого слоя; n_1, n_2 и т. д. — концентрации различных веществ, выраженные в молях, определяющие состав жидкости. Далее, согласно

(126.9) будем считать, что δE_0 в этом соотношении имеет вид

$$\begin{aligned} \delta E_0 &= \delta \left(4\pi\rho_{00} e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr \right) = - \left[\frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{2} \left(\delta\mu'' + \frac{\mu'}{2} \delta\mu' + \frac{2}{r} \delta\mu' \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{4} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) \delta\mu \right] r^2 dr = \\ &= \left[- \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{2} \left(\delta\mu'' + \frac{\mu'}{2} \delta\mu' + \frac{2}{r} \delta\mu' \right) + 2\pi\rho_{00} e^{\frac{3}{2}\mu} \delta\mu \right] r^2 dr, \quad (126.13) \end{aligned}$$

а δv_0 , в соответствии со (126.10), равняется

$$\delta v_0 = \delta \left(4\pi e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr \right) = 6\pi e^{\frac{3}{2}\mu} \delta\mu r^2 dr. \quad (126.14)$$

Тогда, подставляя найденные выражения в (126.11), окончательно находим

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial n_i} \right)_{E_0, v_0} \delta n_i = 4\pi \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial c_i^0} \right)_\mu \delta c_i^0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr, \quad (126.15)$$

где $(\partial \Phi_0 / \partial c_i^0)_\mu$ — частная производная от собственной плотности энтропии по концентрации i -й компоненты, взятая при постоянной плотности энергии и постоянном удельном объеме; последнее обстоятельство в правой части обозначено подстрочным индексом μ , так как плотность энергии и удельный объем определяются величиной μ и ее производными.

Используя эти соотношения, мы можем переписать полученное ранее условие равновесия (126.7) в виде

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[- \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{2T_0} \left(\delta\mu'' + \frac{\mu'}{2} \delta\mu' + \frac{2}{r} \delta\mu' \right) + \frac{2\pi\rho_{00} + 6\pi\rho_0}{T_0} e^{\frac{3}{2}\mu} \delta\mu + \right. \\ \left. + 4\pi \sum_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_i^0} \delta c_i^0 e^{\frac{3}{2}\mu} \right] r^2 dr = 0.$$

Упростим это выражение обычным способом: проинтегрируем его по частям и опустим члены, обращающиеся в нуль из-за граничных условий; в самом деле, подставляя

$$\delta\mu'' = \frac{d}{dr} (\delta\mu'), \quad \delta\mu' = \frac{d}{dr} (\delta\mu)$$

и используя граничные условия (126.8)

$$\delta\mu' = \delta\mu = 0 \quad (\text{при } r, \text{ равном } r_1 \text{ и } r_2),$$

нетрудно найти, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[-\frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) \right\} + \frac{4\pi(\rho_{00} + 3\rho_0)}{T_0} e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 \right] \delta\mu dr + \\ + \int_{r_1}^{r_2} 8\pi \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial c_i^0} \right)_\mu \delta c_i^0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr = 0. \quad (126.16)$$

Это и есть записанное в окончательном виде условие термодинамического равновесия для жидкой сферы.

В процессе получения этого выражения мы убедились в том, что вариации собственной энергии δE_0 и собственного объема δv_0 , появляющиеся в (126.12), обе внесли вклад в вариацию метрической переменной μ ; вариации же количества молей различных компонент δn_i , входящих в состав рассматриваемой жидкой оболочки, ограниченной радиусами r и $r+dr$, приводят к вариациям δc_i^0 , которые определяют изменения концентрации для каждого значения r . Так как E_0 и v_0 первоначально были введены как переменные, которые не зависят от значений n_i , определяющих состав, можно, очевидно, считать, что вариация $\delta\mu$ в уравнении (126.16) не зависит от δc_i^0 .

§ 127. Химическое равновесие в гравитирующей жидкой сфере

Теперь мы применим общее условие равновесия, полученное в предыдущем параграфе, к исследованию химического равновесия между реагирующими веществами, которые находятся внутри гравитирующей жидкой сферы. Поскольку вариации $\delta\mu$ и δc_i^0 в (126.16) следует рассматривать как независимые, ясно, что второй интеграл в этом выражении можно считать равным нулю, а это возможно лишь при условии

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial c_i^0} \right)_\mu \delta c_i^0 = 0, \quad (127.1)$$

которое должно выполняться для любого значения r . Индекс μ в этом выражении указывает на то, что дифференцирование производится при постоянных значениях плотности энергии и удельного объема. Сравнивая (127.1) с (60.15), убеждаемся в том, что полученное соотношение совпадает с классическим

условием химического равновесия, если считать, что плотность энтропии и значения концентраций измеряются локальным наблюдателем, покоящимся в рассматриваемой жидкости. Таким образом, с точки зрения локального наблюдателя, условие химического равновесия между реагирующими веществами в любой точке гравитирующей жидкой сферы не отличается от найденного ранее в классической термодинамике.

Это еще один пример того, как часто релятивистский анализ, проводимый методом введения локального наблюдателя, дает те же выводы, что и классическая теория. Правда, этого и следовало ожидать, поскольку в аксиоматическую основу общей теории относительности с самого начала был заложен принцип эквивалентности, и им вполне надежно можно руководствоваться в тех случаях, когда мы уверены, что рассматриваемое явление не зависит от производных от $g_{\mu\nu}$ выше первой.

Выяснение того обстоятельства, что положение в гравитационном поле прямо не влияет на условия химического равновесия, весьма важно, так как при рассмотрении моделей звезд это обычно принимают без доказательства. В качестве следствия этого обстоятельства, отметим, что полученные ранее критерии равновесия между водородом и гелием, а также между веществом и излучением применимы и к звездам. Следовательно, трудности, с которыми мы столкнулись при нахождении относительных концентраций, остаются и здесь. Мы убедимся в последней главе, что условия химического равновесия в статических космологических моделях подобны обсужденным в этом параграфе.

§ 128. Тепловое равновесие в гравитирующей жидкой сфере

Мы можем также использовать общее условие термодинамического равновесия, полученное в § 126, для исследования распределения температуры в жидкой сфере, которая пришла в состояние теплового равновесия. Воспользуемся опять-таки тем, что вариации $\delta\mu$ и δc_i^0 в (126.16) следует считать независимыми. Тогда можно сделать вывод, что первый интеграл в этом выражении равен нулю. Последнее, однако, может выполняться лишь при том условии, что во всех точках внутри сферы имеет место соотношение

$$\frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) \right\} = \frac{4\pi(\rho_{00} + 3p_0)}{T_0} e^{\frac{3}{2}\mu} r^2. \quad (128.1)$$

Чтобы представить соотношение (128.1) в виде, удобном для интегрирования, преобразуем его правую часть: подставим из (126.9) в сумму $(\rho_{00} + 3p_0)$ выражение для ρ_{00} , а $3p_0$ заменим

первым выражением для p_0 и удвоенным вторым выражением для p_0 . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) \right\} &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu'v'}{4} + \frac{v'}{r} \right) r^2 = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}v}}{T_0} \frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(e^{\frac{1}{2}v} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (128.2)$$

Первый интеграл этого уравнения, очевидно, выглядит так:

$$e^{\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}v} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{T_0} r^2 \frac{d}{dr} \left(e^{\frac{1}{2}v} \right) + B,$$

где B — постоянная интегрирования. Это выражение можно переписать в эквивалентной форме:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dr} - \frac{Be^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}v}}{r^2 T_0}. \quad (128.3)$$

Соответствующие подстановки из (126.9) позволяют привести его к виду

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = \frac{1}{\rho_{00} + p_0} \frac{dp_0}{dr} - \frac{Be^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}v}}{r^2 T_0}.$$

Далее, если из физических соображений следует, что в центре сферы (при $r=0$) производные dT_0/dr и dp_0/dr равны нулю, а T_0 отлична от нуля и остальные функции r конечны, то ясно, что постоянную B следует приравнять нулю. Тогда последнее выражение для зависимости собственной температуры от координаты внутри статической жидкой сферы, находящейся в тепловом равновесии, задается следующими уравнениями:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dr}, \quad (128.4)$$

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = \frac{1}{\rho_{00} + p_0} \frac{dp_0}{dr}, \quad (128.5)$$

и после второго интегрирования в виде соотношения

$$T_0 e^{\frac{1}{2}v} = T_0 \sqrt{g_{44}} = C, \quad (128.6)$$

где C — еще одна постоянная интегрирования.

Любопытно было бы, конечно, исследовать, возможны ли физически интересные решения при отличной от нуля постоянной интегрирования V . Однако очевидно, что найденные простые соотношения вполне пригодны в случае обычных непрерывных распределений.

Первое, что мы отметим, подводя итоги,— это тот важный вывод, что собственная температура жидкости, измеряемая локальным наблюдателем, использующим обычные методы тепловых измерений, не может быть постоянной повсюду в жидкой сфере, которая находится в состоянии теплового равновесия; напротив, собственная температура зависит от значения гравитационного потенциала в данной точке, увеличиваясь по мере приближения к центру сферы. Этот вывод, конечно, очень отличается от классического, данного в § 61, согласно которому однородная температура есть необходимое условие теплового равновесия. Напомним, однако, что с точки зрения теории относительности все формы энергии обладают весом, так же как и массы. Тогда заключение о том, что необходим температурный градиент для того, чтобы отсутствовал тепловой поток из областей с более высоким гравитационным потенциалом в области с более низкими его значениями, кажется вполне естественным [79].

Второе обстоятельство, которое надо отметить,— это то, что реальное воздействие гравитации на вид равновесного распределения температуры должно быть крайне малым, исключая случай сверхсильных полей. Так, в поле с интенсивностью, равной интенсивности гравитационного поля Земли у ее поверхности, изменение температуры при перемещениях в радиальном направлении очень мало:

$$\frac{d \ln T}{dr} \approx - 10^{-18} \text{ см}^{-1}. \quad (128.7)$$

Таким образом, становится понятным, почему до сих пор не удалось получить никаких данных о влиянии гравитационного поля на тепловой поток.

В действительности не ясно, достаточно ли велики эти новые эффекты, чтобы их стоило учитывать, даже в теории звездных структур. В самом деле, нетрудно установить с помощью (128.5), что относительное повышение температуры по мере приближения к центру сферы, находящейся в состоянии теплового равновесия, меньше относительного повышения давления; оно даже много меньше для обычного вещества, плотность которого ρ_{00} велика по сравнению с давлением p_0 . Тем не менее возможно, что новые критерии теплового равновесия все же окажутся полезными в связи с неоднородными космологическими моделями, в которых происходят процессы теплового обмена между различными частями.

Третье замечание в связи с результатами этого параграфа состоит в том, что связь между температурой и гравитационным потенциалом можно получить с помощью одних только принципов механики для случая распределения абсолютно черного излучения. Так, для сферически симметричного распределения абсолютно черного излучения, которое можно представить себе, например, как излучение, окружающее гравитирующую сферу из плотного вещества, можно заключить из уравнений (126.9), что давление должно повышаться во внутренних слоях, чтобы компенсировать вес излучения. Уравнения механики (126.9) позволяют найти связь между скоростями возрастания этих величин, а именно:

$$\frac{dp_0}{dr} = - \frac{\rho_{00} + p_0}{2} \frac{dv}{dr}. \quad (128.8)$$

Излучение черного тела характеризуется, однако, еще и законом Стефана — Больцмана (§ 65), связывающим непосредственно механические величины, плотность и давление, с термодинамической величиной — температурой:

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= aT_0^4 \\ p_0 &= \frac{a}{3} T_0^4, \end{aligned} \quad (128.9)$$

где a — так называемая постоянная Стефана. Подставляя эти выражения в (128.8), сразу получаем уже известное нам соотношение между температурой и гравитационным потенциалом:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{dv}{dr}. \quad (128.10)$$

Такая конкретная проверка общего соотношения, для получения которого привлекался весь аппарат релятивистской термодинамики, дополнительно убеждает нас, что обобщение термодинамики на основе общей теории относительности выполнено нами вполне корректным образом.

В заключение напомним, что все результаты этого параграфа найдены для специального случая статического сферически симметричного распределения жидкости. Заметим также, что за величину ν в условии теплового равновесия (128.10) можно принять ν , входящую в выражение (95.14), которое было принято для интервала специального вида. Можно также отождествить ее с ν из (95.12), так как в § 94 было показано, что величина ν не изменяется при переходе от одной формулы к другой.

§ 129. Тепловое равновесие в статическом поле общего типа

Выясним теперь, каковы условия теплового равновесия в более общем статическом поле, создаваемом, например, некоторой твердой структурой. В этом случае конечное стабильное состояние вовсе не обязано характеризоваться сферической симметрией [72]. Чтобы найти условия теплового равновесия в таком поле, предположим, что части системы, температуры которых мы хотим сравнить, находятся в тепловом контакте благодаря малым трубкам, которые содержат черное излучение, или же могут быть приведены в тепловой контакт неким другим способом без существенных изменений свойств системы. Такие трубки можно было бы называть радиационными термометрами; определяя изменение радиационного давления от одного конца трубки до другого, мы можем определить равновесное распределение температуры в системе.

Будем считать, что интервал задан общей, справедливой в статическом случае, формулой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{44} dt^2, \quad (129.1)$$

причем условимся для пространственных координат пользоваться латинскими индексами, в прочих же случаях будем употреблять греческие индексы. В соответствии с обычным определением статической системы будем считать потенциалы g_{14} , g_{24} и g_{34} равными нулю, а остальные g_{ij} и g_{44} — зависящими неким произвольным образом от пространственных координат x^1 , x^2 и x^3 , но не от временной координаты t . Заметим также, что при нашем выборе интервала потенциал g_{44} обладает следующим простым свойством:

$$g^{44} = \frac{1}{g_{44}}. \quad (129.2)$$

Найдем, пользуясь формулами из § 109, тензор энергии — импульса черного излучения для поля, описываемого интервалом (129.1). Искомое выражение имеет, очевидно, вид

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0 \quad (129.3)$$

при дополнительном условии

$$\rho_{00} = 3 p_0. \quad (129.4)$$

Далее, замечая, что в случае статической системы полная макроскопическая скорость радиационного потока должна

равняться нулю, пишем

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (129.5)$$

При данном выборе интервала четвертая компонента «скорости» имеет вид

$$\frac{dx^4}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \sqrt{g^{44}}. \quad (129.6)$$

Подставив два последних выражения в (129.3), найдем единственные неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса:

$$T^{ij} = -g^{ij}p_0, \quad T^{44} = g^{44}\rho_{00}. \quad (129.7)$$

Опуская индекс, получаем

$$\begin{aligned} T_j^i &= g_{j\alpha} T^{i\alpha} = -g_{j\alpha} g^{i\alpha} p_0 = -g_j^i p_0, \\ T_4^4 &= g_{44} T^{44} = g_{44} g^{44} \rho_{00} = \rho_{00}. \end{aligned}$$

Таким образом, единственными неисчезающими компонентами смешанного тензора энергии — импульса являются

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = \rho_{00}. \quad (129.8)$$

Теперь мы полностью готовы к тому, чтобы с помощью законов релятивистской механики, записанных в их обычной форме

$$\frac{\partial \mathfrak{z}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{z}^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0,$$

вычислить давление в нашем радиационном термометре. Положив в последнем уравнении $\mu=1$ и подставив в него выражения (129.7) и (129.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} (-p_0 \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} (-g^{ij} p_0 \sqrt{-g}) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} - \\ - \frac{1}{2} (g^{44} \rho_{00} \sqrt{-g}) \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 0, \end{aligned}$$

что можно, очевидно, переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \frac{\partial p_0}{\partial x^1} + p_0 \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^1} - \frac{1}{2} p_0 \sqrt{-g} \left(g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right) + \\ + \frac{1}{2} (\rho_{00} + p_0) \sqrt{-g} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение, однако, легко упростить с помощью соотношения (39) из Приложения III:

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^1} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^1},$$

которое позволяет сократить второй и третий члены в основном уравнении и приводит к результату

$$\frac{\partial p_0}{\partial x^1} + \frac{p_{00} + p_0}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 0.$$

Привлекая еще (129.2) и (129.4), получаем зависимость давления в радиационном термометре от координаты x^1 в следующем простом виде:

$$\frac{\partial \ln p_0}{\partial x^1} + 2 \frac{\partial \ln g_{44}}{\partial x^1} = 0. \quad (129.9)$$

Так как подобные соотношения легко найти и для других пространственных координат, можно обобщить эту зависимость радиационного давления от координат, выразив ее в чрезвычайно компактной форме:

$$p_0 (g_{44})^2 = \text{const.}$$

Если же подставить сюда давление p_0 , пользуясь законом Стефана — Больцмана

$$p_0 = \frac{1}{3} a T_0^4,$$

то немедленно найдем искомое выражение для зависимости собственной температуры от положения в произвольном статическом поле:

$$T_0 \sqrt{g_{44}} = C, \quad (129.10)$$

где величина C одинакова для всех частей системы.

Сделаем несколько замечаний, касающихся этого окончательного простого результата.

Во-первых, сравнивая его с (128.6), убеждаемся в том, что условия теплового равновесия в жидкой сфере можно рассматривать как частный случай общего выражения, найденного для произвольного статического поля. Поскольку первый результат был получен из принципов релятивистской термодинамики, а второй — с помощью лишь законов механики (не считая использования закона Стефана — Больцмана в окончательном выражении), их тождественность еще раз подтверждает справедливость новой термодинамики. Аналогичный факт отмечался в конце предыдущего параграфа.

Во-вторых, следует отметить, что избранный нами метод исследования позволил доказать постоянство произведения $T_0 \sqrt{g_{44}}$ лишь для точек, находящихся внутри радиационного термометра. Однако, так как T_0 и g_{44} — безусловно непрерывные функции от координат внутри термометра, этот результат можно распространить и на саму систему в областях ее контакта с термометром.

Отметим еще одно обстоятельство. Выше молчаливо допускалось, что в изучаемую систему можно ввести радиационный термометр, связывающий ее отдельные части, температуры которых мы хотим сравнить, не вызывая при этом существенных возмущений в самой системе. Однако было бы теперь весьма уместным подкрепить это предположение какими-нибудь доводами. Рассмотрим для примера гравитационную систему, содержащую твердые тела. Если мы желаем узнать внутреннюю их температуру с помощью описанного выше метода, в этих телах надо прорезать щели для введения радиационных термометров. Это неизбежно приведет к некоторым изменениям гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$, которые непосредственно связаны с распределениями вещества и энергии в системе. Однако так как уравнения являются дифференциальными:

$$-8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu},$$

и выражают распределения вещества и энергии через тензор $g_{\mu\nu}$ и его первые и вторые производные, то вполне разумно предполагать, что термометры малых размеров не приводят к серьезным изменениям величин $g_{\mu\nu}$. Было бы, конечно, полезно продолжить исследование этого вопроса, так как могут существовать какие-то интересные исключения.

И наконец, заметим, что несмотря на то, что в гравитационной системе, находящейся в состоянии теплового равновесия, собственная температура T_0 изменяется от точки к точке, все же условие постоянства комбинированной величины $T_0 \sqrt{g_{44}}$, предложенное в качестве критерия теплового равновесия, имеет некоторое преимущество перед классическим принципом — простым условием постоянства температуры T_0 . В связи с этим напомним, что Эйнштейн в своих ранних работах, посвященных изучению природы гравитации, делал различие между так называемой истинной температурой (*wahre Temperatur*), которая должна быть постоянной по всей системе в состоянии теплового равновесия, и другой величиной, названной по предложению Эренфеста карманной температурой (*Taschentemperatur*), которая зависит от величины гравитационного потенциала. Это нововведение не сыграло в свое время большой роли, так как оно было сделано до того, как было закончено построение общей теории относительности. Тем не менее мы можем отметить, что эти величины

являются аналогами к введенным выше величинам $T_0\sqrt{g_{44}}$ и T_0 . Подводя итоги, заметим, что поскольку собственная температура T_0 имеет прямой физический смысл благодаря тому, что может непосредственно измеряться локальным наблюдателем, то, по-видимому, лучше не вводить различного вида температуры, давая им различные наименования, а принять T_0 в качестве фундаментальной величины, определяющей температуру в точке.

§ 130. О расширении в релятивистской термодинамике возможностей для протекания обратимых процессов с конечными скоростями

Теперь рассмотрим возможный в релятивистской термодинамике класс процессов, которые протекают с конечной скоростью, но являются обратимыми. Это еще один пример отличия релятивистской термодинамики от обычной, причем снова снимается ограничение, которое с классической точки зрения кажется неизбежным.

В § 62 уже обсуждалась основная последовательность аргументов, ведущих к заключению, что обратимые термодинамические процессы в классической термодинамике должны протекать бесконечно медленно. Дело в том, что именно эти условия обеспечивают максимальную эффективность, необходимую для того, чтобы и система, и окружающая среда могли вернуться к их первоначальным состояниям. В этом параграфе мы используем пример расширения идеального одноатомного газа для иллюстрации различия, которое может возникнуть между классической и релятивистской точками зрения на обратимость и скорость процесса.

Рассмотрим сначала процесс расширения некоторого количества идеального одноатомного газа, помещенного в цилиндр с подвижным поршнем, как это показано на рис. 4. Начнем с очевидного утверждения, что для того, чтобы процесс был обратимым, между цилиндром и окружающей средой должны отсут-

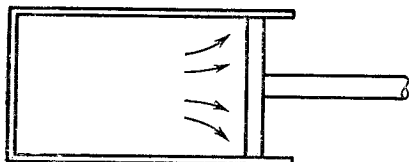


Рис. 4.

ствовать тепловые потоки с конечными скоростями; в противном случае возникнет конечный температурный градиент, который приведет к необратимой передаче теплоты из областей с более высокой температурой в области с более низкой температурой. Итак, расши-

рение в любом случае должно происходить адиабатически. Однако ясно, что даже при этом условии процесс расширения не будет протекать обратимым образом, если скорость его конечна: во-первых, из-за трения между поршнем и стенками;

во-вторых, из-за того, что газ, заполняющий пространство, освобождается поршнем с конечной скоростью, не сможет поддерживать на границе с поршнем столь же большое давление, какое он имел бы при бесконечно малой скорости процесса. Оба эти эффекта приводят к тому, что поршень проделывает работу, недостаточную для обратного процесса — сжатия газа.

Из сказанного следует, что процесс расширения газа в закрытом резервуаре с подвижными стенками не может одновременно быть обратимым и идти с конечной скоростью. Таким образом, аргументы оказались по существу неизменными, а выводы — прежними, не зависящими от того, используется классическая или релятивистская термодинамика.

Необратимость процесса расширения ограниченного количества газа, происходящего с конечной скоростью, есть следствие того, что расширяющаяся система не способна произвести над окружающей средой необходимую работу. Рассмотрим поэтому расширение ничем не ограниченного идеального газа, не имеющего вообще никакой окружающей среды, т. е. рассмотрим некоторое определенное количество газа, находящегося в неограниченном пространстве.

В этом случае мы обнаружим большое различие между классическими и релятивистскими выводами, обусловленное в основном тем, что классические представления не содержат полной теории гравитации.

Сделаем с классической точки зрения три критических замечания по поводу описанного выше процесса расширения неограниченного газа.

Во-первых, следует учесть, что классические представления сформировались под сильным впечатлением того, что обычно мы сталкиваемся с необратимостью как следствием конечной скорости процесса. Выше мы убедились в этом на примере расширения газа в цилиндре. Таким образом, возможность существования обратимых процессов при конечных скоростях большей частью не принималась всерьез. Во-вторых, согласно обычным классическим понятиям о неограниченном трехмерном евклидовом пространстве, наиболее естественно считать, что единственным способом расширения неограниченного никакими стенками газа является диффузия в окружающее пустое пространство. Но такой процесс при конечной его скорости приводит, как мы показали, к необратимому увеличению энтропии:

$$\Delta S = R \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (130.1)$$

для моля газа, который расширяется, не совершая внешней работы, так что давление в нем падает от значения p_1 до p_2 . Альтернативная возможность, модель Вселенной или космологическая

модель, полностью заполненная расширяющимся газом, с классической точки зрения не рассматривалась вообще. Однако исследование именно таких моделей оказывается интересным с точки зрения теории относительности. Такого сорта модель не изучалась в классическом подходе, по-видимому, потому, что немодифицированная ньютонова теория тяготения не допускает бесконечного однородного распределения газа в статическом состоянии [80], отчасти и потому, что ньютонова теория не способна дать определенного ответа на вопрос, какова скорость распространения гравитационного взаимодействия, и не может, следовательно, однозначным образом описать нестатические космологические модели.

Обратимся поэтому к релятивистскому рассмотрению процесса расширения ничем не ограниченного в пространстве газа. Заметим, что релятивистская механика, связывающая геометрические и гравитационные свойства тензора $g_{\mu\nu}$, приводит к совершенно определенным выводам относительно свойств космологических моделей, равномерно заполненных по всему объему расширяющейся или сжимающейся жидкостью. Эти модели, если считать, что они заполнены достаточно простой жидкостью, например идеальным одноатомным газом, позволяют проиллюстрировать новую релятивистскую возможность — обратимость процесса, протекающего с конечной скоростью.

Чтобы пояснить суть этой новой возможности, приведем, забегая вперед, результаты следующей главы: выпишем выражение для интервала в случае нестатической однородной модели Вселенной в виде

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + (r^2/4R_0^2)]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (130.2)$$

где r , θ , φ — пространственные координаты, t — времениподобная координата, R_0 — постоянная, а зависимость интервала от времени определяется видом функции $g(t)$, стоящей в показателе экспоненты. Можно показать, что эта форма интервала соответствует космологической модели, *весь* пространственный объем которой заполнен однородным распределением жидкости. Используемые здесь координаты выбраны из множества сопутствующих систем. Напомним, что по определению, данному в § 122, сопутствующие системы координат обладают следующими свойствами. Элемент жидкости, занимающий в такой системе координатную область $\delta r \delta \theta \delta \varphi$, остается в этом элементе постоянно. Собственный объем элемента жидкости, равный

$$\delta v_0 = \frac{e^{\frac{3}{2} g(t)}}{[1 + (r^2/4R_0^2)]^3} r^2 \sin \theta \delta r \delta \theta \delta \varphi, \quad (130.3)$$

будет при этом, вообще говоря, меняться со временем из-за зависимости от $g(t)$. Если g растет со временем, все элементы жидкости будут расширяться с относительной скоростью, одинаковой во всех частях модели; если g со временем уменьшается, будет происходить сжатие. При этом, вообще говоря, эти изменения могут происходить с конечной скоростью.

Попытаемся теперь выяснить, могут ли такие расширения и сжатия совершаться и обратимо, и с конечной скоростью. На рис. 5 символически изображено двумерное представление пространственноподобных координат, соответствующих интервалу (130.2). Оно поможет нам установить различие между свойствами процесса расширения газа в настоящей модели и в рассмотренном ранее классическом цилиндре.

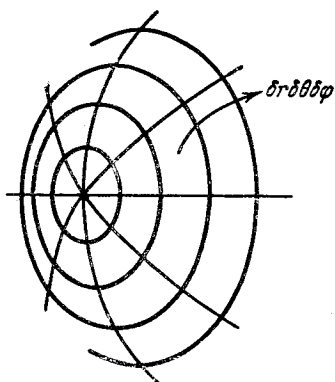


Рис. 5.

Применяя к модели релятивистский первый закон термодинамики, т. е. законы релятивистской механики, легко найти (§ 151), что энергетический баланс каждого элемента жидкости описывается знакомым уравнением для адиабатического расширения:

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0; \quad (130.4)$$

изменение собственной энергии каждого элемента жидкости происходит за счет работы, совершаемой этим элементом над окружающей средой. Следовательно, каждый элемент рассматриваемой нами жидкости должен расширяться или сжиматься адиабатически, без теплопередачи между отдельными частями модели, что на самом деле ясно интуитивно, если вспомнить об однородности условий во всех частях модели.

Убедившись в адиабатическом характере рассматриваемого процесса, применим к данной системе релятивистский второй закон термодинамики (119.5), приравняв правую часть уравнения, пропорциональную поглощаемой теплоте, нулю. В результате получим, что для нашей модели в используемых сопутствующих координатах второй закон термодинамики описывается следующей простой формулой:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \varphi_0 \frac{e^{\frac{3}{2} g(t)}}{[1 + (r^2/4R_0^2)]^3} r^2 \sin \theta \right\} \delta r \delta \theta \delta \varphi \delta t \geq 0,$$

или, привлекая (130.3), перепишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0 \delta v_0) \geq 0. \quad (130.5)$$

Итак, применение релятивистского второго закона термодинамики к такого рода космологическим моделям показывает, что собственная энтропия каждого элемента жидкости, измеряемая локальным наблюдателем, может либо увеличиваться, либо оставаться постоянной. Поскольку знак равенства отвечает случай обратимых процессов, постоянство собственной энтропии каждого элемента жидкости становится необходимым требованием для обратимости процесса расширения в этих моделях, когда он протекает с конечной скоростью.

Это требование, по-видимому, выполняется, если жидкость заполняющая модель, имеет достаточно простое внутреннее строение.

Чтобы в этом убедиться, укажем прежде всего на то, что свойства модели должны быть таковы, чтобы исключить возможность возрастания энтропии, которое может происходить из-за недостаточно эффективного взаимодействия между элементами жидкости и их окружением. Энтропия рассматриваемой модели не будет возрастать, так как в модели отсутствуют тепловые потоки, которые могли бы приводить к необратимому теплообмену; нет трения поршня о стенки и тому подобных явлений, поскольку в данной модели вообще нет никаких резервуаров и движущихся частей; не возникает возрастания энтропии из-за перепада давления на границе расширяющегося элемента, так как по предположению давление однородно по всему объему модели. Итак, оказывается, что в такой системе нет необратимости, которая была бы следствием плохой связи какого либо ее элемента с окружающей средой.

Остается только возможность увеличения энтропии вследствие того, что необратимые процессы могут протекать внутри каждого из элементов жидкости — в реальном веществе, образующем эту жидкость. Для вещества с достаточно сложным строением при конечной скорости изменения объема такие необратимые процессы, несомненно, играли бы важную роль. Так, если рассмотреть двухатомный газ, молекулы которого могут диссоциировать при расширении, то очевидно, что химический процесс не может быть полностью компенсирован в процессе расширения, происходящем с конечной скоростью. Другими словами, реальная диссоциация нарушает условия равновесия, а следовательно, приводит к возрастанию энтропии. В действительности при конечной скорости изменения объема запаздывание даже в таком процессе, как передача энергии от вращательных степеней свободы к

трансляционным степеням в двухатомном газе, уже должно приводить к некоторой необратимости. Однако в том случае, когда жидкость состоит из достаточно простого вещества, эта возможность возрастания внутренней энтропии почти совсем или полностью закрывается.

Таким образом, если в качестве жидкости, заполняющей модель, взять идеальный одноатомный газ, как это предлагалось в начале этого параграфа, то возрастание энтропии за счет необратимых внутренних процессов станет невозможным при том условии, что мы пренебрегаем малыми передачами энергии между этим газом и небольшим количеством теплового излучения, которое всегда существует. Таким образом, в газе, состоящем из пылинок, испытывающих пренебрежимо малое тепловое давление, или в черном излучении, вообще не может возникать никаких необратимых процессов.

Релятивистские космологические модели, всюду заполненные веществом, дают пример безграничной модели, расширяющейся в пустое пространство без утечки веществ, а также и без трения, необратимых тепловых потоков и перепадов давления на стенках сосуда. Такой модели раньше не было. Анализируя ее с точки зрения релятивистской термодинамики, мы обнаружим новые возможности для процессов, протекающих с конечной скоростью и остающихся все же полностью обратимыми или для которых, во всяком случае, исчезают источники необратимости, которые с классической точки зрения кажутся неизбежными.

Новые результаты обусловлены применением как релятивистской механики, так и релятивистской термодинамики. Релятивистская механика позволяет изучить поведение космологических моделей как целого и определить из связи фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ с плотностью, давлением и собственным объемом поведение отдельных элементов жидкости в модели. Если затем использовать второй закон релятивистской термодинамики, то можно выяснить характер поведения этих элементов жидкости: обратимость или необратимость протекающих в них процессов. В результате оказывается, что в однородных системах, имеющих повсюду одинаковые значения температуры и давления, возможности обратимого протекания процессов возрастают. Аналогичный анализ поведения неоднородных моделей также представляет определенный интерес.

Выполненные нами в этом параграфе исследования позволяют сделать важный вывод, что для того, чтобы изучать поведение Вселенной в целом, надо использовать релятивистскую, а не классическую термодинамику. Этим выводом мы будем руководствоваться в следующей главе при изучении важного класса космологических моделей. В §§ 170 и 171 будет показано, что термодинамическое условие обратимости, которое получается выбором

знака равенства в формулировке второго закона термодинамики, действительно согласуется с требованиями реального обращения процессов в космологических моделях. Более того, в § 173 мы докажем, что наблюдатель, изучающий обратимо расширяющуюся Вселенную, придет к совершенно ошибочным заключениям, если будет интерпретировать поведение окружающей его среды с помощью классической, а не релятивистской термодинамики.

§ 131. О возможности протекания необратимых термодинамических процессов, не приводящих к конечным состояниям с максимальной энтропией

В предыдущем параграфе мы показали, что по сравнению с классической теорией теория относительности открывает новые возможности для протекания обратимых термодинамических процессов. Тем не менее из дальнейшего обсуждения следовало, что необратимые процессы никоим образом не могут быть исключены в релятивистской термодинамике; действительно, некоторая степень необратимости оказывается полезной характеристикой реальных термодинамических процессов, протекающих в природе.

В случае необратимых процессов выводы релятивистской и классической термодинамики могут, однако, сильно различаться. Как было показано в § 63, в классической термодинамике неизбежно заключение о том, что необратимые процессы всегда приводят к состояниям с максимальной энтропией, из которых дальнейшие термодинамические переходы невозможны. В настоящем параграфе мы обсудим возникающую в релятивистском подходе возможность протекания необратимых процессов, не приводящих к максимальным значениям энтропии.

Эта новая возможность непрерывных необратимых изменений может быть обнаружена на примере введенных в предыдущем параграфе космологических моделей, обстоятельным изучением которых мы займемся в следующей главе. Для настоящих же целей достаточно знать, что имеется важный класс моделей (см. § 163) таких, что расширение их от любого данного конечного собственного объема обязательно влечет за собой, после достижения некоторого верхнего предела, обращение направления движения и возвращение к меньшему объему. Возможность такого поведения систем обнаруживается на основании принципов одной лишь релятивистской механики, а потому не зависит ни от природы, ни от степени сложности жидкости, заполняющей модель; единственное необходимое требование — это однородность распределения жидкости, заполняющей модель. Итак, утверждение состоит в том, что принципы одной лишь релятивистской механики позволяют ввести новый класс космологиче-

ских моделей, в которых непрерывно чередуются расширения и сжатия, безотносительно к термодинамической стороне процессов, протекающих внутри элементов жидкости, заполняющей модель.

В том случае, когда молекулы жидкости настолько просты, что собственная энтропия не будет повышаться за счет внутренних процессов, мы имеем условия идеальной обратимости, обсужденные в предыдущем параграфе. В следующей главе мы придем к выводу, что в такой модели должны чередоваться периоды расширения и сжатия.

Ясно также, что в том случае, когда молекулы жидкости имеют сложное строение, энтропия будет возрастать внутри каждого из элементов жидкости, заполняющей модель, в процессе сжатий и расширений. Так, если двухатомный газ может диссоциировать на составляющие элементы, то во время расширения будет развиваться диссоциация, а в процессе сжатия — рекомбинация. При конечной скорости изменения объема эти реакции будут запаздывать, а следовательно, протекать при неравновесных условиях и приводить к возрастанию энтропии. Зададимся теперь вопросом: приведет ли необратимость процессов к затуханию амплитуд сжатий и расширений?

С классической точки зрения затухание процессов расширения и сжатия кажется неминуемым, поскольку в классической термодинамике непрерывно развивающийся в системе необратимый процесс обязательно должен приводить к максимальному значению энтропии и, таким образом, к невозможности дальнейших изменений. В классической термодинамике мы определяем энтропию однородной жидкости с помощью уравнения (60.4), приведенного в § 60:

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dv + \frac{\partial S}{\partial n_1} dn_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial n_n} dn_n, \quad (131.1)$$

где E — энергия, v — объем, а n_1, \dots, n_n — концентрации различных компонент в молях, выбранные в качестве независимых переменных, определяющих состояние системы. Если применить это уравнение к изолированной системе, испытывающей чередующиеся расширения и сжатия, изменение энергии dE в этом уравнении следует приравнять нулю на основании классического закона сохранения энергии, а также вследствие изолированности системы положить равной нулю работу $p dv$. Итак, из всех причин для увеличения энтропии такой системы остается возможной единственной — изменение состава вещества. Последнее же не может продолжаться бесконечно долго, поскольку данным значениям энергии и объема однородной жидкости соответствует максимально возможная величина энтропии, при которой

устанавливается химическое равновесие между различными компонентами. Таким образом, классическая термодинамика утверждает, что необратимое возрастание энтропии не может продолжаться долго, оно прекращается с достижением максимальной энтропии, после чего термодинамические изменения в системе больше не происходят.

Однако с точки зрения теории относительности это положение существенно модифицируется вследствие изменения смысла принципа сохранения энергии в релятивистской механике. Воспользуемся уравнением (131.1), которое по форме в релятивистской термодинамике не изменяется:

$$(d\varphi_0\delta v_0) = -\frac{1}{T_0} d(\rho_{00}\delta v_0) + \frac{p_0}{T_0} d(\delta v_0) + \\ + \frac{\partial(\varphi_0\delta v_0)}{\partial n_1^0} dn_1^0 + \dots + \frac{\partial(\varphi_0\delta v_0)}{\partial n_n^0} dn_n^0; \quad (131.2)$$

здесь собственная энтропия $(\varphi_0\delta v_0)$ каждого малого элемента жидкости, заполняющей модель, выражена через его собственную энергию $(\rho_{00}\delta v_0)$, объем δv_0 и концентрации различных компонент n_1^0, \dots, n_n^0 , выраженные в молях. Однако, согласно принципам релятивистской механики, мы не можем продолжать утверждать, что полная *собственная* энергия жидкости должна быть постоянной. Действительно, обычный принцип сохранения энергии не действует в теории относительности до тех пор, пока не введены понятия потенциальной энергии гравитационного поля и собственной энергии, непосредственно связанной с веществом и с излучением. В самом деле, согласно уравнению (130.4), написанному для космологической модели:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}\delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt}(\delta v_0) = 0, \quad (131.3)$$

очевидно, что собственная энергия *каждого* элемента жидкости, заполняющей модель, будет уменьшаться, когда модель проходит стадию расширения, и будет увеличиваться на стадии сжатия. Кроме того, процесс будет происходить так, что давление стремится быть ниже равновесного на стадии расширения и выше равновесного на стадии сжатия. Таким образом, можно ожидать, что собственная энергия каждого элемента жидкости, заполняющей модель, не будет оставаться постоянной, но может возрастать. Следовательно, ограничения, накладываемые классическим принципом сохранения энергии на процесс возрастания энтропии, исчезнут.

Итак, в релятивистской термодинамике нельзя уже предположить, что существует предельное максимальное значение энтропии системы, при достижении которого прекращается развитие необратимого процесса в жидкости и система приходит в стабильное состояние. Действительно, в результате проведенного в следующей главе более детального анализа мы найдем, что в некоторых случаях вместо постепенного затухания амплитуды последовательных необратимых расширений и сжатий в космологических моделях проявляется тенденция к постепенному увеличению верхнего предела, до которого расширяется система, однако после каждого расширения всегда следует обратный процесс — сжатие.

Чтобы вскрыть причины, приведшие к этой новой закономерности, укажем, что главным шагом был отказ от классического требования постоянного значения энергии, непосредственно связанной с жидкостью, составляющей систему. Если энергия системы не постоянна, например, система взаимодействует с окружающей средой, то и в классической термодинамике снимается ограничение на возможное возрастание энтропии. Рассмотрим для примера еще раз простой двухатомный газ, способный диссоциировать на составляющие элементы и заключенный в цилиндр с теплонепроницаемыми стенками и подвижным поршнем. Перемещая поршень то вперед, то назад, можно создавать попеременно сжатия и расширения, причем при расширении в газе будет развиваться процесс диссоциации, а при сжатии — противоположный процесс — рекомбинация. Однако, если эти процессы протекают с конечной скоростью, равновесие не будет сохраняться и среднее давление при расширении окажется меньше, чем это необходимо для того, чтобы восстановительный процесс, сопровождающий сжатие, мог привести систему в первоначальное состояние; для этого потребуются произвести еще некоторую дополнительную работу, увеличивающую энергию системы с развитием процесса. Таким образом, пока имеется приток внешней энергии, достаточной для того, чтобы процесс последовательных расширений и сжатий продолжался, как энергия, так и энтропия системы будут возрастать, причем последняя не будет ограничена никаким верхним значением. Итак, с классической точки зрения подобный процесс может прекратиться скорее из-за нехватки энергии извне, нежели из-за возрастания энтропии внутри жидкости в цилиндре. Однако, с другой стороны, в релятивистской теории можно построить такие космологические модели, в которых не будет возникать никаких ограничений на полную *собственную* энергию, а следовательно, и на величину полной энтропии. Таким образом, теория относительности открывает новую возможность протекания необратимых процессов, которые продолжаются бесконечно.

Полученные результаты особенно важны потому, что мы еще раз убедились в том, что, пытаясь понять поведение Вселенной в целом, мы должны применять релятивистскую, а не классическую механику.

§ 132. Заключение

В заключение этой главы представим некоторые оправдания, для, казалось бы, преждевременного изложения в двух последних параграфах материала о возможностях протекания обратимых процессов с конечными скоростями и необратимых процессов, которые не оканчиваются состояниями с максимальной энтропией. В самом деле, эти новые свойства можно вполне понять лишь на примере космологических моделей, изучаемых в следующей главе. Поэтому в третьей части главы X мы вернемся к вопросам, затронутым в § 130 и § 131. Материал этот был, однако, введен для того, чтобы в единой форме изложить различия между классической и релятивистской термодинамикой. Как указывалось в начале этой главы, из дальнейшего станет ясным, что при включении термодинамики в общую теорию относительности возникают качественно новые возможности, которые обязаны в основном новому пониманию природы пространства и времени, а не каким-то фундаментальным изменениям постулатов термодинамики.

Остается еще указать на ряд возможных модификаций релятивистской термодинамики, которые следовало бы выполнить.

Желательно дальнейшее изучение законов, управляющих тепловым потоком, и нахождение явного выражения для тензора энергии — импульса теплопроводной жидкости. Надо также исследовать термодинамическое поведение *неоднородных* космологических моделей, в которых имеются тепловые потоки между различными частями. Эти результаты могут оказаться важными для интерпретации поведения реальной Вселенной.

Следует также изучить термодинамические флуктуации, которые могут играть весьма важную роль на определенных стадиях космологической эволюции. Наконец, было бы целесообразно рассмотреть с точки зрения общей теории относительности внутреннюю связь между термодинамикой и статистической механикой. Последнее, конечно, выходит за рамки макроскопического подхода, принятого в этой книге.

КОСМОЛОГИЯ

ЧАСТЬ I

СТАТИЧЕСКИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 133. Введение

В последней главе мы займемся космологией. Основой для наших исследований послужат релятивистская механика и термодинамика. Здесь мы вступаем на увлекательный путь, на котором нас ждут опасные, но интересные проблемы.

Главная опасность хотя и не является довлеющей, тем не менее ставит под сомнение справедливость всех наших выводов; суть ее в том, что релятивистская теория гравитации может оказаться неприменимой не только ко Вселенной в целом, но даже и к небольшой ее части, размеры которой ограничены пределом видимости 100-дюймового телескопа Маунт Вильсон и составляют несколько сотен миллионов световых лет*). Три так называемых «решающих эксперимента», конечно, убеждают нас в том, что теория относительности имеет реальные преимущества перед ньютоновой теорией тяготения и что она дает приемлемую основу для изучения полей в «пустом» пространстве вокруг звезды вплоть до расстояний порядка размеров Солнечной системы. Однако экстраполяция этой теории на всю Вселенную в целом, которая отнюдь не является пустой, а заполнена веществом и излучением, представляет собою рискованный шаг. Оправдание обобщения теории надо искать, во-первых, в том, что теория относительности обладает замечательной внутренней логической стройностью и непротиворечивостью и уже по этой причине должна быть, по всей вероятности, применимой к широкому кругу явлений. И, во-вторых, в том, что звезды большей частью скапливаются, образуя туманности, которые в свою очередь имеют тенденцию к скоплению. Это указывает на то, что гравитационное взаимодействие распространяется на большие расстояния, что и предска-

*) Сейчас пределы видимой Вселенной доходят до нескольких миллиардов световых лет. (Прим. ред.)

зывается релятивистской теорией. Наконец, теория относительности практически является единственной теорией гравитации, применимой к явлениям в больших областях Вселенной. Поэтому, если мы вообще собираемся заниматься космологией, то мы должны пользоваться этой теорией.

Другая трудность, которая возникает при построении тех или иных космологических теорий, состоит в том, что мы слишком мало знаем как о Вселенной в целом, так и о ее частях. По подсчетам Хаббла, внутри области радиусом $3 \cdot 10^8$ световых лет содержится около 10^8 туманностей! Эти туманности имеют некоторую тенденцию группироваться в пространстве, хотя в целом распределяются довольно равномерно с плотностью около одной туманности на 10^{18} кубических световых лет. Каждая из них устроена примерно так же, как и наша Галактика. Из анализа красного смещения в спектрах этих туманностей можно заключить, что они взаимно разбегаются. Их видимые диаметры, светимости и цвета позволяют оценить количество пылевидного вещества, мешающего наблюдению. Таким образом, мы имеем довольно обширный фактический материал, чтобы судить о структуре Вселенной вплоть до расстояний $3 \cdot 10^8$ световых лет и о наиболее вероятной ее эволюции за прошедшие $3 \cdot 10^8$ лет.

Тем не менее есть еще серьезные пробелы в том, что хотелось бы знать. Во-первых, хотя мы и можем попытаться приписать свойства нашей ближайшей окрестности Вселенной в целом, однако законных оснований для этого нет. Вселенная в целом вовсе не обязана обладать теми же свойствами, что и видимая нами ее часть. Поэтому, хотя мы в дальнейшем будем постоянно пользоваться однородными моделями, тем не менее всегда нужно помнить, что это делается скорее для того, чтобы достаточно четко сформулировать задачу и преодолеть математические трудности, чем для того, чтобы добиться наибольшего сходства с реальностью. Во-вторых, хотя мы достаточно хорошо знаем плотность распределения самих галактик вокруг нас, нам очень мало известно относительно плотности иных видов вещества и плотности излучения в огромных межгалактических пространствах. На самом деле, как вытекает из работ Хаббла, плотность материи в виде межгалактической пыли может оказаться в тысячи раз больше усредненной плотности галактик, не вызывая при этом эффектов, которые выходили бы за рамки наблюдаемых до сих пор*). Это очень сильно мешает нам делать однозначные выводы, так как в результате мы не можем сказать, является ли

*) Оценки средней плотности вещества во Вселенной все время возрастают и приближаются к той плотности, с которой начинается закрытая модель. (Прим. ред.)

реальная Вселенная пространственно открытой или закрытой, и вынуждены делать выбор между этими возможностями, исходя только из несколько сомнительных соображений метафизического характера.

Ввиду неопределенности данных наблюдений приходится поневоле ограничивать себя в основном анализом космологических *моделей*. От этих моделей необходимо требовать, чтобы они были построены в соответствии с теорией относительности, однако не обязательно требовать, чтобы они во всех своих деталях согласовывались с реальным миром. Мы будем разрешать себе изучение даже таких моделей, свойства которых существенно отличаются от свойств реального мира, лишь бы они помогали нам понять, как происходят те или иные явления, не требуя при этом отказа от общепризнанных теоретических принципов. С помощью таких моделей мы можем все-таки надеяться лучше понять природу в наибольших мыслимых масштабах, а это представляет самую интересную задачу, какую человеческий разум может поставить перед собой, и самую благородную цель, к какой он только может стремиться.

В I части настоящей главы мы рассмотрим статические космологические модели. Сначала будет показано, что единственно возможными однородными статическими моделями являются: первоначальная эйнштейновская Вселенная с однородным распределением материи, пустая Вселенная де Ситтера и пустое плоское пространство — время специальной теории относительности. Затем мы кратко обсудим эти варианты, чтобы показать, что они недостаточно удовлетворительно описывают реальный мир и поэтому от них следует отказаться. Во II части будет получено выражение для интервала ds^2 в нестатических космологических моделях, причем отправным пунктом для этого вывода послужат принципы релятивистской инвариантности. Далее будут изучены механические свойства нестатических моделей и типы их эволюции. В III части эволюция нестатических моделей будет рассмотрена на базе релятивистской термодинамики. Наконец, в IV части будет проведено сравнение свойств нестатических моделей со свойствами реального мира.

§ 134. Однородная статическая Вселенная

Покажем, что однородную статическую Вселенную можно описать только тремя способами, а именно, с помощью моделей Эйнштейна, де Ситтера и специальной теории относительности.

При выводе выражения для космологического интервала мы всякий раз будем подходить ко Вселенной с точки зрения крупных масштабов, пренебрегая различными локальными неоднородностями гравитационного поля или кривизны, имеющимися

в непосредственной близости от отдельных звезд или звездных систем. Это предположение позволит считать, что материя во Вселенной распределена непрерывно с собственной макроскопической плотностью ρ_{00} и давлением p_0 . Такое упрощение оправдано тем, что нам нужно прежде всего изучить поведение Вселенной в целом, а детали, связанные с локальными особенностями, можно присовокупить потом.

Так как в однородной статической Вселенной условия всюду одинаковы в любой момент времени, то систему координат в ней, очевидно, можно выбрать так, чтобы интервал был сферически симметричен вокруг любой наперед заданной точки отсчета. Это означает, что мы можем записать интервал в самом общем сферически симметричном виде:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (134.1)$$

где λ и ν зависят только от r , как в (95.12). Давление же и плотность будут согласно (95.13) определяться уравнениями

$$8\pi p_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \quad (134.2)$$

$$8\pi \rho_{00} = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \quad (134.3)$$

$$\frac{dp_0}{dr} = -\frac{p_0 + \rho_{00}}{2} \nu', \quad (134.4)$$

где Λ — космологическая постоянная, а штрих означает производную по r .

Уже из этих простых исходных данных можно вывести все возможные варианты статической однородной модели Вселенной, если учесть следующие три условия. Именно: *во-первых*, давление p_0 , измеряемое локальным наблюдателем, должно быть одинаково во всех точках пространства, так как предполагается, что модель однородна; *во-вторых*, по той же самой причине и собственная макроскопическая плотность вещества ρ_{00} должна быть всюду одинаковой; и, *в-третьих*, интервал ds^2 при малых r должен приводиться к виду, который он имеет в плоском пространстве — времени специальной теории относительности, где $\lambda = \nu = 0$, так как если мы пренебрегаем локальными гравитационными полями, то в малых областях пространства — времени должна быть, как было постулировано, справедлива специальная теория относительности.

Так как согласно первому условию p_0 должно иметь одно и то же значение во всем пространстве, то уравнение (134.4) может

быть удовлетворено, только если будет выполнено равенство

$$\frac{\rho_{00} + p_0}{2} v' = 0, \quad (134.5)$$

а это в свою очередь возможно только в трех случаях: когда либо v' , либо $(\rho_{00} + p_0)$, либо и то и другое равны нулю.

Этим трем вариантам:

$$v' = 0, \quad (134.6)$$

или

$$\rho_{00} + p_0 = 0, \quad (134.7)$$

или

$$v' = 0, \quad \rho_{00} + p_0 = 0, \quad (134.8)$$

и соответствуют, как мы сейчас покажем, три упоминавшиеся модели, т. е. модель Эйнштейна, модель де Ситтера и специальной теории относительности.

§ 135. Эйнштейновский интервал

Сначала мы можем найти выражение для интервала ds^2 в первом, т. е. эйнштейновском, случае:

$$v' = 0. \quad (135.1)$$

Интегрируя это уравнение и помня, что при малых r интервал ds^2 должен быть таким же, как в специальной теории относительности, т. е. $v = 0$, получаем единственное решение:

$$v = \text{const} = 0. \quad (135.2)$$

С другой стороны, подставляя (135.2) в уравнение для давления (134.2) и решая его, получим

$$e^{-\lambda} = 1 - (\Lambda - 8\pi p_0) r^2. \quad (135.3)$$

Если теперь для удобства определить новую константу R :

$$\Lambda - 8\pi p_0 = \frac{1}{R^2}, \quad (135.4)$$

то для интервала ds^2 можно написать окончательное выражение:

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2. \quad (135.5)$$

Это — одно из хорошо известных выражений для интервала ds^2 в статической эйнштейновской Вселенной [81], и мы в дальнейшем еще раз вернемся к нему, чтобы обсудить некоторые его свойства.

§ 136. Интервал в пространстве де Ситтера

Теперь рассмотрим выражение для деситтеровского интервала ds^2 . Оно соответствует случаю, когда выполняется равенство

$$\rho_{00} + \rho_0 = 0. \quad (136.1)$$

Сложив выражения (134.2) и (134.3) для ρ_{00} и ρ_0 и приравняв их сумму нулю:

$$8\pi(\rho_{00} + \rho_0) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right) = 0,$$

получим уравнение $\lambda' = -\nu'$. Так как λ и ν должны обе обращаться в нуль при $r=0$, чтобы интервал ds^2 при $r=0$ переходил в интервал специальной теории относительности, это возможно лишь при

$$\lambda = -\nu. \quad (136.2)$$

С другой стороны, ρ_{00} должна быть всюду одинаковой, т. е. константой, поэтому уравнение (134.3) легко интегрируется, и в результате получается решение, которое нетрудно проверить прямой подстановкой:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} r^2 + \frac{A}{r},$$

где A — постоянная интегрирования. И, опять используя тот факт, что при малых r выражение для ds^2 должно быть таким же, как в специальной теории относительности, где $\lambda = \nu = 0$, мы с необходимостью приходим к выводу, что $A = 0$. Отсюда, вспоминая (136.2), мы сразу получаем

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} r^2. \quad (136.3)$$

Это позволяет написать окончательный результат для интервала ds^2 . Определив для удобства новую постоянную R с помощью выражения:

$$\frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} = \frac{1}{R^2}, \quad (136.4)$$

перепишем ds^2 окончательно в виде

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2. \quad (136.5)$$

В результате получено одно из хорошо известных выражений для деситтеровского интервала ds^2 [82], и мы впоследствии вернемся к нему, чтобы обсудить некоторые его свойства.

§ 137. Интервал в специальной теории относительности

Наконец, мы можем перейти к третьему варианту статической однородной Вселенной, в котором согласно (134.8) требуется выполнение обоих равенств:

$$v' = 0, \quad \rho_{00} + p_0 = 0. \quad (137.1)$$

Здесь, однако, мы можем считать, что справедливы и уравнение (135.2) эйнштейновской модели и уравнение (136.2) деситтеровской модели; поэтому в качестве полного решения можем взять

$$\lambda = v = 0, \quad (137.2)$$

что приводит к интервалу специальной теории относительности

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (137.3)$$

который соответствует абсолютно пустому плоскому пространству—времени специальной теории относительности.

Итак, в согласии с § 134 мы описали все три возможные статически однородные Вселенные*), поэтому, когда в дальнейшем станет ясно, что ни один из этих вариантов не дает удовлетворительного отображения реальной Вселенной, нам придется обратиться к моделям более широкого класса.

Теперь можно сделать краткий обзор некоторых важнейших свойств эйнштейновского и деситтеровского интервалов (интервал специальной теории относительности является их частным случаем и получается при стремлении постоянной R к бесконечности). Это будет интересно не только с точки зрения истории, но и потому, что позволит глубже понять более адекватные модели, к которым нам придется обратиться в дальнейшем.

§ 138. Геометрия Вселенной Эйнштейна

Интервал, соответствующий Вселенной Эйнштейна:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (138.1)$$

бывает иногда полезно переписать в другом виде путем преобразования координат. Это нужно либо для того, чтобы

*) В доказательстве того, что интервалы Эйнштейна, де Ситтера и специальной теории относительности исчерпывают все возможные варианты *статического решения*, мы следуем работе Толмена [83]. Более раннее доказательство содержится в работе [84], а доказательство того, что нет никаких других дополнительных *стационарных решений* в смысле § 142, см. в [85].

получить более удобное выражение, либо для того, чтобы лучше понять порождаемую им геометрию пространства.

Так, подстановка

$$r = \frac{\rho}{1 + \rho^2/4R^2} \quad (138.2)$$

приводит выражение (138.1) к изотропному виду:

$$ds^2 = -\frac{1}{(1 + \rho^2/4R^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (138.3)$$

В свою очередь (138.3) с помощью очевидных преобразований можно переписать следующим образом:

$$ds^2 = -\frac{1}{(1 + \rho^2/4R^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2. \quad (138.4)$$

Подстановка

$$r = R \sin \chi \quad (138.5)$$

в (138.1) приводит к выражению

$$ds^2 = -R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (138.6)$$

Наконец, если перейти к большему числу переменных с помощью уравнений

$$z_1 = R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad z_2 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (138.7)$$

$$z_3 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z_4 = r \cos \theta,$$

где

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R^2, \quad (138.8)$$

то интервал ds^2 можно записать в виде

$$ds^2 = -dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 + dt^2. \quad (138.9)$$

Согласно последнему выражению наше исходное пространство — время можно рассматривать как погруженное в евклидово пространство большего числа измерений.

Тип геометрии, отвечающей каждому из выражений для интервала, не определяется полностью формулой интервала, так как при заданной дифференциальной форме интервала можно, вообще говоря, еще делать различные предположения относительно связности и идентификации точек. Однако, согласно полученной нами последней формуле для интервала, проще всего рассматривать пространственную часть эйнштейновской Вселенной как всю трехмерную сферическую поверх-

ность $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R^2$, погруженную в четырехмерное евклидово пространство (z_1, z_2, z_3, z_4) . Тогда геометрия, соответствующая пространственноподобным переменным в эйнштейновском интервале, будет геометрией так называемого *сферического* пространства радиуса R . Если же противоположные точки сферы отождествить и ввести соответствующую связность, то пространственную геометрию можно будет считать геометрией так называемого *эллиптического* типа.

Если считать пространственную геометрию сферической, то согласно (138.6) можно вычислить собственный пространственный объем эйнштейновской Вселенной

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi = 2\pi^2 R^3 \quad (138.10)$$

и собственную кругосветную длину Вселенной *)

$$l_0 = 2\pi R. \quad (138.11)$$

При эллиптической геометрии соответствующие величины будут в два раза меньше, и эта разница могла бы в принципе служить критерием, позволяющим выявить, какого же типа геометрия имеется на самом деле.

Если кроме пространственноподобных координат учесть еще и времениподобные, то полную пространственно-временную геометрию Вселенной Эйнштейна можно рассматривать как геометрию четырехмерной цилиндрической поверхности, погруженной в пятимерное пространство.

Вероятно, исследование сущности геометрии, порождаемой эйнштейновским интервалом, интересно главным образом потому, что мы при этом получаем дополнительные аргументы для интуитивного понимания однородности модели. Например, из симметричной формулы интервала (138.9) непосредственно

*) Собственная кругосветная длина Вселенной определяется как

$$l_0 = \int_0^{2\pi} R_0 \, d\varphi$$

и является длиной большого круга трехмерной сферической поверхности в четырехмерном пространстве. Аналогичная собственная кругосветная длина двумерной сферической поверхности, погруженной в трехмерное пространство (иными словами, собственная кругосветная длина сферы), равна длине большого круга $2\pi R$. Если противоположные точки сферы отождествить (эллиптическое пространство), то отправляясь от Северного полюса, мы попадаем на Южный, который по определению совпадает с Северным. При этом собственная кругосветная длина оказывается в два раза меньше, т. е. πR . (Прим. перев.)

следует, что при переходе обратно к координатам r , θ , φ , t можно выбирать начало отсчета пространственных координат и времени где угодно, а это, конечно, согласуется с нашими исходными требованиями, чтобы модель была статична и однородна.

Заметим в заключение, что для многих практических нужд не нужно выходить за рамки тех результатов, которые можно получить обычными аналитическими методами непосредственно из дифференциальной формы для интервала, и нет никакой надобности рассматривать геометрию в целом.

§ 139. Плотность и давление материи в эйнштейновской Вселенной

Рассмотрим теперь физические свойства эйнштейновской Вселенной, исследуя законы, которым подчиняются давление и плотность материи в этой модели.

Возвращаясь к общей формуле интервала (134.1):

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (139.1)$$

и подставляя величины, найденные в § 135:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \text{ и } \nu = 0, \quad (139.2)$$

в формулы для плотности и давления (95.13), легко получаем

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R^2} + \Lambda \quad (139.3)$$

и

$$8\pi \rho_{00} = \frac{3}{R^2} - \Lambda. \quad (139.4)$$

Уравнения (139.3) и (139.4) через посредство двух констант R и Λ выражают собственное давление и собственную плотность материи, заполняющей пространство. Эти уравнения могут быть разрешены относительно этих двух констант следующим образом:

$$\Lambda = 4\pi (\rho_{00} + 3p_0) \quad (139.5)$$

и

$$\frac{1}{R^2} = 4\pi (\rho_{00} + p_0). \quad (139.6)$$

Так как плотность материи ρ_{00} , заполняющей модель, может быть только положительной, а давление p_0 тоже должно быть положительным (хотя при допущении в разумных пределах сил сцепления p_0 может быть отрицательным, но лишь в незначительной степени), то мы вправе сделать вывод, что Λ и R^2 должны быть существенно положительными величинами.

Если рассматривать Λ и R^2 в качестве свободных параметров, то с их помощью можно добиться того, чтобы в этой модели материя обладала любыми наперед заданными значениями давления и плотности.

Так, например, если мы предположим, что материя состоит из пылевидного вещества, не производящего никакого давления, скажем из свободных частиц (звезд), имеющих незначительное относительное движение (именно это первоначально и предполагал Эйнштейн), то мы должны будем заключить из приведенных выше уравнений, что

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} \quad (139.7)$$

и

$$4\pi\rho_{00} = \frac{1}{R^2}, \quad (139.8)$$

и согласно (138.10) полная масса Вселенной при этом оказывается равной

$$M = \rho_{00}v_0 = \frac{1}{2} \pi R. \quad (139.9)$$

С другой стороны, если предположить, что пространство заполнено только излучением, для которого отношение плотности к давлению имеет максимальное значение (по сравнению с какими-либо другими видами материи):

$$\rho_{00} = 3p_0,$$

то можно получить, что

$$\Lambda = \frac{3}{2R^2} \quad (139.10)$$

и

$$4\pi p_0 = \frac{1}{4R^2}, \quad 4\pi\rho_{00} = \frac{3}{4R^2}. \quad (139.11)$$

На примере уравнений (139.8) и (139.11) еще раз видно, что, как было впервые упомянуто в § 110, излучение приводит к большему искривлению пространства, нежели обычное вещество с той же плотностью.

Наконец, если мы предположим, что пространство совершенно пустое, т. е. ρ_{00} и p_0 оба равны нулю, то

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} = 0, \quad (139.12)$$

и эйнштейновская Вселенная в этом случае вырождается в плоское пространство — время специальной теории относительности.

Из результатов этого параграфа можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, видно, что общая теория относительности в принципе позволяет строить модели со свойствами, похожими на свойства реальной Вселенной, хотя бы уже в том, что они могут содержать материю, распределенную однородно и с конечной плотностью. Во-вторых, поскольку R^2 должен быть, как легко видеть, положительным и конечным (за исключением вырожденного случая абсолютно пустой Вселенной), то радиус R должен быть действительным; а это значит, что эйнштейновская Вселенная неограничена, но тем не менее замкнута и обладает конечным объемом. Наконец, легко видеть, что космологическая постоянная Λ непременно должна быть больше нуля, если мы хотим, чтобы модель содержала хоть какое-нибудь количество материи. Это было, по-видимому, сильнейшим аргументом для Эйнштейна, когда он ввел в свое уравнение столь неожиданный, хотя формально и непротиворечивый, космологический член. Если мы в дальнейшем найдем модели, в которых для описания материи нет необходимости вводить Λ -член, то мы чаще всего будем полагать его равным нулю.

§ 140. Частицы и свет в эйнштейновской Вселенной

Продолжим исследование физических свойств эйнштейновской Вселенной. Рассмотрим движение частиц и распространение света в этой модели.

Согласно (74.13) движение свободных частиц в гравитационном поле, соответствующем эйнштейновскому интервалу

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (140.1)$$

определяется уравнением геодезической

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (140.2)$$

Будем главным образом интересоваться тем случаем, когда частицы, по крайней мере в первый момент, покоятся, т. е. пространственные компоненты «скорости» частицы dr/ds , $d\theta/ds$ и $d\varphi/ds$ равны нулю. Тогда уравнение геодезической приведется к следующему виду:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0. \quad (140.3)$$

Однако, как следует из общих выражений (95.2) для символов Кристоффеля, символы вида Γ_{44}^σ в случае, когда метрика

определяется интервалом Эйнштейна (140.1), тождественно обращаются в нуль. Это приводит к заключению, что покоящиеся частицы будут иметь ускорение, тождественно равное нулю:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0, \quad (140.4)$$

и, следовательно, будут и дальше оставаться в покое.

Этот вывод очень важен, так как от эйнштейновской Вселенной нельзя было бы ожидать, что она будет оставаться в предполагаемом статическом состоянии, если бы свободные частицы в ней не сохраняли состояния покоя. Тем не менее, как будет видно дальше, равенства (140.4) не являются достаточными условиями устойчивости эйнштейновской Вселенной.

Скорость света в эйнштейновской Вселенной можно найти, приравняв нулю выражение для интервала (140.1). Рассмотрим прежде всего распространение света в радиальном направлении от центра или к центру:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}. \quad (140.5)$$

Здесь нужно специально отметить, что для локального наблюдателя, расположенного неподвижно относительно системы пространственных координат, собственное время s и координатное время t , согласно выражению (140.1) для интервала ds^2 , совпадают.

Отсюда легко найти время, необходимое свету, чтобы, выйдя из начала координат, обойти всю Вселенную и вернуться обратно. Это время равно

$$t = 4 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = 2\pi R, \quad (140.6)$$

если пространство сферическое, и равно половине этой величины, если пространство эллиптическое. Интересно, что теоретически в этой модели оказывается возможной любопытная ситуация: свет может излучиться с поверхности звезды, обойти Вселенную и снова сфокусироваться в виде изображения той же звезды. Однако такую возможность не следует принимать слишком близко к сердцу, помня, что эйнштейновская модель идеализирована и не отражает реальную Вселенную достаточно правильно.

Самое важное следствие из формулы скорости света (140.5) — это то, что в однородной модели Эйнштейна нельзя

ожидать сколько-нибудь заметного систематического красного смещения света, приходящего от удаленных объектов. Действительно, рассмотрим наблюдателя (будем для удобства считать, что он находится в начале координат, $r=0$) и источник света (туманность). Пусть расстояние между ними равно r . Пусть в первый момент они покоятся относительно выбранной пространственной системы отсчета. Тогда благодаря статическому характеру модели они, как было показано выше, будут покоиться и дальше, так как у неподвижных частиц равна нулю не только скорость, но и ускорение. Согласно (140.5) «время» t_2 , когда наблюдатель увидит свет, испущенный источником во «время» t_1 , будет равно

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = t_1 + R \operatorname{arcsin} \frac{r}{R}.$$

Поэтому промежуток «времени» δt_2 между получением двух последовательных световых вспышек, благодаря постоянству r , будет равен интервалу δt_1 между их излучением:

$$\delta t_2 = \delta t_1. \quad (140.7)$$

Как это следует из вида интервала (140.1), для наблюдателей, расположенных неподвижно относительно пространственных координат, времениподобная переменная t совпадает с собственным временем, измеренным локальными наблюдателями в пространственных координатах. Поэтому равенство (140.7) означает также, что собственная частота принятого света должна быть равна собственной частоте испущенного при условии, что наблюдатель, расположенный неподвижно в начале отсчета, покоится и относительно излучающего источника. Иными словами, принятый свет будет иметь те же самые период и длину волны, что и свет земного эталона, используемого в качестве источника в лабораторном спектрометре.

Здесь мы на простом примере показали тот метод, который применяется при изучении обобщенного эффекта Допплера, который был коротко рассмотрен в конце VIII главы. Полученный результат свидетельствует о том, что в модели Эйнштейна частота наблюдаемого света никак не связана с расстоянием до источника (например, туманности). Конечно, здесь возможен небольшой доплер-эффект, возникающий из-за индивидуальных движений туманностей, но благодаря статичности модели следует ожидать, что эти эффекты будут одинаково часто как положительными, так и отрицательными, не отклоняясь далеко от среднего нулевого уровня.

§ 141. Сравнение свойств эйнштейновской модели с реальной Вселенной

Чтобы закончить краткое обсуждение свойств эйнштейновской Вселенной, сравним ее с реальной.

Самая привлекательная черта эйнштейновской Вселенной состоит в том, что она (§ 139), как и реальная, может содержать материю, распределенную однородно и с конечной плотностью. В этом отношении она лучше модели де Ситтера, которая, как мы покажем дальше в § 143, не может содержать материи вовсе. Однако следует тем не менее еще раз подчеркнуть, что это преимущество достигается благодаря введению лишнего космологического члена $\Lambda g_{\mu\nu}$ в первоначальные эйнштейновские уравнения поля. Этот шаг имеет прецедент в прошлом [86]: в ньютоновской теории тяготения было предложено таким же образом видоизменить уравнение Пуассона, чтобы оно могло описывать материю, однородно распределенную по всему плоскому пространству.

Если усреднить вещество, заключенное в видимых туманностях, по всему межгалактическому пространству (это должно быть сделано при замене картины реальной Вселенной моделью с однородным распределением материи), то, согласно оценкам Хаббла (§ 177), плотность усредненного таким образом вещества оказывается равной *)

$$\rho = (1,3 \div 1,6) \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (141.1)$$

Но в § 139 мы нашли, что в эйнштейновской модели средняя плотность вещества, не создающего никакого заметного давления, выражается через радиус R и космологическую постоянную Λ следующим образом:

$$4\pi\rho_{00} = \frac{1}{R^2} = \Lambda. \quad (141.2)$$

Отсюда, пренебрегая плотностью невидимой материи, пренебрегая давлением и плотностью излучения в межгалактическом пространстве и переходя от граммов к гравитационным единицам (81.7), получаем

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-30}}{1,349 \cdot 10^{28}} \text{ см}^{-2},$$

или

$$\Lambda \approx 9,3 \cdot 10^{-58} \text{ см}^{-2}, \quad (141.3)$$

$$R \approx 3,3 \cdot 10^{-28} \text{ см} \approx 3,5 \cdot 10^{10} \text{ световых лет}. \quad (141.4)$$

*) Приведенная оценка почти сохранила свое значение до сего времени. Сейчас считается, что $\rho \lesssim 10^{-29} \text{ г/см}^3$. (Прим. ред.)

При этом плотность материи была положена равной 10^{-30} г/см³, что, по-видимому, является нижней границей для плотности, так как здесь не учитывается пыль и газ в необъятных пространствах между туманностями. Поэтому величину для Λ нужно рассматривать как нижний предел, а для R — как верхний.

Величина Λ оказывается достаточно малой и потому не противоречит известному движению планет Солнечной системы. Действительно, если бы мы взяли шварцшильдовский интервал ds^2 в полной форме:

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2,$$

то отношение первоначально отброшенного члена $\Lambda r^2/3$ к главному члену $2m/r$ на расстоянии орбиты Нептуна составляло бы только

$$\frac{\Lambda r^2/3}{2m/r} = \frac{\Lambda r^3}{6m} \approx \frac{9,3 \cdot 10^{-58} (4,5 \cdot 10^{14})^3}{6 \cdot 1,5 \cdot 10^5} \approx 10^{-19} \quad (141.5)$$

(здесь мы приняли гравитационную массу Солнца равной $1,5 \cdot 10^5$).

Что касается полученного значения радиуса R ($3,5 \cdot 10^{10}$ световых лет), то его величина тоже не дает никакого повода для беспокойства, так как наши телескопы могут проникать только до расстояний примерно $3 \cdot 10^8$ световых лет*).

Самой неудовлетворительной чертой эйнштейновской модели Вселенной является отсутствие красного смещения света от удаленных объектов, которое в реальной Вселенной, согласно Хаббл — Хьюмасону, имеет место и возрастает приблизительно пропорционально расстоянию до светящегося объекта. В основном именно этот дефект заставляет нас отказаться от статической модели при построении космологических теорий и обратиться к моделям нестатическим.

В дальнейшем мы обнаружим, что с указанным недостатком статической модели Эйнштейна связано то обстоятельство, что эйнштейновская Вселенная вообще не может быть стабильной. Конечно, как мы видели в § 140 (см. (140.4)), свободные частицы не будут ускоряться, если они находятся в покое. Однако, как будет показано в дальнейшем, эйнштейновская Вселенная станет неудержимо сжиматься, если вещество начнет переходить в излучение, или же, наоборот, станет неудержимо расширяться, если излучение начнет переходить в вещество. И мы

*) Сейчас астрономы регистрируют большие объекты (квазары) на расстояниях примерно до 10^{10} световых лет. (Прим. ред.)

увидим, что, вообще, гораздо легче построить большое разнообразие сжимающихся и расширяющихся моделей, чем статическую модель, так как для существования последней должны выполняться исключительно жесткие требования.

§ 142. Геометрия Вселенной де Ситтера

Так как эйнштейновская Вселенная, будучи полезной для понимания релятивистской космологии, все же не дает удовлетворительного описания реальной Вселенной, то приходится обратиться к изучению другой модели — модели де Ситтера, представляющей еще один вариант статической Вселенной.

Преобразованием координат первоначальное выражение для деситтеровского интервала

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 \quad (142.1)$$

иногда полезно переписать в другом виде. Это бывает нужно либо для того, чтобы получить более удобное выражение, либо для того, чтобы лучше понять присущую ему внутреннюю геометрию.

После подстановки

$$r = R \sin \chi \quad (142.2)$$

получаем

$$ds^2 = -R^2 d\chi^2 - R^2 \sin^2 \chi d\theta^2 - R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + \cos^2 \chi dt^2. \quad (142.3)$$

Эта формула часто используется при изучении деситтеровской Вселенной.

Однако более интересный результат можно получить введением пяти переменных:

$$\alpha = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma = r \cos \theta,$$

$$\delta + \varepsilon = Re^{t/R} \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad \delta - \varepsilon = Re^{-t/R} \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad (142.4)$$

что позволяет переписать интервал в виде

$$ds^2 = -d\alpha^2 - d\beta^2 - d\gamma^2 - d\delta^2 + d\varepsilon^2$$

или, после еще одного преобразования:

$$z_1 = i\alpha, \quad z_2 = i\beta, \quad z_3 = i\gamma, \quad z_4 = i\delta, \quad z_5 = \varepsilon, \quad (142.5)$$

в виде

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2, \quad (142.6)$$

где для переменных z вследствие (142.4) должно выполняться соотношение

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = (iR)^2 \quad (142.7)$$

Это соотношение определяет пространство — время как четырехмерную поверхность в пятимерном многообразии и позволяет рассматривать геометрию Вселенной де Ситтера как геометрию на сфере, погруженной в пятимерное евклидово пространство. При этом, так же как и в эйнштейновском случае, мы получаем дополнительное подспорье для понимания существа однородности деситтеровской модели. Однако следует отметить, что формальная простота выражения для интервала (142.6) достигается за счет физики. В выражении (142.6) мы не можем уже физически отличать пространственноподобные интервалы, измеряемые с помощью линейки, от интервалов времениподобных, измеряемых с помощью часов.

Наконец, рассмотрим интересное и важное преобразование координат, открытое независимо Лемэтром [87] и Робертсоном [88] (Робертсон исследовал это преобразование наиболее полно). Оно имеет следующий вид:

$$r = \frac{\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R^2}} e^{-\bar{t}/R}, \quad \bar{t} = t + R \ln \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad (142.8)$$

и приводит к выражению для интервала

$$ds^2 = -e^{2\bar{t}/R} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + d\bar{t}^2.$$

Если опустить черту над \bar{r} и \bar{t} и ввести для простоты

$$k = \frac{1}{R}, \quad (142.9)$$

то интервал можно переписать следующим образом:

$$ds^2 = -e^{2kt} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (142.10)$$

или, после еще одного очевидного преобразования, несколько иначе:

$$ds^2 = -e^{2kt} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2. \quad (142.11)$$

Из последней формулы видно, что гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$ уже не являются не зависящими от координаты t . Это, однако, не должно особенно смущать, так как подобного рода зависимость статического интервала от времени возникает всегда при преобразовании системы отсчета, если новые координаты зависят не только от пространственноподобных, но и от времениподобных старых координат*). Однако, как показал

*) Другую нестатическую форму для интервала можно найти в работе [89].

Робертсон, в данном случае свойства пространства, определенного с помощью (142.10), в некотором смысле не зависят от нового времени t , так как преобразование

$$\bar{r} = r e^{kt}, \quad \bar{t} = t - t_0,$$

которое можно интерпретировать как изменение пространственного масштаба в комбинации со сдвигом начала отсчета времени подобной переменной, оставляет форму интервала неизменной.

Робертсон предложил называть выражения (142.10) и (142.11) для интервала *стационарными*, а не *статическими*. Это название, однако, не следует путать с другим термином (см. [36], стр. 244) «стационарный», введенным для обозначения интервала, в котором метрика $g_{\mu\nu}$ не зависит от координаты x_4 , причем компоненты g_{14} , g_{24} , g_{34} отличны от нуля (если эти компоненты равны нулю, то интервал называется статическим). В дальнейшем мы еще найдем применение робертсоновской форме интервала де Ситтера (§§ 144 г, 183 и 184).

§ 143. Отсутствие вещества и излучения в деситтеровской Вселенной

Теперь мы должны обратиться к физическим свойствам деситтеровской Вселенной, т. е. исследовать вопрос о веществе и излучении в этой модели. Определение модели де Ситтера, которое позволило в § 136 получить выражение деситтеровского интервала, было сформулировано в § 134 после исследования общих условий существования однородных статических моделей. Согласно этому определению модель де Ситтера — это такая модель, в которой собственное давление и плотность связаны соотношением

$$p_{00} + p_0 = 0. \quad (143.1)$$

Собственная плотность материи p_{00} по своей физической природе может быть только положительной или нулем. Давление в принципе может быть и отрицательным. Однако ни один из существующих видов материи, который мы здесь представляем себе как идеализированную жидкость, даже если примем во внимание внутренние силы сцепления, не может создать такое отрицательное давление, которое в принятых единицах хотя бы отдаленно приближалось по абсолютной величине к плотности. Следовательно, условие (143.1), очевидно, может выполняться только в том случае, если одновременно

$$p_{00} = 0 \text{ и } p_0 = 0. \quad (143.2)$$

А это означает, что Вселенная должна быть абсолютно пустой, т. е. она не может содержать заметного количества вещества или излучения.

Вследствие того, что ρ_{00} оказывается равной нулю, уравнение (136.4), связывающее космологическую постоянную и радиус Вселенной, упрощается. Постоянная R в деситтеровском интервале

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 \quad (143.3)$$

выражается через космологическую постоянную следующим образом:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (143.4)$$

Поэтому деситтеровская модель может быть пространственно закрытой, если $\Lambda > 0$, может вырождаться в открытое плоское пространство специальной теории относительности, если $\Lambda = 0$, и может оказаться открытой, но искривленной, если Λ меньше нуля. В дальнейшем мы будем полагать Λ положительным и R действительным, что соответствует закрытой модели.

Интересно отметить в согласии со (143.4), что внешнее шварцшильдовское решение (96.3)

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 \quad (143.5)$$

для статического поля в пустом пространстве вокруг материальной сферы переходит в деситтеровский интервал ds^2 абсолютно пустой Вселенной, если массу m материальной сферы, помещенной в начале координат, устремить к нулю. Выражение (143.5) интересно тем, что оно представляет собой конкретный, хотя и не бог весть какой важный, пример интервала в неоднородной модели.

§ 144. Пробные частицы и световые лучи в деситтеровской Вселенной

а) **Уравнения геодезической.** Как было показано, деситтеровский интервал отвечает абсолютно пустой модели; поэтому, если внести в нее такое количество вещества и излучения, какое имеется в реальном мире, это вызовет существенные искажения, о чем будет еще идти речь впереди (§ 183). Однако, чтобы изучить гравитационное поле внутри модели, в нее нужно

вносить лишь пробные частицы и световые лучи, что, конечно, не возбраняется.

Движение пробной частицы и распространение светового луча определяются уравнениями геодезической

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (144.1)$$

Взяв деситтеровский интервал в общем виде:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (144.2)$$

где

$$e^{-\lambda} = e^\nu = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad (144.3)$$

и подставив в уравнение геодезической символы $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ из формул (95.2), получим четыре уравнения при $\sigma=1, 2, 3, 4$:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r \sin^2\theta e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{dv}{dr} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \operatorname{ctg}\theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Однако без ущерба для общности эти уравнения можно упростить, если так выбрать координаты, чтобы интересующее нас движение происходило первоначально в плоскости $\theta=\pi/2$. Тогда, согласно второму из приведенных выше уравнений, движение будет все время происходить в этой плоскости, и уравнения приводятся к следующему виду:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{dv}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Первые интегралы, соответствующие этим уравнениям, легко получить, так как форма интервала (144.2) сама дает один

интеграл, а решения второго и третьего уравнений легко угадать. В результате получаем

$$e^{\lambda} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - e^{\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2},$$

$$\frac{dt}{ds} = t e^{-\nu},$$

где h и k — постоянные интегрирования. Наконец, подставляя два последних уравнения в первое и вводя вместо величин λ и ν их выражения из (144.3), получаем уравнения движения в следующем виде:

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{k^2 - 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{R^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{k}{1 - r^2/R^2}.$$
(144.4)

Легко видеть, что согласно этим уравнениям постоянная h может иметь как положительное, так и отрицательное значение в зависимости от направления движения. Что же касается параметра k , то он должен быть положительным для всех значений $r < R$, так как координатное время t возрастает с ростом собственного времени s . В случае же световых лучей константы h и k будут принимать бесконечные значения, так как для света $ds = 0$.

б) **Орбиты частиц.** Полученные выше интегралы уравнений геодезической можно использовать, чтобы выяснить, как будет происходить движение частиц во Вселенной де Ситтера.

Во-первых, исследуем *форму* орбиты. Сочетая первое из уравнений (144.4) со вторым, после некоторых выкладок легко получаем

$$d\varphi = \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{r^2}{R^2} + \left(k^2 - 1 + \frac{h^2}{R^2} \right) - \frac{h^2}{r^2}}}. \quad (144.5)$$

Непосредственное интегрирование этого уравнения дает аналитическое выражение для орбит, по которым движутся частицы в деситтеровской Вселенной. Мы можем, однако, сразу интуитивно оценить вид этих орбит, так как уравнение (144.5) очень хорошо известно в ньютоновской механике [90]. Там это

уравнение соответствует орбите, по которой движется частица в центральном поле с отталкивающей силой, пропорциональной радиусу. Отсюда ясно, что орбиты свободных частиц в пространстве де Ситтера, нарисованные в координатах r , θ , φ , будут заворачиваться таким образом, как если бы частицы отталкивались от центра.

Рассмотрим теперь *скорость* движения на орбите. Она, конечно, не будет такой же, как в упомянутом выше ньютоновом аналоге. Две компоненты скорости уже получены выше в качестве двух первых интегралов уравнения геодезической, но они выражены через посредство приращения собственного времени ds . Поскольку, однако, при сравнении модели с реальной Вселенной удобно вообразить себя расположенным в начале координат, а для наблюдателя, покоящегося в начале координат, собственное время, согласно выражениям (144.2) и (144.3) для интервала, совпадает с координатным временем t , то выгодно скорости различных частиц выражать через посредство координатного времени t . Для того чтобы сделать это, достаточно исключить ds из уравнений (144.4). Переход к координатному времени t позволяет выразить значение двух компонент орбитальной скорости следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1 - r^2/R^2}{k} \sqrt{k^2 - 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{R^2}} \quad (144.6)$$

и

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h(1 - r^2/R^2)}{kr^2}. \quad (144.7)$$

Из этих уравнений видно, что радиальная скорость частицы обращается в нуль, когда

$$k^2 - 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{R^2} = 0, \quad (144.8)$$

а обе компоненты обращаются в нуль при

$$r = R. \quad (144.9)$$

Первое из этих уравнений определяет величину перигелия, т. е. расстояния, на которое частица ближе всего подходит к началу координат, а из второго уравнения следует, что частица вовсе прекращает свое движение на расстоянии R ; это расстояние в дальнейшем мы будем называть видимым горизонтом Вселенной.

В частном случае чисто радиального движения, когда $h=0$, уравнение для перигелия приводится к виду

$$r = R\sqrt{1 - k^2}, \quad (144.10)$$

т. е. перигелий существует, только если $k < 1$, для больших значений k частица проходит через центр.

Дифференцируя (144.6) и (144.7), мы можем найти также и *ускорение* частицы на орбите. После некоторых преобразований получаем

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{2r/R^2}{1-r^2/R^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{1-r^2/R^2}{k}\right)^2 \left(\frac{r}{R} + \frac{h^2}{r^3}\right) \quad (144.11)$$

и

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{2h}{kr^3} \frac{dr}{dt}. \quad (144.12)$$

Согласно (144.11) радиальное ускорение частицы, которая имеет нулевую радиальную скорость, обязательно положительно в любой точке между $r=0$ и $r=R$. Поэтому свободная частица, достигнув однажды перигелия и начав двигаться от центра, обратно уже никогда не вернется. Для частицы же покоящейся в центре, $r=0$ и $h=0$, а значит, как легко видеть ускорение равно нулю. Следовательно, такая частица будет все время оставаться в центре. Этот результат отнюдь не противоречит ранее высказанному утверждению, что при выборе системы координат всегда удобно оставить за собой мест в начале отсчета.

в) **Поведение лучей света во Вселенной де Ситтера.** Рассмотрим теперь распространение света в этой модели. Как было отмечено при обсуждении интегралов уравнений геодезической (144.4), параметры h и k для светового луча должны быть бесконечны. В соответствии с этими значениями параметре уравнение орбиты (144.5) непосредственно преобразуется в уравнение светового луча деситтеровской модели

$$d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{k^2-1}{h^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}}}, \quad (144.13)$$

которое по своей форме совпадает с уравнением траектории частицы в ньютоновской механике [90], когда центральные силы обращаются в нуль. Далее из уравнения может быть получен интеграл

$$r \cos \varphi + ar \sin \varphi = b$$

(a и b — константы), который показывает, что траекториям световых лучей в выбранных нами координатах соответствуют прямые линии. Это делает координаты удобными для интерпретации астрономических измерений расстояний.

Чтобы определить скорость света в модели, мы можем вернуться к формулам интервала (144.2) и (144.3) и положить

$ds^2=0$. При этом мы получаем общий результат:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left\{ r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2. \quad (144.14)$$

В случае чисто радиального распространения света формула (144.14) упрощается:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (144.15)$$

Интегрируя это уравнение от $r=0$ до $r=R$, находим, что с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре, свет от центра до $r=R$ будет идти бесконечно долго. Следовательно, наблюдатель, находящийся в центре, никогда не сможет получить никакой информации о том, что происходит на расстоянии R или за этим расстоянием, и будет иметь право говорить о *горизонте* Вселенной на этом расстоянии. Следует, однако, отметить, что наблюдатель, находящийся в другом месте, будет видеть свой горизонт несколько иначе, чем первый. Следовательно, о пространственно закрытом характере модели, упомянуто при обсуждении (143.4), следует говорить, только имея в виду опыт отдельного наблюдателя.

г) **Допплер-эффект в деситтеровской Вселенной.** Зная теперь, как происходит движение частиц и распространение света в деситтеровской Вселенной, мы можем определить, как зависит длина волны света, принятого в начале координат, от движения излучающих свет свободно движущихся частиц.

Согласно выражению (144.15) для скорости света, свет, испущенный частицей, находящейся на расстоянии r , в момент «времени» t_1 , достигнет начала координат в более поздний момент «времени» t_2 :

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \frac{dr}{1 - r^2/R^2}.$$

Дифференцируя это выражение, получаем, что промежуток «времени» δt_2 между двумя принятыми световыми вспышками будет связан с промежутком «времени» их излучения δt_1 следующим образом:

$$\delta t_2 = \left(1 + \frac{1}{1 - r^2/R^2} \frac{dr}{dt}\right) \delta t_1, \quad (144.16)$$

где dr/dt — радиальная скорость частицы во время излучения.

С другой стороны, координатный интервал δt_1 определяет величину собственного временного интервала δt_1^0 для наблюдателя, движущегося вместе с излучающей частицей. Согласно

третьему уравнению (144.4) и при условии, что движение происходит в плоскости $\theta = \pi/2$,

$$\delta t_1^0 = \frac{1 - r^2/R^2}{k} \delta t_1. \quad (144.17)$$

В начале же координат собственный временной интервал между вспышками равен

$$\delta t_2^0 = \delta t_2. \quad (144.18)$$

Отсюда тем же методом, что и в § 116, комбинируя три только что полученных уравнения, получаем изменение длины волны $\delta\lambda$ света, принятого в центре:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2^0}{\delta t_1^0} = \frac{1 + \frac{1}{1 - r^2/R^2} \frac{dr}{dt}}{\frac{k}{1 - r^2/R^2}},$$

или

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{k}{1 - r^2/R^2} + \frac{k}{[1 - r^2/R^2]^2} \frac{dr}{dt}. \quad (144.19)$$

где первый член зависит от орбитального параметра частицы k и расстояния r от центра во время излучения, а второй член зависит, кроме того, и от радиальной скорости частицы во время излучения.

Так как упомянутый выше параметр k должен быть существенно положительной величиной, то изменение длины волны, как нетрудно видеть, может быть как в красную, так и в фиолетовую сторону, в зависимости от величины и знака скорости частицы dr/dt во время излучения. Когда скорость положительна, сдвиг происходит обязательно в сторону больших длин волн. Сдвиг же в противоположном направлении при отрицательной скорости будет происходить только в том случае, если второй член достаточно велик, чтобы скомпенсировать первый.

Например, в тот момент, когда частица находится в перигелии и не имеет радиальной компоненты движения, мы получим для величины красного смещения

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{k}{1 - r^2/R^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{h^2}{R^2}}}{1 - r^2/R^2}, \quad (144.20)$$

где вместо k подставлено его значение из уравнения перигелия (144.8), а r — величина перигелия.

Таким образом, хотя в деситтеровской модели свет от удаленных объектов может испытывать как красное, так и фио-

летовое смещение, однако красное смещение все же несколько преобладает над фиолетовым. Это позволяет предположить, что с помощью деситтеровской модели нам в дальнейшем, во-первых, удастся объяснить, почему спектры ближайших к нам спиральных галактик испытывают, как было обнаружено Слайфером, преимущественно красное смещение, а не фиолетовое и, во-вторых, удастся получить линейную зависимость красного смещения от расстояния, которая была открыта благодаря фундаментальному труду Хаббла и Хьюмасаона.

Чтобы оценить перспективы, открывающиеся в этом направлении, недостаточно основываться только на выражении (144.19) для обобщенного доплер-эффекта. Дело в том, что указанная формула только в том случае позволяет правильно предсказывать, какова будет длина волны принятого света, если известны орбита источника и положение его на орбите во время излучения. Поэтому, для того чтобы делать предсказания, касающиеся реальной Вселенной, необходимо еще сделать какие-то предположения относительно орбит и расположения частиц в реальном мире.

На первый взгляд самой естественной с этой точки зрения может показаться гипотеза, согласно которой физические условия, наблюдаемые в непосредственной близости от нас, в целом почти не зависят от времени. По этой гипотезе, число частиц (туманностей), попадающих в данное время внутрь области, доступной наблюдению, примерно равно числу частиц, покидающих ее после того, как они достигли внутри нее своего перигелия.

Однако эта гипотеза динамического равновесия, как показал анализ, проведенный автором [91], не сулит надежд на разрешение поставленных задач. Конечно, согласно (144.19) и (144.20) красное смещение будет несколько преобладать над фиолетовым, так как красное смещение в спектрах движущихся частиц начинается до того, как они достигнут перигелия, и продолжается все время после. Тем не менее это едва ли может объяснить почти полное отсутствие фиолетового смещения, найденного только лишь у небольшого числа ближайших к нам туманностей, и вряд ли позволит получить ту довольно строгую линейную зависимость красного смещения от расстояния, которая следует из наблюдений.

Более обещающей казалась другая гипотеза, предложенная Вейлем [92] и исследованная им самим и Робертсоном [88]. Эта гипотеза позволяла надеяться получить линейную зависимость красного смещения от расстояния. Суть ее состоит в том, что туманности реальной Вселенной предполагаются лежащими на пучке геодезических, выходящих из общей точки в прошлом.

Чтобы по существу понять гипотезу Вейля, удобно перейти к координатам Робертсона, которые, как было показано в § 142,

приводят к очень простому выражению для интервала:

$$ds^2 = -e^{2kt} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (144.21)$$

Записывая с помощью этих координат уравнение геодезической для покоящейся частицы:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

где пространственные составляющие «скорости» $\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0$, а символы Кристоффеля определяются уравнениями (98.5), получаем, что ускорения равны нулю. Таким образом, если частицы покоятся относительно r , θ , и φ в первый момент, то они будут покоиться относительно этих координат и дальше.

Гипотеза Вейля состоит в следующем: предполагается, что туманности реальной Вселенной в совокупности представляют собой однородно распределенную систему свободных частиц, которые, совершая только малые индивидуальные движения, в целом покоятся относительно введенных нами сейчас пространственных координат. Нетрудно показать, что из вида интервала ds^2 равенство собственного времени и координатного времени следует не только для частиц, покоящихся в центре, но и вообще для всех частиц, покоящихся относительно координат r , θ , φ . Кроме того, видно, что любую из этих частиц можно считать центральной без какого-либо изменения формы интервала ds^2 . Следовательно, все покоящиеся туманности можно считать *эквивалентными* в том смысле, что наблюдатели, находящиеся на них, будут видеть явления, происходящие во Вселенной, примерно одинаково.

Хотя частицы предполагаются покоящимися относительно выбранной нами системы координат, тем не менее собственное расстояние между ними, измеряемое жесткой линейкой, будет, конечно, меняться со временем ввиду зависимости $g_{\mu\nu}$ от t . Поэтому свет, излучаемый частицами, должен испытывать *доплеровское смещение*.

Из формулы для интервала ds^2 можно получить радиальную скорость света в выбранных нами координатах:

$$\frac{dr}{dt} = \pm e^{-kt}.$$

Из этого выражения можно найти момент t_2 , когда свет достигнет начала координат, если момент испускания был t_1 ,

а излучающая частица закреплена на расстоянии r от центра:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-kt} dt = \int_0^r dr = r = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство, получаем уравнение

$$\delta t_2 = e^{k(t_2 - t_1)} \delta t_1,$$

связывающее промежуток времени δt_2 между двумя световыми вспышками, зафиксированными приемником, с промежутком времени δt_1 между этими же вспышками на источнике. Отсюда легко получить общее выражение для доплеровского смещения, если учесть тот факт, что t является собственным временем как для наблюдателя, расположенного в центре, так и для наблюдателя, расположенного около частицы:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} = e^{k(t_2 - t_1)}. \quad (144.22)$$

Для не очень больших r это выражение можно записать приближенно:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx k(t_2 - t_1) \approx kr. \quad (144.23)$$

С другой стороны, как будет подробно показано в § 179 для общего случая нестатических однородных моделей, расстояние r в первом приближении пропорционально расстоянию, определенному астрономическими методами. Следовательно, распределение туманностей в модели де Ситтера, соответствующее гипотезе Вейля, приводит приблизительно к такому соотношению между красным смещением и расстоянием, какое наблюдается в реальном мире.

Однако следует отметить, что этот результат является в равной мере следствием как внутренних свойств деситтеровской Вселенной, так и нашего предположения относительно пространственно-временного распределения туманностей. Если в формулах преобразования координат (142.8) изменить знак перед членом $-t/R$ и перед $(R/2) \ln \sqrt{1 - r^2/R^2}$, то вместо робертсоновского выражения для интервала в модели де Ситтера получится аналогичное выражение, которое приведет не к разлетающимся, а к сближающимся галактикам, т. е. в этом случае вместо красного смещения можно получить доплеровское смещение в фиолетовую сторону. Однако гипотеза Вейля является очень привлекательной с той точки зрения, что она позволяет рассматривать

частицы (туманности) совершенно равноправно по отношению друг к другу, т. е. ни одна из туманностей не является выделенной и явления природы наблюдаются на всех туманностях совершенно одинаково.

§ 145. Сравнение модели де Ситтера с реальной Вселенной

Наиболее удовлетворительной чертой модели де Ситтера является то, что с ее помощью можно объяснить линейную зависимость красного смещения от расстояния, обнаруженную в реальной Вселенной Хабблом и Хьюмасоном. Для этого нужно только подходящим способом выбрать распределение движущихся частиц.

Уравнение (144.23) дает для красного смещения

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hr^* \quad (145.1)$$

а астрономические данные (см. § 177, г) позволяют получить приближенное численное значение для H^{**} :

$$H \approx 6 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-1} \approx 5,7 \cdot 10^{-10} \text{ (световых лет)}^{-1} \quad (145.2)$$

С другой стороны, из (142.9) и (143.4) можно H выразить следующим образом:

$$H \equiv k = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (145.3)$$

откуда

$$R = 1,66 \cdot 10^{27} \text{ см} \approx 1,75 \cdot 10^9 \text{ световых лет} \quad (145.4)$$

и

$$\Lambda = 1,08 \cdot 10^{-54} \text{ см}^{-2}. \quad (145.5)$$

Эти результаты можно сравнить с результатами (141.3), (141.4) в эйнштейновской модели. Легко видеть, что космологическая постоянная Λ в деситтеровской Вселенной значительно больше, чем в эйнштейновской. Тем не менее из уравнения (141.5) вытекает, что Λ по-прежнему достаточно мала и не может сколько-нибудь заметно влиять на планетарные орбиты. Вместе с тем расстояние R до горизонта деситтеровской Вселен-

*) За постоянной k из уравнения (144.23) в мировой литературе закрепилось название «постоянной Хаббла» и обозначение H . Поэтому, начиная с этого момента и ниже символ k переобозначен на H . (Прим. перев.)

**) Сейчас принято значение $1/H \approx 2 \cdot 10^{10}$ световых лет. С этим значением H получим $R = 2 \cdot 10^{26}$ см, $\Lambda = 7 \cdot 10^{-57}$ см². (Прим. ред.)

ной значительно меньше радиуса эйнштейновской Вселенной и, возможно, находится в опасном соседстве с тем радиусом порядка $3 \cdot 10^8$ световых лет, который является пределом видимости наших телескопов.

Наибольший же недостаток модели де Ситтера, который делает ее непригодной для реальной космологии, состоит в том, что, как было показано в § 143, точное выражение для интервала ds^2 соответствует абсолютно пустой Вселенной — без материи и без излучения. Существование материи и излучения в реальной Вселенной приводит к изменению выражения ds^2 для деситтеровского интервала. И, как мы покажем в § 183, эти изменения должны быть вполне серьезными.

Интересно отметить хорошие и плохие черты двух рассмотренных статических моделей. Эйнштейновская модель допускает наличие конечной концентрации материи во Вселенной, но не позволяет объяснить красное смещение света, приходящего от удаленных галактик.

В то же время деситтеровская модель хорошо объясняет с помощью гипотезы Вейля красное смещение, но не допускает существование какой-либо конечной концентрации материи в реальной Вселенной. Нестатические модели, к которым мы обратимся во второй части этой главы, позволяют сочетать хорошие стороны обеих только что рассмотренных моделей.

ЧАСТЬ II

НЕСТАТИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 146. Преимущества нестатических моделей

Статические вселенные Эйнштейна и де Ситтера имеют, конечно, очень большое значение, поскольку на их примере выясняется, какого рода космологические модели можно строить в рамках общей теории относительности. Более того, из дальнейшего будет следовать, что модели Эйнштейна и де Ситтера, возможно, довольно хорошо соответствуют реальной Вселенной в начале и в конце ее эволюции. Однако на современном этапе эволюции реальную Вселенную, очевидно, нельзя описывать ни одной из указанных моделей, так как в модели Эйнштейна отсутствует красное смещение света, приходящего от удаленных туманностей, а в модели де Ситтера пространство не может содержать ни вещества, ни излучения.

Мы должны поэтому обратиться к более общим моделям, если мы хотим описать реальную Вселенную. Откажемся, например, от принятого ранее требования статичности и посмотрим, какими

свойствами будет обладать модель, у которой интервал ds^2 зависит от времениподобной координаты x^4 .

Есть несколько соображений в пользу такого шага. Во-первых, совершенно очевидно, что всякий отказ от ограничений приводит к большей общности и тем самым расширяет область применимости теории. Конечно, нестатические модели, к которым мы теперь обратимся, математически гораздо более сложны, чем статические, однако история познания Вселенной не дает никаких оснований *априорно* требовать от природы математической простоты. Во-вторых, если на уровне прежних знаний, когда наблюдению были доступны только звезды внутри нашей собственной Галактики, наши предшественники и имели все основания приписывать Вселенной статический характер, то теперь, после открытия красного смещения света, приходящего от внегалактических туманностей, у нас, наоборот, есть основания утверждать, что Вселенная отнюдь не является статической. Наличие красного смещения по меньшей мере означает, что внегалактические туманности не покоятся друг относительно друга, а, напротив, взаимно разбегаются. В-третьих, даже если бы можно было придумать какое-нибудь иное объяснение красному смещению, все равно в природе есть процессы, которые свидетельствуют о необходимости обратиться к изучению другой модели — модели де Ситтера, звезд. Излучение звезд происходит, по-видимому, за счет их массы, а изменение массы, если только оно не компенсируется каким-нибудь до сих пор неизвестным способом, приводит к изменению гравитационного поля со временем [93], т. е. обязательно к нестатической Вселенной. И наконец, в дальнейшем мы увидим, что даже такая модель, как статическая Вселенная Эйнштейна, не может находиться в статическом состоянии как угодно долго, но обязательно под действием возмущений начнет сжиматься или расширяться [94].

Отказываясь от статичности, мы приходим к большой группе однородных нестатических моделей*), теоретические основы которых были заложены Фридманом [84]. С космологической точки зрения эти модели были впервые рассмотрены Лемэтром [96].

§ 147. Предположения, лежащие в основе нестатических моделей

Начнем изучение новой группы моделей с того, что покажем, как вывести выражение для нестатического интервала. Первый вполне удовлетворительный вывод этого выражения принадле-

*) Превосходный обзор по статическим и нестатическим моделям, охватывающий период времени вплоть до 1932 г., можно найти в работе [95].

жит Робертсону [85]*), который построил свой вывод на двух простых геометрических предположениях: во-первых, в крупномасштабном приближении пространство — время можно разделить на собственное пространство и ортогональное ему космологическое время, т. е. выражение для интервала можно привести к виду

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + dt^2 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

и, во-вторых, в том же крупномасштабном приближении пространство — время является пространственно однородным и изотропным. Другой вывод был предложен автором этой книги (см. [93], § 146) на основании чисто физических предположений, но эти предположения оказались не самыми простыми и критичными. Ниже будет изложен несколько похожий вывод, в котором предполагается только пространственная изотропия. Это допущение, как будет видно с самого начала, имеет непосредственное отношение к наблюдениям.

Как следует из результатов Хаббла, крупномасштабные свойства Вселенной в пределах видимости 100-дюймового телескопа Маунт — Вильсон не зависят сколько-нибудь существенным образом от направления наблюдения. Это означает, что, с нашей точки зрения — точки зрения наблюдателей, размещенных на одной из галактик или туманностей, составляющих видимую часть Вселенной, — окружающий нас мир является пространственно изотропным. Примем, что и для любого наблюдателя, неподвижного в среднем относительно окружающей его материи, свойства Вселенной в больших масштабах не зависят от направления. Иными словами, предположим, что все физические явления, какие мог бы обнаружить любой из указанных выше наблюдателей, свидетельствуют о пространственной изотропности мира.

Этой единственной гипотезы нам будет вполне достаточно, чтобы, пользуясь принципами релятивистской механики, получить искомое выражение для интервала ds^2 . С принятием подобной гипотезы мы отказываемся от антропоцентрического взгляда на вещи, и, с этой точки зрения, гипотеза разумна, так как естественно считать, что наше местонахождение во Вселенной не является выделенным, т. е. что любые наблюдения, какие мы можем производить с Земли, с одинаковым успехом можно было бы производить и из любого другого аналогичного места во Вселенной. Однако следует все же сделать несколько замечаний относительно этой гипотезы, прежде чем приступить к изучению вытекающих из нее следствий.

Во-первых, нужно иметь в виду, что эта гипотеза представляет собой некоторый принцип, приблизительно справедливый

*) Более ранний вывод Фридмана не был полностью удовлетворительным. (Замечание, с которым нельзя согласиться. (Прим. ред.))

только по отношению к величинам, усредненным по областям достаточно протяженным, содержащим большое число туманностей. Во-вторых, пространственной изотропностью будут обладать, как уже говорилось, только те наблюдения, которые производятся наблюдателем, покоящимся относительно окружающей его материи. Для наблюдателей, движущихся относительно своего окружения, наблюдаемые явления, конечно, будут зависеть от направления относительного движения.

Однако самое главное, и это следует подчеркнуть,— принятое предположение нужно рассматривать только как рабочую гипотезу, соответствующую современному состоянию техники наблюдений, которую необходимо будет подвергнуть пересмотру, если потребуются учесть более тонкие детали в наблюдаемом нерегулярном распределении туманностей. Возможно даже, что ее придется изменить коренным образом, если более мощные телескопы обнаружат систематическое нарушение однородности в разных частях Вселенной. Гипотеза изотропии отнюдь не является таким фундаментальным законом природы, как принцип относительности. Скорее всего она представляет собою некое утверждение, позволяющее определить тот тип космологической модели, к изучению которого мы собираемся приступить*). При этом нужно все время иметь в виду, что гипотеза пространственной изотропии не обязательно должна согласоваться со всеми фактами в реальной Вселенной и что, даже если полученная с ее помощью модель окажется в состоянии объяснить некоторые космологические явления, все равно нужно быть всегда готовым внести в нее поправки, которые могут улучшить теорию или сделать ее применимой к более широкому кругу явлений. К этому замечанию мы еще вернемся впоследствии.

§ 148. Вывод формулы интервала из предположения о пространственной изотропии

Дадим теперь подробный вывод общей формулы интервала для того класса моделей, которые мы собираемся обсудить. Согласно гипотезе изотропии можно, очевидно, с самого начала так выбрать систему координат, чтобы интервал был сферически симметричен относительно начала отсчета. При этом начало отсчета можно поместить в какой угодно точке, лишь бы она была неподвижна относительно непосредственно окружающей ее материи. Кроме того, имея в виду дальнейшее, удобнее всего принять — и мы, очевидно, можем это сделать, — что наша система

*) Этот подход отличается от точки зрения Милна [97], который однородность Вселенной считает фундаментальным принципом, позволяющим вывести даже законы гравитации.

координат является сопутствующей, иными словами, ее пространственную часть можно представить в виде сетки, ячейки которой выбраны так, что они объединяют ближайшие частицы (туманности) модели и движутся вместе с ними. Наиболее общее сферически симметричное выражение для интервала в сопутствующей системе отсчета имеет вид

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2 + 2a dr dt. \quad (148.1)$$

Мы начнем наше исследование именно с этой формы интервала, вместо того чтобы брать за исходный пункт более простые выражения, выведенные в §§ 94 и 98. Дело в том, что мы выбрали сопутствующую систему координат, и поэтому потребуется специально обсудить, можно ли вводить какие-либо упрощения, не нарушая предположения о сопутствующем характере выбранной системы отсчета. Легко, однако, показать, что сопутствующую систему координат можно преобразовать таким образом, чтобы она не перестала быть сопутствующей и в то же время выражение для интервала приняло более простой вид — такой же, как в § 98.

Преобразования координат, которые не нарушают сопутствующего характера системы отсчета, должны сохранить следующие соотношения:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (148.2)$$

ибо в сопутствующей системе координат пространственные компоненты «скорости» частиц должны равняться нулю.

Не нарушая соотношений (148.2), можно ввести новую времениподобную переменную t' , определяя ее соотношением

$$dt' = \eta (a dr + e^\nu dt). \quad (148.3)$$

Здесь η — интегрирующий множитель, который превращает правую часть (148.3) в полный дифференциал. Согласно (148.3) имеем

$$e^\nu dt'^2 + 2a dr dt = \frac{dt'^2}{\eta^2 e^\nu} - \frac{a^2}{e^\nu} dr^2. \quad (148.4)$$

Подставляя (148.4) в (148.1) и опуская штрихи, получаем новое выражение для интервала:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt'^2, \quad (148.5)$$

где λ , μ , ν являются функциями r и нового t . Соотношения (148.2) выполняются по-прежнему, поскольку r , θ , φ — те же

самые переменные, что и прежде. В результате преобразования мы привели интервал к виду, который был исследован Динглем (§ 100).

Чтобы произвести дальнейшие упрощения, рассмотрим компоненты гравитационного ускорения, испытываемого свободной пробной частицей в нашей модели. Эти компоненты определяются из уравнений геодезической (74.13) и для случая частицы, покоящейся относительно r , θ и φ , равны

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\Gamma_{44}^1 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\Gamma_{44}^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \quad \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\Gamma_{44}^3 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \quad (148.6)$$

Так как эта пробная частица покоится относительно сопутствующей системы координат, то она должна также покоиться и относительно локального наблюдателя, который движется вместе с непосредственно окружающей его материей. Однако, согласно нашей гипотезе об изотропии пространства, физические результаты, получаемые таким наблюдателем, не должны зависеть от направления. Следовательно, ускорения могут быть равны только нулю*). Мы приходим к выводу, что три символа Кристоффеля в (148.6) должны также равняться нулю. Но из формул Дингля (100.2) тогда сразу же следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0.$$

Эти условия накладывают ограничения на величину v , которая входит в выражение для интервала (148.5). В частности, отсюда следует, что v зависит только от t , и это позволяет, не нарушая сопутствующего характера системы координат, ввести новую временную координату t' , определяемую следующим образом:

$$t' = \int e^{1/2 v} dt. \quad (148.7)$$

После этого преобразования выражение для интервала приводится к виду

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt'^2, \quad (148.8)$$

откуда видно, что пространство—время удалось разделить на собственно пространство и ортогональное ему универсальное

*) То, что система координат является сопутствующей, не может в общем случае служить необходимым условием для равенства нулю ускорения, так как сила тяжести может быть уравновешена градиентом давления.

время t без привлечения дополнительных гипотез. Из выражения (148.8) следует также, что время, измеряемое локальным наблюдателем, расположенным неподвижно относительно окружающей его материи, совпадает с собственным временем:

$$t = t_0,$$

а измеряемые этим же наблюдателем собственные расстояния между имеющимися в модели частицами равны

$$\delta l_1 = e^{1/2\lambda} \delta r, \quad \delta l_2 = e^{1/2\mu} r \delta \theta, \quad \delta l_3 = e^{1/2\mu} r \sin \theta \delta \varphi$$

при условии, что в модели приращения координат остаются постоянными.

Далее, можно определить относительные скорости изменения собственных расстояний в зависимости от изменения собственного времени:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \ln \delta l_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t_0} \ln \delta l_2 = \frac{\partial}{\partial t_0} \ln \delta l_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

откуда сразу же, если учесть, что мир для локального наблюдателя пространственно изотропен, следует очень полезное равенство:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}. \quad (148.9)$$

Этот результат показывает, что формулу интервала можно упростить еще больше, если воспользоваться преобразованием

$$\frac{dr'}{r'} = e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r}$$

или

$$\ln r' = \int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r}. \quad (148.10)$$

От этой подстановки система координат не перестает быть сопутствующей, так как если в первоначальной системе координат скорость частицы dr/ds равна нулю, то и в новой системе координат скорость частицы dr'/ds , определяемая выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{ds} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r} \right] \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r} \right] \frac{dt}{ds} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r} \right] \frac{dr}{ds} + \frac{1}{2} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \frac{dr}{r} \right] \frac{dt}{ds}, \end{aligned}$$

тоже будет равна нулю согласно равенству (148.9). Подставляя (148.10) в (148.8) и опуская штрихи, получаем простое выражение, которое совпадает со вторым вариантом формулы интервала из § 98:

$$ds^2 = -e^{\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (148.11)$$

где μ теперь является функцией новых r и t .

Чтобы продолжить вывод, рассмотрим снова выражение для собственного расстояния

$$\delta l_0 = e^{\lambda} \delta r$$

между имеющимися внутри модели двумя частицами, разделенными постоянным координатным промежутком δr . Относительная скорость изменения расстояния δl_0 при изменении собственного времени равна

$$\frac{\partial \ln \delta l_0}{\partial t_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

но, согласно предположению о пространственной изотропии, эта величина не должна, с точки зрения локального наблюдателя, ни возрастать, ни уменьшаться при изменении r . Отсюда следует:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \ln \delta l_0}{\partial t_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial r \partial t} = 0, \quad (148.12)$$

а значит, μ представляет собой сумму двух функций, каждая из которых зависит только от одного из аргументов r или t :

$$\mu(r, t) = f(r) + g(t). \quad (148.13)$$

Подстановка (148.13) в (148.11) приводит к более конкретному выражению для интервала:

$$ds^2 = -e^{f(r)+g(t)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (148.14)$$

Чтобы сделать следующий шаг, можно воспользоваться известной теоремой римановой геометрии (теоремой Шура), из которой следует, что если подпространство (r, θ, φ) при постоянном t изотропно в каждой точке, то оно с необходимостью и однородно, а это позволяет заменить $e^{f(r)}$ решением известного вида. Однако, чтобы сделать результаты физически более наглядными, мы пойдем другим путем.

Рассмотрим выражение для тензора энергии — импульса (98.6), полученное в § 98 на основании формулы интервала ds^2 ,

определяемой уравнением (148.14). Легко видеть, что отличны от нуля только следующие компоненты:

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\mu} \left(\frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{r} \right) + \ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\mu} \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{2r} \right) + \ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \\ 8\pi T_4^4 &= -e^{-\mu} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r} \right) + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \end{aligned} \quad (148.15)$$

где

$$\mu(r, t) = f(r) + g(t),$$

штрихи означают производные по r , а точки — производные по t . Конечно, эти формулы дают компоненты тензора энергии — импульса в заданной системе координат (r, θ, φ, t) . Однако систему координат можно при желании изменить. Пусть в некоторой точке имеется неподвижный относительно (r, θ, φ) локальный наблюдатель. Собственную систему этого наблюдателя (x_0, y_0, z_0, t_0) можно выбрать таким образом, чтобы соотношения

$$dx_0 = e^{1/2\mu} dr, \quad dy_0 = e^{1/2\mu} r d\theta, \quad dz_0 = e^{1/2\mu} r \sin \theta d\varphi, \quad dt_0 = dt$$

выполнялись в окрестности этой точки. При этом, если согласно общим правилам преобразования тензоров привести указанные выше компоненты к собственным координатам наблюдателя, то окажется, что тензор энергии — импульса в новых координатах будет иметь тот же вид. Например:

$$T_{01}^1 = \frac{\partial x_0^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x_0^1} T_\beta^\alpha = e^{1/2\mu} e^{-1/2\mu} T_1^1 = T_1^1.$$

Следовательно, выражения (148.15) дают компоненты тензора энергии — импульса и в собственной системе координат, используемой локальным наблюдателем, неподвижным относительно окружающей его материи. А так как, по нашему предположению, мир является пространственно изотропным для всех наблюдателей подобного рода, то это значит, что измеряемые натяжения должны быть симметричны относительно направлений x , y и z . Иными словами,

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3, \quad (148.16)$$

откуда, с учетом (148.15), получаем уравнение, определяющее

вид функций $f(r)$:

$$\frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{r} = \frac{f''}{2} + \frac{f'}{2r},$$

или

$$\frac{d^2f}{dr^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0. \quad (148.17)$$

В качестве первого интеграла этого уравнения имеем

$$\frac{df}{dr} = c_1 r e^{\frac{1}{2}f},$$

где c_1 — постоянная интегрирования. В качестве второго интеграла получаем

$$e^{f(r)} = \frac{1}{[1 - c_1 r^2 / 4c_2]^2}, \quad (148.18)$$

где c_2 — вторая постоянная интегрирования.

Этим завершается наш вывод. Вернувшись к исходному выражению для интервала (148.14), включим постоянную $1/c_2^2$ в множитель $e^{g(t)}$ и обозначим, как обычно,

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{R_0^2}, \quad (148.19)$$

где R_0^2 — постоянная, которая может быть положительной, отрицательной или бесконечной. В результате получаем окончательное выражение:

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (148.20)$$

где $g(t)$ — все еще неопределенная функция времени t .

Мы привели такой длинный вывод, так как нам хотелось показать с помощью цепочки рассуждений, каждое звено которой имеет ясный физический смысл, что предположение о крупномасштабной пространственной изотропии Вселенной, которую обнаруживает наблюдатель, находящийся в покое относительно своей окрестности, вместе с принципами релятивистской механики приводят с необходимостью к указанному выражению для интервала. Поэтому, если мы в дальнейшем разочаруемся по каким-либо причинам, философским или наблюдательным, в результатах, полученных в рассматриваемой модели, то нам при-

дятся либо видоизменить принципы релятивистской механики, либо отказаться от мысли, что все наблюдатели во Вселенной увидят все явления в больших масштабах не зависящими от направления.

§ 149. Общие свойства интервала

а) **Некоторые формулы для интервала.** Выражение для интервала ds^2 в нестатической модели

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2 \quad (149.1)$$

можно видоизменить путем преобразования координат. Это бывает удобно либо для приложений, либо для лучшего понимания внутренней геометрии модели.

С помощью очевидной подстановки

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (149.2)$$

получаем

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2, \quad (149.3)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Это выражение наиболее убедительно показывает, что модель в каждой точке пространственно изотропна.

После подстановки

$$\bar{r} = \frac{r}{1 + r^2/4R_0^2} \quad (149.4)$$

интервал ds^2 принимает вид

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (149.5)$$

Это выражение интересно сравнить с одним из известных выражений для статического эйнштейновского интервала *). Подстановка

$$\bar{r} = R_0 \sin \chi \quad (149.6)$$

позволяет получить еще одно выражение:

$$ds^2 = - R_0^2 e^{g(t)} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (149.7)$$

*) При сравнении преобразования (149.4) с преобразованием (138.2), рассмотренным в связи с эйнштейновской моделью, следует отметить, что \bar{r} и \bar{r} в (149.4) аналогичны соответственно ρ и r в (138.2).

Наконец, переходя к большему числу измерений с помощью обозначений

$$\begin{aligned} z_1 &= R_0 \sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}, & z_2 &= \bar{r} \sin \theta \cos \varphi, \\ z_3 &= \bar{r} \sin \theta \sin \varphi, & z_4 &= \bar{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (149.8)$$

где

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R_0^2, \quad (149.9)$$

получаем следующий результат:

$$ds^2 = -e^{g(t)} (dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2) + dt^2, \quad (149.10)$$

который позволяет в каждый данный момент рассматривать нашу модель как поверхность, погруженную в евклидово пространство большего числа измерений.

б) **Внутренняя геометрия модели.** Как и в случае статической эйнштейновской Вселенной, тип геометрии еще не определяется видом интервала, так как еще можно делать различные предположения о связности и об идентификации точек.

Однако, судя по последнему выражению, проще всего пространственную часть нестатической Вселенной рассматривать в каждый данный момент t как полную трехмерную сферу, погруженную в четырехмерное евклидово пространство (z_1, z_2, z_3, z_4) и определяемую с помощью уравнения

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R_0^2. \quad (149.11)$$

Так как согласно (149.10) координатному расстоянию dz_1 в момент t соответствует собственное расстояние

$$dl_0 = e^{1/2g(t)} dz_1, \quad (149.12)$$

а для других пространственных координат расстояние записывается аналогично, то радиус сферической поверхности должен быть, очевидно, равен

$$R = R_0 e^{1/2g(t)} \quad (149.13)$$

Эту величину часто называют *радиусом нестатической Вселенной*, а о геометрии этой Вселенной говорят как о геометрии четырехмерной сферы с радиусом, зависящим от времени. Следует, однако, отметить, что радиус R_0 , согласно определению (148.19), может быть в равной мере действительным, мнимым и бесконечным.

Если предположить, что радиус действителен, то полный собственный пространственный объем модели в некоторый

выбранный момент, согласно (149.7), равен

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R_0^3 e^{3/2 g(t)} \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi = 2\pi^2 R_0^3 e^{3/2 g(t)}, \quad (149.14)$$

а полная собственная кругосветная длина Вселенной равна

$$l_0 = 2\pi R_0 e^{1/2 g(t)}. \quad (149.15)$$

В случае, когда пространственная геометрия является эллиптической, а не сферической, полученные величины должны быть в два раза меньше.

Если радиус R_0 бесконечен или есть мнимая величина, модель является пространственно открытой, а не закрытой. Собственный объем в этом случае удобнее записать, исходя из выражения для интервала ds^2 (149.5):

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{3/2 g(t)}}{\sqrt{1 + \bar{r}^2/A^2}} \bar{r}^2 \sin \theta d\bar{r} d\theta d\varphi = \infty,$$

где A^2 — положительная постоянная, которая может принимать и бесконечное значение. Верхний предел интеграла по \bar{r} должен быть тоже взят бесконечным, поскольку знак интервала ds^2 при этом не меняется, т. е. физический смысл интервала ds^2 сохраняется при всех значениях \bar{r} . Вычисление интеграла показывает, что открытые модели имеют бесконечный собственный объем.

Симметричная форма, к которой нам удалось свести интервал (149.10) ценою перехода в пространство большего числа измерений, очень полезна для ясной демонстрации пространственной однородности модели, упоминавшейся уже в связи с (148.14). То, что предположение о пространственной изотропии во всех точках пространства и времени для покоящегося наблюдателя приводит к разделению на пространство и ортогональное к нему время и к однородности пространства, есть на самом деле интересное следствие теоремы Шура, известной в римановой геометрии. Именно благодаря этому результату изучаемые здесь модели Вселенной называются нестатическими *однородными* космологическими моделями.

в) **Сдвиг начала координат.** Поскольку модель пространственно однородна, начало координат можно выбрать в любой точке, и это не должно влиять на вид интервала. Действительно, нетрудно показать, что при перемещении начала координат из одной точки в другую вид интервала не меняется, но интереснее всего то, что координаты нового центра в старой системе отсчета оказываются связанными с координатами старого центра в новой

системе отсчета вполне естественным соотношением. Это мы сейчас и продемонстрируем [98].

Для дальнейшего изложения выберем систему координат $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$ в соответствии с третьей формулой интервала ds^2 (149.5):

$$ds^2 = -e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (149.16)$$

Рассмотрим *туманность*, покоящуюся в начале координат, и *наблюдателя*, закрепленного в точке $\bar{r}=a$. Затем переместим начало координат в точку, где находится наблюдатель.

В первоначальной системе координат S можно следующим образом фиксировать координаты туманности и наблюдателя:

Система S	\bar{r}	θ	φ
Туманность	0
Наблюдатель	a	0	0

(149.17)

Угловые координаты в начале отсчета, конечно, произвольны, для наблюдателя же удобнее всего угловые координаты выбрать так, чтобы $\theta=\varphi=0$. Этот выбор можно всегда сделать, так как отсчет углов можно начинать с произвольного направления.

Посмотрим теперь, что произойдет, если перейти к новой системе координат S' того же типа, что и S , но с началом отсчета, помещенным в точку, где находится наблюдатель. Чтобы произвести это преобразование, проще всего перейти к промежуточной системе координат, определяемой выражением интервала (149.10), согласно которому наше пространство можно трактовать как поверхность, погруженную в евклидово пространство с числом измерений на единицу большим. С помощью формул преобразования (149.8) мы сначала перейдем к новой системе координат S_z , в которой пространственные координаты для туманности и наблюдателя записываются следующим образом:

Система S_z	z_1	z_2	z_3	z_4
Туманность	R_0	0	0	0
Наблюдатель	$R_0 \sqrt{1 - a^2/R_0^2}$	0	0	a

(149.18)

Затем перейдем к системе координат S'_z . Соответствующее преобразование можно рассматривать как поворот в плоскости $z_1 z_4$:

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_1 \cos \alpha + z_4 \sin \alpha, & z'_2 &= z_2, \\ z'_4 &= -z_1 \sin \alpha + z_4 \cos \alpha, & z'_3 &= z_3. \end{aligned} \quad (149.19)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{a}{R_0}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (149.20)$$

В результате новые координаты туманности и наблюдателя будут

Система S'_z	z'_1	z'_2	z'_3	z'_4	(149.21)
Туманность	$R_0 \sqrt{1 - a^2/R_0^2}$	0	0	$-a$	
Наблюдатель	R_0	0	0	0	

Но последнее преобразование оставляет инвариантным выражение (149.10) и, кроме того, оставляет инвариантным и соотношение (149.9), которое выделяет в четырехмерном многообразии трехмерную поверхность, соответствующую физическому пространству. Следовательно, мы можем снова воспользоваться преобразованиями (149.8), чтобы перейти к системе координат S' , в которой выражение для интервала принимает прежний вид (149.16). Действуя таким образом, легко получаем координаты туманности и наблюдателя в системе S' :

Система S'	\bar{r}'	θ'	φ'	(149.22)
Туманность	a	π	..	
Наблюдатель	0	

Здесь значения всех угловых координат, за исключением одной безразличны.

Сравнивая таблицы (149.17) и (149.22), видим, что мы фактически перешли от первоначальной системы координат, где туманность находилась в центре $\bar{r}=0$, а наблюдатель — в $\bar{r}=a$, к новой системе координат, где выражение для интервала ds^2 осталось тем же (149.16), но в центре находится наблюдатель $\bar{r}'=0$, а туманность располагается в точке $\bar{r}'=a$. То, что соотношение между старыми и новыми координатами оказалось столь простым, конечно, следовало ожидать при подобного рода преобразовании. Однако мы сочли уместным привести здесь столь подробное доказательство, так как этот результат будет очень важен в дальнейшем.

г) **Физическая интерпретация интервала.** Согласно нашим общим правилам при физической интерпретации формул интервала в нестатической Вселенной мы должны каждому из предыдущих выражений для интервала сопоставить результаты измерений, производимых с помощью обыкновенной линейки и часов. Например, интервалу, записанному в первоначальном виде:

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (149.23)$$

соответствует собственное расстояние dt_0 , которое, будучи измерено наблюдателем, расположенным неподвижно относительно r, θ, φ , окажется связанным с разностью координат следующим образом:

$$dt_0 = \frac{e^{1/2 g(t)}}{1 + r^2/4R_0^2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}, \quad (149.24)$$

а интервал собственного времени dt_0 , измеряемый им с помощью своих часов, связан с интервалом координатного времени очень простым соотношением:

$$dt_0 = dt. \quad (149.25)$$

Конечно, для наблюдателей, движущихся относительно r, θ и φ , зависимость собственных расстояний и времени от разности координат будет более сложной.

Равенство (149.25) означает, что во всех приведенных выражениях для нестатического интервала координатное время t совпадает с собственным временем, которое отсчитывается по часам локального наблюдателя, расположенного неподвижно относительно среднего движения материи ближайшей к нему части Вселенной. Этот результат очень важен, так как, исходя из него, мы можем отождествить координату t с нашим собственным временем при текущих измерениях и при оценках протекшего и будущего времени. Собственно оценки временных масштабов, характеризующих астрономические процессы, производятся в терминах координаты t , и, если координату t путем простой подстановки заменить на другую времениподобную координату, никаких реальных изменений временных масштабов от этого не произойдет.

§ 150. Плотность и давление в нестатической Вселенной

Вплоть до настоящего момента мы никак не конкретизировали, какого вида материя должна заполнять нестатическую однородную модель. Мы только условились, как это принято в космологии, пренебрегать локальными особенностями, оперируя лишь большими масштабами. И, кроме того, предположили, что материя подчиняется уравнениям Эйнштейна

$$-8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu},$$

где, опять же с точки зрения больших масштабов, тензору энергии — импульса в интересующий момент времени и в выбранной точке пространства нужно приписать значение, усредненное соответствующим образом.

Теперь мы можем наделить материю, заполняющую модель, более конкретными свойствами. Предположим, что она представляет собою идеальную жидкость. С таким предположением имело смысл подождать до тех пор, пока не была установлена однородность модели. При неоднородном распределении можно было бы ожидать, что имеются потоки излучения из областей, содержащих большее количество светящегося вещества, в окружающее пространство. Поэтому материю нельзя было бы считать идеальной жидкостью, так как в случае идеальной жидкости этих потоков не может быть благодаря тому обстоятельству, отмеченному в § 86, что выражение для тензора энергии — импульса идеальной жидкости ограничивает круг возможных процессов. А именно, в идеальной жидкости могут происходить только адиабатические процессы без всякой передачи тепла, иными словами, не возможны никакие процессы, аналогичные передаче энергии с помощью теплового излучения от одной части материи к другой. Однако, установив, что изучаемые нами модели являются однородными, мы можем считать, что излучение, испускаемое туманностями, в любой наперед заданной достаточно большой области не возрастает и не убывает при обмене с окружающими областями, иными словами, мы можем сделать вполне определенное предположение, что материю реальной Вселенной, состоящую из туманностей и межгалактической пыли и излучения, можно с модельной точки зрения рассматривать как идеальную жидкость.

Отсюда сразу же вытекает, что для материи, заполняющей модель, мы можем воспользоваться тензором энергии — импульса идеальной жидкости, полученным в § 85:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0, \quad (150.1)$$

где ρ_{00} и p_0 — собственные макроскопические плотность и давление, измеряемые локальным наблюдателем, расположенным неподвижно относительно жидкости, а dx^μ/ds — компоненты макроскопической «скорости» жидкости относительно рассматриваемой системы координат.

Если воспользоваться системой координат (r, θ, φ, t) , в которой интервал имеет вид

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (150.2)$$

то выражения (150.1) можно значительно упростить. Так как указанная система координат является сопутствующей, то пространственные компоненты скорости должны равняться нулю:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (150.3)$$

Временная же компонента скорости, как следует из вида интервала, равна

$$\frac{dt}{ds} = 1. \quad (150.4)$$

При этом отличными от нуля оказываются только следующие компоненты тензора энергии — импульса:

$$T^{11} = -g^{11}p_0, \quad T^{22} = -g^{22}p_0, \quad T^{33} = -g^{33}p_0, \quad T^{44} = p_{00}, \quad (150.5)$$

откуда, опуская индексы, получаем

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = p_{00}. \quad (150.6)$$

С другой стороны, выражение (150.2) для интервала записано в стандартном виде. Это значит, что мы можем воспользоваться для тензора энергии — импульса формулами (98.6). Применяя эти формулы к данному конкретному выражению интервала и вводя с помощью (150.6) давление и плотность, легко находим

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g(t)} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda \quad (150.7)$$

и

$$8\pi p_{00} = \frac{3}{R_0^2} e^{-g(t)} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \quad (150.8)$$

где p_0 и p_{00} — локальные давление и плотность жидкости, заполняющей модель, а точки означают дифференцирование по времени.

В связи с этими уравнениями можно сделать несколько замечаний. Во-первых, можно видеть, что давление и плотность являются только функциями времени и в каждый момент t одинаковы во всех точках Вселенной. Это согласуется с пространственной однородностью модели, о чем мы уже говорили раньше. Во-вторых, легко видеть, что если считать $g(t)$ постоянной, не зависящей от времени, то давление и плотность оказываются такими же, как (139.3) и (139.4) в эйнштейновской Вселенной с радиусом $R = R_0 e^{1/2 g}$. Однако наиболее важным, по-видимому, является то, что в противоположность эйнштейновской модели, если $g(t)$ и в самом деле меняется со временем, то постоянная R_0 не обязана быть вещественной, а космологическая постоянная Λ не обязана быть положительной, чтобы плотность энергии p_{00} в модели была положительной, а давление p_0 — неотрицательным. Это особенно важно, так как освобождает нас от необходимости сохранять Λ -член и требовать, чтобы Вселенная была обязательно закрыта, предоставляя решение этого вопроса наблюдениям.

При интерпретации выражений (150.7) и (150.8) для плотности ρ_{00} и давления p_0 следует все время помнить, что эти величины относятся к идеальной жидкости, которая в рассматриваемых моделях заменяет материю и излучение реальной Вселенной. При такой замене естественно за ρ_{00} принять усредненную по достаточно большим областям Вселенной плотность суммарной энергии, заключенной внутри туманностей, в межгалактическом веществе и в межгалактическом излучении, при этом в плотность энергии, конечно, включается и наиболее достоверный в настоящее время вклад — энергия mc^2 , отвечающая массе туманностей. В качестве давления идеальной жидкости p_0 следует взять сумму трех парциальных давлений, возникающих, во-первых, из-за хаотического движения самих туманностей, во-вторых, из-за хаотического движения частиц вещества в межгалактических пространствах, и, в-третьих, из-за давления излучения, заполняющего огромные межгалактические пространства.

После того, как мы уяснили себе те факторы, которые создают давление p_0 и плотность ρ_{00} , мы можем приблизительно оценить парциальную плотность ρ_m энергии, которая относится непосредственно к собственной массе туманностей и других частиц вещества, присутствующих во Вселенной. Давление, отвечающее хаотическому движению огромных частиц — *туманностей*, составляет, согласно обычной кинетической теории, две трети от их кинетической энергии на единицу объема:

$$p = \frac{2}{3} \rho_k.$$

Эта величина, конечно, очень мала.

Межгалактическая *пыль* и другие частицы материи в межгалактических пространствах создают давление, которое изменяется в пределах от двух третей плотности кинетической энергии для медленных частиц,

$$p = \frac{2}{3} \rho_k,$$

до одной трети этой величины,

$$p = \frac{1}{3} \rho_k,$$

для частиц со скоростями, близкими к скорости света.

Наконец, *излучение* создает давление, которое в общем случае равно одной трети от плотности энергии,

$$p = \frac{1}{3} \rho_k.$$

Однако плотность кинетической энергии туманностей и медленных материальных частиц ничтожна по сравнению с плотностью

собственной массы частиц, следовательно, грубо говоря, мы можем принять, что

$$\rho_m = \rho_{00} - 3\rho_0, \quad (150.9)$$

где ρ_m составляет ту часть плотности энергии, которая непосредственно относится к массе туманностей и вещества, распыленного в огромных пространствах между ними. При этом уравнение (150.9) становится точным, когда давлением материи можно полностью пренебречь.

Комбинируя выражения (150.7) и (150.8), мы можем для плотности вещества во Вселенной написать следующее приближенное выражение

$$8\pi\rho_m = \frac{6}{R_0^2} e^{-g(t)} + 3\ddot{g} + 3\dot{g}^2 - 4\Lambda. \quad (150.10)$$

§ 151. Изменение энергии со временем

Подставляя компоненты тензора энергии — импульса (150.5) и (150.6) в общее уравнение релятивистской механики

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (151.1)$$

для случая $\mu=4$ и имея в виду, что $g_{44}=1$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{00} \sqrt{-g}) + \frac{1}{2} p_0 \sqrt{-g} \left(g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial t} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial t} \right) = 0.$$

Или, подставляя вместо компонент метрического тензора их выражения из интересующей нас формулы интервала (150.2):

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (151.2)$$

легко находим, что уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{00} r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right) + p_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right) = 0. \quad (151.3)$$

Этому результату можно дать непосредственную физическую интерпретацию. Из выражения (151.2) следует, что в любой заданный момент времени t величина собственного объема, измеряемого локальным наблюдателем и отвечающего разности координат $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ равна

$$\delta v_0 = \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi. \quad (151.4)$$

При этом, поскольку система отсчета является сопутствующей, то указанный элемент объема будет, с точки зрения локального наблюдателя, представляться объемом элемента жидкости, заключенного перманентно внутри рассматриваемой области координат. Поэтому, комбинируя (151.3) и (154.4), мы можем написать

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}\delta v_0) + \rho_0 \frac{d}{dt}(\delta v_0) = 0. \quad (151.5)$$

В результате получаем соотношение между изменением энергии $(\rho_{00}\delta v_0)$ элемента жидкости и работой, производимой данным элементом над окружающей средой при адиабатическом изменении объема.

Из уравнений (151.4) и (151.5) вытекает, что объем каждого элемента жидкости, заполняющей данную модель, должен возрастать со временем, если $g(t)$ — возрастающая функция времени, и уменьшаться, если $g(t)$ убывает. Более того, если ρ_0 — величина положительная и больше нуля, то и собственная энергия каждого элемента жидкости в данной модели будет либо убывать, если $g(t)$ возрастает, либо возрастать, если $g(t)$ убывает. Следовательно, за исключением частного случая, когда давление равно нулю, полная собственная энергия жидкости, вообще говоря, оставаться постоянной не будет, и закон сохранения энергии будет соблюден только при учете потенциальной энергии гравитационного поля, которую можно ввести тем же способом, как и в § 87.

Имея в виду дальнейшее, перепишем уравнение (151.3) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}e^{\frac{1}{2}g(t)}) + \rho_0 \frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{2}g(t)}) = 0. \quad (151.6)$$

Это, очевидно, можно сделать благодаря взаимной независимости координат r , θ , φ и t .

Справедливость последнего уравнения легко проверить прямой подстановкой выражений (150.7) и (150.8) для ρ_{00} и ρ_0 . Это и естественно, так как фундаментальное уравнение для компонент тензора энергии — импульса

$$-8\pi T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}$$

содержит, как мы уже видели, всю ту информацию, которая содержится в уравнениях механики

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0,$$

поскольку последние могут быть получены из него.

В дальнейшем нам часто будет удобно рассматривать (151.6) и (150.8) вместе, поскольку эти уравнения связывают давление и плотность жидкости с интервалом и позволяют уравнение второго порядка (150.7) заменить уравнением первого порядка (151.6).

§ 152. Изменение количества вещества со временем

С помощью приближенного выражения (150.9) для той части полной плотности энергии

$$\rho_m = \rho_{00} - 3p_0, \quad (152.1)$$

которая связана только с массой туманностей и межгалактического вещества, мы можем проследить изменение массы вещества, заключенного в модели, в зависимости от времени [99]. Подставляя (152.1) в (151.5), получаем

$$\frac{d}{dt} (\rho_m \delta v_0) + 3 \frac{d}{dt} (p_0 \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0. \quad (152.2)$$

Полагая, что

$$M = \rho_m \delta v_0 \quad (152.3)$$

представляет собой полную собственную массу туманностей и других частиц в заданном элементе объема, и используя (151.4), перепишем уравнение (152.2) в следующем виде:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{6p_0}{\rho_m} \frac{dg}{dt} + \frac{3}{\rho_m} \frac{dp_0}{dt}. \quad (152.4)$$

Этим уравнением и определяется относительная скорость изменения собственной массы вещества, находящегося внутри изучаемой модели.

Если предположить, что давление постоянно и равно нулю, то окажется, что и скорость изменения массы будет равна нулю, иными словами, будет выполняться закон сохранения вещества и одновременно закон сохранения полной собственной энергии, который уже упоминался для этого частного случая при обсуждении уравнения (151.5).

Точно так же закон сохранения вещества будет выполняться и в том случае, когда давление подчиняется условию

$$6p_0 \frac{dg}{dt} + 3 \frac{dp_0}{dt} = 0, \quad (152.5)$$

или в другом виде

$$3 \frac{d}{dt} (p_0 \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0. \quad (152.6)$$

Это условие, как будет видно дальше, выполняется в такой модели, которая содержит неизменное количество вещества, создающего пренебрежимо малое давление, и содержит излуче-

ние с давлением $p_r = p_r/3$. Эта модель будет рассмотрена позднее, в § 160.

Однако, вообще говоря, было бы желательно допустить некоторые изменения собственной массы вещества, заключенной внутри модели, так как изменения подобного рода в реальной Вселенной, по-видимому, происходят. Например, согласно эйнштейновскому соотношению между массой и энергией, туманности при излучении света теряют массу вне зависимости от того, как в конечном счете происходит это излучение, с помощью ли процессов разрушения, таких, как аннигиляция электронов и протонов, или же с помощью процессов синтеза, таких, как образование гелия из водорода, сопровождающееся уменьшением суммарной массы*). Точно так же, если происхождение космических лучей связано с аннигиляцией межгалактических частиц вещества или с синтезом более сложных атомов из атомов водорода, то в этом случае полное количество вещества во Вселенной тоже должно уменьшаться.

По некоторым причинам (см. §§ 165 и 184) очень удобно переписать уравнение (152.4) в таком виде, чтобы была видна прямая зависимость между скоростью уменьшения массы и изменением со временем функции $g(t)$. С помощью полученных ранее выражений (150.7) и (150.8) для ρ_{00} и p_0 после некоторых выкладок легко получаем

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} p_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\varphi_m} \left(\ddot{g} + \frac{\ddot{g}}{g} \right) \right] \dot{g}, \quad (152.7)$$

где точки означают дифференцирование по времени. Это уравнение для относительной скорости уменьшения массы вещества в модели показывает, что аннигиляция вещества с необходимостью приводит к нестатичности модели и к появлению зависимости g от t . Это соображение подкрепляет один из доводов, выдвинутых в § 146 в пользу нестатических моделей.

§ 153. Движение частиц в модели

Теперь мы можем рассмотреть движение свободных частиц в нестатической модели, интервал ds^2 которой равен

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (153.1)$$

*) Этот вывод следует изменить, если окажется, что излучение звезд, согласно Бору, происходит благодаря нарушению внутренних законов сохранения энергии.

Гипотеза Бора и Слэтера возникла в связи с казавшимся парадоксальным явлением вынужденного излучения света. К ней возвращались и в связи с бета-распадом. С открытием нейтрино основания для этой гипотезы отпали. (Прим. ред.)

Согласно принципам релятивистской механики движение свободных частиц в модели определяется уравнениями геодезической

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (153.2)$$

А так как интервал (153.1) написан в стандартной форме, то мы можем в эти уравнения подставить символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ в их общем виде (98.5).

Сначала исследуем тот случай, когда частица покоится относительно пространственных координат r , θ , φ . В этом случае

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad (153.3)$$

и уравнения геодезической приводятся к виду

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0,$$

а так как все величины Γ_{44}^σ , как видно из выражения для интервала, равны нулю, то это значит, что все компоненты ускорения также равны нулю:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (153.4)$$

т. е. частица будет все время оставаться в покое относительно пространственных координат, и измеряемое локальным наблюдателем приращение ds собственного времени будет в точности равно приращению координатного времени dt .

Конечно, тот вывод, что частицы, вначале покоившиеся относительно пространственных координат, не будут испытывать никакого гравитационного ускорения, которое привело бы их в состояние движения, согласуется с тем фактом, что мы выбрали сопутствующую систему отсчета, т. е. такую, в которой вещество, заполняющее модель, остается все время в покое относительно r , θ , φ . Этот результат справедлив только для гравитационного ускорения, но очевидно, что и другие виды ускорений, происходящих от столкновений или от радиационного давления, должны в среднем из-за однородности модели равняться нулю для частиц, покоящихся относительно выбранных нами пространственных координат. Нельзя забывать, однако, что, хотя частицы вещества в модели и остаются в покое относительно пространственных координат r , θ , φ , все же собственное расстояние между двумя такими частицами, измеряемое с помощью приложенной к ним жесткой линейки, будет меняться со временем, если меняется со временем $g(t)$.

Чтобы исследовать более общий случай, когда частицы обладают произвольной начальной скоростью, проще всего воспользоваться уравнением геодезической (153.2) для $\sigma=4$:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^4 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (153.5)$$

Подставляя сюда величины $\Gamma_{\mu\nu}^4$, из (98.5), с учетом формулы интервала (153.1) получаем

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} e^{\mu} \dot{\mu} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\mu} \dot{\mu} r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\mu} \dot{\mu} r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0,$$

где

$$e^{\mu} = \frac{e^{\xi(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2}.$$

Из вида самого интервала следует, что уравнение (153.5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{dg}{dt} \left[\frac{dt^2}{ds^2} - 1 \right] = 0$$

или

$$\frac{2 \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right)}{\frac{dt^2}{ds^2} - 1} = - \frac{dg}{dt}.$$

Это уравнение можно легко проинтегрировать. В результате получаем

$$\frac{dt^2}{ds^2} - 1 = A e^{-\xi(t)}, \quad (153.6)$$

где A — постоянная интегрирования.

Для интерпретации этого результата мы можем снова вернуться к интервалу (153.1), из которого следует, что

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 1 - \frac{e^{\xi(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right),$$

т. е. движение частицы происходит по закону

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}, \quad (153.7)$$

где c — скорость света, а u — скорость частицы, которую локальный наблюдатель в ее окрестности, неподвижный относительно r , θ , φ , может измерить в окрестности частицы обычным обра-

зом, используя свои приращения собственного времени и собственного расстояния:

$$dt_0 = dt, \quad dl_0 = \frac{e^{1/2 g(t)}}{1 + r^2/4R_0^2} dr \quad \text{и т. д.} \quad (153.8)$$

Подставляя (153.7) в (153.6), получаем

$$\frac{u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = Ae^{-g(t)}. \quad (153.9)$$

Именно так будет зависеть от времени скорость свободно движущейся частицы, с точки зрения локальных наблюдателей, расположенных вдоль ее траектории неподвижно относительно усредненного движения вещества в их окрестности.

Из (153.9) вытекает, что если $g(t)$ возрастает со временем и, значит, собственные объемы элементов жидкости расширяются, то скорости свободных частиц будут со временем уменьшаться, и, наоборот, если модель сжимается, то скорости возрастают. Если применить этот результат к частицам, которые являются составными частями самой жидкости, и связать случайные скорости, которые могут иметь эти частицы, с их вкладом в полную плотность энергии и полное давление этой жидкости, то легко показать, что зависимость скорости (153.9) от времени находится в полнейшем согласии с определенной с помощью уравнения (151.6) связью между плотностью энергии и давлением.

С учетом (153.9) мы можем также определить и зависимость от времени энергии свободных частиц. Это представляет интерес в связи с космическими лучами в реальной Вселенной, так как по крайней мере часть этих лучей ведет свое происхождение от быстро движущихся частиц. Решая уравнение (153.9), получаем

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = E_0 \sqrt{1 + Ae^{-g(t)}}, \quad (153.10)$$

где E — полная энергия частицы, которая определяется формулой специальной теории относительности и включает собственную энергию покоя $E_0 = mc^2$. Из этого выражения видно, что измеряемая локальным наблюдателем, расположенным в среднем неподвижно относительно соседней материи, энергия таких частиц будет уменьшаться со временем, если $g(t)$ возрастает и модель расширяется.

Чтобы получить более полное представление об относительной скорости изменения энергии свободных частиц со временем, продифференцируем уравнение (153.10). В результате после некоторых выкладок получаем

$$-\frac{1}{E - E_0} \frac{d}{dt} (E - E_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) \frac{dg}{dt}. \quad (153.11)$$

Это выражение определяет относительную скорость уменьшения кинетической энергии частиц ($E - E_0$), т. е. той энергии, которая ответственна за ионизацию в случае космических лучей.

Полученная формула имеет то преимущество, что она прямо выражает изменение энергии через производную $\dot{g} = dg/dt$, которая, как мы покажем дальше, тесно связана с возникающим в данной модели красным смещением света удаленных туманностей. Из (153.11) вытекает, что относительная скорость уменьшения кинетической энергии свободных частиц в модели меняется в пределах от \dot{g} в случае медленных частиц ($E \approx E_0$) до $\dot{g}/2$ для частиц со скоростями, близкими к скорости света, для которых $E \gg E_0$. Как будет показано в § 156, в предельном случае, когда частицы имеют нулевую массу покоя и движутся со скоростями, в точности равными скорости света, их движение соответствует распространению световых квантов, или фотонов.

С помощью уравнений геодезической мы можем исследовать как формы траекторий свободных частиц, так и их скорости. Для дальнейшего достаточно рассмотреть частицу, которая первоначально двигалась точно в радиальном направлении:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (153.12)$$

Тогда из уравнений геодезической будет следовать, что

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{14}^2 \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{44}^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \Gamma_{11}^3 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{14}^3 \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{44}^3 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

а так как все шесть символов Кристоффеля согласно (98.5) равны нулю, то

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0. \quad (153.13)$$

Отсюда мы можем заключить, что свободная частица, двигавшаяся первоначально по направлению от центра или к центру, будет и дальше двигаться точно в радиальном направлении. Совершенно очевидно, что этот результат является следствием пространственной изотропности модели и что он останется в силе и при переходе к выражению для интервала (149.5), так как координаты θ и φ не затрагиваются при таком преобразовании.

§ 154. Распространение лучей света в модели

Теперь можем рассмотреть распространение света в нашей модели, пользуясь по-прежнему интервалом, записанным в виде

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (154.1)$$

Согласно принципам релятивистской механики уравнения геодезической (153.2) относятся к распространению света в той же мере, как и к движению частиц, с тем только отличием, что для световых лучей мы должны полагать $ds=0$.

Положив $ds=0$ в формуле интервала, мы можем тотчас написать общее выражение для скорости света в модели, предполагая, что свет распространяется в вакууме:

$$\frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) = 1. \quad (154.2)$$

И если вспомнить, чему равны приращения собственного времени и собственного расстояния (153.8), то нетрудно увидеть, что скорость света в вакууме в любой точке пространства, измеренная обычным образом локальным наблюдателем, расположенным неподвижно относительно вещества, оказывается равной нормальному своему значению:

$$u=c. \quad (154.3)$$

В том частном случае, когда лучи распространяются в радиальном направлении, радиальная составляющая скорости согласно (154.2) равна

$$\frac{dr}{dt} = \pm e^{-1/2g(t)} [1 + r^2/4R_0^2]. \quad (154.4)$$

При этом ясно, что все, что было сказано относительно радиального движения частиц (153.13), имеет такое же отношение и к распространению света, т. е. свет, идущий из начала координат или к началу, будет сохранять радиальное направление распространения неизменным.

Интегрируя выражение (154.4) по t от t_1 до t_2 , т. е. по тому промежутку времени, который требуется свету, чтобы пройти расстояние от начала координат до любой заданной точки, получаем

$$\int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2} = \int_{t_1}^{t_2} e^{-1/2g(t)} dt, \quad (154.5)$$

или

$$2R_0 \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{2R_0} \right) = \int_{t_1}^{t_2} e^{-1/2g(t)} dt, \quad (154.6)$$

где интеграл в правой части может быть вычислен, только если задана функция $g(t)$ или если сделаны какие-то предположения о ее свойствах.

Если предположить, что $g(t)$ зависит линейно от t :

$$g(t) = 2Ht, \quad (154.7)$$

в интересующем нас интервале времени, то правая часть (154.6) легко интегрируется и мы получаем

$$r = 2R_0 \operatorname{tg} \frac{e^{-Ht_1} - e^{-Ht_2}}{2HR_0}. \quad (154.8)$$

Эта формула определяет промежуток времени (t_1, t_2) , который требуется свету, чтобы пройти в любом направлении расстояние от $r=0$ и до $r=r$, и она справедлива, когда промежуток времени достаточно мал, т. е. когда можно пренебречь производными по времени от g выше первого порядка. Этот результат может иметь отношение и к космическим лучам, приходящим из межгалактических пространств.

В случае закрытой модели расширяющейся Вселенной соотношение (154.6) между r и t_1 и t_2 может любопытным образом ограничить величину координатного расстояния, которое свет может пройти за конечное время. Представим себе — просто для иллюстрации — модель, в которой $g(t)$ имеет в точности линейную зависимость (154.7) от t при всех временах от мигуса до плюс бесконечности, а радиус имеет действительную величину $R = R_0 e^{Ht}$, меняющуюся от нуля до бесконечности между $t = -\infty$ и $t = +\infty$. Тогда, с одной стороны, из (154.8) очевидно, что свет, испущенный в заданной точке r , может быть зарегистрирован в начале координат в заданный момент t_2 при условии, что момент испускания t_1 , который может стремиться и к минус бесконечности, выбран достаточно рано. С другой стороны, очевидно, что свет, испущенный в начале координат во время t_1 , сможет пройти расстояние не большее, чем

$$r = 2R_0 \operatorname{tg} \frac{e^{-Ht_1}}{2HR_0}, \quad (154.9)$$

причем для этого ему понадобится время $t = \infty$. Следовательно, в зависимости от величин H и R_0 существует такое критическое стартовое время, после которого свет уже не в состоянии обойти модель целиком. Таким образом, при сделанных предположениях неподвижный наблюдатель, погруженный в жидкость, заполняющую модель, в принципе может получить информацию о состоянии ранних состояниях всех частей Вселенной, но узнать их поведение позднее определенной эпохи он не сможет, даже если будет ждать бесконечно долгое время. Конечно, все сказанное относится только к специальной модели, но для расширения кругозора иногда полезно обсудить и подобного рода возможности.

§ 155. Допплер-эффект в модели

Теперь мы можем рассмотреть влияние доплер-эффекта на свет, приходящий от удаленных объектов, считая по-прежнему, что наша модель задается интервалом

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (155.1)$$

Так как нам понадобится сравнивать длины волн света от различных объектов, наблюдаемых из одного и того же места, то удобно *закрепить* наблюдателя в начале координат; тогда светящийся источник может находиться на каком угодно расстоянии r , которое при этом может меняться со временем. После этого уже нетрудно получить выражение для обобщенного доплер-эффекта, если следовать схеме, изложенной в § 116.

В соответствии с выражением для радиальной скорости света (154.4) можно записать (154.5):

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-1/2 g(t)} dt = \int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2}. \quad (155.2)$$

Это уравнение связывает «время» t_1 испускания света источником, помещенным в r , и «время» t_2 , когда свет достигает начала координат. Дифференцируя это выражение по времени испускания t_1 , получаем уравнение, связывающее интервал «времени» δt_1 между двумя вспышками света на источнике с интервалом «времени» δt_2 между этими же вспышками, принятыми наблюдателем:

$$e^{-1/2 g_2} \delta t_2 - e^{-1/2 g_1} \delta t_1 = \frac{1}{1 + r^2/4R_0^2} \left(\frac{dr}{dt} \right) \delta t_1,$$

где g_1 и g_2 обозначают $g(t)$ соответственно в моменты t_1 и t_2 , а (dr/dt) — радиальная компонента координатной скорости источника во время излучения. Если учесть выражения для собственных расстояний и времен, отвечающих рассматриваемой формуле интервала, то предыдущее уравнение можно переписать в несколько ином виде:

$$e^{-1/2 g_2} \delta t_2 = e^{-1/2 g_1} \delta t_1 + e^{-1/2 g_1} \frac{u_r}{c} \delta t_1, \quad (155.3)$$

где c — скорость света, а u_r — радиальная компонента скорости источника, величина которой определяется обычным образом в системе локального наблюдателя, неподвижного относительно r , θ и φ .

Однако из формулы интервала ds^2 следует, что промежуток собственного времени δt_1^0 между двумя вспышками, измеренный наблюдателем, движущимся вместе с источником, будет связан с координатным временем δt_1 следующим образом:

$$\delta t_1^0 = \left\{ - \frac{e^{g_1}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) + 1 \right\}^{1/2} \delta t_1,$$

откуда, опять же с учетом формулы интервала, получаем

$$\delta t_1^0 = \delta t_1 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (155.4)$$

где u есть полная скорость источника во время излучения, измеряемая обычным образом в системе локального наблюдателя, неподвижного относительно r , θ , φ . Далее, промежуток собственного времени δt_2^0 между двумя световыми вспышками, принятыми в центре наблюдателем, неподвижным относительно начала отсчета, очевидно, равен

$$\delta t_2^0 = \delta t_2. \quad (155.5)$$

Поэтому, подставляя (155.4) и (155.5) в (155.3) и приравнявая отношение собственных периодов испущенного и принятого света отношению соответствующих длин волн, мы получаем полное выражение для обобщенного доплер-эффекта:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2^0}{\delta t_1^0} = \frac{e^{1/2(g_2 - g_1)}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(1 + \frac{u_r}{c} \right), \quad (155.6)$$

где $\lambda + \delta\lambda$, очевидно, представляет собой длину волны света, непосредственно наблюдаемого в начале координат, в то время как λ является длиной волны того же самого света, но для наблюдателя, находящегося в источнике и движущегося вместе с ним.

Наиболее важным фактором в этом выражении для обобщенного доплер-эффекта является $e^{1/2(g_2 - g_1)}$. Этот множитель своим происхождением обязан общему движению частиц (туманностей) в модели, которое происходит из-за того, что $g(t)$ меняется со временем. Другим важным фактором является множитель $(1 + u_r/c)$. Этот множитель отличен от единицы, когда существует индивидуальное движение рассматриваемого источника относительно среднего движения материи в его окрестности, и зависит только от радиальной компоненты его скорости. Последний важный множитель — это $\sqrt{1 - u^2/c^2}$, который возникает из-за обычного влияния скорости на ход движущихся часов (поперечный доплер-эффект).

При изучении на моделях Вселенной красного смещения света удаленных внегалактических туманностей обычно вполне достаточно считать, что движение туманностей совпадает со средним движением материи в их окрестности, т. е. что туманности покоятся относительно r , θ , φ . При этом в приведенной формуле остается только самый важный множитель, связанный с общим расширением модели:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (155.7)$$

Отсюда относительное изменение длины волны получается равным

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2(\xi_2 - \xi_1)} - 1. \quad (155.8)$$

Этот результат можно сделать физически более наглядным, если ввести радиус модели

$$R = R_0 e^{1/2\xi}. \quad (155.9)$$

Тогда

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2 - R_1}{R_1}, \quad (155.10)$$

где R_1 — радиус в момент испускания света источником, а R_2 — в момент, когда он достигает наблюдателя. Отсюда становится ясным, что красное смещение света удаленных объектов связано в рамках модели с общим ее расширением и, следовательно, с убеганием источника от наблюдателя.

Связь красного смещения с разбеганием можно сделать более ясной, если ввести полные собственные расстояния между источником и наблюдателем в моменты времени t_1 и t_2 . Согласно выражению для интервала эти расстояния равны

$$l_1 = e^{1/2\xi_1} \int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2} \quad \text{и} \quad l_2 = e^{1/2\xi_2} \int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2}, \quad (155.11)$$

а величина их измеряется числом метровых стержней, которые укладываются между координатой r и наблюдателем. Переписав (155.7) с помощью выражений (155.11), получим

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{l_2 - l_1}{l_1}, \quad (155.12)$$

где $(l_2 - l_1)$ — приращение собственного расстояния между наблюдателем и источником, произошедшее за тот промежуток времени, который требовался свету, чтобы пройти путь от источ-

ника до наблюдателя. Так как время распространения, выраженное в релятивистских единицах, и собственное расстояние l_1 в первом приближении равны друг другу, то последнее выражение можно записать в следующем приближенном виде:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \approx 1 + \frac{\delta l}{\delta t} \approx 1 + \frac{u}{c}, \quad (155.13)$$

где u , грубо говоря, равна скорости убегания источника. Мы видим, что в согласии с приведенными выражениями в нашей модели красное смещение света, идущего от удаленных галактик, должно быть интерпретировано как обычный доплер-эффект, возникающий из-за реального разбегания. При этом следует отметить, что вследствие изотропности модели разбегание галактик происходит не от какого-либо выделенного центра (например, от нас), а представляет собой всеобщее явление, т. е. красное смещение может быть наблюдеено не только нами, но и в равной мере наблюдателями, неподвижными относительно своего окружения, в любой другой части Вселенной.

§ 156. Зависимость доплер-эффекта от расстояния

Чтобы исследовать, как меняется доплер-эффект при переходе ко все более удаленным источникам (туманностям), продифференцируем наше первоначальное выражение

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2 (g_2 - g_1)} - 1 \quad (156.1)$$

по r — координатному расстоянию до источника. При этом мы можем g_2 считать постоянным, так как g_2 представляет собой значение $g(t)$ в тот момент времени t_2 , когда свет достигает начала координат, а мы хотим сравнивать доплер-эффект от различных источников, наблюдаемых в один и тот же момент t_2 , который мы можем отмечать как «сейчас». С другой стороны, g_1 меняется с изменением r , так как чем дальше от нас находится источник, тем раньше должно произойти испускание света (t_1), чтобы свет успел к моменту t_2 достичь начала координат. Одним словом, дифференцируя (156.1), получаем

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} e^{1/2 (g_2 - g_1)} \frac{dg_1}{dt} \frac{dt}{dr}, \quad (156.2)$$

где dt равно приращению времени излучения при увеличении координатного расстояния на dr .

Однако дифференциалы dt и dr связаны друг с другом посредством скорости света, которая в свою очередь определяется

выражением интервала

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (156.3)$$

Поэтому выражение (156.2), определяющее зависимость доплер-эффекта от расстояния, можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = \frac{e^{1/2 g_1}}{1 + r^2/4R_0^2} \frac{\dot{g}_1}{2}, \quad (156.4)$$

где \dot{g}_1 — скорость изменения $g(t)$ в момент испускания света.

Для дальнейшего удобно переписать этот результат еще и в координатах \bar{r} , θ , φ , которые связаны с координатами r , θ , φ преобразованием (149.4) и приводят выражение для интервала к виду (149.5):

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (156.5)$$

Из этого выражения для интервала видно, что доплер-эффект зависит от координатного расстояния \bar{r} следующим образом:

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = \frac{e^{1/2 g_1}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}} \frac{\dot{g}_1}{2}. \quad (156.6)$$

Поскольку, как будет показано дальше, обе координаты r и \bar{r} в первом порядке пропорциональны расстояниям, принятым в астрономии, то из приведенных формул вытекает, что между красным смещением и расстоянием имеется линейная зависимость вплоть до тех расстояний, где становятся важными более высокие производные от g_1 . Более полное обсуждение зависимости доплер-эффекта от расстояния станет возможно только в IV части настоящей главы, в которой $g(t)$ будет представлена в виде ряда по степеням t .

Чтобы закончить несколько затянувшееся рассмотрение доплер-эффекта в расширяющихся или сжимающихся моделях, покажем с расчетом на будущее, что длина волны или частота отдельного светового кванта, или фотона, измеряемая наблюдателями, выстроенными вдоль его пути, будет меняться со временем определенным образом при условии, что эти наблюдатели покоятся относительно r , θ , φ . Для этого обратимся к нашей точной формуле (155.6) для длины волны $(\lambda + \delta\lambda)$ света, испущенного в момент t_1 источником при произвольном его положении и скорости. Этот свет достигает наблюдателя, покоящегося

относительно выбранных координат, в момент t_2 . Если мы расставим несколько таких наблюдателей вдоль траектории фотона, то очевидно, что единственной величиной, меняющейся в этой формуле от наблюдателя к наблюдателю, будет g_2 , которая представляет собой $g(t)$ в моменты наблюдений.

Возьмем логарифмическую производную от (155.6) по времени, тогда для различных наблюдателей будем иметь

$$\frac{d \ln (\lambda + \delta \lambda)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dg_2}{dt} \quad (156.7)$$

или, переходя к частотам, запишем это выражение в более удобном виде:

$$-\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt}, \quad (156.8)$$

где ν — частота любого фотона, измеренная наблюдателем, покоящимся относительно системы координат r, θ, φ , а g есть значение функции $g(t)$, характеризующей модель как целое в интересующий нас момент времени.

§ 157. Временная эволюция закрытых моделей

Вывод выражения для нестатического интервала

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2$$

для однородных космологических моделей не накладывал непосредственно никаких ограничений на поведение этих моделей в зависимости от времени. Поэтому, чтобы определить характер эволюции, мы должны обсудить вид не конкретизировавшейся до сих пор функции $g(t)$. К этому мы теперь и приступим с нескольких сторон.

Согласно уравнениям (150.7) и (150.8) давление и плотность жидкости, заполняющей по нашему предположению модель, явно зависят от $g(t)$ и ее производных. Следовательно, можно считать, что временное поведение модели определяется свойствами этой жидкости. В этом параграфе, посвященном закрытым моделям Вселенной с вещественным R_0 , и в следующем параграфе, посвященном открытым моделям с R_0 бесконечным или мнимым, мы обсудим с общих позиций различные типы временного поведения, когда на свойства жидкости накладываются только самые общие ограничения, такие, как требование неотрицательности давления и плотности. В следующих параграфах этой части настоящей главы мы обсудим эволюцию Вселенной при более определенных предположениях относительно природы модели и

жидкости, заполняющей ее. В III части настоящей главы мы вернемся к термодинамическим аспектам тех изменений, которые могут иметь место в космологических моделях в зависимости от времени, и, наконец, в IV части, при сравнении с наблюдениями, мы будем иметь возможность подойти к эволюции более феноменологически, разлагая $g(t)$ в ряд по степеням t с коэффициентами, определяемыми по мере возможности из данных наблюдений по красному смещению, давлению и плотности реальной Вселенной.

а) **Общие черты эволюции (R вещественно, $\rho_{00} \geq 0$, $p_0 \geq 0$)*.** Для начала предположим, что модель закрыта и радиус R_3 действителен. Далее, предположим, что в веществе, заполняющем модель, нет сил, препятствующих растяжению, так что плотность ρ_{00} и давление p_0 из физических соображений могут быть только нулем или больше нуля.

В качестве уравнений, связывающих плотность и давление этого вещества с $g(t)$, удобно взять (151.6) и (150.8):

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} e^{3/2 g(t)}) + p_0 \frac{d}{dt} (e^{3/2 g(t)}) = 0, \quad (157.1)$$

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R_0^2} e^{-g(t)} + \frac{3}{4} \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 - \Lambda.$$

Эти уравнения эквивалентны ранее полученным уравнениям (150.7) и (150.8). Их можно упростить, если ввести радиус модели

$$R = R_0 e^{1/2 g(t)}. \quad (157.2)$$

При этом первое из уравнений — уравнение для энергии — принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} R^3) + p_0 \frac{d}{dt} (R^3) = 0, \quad (157.3)$$

откуда

$$\frac{d(\rho_{00} R^3)}{dR} = -3\rho_0 R^2 \quad (157.4)$$

и

$$\frac{d\rho_{00}}{dR} = -\frac{3(\rho_0 + \rho_{00})}{R}. \quad (157.5)$$

Таким образом, из предположений, сделанных относительно R , ρ_{00} и p_0 , следует, что величины $(\rho_{00} R^3)$ и ρ_{00} с увеличением

*) Содержание этого раздела следует работе [95].

R могут только уменьшаться или оставаться постоянными. Более того, из (157.5) видно, что при стремлении радиуса к бесконечности плотность жидкости стремится к нулю, и, следовательно, все бесконечно расширяющиеся модели в конце концов переобладают в модель де Ситтера.

Подставляя (157.2) во второе уравнение (157.1), получаем

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_{00}R^2}{3} + \frac{\Lambda R^2}{3} - 1.$$

Отсюда легко определить скорость изменения радиуса модели со временем:

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{8\pi\rho_{00}R^2}{3} + \frac{\Lambda R^2}{3} - 1}. \quad (157.6)$$

Так как величина, стоящая под корнем, должна быть обязательно положительной или нулем, то при любом заданном значении космологической постоянной Λ должно выполняться неравенство

$$\frac{3}{R^2} - 8\pi\rho_{00} \leq \Lambda, \quad (157.7)$$

которое естественным образом ограничивает величину радиуса, если поведение модели должно быть действительным. При этом равенство

$$\frac{3}{R^2} - 8\pi\rho_{00} = \Lambda \quad (157.8)$$

указывает, при каком значении радиус R прекращает свое изменение во времени или начинает изменяться в обратном направлении.

б) **Зависимость критической функции от R .** Чтобы исследовать поведение критической величины

$$Q = \left(\frac{3}{R^2} - 8\pi\rho_{00}\right) = \frac{1}{R^2} \left(3 - \frac{8\pi\rho_{00}R^3}{R}\right) \quad (157.9)$$

как функции радиуса R по мере того, как R в условиях заданной модели меняется во времени, было бы желательно хотя бы приблизительно построить график зависимости $Q(R)$ от R .

Дифференцируя Q по R и приравнявая производную нулю, получаем

$$\frac{dQ}{dR} = -\frac{6}{R^3} - 8\pi \frac{d\rho_{00}}{dR} = 0,$$

или, используя (157.5),

$$\frac{dQ}{dR} = -\frac{6}{R^3} + \frac{24\pi(\rho_{00} + p_0)}{R} = 0. \quad (157.10)$$

Уравнение (157.10) выражает необходимое условие максимума, минимума или точки перегиба функции. Объединяя (157.10) с (157.9), получаем значение функции $Q(R)$ в этих точках:

$$Q = \frac{1}{R^2} + 8\pi p_0 \quad (> 0). \quad (157.11)$$

Дифференцируя второй раз, находим

$$\frac{d^2Q}{dR^2} = \frac{18}{R^4} - \frac{24\pi(\rho_{00} + p_0)}{R^2} + \frac{24\pi}{R} \frac{d\rho_{00}}{dR} + \frac{24\pi}{R} \frac{dp_0}{dR} \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$$

или, используя (157.10) и (157.5),

$$\frac{dp_0}{dR} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \frac{\rho_{00} + p_0}{R}, \quad (157.12)$$

откуда в зависимости от знака ($<$), ($=$), ($>$) имеем достаточное условие того, что данная точка является соответственно максимумом, точкой перегиба или минимумом функции $Q(R)$. Причем из (157.12) видно, что рассматриваемая кривая могла бы

иметь точки перегиба или минимума только в том случае, если бы давление могло возрастать при расширении.

Опираясь на полученные результаты, можно теперь прикинуть ход кривой $Q(R)$ в зависимости от R , как показано на рис. 6, по мере того как R возрастает со временем.

Те участки кривой, относительно которых мы имеем достаточно полную информацию, изображены сплошной линией. Это — участки A , B и C . Они могут быть интерпретированы следующим образом. (А) Согласно

но (157.4) величина $\rho_{00}R^3$ с ростом R может только убывать или оставаться постоянной. Поэтому, исключая неинтересный для нас в настоящий момент случай абсолютно пустой модели, из (157.9) получаем, что Q возрастает асимптотически от $-\infty$ при $R=0$ до пересечения с осью $Q=0$ и затем продолжает возрастать по мере увеличения R . При этом никаких точек пере-

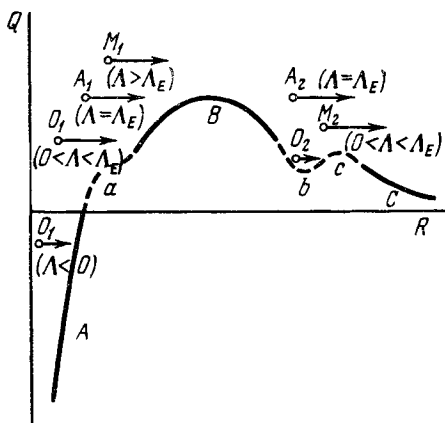


Рис. 6.

гиба или максимумов до пересечения с осью $Q=0$ быть не может, так как согласно (157.11) такие точки могут быть только при положительных значениях Q . (B) Если R продолжает возрастать, то кривая $Q(R)$ в конце концов должна достичь хотя бы одного максимума, так как из (157.9) следует, что рано или поздно $Q(R)$ будет убывать с возрастанием R . (C) Наконец, при стремлении R к бесконечности кривая $Q(R)$ согласно (157.9) асимптотически приближается к нулю, как $3/R^2$.

Те участки кривой a , b , c , относительно которых мы не можем сказать ничего определенного, показаны на чертеже штриховыми линиями. Эти участки могут содержать как точки перегиба, например, на участке a , так и точки минимума с последующими точками максимума, как изображено на участках b и c . Из (157.11) следует, что все подобные особенности могут находиться только в пределах между $Q=0$ и $Q=Q_{\text{макс}}$, где $Q_{\text{макс}}$ — наибольший из всех максимумов на кривой, расположенный на участке B на рис. 6. Более того, из (157.12) вытекает, что все такие точки могут существовать только в том случае, если допустить, что давление вещества на некоторых участках кривой может во время процесса расширения возрастать.

Пользуясь построенной кривой, можно сделать некоторые предсказания относительно развития модели во времени, когда космологическая постоянная Λ принимает разные значения. Так как Λ не меняется при расширении и имеет ту же размерность, что и Q , то ее можно представить горизонтальными линиями, как показано на рис. 6. При этом согласно (157.7) критическая величина

$$Q = \left(\frac{3}{R_0^2} - 8\pi\rho_{00} \right)$$

должна быть меньше, чем Λ во время расширения, если же она становится равной Λ , то развитие модели либо изменяет свое направление, либо прекращается вовсе. Поэтому различные виды движения, к обсуждению которых мы сейчас и переходим, будут соответствовать горизонтальным прямым $\Lambda = \text{const}$, лежащим выше критической кривой $Q(R)$, а характер движения будет определяться точками, где горизонтали пересекают критическую кривую.

в) $\Lambda > \Lambda_E$. **Монотонные Вселенные типа M_1 .** Наибольший максимум критической кривой Q приходится на участок B . Обозначим этот максимум Λ_E , поскольку в дальнейшем будет видно, что эту величину можно трактовать как значение Λ в некоторой статической эйнштейновской Вселенной.

При Λ , большем Λ_E , развитие Вселенной во времени определяется однозначно, так как при этом прямая $\Lambda = \text{const}$ с критической кривой не пересекается, и модель может только

расширяться, начиная от некоторого сингулярного состояния с радиусом $R_s \geq 0$, переходя при $R \rightarrow \infty$ в пустую Вселенную де Ситтера. Что же касается ее эволюции до сингулярного состояния, то в те времена модель сжималась в направлении от больших радиусов к R , равному R_s . Однако наших уравнений недостаточно, чтобы описать механизм перехода через сингулярное состояние, поскольку в той точке, где оно возникает (в нуле или в его окрестностях), идеализации, принятые при определенных модели, становятся несправедливыми.

Можно только сказать, что скорость, с которой модель выходит из сингулярного состояния, равна бесконечности. Это видно из выражения (157.6) для скорости расширения, если учесть условие (157.4), накладываемое на величину $(\rho_{00}R^3)$. Интегрируя выражение (157.6), находим, что любое конечное значение R может быть достигнуто за конечное время, однако для увеличения радиуса от конечного значения до бесконечности требуется бесконечное время.

Такую модель, которая расширяется от сингулярного состояния в прошлом до бесконечности в будущем без обращения своего движения, мы будем называть монотонной Вселенной первого рода (типа M_1). Для описания реальной Вселенной она плоха тем, что проводит только бесконечно малую часть своего полного времени жизни в состоянии, заметно отличающемся от абсолютно пустой деситтеровской Вселенной. Поэтому, если мы захотим принять, что наблюдаемая нами часть реальной Вселенной хорошо передает строение Вселенной в любом другом месте в какой угодно момент времени, то нам придется отказать от этой модели и исключить ее из нашего рассмотрения.

г) $\Lambda > \Lambda_E$. **Асимптотические Вселенные типа A_1 и A_2 .** Обратимся теперь к случаю, когда космологическая постоянная в точности равна максимальному значению Q (участок B на рис. 6). Этот максимум мы уже обозначили как Λ_E . Из (157.11) следует:

$$8\pi p_E = \Lambda_E - \frac{1}{R_E^2}, \quad (157.13)$$

где p_E и R_E — давление и радиус в точке максимума. Если мы рассмотрим статическую Вселенную ($dR/dt=0$) с этими значениями давления и радиуса, то согласно (157.8) должно быть также

$$8\pi p_E = \frac{3}{R_E^2} - \Lambda_E. \quad (157.14)$$

Однако, как видно из выражений (139.3), (139.4), это есть соотношение между давлением и плотностью в статической Вселенной Эйнштейна с радиусом R_E и космологической постоянной Λ_E . Отсюда следует, что статическая Вселенная Эйнштейна мо-

жет существовать при тех условиях, которые отвечают максимуму на кривой $Q(\dot{R})$. Однако, как мы увидим в дальнейшем, она при этом не может быть устойчивой.

Для нестатической модели $\Lambda = \Lambda_E$ возможны два типа поведения.

Во-первых, если модель находится первоначально в сингулярном состоянии с радиусом $R_s < R_E$, то она может расширяться, асимптотически переходя в эйнштейновскую Вселенную с радиусом $R = R_E$ и с dR/dt и d^2R/dt^2 , равными нулю, как это следует из (157.13), (157.14) и (150.7), (150.8). Что же касается ее предыдущей истории, во времена, предшествовавшие сингулярному состоянию, то в те времена она должна была бы сжиматься от больших радиусов к радиусу $R = R_s$. Такую модель, которая расширяется от сингулярного состояния и переходит в статическую эйнштейновскую Вселенную, мы будем называть асимптотической Вселенной первого рода, типа A_1 .

Второй тип эволюции при $\Lambda = \Lambda_E$ относится к тем моделям, которые монотонно расширяются, асимптотически перерождаясь из статической эйнштейновской Вселенной с радиусом $R = R_E$ в бесконечно далеком прошлом в пустую Вселенную де Ситтера в бесконечно далеком будущем. Модель такого вида мы будем называть асимптотической Вселенной второго рода, типа A_2 .

Для описания реальной Вселенной недостаток обеих рассмотренных моделей тот же, что и у модели типа M_1 , ибо они проводят только ничтожную часть времени своего существования в условиях, сходных с теми, которые имеются в реальной Вселенной. Однако модели типа A_2 обладают тем преимуществом, что они начинают расширяться не из сингулярного состояния, а из состояния с конечным объемом и в бесконечно далекий момент в прошлом. К этому вопросу мы еще вернемся в § 159 при обсуждении устойчивости статической Вселенной Эйнштейна, и в § 161, который специально посвящен рассмотренным моделям.

д) $0 < \Lambda < \Lambda_E$. **Монотонные Вселенные типа M_2 и осциллирующие Вселенные типов Q_1 и Q_2 .** Теперь мы обратимся к случаю, когда Λ лежит между нулем и Λ_E . Здесь возможны два типа движения. Кроме того, возможны и еще несколько вариантов, если кривая имеет более одного максимума, как показано на рис. 6 на участках b и c .

К первому типу относятся те модели, минимальный радиус которых R_1 превышает максимальное значение R_E , при котором происходит изменение направления движения от сжатия к расширению. Эти модели, имеющие минимальный радиус, расширяются без обращения своего движения до бесконечности, переходя в пустую деситтеровскую Вселенную. Модель подобного вида мы будем называть монотонной Вселенной второго рода, типа M_2 . Для описания реальной Вселенной она тоже плоха тем, что

почти все свое время проводит в условиях, не похожих на те, какие мы наблюдаем на самом деле.

Модели другого типа расширяются, будучи первоначально в сингулярном состоянии при $R_s < R_E$, и меняют направление своего движения после того, как их радиус достигнет максимального значения, определяемого критической кривой. После этого начинается сжатие, которое продолжается до тех пор, пока снова не начнется расширение из сингулярного состояния, которое из физических соображений не может находиться при радиусах, меньших чем $R=0$. Мы будем называть такие модели осциллирующими моделями первого рода, типа O_1 . Для описания реальной Вселенной они хороши тем, что проводят всю свою жизнь в условиях конечной плотности материи, если только не происходят необратимые процессы, которые могут изменить величину максимального радиуса (§ 175). Но эти модели имеют также и недостаток, так как обладают сингулярным состоянием на нижнем пределе сжатия, переход через которое нельзя описать в рамках имеющихся уравнений.

Если допустить существование еще одного максимума на кривой $Q(R)$ более низкого, нежели самый высокий максимум в точке R_E , с минимумом между ними, как показано на участках b и c на рис. 6, то откроется возможность для существования еще одного любопытного типа эволюции. Этот тип эволюции может иметь место, когда Λ лежит между минимумом и дополнительным максимумом кривой Q . При этом оказывается, что радиус модели может колебаться между минимальным и максимальным значениями, пересекаемыми на кривой $Q(R)$. При отсутствии необратимых процессов движение может быть строго периодическим и без всяких сингулярных состояний. Модель такого вида мы назовем осциллирующей Вселенной второго рода, типа O_2 . На первый взгляд, в качестве основы для реальной космологии она обладает огромными достоинствами, но, как показано в связи со (157.12), минимум на критической кривой мог бы существовать только в том случае, если бы при расширении модели давление материи в ней могло возрасти. Позднее мы еще вернемся к этому вопросу в § 172 и должны будем заключить, что подобные модели не имеют практического значения.

Если бы на кривой существовал второй максимум, то были бы возможны еще асимптотические Вселенные типа A_1 и A_2 для Λ , лежащего в интервале $0 < \Lambda < \Lambda_E$, но они были бы подобны тем, которые уже рассмотрены выше, в § 157, г.

е) $\Lambda \leq 0$. **Осциллирующие Вселенные типа O_1 .** Наконец, следует еще рассмотреть, как будут развиваться во времени закрытые однородные модели с вещественным радиусом R , если космологическая постоянная $\Lambda \leq 0$. В этом случае, как сразу следует из рис. 6, возможны только осциллирующие Вселенные типа O_1 ,

колеблющиеся между сингулярным состоянием, которое достигается на нижнем пределе радиуса, и состоянием с максимальным значением радиуса, отсекаемым на критической кривой. Достоинства и недостатки этих моделей были уже рассмотрены выше при обсуждении Вселенных типа O_1 .

В заключение следует особо отметить, что при $\Lambda=0$ описать замкнутую однородную Вселенную можно одним единственным образом — с помощью модели типа O_1 . Это очень важно, так как в настоящее время, очевидно, наиболее разумно полагать $\Lambda=0$. Причины для этого состоят в следующем. Во-первых, рассмотренные в § 139 рассуждения Эйнштейна о необходимости введения логически непротиворечивого, но вместе с тем неожиданного, космологического члена в исходные уравнения поля утрачивают теперь свою силу ввиду того, что в нестатических моделях материи можно приписывать конечную плотность, отличную от нуля, не прибегая при этом к Λ -члену. Во-вторых, в настоящее время не существует никакой теории, с помощью которой можно было бы хоть как-нибудь вычислить величину космологической постоянной. На этот счет есть только некоторые соображения, высказанные Эддингтоном [100]. И, наконец, в третьих, из наблюдений следует, что величина Λ должна быть достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь при релятивистском расчете планетарных орбит. Поэтому в дальнейшем мы будем уделять наибольшее внимание тем моделям, которые космологического члена не содержат.

§ 158. Зависимость эволюции от времени для открытых моделей

Чтобы сделать наше исследование более полным, рассмотрим также развитие во времени открытых моделей, т. е. моделей с мнимым или бесконечным радиусом R_0 . Здесь разнообразие типов не столь велико.

Как и прежде, исследование можно начать, отправляясь от исходных уравнений (151.6) и (150.8), определяющих зависимость плотности и давления от времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_{00} e^{3/2 g(t)} \right) + p_0 \frac{d}{dt} \left(e^{3/2 g(t)} \right) = 0 \quad (158.1)$$

и

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R_0^2} e^{-g(t)} + \frac{3}{4} \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 - \Lambda. \quad (158.2)$$

Однако так как теперь радиус $R = R_0 e^{1/2 g(t)}$ является либо

бесконечной, либо мнимой величиной, не имеющей непосредственного физического смысла, то не имеет никакого смысла вводить его в рассмотрение.

Имея в виду дальнейшее, перепишем первое из уравнений следующим образом:

$$\frac{d(\rho_{00} e^{1/2 g})}{dg} = -\frac{3}{2} \rho_0 e^{1/2 g} \quad (158.3)$$

и

$$\frac{d\rho_{00}}{dg} = -\frac{3}{2} (\rho_{00} + \rho_0), \quad (158.4)$$

откуда видно, что если мы предполагаем, что в веществе внутри модели нет сил, противодействующих растяжению, то $\rho_{00} e^{1/2 g}$ и ρ_{00} могут только либо убывать, либо оставаться неизменными при возрастании g .

Второе уравнение, (158.2), можно записать в виде

$$\left(\frac{de^{1/2 g}}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi\rho_{00}}{3} e^g + \frac{\Lambda}{3} e^g - \frac{1}{R_0^2},$$

откуда с учетом того, что, согласно предположению, модель является открытой, т. е. R_0 либо равен бесконечности, либо мнимой величине, получаем

$$\frac{de^{1/2 g}}{dt} = \pm \sqrt{\frac{8\pi\rho_{00}e^g}{3} + \frac{\Lambda e^g}{3} + A^2}, \quad (158.5)$$

где A — действительная величина, равная нулю при R_0 , равном бесконечности.

Поскольку выражение под знаком радикала не может быть отрицательным согласно условию, что процессы в модели должны носить действительный характер, то на величину g возникает естественное ограничение:

$$-3A^2 e^{-g} - 8\pi\rho_{00} \leq \Lambda. \quad (158.6)$$

Причем равенство

$$-3A^2 e^{-g} - 8\pi\rho_{00} = 0 \quad (158.7)$$

определяет ту точку, в которой g перестает меняться со временем или начинает меняться в противоположном направлении.

Так же, как и раньше, можно построить график критической величины

$$Q = -3A^2 e^{-g} - 8\pi\rho_{00} = -\frac{1}{e^g} \left[3A^2 + \frac{8\pi\rho_{00} e^{1/2 g}}{e^{1/2 g}} \right] \quad (158.8)$$

в зависимости от $e^{1/2g}$, как показано на рис. 7. Согласно (158.8) Q всегда отрицательно и асимптотически приближается к значению $Q = -\infty$ по мере того, как $e^{1/2g}$ стремится к нулю (это следует из (158.3)). По мере же того, как $e^{1/2g}$ стремится к ∞ , величина Q асимптотически приближается к нулю. Причем во всей области изменения на кривой Q нет ни максимумов, ни минимумов, ни точек перегиба.

С помощью графика критической кривой легко показать, что возможны только два типа поведения. Первый тип может иметь место при $\Lambda \geq 0$. В этом случае модель монотонно расширяется с ростом $e^{1/2g}$ от сингулярного состояния до бесконечности, представляя таким образом Вселенную, обозначенную нами ранее как M_1 . Такая Вселенная в конце концов вырождается в пустое деситтеровское пространство или, если $\Lambda = 0$, в плоское евклидово пространство. Поведение другого типа возникает, когда $\Lambda < 0$.

В этом случае модель осциллирует между сингулярным состоянием и состоянием с максимальным значением $e^{1/2g}$, т. е. представляет собой Вселенную, обозначенную нами ранее O_1 .

Изучение закрытых моделей проще всего было исследовать, изучая поведение радиуса Вселенной

$$R = R_0 e^{1/2g(t)}$$

Поведение же открытых моделей лучше всего описывать в терминах самого $e^{1/2g(t)}$, так как R_0 в этом случае либо бесконечен, либо мнимый.

Однако следует отметить, что собственный объем любого заданного элемента жидкости в однородной модели, т. е. объем, измеряемый локальным наблюдателем, в обоих случаях пропорционален $e^{3/2g(t)}$. Поэтому изменение всех вышеприведенных величин со временем можно исследовать, изучая расширение и сжатия жидкости, заполняющей модель, и не заботиться о том, является ли данная модель закрытой и с конечным собственным объемом или открытой и с бесконечным собственным объемом.

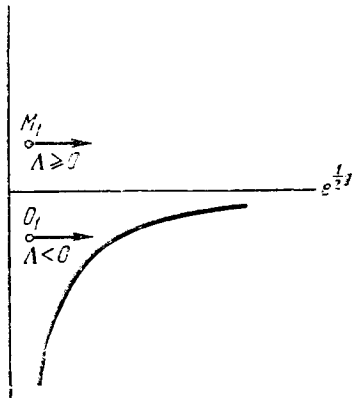


Рис. 7.

§ 159. Неустойчивость статической Вселенной Эйнштейна

Теперь мы обратимся к некоторым специальным чертам поведения однородных космологических моделей во времени. Прежде всего, вооружившись теми знаниями, которые мы приобрели к настоящему моменту относительно эволюции нестатических моделей, интересно исследовать устойчивость статической модели Эйнштейна.

Сначала посмотрим на проблему устойчивости Вселенной Эйнштейна с точки зрения графика критической величины $Q(R)$, представленного на рис. 6. Исследование критической кривой, проведенное выше, показывает, что условия для существования эйнштейновской Вселенной выполняются при тех радиусах, которые соответствуют максимуму, минимуму или точке перегиба критической кривой, при этом величина Λ должна быть равна соответствующему значению $Q(R)$. Это непосредственно следует из уравнения (157.11), определяющего $Q(R)$ в стационарной точке, и из условия постоянства радиуса (157.8), из которого получаются исходные уравнения для давления и плотности в статической Вселенной Эйнштейна

$$8\pi\rho_0 = -\frac{1}{R^2} + \Lambda$$

и

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R^2} - \Lambda.$$

Согласно рис. 6, статическая Вселенная Эйнштейна, соответствующая максимуму на критической кривой, будет нестабильна, так как если модель случайно начнет расширяться или сжиматься, то ее радиус и дальше будет изменяться в том же направлении. Вселенная Эйнштейна, относящаяся к точке перегиба, тоже будет неустойчива, ибо здесь тоже есть направление, в котором радиус может меняться, не пересекая критическую кривую.

С другой стороны, статическая Вселенная Эйнштейна, отвечающая минимуму на критической кривой, будет, очевидно, устойчивой, т. е. ее радиус не может измениться без того, чтобы не пересечь критическую кривую. Однако эта возможность не реальна, так как, согласно (157.12), давление жидкости в такой модели должно при расширении возрастать. Из физических же соображений ясно, что нельзя найти ни одной реальной жидкости, обладающей таким свойством в состоянии равновесия. Поэтому мы можем вообще сделать вывод, что статическая Вселенная Эйнштейна может находиться только в состоянии неустойчивого равновесия относительно изменения радиуса и если она, по каким-либо причинам, начнет однажды сжиматься или

расширяться, то она будет развиваться в том же направлении и дальше.

Теперь мы можем задать себе вопрос: какие изменения в статической эйнштейновской Вселенной могут привести к тому, что она вдруг из состояния покоя начнет сжиматься или расширяться? В том случае, когда давление жидкости, заполняющей модель, уменьшается при расширении и увеличивается при сжатии, на этот вопрос легко дать ответ, опираясь на общую формулу для давления в однородной нестатической модели:

$$8\pi p_0 = -\frac{e^{-g}}{R_0^2} - \ddot{g} - \frac{3}{4}\dot{g}^2 + \Lambda. \quad (159.1)$$

Предположим, что в начальный момент модель находится в статическом эйнштейновском состоянии, тогда выражение (159.1) в этот момент должно свестись к обычному выражению для давления в эйнштейновской Вселенной:

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g} + \Lambda; \quad (159.2)$$

при этом

$$\ddot{g} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{g} = 0, \quad (159.3)$$

а $R_0 e^{1/2g}$ равняется радиусу статической эйнштейновской Вселенной. Поэтому, если в этой не расширяющейся и не сжимающейся в данный момент модели предположить наличие каких-нибудь процессов, которые приводят к изменению давления со временем, то, согласно (159.1) и (159.3), это изменение давления будет в свою очередь воздействовать на изменение $g(t)$, так как

$$-8\pi \frac{dp_0}{dt} = \frac{d^3g}{dt^3}. \quad (159.4)$$

Отсюда легко видеть, что если под действием какой-нибудь причины давление в модели упадет, то это тотчас же приведет к расширению, которое будет прогрессировать, так как, согласно предположению, расширение в свою очередь вызовет дальнейшее падение давления. И наоборот, увеличение давления приведет к прогрессирующему сжатию.

Следовательно, если в какой-то момент Вселенная была бы эйнштейновского типа и свободное излучение в ней стало бы переходить в вещество или свободно движущиеся частицы стали бы конденсироваться, то Вселенная тотчас же начала бы расширяться*). И наоборот, если бы вещество стало переходить в излучение, модель тотчас же начала бы сокращаться. Таким

*) Эти процессы были подробно исследованы Лемэтром [69].

образом, мы можем утверждать не только то, что равновесие статической эйнштейновской Вселенной неустойчиво, но что легко мыслимы те процессы, которые могут послужить толчком к прогрессирующему изменению радиуса модели в сторону от равновесного значения.

§ 160. Модели с постоянным количеством вещества

Теперь мы можем подробнее исследовать временное развитие некоторых конкретных моделей, которые выбраны специально для иллюстрации различных типов эволюции.

Рассмотрим сначала закрытые модели, содержащие смесь из постоянного количества несвязанного вещества (туманности, пыль), создающего ничтожное давление, и излучения, чье давление определяется плотностью. Для таких моделей общее выражение для радиуса в зависимости от времени было получено впервые Лемэтром [96].

Так как давление излучения составляет одну треть от плотности его энергии, то энергетическое уравнение (157.3) для этих моделей можно, очевидно, записать в виде

$$\frac{d}{dt}[(\rho_m + 3\rho_0)R^3] + \rho_0 \frac{d}{dt}(R^3) = 0, \quad (160.1)$$

где ρ_m — плотность вещества. Однако поскольку вещество должно само по себе сохраняться, то

$$\rho_m R^3 = \text{const} \quad \text{и} \quad \rho_0 R^4 = \text{const},$$

откуда, пользуясь обозначениями Лемэтра, получаем

$$8\pi\rho_m = \frac{\alpha}{R^3}, \quad 8\pi\rho_0 = \frac{\beta}{R^4}, \quad 8\pi\rho_{00} = 8\pi(\rho_m + 3\rho_0) = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4}, \quad (160.2)$$

где α и β — константы.

Подставляя эти выражения в общее уравнение (157.6), находим

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\Lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}. \quad (160.3)$$

Это уравнение в явном виде определяет зависимость радиуса от времени для тех моделей, в которых вещество сохраняется и создает пренебрежимо малое давление. Частный случай, когда $\beta=0$, был впервые исследован Фридманом. В этом случае равно нулю полное давление и сохраняется не только вещество, но и полная энергия.

Решение вышеприведенного уравнения было специально рассмотрено де Ситтером [101]. Несколько более общее уравнение, учитывающее давление вещества и приспособленное как к открытым, так и к закрытым моделям, было изучено Экманом [102]

§ 161. Модели, расширяющиеся из статического начального состояния

В том случае, когда расширяющаяся модель в начальном состоянии совпадает со статической Вселенной Эйнштейна, предыдущее уравнение, выражающее зависимость радиуса от времени, легко интегрируется.

Сопоставляя выражения для давления и плотности (160.2) с выражениями (139.3), (139.4) для давления и плотности в статической Вселенной Эйнштейна, находим, что в моделях подобного рода

$$8\pi p_E = \frac{\beta}{R_E^4} = -\frac{1}{R_E^2} + \Lambda \quad (161.1)$$

и

$$8\pi \rho_E = \frac{\alpha}{R_E^3} + \frac{3\beta}{R_E^4} = \frac{3}{R_E^2} - \Lambda, \quad (161.2)$$

где R_E — радиус начального статического состояния. Подставляя эти выражения в (160.3), после довольно длинных выкладок получаем простое уравнение:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R - R_E}{\sqrt{3} R_E R} \sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{R_E^2}\right) (R^2 + 2R_E R) + 3\beta}, \quad (161.3)$$

где осталось только два параметра: R_E и β .

Чтобы сделать это выражение удобным для интегрирования, выразим R в терминах относительного приращения к первоначальному значению R_E , т. е. обозначим

$$R = R_E (1 + x), \quad x = \frac{R - R_E}{R_E}. \quad (161.4)$$

Теперь (161.3) может быть переписано следующим образом:

$$\int dt = \frac{\sqrt{3} R_E}{\sqrt{1 + \beta/R_E^2}} \int \frac{(x+1) dx}{x \sqrt{X}}, \quad (161.5)$$

где ради краткости обозначено

$$\sqrt{X} = \sqrt{x^2 + 4x + C^2} \quad (161.6)$$

и

$$C^2 = 3 \left(1 + \frac{\beta/R_E^2}{1 + \beta/R_E^2} \right). \quad (161.7)$$

Интегрируя (161.5), получаем

$$t = \frac{\sqrt{3} R_E}{\sqrt{1 + \beta R_E^2}} \left[\ln(x + \sqrt{X} + 2) + \frac{1}{C} \ln \frac{x + \sqrt{X} - C}{x + \sqrt{X} + C} \right] + \text{const}, \quad (161.8)$$

откуда определяется x , а значит и $R = R_0 e^{1/2g(t)}$, как функция времени.

Так как второй член в этом выражении стремится к минус бесконечности, когда x стремится к нулю, а первый член стремится к плюс бесконечности, когда x стремится к бесконечности, отсюда видно, что модель должна монотонно расширяться, переходя из статической эйнштейновской Вселенной с $R = R_E$ при $t = -\infty$ в пустую Вселенную де Ситтера при $t = \infty$, приближаясь к обоим этим состояниям асимптотически.

Влияние давления излучения на расширение определяется во всех вышеприведенных выражениях фактором β/R_E^2 . Легко видеть, однако, что это влияние должно быть заведомо мало, так как согласно (161.1) и (161.2) можно записать, что

$$\frac{\beta}{R_E^2} = \frac{2\rho_E}{\rho_E + p_E}, \quad (161.9)$$

где ρ_E и p_E — давление и плотность начального статического эйнштейновского состояния. Отсюда видно, что β/R_E^2 во всяком случае может принимать только значения между нулем (если модель содержит вещество без излучения) и $\frac{1}{2}$ (если модель содержит только излучение). Учитывая теперь то, каким образом эта величина входит в вышеприведенное выражение, мы можем утверждать, что процесс расширения первоначально определяется только радиусом R_E исходного статического состояния.

Этот факт специально исследован де Ситтером [101], который рассмотрел поведение во времени двух моделей, для которых

$$\beta = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{R_E^2} = \frac{1}{2}, \quad (161.10)$$

т. е. когда нет или излучения, или вещества, соответственно.

Для первого случая уравнение (161.8) приводится к виду

$$t = \sqrt{3} R_E \left[\ln(x + \sqrt{X} + 2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{x + \sqrt{X} - \sqrt{3}}{x + \sqrt{X} + \sqrt{3}} \right] + \text{const}, \quad (161.11)$$

а для второго — к гораздо более простому выражению:

$$t = \frac{R_E}{\sqrt{2}} \ln 4 (x^2 + 2x) + \text{const} = \frac{R_E}{\sqrt{2}} \ln (R^2 - R_E^2) + \text{const}. \quad (161.12)$$

Однако при одинаковых значениях R_E оба выражения дают очень похожие картины расширения, как видно из кривых *I* и *VII* на рис. 8, взятом из статьи де Ситтера. Отсюда ясно, что модель с нулевым давлением, которую Лемэтр рассматривал в 1927 г. с целью определить ее пригодность для описания реальной Вселенной, является хорошим представителем всего класса подобных моделей.

Иногда расширяющиеся Вселенные, которые в начальном состоянии совпадают со статической эйнштейновской Вселенной,

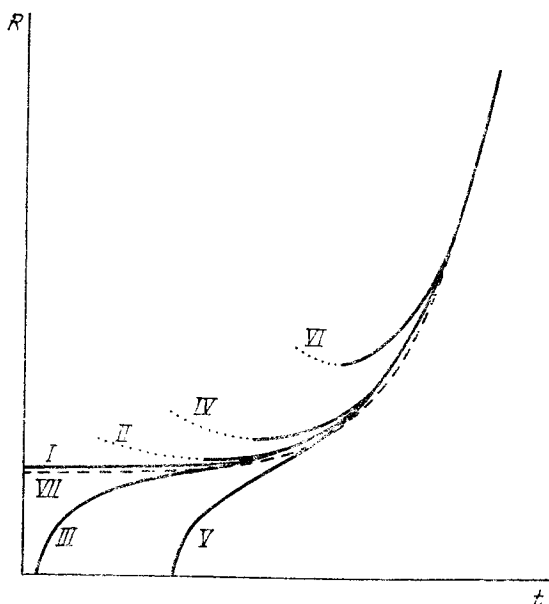


Рис. 8.

привлекали внимание космологов тем, что уравнения в этом случае не приводят к сингулярным состояниям, и тем, что у этих моделей есть бесконечный запас времени для прошлых космологических процессов. Однако после работ Эддингтона [94] и других [103, 69] стало ясно, что логарифмически бесконечный запас для прошедшего времени в подобных моделях не имеет практического значения из-за неустойчивости статической эйнштейновской Вселенной, о чем мы уже говорили в § 159.

§ 162. Монотонно расширяющиеся модели с нестатическим начальным состоянием

Для моделей, которые расширяются не от статического начального состояния, в общем случае нельзя получить простое функциональное соотношение между радиусом и временем, подобное уравнению (160.3), справедливому, когда количество вещества сохраняется. Однако можно провести численные расчеты. На рис. 8 представлены кривые зависимости радиуса от времени для некоторых моделей подобного рода, рассчитанные де Ситтером.

Кривые на этом рисунке могут быть разделены на четыре группы. Кривые *I* и *VII* относятся к уже упомянутому случаю, когда есть материя, но нет излучения и, наоборот, есть излучение, но нет материи, а модель расширяется от начального статического состояния. Кривые *II* и *IV* относятся к моделям типа M_2 , рассмотренным в § 157, д, которые сначала сжимаются до не-сингулярного минимального радиуса, отсекаемого на критической кривой, а затем монотонно расширяются, перерождаясь в пустую Вселенную де Ситтера. Кривые *III* и *V* относятся к моделям типа M_1 , рассмотренным в § 157, в. Эти модели монотонно расширяются от сингулярного состояния, радиус которого в данном случае был принят равным нулю. Наконец, кривая *VI* относится к предельному случаю абсолютно пустой Вселенной.

Что касается отражения реальной Вселенной, то вселенные первого рода, которые монотонно расширяются от сингулярного состояния, имеют то преимущество, что они проводят достаточно большой промежуток времени вне сингулярного состояния. Лемэтр [104] недавно отстаивал подобные модели и образно описывал начальное сингулярное состояние как состояние гигантского атома.

§ 163. Осциллирующие модели ($\Lambda=0$)

Поскольку, как мы уже говорили, разумно положить космологическую постоянную Λ равной нулю и полностью исключить ее из уравнений Эйнштейна, то следует обратить особое внимание на осциллирующие модели, которые в этом случае становятся единственно возможными для описания закрытой Вселенной. Поведение следующих двух моделей поддается исследованию наиболее легко.

Первая из этих моделей была предложена Фридманом [84] еще в 1922 г.; ею потом пользовался Эйнштейн [105]. В качестве вещества, заполняющего эту модель, берутся невзаимодействующие частицы, число которых сохраняется и давлением которых можно пренебречь. В этом случае в уравнениях (160.2) и (160.3)

нужно положить Λ и β равными нулю. В результате зависимость радиуса от времени будет определяться уравнением

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{3R} - 1}, \quad (163.1)$$

где α — постоянная, связанная с плотностью вещества и радиусом модели соотношением

$$8\pi\rho_m R^3 = \alpha = \text{const.} \quad (163.2)$$

Легко видеть, что интегралом уравнения (163.1) является циклоида в плоскости Rt :

$$R = \frac{\alpha}{6} (1 - \cos \psi), \quad t = \frac{\alpha}{6} (\psi - \sin \psi), \quad (163.3)$$

откуда следует, что радиус осциллирует между $R=0$, радиусом сингулярного состояния при $t=0$, и максимумом $R=\alpha/3$ при $t=\pi\alpha/6$.

В основе второй осциллирующей модели лежит предположение, что вещество внутри нее состоит исключительно из излучения черного тела [106]. В этом случае зависимость радиуса от времени с учетом (160.2), (160.3) определяется уравнением

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{R^2} - 1}, \quad (163.4)$$

где β — константа, связанная с радиусом и давлением излучения следующим соотношением:

$$8\pi p_0 R^4 = \beta = \text{const.} \quad (163.5)$$

Интеграл уравнения (163.4) легко найти:

$$R = \sqrt{\beta - t^2}, \quad (163.6)$$

причем максимум R приходится на $t=0$.

Как показано в § 157, осциллирующие модели существуют также и при $\Lambda \neq 0$. Их развитие во времени видно из рис. 9, взятого из той же работы де Ситтера [101]. Кривая IX представляет циклоиду для случая, когда Λ и давление равны нулю. Кривая VII относится к предельному случаю $\Lambda = \Lambda_E$, т. е. к модели типа A_1 , которая, расширяясь, асимптотически вырождается в статическую эйнштейновскую Вселенную. Этот случай занимает промежуточное положение между осциллирующими моделями типа O_1 и монотонно расширяющимися моделями типа M_1 . На рис. 9 представлен также ход эволюции еще нескольких, слегка различающихся по параметрам моделей, которые расширяются до бесконечности.

С точки зрения пригодности для описания реальной Вселенной осциллирующие модели с $\Lambda=0$ обладают тем недостатком,

что у них слишком мал промежуток времени, который они проводят вне сингулярного состояния. Кроме того, они пока еще не объясняют механизм перехода через сингулярное состояние.

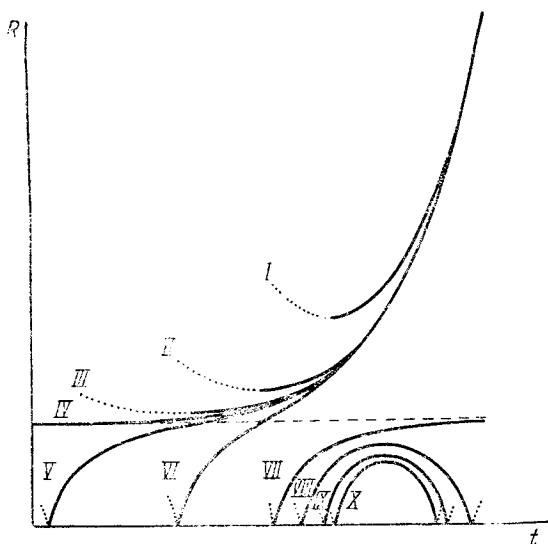


Рис. 9.

Чтобы оценить, сколько времени прошло после выхода модели из сингулярного состояния, удобнее всего воспользоваться выражением (150.7) для давления:

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda.$$

Положив $\Lambda=0$, перепишем его в следующем виде:

$$-\frac{\ddot{g}}{\dot{g}^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{R_0^2} \frac{e^{-g}}{\dot{g}^2} + \frac{8\pi p_0}{\dot{g}^2}, \quad (163.7)$$

откуда ясно, что во всяком случае можно положить

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{g}} \right) \geq \frac{3}{4}.$$

Интегрируя по времени расширения от значений (t_s, \dot{g}_s) при сингулярном состоянии до текущих (t, \dot{g}) , получаем

$$t - t_s \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\dot{g}} - \frac{1}{\dot{g}_s} \right),$$

откуда видно, что для осциллирующих моделей с $\Lambda=0$ во всяком случае можно написать, что

$$\Delta t \leq \frac{4}{3g}, \quad (163.8)$$

где Δt — время, прошедшее с момента выхода из сингулярного состояния, а значение \dot{g} берется в текущий момент и для реальной Вселенной может быть определено из красного смещения.

§ 164. Открытая модель Эйнштейна — де Ситтера ($\Lambda=0, R_0=\infty$)

Наиболее простая с математической точки зрения модель получается, если Λ в выражении (149.1) для интервала ds^2 положить равной нулю, а R_0 — бесконечности:

$$\Lambda=0, R_0=\infty, \quad (164.1)$$

как было предложено Эйнштейном и де Ситтером [107].

Интервал тогда запишется в следующем виде:

$$ds^2 = -e^{g(t)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2 \quad (164.2)$$

или

$$ds^2 = -e^{g(t)} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2,$$

а пространство — время станет плоским и пространственно неограниченным.

Далее, общие выражения для давления и плотности (150.7) и (150.8), после подстановки в них (164.1), приводятся к очень простому виду:

$$8\pi\rho_0 = -\ddot{g} - \frac{3}{4}\dot{g}^2 \quad (164.3)$$

и

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{4}\dot{g}^2. \quad (164.4)$$

Первое из этих уравнений требует, чтобы ускорение \ddot{g} было всегда отрицательным, так как иначе давление будет отрицательным. Второе же уравнение позволяет сразу установить связь между плотностью и доплер-эффектом. Эти уравнения могут быть легко проинтегрированы в двух предельных случаях: когда жидкость состоит только из вещества с пренебрежимо малым давлением, либо когда она состоит только из излучения с давлением, пропорциональным плотности.

Если модель заполнена веществом с нулевым давлением, то из (164.3) получаем уравнение

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{dg}{dt}\right)^2 = 0 \quad (164.5)$$

и интеграл этого уравнения

$$e^{3/4g} = at + b, \quad (164.6)$$

где a и b — постоянные. Используя (164.4), находим значение одной из констант:

$$a = \sqrt{6\pi\rho_{00}e^{3/2g}}. \quad (164.7)$$

Если же модель заполнена только излучением с давлением, равным одной трети от плотности энергии, выражения (164.3) и (164.4) позволяют получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 = 0, \quad (164.8)$$

которое имеет решение

$$e^g = at + b. \quad (164.9)$$

Постоянная a здесь принимает значение

$$a = \sqrt{\frac{32\pi}{3}\rho_{00}e^{2g}}. \quad (164.10)$$

Тем же методом, что и в конце предыдущего параграфа, легко получить промежуток времени, истекший с момента выхода из сингулярного состояния. В модели Эйнштейна — де Ситтера он во всяком случае не больше, чем

$$\Delta t \leq \frac{4}{3g}. \quad (164.11)$$

§ 165. Исследование отброшенных малых величин в рассмотренных моделях

Конкретные модели, на примере которых мы в предыдущих параграфах продемонстрировали различные типы эволюции, были нарочно упрощены предположениями, что давлением частиц вещества можно пренебречь и что полная масса вещества сохраняется. Однако совершенно очевидно, что, по крайней мере теоретически, эти предположения не являются обязательными. В принципе мы всегда могли бы предсказать ход эволюции, если бы имели достаточно полную информацию относительно свойств вещества, заполняющего модель.

В общем случае, для того чтобы найти зависимость ρ_{00} , p_0 и g от времени, необходимо иметь три уравнения. Два из них были

получены в § 150, и в наиболее удобном виде их можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}e^{3/2g}) + p_0 \frac{d}{dt}(e^{3/2g}) = 0 \quad (165.1)$$

и

$$\frac{d}{dt}(e^{1/2g}) = \pm \sqrt{\frac{8\pi\rho_{00}e^g}{3} + \frac{\Lambda e^g}{3} - \frac{1}{R_0^2}}, \quad (165.2)$$

а третье уравнение определяется свойствами жидкости.

Если процессы в жидкости обратимы, т. е. если давление жидкости является функцией энергии и объема, то в качестве третьего уравнения можно взять уравнение состояния. В общем виде это уравнение можно записать так:

$$p_0 = p_0(E, v) = p_0\left(\rho_{00}e^{3/2g}, e^{3/2g}\right), \quad (165.3)$$

где $e^{3/2g}$, как мы уже видели в (151.4), пропорционально собственному объему любого выбранного элемента жидкости. Если же в жидкости происходят необратимые процессы, то третье уравнение будет содержать как $g(t)$, так и производные $g(t)$. Во всяком случае при наличии трех уравнений и некоторых предположений относительно начальных условий и постоянных Λ и R_0 задача становится в принципе разрешимой.

Тот факт, что в наших иллюстративных примерах мы пренебрегли давлением, возникающим из-за хаотического движения частиц материи, вряд ли можно рассматривать как серьезный дефект по отношению к реальной космологии. На *современном* этапе эволюции нашей Вселенной мы имеем полное право считать, что хаотическое движение туманностей действительно создает пренебрежимо малое давление, так же как и идеальная жидкость, заполняющая нашу модель. То же самое, по-видимому, относится и к межгалактической пыли и к другим частицам, находящимся в межгалактических пространствах.

Однако тот факт, что мы приняли полную массу вещества в моделях постоянной, заслуживает несколько большего внимания, так как по отношению к реальной Вселенной это означает, что мы пренебрегаем реально имеющимся потоком излучения от туманностей в межгалактическое пространство. Согласно уравнению (152.7), для относительной скорости изменения массы вещества со временем можно записать следующее уравнение:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} \rho_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\rho_m} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}}{g} \right) \right] \dot{g}, \quad (165.4)$$

или, обозначив для простоты

$$\gamma = 3 \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} \rho_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\rho_m} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}}{g} \right) \right], \quad (165.5)$$

переписать его несколько иначе:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = -\frac{1}{(\rho_m e^{3/2g})} \frac{d}{dt} (\rho_m e^{3/2g}) = \gamma \frac{\dot{g}}{2}, \quad (165.6)$$

где ρ_m — плотность вещества в модели.

Мы ничего не можем сказать о том, чему равна величина γ в реальной Вселенной в настоящее время, так как не знаем источника космических лучей, который тоже может быть связан с уменьшением полной массы вещества. Однако если предположить, что любая масса во Вселенной уменьшается с такой же скоростью, что и масса Солнца, то для γ нужно принять величину порядка

$$\gamma \approx 10^{-4}, \quad (165.7)$$

истинная же величина может оказаться еще меньшей. (Де Ситтер оценивает $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-7}$.)

Точно так же мы не знаем и скорости изменения γ во времени. Тем не менее в разумном интервале времени можно положить γ постоянной. При этом уравнение (165.6) интегрируется и для плотности вещества получается

$$\rho_m = \rho_1 e^{-\frac{1}{2}(3+\gamma)g}, \quad (165.8)$$

где ρ_1 — постоянная. Для плотности излучения получается значение

$$\rho_r = 3\rho_0, \quad (165.9)$$

если пренебречь вкладом хаотического движения частиц в давление p_0 .

Подставляя эти два выражения в уравнение энергии (165.1), получаем

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 e^{-1/2\gamma g} + 3\rho_0 e^{3/2g}) + p_0 \frac{d}{dt} (e^{3/2g}) = 0.$$

Выполняя указанные дифференцирования и снова подставляя (165.8) и (165.9), после некоторых преобразований находим от-

носительные скорости изменения давления и плотности излучения:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dt} = \frac{1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dt} = - \left(2 - \frac{\gamma}{2} \frac{\rho_m}{\rho_r} \right) \dot{g}. \quad (165.10)$$

Интересно отметить, что, когда g положительно и модель расширяется, давление и плотность излучения убывают со временем, если только γ или ρ_m/ρ_r не слишком велики. Приписав величине γ значение (165.7), получим, что давление излучения перестанет возрастать, как только плотность излучения достигнет по сравнению с плотностью вещества величины

$$\rho_r = 2,5 \cdot 10^{-5} \rho_m. \quad (165.11)$$

Таким образом, как впервые было отмечено де Ситтером [101], теория расширяющейся Вселенной способна объяснить кажущееся исчезновение излучения, испускаемого звездами в межгалактическое пространство. Следует также отметить, что если давление при расширении уменьшается монотонно, то на критической кривой рис. 6 не может быть никаких минимумов, и поэтому никогда не может возникнуть осцилляторное решение второго рода (типа O_2).

Наконец, нужно сказать еще об одном упрощающем предположении, принятом при построении моделей, иллюстрирующих различные типы эволюции. Было предположено, что изменение плотности жидкости по мере того, как модель сжимается или расширяется, происходит обратимым образом, а всеми необратимыми процессами можно пренебречь. Поэтому следует еще рассмотреть, что произойдет, если эволюция космологических моделей будет носить необратимый характер, и чем такая эволюция отличается от термодинамически обратимого поведения во времени. К этому мы и приступим в III части настоящей главы.

§ 165*. Эффект неоднородности в космологических моделях*)

1. Введение. В приложениях релятивистской механики и релятивистской термодинамики к космологии обычно рассматриваются однородные модели Вселенной, заполненные идеальной жидкостью, которая в любой момент времени имеет одни и те же свойства во всем ее объеме. Такой подход оправдывается, конечно, тем, что однородные модели с математической точки зрения более просты по сравнению с неоднородными.

*) Перевод статьи: R. C. Tolman, Effect of Nonhomogeneity on Cosmological Models, Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 169—176 (1934), сделанный В. М. Дубовиком, добавлен в русском издании (Прим. ред.)

Однородность распределения подтверждается наблюдаемым распределением межгалактических туманностей вплоть до расстояний порядка 10^8 световых лет, доступных стодюймовому телескопу обсерватории Маунт Вильсон*). Тем не менее следовало бы убедиться в тенденции к исчезновению неоднородностей со временем, чтобы иметь уверенность, что поведение Вселенной в очень отдаленных областях или за чрезвычайно большие периоды времени действительно можно описывать с помощью однородных моделей.

Цель этой статьи — расширить наши теоретические знания об эффектах неоднородности в космологических моделях. Для упрощения будут рассматриваться самые простые модели, заполненные пылевидными частицами (туманности), в которых давление пренебрежимо мало и распределено неоднородно, но сферически симметрично относительно некой начальной точки — начала координат. Это позволяет использовать выражения для интервала и результаты, эквивалентные тем, которые были получены Лемэтром [138] при исследовании механизма образования туманностей. Результаты нашего исследования подчеркивают возможную опасность заключений о реальной Вселенной на основании далеких экстраполяции свойств однородной модели.

2. Тензор энергии — импульса. Для наших исследований наиболее подходящей является система сопутствующих координат, в которой пространственные компоненты определяются координатной сеткой, связывающей соседние частицы и движущейся вместе с ними. Используя предположение о сферической симметрии и отсутствии давления (а следовательно, и градиентов давления), нетрудно, привести интервал в такой модели к обычной форме:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (1)$$

где λ и ω — функции r и t .

Рассмотрим тензор энергии — импульса, соответствующий нашей модели и нашему выбору интервала.

С одной стороны, поскольку вещество, заполняющее модель, по предположению пылевидное, не испытывающее никакого давления, мы можем записать тензор энергии — импульса в виде

$$T^{\alpha\beta} = \rho \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (2)$$

где ρ — плотность вещества, измеряемая локальным наблюдателем, движущимся вместе с ним, а величины (dx^α/ds) и (dx^β/ds)

*) Крупномасштабная однородность не нарушается и для больших расстояний, вплоть до 10^{10} световых лет, на которых зарегистрированы квазары. (Прим. ред.)

являются компонентами скорости вещества относительно используемых координат. В системе сопутствующих координат, когда интервал задается формулой (1), исчезают все компоненты $T^{\alpha\beta}$, кроме одной:

$$T_4^4 = \rho, \quad T_\beta^\alpha = 0 \quad (\alpha \text{ или } \beta \neq 4). \quad (3)$$

С другой стороны, компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие интервалу (1), могут быть получены из выражений, данных для этой общей формы Динглем [71]; комбинируя полученные результаты с условиями (3), легко получить систему уравнений, связывающих метрические переменные λ и ω с плотностью ρ :

$$8\pi T_1^1 = e^{-\omega} - e^{-\lambda} \frac{\omega'^2}{4} + \ddot{\omega} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 - \Lambda = 0, \quad (4)$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\omega''}{2} + \frac{\omega'^2}{4} - \frac{\lambda'\omega'}{4} \right) + \frac{\ddot{\lambda}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{\omega}}{2} + \frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{4} - \Lambda = 0, \quad (5)$$

$$8\pi T_4^4 = e^{-\omega} - e^{-\lambda} \left(\omega'' + \frac{3}{4} \omega'^2 - \frac{\lambda'\omega'}{2} \right) + \frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{2} - \Lambda = 8\pi\rho, \quad (6)$$

$$8\pi e^\lambda T_4^1 = -8\pi T_1^4 = \frac{\omega'\dot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\omega'}{2} + \dot{\omega}' = 0, \quad (7)$$

где штрихи означают дифференцирование по r , точки — дифференцирование по t , а Λ — космологическая постоянная.

3. Решение уравнений. Для того чтобы проанализировать эти уравнения, удобно прежде всего исключить λ . Очевидно, что первый интеграл уравнения (7) можно записать в виде

$$e^\lambda = \frac{e^{\omega\omega'^2/4}}{f^2(r)}, \quad (8)$$

где $f^2(r)$ — произвольная функция r , принимающая, однако, только положительные значения.

Подставляя (8) в (1), можно переписать теперь интервал в форме (3):

$$ds^2 = -\frac{e^{\omega\omega'^2/4}}{f^2(r)} dr^2 - e^\omega (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (4), получаем

$$e^\omega \left(\ddot{\omega} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 - \Lambda \right) + \{1 - f^2(r)\} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что в качестве первого интеграла этого уравнения можно написать выражение

$$e^{3\omega/2} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{2} - \frac{2}{3} \Lambda \right) + 2e^{\omega/2} \{1 - f^2(r)\} = F(r), \quad (11)$$

где $F(r)$ — еще одна произвольная функция r . Интеграл же этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{de^{\omega/2}}{\sqrt{f^2(r) - 1 + \frac{1}{2} F(r) e^{-\omega/2} + \frac{\Lambda}{3} e^{\omega}}} = t + F(r), \quad (12)$$

где $F(r)$ — третья произвольная функция.

Подставляя (8) в (5), нетрудно убедиться, что полученный результат эквивалентен (10), так что в дальнейшем рассмотрении уравнения (5) нет необходимости.

И наконец, подставляя (8) в (6), получаем следующее выражение для плотности пылевидного вещества:

$$8\pi\rho = e^{-\omega} \left\{ 1 - f^2(r) - \frac{4f(r)f'(r)}{\omega'} \right\} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 + \frac{\ddot{\omega}\omega'}{\omega'} - \Lambda. \quad (13)$$

Этот результат может быть записан в различных формах. Исключая $f^2(r)$ с помощью (10), получаем

$$8\pi\rho = -3\ddot{\omega} - 2\frac{\ddot{\omega}'}{\omega'} - \frac{3}{2} \dot{\omega}^2 - 2\frac{\dot{\omega}\omega'}{\omega'} + 2\Lambda, \quad (14)$$

или, привлекая (11), переписываем (13) в виде

$$8\pi\rho = \frac{e^{-3\omega/2}}{\omega'} \frac{\partial F(r)}{\partial r}. \quad (15)$$

Дифференцируя затем (15), находим

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = -\frac{3}{2} \dot{\omega} - \frac{\dot{\omega}'}{\omega'}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = -\frac{3}{2} \ddot{\omega} - \frac{\ddot{\omega}'}{\omega'} + \left(\frac{\dot{\omega}'}{\omega'} \right)^2 \quad (17)$$

или, используя (14), получаем

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\omega}'}{\omega'} \right)^2. \quad (18)$$

4. Применения. У нас теперь есть все, чтобы исследовать поведение космологических моделей. С математической точки зрения из уравнений (10) — (12) следует, что можно выбрать три произвольные функции $f^2(r)$, $F(r)$ и $\dot{F}(r)$ так, чтобы они соответствовали любым заданным начальным значениям, ω , $\dot{\omega}$ и $\ddot{\omega}$ как функциям r при $t=0$, а затем, по крайней мере в принципе, определить с помощью уравнения (12) изменение ω в зависимости от r и t . С физической точки зрения это означает, что можно в рамках нашей модели выбрать в момент времени $t=0$ величину $e^{\omega} \omega'^2 / 4f^2(r)$ так, чтобы вид интервала (9) соответствовал любому заданному начальному соотношению между радиальной координатой r и реально измеряемым расстоянием от начала координат; кроме того, можно выбрать $\dot{\omega}$ так, чтобы выбор сопутствующих координат находился в соответствии с любым заданным начальным распределением (по r) измеряемой радиальной скорости вещества в модели, и, наконец, можно выбрать $\ddot{\omega}$ так, чтобы уравнение (14) находилось в соответствии с любым заданным начальным распределением плотности пылевидной материи как функции от r . Уравнения определяют тогда дальнейшее поведение материи в модели.

Посмотрим, что можно получить, действуя таким образом, в некоторых конкретных случаях.

а) **Статическая модель Эйнштейна.** Пусть при $t=0$ распределения заданы следующим образом:

$$e^{\omega} = r^2, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \ddot{\omega} = 0. \quad (19)$$

В соответствии с выражениями (9) — (12) это дает интервал статической космологической модели Эйнштейна

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \Lambda r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (20)$$

а согласно (14) получаем старое значение для однородной плотности в модели Эйнштейна

$$4\pi\rho = \Lambda, \quad (21)$$

которая остается статической в соответствии с (16) и (17).

б) **Искаженная модель Эйнштейна.** Пусть при $t=0$ распределения выглядят так:

$$e^{\omega} = r^2, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega}_0(r), \quad (22)$$

где $\ddot{\omega}_0$ есть начальная функция, зависящая от r . Тогда

в соответствии с (14), (16) и (18) при $t=0$ имеем

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}\ddot{\omega}'r, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda. \quad (25)$$

Следовательно, в такой искаженной модели Эйнштейна уже не существует однородной плотности вещества, задаваемой (21), и, хотя плотность материи первоначально не зависит от времени, она будет возрастать в тех областях значений r , где она больше обычного эйнштейновского значения $\Lambda=4\pi\rho$, и будет уменьшаться в тех областях, где она меньше этого значения. Это указывает на еще один вид неустойчивости в модели Эйнштейна (в дополнение к той, что уже обсуждалась Эддингтоном и другими авторами*), так как уже начальное поведение характеризуется увеличением отличия от однородного распределения Эйнштейна. Кроме того, очевидно, что в областях, в которых плотность начинает возрастать, из общей формы уравнения (18) следует, что вблизи сингулярного состояния, характеризуемого бесконечным значением плотности, или же в районе нарушения наших упрощенных уравнений не начнется процесс обратной конденсации. Из уравнения (25) также следует, что в случае обычного плоского пространства, $\Lambda=0$, пылевидная материя, обладающая *любым* сферически симметричным стационарным распределением, начинает конденсироваться, что согласуется с интуитивными представлениями на уровне теории тяготения Ньютона.

в) **Нестатическая модель Фридмана.** Пусть при $t=0$ распределения заданы следующим образом:

$$e^{\omega} = e^{g_0} r^2, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_0, \quad \ddot{\omega} = \ddot{g}_0, \quad (26)$$

где g_0 , \dot{g}_0 и \ddot{g}_0 — соответствующие мгновенные значения некоторой функции $g(t)$. Привлекая (9) — (12), можно получить известный интервал Фридмана для случая однородного распределения расширяющейся и сжимающейся материи:

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{dr^2}{1 - r^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (27)$$

где R_0 — константа, значения которой можно получить с помощью (10), а $g(t)$ имеет характерную зависимость от t для однородной

*) См. § 159. (Прим. ред.)

модели, не содержащей ничего, кроме пылевидной материи, испытывающей пренебрежимо малое давление.

Согласно формулам (14), (16), (18) начальные распределения и поведение материи в модели задаются формулами

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{g}_0 - \frac{3}{4}\dot{g}_0^2, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{g}_0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)^2. \quad (30)$$

г) **Искаженная модель Фридмана.** Зададим распределения при $t=0$ в виде

$$e^{\omega} = e^{g_0 r^2}, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_0, \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega}_0(r), \quad (31)$$

где g_0 и \dot{g}_0 введены так же, как и выше, но в начале $\ddot{\omega}$ — любая произвольная функция от r .

Используя (14), (16) и (18), при $t=0$ получаем

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}\ddot{\omega}_0 r - \frac{3}{4}\dot{g}_0^2, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{g}_0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)^2. \quad (34)$$

Сравнивая это первоначальное состояние с тем, что возникает в случае модели Фридмана, мы видим, что хотя скорость расширения или сжатия во всех частях модели выбрана такой же, как и раньше, однако плотность вещества и ее вторые производные по времени перестают быть одинаковыми во всех частях этой модели. Действительно, сравнивая (30) и (34), можно записать для обеих моделей при $t=0$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho_D}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \ln \rho_F}{\partial t^2} = 4\pi(\rho_D - \rho_F), \quad (35)$$

где индексы указывают на различие между моделью Фридмана и ее искаженным вариантом. Следовательно, для тех значений r , где плотность в искаженной модели отличается от плотности в модели Фридмана, существует, хотя бы в начале, стремление к увеличению этого отличия. Из общей формы уравнения (18) очевидно, что в случаях, когда имеет место конденсация, расхождения значения плотности в различных частях модели будут возрастать до тех пор, пока не будет достигнуто сингулярное состояние, характеризующееся бесконечной плотностью, или состояние, в котором нарушаются упрощенные уравнения.

д) **Комбинация однородных распределений.** В заключение зададим для наших уравнений начальное распределение при $t=0$, соответствующее в данной зоне, скажем от 0 до r_a , условиям обычной модели Фридмана:

$$e^{\omega} = e^{g_1 r^2}, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_1, \quad \ddot{\omega} = \ddot{g}_1, \quad (36)$$

а затем, от r_a до r_b , следует переходная зона, в которой величины меняются до значений, относящихся к следующей области, от r_b до r_c , соответствующих другой модели Фридмана, характеризующейся уравнениями

$$e^{\omega} = e^{g_2 r^2}, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_2, \quad \ddot{\omega} = \ddot{g}_2. \quad (37)$$

Такое последовательное прибавление переходных зон и зон Фридмана можно продолжить любым произвольным образом.

Тогда согласно (9) — (12) пылевидная материя в каждой фридмановской зоне будет вести себя, как в некоторой обычной, полностью однородной модели, безотносительно к эволюции в других частях модели.

5. **Заключение.** Полученные результаты указывают на отсутствие каких-либо общих гравитационных механизмов, которые с необходимостью приводили бы к уничтожению неоднородностей в космологических моделях. Это доказано как обнаружением случаев, когда возмущение, уводящее от исходного однородного статического или нестатического распределения плотности, стремится возрасти со временем, так и существованием моделей с не взаимодействующими областями, поведение которых подтверждает сказанное для совсем непохожих однородных распределений.

Применительно к явлениям реальной Вселенной следует отметить, конечно, чрезвычайную упрощенность рассмотренных моделей. Во-первых, несмотря на то, что модели допускают неоднородность, в целях математического упрощения требуется, чтобы они оставались сферически симметричными относительно некоторого начала координат. Явления же в реальной Вселенной развиваются при наличии более существенных неоднородностей, чем рассмотренные. Во-вторых, материя, заполняющая модели, считалась пылевидной, испытывающей пренебрежимо малое давление. Следовательно, не учитывались такие эффекты, как тепловые потоки от одной части вещества к другой, которые в реальной Вселенной могли бы создавать *негравитационное* взаимодействие, стремящееся уничтожить неоднородности.

Ввиду отсутствия полного соответствия между нашими моделями и природой, мы не должны делать слишком категорических

утверждений относительно реальной Вселенной. Тем не менее из наших результатов следует по крайней мере то, что нужно соблюдать предельную осторожность, применяя к реальной Вселенной результаты смелых экстраполяций временного или пространственного характера, найденных для строго однородных моделей. Исходя из примера, в котором рассматривались зоны, соответствующие любой заданной однородной модели, можно, конечно, рассматривать явления, происходящие в нашей собственной окрестности на расстоянии, скажем, 10^8 световых лет и в *ограниченных периодах времени* порядка 10^8 лет так, как будто они описываются интервалом соответствующей однородной модели. Однако утверждение, что тот же самый интервал применим для описания всей Вселенной в целом или что однородная модель остается разумным приближением в периоды сильного сгущения материи, может оказаться несправедливым. Следовательно, на настоящей стадии теоретических исследований разумно учитывать возможность того, что в областях Вселенной, находящихся за пределами, достижимыми для современных телескопов, может происходить сжатие, а не расширение и может существовать материя с такой плотностью и на такой стадии эволюции, которые совершенно отличны от известных нам. Не следует также делать из рассматриваемых однородных моделей слишком категорических выводов относительно начального состояния всей Вселенной *).

ЧАСТЬ III

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА НЕСТАТИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 166. Следствие первого закона релятивистской термодинамики

Мы должны теперь дать краткий обзор термодинамического поведения однородных космологических моделей с интервалом

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2 / 4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (166.1)$$

*) Вопрос о поведении моделей Вселенной в эпоху больших плотностей сейчас изучен значительно полнее. По-видимому, существование особенности в решениях космологических уравнений доказано из весьма общих топологических соображений. Интересный обзор результатов дан в книге: Р. Пенроуз, Структура пространства — времени, «Мир», 1972. Эта книга, однако, требует хорошей геометрической подготовки. Очень важные результаты о поведении моделей вблизи особенностей Ли ф ш и ц а, Х а л а т н и к о в а, Б е л и н с к о г о изложены в их обзоре (УФН 102, 463 (1970)). Подготовленный читатель найдет в этих работах и дальнейшие литературные указания. В этом направлении сейчас идут самые интересные исследования. (Прим. ред.)

Из принципов релятивистской термодинамики, изложенных в главе IX, следует, что релятивистский аналог первого закона обычной термодинамики вытекает из уравнения для плотности тензора энергии — импульса релятивистской механики:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_\mu^{\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{F}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (166.2)$$

Определяя компоненты тензора энергии — импульса с помощью уравнения для интервала ds^2 , в соответствии с (150.5) и (150.6), получаем, что отличны от нуля только следующие компоненты:

$$T^{11} = -g^{11}p_0, \quad T^{22} = -g^{22}p_0, \quad T^{33} = -g^{33}p_0, \quad T^{44} = p_{00}. \quad (166.3)$$

Опуская индексы, находим

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = p_{00},$$

где p_0 и p_{00} — собственные макроскопические давление и плотность жидкости, т. е. те значения давления и плотности, которые получаются из измерений локального наблюдателя, закрепленного неподвижно в заданный момент времени в заданном месте.

Подставив (166.3) в (166.2), в случае $\mu=1$ получим

$$-\frac{\partial}{\partial r}(p_0 \sqrt{-g}) + p_0 \sqrt{-g} \left(g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} \right) = 0,$$

где последний член в скобках можно прибавить потому, что g_{44} постоянно. Это уравнение с помощью соотношения (39) из Приложения III можно переписать иначе:

$$-\sqrt{-g} \frac{\partial p_0}{\partial r} - p_0 \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial r} + p_0 \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial r} = 0.$$

Поскольку для $\mu=2$ и 3 получаются подобные же уравнения, то единственная информация, которую мы можем извлечь из уравнения для плотности тензора энергии — импульса, состоит в том, что в модели с интервалом (166.1) давление не зависит от координат:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} = 0. \quad (166.4)$$

Но этот результат заранее очевиден, поскольку наша модель пространственно однородна.

В случае же $\mu=4$ выражения (166.2) совместно со (166.3) приводят, так же как и в § 151, к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{00} \sqrt{-g}) + \frac{1}{2} p_0 \sqrt{-g} \left(g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial t} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial t} \right) = 0,$$

откуда, после подстановки значения $g_{\mu\nu}$ из интервала ds^2 , получается следующий важный результат:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{00} \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right) + p_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right). \quad (166.5)$$

Так как собственный объем элемента жидкости, заключенного в координатной области $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ рассматриваемой нами сопутствующей системы отсчета, равен

$$\delta v_0 = \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi, \quad (166.6)$$

то (166.5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0. \quad (166.7)$$

Из этого уравнения, как было отмечено вначале, следует, что собственная энергия каждого элемента жидкости в системе отсчета локального наблюдателя меняется с изменением собственного объема данного элемента так же, как и при обычном адиабатическом сжатии или расширении жидкости.

Этот результат важен с термодинамической точки зрения, ибо показывает, что между элементами жидкости в рассматриваемой модели не происходит теплообмена. Однако и этот результат тоже можно считать следствием пространственной однородности модели.

§ 167. Следствие второго закона релятивистской термодинамики

Согласно § 119 закон релятивистской термодинамики, аналогичный обычному второму закону, можно сформулировать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (167.1)$$

где φ_0 — собственная плотность энтропии жидкости в заданный момент времени и в заданном месте, dx^μ/ds — компоненты макро-

скопической «скорости» этой жидкости, определенные в выбранной системе координат, T_0 — собственная температура, а δQ_0 — количество тепла, протекшего внутрь элемента жидкости $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$ за время δx^4 , причем все величины отнесены к локальному наблюдателю. Знак равенства в этом выражении выполняется в обратимых процессах, а знак неравенства — в необратимых.

Пользуясь тем, что в моделях с интервалом в виде (166.1) в сопутствующей системе отсчета можно положить

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad (167.2)$$

и что процессы в рассматриваемых моделях, как было показано в предыдущем параграфе, протекают адиабатически, т. е.

$$\delta Q_0 = 0, \quad (167.3)$$

можно переформулировать релятивистский второй закон следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi_0 \frac{r^2 \sin \theta e^{3 \int g(t)} dt}{[1 + r^2 / 4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi \right) \geq 0, \quad (167.4)$$

или

$$\frac{d}{dt} (\varphi_0 \delta v_0) \geq 0, \quad (167.5)$$

если учесть выражение (166.6) для собственного объема. Полученный результат показывает, что собственная энтропия каждого элемента жидкости может только возрасть или, в лучшем случае, оставаться постоянной во времени.

Соотношения (166.7) и (167.5) можно считать вполне удовлетворительными, ибо они гласят, что локальный наблюдатель, исследуя элемент жидкости в непосредственной близости от себя, обнаружит в нем те же самые закономерности, какие предсказываются классической термодинамикой для адиабатического расширения и сжатия.

§ 168. Условия термодинамического равновесия в статической Вселенной Эйнштейна

Термодинамические закономерности, установленные выше для нестатических моделей, можно использовать для исследования условий равновесия эйнштейновской Вселенной, ибо последняя является частным случаем, когда $g(t)$ не зависит от времени.

Условия термодинамического равновесия можно определить обычным образом, исследуя возможные изменения в малой области модели при изменении радиуса

$$R = R_0 e^{3/2 g} \quad (168.1)$$

и числа молей

$$n_1^0, n_2^0, \dots, n_n^0 \quad (168.2)$$

различных химических веществ, составляющих данный элемент жидкости, а значит, и всю жидкость.

Варьируя эти параметры, можно временно считать, что модель является нестатической, т. е. что энергия и энтропия каждого элемента жидкости изменяются согласно (166.6) и (167.5). Поскольку, однако, энтропия каждого элемента, согласно (167.5), может только либо возрастая, либо оставаться постоянной во времени, то при наличии термодинамического равновесия должно выполняться условие

$$\delta(\varphi_0 v_0) = 0 \quad (168.3)$$

при дополнительном условии

$$\delta(\rho_{00} v_0) + p_0 \delta v_0 = 0, \quad (168.4)$$

где собственный объем рассматриваемого элемента жидкости v_0 равен

$$v_0 = \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi. \quad (168.5)$$

Чтобы воспользоваться вышеприведенными условиями равновесия, запишем по аналогии с классической термодинамикой:

$$\delta(\varphi_0 v_0) = \delta S_0 = \frac{1}{T_0} \delta E_0 + \frac{p_0}{T_0} \delta v_0 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_1^0} \right)_{E_0, v_0} \delta n_1^0 + \dots \\ \dots + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_n^0} \right)_{E_0, v_0} \delta n_n^0. \quad (168.6)$$

Записать это соотношение, очевидно, можно потому, что измеряемая локальным наблюдателем собственная энтропия $S_0 = \varphi_0 v_0$, как нетрудно видеть, зависит от собственной энергии объема и химического состава, так же как и в классике.

Учитывая, кроме того, что собственная энергия $E_0 = \rho_{00} v_0$, и принимая во внимание (168.4) и (168.6), получаем в качестве

необходимого условия термодинамического равновесия статической Вселенной Эйнштейна следующее равенство:

$$\sum \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_i^0} \right) \delta n_i^0 = 0. \quad (168.7)$$

Сравнивая это соотношение с (60.12), мы видим, что оно тождественно классическому условию химического равновесия между различными компонентами жидкости. Это означает, что относительное содержание различных материалов, которые могут переходить друг в друга, например водорода и гелия или даже вещества и излучения, в статической Вселенной Эйнштейна будет при термодинамическом равновесии точно такое же, как и в плоском пространстве — времени. Это очень важно, ибо любое влияние гравитационной кривизны на относительный состав в таких моделях имело бы большое значение для космологии*).

Хотя пару соотношений (168.3) и (168.4) или эквивалентную им пару (168.4), (168.7) можно рассматривать как необходимые условия термодинамического равновесия, однако вопрос о том, являются ли эти условия достаточными для того, чтобы равновесие было устойчивым, требует дополнительных исследований. Результаты § 159 показывают, что равновесие эйнштейновской Вселенной, вообще говоря, неустойчиво по отношению к малым изменениям радиуса; исключение могло бы возникнуть, только если бы заключенная в ней жидкость обладала свойством увеличивать давление при увеличении объема.

§ 169. Условия обратимости и необратимости в нестатических моделях

Второй закон термодинамики в форме (167.5), отнесенный к однородным космологическим моделям:

$$\frac{d}{dt} (\Phi_0 \delta v_0) \geq 0, \quad (169.1)$$

помогает отличить обратимые процессы в этих моделях от необратимых.

Для обратимых процессов в выражении (169.1) следует взять знак равенства, и критерием обратимости может служить постоянство собственной энтропии каждого элемента жидкости, заключенной в модели. Таким образом, чтобы определить, в какой мере возможны обратимые процессы в модели, нужно исследовать

*) Предположение о таком влиянии было впервые высказано Ленцем [108]. Однако см. [109, 110].

довагь причины, которые могут привести к возрастанию энтропии элемента жидкости.

Во-первых, как указывалось в § 130, энтропия не может возрастать из-за необратимой передачи тепла, так как вследствие однородности модели и согласно первому закону в модели нет никакого теплообмена. Во-вторых, энтропия не может возрастать и в результате такого процесса, как трение движущихся частей о стенки сосуда, которое имеет место при обычных адиабатических изменениях объема, ибо здесь нет никаких частей или стенок. И, в-третьих, энтропия не может возрастать из-за того, что давление в жидкости устанавливается не сразу всюду одинаковым, внутри и на границе каждого элемента, как это имеет место при обычных расширениях и сжатиях в цилиндре, где в результате движения поршня возникает градиент давления. Здесь этого не может быть, потому что вследствие однородности модели давление (см. 166.4) всюду одинаково.

Таким образом, мы видим, что хорошо известные источники роста энтропии, с которыми мы сталкиваемся в обычной инженерной практике, такие, как передача тепла с конечной скоростью и неидеальное взаимодействие рабочей жидкости с окружающей средой, в космологических моделях отсутствуют. Поэтому можно сделать вывод, что все изменения в модели будут обратимыми, если только к росту энтропии не приведут какие-нибудь физико-химические процессы, которые происходят внутри жидкости при расширении и сжатии.

Решение вопроса о том, возможно ли реально построить космологическую модель с обратимым поведением, зависит от того, удастся ли нам найти для нее жидкость с таким простым составом, чтобы в ней не происходило никаких внутренних процессов, приводящих к изменению энтропии какого-либо элемента объема. В § 130 главы, посвященной релятивистской термодинамике, мы уже отмечали, что имеется два вида такой жидкости. Это, во-первых, несвязанное вещество (пыль) с нулевым давлением и, во-вторых, излучение черного тела. В следующих двух параграфах мы подробно рассмотрим обратимое поведение моделей, заполненных этими жидкостями.

В том случае, когда модель содержит жидкость более сложного состава, изменение объема элемента жидкости, происходящее с конечной скоростью, будет сопровождаться, вообще говоря, внутренними процессами, которые могут привести к возрастанию энтропии рассматриваемого элемента. Это и приводит к знаку неравенства в формулировке второго закона (169.1), так как поведение модели в этом случае будет термодинамически необратимым. В § 131 мы уже приводили простой пример подобной модели. Это — двухатомный газ. При конечной скорости расширения и сжатия он диссоциирует или рекомбинирует

в условиях неравновесного состояния, что приводит к возрастанию энтропии. Последние параграфы этой части главы X мы специально посвятим изучению необратимых расширений и сжатий космологических моделей.

§ 170. Термодинамика модели, заполненной пылевидным веществом

Теперь мы рассмотрим модель, заполненную несвязанным (пылевидным) веществом, создающим пренебрежимо малое давление. Это будет пример Вселенной, развитие которой происходит с конечной скоростью и все же термодинамически обратимо. В такой модели собственная энтропия каждого данного элемента жидкости равна сумме энтропий отдельных, не меняющихся со временем частиц и остается постоянной даже при конечной скорости расширения и сжатия. Это означает, что соотношение (169.1) выполняется со знаком равенства и эволюция модели происходит термодинамически обратимо.

Поскольку мы предполагаем, что расширение и сжатие таких моделей происходит обратимо, то при наличии условий, вызывающих обращение направления развития, ничто не помешает модели вернуться к предыдущему состоянию. Пусть, например, космологическая постоянная Λ равна нулю, тогда модель является осциллирующей Вселенной типа O_1 . Согласно § 163 ее радиус будет попеременно возрастать и убывать со временем, описывая на плоскости Rt циклоиду

$$R = \frac{\alpha}{6} (1 - \cos \psi), \quad t = \frac{\alpha}{6} (\psi - \sin \psi), \quad (170.1)$$

где α — некоторая постоянная.

Иными словами, если Λ равна нулю, то эволюция будет происходить не только термодинамически обратимо, но и через какое-то конечное время модель изменит направление своего движения и станет эволюционировать обратно. И хотя мы ничего не знаем о механизме перехода через сингулярное состояние при $R=0$, тем не менее мы можем утверждать, что модель после максимального расширения снова вернется в состояние с первоначальным радиусом R и с той же самой скоростью dR/dt , как и прежде, но только с противоположным направлением.

§ 171. Термодинамика модели, заполненной излучением черного тела

В качестве второго примера Вселенной, развивающейся обратимо и с конечной скоростью, рассмотрим модель, заполненную только излучением черного тела. Здесь тоже почти сразу же очевидно, что энтропия любого элемента жидкости в элементар-

ном объеме $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ будет оставаться постоянной. Действительно, поскольку здесь отсутствуют необратимости, порождаемые градиентами давления, трением одних частей о другие и необратимым взаимодействием излучения с какими-либо другими видами материи, то изменение собственного объема любого заданного элемента жидкости будет носить характер адиабатического расширения или сжатия, которое с точки зрения классической термодинамики не приводит к изменению энтропии.

Тем не менее ситуация здесь достаточно сложная, и желательно было бы рассмотреть ее более подробно. Сначала мы покажем, что расширение или сжатие приводит к изменению температуры в распределении излучения черного тела, а затем покажем, что совместное изменение объема и температуры любого элемента $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ происходит так, что результирующее значение энтропии остается неизменным.

Излучение черного тела по определению есть такое излучение, которое находится в термодинамическом равновесии и распределено по закону Планка (65.6). В любой произвольно выбранный начальный момент t_1 это распределение можно записать в следующем виде:

$$dE_1 = \frac{8\pi h\nu_1^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu_1/kT_1} - 1} d\nu_1 d\nu_1, \quad (171.1)$$

где dE_1 есть то количество излучаемой энергии, которое локальный наблюдатель, расположенный неподвижно относительно координат r, θ, φ , может обнаружить в объеме $d\nu_1$ в диапазоне частот $d\nu_1$ и при температуре T_1 .

Через некоторое время, в момент t_2 , величина $g(t)$, которая определяет ход эволюции модели, изменится и станет равной не g_1 , а g_2 . При этом частота фотонов, которые ранее обладали указанной выше энергией, будучи измерена локальным наблюдателем, окажется, согласно (156.8), равной

$$\nu_2 = e^{1/2(g_1 - g_2)} \nu_1, \quad (171.2)$$

и, следовательно, энергия, будучи пропорциональной частоте, изменится аналогичным образом:

$$dE_2 = e^{1/2(g_1 - g_2)} dE_1. \quad (171.3)$$

Далее, так как собственный объем, согласно (151.4), тоже зависит от времени, то элемент объема, содержащий рассматриваемые

фотоны или, вернее, их эквиваленты, станет равным

$$dv_2 = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)} dv_1. \quad (171.4)$$

Подставляя эти три уравнения в (171.1), получаем, что излучение, будучи снова измерено локальным наблюдателем в момент времени t_2 , окажется распределенным по закону

$$dE_2 = \frac{8\pi h\nu_2^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu_2/kT_2} - 1} dv_2 dv_2, \quad (171.5)$$

где

$$T_2 = T_1 e^{\frac{1}{2}(g_1 - g_2)}, \quad (171.6)$$

т. е. расширение или сжатие модели приводит к изменению температуры излучения черного тела по закону (171.6). Именно это мы и хотели показать.

Так как энтропия излучения черного тела выражается через температуру и объем с помощью хорошо известной формулы (65.5):

$$S = \frac{4}{3} aT^3 v, \quad (171.7)$$

то энтропия каждого данного элемента $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ будет оставаться постоянной, потому что согласно предыдущим уравнениям

$$S = \frac{4}{3} aT_1^3 \delta v_1 = \frac{4}{3} aT_2^3 \delta v_2 = \text{const.} \quad (171.8)$$

Таким образом, и в случае модели, заполненной только излучением черного тела, энтропия каждого элемента $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ будет оставаться постоянной, а значит, расширение и сжатие даже при конечной скорости будут происходить обратимо. Более того, если мы, так же как и в предыдущем случае, положим космологическую постоянную Λ равной нулю, то придем к такого рода закрытым моделям, развитие которых во времени происходит не только обратимо, но в которых на самом деле расширение сменяется сжатием: зависимость радиуса таких моделей от времени определяется выражением (163.6):

$$R = \sqrt{\beta - t^2}, \quad (171.9)$$

где β — постоянная.

С точки зрения исследования обратимости модель, заполненная излучением черного тела, по-видимому, более интересна, чем модель, заполненная пылевидными частицами с нулевым давлением, поскольку в первой процессы расширения и сжатия носят чисто термодинамический характер, в то время как во второй

расширение и сжатие могут оказаться чисто механическими и поэтому обратимыми по совершенно естественной причине.

Точно так же, очевидно, нужно ожидать, что обратимо будет происходить и эволюция моделей, которые содержат смесь из пылевидных частиц и не взаимодействующего с ними излучения. Однако по мере уменьшения размеров частиц их тепловое движение перестает быть пренебрежимо малым и возникает некоторая необратимость, которая происходит из-за того, что при конечной скорости изменения объема перераспределение энергии между частицами и сопровождающим их излучением запаздывает, в результате чего термодинамическое равновесие полностью не успевает устанавливаться.

После всего вышесказанного, по-видимому, не имеет смысла обсуждать, каковы должны быть строгие — явно переальные — условия, при которых изменения объема с конечной скоростью могут происходить полностью обратимо. Важнее подчеркнуть тот факт, что в наших космологических моделях отсутствуют необратимые потоки тепла, трение и градиенты давления, которые являются настолько обычными источниками необратимости в термодинамических процессах, что мы даже забываем, насколько именно их присутствие важнее для необратимости, нежели сама по себе конечная скорость процессов *).

§ 172. Невозможность периодических движений без сингулярных состояний

После того, как мы рассмотрели примеры тех закрытых космологических моделей, радиус которых осциллирует термодинамически обратимо между минимальным значением, отвечающим сингулярному состоянию, и конечным максимумом, следует еще выяснить, не возможна ли чисто осцилляторная эволюция, когда объем любого элемента жидкости периодически меняется между конечным максимальным и несингулярным минимальным значениями. Это были бы периодические колебания второго рода, типа O_2 , и они, как было уже показано в § 157, д, не лишены правдоподобности. Однако теперь мы можем показать, что если заключенной в модели жидкости приписать разумные свойства, то никакие точно периодические движения подобного рода невозможны [106], и, более того, даже непериодические колебания указанного типа тоже невозможны.

Вспоминая, что зависимость интервала (166.1) от времени для рассматриваемых моделей определяется величиной $g(t)$, запишем условия периодичности колебаний модели между

*) Этот и более сложный пример обратимого поведения с конечной скоростью можно найти у Толмса [111, 112].

конечными максимумом и минимумом в следующем виде:

$$g_1 < g_2, \quad \dot{g}_1 = \dot{g}_2 = 0, \quad \ddot{g}_1 \geq 0, \quad \ddot{g}_2 \leq 0, \quad (172.1)$$

где точки означают дифференцирование по времени, а индексы 1 и 2 указывают, что соответствующие величины относятся к минимуму и максимуму соответственно. Эти выражения совместно с выражениями для собственной плотности и давления жидкости в модели

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R_0^2} e^{-g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda \quad (172.2)$$

и

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda$$

позволяют установить, какими свойствами должна обладать жидкость, чтобы были возможны постулированные минимум и максимум. Так как мы хотим исследовать одновременно и открытые и закрытые модели, то следует рассмотреть три случая: $R_0^2 > 0$, $R_0^2 = \infty$ и $R_0^2 < 0$, соответствующие закрытым, плоским открытым и искривленным открытым моделям соответственно.

Для случая $R_0^2 > 0$ из предыдущего легко получается, что давление и плотность в точках минимума и максимума должны подчиняться соотношениям

$$\rho_1 > \rho_2, \quad p_1 < p_2. \quad (172.3)$$

Только при выполнении (172.3) возможны колебания рассматриваемого типа; но эти неравенства означают, что плотность жидкости должна *уменьшиться* в отношении $e^{3/2 g_1}$ к $e^{3/2 g_2}$ после возрастания объема от минимального значения к максимальному. Давление же при этом должно *возрасти*, в согласии с тем необходимым условием возникновения осцилляций типа O_2 в закрытых моделях с положительным давлением, которое было найдено в § 157, д.

Однако ясно, что для осуществления строго периодических колебаний между каким-либо минимумом и максимумом поведение каждого элемента жидкости должно быть термодинамически обратимым, так как иначе система не смогла бы снова и снова возвращаться в одно и то же состояние. Следовательно, в свете всего вышесказанного очевидно, что если мы не будем рассматривать жидкостей с нереальными свойствами, в которых давление при *обратимом* адиабатическом *расширении* *возрастает*, то строго периодические колебания нужно будет из рассмотрения исключить.

Если колебания не строго периодические, а происходят всего один или несколько раз между минимумами и максимумами, которые в свою очередь не обязательно неизменны, то требование термодинамической обратимости может быть отброшено. Подобного рода осцилляции могли бы оказаться совместимыми с вышеприведенными условиями, если бы, например, при расширении происходило резкое необратимое увеличение количества излучения так, чтобы в максимуме давление было достаточно высокое и могло бы привести к обращению движения. Тем не менее трудно себе представить, что давление затем при сжатии может снова упасть до такой величины, которая необходима для достижения второго минимума.

Для случая $R_0^2 = \infty$, к которому мы теперь обратимся, учет (172.1) и (172.2) приводит к равенству

$$\rho_1 = \rho_2, \quad (172.4)$$

а для случая $R_0^2 < 0$ необходимое условие для осцилляций рассматриваемого типа принимает вид

$$\rho_1 < \rho_2. \quad (172.5)$$

Однако из уравнения для энергии (151.6) следует, что приращение плотности при изменении g равно

$$d\rho_{00} = -\frac{3}{2}(\rho_{00} + \rho_0) dg. \quad (172.6)$$

Поэтому вышеприведенные условия могли бы выполняться только в неизвестной нам жидкости, в которой отрицательное давление может достигать величины, равной плотности ее энергии.

С учетом всего только что сказанного ясно, что, во всяком случае на современном теоретическом уровне, мы можем отбросить однородные модели, в которых элементы жидкости испытывают либо строго периодические расширения и сжатия, либо какие-нибудь другие последовательные изменения объема между конечными минимумом и максимумом. Однако все это ни в коей мере не исключает возможность существования первоначально изученных моделей, колеблющихся между нижним сингулярным радиусом и конечным максимумом.

§ 173. Интерпретация обратимого расширения обычным наблюдателем

В предыдущих параграфах мы выяснили, что расширения и сжатия в наших космологических моделях могут происходить с конечной скоростью и при этом либо полностью термодинамически обратимо, либо по крайней мере без тех источников

необратимости, какие обычно сопровождают процессы, протекающие с конечной скоростью в системах малых размеров. Оказывается, что те термодинамические процессы, которые неискушенный наблюдатель может принять за необратимые просто потому, что они идут с конечной скоростью, на самом деле могут быть обратимыми. Этой возможной ошибке следует избегать, если мы хотим получить правильное представление о космологических явлениях.

Для конкретности рассмотрим самую простую, исследованную в § 171, модель, заполненную исключительно излучением черного тела, и пусть она в рассматриваемый момент времени обратимо расширяется, т. е. величина $g(t)$ в формуле интервала

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2 \quad (173.1)$$

возрастает со временем t .

Будем при этом четко разграничивать *результаты наблюдений*, получаемые *локальным наблюдателем*, неподвижным относительно r , θ и φ , а значит, и покоящимся относительно среднего потока энергии, и *интерпретацию* этих результатов, которую он может предложить, опираясь на законы классической термодинамики, если этот обычный наблюдатель не знаком с релятивистской термодинамикой и ничего не знает о происходящем расширении модели.

Для удобства поместим нашего обычного наблюдателя в начало координат, и пусть он исследует содержимое Вселенной в малой области в непосредственной близости от себя с целью получить результаты, необходимые для интерпретации. При этом предположим, что, ничего не зная об общем расширении, он ограничивает область исследования не определенным элементом жидкости, а определяет ее прикладыванием измерительных стержней, описывая таким образом сферу с центром в начале координат и с постоянным собственным радиусом

$$l_0 = \text{const.} \quad (173.2)$$

Если взять сферу достаточно малого размера, с тем чтобы можно было пренебречь членами порядка $r^2/4R_0^2$ по сравнению с единицей, то координату r на границе сферы можно представить в виде

$$r = l_0 e^{-1/2g} \quad (173.3)$$

Она будет меняться со временем по закону

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2} l_0 e^{-1/2g} \frac{dg}{dt}. \quad (173.4)$$

При этом собственный объем сферы будет оставаться постоянным:

$$v_0 = \frac{4}{3} \pi l_0^3. \quad (173.5)$$

Далее, чтобы выяснить, какие результаты получит наш наблюдатель в этой области, мы воспользуемся энергетическим уравнением (166.7), переписанным для удобства в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_{00} e^{3/2g} \right) + p_0 \frac{d}{dt} \left(e^{3/2g} \right) = 0, \quad (173.6)$$

и выражениями, связывающими собственную плотность, давление и температуру:

$$\rho_{00} = a T_0^4, \quad p_0 = \frac{a}{3} T_0^4. \quad (173.7)$$

Эти выражения справедливы для излучения черного тела, но мы как раз и предположили, что именно оно заполняет нашу модель.

Теперь легко видеть, какие выводы сделает наш наблюдатель. Он обнаружит вблизи себя, что плотность энергии и давление уменьшаются со скоростью:

$$\frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{dt} = \frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{dt} = -2 \frac{dg}{dt}, \quad (173.8)$$

температура в этой же области падает со скоростью:

$$\frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dg}{dt}, \quad (173.9)$$

а число фотонов внутри очерченной им сферы из-за наличия потока через границу уменьшается со скоростью:

$$\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dg}{dt}. \quad (173.10)$$

Более того, очевидно, если наш наблюдатель поместит на границе своей сферы помощника и попросит его сравнивать частоты уходящих фотонов с частотами приходящих, то, поскольку помощник, согласно уравнению (173.4), не будет неподвижен относительно наблюдателя, он обнаружит, что частоты

приходящих фотонов сдвинуты в красную сторону относительно измерений наблюдателя, который неподвижен относительно координат r , θ , φ и относительно которого фотоны с различными частотами распределены изотропно.

Таким образом, наш обыкновенный наблюдатель обнаружит, что температура в непосредственной близости от него постоянно падает и что существует поток энергии, направленный от центра наружу, к областям Вселенной с, очевидно, еще более низкой температурой. Все это он будет склонен интерпретировать с классической точки зрения как доказательство общего убывания энергии. Отсюда он может сделать ошибочный вывод, что Вселенная эволюционирует необратимо. На самом деле более последовательное релятивистское рассмотрение показывает, что эволюция выбранной нами модели является полностью обратимой: при определенном значении Λ модель не только достигнет максимума расширения, но и возвратится в прежний объем, обладая при этом скоростью, противоположной первоначальной.

Конечно, наша модель очень идеализирована, так как не содержит ничего, кроме излучения черного тела. Однако эволюция модели будет обратимой и в том случае, когда внутри нее содержится не только излучение черного тела, но и пылевидное вещество, если только взаимодействием между ними можно пренебречь. При этом опять можно обнаружить, что во время расширения якобы существует поток излучения, направленный от локального наблюдателя. Более того, как показывает прямой расчет (расчет был произведен для модели, содержащей смесь излучения и идеального одноатомного газа) [112], даже в том случае, когда взаимодействие между веществом и излучением имеет место и они могут переходить друг в друга, все равно модель может расширяться обратимым образом, лишь бы только взаимодействие между веществом и излучением происходило (в противоположность нашим предположениям) достаточно быстро, чтобы успевало установиться равновесие. Оказывается, что в такой модели обратимое расширение сопровождается не только потоком излучения, направленным наружу, но, за исключением чрезвычайно высоких температур, и аннигиляцией материи.

Главное, что следует отметить в связи со всем вышесказанным, состоит в следующем: с помощью обратимо расширяющейся космологической модели довольно нетрудно имитировать процессы в реальной Вселенной, которые с точки зрения старых принципов легко принять за необратимые. Это, конечно, не означает, что в реальной Вселенной не имеют места необратимые процессы, просто каждый раз нужно к изучению космологии подходить с релятивистских, а не классических термодинамических позиций.

§ 174. Аналитическое исследование последовательных расширений и сжатий в закрытой модели с $\Lambda=0$.

Так как на самом деле необратимые термодинамические процессы в реальной Вселенной все же имеют место, то необратимому поведению космологических моделей тоже следует уделить внимание. Чтобы подготовиться к решению возникающих здесь проблем, рассмотрим эволюцию закрытых моделей с Λ , равной нулю, аналитически, допуская при этом как термодинамическую обратимость, так и необратимость. Мы выбрали именно эти модели главным образом потому, что, как уже указывалось раньше, естественнее всего положить Λ равным нулю. Кроме того, в закрытых моделях с нулевой Λ те новые релятивистские черты, которые мы собираемся изучать, проявляются наиболее выпукло.

Мы уже видели в § 157, е, что модели указанного типа могут только расширяться от нижнего сингулярного состояния до конечного максимума и затем сжиматься снова к малым объемам. Теперь мы исследуем это поведение более подробно [113].

Для рассматриваемых моделей формулу интервала можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (174.1)$$

а выражения для собственных давления и плотности взять из (150.7) и (150.8):

$$8\pi p_0 = - \frac{1}{R_0^2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 \quad (174.2)$$

и

$$8\pi \rho_0 = \frac{3}{R_0^2} e^{-g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2, \quad (174.3)$$

где Λ мы приняли равной нулю, а R_0^2 , согласно предположению о том, что модель закрыта, следует считать больше нуля:

$$R_0^2 > 0. \quad (174.4)$$

Далее, из физических соображений следует, что

$$\rho_{00} \geq 0, \quad (174.5)$$

так как плотность материи в модели может быть только положительной или нулем. Точно так же следует принять, что

$$p_0 \geq 0, \quad (174.6)$$

так как мы будем рассматривать модель, заполненную смесью материи и излучения, в которой может существовать положительное давление, но которая не может противостоять растяжению.

а) **Верхняя граница расширения.** Предположив, что в начальный момент времени $t=0$ модель имеет конечный объем и конечную скорость расширения, т. е.

$$g = g_0, \quad \dot{g} = \dot{g}_0, \quad (174.7)$$

можно показать, что возрастание $g(t)$ будет происходить только до некоторого конечного предела, вне зависимости от того, является ли расширение обратимым или необратимым.

Учитывая уравнение (174.2) и неравенство (174.6), можно записать:

$$\ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \frac{1}{R_0^2} e^{-g} \leq 0; \quad (174.8)$$

если же умножить это выражение на величину $2e^{3/2g} \dot{g}$, которая является положительной, поскольку \dot{g} при расширении положительно, то неравенство преобразуется к следующему виду:

$$2e^{3/2g} \dot{g} \ddot{g} + \frac{3}{2} e^{3/2g} \dot{g}^3 + \frac{2}{R_0^2} e^{1/2g} \dot{g} \leq 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(e^{3/2g} \dot{g}^2 \right) + \frac{4}{R_0^2} \frac{d}{dt} \left(e^{1/2g} \right) \leq 0. \quad (174.9)$$

Это неравенство выполняется все время, пока g возрастает.

Интегрируя (174.9) между $t=0$ и интересующим нас моментом $t=t$ и подставляя начальные значения g и \dot{g} из (174.7), получаем

$$e^{3/2g} \dot{g}^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2g} \leq e^{3/2g_0} \dot{g}_0^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2g_0} \quad (174.10)$$

или, вспоминая, что согласно (174.4) R_0^2 положительно, находим

$$e^{1/2g} \leq e^{1/2g_0} + \frac{R_0^2}{4} e^{3/2g_0} \dot{g}_0^2 - \frac{R_0^2}{4} e^{3/2g} \dot{g}^2 \quad (174.11)$$

все время, пока g возрастает. Следовательно, так как g_0 и \dot{g}_0 по предположению конечны, то g не может превосходить некоторого конечного верхнего предела, т. е.

$$g \leq \gamma, \quad (174.12)$$

где γ — конечная величина.

б) **Время, необходимое для достижения максимума.** С учетом полученного результата легко далее показать, что g достигнет максимального значения и начнет убывать за конечное время.

Учитывая неравенства (174.8) и (174.12), получаем

$$\ddot{g} \leq -\frac{1}{R_0^2} e^{-\gamma} - \frac{3}{4} \dot{g}^2,$$

или

$$\frac{d\dot{g}}{dt} \leq -\frac{1}{R_0^2} e^{-\gamma}, \quad (174.13)$$

откуда, интегрируя между $t=0$ и каким-либо интересующим нас моментом, находим

$$\dot{g} \leq \dot{g}_0 - \frac{1}{R_0^2} e^{-\gamma} t,$$

где \dot{g}_0 — начальное значение dg/dt . Отсюда, однако, следует, что $g(t)$ достигнет своего максимума за конечное время

$$t \leq R_0^2 e^{\gamma} \dot{g}_0 \quad (174.14)$$

и после этого начнет убывать.

в) **Время, нужное для полного сжатия.** Интересно также рассмотреть эволюцию модели после того, как она достигнет максимума и начнет сжиматься. Так как \dot{g} , очевидно, становится при этом отрицательным, то умножение (174.8) на отрицательную величину $2e^{3/2 g}$ и последующее интегрирование, как это делалось при выводе (174.10), приводит к выражению

$$e^{3/2 g} \dot{g}^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2 g} \geq e^{3/2 g_m} \dot{g}_m^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2 g_m},$$

где g_m и \dot{g}_m — значения g и \dot{g} при переходе через максимум в момент $t=t_m$. Но так как при переходе через максимум скорость равна нулю, то $\dot{g}_m=0$, и результат можно переписать в виде

$$e^{3/2 g} \dot{g}^2 \geq \frac{4}{R_0^2} \left(e^{1/2 g_m} - e^{1/2 g} \right).$$

Далее, поскольку \dot{g} , отрицательно, а R_0 действительно и положительно, что соответствует закрытой модели, то это неравенство

эквивалентно следующему:

$$e^{3/4 g} \frac{dg}{dt} \leq - \frac{2}{R_0} \sqrt{e^{1/2 g_m} - e^{1/2 g}}. \quad (174.15)$$

Полученное выражение легко проинтегрировать между моментом t_m , когда модель переходит через максимум, и каким-то более поздним моментом t ; при этом получается

$$t - t_m \leq R_0 \left\{ e^{1/4 g} \sqrt{e^{1/2 g_m} - e^{1/2 g}} - e^{1/2 g_m} \arcsin \frac{e^{1/4 g}}{e^{1/4 g_m}} + \frac{1}{2} \pi e^{1/2 g_m} \right\}. \quad (174.16)$$

Из этого выражения следует, что уже за конечное время

$$t - t_m \leq \frac{1}{2} \pi R_0 e^{1/2 g_m} \quad (174.17)$$

после прохождения максимума значение g уменьшится до минус бесконечности, если только раньше не возникнет сингулярное состояние.

г) **Поведение вблизи предельного сжатия.** Предыдущие рассуждения показывают, что модель, начиная расширяться в некоторый начальный момент с заданными значениями g_0 и \dot{g}_0 , достигнет через конечное время максимума и начнет сжиматься, причем сжатие будет происходить с достаточной скоростью, чтобы g могло уменьшиться до минус бесконечности за конечное время. Теперь мы должны выяснить, что же будет происходить на нижнем пределе сжатия.

Прежде всего, так как собственный объем любого элемента жидкости в модели всегда пропорционален $e^{3/2 g}$, то уже из физических соображений ясно, что наибольшее сжатие ограничено снизу значениями $e^{3/2 g} = 0$, $g = -\infty$. Далее, согласно (174.15), когда $e^{3/2 g}$ достигнет нулевого значения, мы будем иметь

$$\dot{g} = -\infty \quad (174.18)$$

и одновременно согласно (174.8)

$$\ddot{g} = -\infty. \quad (174.19)$$

Так что условия для аналитического минимума не удовлетворяются и теория не может описать процесс перехода модели через эту точку.

Следовательно, поскольку из физических соображений сжатие не может происходить дальше точки $e^{s/a} = 0$, то для того, чтобы фундаментальные уравнения, определяющие эволюцию модели, оставались справедливыми, необходимо заставить модель вновь расширяться от некоторого сингулярного состояния наибольшего сжатия. При этом сингулярное состояние, естественно, не обязательно должно наступать точно в точке $e^{s/a} = 0$, оно может наступить и в некоторой окрестности этой точки.

К сожалению, наши дифференциальные уравнения не в состоянии описать механизм перехода через предельное сжатие, хотя из физических соображений ясно, что какой-то механизм обязательно должен существовать. Как предполагал Эйнштейн [105], возможно, что идеализации — например, такие, как полная однородность модели, — на которых был основан весь анализ, могут стать вблизи максимального сжатия незаконными. Ситуация здесь подобна тому, как если бы мы пытались описывать поведение упругого мяча, прыгающего по полу, с помощью только уравнения движения в гравитационном поле:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g. \quad (174.20)$$

Этого уравнения вполне достаточно, чтобы описать движение мяча до наивысшей точки и его падение вниз, однако оно ничего не говорит нам о механизме отскакивания, когда мяч достигает пола. Здесь уже необходимо привлекать размеры и упругие свойства мяча, чтобы что-нибудь сказать о переходе через наименьшее состояние.

Таким образом, окончательный результат этого параграфа состоит в том, что при $\Lambda=0$ возможное поведение закрытой однородной модели, заполненной жидкостью, не способной противостоять растяжению, будет состоять в периодических сжатиях и расширениях. При этом во время расширения от сингулярного состояния, возникшего при предыдущем сжатии, до максимальных размеров $g(t)$ возрастает и затем возвращается вновь к сингулярному состоянию, после чего расширение должно повториться. Далее, если в любой заданный начальный момент времени величина g и скорость ее возрастания \dot{g} конечны, то конечным будет и максимальное значение g_m , и время, необходимое для полного завершения цикла сжатия и расширения. Наконец, следует отметить, что эти выводы были получены без всяких ссылок на обратимость или необратимость эволюции модели, поэтому они справедливы как для последовательности *тожде-*

ственных расширений и сжатий, соответствующих обратной эволюции, так и для последовательности *меняющихся* расширений и сжатий, отвечающих необратимой эволюции.

§ 175. Термодинамика необратимых колебаний

Как уже указывалось в главе IX, непрерывная последовательность необратимых расширений и сжатий для моделей, рассмотренных в предыдущем параграфе, может показаться очень странной с точки зрения классической термодинамики, которая утверждает, что изолированная система в результате необратимых процессов должна прийти к окончательному состоянию покоя, обладающему максимальной энтропией. Поэтому интересно посмотреть, что нового в этом отношении может дать для наших исследований релятивистская термодинамика [114].

Как следует из § 169, где были рассмотрены условия обратной и необратимой эволюции однородных моделей, последовательность необратимых расширений и сжатий сопровождается непрерывным ростом собственной энтропии каждого выбранного элемента жидкости в модели, что видно из знака неравенства в выражении

$$\frac{d}{dt} (\varphi_0 \delta v_0) > 0. \quad (175.1)$$

Таким образом, хотя модель во время расширения или сжатия может проходить через состояния, в которых в некоторый момент выполняются условия, соответствующие физико-химическому равновесию, тем не менее очевидно, что энтропия каждого элемента жидкости в конечном счете должна возрасти беспредельно, покуда происходят необратимые сжатия и расширения. Возможность беспредельного роста энтропии требует еще своего обоснования, поскольку в классической термодинамике мы привыкли к мысли о том, что энтропия любой изолированной системы имеет конечную верхнюю границу.

Чтобы исследовать этот вопрос, мы можем, очевидно, принять, что собственная энтропия любого малого элемента жидкости, измеряемая локальным наблюдателем, зависит от состояния так же, как и в классической термодинамике, т. е.

$$d(\varphi_0 \delta v_0) = \frac{1}{T_0} d(\rho_{00} \delta v_0) + \frac{p_0}{T_0} d(\delta v_0) + \\ + \frac{\partial(\varphi_0 \delta v_0)}{\partial n_1^0} dn_1^0 + \dots + \frac{\partial(\varphi_0 \delta v_0)}{\partial n_n^0} dn_n^0, \quad (175.2)$$

где собственная энергия элемента $\rho_{00} \delta v_0$, его собственный объем δv_0 и концентрации n_1^0, \dots, n_n^0 различных химических компо-

мент — независимые переменные, с помощью которых состояние определяется однозначно.

Используя это уравнение для изучения непрерывного роста энтропии, который должен иметь место при необратимых расширениях и сжатиях, мы замечаем, что поскольку, согласно § 166, из первого закона термодинамики следует:

$$\frac{d}{dt} (p_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0, \quad (175.3)$$

то непосредственная причина возрастания энтропии никак не связана с первыми двумя членами в правой части (175.2), поскольку их сумма всегда равна нулю. Поэтому внутренний механизм, с помощью которого энтропия на самом деле все время возрастает, обязан своим происхождением остальным членам в правой части, согласно которым химический состав необратимым образом стремится к равновесному значению.

На первый взгляд может показаться, что перераспределение концентраций может дать только ограниченное возрастание энтропии, так как классическая термодинамика приучила нас к мысли о существовании максимума энтропии в системе с заданной энергией и объемом. Однако рассматриваемый процесс отличается от классического случая изолированной системы тем, что собственная энергия любого выбранного элемента жидкости в модели не обязана оставаться постоянной. Действительно, из (175.3) следует, что собственная энергия каждого элемента жидкости уменьшается со временем при расширении и увеличивается со временем при сжатии. Следовательно, если давление при сжатии окажется больше, чем при предыдущем расширении, что возможно из-за отставания условий равновесия, то элемент жидкости может вернуться к своему первоначальному объему с возросшей энергией и, следовательно, также с возросшей энтропией.

Таким образом, хотя внутренний механизм возрастания энтропии в каждый момент времени связан с перераспределением концентраций — например, на последних стадиях расширения растет диссоциация, а на последних стадиях сжатия растет рекомбинация, — тем не менее непрерывное возрастание энтропии в продолжение долгого промежутка времени может происходить именно благодаря тому, что возрастает собственная энергия каждого элемента жидкости в модели.

Как показано в § 131 предыдущей главы, ситуация здесь аналогична классическому случаю цилиндра с теплоизолированными стенками и движущимся поршнем, в котором происходит непрерывная последовательность сжатий и расширений диссоциирующего газа. При этом энтропия и энергия непрерывно

возрастают до тех пор, пока хватает внешней энергии для очередного сжатия. В релятивистском же случае источником внешней энергии может служить потенциальная энергия гравитационного поля, связанная с плотностью эйнштейновского псевдотензора t_{μ}^{ν} . Аналогичным образом можно рассмотреть и необратимые расширения и сжатия смеси вещества и излучения. В этом случае отставание от равновесия на поздних стадиях расширения можно было бы объяснить двумя причинами: во-первых, часть вещества не успевает перейти в излучение, и, во-вторых, часть излучения не успевает высвободиться из вещества. Эти возможности могут быть интересными для описания реальной Вселенной.

Установив, что непрерывная последовательность необратимых расширений и сжатий в рассматриваемых моделях приводит к неуклонному возрастанию собственной энергии элементов жидкости, если они возвращаются к одному и тому же объему, мы должны теперь исследовать, как влияет рост энергии на характер все более и более поздних циклов. Это можно легко сделать, если воспользоваться выражением для плотности энергии (174.3) и переписать его в следующем виде:

$$8\pi\rho_0 e^{3/2g} = \frac{3}{R_0^2} e^{1/2g} + \frac{3}{4} e^{3/2g} \dot{g}^2, \quad (175.4)$$

где в левой части стоит величина, пропорциональная собственной энергии некоторого выбранного элемента жидкости с собственным объемом

$$\delta v_0 = \frac{r^2 \sin^2 \theta e^{3/2g}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi. \quad (175.5)$$

Из этих формул видно, что объем любого элемента жидкости возвращается к прежнему значению тогда, когда возвращается к своему прежнему значению $g(t)$. При этом энергия при возвращении может увеличиться только в том случае, если увеличится квадрат скорости \dot{g}^2 . Теперь легко установить разницу между характером данного цикла и более поздних. Она показана на рис. 10, где поздний цикл имеет бóльшие значения $|\dot{g}|$ при данном значении $e^{1/2g}$ и, следовательно, достигает большего максимума.

Так как величина плотности энергии в момент максимального расширения равна

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R_0^2} e^{-g}, \quad (175.6)$$

а величина g в максимуме в конечном счете возрастает без предела, то отсюда видно, что плотность энергии в максимуме становится все меньше и меньше для все более поздних циклов. Следовательно, мы можем сделать вывод, что модель будет проводить все большую и большую часть своего периода в состоянии с более низкой плотностью, чем, например, та, которая наблюдается в реальной Вселенной в настоящее время, хотя к

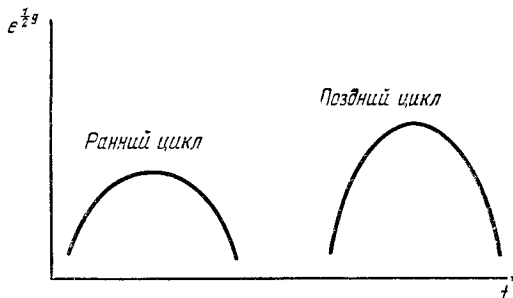


Рис. 10.

состояниям с большими плотностями модель всякий раз возвращаться все-таки будет. Следует, однако, иметь в виду, что полученные выше результаты, касающиеся плотности энергии в максимуме расширения, не распространяются, вообще говоря, на все необратимо осциллирующие модели с иными значениями Λ и R_0^2 .

В заключение этой части главы X нужно отметить следующее. Так как на современном этапе мы очень мало знаем о том, что реально происходит с окружающей нас частью Вселенной в течение длительного промежутка времени, то мы не можем ожидать, что приложение термодинамики к космологическим моделям позволит немедленно объяснить явления в реальном мире, однако приведенные выше исследования все же не лишены интереса, поскольку они демонстрируют, как важно для успешного решения проблем космологии пользоваться не классической термодинамикой, а релятивистской. Тем не менее следует упомянуть о двух результатах, непосредственно связанных с реальной космологией.

Во-первых, выше предполагалось, что современное состояние реальной Вселенной или той ее части, которая лежит в пределах наших наблюдений, возможно, является результатом необратимого расширения, начавшегося от более раннего состояния с чрезвычайно малым объемом, похожего на сингулярные состояния в однородных моделях. В этом сингулярном состоянии с очень малым объемом жидкость, заполняющая модель, должна бы иметь очень высокие плотность, давление и температуру;

условия термодинамического равновесия были бы сдвинуты в сторону большей роли эндотермических химических реакций по сравнению с теми, которые в основном происходят сейчас вокруг нас. При этом в главе V было показано, что реально имеющееся во Вселенной относительное содержание водорода и гелия, различных изотопов, а возможно, также и вещества и излучения свидетельствует о сильном преобладании эндотермических веществ, которого не должно было бы быть, если бы всегда были те же условия равновесия, что и сейчас. Следовательно, не лишено правдоподобия предположение, что существующие сейчас пропорции являются результатом медленных необратимых процессов, начавшихся еще на ранней стадии, когда материя была сильно сжата и имела высокие температуру и плотность.

Во-вторых, мы можем по-новому взглянуть на перспективы развития реальной Вселенной. Выше было найдено, что некоторый класс моделей может необратимо сжиматься и расширяться, никогда не достигая состояния с максимальной энтропией. Из этого, конечно, нельзя сделать категорический вывод, что реальная Вселенная никогда не достигнет состояния с максимальной энтропией, при котором невозможны дальнейшие изменения, тем не менее пример некоторых моделей должен оказать существенное влияние на наши термодинамические представления. По крайней мере, представляется разумным, если мы не будем больше догматически утверждать, что принципы термодинамики с необходимостью приводят к выводу о том, что Вселенная была создана в конечный момент в прошлом и будет деградировать к смерти в будущем.

ЧАСТЬ IV

РЕАЛЬНАЯ ВСЕЛЕННАЯ И ОДНОРОДНЫЕ НЕСТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 176. Введение

Можно указать три соображения в пользу того, почему мы столь подробно разбираем свойства нестатических однородных моделей *). Во-первых, попытка получения следствий из некоторой системы математических допущений (даже и без ссылок на их физические применения) сама по себе интересна и доставляет интеллектуальное удовлетворение. Во-вторых, мы основыв-

*) Со времени написания книги объем экспериментального материала сильно увеличился. Особенно много дало исследование квазизвездных объектов (квазаров), расстояние до которых доходит, по-видимому, до $(10-15) \cdot 10^9$ световых лет. Однако анализ Толмена был первым тщательным сравнением теории и наблюдений; в этом смысле его интересно прочесть и сейчас. Новые данные читатель найдет в упоминавшейся уже книге Вейнберга. (Прим. ред.)

ваем наши рассуждения на разумной физической теории и поэтому можем ожидать, что теоретическое поведение наших моделей поможет нам чувствовать себя более свободными в наших рассуждениях о принципиально возможном поведении реальной Вселенной. В-третьих, и это, по-видимому, самое главное, мы имеем право надеяться, что, построив модель, в которой удачно объясняются и связываются между собой явления, наблюдаемые в современной Вселенной, мы сможем позволить себе сделать осторожные экстраполяции как в будущее, так и в прошедшее и при этом получить не слишком ошибочные представления относительно прошлой и будущей истории окружающей нас части Вселенной.

Именно с этой стороны нестатические однородные модели будут нас теперь интересовать прежде всего. Раньше мы только мслыком упоминали, что с их помощью можно связать между собою различные явления в реальном мире. Теперь же мы займемся этим вопросом вплотную. Следует при этом оговорить, что по мере возможности мы будем придерживаться феноменологической точки зрения. Рассмотрим полученный для наших моделей интервал ds^2 . Будем считать, что выражение для него имеет только приближенный характер и перестает быть справедливым как на больших расстояниях, так и при больших временах. Далее, попытаемся получить какую-нибудь информацию о функции $g(t)$, которая появляется в выражении для интервала и определяет поведение моделей, не с помощью каких-либо гипотез относительно происхождения и дальнейшей судьбы Вселенной, а более скромным путем, разлагая функцию $g(t)$ в степенной ряд около текущего момента времени и определяя, насколько это нам удастся, максимальное возможное количество коэффициентов ряда, исходя из имеющихся данных наблюдений.

В следующем, довольно длинном параграфе, который разделен на несколько пунктов, мы прежде всего рассмотрим имеющиеся в нашем распоряжении данные наблюдений и покажем, как они позволяют нам судить о составе и о внутренней структуре реальной Вселенной. Единственными объектами вне нашей собственной Галактики, о которых мы хоть что-то знаем, являются туманности. Астрономические наблюдения позволяют нам определить их звездные величины, расстояния, спектры, диаметры, массы и характер их распределения по Вселенной. Точной информацией относительно природы и поведения этих объектов мы обязаны прежде всего работам Хаббла, а также Хаббла и Хьюмаса. Здесь мы не будем касаться проблем сбора материала наблюдений, но зато более подробно остановимся на их интерпретации. В следующих параграфах мы с помощью нестатических моделей попытаемся связать воедино все имеющиеся в нашем распоряжении данные наблюдений.

§ 177. Данные наблюдений

а) **Абсолютная звездная величина ближайших туманностей.** Важнейший вклад в науку о внегалактических туманностях внесла работа Хаббла и Хьюмасаона [115], в которой были определены звездные величины и расстояния до этих объектов. Их работа подразделяется на три части. Сначала определяется *средняя абсолютная величина* большого числа *ближайших туманностей* путем непосредственного наблюдения входящих в их состав отдельных звезд. Затем из наблюдений находят *видимые величины* более *удаленных туманностей*, объединенных в группы, или скопления. Наконец, с учетом предыдущих результатов вычисляются *расстояния* до скоплений.

В этом пункте мы рассмотрим, как определяются абсолютные звездные величины ближайших галактик, вопросы же, связанные с определением видимых величин и расстояний до наиболее удаленных туманностей, будут рассмотрены в следующих двух пунктах этого параграфа.

Звезды, отождествляемые внутри ближайших внегалактических туманностей, относятся к следующим типам: переменные звезды-цефеиды, неправильные переменные, гелиевые звезды (классов В₀ и О), звезды типа Р Лебеда и Новые звезды. Определив звездные величины и периоды цефеид и используя нуль-пункт нормировки зависимости период — светимость для цефеид из работы Шепли 1930 г. [116], Хаббл и Хьюмасаон нашли расстояние до восьми ближайших внегалактических туманностей*). Вместе с двумя Магеллановыми Облаками, расстояния до которых были найдены Шепли, имелось, таким образом, по крайней мере десять внегалактических объектов с достаточно хорошо определенными расстояниями. Причем эти расстояния были подтверждены при наблюдении звезд других типов, входящих в указанные туманности.

Зная расстояния до этих десяти объектов и принимая во внимание их полные наблюдаемые визуальные величины, измеренные Холечеком и исправленные Хопманом [117], а частично найденные из других источников, Хаббл и Хьюмасаон могли найти абсолютные визуальные величины этих туманностей, т. е. величины, которые они имели бы, будучи расположенными на стандартном расстоянии 10 пс. Оказалось, что абсолютные визуальные величины в среднем равны —14,7 с полным разбросом 5,0 и средней ошибкой 1,5.

Кроме тех галактик, в которых удается выделить звезды отдельных классов, Хаббл и Хьюмасаон определили также и абсо-

*) Включая также двух спутников туманности М 31, которые предполагаются находящимися на том же расстоянии, что и сама М 31.

плотные звездные величины тех туманностей, в которых удается установить только наличие звездной структуры. Для этой цели им понадобилась лишь светимость самых ярких звезд в туманностях. У восьми из десяти указанных выше объектов*) абсолютные звездные величины самых ярких звезд составляли в среднем $-6,1$ с разбросом всего лишь $1,8$ и средней ошибкой $0,4$. Так как разброс звездных величин самых ярких звезд значительно меньше, чем разброс звездных величин самих туманностей, естественно предположить, что самые яркие звезды в этих объектах имеют более или менее постоянную величину, независимо от того, в какой туманности они расположены. Справедливость этого предположения подтверждается еще и следующим фактом. Если составить разность между наблюдаемой звездной величиной всей туманности и звездной величиной самых ее ярких звезд, то окажется, что разброс разностей для различных галактик может быть целиком отнесен за счет разброса звездных величин галактик в целом. Поэтому кажется вполне оправданным взять число $-6,1$ как абсолютную величину самых ярких звезд, в какой бы туманности они ни были, а затем получить звездную величину туманности, добавляя разность между наблюдаемыми звездными величинами туманности и ее самых ярких звезд. Приняв во внимание указанные соображения, Хаббл и Хьюматон рассмотрели 40 объектов, в которых можно различить звездную структуру, и нашли, что средняя разность между наблюдаемыми суммарными звездными величинами туманностей и их самых ярких звезд составляет $-8,88$ с разбросом $4,9$ и средней ошибкой $0,77$.

Сложив среднюю абсолютную величину $-6,1$ для самых ярких звезд и $-8,88$ для средней разности звездных величин сорока туманностей и их самых ярких звезд, получим, что средняя абсолютная звездная величина туманности равна $-15,0$. Сопоставление с результатом $-14,7$, найденным для первых десяти туманностей, свидетельствует о справедливости сделанного предположения, и Хаббл и Хьюматон сделали вывод, что за среднюю абсолютную *визуальную* звездную величину внегалактических туманностей можно принять

$$M_{\text{виз}} = -14,9. \quad (177.1)$$

Для сравнения с более удаленными туманностями желательно было бы также знать среднюю абсолютную *фотографическую* звездную величину. Фотографические величины туманностей оказалось удобнее измерять с помощью внефокальных изображений, которые имеют размеры большие, нежели фокальные изо-

*) Два спутника М 31 исключаются как отдельные объекты.

бражения туманностей. Сравнивая фотовизуальные и фотографические величины внефокальных изображений шестидесяти туманностей в созвездии Девы, Хаббл и Хьюмасон определили средний показатель цвета для не очень далеких туманностей:

$$CI = 1,10 \pm 0,02.$$

Это значение оказалось в хорошем согласии с другими данными. Сложив его со (177.1), получим, для средней абсолютной фотографической звездной величины внегалактических туманностей, измеряемой методом внефокусных изображений, значение *)

$$M_{\text{фот}} = -13,8. \quad (177.2)$$

б) Поправки к видимым величинам более далеких туманностей. Теперь рассмотрим метод Хаббла и Хьюмасона определения фотографических звездных величин более далеких туманностей, внутри которых не удастся различить отдельные звезды. Для этого сначала познакомимся с некоторыми важными поправками, природу которых необходимо себе уяснить.

Так как *более далекие* туманности, как оказалось, имеют спектр, сдвинутый в красную сторону, то при сопоставлении их фотографических звездных величин с фотографическими величинами *более близких* туманностей, у которых нет заметного красного смещения, надо ввести соответствующие поправки. Эти поправки имеют следующую природу: во-первых, красное смещение приводит к фактическому уменьшению потока энергии, приходящего на границу земной атмосферы; во-вторых, оно меняет распределение энергии по спектру и тем самым приводит к изменению поглощения в земной атмосфере; в-третьих, изменение распределения энергии меняет соотношение между тепловой и визуальной эффективностями, и, наконец, в-четвертых, изменение распределения энергии меняет и соотношение между визуальной и фотографической эффективностями.

Для подробного изучения этих поправок воспользуемся эмпирическим соотношением между измеряемой обычным образом фотографической звездной величиной небесного тела и его болометрической величиной, т. е. такой величиной, которая бы следовала из калориметрических измерений *в отсутствие* поглощения в атмосфере.

*) Эта величина может потребовать пересмотра после того, как будут закончены работы по измерению фотографических величин, проводимые сейчас на Маунт Вильсон и в других местах. Шепли приводит для $M_{\text{фот}}$ значение [118]

$$M_{\text{фот}} = -14,5.$$

Это соотношение имеет вид

$$m_{\text{фот}} = m_{\text{бол}} + \Delta m_{\text{рад}} + HI + CI, \quad (177.3)$$

где $m_{\text{фот}}$ и $m_{\text{бол}}$ — фотографическая и болометрическая звездные величины; $\Delta m_{\text{рад}}$ — эмпирическая поправка, которую следует добавить к болометрической величине, чтобы получить радиометрическую величину, т. е. ту реальную величину, которая измеряется болометром в условиях земной атмосферы; HI — эмпирическое значение так называемого теплового показателя, его нужно прибавить к радиометрической величине, чтобы получить визуальную величину; CI — эмпирическое значение так называемого показателя цвета, которое нужно прибавить к визуальной величине, чтобы получить фотографическую величину.

Согласно этому уравнению фотографическая звездная величина далеких объектов возрастает благодаря красному смещению на

$$\Delta m_{\text{фот}} = \Delta m_{\text{бол}} + \Delta(\Delta m_{\text{рад}}) + \Delta(HI) + \Delta(CI), \quad (177.4)$$

ибо красное смещение приводит к изменению как болометрической величины, так и тех трех поправок, которые приводят к фотографической величине.

Для того чтобы найти прямое влияние красного смещения на изменение болометрической величины, требуется воспользоваться соотношением, являющимся определением звездной величины небесного объекта:

$$m - M = 2,5(\lg L - \lg l). \quad (177.5)$$

Здесь m — наблюдаемая, а M — абсолютная звездные величины небесного объекта, l — наблюдаемая светимость небесного объекта, а L — его светимость на стандартном расстоянии 10 пс.

Изменение светимости удаленного объекта, обусловленное красным смещением в спектре, может быть двояким. Прежде всего, очевидно, что частота и, следовательно, энергия каждого индивидуального фотона, приходящего к наблюдателю, уменьшаются в отношении $\lambda : (\lambda + \delta\lambda)$, где λ — исходная, а $(\lambda + \delta\lambda)$ — увеличившаяся в результате красного смещения длина волны. Во-вторых, если красное смещение обусловлено доплер-эффектом, то в том же отношении уменьшается и интенсивность фотонов, достигающих наблюдателя. Хаббл и Хьюмсон не стали приписывать красному смещению никакого конкретного механизма и предположили, что существует только первый из названных эффектов. Исходя из этого, они получили в соответствии со (177.5) следующее изменение болометрической величины, обусловленное красным смещением:

$$\Delta m_{\text{бол}} = 2,5 \lg \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}. \quad (177.6)$$

Если принять во внимание оба эффекта, то изменение болометрической величины нужно будет удвоить. Однако даже для скопления туманностей в созвездии Льва, имеющего наибольшее красное смещение из всех зафиксированных до сих пор, добавочная поправка не выходит за пределы вероятной ошибки.

Чтобы найти остальные слагаемые в правой части формулы (177.4), требуется определить влияние красного смещения на изменение видимой температуры туманности, ибо, как было замечено, атмосферное поглощение, тепловой показатель и показатель цвета тесно связаны с такой характеристикой объекта, как спектральный класс, и, следовательно, с его видимой температурой. Все туманности можно отнести приблизительно к спектральному классу dG3, т. е. принять, что их эффективная температура соответствует температуре излучения черного тела, равной 5760 °К. Если в результате какой-либо причины происходит относительное смещение всех длин волн, то произошедшее в результате этого изменение спектра приведет к спектральному распределению с температурой, согласно формуле Планка (65.6) равной

$$T = 5760 \frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda}. \quad (177.7)$$

Далее связь атмосферного поглощения, теплового показателя и показателя цвета со спектральным классом, а значит, и с эффективной температурой можно найти с помощью таблицы I, составленной Хабблом и Хьюмасоном для ранее изученных объектов*). Проведя графическую интерполяцию данных из таблицы I

Таблица I

Температура, °К	Спектральный класс	Поглощение в атмосфере	Тепловой показатель H_I	Показатель цвета C_I
6500	F5	0,44	0,30	0,62
6000	dG0	0,43	0,32	0,72
5600	dG5	0,41	0,39	0,83
5100	dK0	0,40	0,55	0,99
4400	dK5	0,48	1,10	1,26
3400	dM	0,53	1,40	1,76

и приняв во внимание приведенные выше уравнения, Хаббл и Хьюмасон, в соответствии с выражением (177.4), для каждого относительного смещения длин волн нашли отвечающее ему изменение фотографической звездной величины. Полученные результаты приведены в таблице II.

*) Температуры для различных классов взяты из [119]. Влияние атмосферы и теплового показателя определено в [120], а показатель цвета — в [121].

Таблица II

Поправки к фотографической звездной величине, обусловленные красным смещением

Скорость, км/сек	Расстояние, 10 ⁶ пс	$\delta\lambda/\lambda$	Температура, °K	Спектральный класс	$\Delta m_{\text{сол}}$	$\Delta(\Delta m_{\text{рад}} + HI)$	$\Delta(CI)$	$\Delta m_{\text{фот}}$
—	—	0,0000	5760	dG3,0	0,000	0,000	0,000	0,000
1 000	1,8	0,0033	5740	3,3	0,003	0,004	0,008	0,015
4 000	7,2	0,0133	5685	4,0	0,015	0,015	0,02	0,05
8 000	14,4	0,0267	5615	4,7	0,03	0,03	0,04	0,10
12 000	21,6	0,0400	5540	5,8	0,04	0,05	0,06	0,15
16 000	28,8	0,0533	5470	6,5	0,06	0,06	0,08	0,20
20 000	36	0,0667	5400	7,2	0,07	0,08	0,10	0,25
30 000	54	0,1000	5235	8,8	0,11	0,13	0,16	0,40
40 000	72	0,133	5080	dK0,2	0,14	0,20	0,21	0,55
50 000	90	0,167	4940	1,4	0,17	0,32	0,26	0,75
60 000	108	0,200	4800	2,3	0,20	0,44	0,31	0,95

В третьем столбце этой таблицы указаны реально наблюдаемые относительные красные смещения, а в первых двух столбцах, приведенных для удобства, указаны: скорости разбегания, отвечающие данному красному смещению при интерпретации с помощью обычного доплер-эффекта, и расстояния до туманностей, которые, как мы установим дальше, тоже тесно связаны с величиной красного смещения. В остальных столбцах даны соответственно: температура, найденная с учетом красного смещения по формуле (177.7); спектральный класс для данной температуры, определенный по таблице I; изменение болометрической величины, обусловленное красным смещением и вычисленное по формуле (177.6); небольшие суммарные изменения $\Delta m_{\text{рад}}$ и теплового показателя, найденные по таблице I; изменение показателя цвета, вычисленное по той же таблице, и, наконец, полное изменение фотографической звездной величины $\Delta m_{\text{фот}}$, обусловленное красным смещением и определенное с помощью (177.4) путем суммирования чисел из трех предыдущих столбцов. Учет поправки $\Delta m_{\text{фот}}$ со знаком минус позволяет исправить фотографическую звездную величину любой туманности и привести ее к такому значению, какое бы она имела, если бы свет от нее не испытывал никакого красного смещения.

В таблице III приведены средние фотографические звездные величины и красные смещения, найденные Хабблом и Хьюмасоном, для восьми скоплений туманностей и для двух групп, составленных из изолированных туманностей со сравнительно близкими величинами. Красное смещение выражено через соответствующую скорость разбегания. Приведенные средние значения

Таблица III

Скопление	Число туманностей	Диаметр скопления, град	Число измененных красных смещений	Среднее смещение, км/сек	Средняя $m_{\text{фот}}$	Поправка $-\Delta m_{\text{фот}}$	Расстояние, 10^6 лс
Дева	(500)	12	7	890	12,5		1,8
Пегас	100	1	5	3810	15,5		7,25
Рыбы	20	0,5	4	4630	15,4		7
Рак	150	1,5	2	4820	16,0		9
Персей	500	2,0	4	5230	16,4		11
Волосы Вероники	800	1,7	3	7500	17,0	-0,10	13,8
Большая Медведица	300	0,7	1	11800	18,0	-0,15	22
Лев	400	0,6	1	19600	19,0	-0,25	32
Группа I	16		16	2350	13,8	—	—
Группа II	21		21	630	11,6	—	—

фотографических величин для скоплений соответствуют наиболее часто встречающимся величинам, а для двух групп — усредненной величине. Предпоследний столбец таблицы содержит поправку $-\Delta m_{\text{фот}}$, которую, согласно предыдущей таблице, нужно прибавить к наблюдаемой фотографической звездной величине, чтобы учесть красное смещение. Можно показать, что в настоящее время этой поправкой можно пренебречь повсеместно, за исключением трех наиболее удаленных скоплений. Последний столбец содержит расстояния до скоплений, вычисленные методом, который мы рассмотрим ниже.

в) **Расстояния до туманностей, вычисленные с помощью видимых величин.** Считая, что туманности, входящие в скопление, действительно сосредоточены в сравнительно малой области, можно найти расстояние до скопления путем сравнения средних наблюдаемых фотографических звездных величин туманностей внутри скопления со средней абсолютной фотографической звездной величиной более близких туманностей. Подобным же образом можно вычислить и *среднее* расстояние до изолированных туманностей, которые были сгруппированы в таблице III.

Для этого Хаббл и Хьюмсон приняли два следующих предположения.

Во-первых, что средняя абсолютная звездная величина далеких туманностей такая же, как и у ближайших к нам. Это предположение — поскольку самое далекое скопление в созвездии Льва находится на расстоянии, немногим превышающем 10^8 световых лет, — означает не только то, что галактики в данный

момент времени в различных частях Вселенной на расстояниях до 10^8 световых лет приблизительно похожи друг на друга, но и то, что светимость туманности мало меняется за 10^8 световых лет.

Во-вторых, предполагается, что видимая светимость туманностей, с учетом красного смещения, обратно пропорциональна квадрату расстояния, т. е. имеет ту же зависимость, что и светимость стационарных источников в обычном евклидовом пространстве.

Чтобы извлечь следствия из этих предположений, воспользуемся опять уравнением

$$m - M = 2,5 \lg L - 2,5 \lg l. \quad (177.8)$$

Здесь m и M — наблюдаемая и абсолютная звездные величины небесного объекта, l — наблюдаемая светимость, а L — его же светимость на стандартном расстоянии 10 пс. При этом для светимости выполняется закон обратных квадратов

$$\frac{l}{L} = \frac{D^2}{d^2}, \quad (177.9)$$

где d и D — фактическое и стандартное расстояния.

Комбинируя оба уравнения и полагая $D = 10$, можно выразить расстояние d в парсеках через видимую и абсолютную звездные величины:

$$\lg d = 0,2(m - M) + 1. \quad (177.10)$$

Расстояние d можно выразить также и через фотографические звездные величины Хаббла и Хьюмасаона в следующем виде:

$$\lg d = 0,2(m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{фот}} - M_{\text{фот}}) + 1, \quad (177.11)$$

где $-\Delta m_{\text{фот}}$ — уже обсуждавшаяся поправка на красное смещение. Подставив в это уравнение значения абсолютных и видимых фотографических величин из (177.2) и из таблицы III, получим расстояния до различных скоплений, приведенные в последнем столбце таблицы III. Надежность полученных результатов можно приблизительно оценить по числу значащих цифр.

В дальнейшем, в § 179, мы вернемся к соотношению между светимостью и расстоянием, но без предположений о том, что пространство плоское, а туманности стационарны. Будет показано, что вычисленные расстояния d до туманностей связаны особенно просто с координатой \bar{r} , которая исходный нестатический интервал (149.1) позволяет записать в виде (149.5).

г) **Связь наблюдаемого красного смещения с звездной величиной и расстоянием.** Смещение спектра почти всех внегалактических туманностей в красную сторону было обнаружено в

пионерской работе Слайфера *) еще в 1922 г. при наблюдении близких к нам туманностей. И когда Хаббл [122] в 1929 г. стал вышеизложенным методом определять расстояния до туманностей, он обнаружил, что между красным смещением и расстоянием вплоть до расстояний $d=2 \cdot 10^6$ пс имеется линейная зависимость. Сейчас в нашем распоряжении есть более богатый материал наблюдений, собранный Хабблом и Хьюмасоном, и это позволяет с большей надежностью проверить зависимость красного смещения галактик от их наблюдаемых звездных величин и, следовательно, и от вычисленных расстояний.

Поскольку на практике имеют дело с видимыми величинами и красными смещениями, то их мы и рассмотрим прежде всего. В таблице III собраны данные для восьми скоплений и двух групп изолированных туманностей. Соотношение между видимой звездной величиной и красным смещением показано на рис. 11,

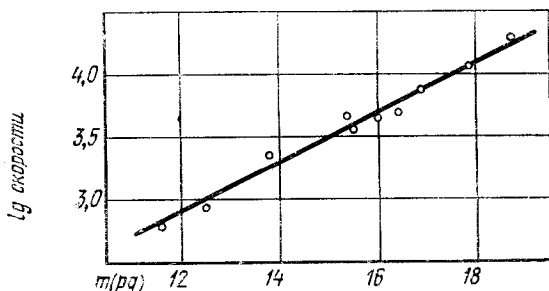


Рис. 11.

взятом из работы Хаббла и Хьюмасона. По оси ординат отложен логарифм красного смещения, выраженного через скорость v , а по оси абсцисс — наблюдаемые звездные величины. Видно, что представленная на графике зависимость очень близка к линейной, и ее можно хорошо аппроксимировать функцией

$$\lg v = 0,2 m + 0,507. \quad (177.12)$$

При этом во всей интересующей нас области среднее отклонение от указанного закона составляет 0,031 для $\lg v$ и 0,15 для m .

Уравнение (177.10), связывающее звездную величину с расстоянием, позволяет также установить зависимость красного смещения от расстояния d . Эта зависимость показана на рис. 12, где красное смещение снова выражено через скорость. Точки

*) См. таблицу, приведенную у Эддингтона (см. [56], стр. 162).

около начала отсчета относятся к ближайшим отдельным туманностям, а кружочки отображают данные из таблицы III.

Как видно из рис. 12, зависимость красного смещения от расстояния d тоже довольно близка к линейной. Уравнение (177.11)

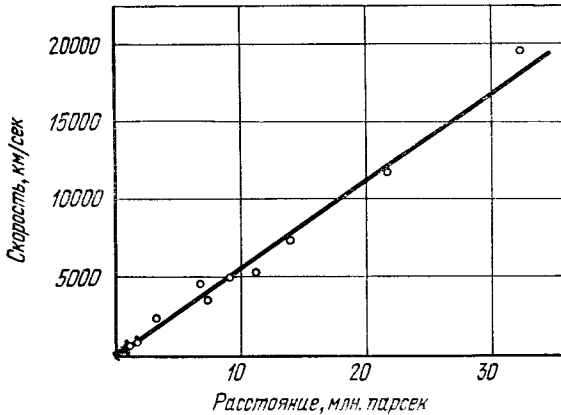


Рис. 12.

совместно со (177.12) после подстановки $M_{\text{фот}} = -13,8$ приводят к следующему отношению:

$$\frac{v}{d} = 5,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{км/сек}}{\text{пс}}. \quad (177.13)$$

Для дальнейшего удобно выразить красное смещение через относительное изменение длин волн. Согласно (177.13):

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 1,86 \cdot 10^{-9} d, \quad (177.14)$$

если расстояние d выражено в парсеках, или

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 5,71 \cdot 10^{-10} d, \quad (177.15)$$

если d выражено в световых годах. Полагают, что ошибка в окончательном результате во всяком случае меньше 20% и, возможно даже, не превышает 10%.

Чтобы оценить значение этого замечательного открытия, установившего линейную зависимость красного смещения от расстояния, уместно посмотреть, с какой степенью точности выполняется равенство красных смещений отдельных галактик, принадлежащих к одному и тому же скоплению. В качестве примера рассмотрим скопление в созвездии Волосы Вероники. Оно удобно тем, что имеет значительно больший разброс красных смещений, чем какие-либо другие (более близкие) скопления, в которых было произведено более одного измерения. К тому

времени, когда Хаббл и Хьюмасон составляли таблицу III, было измерено красное смещение четырех туманностей, принадлежащих этому скоплению. Три из них имеют смещения 6700, 7600, 7900 км/сек, что в среднем, после учета поправок на движение Солнца, составляет 7500 км/сек. Четвертая же туманность обнаружилась смещение 5000 км/сек и была исключена из рассмотрения, как наложившийся объект и не принадлежащий к данному скоплению. После этого Хьюмасон определил красные смещения еще пяти членов скопления: 6600, 6900, 6900, 7000 и 8500 км/сек. Полный разброс составляет 1900 км/сек, однако, он, по-видимому, преувеличен, так как каждое измерение производилось с одной-единственной спектрограммой с плохой дисперсией: 875 \AA на миллиметр.

Интересно также проследить постоянство относительного красного смещения разных линий вдоль спектра одной и той же туманности. Для этой цели Хаббл любезно предоставил в распоряжение автора данные по десяти линиям в спектре NGC 1275 в скоплении Персея. Несмещенные длины волн этих линий располагаются в диапазоне от $\lambda=3727$ до $\lambda=5007$. Максимальное и минимальное значения $\delta\lambda/\lambda$ приходятся на $\lambda=4363$ и на $\lambda=5007$ соответственно и отличаются только на 14% от их среднего. Обе эти линии, однако, обозначены как «слабые». Для первой и последней линий в спектре, обозначенных как «яркие» и разделенных более широким интервалом, $\lambda=3727$ и $\lambda=4861$, значения $\delta\lambda/\lambda$ отличаются от среднего только на 3%. В пределах точности измерения $\delta\lambda/\lambda$ можно считать не зависящим от λ .

д) **Соотношение между видимым диаметром, звездной величиной и расстоянием.** Пусть имеется евклидово пространство, заполненное стационарными туманностями с одинаковыми диаметрами; тогда очевидно, что угол $\delta\theta$, под которым виден диаметр одного из объектов, будет обратно пропорционален расстоянию d до него, т. е. *)

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{d}. \quad (177.16)$$

Это соотношение позволяет преобразовать выражение (177.10) к виду

$$\lg \delta\theta = -0,2m + c, \quad (177.17)$$

где c — постоянная. Полученное равенство связывает две непосредственно измеряемые величины: видимый диаметр и видимую звездную величину.

*) Мы не будем делать различия между хордой, стягивающей угол, и углом, опирающимся на эту хорду.

Как было обнаружено Хабблом [123], данные, относящиеся к галактикам одного типа, удовлетворяют соотношению (177.17) с приблизительно постоянным s . Галактики же разных типов, как и следовало ожидать, требуют разных s . Правда, эти значения s различаются между собой не очень сильно, однако в случае правильных галактик обнаруживают интересную закономерность при переходе от эллиптических к спиральным и дальше к спиральным с перемычкой галактикам. Приведя все туманности к стандартному типу, мы можем, как показано на рис. 13, связать все имеющиеся данные единым образом. На рис. 13 по оси

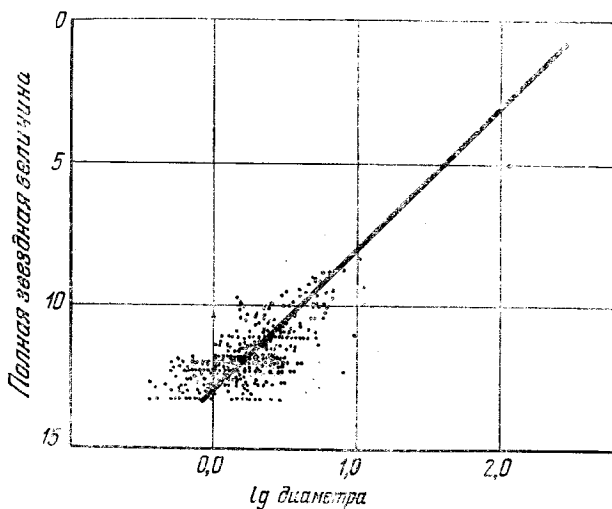


Рис. 13.

абсцисс отложены логарифмы видимых диаметров, а по оси ординат — полные визуальные звездные величины туманностей. Две самые верхние точки на графике относятся к Магеллановым Облакам. Прямая линия на рис. 13 описывается уравнением

$$\lg \delta\theta = -0,2m + 2,6, \quad (177.18)$$

где $\delta\theta$ — максимальный видимый диаметр, выраженный в угловых минутах, а m — наблюдаемая визуальная звездная величина. Полученное уравнение, разумеется, справедливо только для галактик, приведенных к стандартному типу.

Распределение точек на рис. 13 достаточно убедительно свидетельствует о том, что рассматриваемые нами объекты действительно являются внегалактическими.

Из уравнения (177.16) видно, что определять расстояния до туманностей можно не только с помощью видимых последних величин, но и с помощью видимых диаметров. Однако последнее практически менее удобно, во-первых, потому, что формы галактик неодинаковы, и, во-вторых, из-за того, что определение видимых диаметров сильно зависит от времени экспозиции, гораздо более сильно, чем для видимых величин, для которых основную роль играет высокая светимость центральных областей туманностей.

В § 180 мы еще раз обсудим связь между светимостью и видимым диаметром, не требуя евклидовости пространства и стационарности наблюдаемых объектов.

е) **Диаметры и массы туманностей.** Диаметры туманностей можно вычислить, исходя из их видимых диаметров и из расстояний. В таблице IV приведены рассчитанные Хабблом средние максимальные диаметры туманностей нескольких типов. Если

Таблица IV

Класс	Диаметр, <i>пс</i>	Класс	Диаметр, <i>пс</i>
Эллиптические галактики		Нормальные спиральные галактики	
E_0	360	S_a	1450
E_1	430	S_b	1900
E_2	500	S_c	2500
E_3	590	Спиральные с перемычкой	
E_4	700	SB_a	1280
E_5	810	SB_b	1320
E_6	960	SB_c	2250
E_7	1130	Неправильные	1500

принять во внимание новое значение нуля-пункта в соотношении период — светимость для цефеид, то эти диаметры нужно уменьшить примерно на 15%. Следует, однако, отметить, что полученные значения зависят от времени экспозиции, поэтому в них остается некоторая неопределенность. Оценки размера нашей собственной системы [124], произведенные по шаровым звездным скоплениям, дают примерно от 20 000 до 50 000 *пс*. Хабблом [125] в туманности Андромеды были найдены объекты, очень похожие на шаровые звездные скопления. Не исключено, что туманность Андромеды имеет приблизительно такие же размеры, как и наша собственная Галактика.

Массы туманностей можно оценить, исходя из сопоставления их диаметров и скоростей вращения. Последние же можно найти спектроскопически, если предположить, что вращение галактики происходит вокруг ядра. Массу можно также оценить методом Опики, предположив, что коэффициент излучения вещества в спиральных галактиках такой же, как и у нашей собственной. Полагаясь на довольно скудные данные, Хаббл [126] оценивает среднюю массу туманностей как

$$m = (6 \div 10) \cdot 10^8 \odot, \quad (177.19)$$

где \odot — масса Солнца:

$$\odot = 1,983 \cdot 10^{33} \text{ г}. \quad (177.20)$$

ж) **Распределение туманностей в пространстве.** Пусть имеется обычное евклидово пространство, равномерно заполненное стационарными туманностями. Тогда, очевидно, можно ожидать, что число туманностей N внутри сферы радиуса d пропорционально кубу радиуса, т. е.

$$N = \text{const} \cdot d^3, \quad (177.21)$$

откуда, совместно с выражением (177.10), получаем

$$\lg N = 0,6m + C, \quad (177.22)$$

где m — наибольшая звездная величина туманностей в рассматриваемой области, а C — постоянная.

Если подставить в это уравнение реально наблюдаемые значения, то можно обнаружить два интересных факта.

Во-первых, оказывается, что в плоскости Млечного Пути есть «зона избегания» не очень правильной формы со средней шириной 15° , где галактики почти полностью отсутствуют. Это, несомненно, происходит из-за того, что внутри нашей собственной Галактики имеется поглощающий слой вещества. В частности, известны темные облака материи на Млечном Пути, которые целиком закрывают от нас все звезды, кроме ближайших из нашей собственной системы. Это объяснение еще более подтверждается открытием Хаббла [126], который показал, что число туманностей в единице телесного угла возрастает от зоны избегания до галактического полюса именно таким образом, как и следовало бы ожидать, если бы наблюдения проводились сквозь толщу поглощающего вещества.

Второй интересный факт состоит в том, что туманности распределены нерегулярно. Это обнаруживается с полнейшей определенностью, если только при усреднении не использовать чересчур большие интервалы по углу и расстоянию. Указанная нерегулярность, во всяком случае частично, связана с тем, что галактики имеют тенденцию собираться в скопления. Так, Шепли

и Эймс [127] обнаружили, что полное число туманностей вплоть до 13-й звездной величины в северном полушарии примерно в 2 раза больше, чем в южном. Эту разность, однако, можно полностью отнести за счет сильно населенного скопления в созвездии Девы в северном полушарии, содержащего большое число туманностей в этом интервале звездных величин. Помимо этой неоднородности, вызванной скоплениями, Шепли [128] обнаружил также и неоднородность в распределении туманностей вплоть до звездной величины 18,2. После приведения к однородным условиям оказалось, что в северном полушарии таких туманностей тоже больше, чем в южном. Однако число туманностей вплоть до 20-й звездной величины по подсчетам Хаббла [126], оказывается одинаковым в обеих полушарах.

Учитывая возможность поглощения внутри Млечного Пути и неоднородности, связанные с недостаточно широким усреднением, Хаббл нашел, что распределение внегалактических туманностей достаточно хорошо описывается выражением

$$\lg N = 0,6m - 9,12, \quad (177.23)$$

где N — число туманностей на квадратный градус, а m — исправленная видимая фотографическая звездная величина.

Вопрос о распределении туманностей будет обсуждаться еще раз в § 181, но без ограничительных требований стационарности галактик и евклидовости пространства.

з) **Плотность вещества во Вселенной.** Для того чтобы найти усредненную по всему пространству плотность вещества, Хаббл [126] воспользовался наилучшей из существующих оценкой средней массы туманностей и плотности их распределения и в результате получил *)

$$\rho = (1,3 \div 1,6) \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (177.24)$$

Приведенное число является, разумеется, только нижним пределом для реальной плотности, поскольку пока неизвестно, сколько вещества имеется во Вселенной в других формах: в виде пыли, газа или движущихся частиц, связанных с космическими лучами. По оценкам Хаббла, плотность внегалактической пыли может быть в тысячу раз больше приведенной выше цифры и при этом до сих пор никак не проявиться.

Кроме вещества, внегалактическое пространство содержит и неизвестное нам количество излучения, которое пополняется за счет высвечивания самих туманностей и за счет источника, порождающего космические лучи. Однородно распределенное излучение черного тела при температуре около 19°K имеет плотность 10^{-30} г/см^3 .

*) Новые данные приведены на стр. 495, 496. (Прим. ред.)

Так как, кроме туманностей, вещество в пространстве присутствует и в другой форме, то полное распределение вещества может оказаться гораздо более однородным, чем это можно заключить из того факта, что туманности имеют тенденцию собираться в скопления.

Для дальнейшего удобно перевести (177.24) в релятивистские единицы § 81:

$$8\pi\rho = \frac{8\pi \cdot 10^{-30}}{1,349 \cdot 10^{28}} \approx 1,86 \cdot 10^{-57} \text{ см}^{-2}, \quad (177.25)$$

или, переходя к световым годам,

$$8\pi\rho \approx 1,7 \cdot 10^{-21} (\text{лет})^{-2}. \quad (177.26)$$

§ 178. Координаты туманности и светимость

Теперь нам предстоит перейти к интерпретации вышеприведенных данных наблюдений при помощи наших нестатических моделей. Однако сначала придется вывести несколько соотношений, которые облегчат сравнение свойств моделей с наблюдениями. Общее же сопоставление моделей с реальной Вселенной отложим до § 185.

В настоящем параграфе будет рассмотрена связь между координатами местонахождения туманности и ее наблюдаемой светимостью. Имея дело с нестатической моделью, можно ожидать, что подобная связь существует.

Проще всего подойти к этому вопросу, основываясь на интервале не в первоначальном виде

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (178.1)$$

а в виде

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{\bar{d}r^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (178.2)$$

который был получен в § 149 с помощью преобразования

$$\bar{r} = \frac{r}{1 + r^2/4R_0^2}. \quad (178.3)$$

Так как это преобразование затрагивает только координату r , то все те первоначальные выражения, которые не зависят от r , например, формулы для давления, плотности, остаются неизменными.

Чтобы получить искомое соотношение между координатами и наблюдаемой светимостью [98], удобнее всего для начала

поместить туманность в центре, а наблюдателя — на заданном, интересующем нас координатном расстоянии \bar{r} . Пусть они оба покоятся относительно выбранных пространственных координат, тогда, согласно нашему определению, они будут покоиться и относительно материи в непосредственной близости от них. Примем, что наблюдаемая светимость l источника равна количеству энергии, принимаемой наблюдателем в единицу времени на единицу площади поверхности, при условии, что между источником и наблюдателем нет никакого поглощения и что наблюдатель при этом пользуется своими собственными эталонами.

Чтобы вычислить эту светимость, поступим следующим образом. Обозначим момент времени, когда туманность, расположенная в центре, испускает свет, через t_1 , а момент времени, когда этот свет достигнет наблюдателя, расположенного на координатном расстоянии \bar{r} от центра, через t_2 . Используя скорость света, которая определяется с помощью выражения для интервала (178.2), можно связать оба значения t с пройденным расстоянием уравнением

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}g(t)} dt = \int_0^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1-\bar{r}^2/R_0^2}}$$

Продифференцируем обе части этого выражения. Учитывая, что пределы интегрирования в правой части постоянны, получаем

$$\frac{\delta t_2}{\delta t_1} = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}. \quad (178.4)$$

Это уравнение связывает промежуток времени δt_1 между двумя электромагнитными возмущениями на источнике с промежутком δt_2 между этими же возмущениями у наблюдателя через посредство функции $g(t)$, которая принимает значения g_1 и g_2 в моменты t_1 и t_2 соответственно.

Предполагая, что δt_1 — это промежуток времени между двумя последовательными волновыми максимумами, испускаемыми источником, и замечая, что координатное время t совпадает с собственным временем как источника, так и наблюдателя, перепишем выражение (178.4) в виде

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu + \delta\nu} = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}, \quad (178.5)$$

где λ и ν — длина волны и частота света на источнике, а $(\lambda + \delta\lambda)$ и $(\nu + \delta\nu)$ — соответствующие значения у наблюдателя. Полученное выражение, как и следовало ожидать, совпадает с результатом (155.7), найденным ранее для доплер-эффекта.

Далее, предполагая, что δt_1 в уравнении (178.4) есть промежуток времени между испусканием двух последовательных фотонов, которые уносят энергию от туманностей, получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = e^{-\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}. \quad (178.6)$$

Здесь z_1 — число фотонов, покидающих источник за единицу времени, а z_2 — число фотонов, попадающих в единицу времени на поверхность сферы с координатным радиусом \bar{r} вокруг начала координат.

И наконец, согласно выражению для интервала (178.2) полная собственная площадь поверхности сферы с координатным радиусом \bar{r} , через которую фотоны пройдут в момент времени t_2 , равна

$$A_0 = 4\pi\bar{r}^2 e^{g_2}. \quad (178.7)$$

Отсюда, если предположить, что средняя энергия фотонов, испускаемых туманностью, равна $h\nu_1$, из последних трех уравнений, в согласии с приведенным выше определением, получаем следующее выражение для наблюдаемой светимости:

$$l = \frac{z_1 h \nu_1 e^{g_1 - g_2}}{4\pi\bar{r}^2 e^{g_2}} = \frac{z_1 h \nu_1}{4\pi\bar{r}^2 e^{g_2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right)^2. \quad (178.8)$$

Полученный результат относится к простому случаю, когда туманность находится в центре, а наблюдатель — на координатном расстоянии \bar{r} . Однако в § 149, в было показано, что преобразование к новой системе координат с тем же выражением интервала (178.2), как и раньше, но с наблюдателем, перемещенным в центр, приведет к тому, что туманность окажется на координатном расстоянии \bar{r} . Поэтому мы можем заключить, что формула (178.8) справедлива также и в том случае, когда наблюдатель находится в центре, а туманность — в \bar{r} .

Такая конфигурация более удобна, если мы желаем сравнивать наблюдаемые светимости галактик, находящихся на разных расстояниях \bar{r} , но наблюдаемых в начале координат в один и тот же момент t_2 . Считая, что собственные светимости и, следовательно, z_1 и ν_1 для различных туманностей одинаковы, мы немедленно получаем из (178.8)

$$\frac{l}{l'} = \frac{\bar{r}'^2 (1 + \delta\lambda'/\lambda')^2}{\bar{r}^2 (1 + \delta\lambda/\lambda)^2}, \quad (178.9)$$

где l/l' — отношение наблюдаемых светимостей двух тождественных туманностей, помещенных на координатных расстояниях \bar{r}

и \bar{r}' , а $\delta\lambda/\lambda$ и $\delta\lambda'/\lambda'$ — их относительные красные смещения, наблюдаемые в центре.

С помощью преобразования (178.3) отношение светимостей можно выразить через прежние координаты r :

$$\frac{l}{l'} = \frac{r'^2 (1 + r'^2/4R_0^2) (1 + \delta\lambda'/\lambda')^2}{r^2 (1 + r'^2/4R_0^2)^2 (1 + \delta\lambda/\lambda)^2}. \quad (178.10)$$

Новое выражение имеет гораздо более сложный вид, чем старое (178.9). Именно поэтому мы для решения задачи и выбрали координатную систему $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$ вместо координатной системы (r, θ, φ, t) , в которой было записано первоначальное выражение для интервала.

Следует отметить, что при выводе соотношений между светимостью и координатами местонахождения мы, кроме однородности модели, предположили постоянство средних собственных светимостей туманностей во всем интервале времени порядка 10^8 лет. Этот интервал времени будет всюду фигурировать в реальных приложениях.

Разрешая (178.9) относительно \bar{r} , получаем зависимость координатного расстояния от светимости:

$$\bar{r} = \frac{\text{const}}{\sqrt{l}} \frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda}. \quad (178.11)$$

§ 179. Координаты туманности и астрономическое расстояние до нее

Чтобы выразить астрономическое расстояние d , вычисленное по формуле Хаббла и Хьюмаса, через координату \bar{r} местонахождения туманности, нужно воспользоваться уравнением (178.9), связывающим координату \bar{r} со светимостью. Но прежде всего светимости нужно выразить через звездную величину, так как астрономические расстояния определяются через последнюю.

Находя из (178.9) отношение \bar{r}/\bar{r}' координат двух туманностей и логарифмируя, получаем

$$\lg \frac{\bar{r}}{\bar{r}'} = 0,5 \lg \frac{l'}{l} + \lg \frac{1 + \delta\lambda'/\lambda'}{1 + \delta\lambda/\lambda}. \quad (179.1)$$

Вспоминая определение звездных величин через светимость, находим

$$m - m' = 2,5 \lg \frac{l'}{l},$$

откуда ясно, что уравнение (179.1) можно переписать в виде

$$\lg \frac{\bar{r}}{r'} = 0,2(m_{\text{бол}} - m'_{\text{бол}}) + \lg \frac{1 + \delta\lambda/\lambda}{1 + \delta\lambda/\lambda}, \quad (179.2)$$

где $m_{\text{бол}}$ и $m'_{\text{бол}}$ — наблюдаемые болометрические звездные величины. Их определение и выражение через светимость были даны в предыдущем параграфе.

Чтобы сравнить равенство (179.2) с выражением Хаббла и Хьюмасаона, нужно с помощью эмпирического соотношения перейти от болометрических величин к фотографическим. При этом получается

$$\lg \frac{\bar{r}}{r'} = 0,2 [m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{рад}} - (HI) - (CI) - m'_{\text{фот}} + \Delta m'_{\text{рад}} + (HI)' + (CI)'] + \lg \frac{1 + \delta\lambda/\lambda}{1 + \delta\lambda/\lambda}. \quad (179.3)$$

Полагая координату r' одной из туманностей равной стандартному расстоянию 10 *пс*, выбирая для удобства такие единицы, в которых \bar{r}' равно 10, и учитывая, что красное смещение на расстоянии 10 *пс* пренебрежимо мало, перепишем равенство (179.3) в следующем виде:

$$\lg \bar{r} = 0,2 \{m_{\text{фот}} - \Delta(\Delta m_{\text{рад}}) - \Delta(HI) - \Delta(CI) - M_{\text{фот}}\} - \lg \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} + 1, \quad (179.4)$$

где $m'_{\text{фот}}$ заменена на абсолютную фотографическую величину. Вспомянув (177.4) и (177.6) и выражение Хаббла и Хьюмасаона для поправки $\Delta m_{\text{фот}}$, обусловленной красным смещением, переписываем последний результат в ином виде:

$$\lg \bar{r} = 0,2(m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{фот}} - M_{\text{фот}}) + 1 - 0,5 \lg \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}. \quad (179.5)$$

Полученное соотношение для \bar{r} уже можно сравнить с выражением Хаббла и Хьюмасаона (177.11) для астрономического расстояния

$$\lg d = 0,2(m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{фот}} - M_{\text{фот}}) + 1. \quad (179.6)$$

Из выражения (179.5) и (179.6) вытекает:

$$\bar{r} = d \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda}}, \quad d = \bar{r} \sqrt{\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}}. \quad (179.7)$$

Это как раз и есть искомое соотношение между астрономическим расстоянием d до туманности, определяемым по Хаббллу и Хьюмасону, и координатой ее местонахождения \bar{r} , где \bar{r} — такая координата, через которую интервал ds^2 записывается в виде (178.2), а масштаб выбран таким образом, что на стандартном расстоянии 10 пс \bar{r} в интересующий нас момент времени равняется 10.

Множитель $\sqrt{1 + \delta\lambda/\lambda}$ в этих выражениях обязан своим происхождением тому факту, что в расширяющихся моделях красное смещение связывается с эффектом Допплера, и поэтому в такой модели изменяется как частота прихода фотонов к наблюдателю, так и частота самих фотонов; Хаббл же и Хьюмасон признают только первый из указанных эффектов. Параметр R_0^2 не входит в эти выражения благодаря свойствам выбранной координатной системы $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$.

Так как для наиболее далекого скопления в созвездии Льва разность между \bar{r} и d составляет всего только три процента, то мы практически будем считать \bar{r} и d одинаковыми в пределах ошибок наблюдения, пока какие-либо новые данные не заставят нас принять во внимание различие между ними.

§ 180. Координаты и видимый диаметр

Теперь рассмотрим связь между координатами туманностей и их видимыми диаметрами [98], воспользовавшись снова интервалом

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (180.1)$$

Для определенности примем, что наблюдатель неподвижно связан с началом отсчета, а туманность находится на координатном расстоянии \bar{r} . Далее, пусть t_1 и t_2 — соответственно моменты времени, когда наблюдаемый свет испускается туманностью и достигает начала координат, распространяясь внутрь по радиусу, как было разобрано в § 154. Пусть диаметр интересующего нас объекта виден под углом $\delta\theta$; тогда из вида интервала вытекает, что

$$\delta l_0 = \bar{r} e^{-\frac{1}{2} g_1} \delta\theta, \quad (180.2)$$

где δl_0 — собственный диаметр туманности в момент t_1 излучения, g_1 — величина $g(t)$ в этот момент, а $\delta\theta$ — угловой диаметр туманности, наблюдаемый из начала координат.

Предполагая, что δl_0 одинаков для всех туманностей, которые видны из центра в момент t_2 , и учитывая, что величина g_2 функ-

ции $g(t)$ в момент наблюдения тоже одинакова для различных туманностей, находим

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{\bar{r}} e^{1/2(g_2 - g_1)}. \quad (180.3)$$

С помощью выражения для красного смещения (178.5) это равенство можно преобразовать к виду

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{\bar{r}} \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}. \quad (180.4)$$

Комбинируя (180.4) с уравнением (178.11), связывающим наблюдаемую светимость и координату местонахождения, получаем зависимость между наблюдаемым диаметром, светимостью и красным смещением:

$$\frac{\delta\theta}{\sqrt{l}} = \text{const} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^2. \quad (180.5)$$

Это соотношение позволяет на практике проверить, является ли правильной гипотеза о том, что красное смещение есть результат реального расширения.

Комбинируя (180.4) с уравнением (179.7), связывающим координатное расстояние \bar{r} с астрономическим расстоянием d , получаем

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{d} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^{3/2}. \quad (180.6)$$

Это равенство полезно сравнить с равенством (177.16), полученным ранее из предположений о стационарности туманностей и о евклидовости пространства.

§ 181. Распределение числа туманностей в пространстве

Перейдем теперь к вопросу о том, сколько туманностей можно насчитать внутри области с заданным радиусом \bar{r} , исходя из предположения, что модель однородна и расширяется. Чтобы ответить на этот вопрос, положим, что в единице собственного объема в некоторый выбранный момент t_0 находится n_0 туманностей, при этом $g(t)$ принимает значение g_0 . Тогда, умножая n_0 на собственный объем, отвечающий выражению для интервала в виде (180.1), очевидно, получаем, что число туманностей в области от \bar{r} до $\bar{r} + d\bar{r}$ равно

$$dN = n_0 d v_0 = \frac{4\pi n_0 e^{3/2 g_0} \bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}. \quad (181.1)$$

Как было показано в § 153, частицы, которые покоились относительно пространственных координат (r, θ, φ) , а, следовательно, также и относительно $(\bar{r}, \theta, \varphi)$, остаются покоящимися все время. Поэтому не будет происходить увеличения или уменьшения числа туманностей из-за их среднего потока через границы при \bar{r} и $\bar{r} + \delta\bar{r}$, и поэтому (181.1) дает полное число туманностей в рассматриваемом интервале координат, одинаковое для любого момента времени. Иными словами,

$$dN = \text{const} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}. \quad (181.2)$$

Отсюда видно, как изменяется число туманностей по мере перехода ко все более и более удаленным координатам. Следует отметить также, что это выражение вместе с уравнением (178.11), связывающим координаты местонахождения со светимостью и красным смещением, могло бы служить для прямой эмпирической проверки того, насколько однородно распределены галактики в реальном мире.

Зная величину R_0 , которая может быть как действительной, так и бесконечной и мнимой, мы можем проинтегрировать уравнение (181.2) и получить полное число объектов во всем объеме вплоть до любого наперед заданного \bar{r} . В дальнейшем будут установлены ограничения на возможные значения R_0^2 (см. (183.14)) и окажется, что \bar{r}^2/R_0^2 едва ли может превосходить 0,02 даже для самого удаленного скопления в созвездии Льва, расстояние до которого составляет несколько сот миллионов световых лет. Поэтому в большинстве случаев для полного числа туманностей внутри области с любым наперед заданным радиусом \bar{r} можно положить

$$N = \text{const} \cdot \bar{r}^3. \quad (181.3)$$

Подставляя сюда значение \bar{r} из уравнений (178.11), (179.7) и (180.4), можно получить еще несколько формул:

$$N = \text{const} \cdot \bar{r}^3,$$

$$N = \text{const} \cdot d^3 \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right)^{3/2},$$

$$N = \frac{\text{const}}{l^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right)^3, \quad (181.4)$$

$$N = \frac{\text{const}}{(\delta\theta)^3} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^3.$$

Эти соотношения определяют соответственно полное число га-

лактик внутри области вплоть до заданного значения координаты \bar{r} , астрономического расстояния d , болометрической светимости l или видимого диаметра $\delta\theta$; причем $\delta\lambda/\lambda$ равно максимальному красному смещению туманностей в указанной области*). Второе из этих выражений следует сравнить с выражением (177.21), полученным ранее исходя из предположения о стационарности туманностей и об евклидовости пространства.

§ 182. Расстояние до туманности и ее красное смещение

Теперь мы можем рассмотреть связь между координатами туманности и ее наблюдаемым красным смещением, пользуясь по-прежнему координатами $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$, которые, как было показано, являются очень удобными для проведения сопоставления с астрономическими наблюдениями. В этих координатах интервал одной модели записывается в виде

$$ds^2 = -e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (182.1)$$

Исследование доплер-эффекта, проведенное в общем виде в § 155 (см. уравнение (155.8)), а для частного случая в § 178 (см. уравнение (178.5)), показывает, что относительное красное смещение длины волны света, испускаемого туманностью, наблюдаемой из начала координат, можно представить следующим образом:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2(g_2 - g_1)} - 1, \quad (182.2)$$

где g_1 и g_2 — значения функции $g(t)$ соответственно в моменты времени t_1 , когда свет испускается туманностью, и t_2 , когда он достигает центра наблюдения.

При описании с помощью этого уравнения данных наблюдения, g_2 , очевидно, можно считать постоянным, поскольку все туманности, которые мы наблюдаем из нашего местоположения, принятого за начало отсчета, мы наблюдаем в один и тот же момент времени. С другой стороны, g_1 следует рассматривать как переменную, так как при переходе ко все более удаленным туманностям мы переходим ко всем более ранним временам излучения, т. е. значения g_1 оказываются разными. Отсюда ясно, что красное смещение будет по-разному зависеть от расстояния до туманности при различных видах функции $g(t)$.

*) В своих лекциях, прочитанных в Калифорнийском технологическом институте зимой 1932 г., профессор Эйнштейн указал, что эти выражения для числа туманностей можно использовать для проверки справедливости модели Эйнштейна — де Ситтера, в которой R_0^2 полагается равным ∞ , а $\Lambda = 0$.

Чтобы иметь дело с конкретным видом функции $g(t)$, можно, конечно, выбрать какую-нибудь модель с одним из типов эволюции, рассмотренных во второй части этой главы, и позаимствовать $g(t)$ у этой модели. Однако в настоящее время такой выбор пришлось бы делать на основе каких-то метафизических спекуляций. Поэтому для наших целей лучше всего пойти более феноменологическим путем и попытаться получить максимально возможную информацию относительно вида функции $g(t)$, проводя сравнительный анализ данных наблюдений.

Поскольку естественно считать, что $g(t)$ — непрерывная функция t , и поскольку красное смещение зависит от расстояния приблизительно линейным образом, то разумнее всего взять функцию $g(t)$ в виде разложения в ряд Тейлора по степеням t около текущего момента t_2 , который мы примем за начало отсчета времени [99], т. е. положим $t_2=0$. Тогда, пренебрегая пока степенями выше третьей, получаем

$$g(t) = 2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots), \quad (182.3)$$

где H , l , m — постоянные коэффициенты, а множитель 2 введен для того, чтобы избежать появления дробей в дальнейшем. Отсутствие в приведенном разложении постоянной, разумеется, не имеет принципиального значения, но вместе с тем, поскольку такой выбор означает, что при $t_2=0$ мы будем иметь удобное значение $g_2=0$, интервал (182.1) в окрестности начала координат в текущий момент времени тем самым приводится к такому же виду, как и в специальной теории относительности. Таким образом, красное смещение, наблюдаемое в начале координат, согласно (182.2) определяется выражением

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{-1/2g_1} - 1 = e^{-(Ht_1 + lt_1^2 + mt_1^3 + \dots)} - 1, \quad (182.4)$$

где t_1 — момент в прошлом, когда наблюдаемый свет был испущен туманностью.

Для сравнения с астрономическими данными более удобно, однако, выразить красное смещение не через степени t_1 — времени испускания, а в виде ряда по степеням \bar{r} — расстояния до рассматриваемой туманности. Чтобы получить такое разложение, нам нужно знать значения последовательных производных по \bar{r} от $\delta\lambda/\lambda$ в точке $\bar{r}=0$.

Для первой производной согласно (182.4) мы можем написать

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} e^{-1/2g_1} \frac{dg_1}{dt_1} \frac{dt_1}{d\bar{r}}, \quad (182.5)$$

где $dt_1/d\bar{r}$ — изменение времени при изменении координатного расстояния до рассматриваемой туманности. Зная из вида интервала (182.1) выражение для скорости света, можно $dt_1/d\bar{r}$ представить следующим образом:

$$\frac{dt_1}{d\bar{r}} = - \frac{e^{1/2 g_1}}{\sqrt{1-\bar{r}^2/R_0^2}} \quad (182.6)$$

откуда после подстановки в (182.5) находим первую производную по \bar{r} от $\delta\lambda/\lambda$:

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\bar{r}^2/R_0^2}} \frac{dg_1}{dt_1}, \quad (182.7)$$

что совпадает с равенством (156.6), полученным прежде.

Точно таким же образом можно получить выражения для более высоких производных от $\delta\lambda/\lambda$. Беря функцию $g(t)$ в виде (182.3) и полагая после дифференцирования $\bar{r}=0$, получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) \right]_{\bar{r}=0} &= H, \\ \left[\frac{d^2}{d\bar{r}^2} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) \right]_{\bar{r}=0} &= -2l, \\ \left[\frac{d^3}{d\bar{r}^3} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) \right]_{\bar{r}=0} &= \frac{H}{R_0^2} + 2Hl + 6m, \end{aligned} \quad (182.8)$$

где особенно приятно отметить, что зависимость от пространственной кривизны, т. е. от R_0^2 , появляется только начиная с третьей производной.

С помощью найденных производных мы можем выразить зависимость красного смещения от координат туманности в виде ряда Тейлора — Маклорена:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = H\bar{r} - l\bar{r}^2 + \left(\frac{H}{6R_0^2} + \frac{1}{3}Hl + m \right) \bar{r}^3 + \dots \quad (182.9)$$

Сопоставление с реальной Вселенной дает значение для первого коэффициента разложения (постоянной Хаббла).

$$H = 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ (лет)}^{-1}, \quad (182.10)$$

которое согласуется с результатом Хаббла и Хьюмасона (177.15), поскольку в пределах ошибок измерений d можно заменить на \bar{r} .

Что касается коэффициентов при следующих членах разложения, то для них можно установить верхние и нижние границы,

исходя из того факта, что в пределах ошибок наблюдения красное смещение возрастает с расстоянием приблизительно линейно вплоть до самого далекого скопления в созвездии Льва, т. е. вплоть до расстояний 10^8 световых лет. Из графика зависимости красного смещения от расстояния (рис. 12) можно увидеть, что отклонение от линейности $\delta\lambda/\lambda = H\bar{r}$ не превосходит 1% при 10^7 световых лет, 3% при $3 \cdot 10^7$ световых лет и 18% при 10^8 световых лет. Это означает, что в качестве разумного верхнего предела для значений последующих коэффициентов можно взять

$$|l| < 5 \cdot 10^{-19} (\text{лет})^{-2} \quad (182.11)$$

и

$$\left| \frac{H}{6R_0^2} + \frac{1}{3}Hl + m \right| < 5 \cdot 10^{-27} (\text{лет})^{-3}, \quad (182.12)$$

безотносительно к знаку.

Эти верхние пределы приводят к следующему отклонению (в процентах) от простой формулы $\delta\lambda/\lambda = H\bar{r}$ при различных расстояниях (табл. V):

Таблица V

Расстояние, световой год	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^7$
$\frac{\text{член с } \bar{r}^2}{\text{член с } \bar{r}}$	0,9%	1,8%	2,6%	5,3%	8,8%
$\frac{\text{член с } \bar{r}^3}{\text{член с } \bar{r}}$	0,1%	0,4%	0,8%	3,2%	8,8%

§ 183. Связь плотности с пространственной кривизной и космологической постоянной

Сопоставим оценку (177.26) плотности вещества галактик, усредненного по всему пространству:

$$8\rho_r = 1,7 \cdot 10^{-21} (\text{лет})^{-2} \quad (\rho = 10^{-30} \text{ г/см}^3), \quad (183.1)$$

с выражениями (150.7), (150.8) и (150.10) для давления, полной плотности материи и плотности вещества соответственно. Возьмем функцию $g(t)$ в виде степенного ряда (182.3). Тогда в

заданный момент $t=0$ будем иметь

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} - 4l - 3H^2 + \Lambda, \quad (183.2)$$

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R_0^2} + 3H^2 - \Lambda \quad (183.3)$$

и

$$8\pi\rho_m = \frac{6}{R_0^2} + 12l + 12H^2 - 4\Lambda, \quad (183.4)$$

где плотность вещества ρ_m , так же как и в § 150, принята равной $\rho_{00} - 3p_0$. Это приближение было бы полностью справедливо, если бы все давление в модели можно было приписать исключительно одному излучению.

С первого взгляда не ясно, какую пользу можно извлечь из выражений (183.2)—(183.4), поскольку слишком скудны имеющиеся в нашем распоряжении данные относительно реального мира и, кроме того, в написанные выражения входят сразу две неизвестные постоянные R_0^2 и Λ . Однако если учесть, что давление в рассматриваемой модели не должно быть отрицательным, а плотность вещества должна быть не меньше плотности вещества галактик реальной Вселенной, усредненного по всему пространству, то из выражений (183.2)—(183.4) можно извлечь полезные неравенства:

$$0 < -\frac{1}{R_0^2} - 4l - 3H^2 + \Lambda \quad (183.5)$$

и

$$1,7 \cdot 10^{-21} < \frac{6}{R_0^2} + 12l + 12H^2 - 4\Lambda. \quad (183.6)$$

Исключив из этих неравенств сначала Λ , а затем R_0^2 , подставив значение H и приняв во внимание найденные в предыдущем параграфе неравенства для l , легко получим довольно надежно следующие нижние пределы:

$$-1 \cdot 10^{-18} < \frac{1}{R_0^2}, \quad (183.7)$$

$$-2 \cdot 10^{-18} < \Lambda. \quad (183.8)$$

Верхние границы для этих величин, конечно, более неопределены. Однако кажется довольно естественным предположить, что полная плотность вещества и излучения едва ли может более чем

в 1000 раз превосходить плотность вещества, заключенного в туманностях. Отсюда следовало бы, что

$$\frac{3}{R_0^2} + 3H^2 - \Lambda < 1,7 \cdot 10^{-18}. \quad (183.9)$$

Далее, учитывая, что максимально возможное отношение давления к плотности имеет место только для излучения, получаем еще одно неравенство:

$$-\frac{3}{R_0^2} - 12l - 9H^2 + 3\Lambda < \frac{3}{R_0^2} + 3H^2 - \Lambda. \quad (183.10)$$

Совместное решение последних двух неравенств с учетом установленных ранее ограничений на H и l позволяет найти верхние границы для $1/R_0^2$ и Λ :

$$\frac{1}{R_0^2} < 2,1 \cdot 10^{-18}, \quad (183.11)$$

$$\Lambda < 5,7 \cdot 10^{-18}. \quad (183.12)$$

Далее, используя все результаты относительно постоянных $1/R_0^2$, H и l , из неравенства (182.12) найдем пределы возможных значений m :

$$-5,3 \cdot 10^{-27} < m < 5,2 \cdot 10^{-27}. \quad (183.13)$$

Чтобы в дальнейшем было удобно ссылаться на полученные результаты, соберем их вместе:

$$\begin{aligned} H &= 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ (лет)}^{-1}, \\ -5 \cdot 10^{-19} &< l < 5 \cdot 10^{-19} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -5,3 \cdot 10^{-27} &< m < 5,2 \cdot 10^{-27} \text{ (лет)}^{-3}, \\ -1 \cdot 10^{-18} &< \frac{1}{R_0^2} < 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -2 \cdot 10^{-18} &< \Lambda < 5,7 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}. \end{aligned} \quad (183.14)$$

Исходя из результатов (183.14), нельзя с уверенностью утверждать, что именно модель де Ситтера лучше всего описывает реальную Вселенную. Согласно (142.10) интервал де Ситтера является предельным случаем рассматриваемого нами сейчас интервала (182.1), когда $1/R_0^2$, l , m , ... равны нулю. Однако в выражения для плотности и давления члены порядка Λ и $1/R$ входят аддитивно, результаты же (183.14) не позволяют утверждать, что последними по сравнению с первыми можно пренебречь.

§ 184. Связь между красным смещением и скоростью исчезновения вещества

В § 152 было получено выражение для относительной скорости, с которой полная масса вещества может уменьшаться либо в результате процесса излучения туманностей, либо в результате процесса синтеза и аннигиляции межгалактического вещества, который, возможно, и является причиной возникновения радиационной компоненты космических лучей*). Выражение (152.7), полученное для скорости, было приближенным только потому, что в нем плотность вещества ρ_m была заменена разностью между полной плотностью ρ_{00} и плотностью излучения, которая полагалась равной $3\rho_0$; в остальном же оно точное.

Используя наше представление функции $g(t)$ в виде ряда

$$g(t) = 2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots), \quad (184.1)$$

мы можем записать первоначальное выражение (152.7) для скорости уменьшения массы в виде

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 3 \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} \rho_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\rho_m} \left(4l + \frac{6m}{H} \right) \right] \cdot H, \quad (184.2)$$

который не содержит коэффициентов разложения более высокого порядка, чем H , l , m . Этот результат, очевидно, может привести к дополнительным ограничениям на l и m .

Рассмотрим сначала случай идеально линейной функции $g(t)$, т. е. положим l , m равными нулю. Как следует из (182.9) и из числовых оценок, найденных для $1/R_0^2$, зависимость красного смещения от расстояния в этом случае тоже оказывается почти линейной. Если

$$l = m = 0, \quad (184.3)$$

то скорость уменьшения массы вещества не может быть меньше, чем

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 3H, \quad (184.4)$$

ибо знаменатель первого члена правой части (184.2) во всяком случае не меньше числителя. Однако если придать H его наблюдаемое числовое значение, то окажется, что масса вещества должна убывать слишком быстро. Это иллюстрируется таблицей VI, в которой величина $3H$ сравнивается с известными скоростями потери массы через излучение звездами различных типов**).

*) О современной теории происхождения космических лучей см., например, В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский. Происхождение космических лучей, «Наука», 1963. (Прим. ред.).

***) Первые два столбца этой таблицы взяты из книги [129].

Таблица VI

Энерговыведение типичных звезд

Звезда	$E, \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$	$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt}, (\text{лет})^{-1}$
H. D. 1337 A	15 000	$5,3 \cdot 10^{-10}$
V. D. 6° 1309 A	(11 000)	$3,9 \cdot 10^{-10}$
Корма A	1100	$3,9 \cdot 10^{-11}$
Бетельгейзе	(300)	$1,1 \cdot 10^{-11}$
Капелла A	48	$1,7 \cdot 10^{-12}$
Сириус A	29	$1,0 \cdot 10^{-12}$
Солнце	1,90	$6,6 \cdot 10^{-14}$
α Центавра B	0,90	$3,2 \cdot 10^{-14}$
60 Крюгер B	0,02	$7,0 \cdot 10^{-16}$
<i>3H</i>	50 000	$17,1 \cdot 10^{-10}$

Следовательно, если мы не хотим, чтобы средняя скорость перехода массы вещества в излучение была выше, чем у звезды H. D. 1337 A, которая имеет наибольшее из наблюдаемых отношение светимости к массе, то нам придется отказаться от предположения о строго линейной зависимости g от t . В принципе, однако, мы вполне можем себе представить, что большая скорость перехода межгалактического вещества в излучении связана с возникновением космических лучей.

Интересно отметить также следующее обстоятельство: если $g(t)$ не может быть строго линейной функцией t , то согласно (182.9) относительное красное смещение $\delta\lambda/\lambda$ тоже не может быть строго линейной функцией координатного расстояния \bar{r} до туманности.

Полезно отдавать себе отчет, что все вышеизложенные аргументы приводят к усложнению исходного деситтеровского интервала в пустой модели, который давал достаточно хорошее описание явлений в реальной Вселенной. Чтобы увидеть это, достаточно вспомнить, что, как было указано в предыдущем параграфе, деситтеровский интервал (142.10) является частным случаем используемого сейчас интервала (182.1) и получается, если положить $1/R_0^2$ равной нулю, а $g(t)$ — в точности равной $2Ht$. Однако если считать $g(t)$ линейной функцией, то, согласно последнему столбцу таблицы VI, скорость уменьшения вещества, которое существует реально, должна быть очень большой, несмотря на то что в первом приближении мы использовали пустую модель.

Показав, что l и m не следует считать в точности равными нулю, поскольку в противном случае нам пришлось бы до-

пустить слишком большую скорость убывания количества вещества, мы можем вернуться снова к (184.2) и посмотреть, какими должны быть l и m , чтобы скорость преобразования материи была достаточно мала и соответствовала реальным процессам. Можно довольно уверенно утверждать, что плотность излучения во Вселенной едва ли может быть большего порядка, чем плотность вещества; поэтому, если, как видно из (184.2), придать l и m достаточно большие значения, так чтобы можно было положить

$$4l + \frac{6m}{H} \approx 8\rho_m, \quad (184.5)$$

то можно добиться уменьшения скорости превращения вплоть до нуля:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 0.$$

Однако, вспоминая (183.1), мы вряд ли можем решиться приписать $8\rho_m$ значение, превосходящее более чем в тысячу раз наблюдаемый минимум, соответствующий массе туманностей. При этом в качестве верхней границы, совместимой в пределах наблюдаемой точности с линейной зависимостью красного смещения от расстояния, можно будет принять

$$4l + \frac{6m}{H} \approx 1,7 \cdot 10^{-18}, \quad (184.6)$$

откуда согласно (183.14) следует:

$$4l \leq 2 \cdot 10^{-18}, \quad (184.7)$$

$$\frac{6m}{H} \leq 5,5 \cdot 10^{-17}. \quad (184.8)$$

Отсюда видно, что можно удовлетворить приближенному равенству (184.6) и получить достаточно малую, совпадающую с эмпирической, скорость перехода вещества в излучение, не вступая при этом в противоречие с уже установленными фактами. Нечего и говорить, что более точная информация относительно величин l и m была бы очень желательна.

§ 185. Соответствие между моделью и реальной Вселенной

Этим завершается вывод различных соотношений, необходимых для сравнения свойств нестатических однородных моделей с реальной Вселенной, и теперь мы можем приступить к их общему сопоставлению. Прежде всего следует сказать, что явных несоответствий между моделью и реальностью нет, а те отдельные сравнения, которые мы можем делать, позволяют считать

модель достаточно хорошей для описания реальной Вселенной, по крайней мере, в области до 10^8 световых лет.

Чтобы провести сопоставление, запишем интервал модели в наиболее удобном для нас виде:

$$ds^2 = -e^{2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (185.1)$$

где $g(t)$ представлена рядом Тейлора около текущего момента $t=0$, а наше местонахождение принимается за начало отсчета, т. е. $\bar{r}=0$. Далее, приняв за единицы измерения времени и расстояния соответственно год и световой год, мы (в соответствии со (183.14)) можем, с целью изучить согласие с наблюдениями, приписать различным постоянным следующие числовые значения:

$$\begin{aligned} H &= 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ (лет)}^{-1}, \\ -5 \cdot 10^{-19} &< l < 5 \cdot 10^{-19} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -5,3 \cdot 10^{-27} &< m < 5,2 \cdot 10^{-27} \text{ (лет)}^{-3}, \\ -1 \cdot 10^{-18} &< \frac{1}{R_0^2} < 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -2 \cdot 10^{-18} &< \Lambda < 5,7 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}. \end{aligned} \quad (185.2)$$

Первое достоинство модели состоит в том, что она явно пространственно однородна и изотропна. Это находится в согласии с данными наблюдений, которые не дают оснований выделять в больших масштабах в пространстве какое-либо направление или приписывать какую-либо выделенную роль нашему местонахождению во Вселенной. Однако, как будет указано в следующем параграфе, более детальное исследование Вселенной может заставить нас отказаться от однородности и перейти к изучению неоднородных моделей.

Второе достоинство модели состоит в том, что она дает хорошее согласие с результатами Хаббла относительно связи между вычисленными астрономическими расстояниями до туманностей и их видимыми диаметрами и наблюдаемыми плотностями распределения. Чтобы показать это, возьмем соотношение между координатой туманности \bar{r} в модели и вычисленным, согласно Хабблу и Хьюмасону, расстоянием d до нее:

$$\bar{r} = d \sqrt{\lambda/(\lambda + \delta\lambda)}, \quad (185.3)$$

где $\delta\lambda/\lambda$ — наблюдаемое красное смещение света рассматриваемой туманности; кроме того, приведем ниже теоретические выражения для наблюдаемого диаметра $\delta\theta$ на заданном расстоянии и для числа туманностей N внутри сферы с радиусом, рав-

ным этому расстоянию, и эмпирические зависимости для тех же величин, полученные Хабблом при обработке данных наблюдений (слева — теоретические результаты, справа — эмпирические):

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{\bar{r}} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right), \quad \delta\theta = \frac{\text{const}}{d}, \quad (185.4)$$

$$N = \text{const} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}, \quad N = \text{const} \cdot d^3. \quad (185.5)$$

Поскольку $\delta\lambda/\lambda$ и \bar{r}^2/R_0^2 малы даже для туманностей, находящихся на расстоянии 10^8 световых лет, и не превышают ошибок наблюдений, то в пределах этих ошибок можно считать, что согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительно.

Третье очень важное достоинство модели состоит в том, что она объясняет красное смещение света далеких галактик совершенно естественным образом, приписывая его взаимному разбеганию туманностей. Теория дает для красного смещения величину

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = H\bar{r} - \bar{t}\bar{r}^2 + \left(\frac{H}{6R_0^2} + \frac{1}{3}Hl + m \right) \bar{r}^3 + \dots \quad (185.6)$$

Из наблюдений же Хаббла и Хьюмасона вытекает:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hd. \quad (185.7)$$

Как следует из § 182, интервал возможных числовых значений (185.2) для коэффициентов более высокого порядка таков, что в пределах точности эмпирической формулы оба эти выражения совпадают друг с другом.

Четвертым результатом в этой модели будет следствие из (185.6), что относительное красное смещение для любой туманности не должно зависеть от длины волны. Это согласуется с данными, приведенными в конце § 177, г.

Пятое свойство модели — необходимость присутствия в ней вещества. Числовые границы, приведенные в (185.2), таковы, что плотность вещества в модели не может быть меньше, чем 10^{-30} г/см³, что соответствует плотности, получающейся при усреднении вещества галактик по всему пространству, и, с другой стороны, полная плотность материи и излучения не более чем в 1000 раз превышает эту величину. Давление же при этом во всяком случае не отрицательно.

Шестой вывод состоит в том, что, как было показано, численные границы, допускаемые в (185.2), таковы, что скорости

перехода вещества в излучение, если это понадобится для объяснения других наблюдений, можно приписать любое значение, от нуля до значений больших, чем это известно для звезд с наибольшим отношением светимости к массе. При этом ее можно уточнять по мере поступления новых данных. Таким образом, модель допускает наличие потоков излучения от звезд, может при необходимости быть нестатической и не требует, чтобы величина потоков принимала слишком большое значение.

Кроме перечисленных выше прямых связей между моделью и реальном миром, не следует упускать из виду, что основой для модели послужила релятивистская теория тяготения, которая в областях меньших, чем рассматриваемые нами сейчас, уже сама по себе получила превосходное подтверждение. Более того, следует еще раз подчеркнуть, что из этой теории вытекает невозможность построить устойчивую статическую Вселенную, так что мы всегда должны ожидать либо красного, либо фиолетового смещения света от удаленных объектов.

Все вышесказанное дает основание предполагать, что хорошее соответствие между свойствами модели и реального мира и отсутствие каких-либо явных противоречий между ними позволяет с достаточным доверием относиться к возможности разумной теоретической интерпретации явлений в реальной Вселенной при помощи нашей модели.

Можно высказать и несколько пожеланий относительно будущих наблюдений.

Прежде всего, было бы очень хорошо проверить однородность в больших масштабах на еще больших расстояниях. Обнаружение значительного различия между ближайшими и далекими частями Вселенной или между северным и южным полушариями по отношению к плотности распределения туманностей или зависимости красного смещения от расстояния имело бы далеко идущие последствия, поскольку этот эмпирический факт потребовал бы перехода к неоднородным моделям.

Проверка точного теоретического соотношения (180.5) между видимыми диаметрами и светимостями

$$\frac{\delta\theta}{\sqrt{l}} = \text{const} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^2 \quad (185.8)$$

была бы хорошим подтверждением гипотезы о разбегании туманностей, так как такая связь не обязательно будет справедливой при других объяснениях красного смещения.

Эта проверка, конечно, довольно сложна из-за трудностей измерения диаметров.

Подобным же образом соотношение между светимостью и числом туманностей, которое задается с помощью двух

уравнений (178.11) и (181.2):

$$\bar{r} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\bar{t}}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right), \quad (185.9)$$

$$N = \text{const} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}, \quad (185.10)$$

дает хороший способ проверки и теории разбегания, и гипотезы однородного распределения. Конечно, все проверки сильно осложняются при переходе ко все более отдаленным областям Вселенной, ибо, во-первых, может начать проявляться эффект поглощения в промежуточной области и, во-вторых, может оказаться несправедливым предположение о неизменности свойств туманностей в течение всего интересующего нас времени. Поэтому главным результатом такой проверки может оказаться оценка реальности такого рода эффектов.

Существенно также более подробно исследовать зависимость красного смещения от расстояния. В настоящее время мы даже не знаем знака следующего члена ряда в разложении функции $\delta\lambda/\lambda$ по степеням \bar{r} и поэтому ничего не можем сказать о том, возрастает ли скорость взаимного разбегания туманностей со временем или уменьшается. Возможно, что ответить на этот вопрос удастся с помощью строящегося сейчас двухсотдюймового рефлектора *).

Очень важно было бы обнаружить еще какие-либо другие виды вещества, кроме того, которое непосредственно видно в форме туманностей. Как уже указывалось, присутствие межгалактического газа иногда можно обнаружить по имеющемуся поглощению. Кроме того, может быть, скоро удастся получить больше сведений относительно источника и природы космических лучей. При наличии более полной информации о межгалактическом веществе можно будет значительно сузить пределы возможных значений $1/R_0^2$ и Λ .

По-видимому, на некоторые из этих вопросов и на многие другие, пока еще не столь четко поставленные, в ближайшем будущем мы получим более исчерпывающие ответы. Но прежде всего наблюдения, а не гипотезы должны определить окончательную структуру нашей космологической теории.

Добавления редактора. Астрономические наблюдения в последние годы дали очень много материала. Открытие квазаров, пульсаров (нейтронных звезд), поиски черных дыр (возможно, что рентгеновский источник X-1 в Лебедь и есть такая «дыра») дают новый материал для обсуждения космических моделей.

*) Этот вопрос так и остается пока без ответа. (Прим. ред.)

Наиболее важные данные получены о расстояниях до далеких галактик и о реликтовом излучении.

Для того чтобы оценить возможности современной астрономии, отметим, что в 1973 г. открыт квазар, удаляющийся со скоростью $v/c \approx 0,94$ (т. е. измерено красное смещение $z = (\lambda - \lambda_0) = 3,4$).

Расстояния до далеких астрономических объектов много раз подвергались критическому пересмотру. В результате для постоянной Хаббла принимаются все меньшие значения. Разные авторы дают значения от 50 до 100 км/сек·Мпс. Наименьшее значение дает Вокулер [133]: 50 км/сек·Мпс, наибольшее — Ван дер Берг [134]: 95 ± 15 км/сек·Мпс. Это отвечает «возрасту» $1,3 \div 2,0 \cdot 10^{10}$ лет.

Отклонение от линейного закона Хаббла принято характеризовать параметром q_0 , который связан со значением приведенной плотности

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{кр}}$$

формулой

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega - \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H^2}.$$

Если считать $\Lambda = 0$, то анализ Сэндеджа [135] дает $q_0 = 1,03^{+0,43}_{-0,26}$. Разные оцен-

ки дают q_0 в интервале от 0,7 до 1,5. Напомним, что $q_0 = 1/2$ отвечает плоскому расширяющемуся миру, $q_0 > 1/2$ отвечает закрытому миру, $q_0 < 1/2$ — открытому.

С другой стороны, оценки плотности вещества во Вселенной не дают столь большого значения Ω . Считалось, что Галактики дают вклад $\rho = 3 \cdot 10^{31}$ г/см³. Однако Я. Эйнесто в 1974 г. из анализа движения спутников Галактик получил $\rho \geq 1,5 \cdot 10^{-30}$ г/см³ и $\Omega \sim 0,3$ (при $H = 50$ км/сек·Мпс). Кажется вероятным, что $\Omega \sim 1$.

Наиболее важным новым фактом является открытое реликтовое излучение — равновесное излучение, отвечающее температуре 2,7°К, и плотности 0,25 эв/см³ ($\Omega = 3 \cdot 10^{-5}$), что соответствует примерно 400 фотонам в 1 см³. Существование весьма изотропного излучения служит серьезным аргументом в пользу изотропной модели и ее расширения.

Отметим еще один эффект, связанный с этим излучением.

Реликтовое излучение благодаря его изотропии определяет в пространстве «абсолютную» инерционную систему координат (систему координат, в которой оно изотропно). Спектр реликтового излучения должен смещаться из-за суммарного движения: Земли вокруг Солнца, Солнца вокруг центра Галактики и самой Галактики. Это смещение должно обнаруживать 24-часовой период, за время которого наблюдатель проходит все направления в пространстве [136]. Такой период наблюдался Конклином [137], который оценил скорость движения Земли относительно реликтового излучения в 160 км/сек, что примерно в 5 раз больше, чем скорость движения Земли вокруг Солнца. Если более точные измерения подтвердят эти данные, то мы получаем очень полезную систему координат, фиксированную в процессе эволюции Вселенной.

§ 186. Несколько общих замечаний относительно космологических моделей

В этом параграфе мы сделаем несколько общих замечаний относительно однородности, пространственной кривизны и эволюции космологических моделей. В предыдущем параграфе мы указывали на ряд соответствий между наблюдаемыми явления-

ми и свойствами модели, построенной последовательным образом на принципах релятивистской механики. В этом параграфе мы, наоборот, столкнемся с недостаточностью имеющейся информации для однозначного определения всех тех характеристик, которые необходимы для построения разумной космологической картины.

а) **Однородность.** Прежде всего рассмотрим доводы и пользу пространственной изотропности и, следовательно, как было показано в § 148, в пользу пространственной однородности космологических моделей. Наиболее убедительное соображение состоит в том, что в результате этих предположений мы получаем математически хорошо определенные и разрешимые модели. Но главный довод состоит в том, что реальная Вселенная в больших масштабах действительно является в высокой степени однородной.

С другой стороны, с точки зрения малых масштабов туманности имеют явную тенденцию собираться в скопления. Следовательно, во всяком случае тонкие детали космической эволюции не могут быть охвачены однородной моделью. Так, например, можно думать, что нижнее сингулярное состояние с точно нулевым радиусом, возникающее при осцилляторном поведении, свойственно только определенному классу однородных моделей и не является обязательным для осцилляторного расширения и сжатия всей реальной Вселенной или ее частей.

Более того, даже с точки зрения больших масштабов мы, очевидно, ничего не можем сказать относительно условий в реальной Вселенной на расстояниях, больших чем 10^8 световых лет. Поэтому очень возможно, что за пределами видимости современных телескопов могут иметь место совершенно другие плотности распределения и даже может происходить сжатие вместо расширения.

С этой точки зрения было бы очень важно установить, какие силы контролируют поведение и взаимодействие различных частей Вселенной. Может оказаться, что этих сил недостаточно, чтобы установить однородное распределение повсюду. Это мнение высказывалось также и профессором Цвики в беседе с автором.

Хотя использование однородных моделей и следует считать, благодаря их математической простоте, правильным для получения первого приближения, эти модели не пригодны для исследования более тонких деталей и должны будут, вероятно, подвергнуться коренным изменениям, когда будут получены сведения о более удаленных частях Вселенной [130].

б) **Пространственная кривизна.** Считая, что однородная модель является удовлетворительным первым приближением к реальному миру, мы тем не менее, как видно из (185.2), ничего

не можем сказать относительно значения $1/R_0^2$: оно может быть как положительным, так и отрицательным и нулем. Имеющиеся данные наблюдений достаточно разнообразны, т. е. у нас нет достаточно информации, чтобы отдать предпочтение одному из трех вариантов модели: закрытой, пространственно плоской или открытой искривленной.

Даже если мы введем искусственное, но разумное предположение, что космологическая постоянная Λ равна нулю, все равно знак $1/R_0^2$ не может быть идентифицирован определенным образом. Предполагая, что $\Lambda=0$, можно выражение для плотности записать в следующем виде:

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R_0^2} + 3H^2. \quad (186.1)$$

Выше нам представлялось необходимым ограничить область возможных значений $8\pi\rho_0$ диапазоном от $1,7 \cdot 10^{-21}$ до $1,7 \cdot 10^{-18}$. Поскольку $3H^2$ имеет приближенное значение $1 \cdot 10^{-18}$, то отсюда вытекает интересное следствие, что если полная плотность не слишком сильно превышает наблюдаемую плотность вещества, существующего в форме туманностей, то $1/R_0^2$ должно быть отрицательным, а модель — открытой.

Имеющиеся данные не противоречат и модели Эйнштейна — де Ситтера, которая рассматривалась в § 164 и получалась при $1/R_0^2$ и Λ , равных нулю. Если в модели Эйнштейна — де Ситтера приравнять нулю также и давление (уравнение (164.5)), то, как легко показать, это приведет к таким значениям \ddot{g} и \dot{g} , которые соответствуют l и m , лежащим внутри интервалов, указанных в (185.2), что согласуется с той точностью, с которой выполняется линейное соотношение между красным смещением и расстоянием.

Хотя у нас и нет достаточно информации, чтобы отдать предпочтение открытой или закрытой модели, все же в связи с этой проблемой можно сделать два замечания несколько нефизического свойства. Во-первых, может показаться убедительным, что, как утверждал, по крайней мере в частных беседах, профессор Лемэтр, гипотеза закрытой, т. е. конечной, модели — «оптимистическая» и поэтому ее следует принять, поскольку бесконечную Вселенную нельзя рассматривать во всей ее совокупности как объект, поддающийся научному исследованию. С другой стороны, однако, вся прошлая история науки не дает никакого основания надеяться, что ее поле деятельности может быть когда-либо ограничено. На самом деле целью науки всегда было стремление ко все расширяющемуся горизонту. Поэтому априорные доводы в пользу открытой модели могут казаться одинаково убедительными.

в) **Развитие во времени.** Данных наблюдений, подытоженных в (185.2), недостаточно также и для того, чтобы можно было решить, какого типа эволюцию следует приписать модели в течение длительных периодов времени. Конечно, мы можем с некоторой уверенностью утверждать, что находящаяся в непосредственной близости к нам часть Вселенной испытывает в настоящее время расширение. До тех пор, однако, пока мы ничего не знаем относительно знака второй производной красного смещения как функции координат, мы не сможем сказать, является ли скорость расширения возрастающей со временем, как было бы в случае модели, переходящей в конце концов в пустое пространство де Ситтера, или же скорость убывает со временем, как было бы в случае осциллирующей модели.

Действительно, если, например, принять давление в модели равным нулю, то возможны три абсолютно разные варианта — такие, что эволюция в настоящий момент не будет противоречить ни границам, установленным для плотности материи, ни, в пределах ошибок, линейной зависимости красного смещения от расстояния. Этими тремя вариантами являются: модель Лемэтра (161.11) с $\Lambda = \Lambda_E$ и $R_0^2 > 0$ (она расширяется от первоначально статического состояния); эйнштейновская модель (163.3) с $\Lambda = 0$ и $R_0^2 > 0$ (она осциллирует между нижним сингулярным состоянием и максимумом) и модель Эйнштейна — де Ситтера (164.6) с $\Lambda = 0$, $R_0^2 = \infty$ (она расширяется все время, начиная от сингулярного состояния). Итак, мы не можем отдать предпочтение ни одному из вариантов, рассмотренных во второй части этой главы, и должны примириться с тем, что все, чем мы до сих пор занимались, — это только исследование разных мыслимых возможностей, которые могут и не отвечать реальности.

В § 163 и § 164 мы показали, что для двух случаев: модели Эйнштейна и модели Эйнштейна — де Ситтера — время расширения, протекшее с момента выхода из сингулярного состояния, невелико. Оно определяется следующим образом:

$$\Delta t \leq \frac{4}{3g},$$

или через коэффициенты ряда Тейлора:

$$\Delta t \leq \frac{2}{3H}. \quad (186.2)$$

Поэтому для этих моделей период, прошедший со времени выхода из сингулярного состояния, не может значительно превышать возраст Земли, т. е. порядка 10^9 лет. Далее, из известной величины красного смещения и его приблизительной линейности вытекает, что вообще, грубо говоря, основная часть расширения

произошла за 10^9 — 10^{10} лет. Так как обычно для звездной эволюции принимают гораздо больший промежуток времени — порядка 10^{12} лет, то необходимо проанализировать вопрос о том, можно ли для космического расширения принять такой короткий промежуток времени или нет.

По поводу видимых трудностей, связанных с временными масштабами*), нужно, прежде всего, сказать, что рассмотренные нами однородные модели являются слишком сильно идеализированными, чтобы можно было рассчитывать с их помощью получить какую-либо адекватную информацию относительно конкретного состояния реальной Вселенной, скажем, 10^9 лет тому назад. Так что, как уже указывалось раньше в этом параграфе, следует считать, что выделенное сингулярное состояние с малым объемом, откуда в некоторых моделях начинается расширение, скорее является свойством, обусловленным однородностью моделей, нежели присуще самой реальной Вселенной. Более того, так как мы ничего не знаем о поведении Вселенной за пределами нашего ближайшего окружения с радиусом 10^8 световых лет, то, очевидно, никакая модель не поможет определить момент времени, когда началось расширение реальной Вселенной, достаточно точно. Мы можем только грубо оценить, что длительность расширения ближайшей к нам области может быть порядка 10^9 — 10^{10} лет.

Во-вторых, следует подчеркнуть, как указывал, например, де Ситтер [131], что момент начала расширения никоим образом не следует рассматривать как момент рождения Вселенной, и нет никаких причин ожидать, что длительность звездной эволюции и длительность расширения должны совпадать. Действительно, согласно де Ситтеру, неоднородная структура туманностей, их высокая скорость вращения и примерная дата рождения нашей собственной планетной системы являются звеньями одной цепи, свидетельствующими о близком расположении туманностей или галактик 10^9 — 10^{10} лет тому назад.

Сильное отличие времени звездной эволюции от времени расширения Вселенной означает только, что мы ничего не можем сказать относительно возникновения физической Вселенной. На самом деле очень трудно отрешиться от чувства, что для событий во Вселенной лучше всего взять временной интервал от минус бесконечности в прошлом до плюс бесконечности в будущем.

*) Не следует думать, будто расхождение временных масштабов можно устранить каким-либо трюком, типа введения новой времениподобной переменной вместо рассматриваемой координаты t . Из § 149, г вытекает, что координата t согласуется сама по себе с измерением времени по обычным часам, покоящимся в нашей собственной Галактике, и поэтому с ее помощью одинаково удобно и оценивать звездную эволюцию, и регистрировать приближения или удаления других туманностей.

Аргументы классической термодинамики против такой точки зрения должны подвергнуться, конечно, некоторым изменениям, поскольку релятивистская термодинамика открывает перед нами гораздо большее число типов поведения. Эти изменения будут еще более серьезными, если, как это подозревает Бор, в недрах звезд нарушается закон сохранения энергии *).

§ 187. Наша окрестность как образ Вселенной в целом

Из всего вышесказанного вытекает, что имеющихся в нашем распоряжении данных недостаточно для построения точной космологической модели, хорошо отражающей реальную Вселенную во всем пространстве и во все времена. Поэтому лучше всего считать, что интервал, который мы выбрали для исследования поведения Вселенной:

$$ds^2 = -e^{2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (187.1)$$

является только первым приближением, пригодным для изучения событий, не очень удаленных от нас в пространстве и от текущего момента во времени.

Тогда мы сможем заключить, что расширение Вселенной, о котором мы знаем точно, что оно есть в настоящее время и вблизи нас, является тем процессом, который уже происходил в течение 10^8 лет в прошлом и будет, по-видимому, продолжаться примерно столько же времени в будущем. Более того, мы можем достаточно уверенно утверждать, что плотность распределения туманностей и скорость расширения не меняются и на расстояниях в несколько раз больших, чем изученные до сих пор 10^8 световых лет. Все же у нас нет хорошей модели для описания Вселенной в целом, и чтобы получить о ней какое-нибудь представление, мы можем опереться лишь на грубую экстраполяцию. Для этого мы, прежде всего, должны рассматривать ближайшую к нам часть Вселенной как достаточно хороший, хотя и не точный образец всех остальных частей во все времена и в любом месте.

Обнаружив, что распределение туманностей расширяется всюду в пределах видимости наших телескопов, мы можем считать, что взаимное движение материи является типичной чертой Вселенной. Тем не менее приписывать материи всюду ту же самую плотность и ту же стадию эволюции, что и в нашем собственном окружении, и исключать для всех времен и всех мест

*) Такая гипотеза была отброшена почти сразу после ее возникновения. (Прим. ред.)

всякую возможность движения в направлении сжатия, которое механически так же просто, как и расширение,— значит считать наше окружение на современном этапе не только хорошим образцом, но и, что совершенно не оправдано, точной копией Вселенной в целом.

Может показаться, что в том, как мы заканчиваем наше довольно сложное исследование свойств и эволюции различных космологических моделей, умаляя их применимость к реальному миру, содержится некоторая доля иронии. Нужно, однако, сказать, что изучение моделей все же принесло нам пользу, так как обогатило нас знаниями относительно мыслимых возможностей и дало нам приближенную теорию, которая уже сейчас довольно успешно связала между собой многие явления реального мира.

В заключение хотелось бы отметить, что в космологии нужно быть очень внимательным, чтобы не пойти по пути авантюристического образа мышления и не позволить себе удовольствия приписывать природе желаемое вместо действительного.

Прежде всего, проблемы космологии обширны и запутаны и к ним приходится подходить с очень скудной информацией. Поэтому нужно быть очень осторожным, чтобы привлекательные результаты некоторых простых математических моделей не заслонили больших сложностей реального мира. Во-вторых, очевидно, что прошлая история Вселенной и будущая судьба человека тесно связаны с изучаемыми нами проблемами. Поэтому нужно следить за тем, чтобы наши суждения не были заражены теологическими воззрениями и не были подвержены влиянию человеческих страхов и надежд. Открытие моделей, начинающих расширяться от сингулярного состояния с нулевым объемом, нельзя выдавать за доказательство того, что наша Вселенная была создана в какое-то определенное время в прошлом. Точно так же открытие моделей, которые могут расширяться и сжиматься необратимым образом, никогда не достигая окончательного состояния с максимальной энтропией и вечным покоем, нельзя выдавать за доказательство того, что реальная Вселенная всегда будет представлять собою сцену для будущей деятельности человека.

К проблемам космологии следует относиться с чувством уважения к их большому значению, с чувством благоговения перед их обширностью и восхищения перед человеческим разумом, пытающимся разрешить их. Однако решать их нужно только кропотливыми критическими и беспристрастными методами ученого.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Нижний индекс 0 и верхний индекс 0 , присоединенные к символу, обычно обозначают собственную величину, определяемую по измерениям локального наблюдателя. (Исключенне представляет только R_0 в выражении $R = R_0 e^{1/2 \int g(t) dt}$.)

Скалярные величины (светлый шрифт)

a Постоянная Стефана — Больцмана.

A Работа. Число молекул в моле.

c Скорость света. Концентрация.

d Астрономическое расстояние.

e Электрический заряд. Основание натуральных логарифмов.

E Энергия.

F Свободная энергия.

$g(t)$, g Функция, определяющая зависимость интервала однородных космологических моделей от времени.

h Постоянная Планка.

H Постоянная Хаббла.

i $\sqrt{-1}$.

k Постоянная Больцмана, Ньютоновская гравитационная постоянная.

l Светимость небесного объекта.

m Масса. Звездная величина небесного объекта.

n Число молей.

N Число молекул.

p Давление.

Q Количество тепла.

r Радиальная координата.

R Газовая постоянная.

$R_0 e^{1/2 \int g(t) dt} := R$ Радиус космологической модели.

S Энтропия.

t Время.

T Температура.

u Скорость. Плотность излучения.

U Энергия.

v Объем. Скорость.

δv_0 Элемент собственного пространственного объема.

V Относительная скорость координатных осей.

x, y, z Пространственные координаты.

α Степень диссоциации.

- ϵ Диэлектрическая постоянная.
 η Интегрирующий множитель.
 θ, φ, χ Полярные координаты.
 $\delta\theta$ Видимый диаметр туманности.
 k Гравитационная постоянная, связывающая тензор энергии — импульса со свернутым тензором Римана — Кристоффеля.
 λ Длина волны.
 Λ Космологическая постоянная.
 μ Магнитная проницаемость.
 ν Частота.
 ρ Плотность.
 ρ_{00} Собственная макроскопическая плотность энергии.
 ρ_0 Собственная плотность электрического заряда.
 σ Электрическая проводимость.
 τ Период.
 φ Скалярный потенциал. Плотность энтропии.
 Φ Термодинамический потенциал.
 ψ Ньютоновский гравитационный потенциал.

Векторные величины (жирный шрифт)

- A** Векторный потенциал.
B Магнитная индукция.
C Плотность тока проводимости.
D Электрическая индукция.
E Напряженность электрического поля.
F Сила.
f Сила, действующая на единицу объема.
g Плотность импульса.
G Полный импульс.
H Напряженность магнитного поля.
J Плотность тока.
M Момент количества движения. Намагниченность.
P Электрическая поляризация.
s Плотность потока энергии.
u Скорость.

Тензоры (светлый шрифт с индексами)

Латинские индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3. Греческие индексы $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ принимают значения 1, 2, 3, 4.

- ds Инвариантный интервал.
 $\delta_{\mu\nu}$ Галилеев метрический тензор.
 F^{μ} Сила Минковского.
 $F^{\mu\nu}$ Микроскопический электромагнитный тензор.
 $F^{\mu\nu}, H^{\mu\nu}$ Макроскопические электромагнитные тензоры.
 $g_{\mu\nu}$ Фундаментальный метрический тензор.
 g Детерминант $|g_{\mu\nu}|$.
 $h_{\mu\nu}$ Отклонение $g_{\mu\nu}$ от галилеевых значений $\delta_{\mu\nu}$.
 J^{μ} Обобщенный ток. Компоненты импульса и энергии.
 P_{ij} Компоненты (абсолютного) натяжения.
 $R^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ Тензор Римана — Кристоффеля.
 $R_{\mu\nu}$ Свернутый тензор Римана — Кристоффеля.
 R Инвариантная кривизна.
 t_{ij} Компоненты (относительного) натяжения.
 $T^{\mu\nu}$ Тензор энергии — импульса.

Тензорные плотности (готический шрифт)

$\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ Плотность тензора электромагнитного поля.

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sqrt{-g}.$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}).$$

\mathfrak{S}^{μ} Плотность вектора потока.

\mathfrak{L} Функция Лагранжа (псевдоскаляр).

\mathfrak{t}_{μ}^{ν} Плотность псевдотензора гравитационной энергии — импульса.

\mathfrak{E}_{μ}^{ν} Плотность тензора энергии — импульса материальной среды.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Единичные векторы, параллельные осям i, j, k . (1)

Единичный вектор нормали к поверхности π . (2)

Разложение вектора по компонентам:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}. \quad (3)$$

Скалярное произведение векторов:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos(\widehat{AB}). \quad (4)$$

Векторное произведение векторов:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}. \quad (5)$$

Нормальная компонента вектора:

$$A_n = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) = A \cos(\widehat{An}). \quad (6)$$

Векторный оператор дифференцирования:

$$\nabla = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (7)$$

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \cdot \mathbf{A}] = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (10)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0. \quad (11)$$

Лапласиан:

$$\Delta^2 = \nabla \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (12)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (13)$$

Теорема Гаусса:

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \int_S A_n d\sigma.$$

$$\int_v \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dv = \int_S \{ A_x \cos(nx) + A_y \cos(ny) + A_z \cos(nz) \} d\sigma. \quad (14)$$

Теорема Стокса:

$$\int_l \mathbf{A} \cdot ds = \int_s (\text{rot } \mathbf{A})_n d\sigma. \quad (15)$$

Формула Грина:

$$\int_v (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \int_s (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi)_n d\sigma. \quad (16)$$

Еще одна интегральная формула:

$$\int_v (\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dv = - \int_s [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_n d\sigma. \quad (17)$$

Оператор Даламбера:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right). \quad (18)$$

Решение волнового уравнения:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \omega, \quad \psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{[\omega]}{r} dv, \quad (19)$$

где $[\omega]$ — значение ω в той же точке, что и dv , и в момент времени $(t - r/c)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

НЕСКОЛЬКО ФОРМУЛ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

а) *Общие обозначения.*

Индексы $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ принимают значения 1, 2, 3, 4.

Нижние индексы — ковариантные, верхние индексы — контравариантные.

Координатные системы:

$$x^\mu = x^1, x^2, x^3, x^4, \quad x'^\mu = x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 \text{ и т. п.}, \quad (2)$$

где

$$x'^\mu = x'^\mu(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Правило суммирования по немым индексам:

$$A^\alpha B_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} A^\alpha B_\alpha = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 + A^4 B_4, \quad (3)$$

$$A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \sum_{\beta=1}^{\beta=4} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = A^{11} B_{11} + A^{12} B_{12} + \dots + A^{44} B_{44}$$

и т. д. Один из двух немых индексов всегда ковариантен, а другой всегда контр-авариантен.

Определение тензора.

Множество 4^r компонент (ранг r равен полному числу индексов $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ и т. д.), которые определены в данной точке x^μ многообразия и при преобразовании координат преобразуются следующим образом:

$$T'_{\rho\sigma\dots}{}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} \dots T_{\gamma\delta\dots}{}^{\alpha\beta\dots} \quad (4)$$

Примеры

Тензор нулевого ранга (скалярный инвариант):

$$S' = S. \quad (5)$$

Контравариантный тензор первого ранга (вектор):

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \quad (6)$$

Ковариантный тензор первого ранга:

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha. \quad (7)$$

Смешанный тензор второго ранга:

$$T'^\nu{}_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} T^\alpha{}_\beta. \quad (8)$$

Симметричный тензор:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (9)$$

Антисимметричный тензор:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (10)$$

б) *Фундаментальный метрический тензор и его свойства.*

Метрический тензор:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (11)$$

Бесконечно малое приращение координат:

$$dx^\mu = dx^1, dx^2, dx^3, dx^4. \quad (12)$$

Скалярный интервал ds , соответствующий dx^μ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (13)$$

Детерминант, образованный из компонент $g_{\mu\nu}$:

$$g = |g_{\mu\nu}|. \quad (14)$$

Нормированный мипор:

$$g^{\mu\nu} = \frac{|g_{\mu\nu}|_{\text{minor}}}{g}. \quad (15)$$

Смешанный тензор:

$$g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (16)$$

Галилеев тензор $g_{\mu\nu}$:

$$\delta_{\mu\nu} = \pm 1, 0. \quad (17)$$

Символы Кристоффеля:

$$[\mu\nu, \sigma] = \Gamma_{\mu\nu, \sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right), \quad (18)$$

$$\{\mu\nu, \sigma\} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right).$$

Тензор Римана — Кристоффеля:

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\tau} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}. \quad (19)$$

Уравнение геодезической:

$$\delta \int ds = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x^{\sigma}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0. \quad (20)$$

в) *Тензорная алгебра.*

Поднимание, опускание и переименование индексов (примеры):

$$A^{\nu} = g^{\nu\alpha} A_{\alpha}, \quad (21)$$

$$A_{\mu} = g_{\mu\alpha} A^{\alpha}, \quad (22)$$

$$A^{\nu} = g_{\alpha}^{\nu} A^{\alpha}. \quad (23)$$

Свертка (примеры):

$$T = T_{\nu}^{\nu} = g_{\nu\alpha} T^{\nu\alpha} = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 + T_4^4, \quad (24)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}. \quad (25)$$

Сложение (примеры):

$$A_{\mu} = B_{\mu} + C_{\mu} = (B_1 + C_1), (B_2 + C_2), (B_3 + C_3), (B_4 + C_4). \quad (26)$$

Прямое произведение (примеры):

$$A_{\mu}^{\nu} = B_{\mu} C^{\nu} = \begin{pmatrix} B_1 C^1 & B_1 C^2 & B_1 C^3 & B_1 C^4 \\ B_2 C^1 & B_2 C^2 & B_2 C^3 & B_2 C^4 \\ B_3 C^1 & B_3 C^2 & B_3 C^3 & B_3 C^4 \\ B_4 C^1 & B_4 C^2 & B_4 C^3 & B_4 C^4 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Скалярное произведение (пример):

$$A = A_{\nu}^{\nu} = B_{\nu} C^{\nu} = B_1 C^1 + B_2 C^2 + B_3 C^3 + B_4 C^4. \quad (28)$$

Ковариантное дифференцирование (примеры):

$$(A^\mu)_\nu = A^\mu_\nu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha, \quad (29)$$

$$(A_\mu)_\nu = A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha, \quad (30)$$

$$(T^{\mu\nu})_\sigma = T^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu T^{\mu\alpha}, \quad (31)$$

$$(T^\nu_\mu)_\sigma = T^\nu_{\mu\sigma} = \frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu T^\alpha_\mu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha T^\nu_\alpha, \quad (32)$$

$$(T^{\dots\nu\dots})_\sigma = \frac{\partial T^{\dots\nu\dots}}{\partial x^\sigma} \begin{cases} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu T^{\dots\alpha\dots} & \text{для каждого контравариантного индекса} \\ - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha T^{\dots\nu\dots} & \text{для каждого ковариантного индекса.} \end{cases} \quad (33)$$

Дивергенция:

$$(T^{\dots\nu\dots})_\nu. \quad (34)$$

г) Разные формулы.

$$(g_{\mu\nu})_\sigma = 0. \quad (35)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma. \quad (36)$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{-g}. \quad (37)$$

$$T^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}. \quad (38)$$

$$\frac{dg}{g} = g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}. \quad (39)$$

$$(\Phi_\mu)_\nu - (\Phi_\nu)_\mu = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (40)$$

$$(F_{\mu\nu})_\sigma + (F_{\nu\sigma})_\mu + (F_{\sigma\mu})_\nu = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$$

при условии, что $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. (41)

$$\Phi_{\mu\nu\sigma} - \Phi_{\mu\sigma\nu} = \Phi_\epsilon R_{\mu\nu\sigma}^\epsilon,$$

если

$$\Phi_{\mu\nu\sigma} = ((\Phi_\mu)_\nu)_\sigma \quad \text{и} \quad \Phi_{\mu\sigma\nu} = ((\Phi_\mu)_\sigma)_\nu. \quad (42)$$

$$(T^{\dots\mu\dots})_{\nu\sigma} - (T^{\dots\mu\dots})_{\sigma\nu} = \sum T^{\dots\epsilon\dots} R_{\mu\nu\sigma}^\epsilon, \quad (43)$$

где суммирование \sum производится по всем возможным значениям индекса μ .

д) *Тензорные плотности.*

$$\mathfrak{z} = T \sqrt{-g}. \quad (44)$$

$$\mathfrak{z}_{\mu}^{\nu \dots} = T_{\mu}^{\nu \dots} \sqrt{-g}. \quad (45)$$

$$(A^{\mu})_{\mu} \sqrt{-g} = \mathfrak{U}^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (A^{\mu} \sqrt{-g}) = \frac{\partial \mathfrak{U}^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (46)$$

$$(T^{\nu})_{\nu} \sqrt{-g} = \mathfrak{z}_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{\partial \mathfrak{z}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{z}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \mathfrak{z}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \mathfrak{z}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \quad (47)$$

при условии, что $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

$$(F^{\mu\nu})_{\nu} \sqrt{-g} = \mathfrak{F}_{\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \quad (48)$$

при условии, что $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

е) *Четырехмерный объем. Собственный пространственный объем.*

Когда пределы интегрирования определяются заданной четырехмерной областью, имеем инвариант

$$I = \iiint \sqrt{-g'} dx'^1 dx'^2 dx'^3 dx'^4 = \iiint \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \quad (49)$$

Когда область достаточно мала, так что можно пользоваться обычными координатами x, y, z, t или собственными координатами x_0, y_0, z_0, t_0 , тогда

$$\delta I = \iiint dx dy dz dt = \iiint dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 = \iiint \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \quad (50)$$

Поэтому можно считать, что

$$\delta I = \delta v \delta t = \delta v_0 \delta t_0 = \delta v_0 \delta s = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4, \quad (51)$$

где δv и δv_0 — элементы пространственного объема, а δt и $\delta t_0 = \delta s$ — элементы обычного и собственного времени соответственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ВАЖНЕЙШИЕ КОНСТАНТЫ*)

Константа	Данные автора	Данные 1974 г.
Постоянная Стефана — Больцмана a , эрг·см ⁻³ ·град ⁻⁴	$7,6237 \cdot 10^{-15}$	$7,565 \cdot 10^{-15}$
Число Авогадро A , моль ⁻¹	$6,064_{36} \cdot 10^{23}$	$6,0220943(61) \cdot 10^{23}$
Скорость света c , см·сек ⁻¹	$2,99796 \cdot 10^{10}$	$2,99792458(1, 2) \cdot 10^{10}$
Заряд электрона e , ед. СГСЭ	$4,770 \cdot 10^{-10}$	$4,803242(14) \cdot 10^{-10}$

*) Мы приводим здесь константы автора и для сравнения последние константы по данным 1974. (Прим. ред.)

Константа	Данные автора	Данные 1974 г.
Постоянная Планка h , эрг·сек	$6,547 \cdot 10^{-27}$	$6,582173(17) \cdot 10^{-27}$
Постоянная Больцмана k , эрг·град ⁻¹	$1,3708_9 \cdot 10^{-16}$	$1,380662(44) \cdot 10^{-16}$
Гравитационная постоянная Ньютона G , k , γ , дин·см ² /г ²	$6,664 \cdot 10^{-8}$	$6,6732(31) \cdot 10^{-8}$
Удельный заряд электрона, e/m , ед. СГСЭ·г ⁻¹	$5,279_{41} \cdot 10^{17}$	$5,27275(13) \cdot 10^{17}$
Газовая постоянная R , эрг·град ⁻¹ ·моль ⁻¹	$8,3136_0 \cdot 10^7$	$8,31441(20) \cdot 10^7$

Переход от релятивистских единиц к единицам СГС:

l, t, m в релятивистских единицах.

L, T, M в единицах СГС.

$$L = l, \text{ см.}$$

$$T = \frac{1}{2,998 \cdot 10^{10}} t = 3,335 \cdot 10^{-11} t, \text{ сек.}$$

$$M = \frac{(2,998 \cdot 10^{10})^2}{6,673 \cdot 10^{-8}} m = 1,347 \cdot 10^{28} m, \text{ г.}$$

1 парсек (пс) = 3,258 светового года = $3,084 \cdot 10^{18}$ см.

1 мегапарсек (Мпс) = 10^6 пс.

1 световой год = $9,463 \cdot 10^{17}$ см.

1 звездный год = $3,1558 \cdot 10^7$ сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jüttner, Ann. der Physik **34**, 856 (1911).
2. Tolman, Phil. Mag. **28**, 583 (1914).
3. Tolman, The Theory of the Relativity of Motion, University of California Press, 1917.
4. Miller, Science **63**, 433 (1926).
5. Miller, Rev. Mod. Phys. **5**, 203 (1933).
6. Kennedy, Proc. Nat. Acad. **12**, 621 (1926).
7. Illingworth, Phys. Rev. **30**, 692 (1927).
8. Kennedy and Tordike, Phys. Rev. **42**, 400 (1932).
9. J. Laub, Über die experimentellen Grundlagen des Relativitätsprinzips', Jahrb. der Radioaktivität u. Elektronik **7**, 405 (1910).
10. Comstock, Phys. Rev. **30**, 267 (1910).
11. De Sitter, Proc. Amsterdam Acad. **15**, 1297 (1913); там же **16**, 395 (1913).
12. Tolman, Phys. Rev. **31**, 26 (1910).
13. J. J. Thomson, Phil. Mag. **19**, 301 (1910); Stewart, Phys. Rev. **32**, 418 (1911).
14. Ritz, Ann. de Chim. et Phys. **13**, 145 (1908).
15. Tolman, Phys. Rev. **35**, 136 (1913).
16. Marjorana, Phil. Mag. **35**, 163 (1918); там же **37**, 145 (1919).
17. La Rosa, Phys. Zeits. **13**, 1129 (1912).
18. Miller, Proc. Nat. Acad. **11**, 306 (1925).
19. Tolman, Phil. Mag. **23**, 375 (1912).
20. Lewis and Tolman, Phil. Mag. **18**, 510 (1909).
21. Gerlach, Handbuch der Physik, **XXII**, Berlin, 1926.
22. Tolman, Phil. Mag. **22**, 458 (1911).
23. Tolman, Phil. Mag. **25**, 150 (1913).
24. Hupka, Ann. der Physik **31**, 169 (1910).
25. Anderson, Science **76**, 238 (1932).
26. Blackett and Occhialini, Proc. Roy. Soc. **A139**, 69 (1933).
27. Anderson and Neddermeyer, Phys. Rev. **43**, 1034 (1933).
28. Oppenheimer and Plesset, Phys. Rev. **44**, 53 (1933).
29. Oliphant, Kinsey and Rutherford, Proc. Roy. Soc. **A141**, 722 (1933). См. также Bainbridge, Phys. Rev. **44**, 123 (1933).
30. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2 Aufl., Braunschweig, 1913.
31. Laue, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **13**, 513 (1911).
32. Tolman, Phil. Mag. **21**, 296 (1911).
33. Born, Math. Ann. **68**, 526 (1910).
34. Dällenbach, Ann. der Physik **58**, 523 (1919).
35. Minkowski, Math. Ann. **68**, 472 (1910).
36. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Berlin, 4. Aufl., 1921, p. 174.
37. Einstein und Laub, Ann. der Physik **28**, 445 (1909).
38. Pauli, Relativitätstheorie, Encyclopädie der math. Wiss., Band v. 2, Heft 4, Leipzig, 1921, § 35. (Перевод В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947.)
39. M. Wilson and H. A. Wilson, Proc. Roy. Soc. **(A)89**, 99 (1914).

40. Gibbs, On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, Collected Works, v. I, p. 87, New York, 1928.
41. Helmholtz, Berl. Ber. 1, 22 (1882).
42. Lewis, Journ. Amer. Chem. Soc. 35, 14 (1913).
43. Tolman, Statistical Mechanics, N. Y., 1927.
44. Birge, Phys. Rev. Suppl. 1, 1 (1929).
45. Tolman, Journ. Amer. Chem. Soc. 44, 1902 (1922).
46. Я. Б. Зельдович и И. Д. Новиков, Теория тяготения и эволюция звезд, «Наука», 1971 г.
47. Stern, Zeits. Elektrochem. 31, 448 (1925).
48. Tolman, Proc. Nat. Acad. 12, 670 (1926).
49. С. Вейнберг, Гравитация и космология, «Мир», 1974.
50. Planck, Berl. Ber. 1907. p. 542.
51. Planck, Ann. der Physik 26, 1 (1908).
52. Einstein, Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik 4, 411 (1907).
53. Mosegeil, Ann. der Physik 22, 867 (1907).
54. Kretschmann, Ann. der Physik 53, 575 (1917).
55. Einstein, Ann. der Physik 55, 241 (1918).
56. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, 1923, p. 77. (Перевод: А. С. Эддингтон, Математическая теория относительности, Харьков — Киев, 1933.)
57. Lipschitz, Crelle's Journ. 70, 71 (1869).
58. Eötvös, Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn 8, 65 (1890).
59. Southern, Proc. Roy. Soc. 84A, 325 (1910).
60. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, p. 189.
61. Chazy, Comptes Rendus 182, 1134 (1926).
62. Campbell and Trumpler, Lick Observatory Bull. 11, 41 (1923); 13, 130 (1928).
63. St. John, Astrophys. Journ. 67, 195 (1928).
64. Adams, Proc. Nat. Acad. 11, 382 (1925).
65. Tolman, Phys. Rev. 35, 875 (1930).
66. Einstein, Berl. Ber. 1918, p. 154.
67. Thirring and Lense, Phys. Zeits. 19, 156 (1918).
68. Thirring, Phys. Zeits. 19, 33 (1918); там же 22, 29 (1921).
69. Lemaître, Monthly Notices 91, 490 (1931).
70. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Harvard Univ. Press, 1923. См. p. 253, § 7.
71. Dingle, Proc. Nat. Acad. 19, 559 (1933).
72. Tolman and Ehrenfest, Phys. Rev. 36, 1791 (1930).
73. Tolman, Ehrenfest and Podolsky, Phys. Rev. 37, 602 (1931).
74. Zwicky, Proc. Nat. Acad. 15, 773 (1929).
75. Laue, Berl. Ber. p. 3 (1931).
76. Tolman, Proc. Nat. Acad. 14, 268 (1928).
77. Tolman, Proc. Nat. Acad. 14, 701 (1928).
78. Lemaître, J. Math. and Phys. (M.I.T.) 4, 188 (1925).
79. Tolman, Phys. Rev. 35, 904 (1930).
80. Neumann, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, math.-nat. Kl. 26, 97 (1874); Seeliger, Astr. Nachr. 137, 129 (1895).
81. Einstein, Berl. Ber. 1917, p. 142.
82. de Sitter, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 19, 1217 (1917).
83. Tolman, Proc. Nat. Acad. 15, 297 (1929).
84. Friedmann, Zeits. f. Physik 10, 377 (1922).
85. Robertson, Proc. Nat. Acad. 15, 822 (1929).
86. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig, 1896.
87. Lemaître, J. Math. and Phys. (M.I.T.) 4, 188 (1925).
88. Robertson, Phil. Mag. 5, 835 (1928).

89. Lanczos, Phys. Zeits. 23, 539 (1922).
90. Boltzmann, Vorlesungen über die Principe der Mechanik, Teil I, 20, уравнение (40).
91. Tolman, Astrophys. Journ. 69, 245 (1929).
92. Weyl, Phys. Zeits. 24, 230 (1923); Phil. Mag. 9, 936 (1930).
93. Tolman, Proc. Nat. Acad. 16, 320 (1930).
94. Eddington, Monthly Notices 90, 668 (1930).
95. Robertson, Rev. Mod. Phys. 5, 62 (1933).
96. Lemaître, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 47A, 49 (1927).
97. Miln, Z. f. Astrophys. 6, 1 (1933).
98. Tolman, Proc. Nat. Acad. 16, 511 (1930).
99. Tolman, Proc. Nat. Acad. 16, 409 (1930).
100. Eddington, The Expanding Universe, Cambridge, 1933.
101. De Sitter, Bull. Astron. Inst. Netherlands 5, 211 (1930); там же 6, 141 (1931).
102. Heckmann, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1932, p. 97.
103. McCrea and McVittie, Monthly Notices 91, 128 (1930); там же 92, 7 (1931).
104. Lemaître, Revue des questions scientifiques, 1931, p. 391.
105. Einstein, Berl. Ber. 1931, p. 235.
106. Tolman, Phys. Rev. 38, 1758 (1931).
107. Einstein and de Sitter, Proc. Nat. Acad. 18, 213 (1932).
108. Lenz, Phys. Zeits. 27, 642 (1926).
109. Tolman, Proc. Nat. Acad. 14, 353 (1928).
110. Tolman, Proc. Nat. Acad. 17, 153 (1931).
111. Tolman, Phys. Rev. 37, 1639 (1931).
112. Tolman, Phys. Rev. 38, 797 (1931).
113. Tolman and Ward, Phys. Rev. 39, 835 (1932).
114. Tolman, Phys. Rev. 39, 320 (1932).
115. Hubble and Humason, Astrophys. Journ. 74, 43 (1931).
116. Shapley, Star Clusters, 1930, p. 189.
117. Hopmann, Astron. Nachr. 214, 425 (1921).
118. Shapley, Proc. Nat. Acad. 19, 591 (1933).
119. Russell, Dugan and Stewart, Astronomy, 1927.
120. Petit and Nicholson, Astrophys. Journ. 68, 279 (1928).
121. Seares, Astrophys. Journ. 55, 165 (1922).
122. Hubble, Proc. Nat. Acad. 15, 168 (1929).
123. Hubble, Astrophys. Journ. 64, 321 (1926).
124. Stebbins, Proc. Nat. Acad. 19, 222 (1933).
125. Hubble, Astrophys. Journ. 76, 44 (1932).
126. Hubble, Astrophys. Journ. 79, 8 (1934).
127. Shapley and Ames, Annals Harvard Observatory 88, 43 (1932).
128. Shapley, Proc. Nat. Acad. 19, 389 (1933).
129. Jeans, Astronomy and Cosmogoy, Cambridge, 1929.
130. Tolman, Proc. Nat. Acad. 20, 169 (1934).
131. De Sitter, Proc. Amsterdam Acad. 35, 596 (1932).
132. Teylor B. N., Parker W., Langenberg D., Rev. Mod. Phys. 41, 375 (1969).
133. G. de Vaucouleurs, Astroph. J. 159, 435 (1970).
134. S. Van der Bergh, Nature, 225, 503 (1970).
135. A. R. Sandage, Semaine d'Etude, Les Noyaux de Galaxies, Scripto Varia 35 (Vatican), p. 601, 1971.
136. J. M. Stewart a. D. W. Sciania, Nature 216, 748 (1967).
137. E. K. Conklin, Nature 222, 971 (1969).
138. Lemaître, Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles A53, 51 (1933).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Авогадро 147, 510
Адамс 219
Андерсон 70
- Белинский 433
Бертело 152
Биркгофф 260, 261
Блэккет 70
Больцман 149, 150, 166, 321, 324, 503, 510
Бор 389, 501
Борн 33
Брагинский 187
- Вавилов 27
Ван дер Берг 496
Вейль 363, 364, 365
Вейнберг 13, 468
Вильсон Г. А. 128
Вильсон М. 128
Вокулер 496
- Галилей 17, 34, 187, 199, 219
Гаусс 240, 242, 506
Гельмгольц 135
Герц 128
Гиббс 135
Гинзбург 128
Грин 506
- Даламбер 275, 506
Джоуль 123, 164
Дикке 187, 220
Дингль 260, 261, 372, 427
Допплер 18, 200, 294, 296, 350, 361, 480
- Карно 166
Кауфман 66
Кемпбелл 217
- Кеннеди 23, 27, 28, 38
Кинсей 70
Комсток 29
Конклин 496
Кретчман 17, 176
Кристоффель 18, 181, 189, 190, 193, 194, 196, 197, 205, 207, 212, 226, 230, 231, 238, 244, 248, 249, 257, 258, 259, 260, 261, 267, 269, 274, 275, 284, 289, 348, 364, 372, 390, 504, 506
- Лагранж 505
Ландау 255
Ла-Роза 30
Лауэ 22, 71, 76, 296
Леви-Чивита 176
Лемэтр 258, 354, 368, 413, 414, 417, 418, 426, 498, 499
Ленц 438
Липшиц 193
Лифшиц 255, 433
Лоренц 18, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 35, 36, 43, 46, 53, 79, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 107, 111, 112, 113, 128, 129, 159, 160, 265, 266, 267, 268, 269
Льюис 21, 134
Лэнс 246
- Майкельсон 23, 27, 28, 36, 38
Максвелл 96, 101, 113, 114, 115, 116, 118, 265, 266, 267
Мандельштам 220
Мах 17, 191, 192
Мессбауер 221
Миллер 27, 30
Милн 370
Минковский 16, 18, 23, 41, 64, 113, 504
Мозенгейл 169
Морли 23, 27, 28, 36, 38

- Неддермайер** 70
Нернст 133, 134
Нобл 95
Ньютон 29, 56, 187, 192, 204, 205, 215, 261, 430, 510
- Оккиалини** 70
Олифант 70
Ом 121
Оппенгеймер 70
Отт 165
- Папалекси** 220
Пенрозе 433
Планк 16, 17, 129, 133, 149, 151, 158, 165, 297, 441, 503, 510
Плэзит 70
Подольский 258, 260
Пойнтинг 103
Пуассон 192, 195, 196, 204, 206
- Резерфорд** 70
Рентген 128
Риман 193, 194, 196, 230, 244, 248, 274, 504, 506
Ритц 30
Риччи 176
Робертсон 354, 355, 363, 369
Роуланд 120, 128
- Сакур** 149, 153
Саузернс 187, 199
Ситтер де 20, 29, 30, 339, 341, 342, 343, 351, 353, 354, 355, 359, 360, 365, 366, 367, 403, 407, 414, 416, 417, 418, 419, 421, 422, 425, 483, 500
Скобельцын 128
Слайфер 363, 468
Слэтер 389
Смороднинский 36
Ст. Джон 219
Стефан 150, 321, 324, 503, 510
Стокс 506
Сэндедж 496
- Тирринг** 246
Толмен 13, 343, 443, 458
Торндайк 28, 38
Трамплер 217
Траутон 95
- Угаров** 36
- Финджеральд** 27, 28, 36
Фойгт 33
Фридман 368, 414, 418, 430, 431
- Хаббл** 338, 351, 352, 363, 366, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 478, 479, 480, 485, 492, 493, 496, 503
Халатников 433
Холечек 460
Хопман 460
Хьюматон 352, 363, 366, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 478, 479, 480, 485, 492
- Цвикки** 294, 497
- Шапиро** 220, 221
Шварцшильд 209, 211, 212, 252, 253, 254, 255, 260, 261
Шепли 460, 462, 473, 474
Штерн 155, 157
Шур 374, 379
- Эддингтон** 189, 212, 274, 409, 417, 430, 468
Эймс 474
Эйнесто 496
Эйнштейн 13, 15, 16, 17, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 34, 42, 69, 99, 129, 158, 165, 173, 175, 176, 177, 187, 190, 194, 195, 197, 206, 208, 211, 219, 222, 232, 240, 243, 246, 297, 299, 325, 339, 341, 343, 345, 348, 349, 350, 352, 367, 368, 406, 407, 409, 412, 415, 418, 421, 422, 429, 430, 436, 438, 453, 483, 499
Эйхенвальд 128
Экман 414
Эренфест 325
Этвеш 187, 199
- Ютнер** 20

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вектор Пойнтинга** 103
— тока 108, 116, 119, 265, 270
Второе начало термодинамики 132, 158, 169, 299, 301
Второй постулат теории относительности 29
- Геодезические линии** 180
Гравитационные волны 246
Граничные условия электродинамики 121, 122
- Давление жидкости** 225—227
Движение планет 212
Джоулево тепло 123, 124
Диаметр туманности видимый 470
— — —, связь с координатами туманности 480
— — —, вычисление 472
Допплер-эффeкт 465
- Евклидово пространство** 44
- Жидкость идеальная** 224, 225
- Замкнутая упругая система, статика** 92
Звездная величина 460, 463, 467, 470
— — абсолютная 460
— — болометрическая 463, 479
— — видимая 460—462, 466, 467, 468
— — визуальная 461, 470
— — фотографическая 463, 464, 465, 474, 479
Зона избегания 473
- Идеальная жидкость** 226
- Идеальный газ** 147
Излучение, масса 278
—, поток 279
—, тензор энергии — импульса 225, 276
— черного тела 150
— — —, динамика 169
Излучения поле неизотропное 226
Изотропия пространства 368, 370
Интервал 44, 177, 189
— в нестатической изотропной Вселенной 370
— де Ситтера 342
— Шварцшильда 209
— Эйнштейна 342
- Кеннеди — Торндайка опыт** 28, 38
Количество теплоты 134
— — —, релятивистская интерпретация 303
Конечное состояние системы 146, 332
Координатное расстояние туманности, зависимость от светимости, 478
— — —, связь с астрономическим расстоянием 478
Координаты галилеевы 50
— естественные 187
— собственные 46, 187
— сопутствующие 307, 371
Космические лучи 70, 389, 392, 424, 490
Космологическая постоянная 169, 198, 347, 351, 405—408, 418, 486
Космологические модели, общие замечания 19, 24, 338, 367, 496
— — — нестатические однородные 367
— — — —, временная эволюция закрытых моделей 401
— — — —, — — открытых моделей 409
— — — —, вывод выражения для интервала 370
— — — —, геометрия 378

- Космологические модели нестатические однородные, допущение о пространственной изотропии 368
 ———, изменение количества вещества со временем 388
 ———, — энергия со временем 386
 ——— Лемэтра с сохранением массы 414
 ———, механика 368
 ———, монотонно расширяющиеся из нестатического начального состояния 418
 ———, — статического начального состояния 415
 ———, обратимое и необратимое поведение 426, 438, 440, 445, 454
 ———, осциллирующее поведение 407, 408, 411, 418, 449, 454
 ———, открытая Эйнштейна — де Ситтера 421
 ———, отношение к реальной Вселенной 491
 ———, перенос начала координат 379, 477
 ———, периодическое поведение 407, 443
 ———, плотность вещества 385
 ———, — и давление 382
 ———, —, связь с кривизной пространства и космологической постоянной 486
 ———, поведение световых лучей 393
 ———, — частиц 389
 ———, превращение вещества в излучение 368, 423, 448, 456, 489
 ———, применение термодинамики 433
 ———, различные выражения интервала и их интерпретация 377, 381
 ——— с переходом вещества в излучение 448, 455, 489
 ——— Фридмана с сохранением энергии 414
 ———, эффект Допплера 396, 399
 ———, модель де Ситтера 342
 ———, ———, вывод вида интервала 342
 ———, ———, геометрия 353
 ———, ———, нулевые давление и плотность 355
 ———, ———, поведение частиц и света 356
 ———, ———, сравнение с реальной Вселенной 366, 488, 490
 ———, ———, эффект Допплера 361
 ——— статические 337
- Космологические модели статические, модель Эйнштейна 343
 ———, ———, вывод вида интервала 342, 343
 ———, ———, геометрия 343
 ———, ———, давление и плотность 346
 ———, ———, нестабильность 412
 ———, ———, поведение частиц и света 348
 ———, ———, сравнение с реальной Вселенной 351
 ———, ———, термодинамическое равновесие 436
 ———, ———, эффект Допплера 351
 Красное смещение 463, 468, 493
 ———, зависимость от расстояния 469, 470
 ——— относительное 465
- Лоренца сокращение 36
 Лоренца — Фицджеральда сокращение 36
 Лоренцевы повороты 45
- Макроскопическая плотность 79
 — электродинамика 261
 Максвелла уравнения 113
 Максвелла — Лоренца уравнения 96, 266
 Масса излучения 278
 — поперечная 67
 — продольная 67
 —, соотношение с энергией и импульсом 61
 — туманности, измерение 473
 — частицы 56
 — электрона 66
- Материальные уравнения электродинамики 114, 116, 120, 270
- Натяжения механические 72, 74, 80, 223
 — электромагнитные 103, 127
 Ньютонова теория 204
- Обратимость и необратимость 132, 300, 302, 438
 Оператор Даламбера 275
 Опыт Майкельсона — Морли 27
 Отклонение света в гравитационном поле 216, 292
 Относительность движений любого рода 184
 — равномерного прямолинейного движения 26

- Первый закон термодинамики 131,
 158, 298
 — постулат относительности 26
 Перигелий, движение 215
 Планка закон 151
 — формула 464
 Плотность вещества во Вселенной
 474
 Показатель цвета 462—465
 Поле гравитационное 193—199
 — — заряженной частицы 272
 — — потока излучения 280
 — — слабое 243
 — — сферически симметричное 246,
 248, 257
 — электромагнитное 96, 108, 115, 117,
 265, 269
 Постоянная Стефана 150
 — Хаббла 484, 496
 Постоянные важнейшие 510, 511
 Потенциал векторный 98
 — гравитационный 190
 — ньютонов 205
 — обобщенный электродинамический
 108, 265
 — скалярный 98
 — термодинамический 134
 Преобразования Галилея 34
 — Лоренца 32
 — — для давления 160
 — — — количества тепла 163
 — — — лоренцева множителя 40
 — — — массы 58
 — — — механических плотностей и
 натяжений 76, 79, 80
 — — — объема 160
 — — — работы 162
 — — — силы 58
 — — — скорости 38
 — — — температуры 164—166
 — — — ускорения 40
 — — — электромагнитного поля 98,
 118
 — — — электромагнитных плотностей
 и натяжений 104
 — — — энергии 161
 — — — энтропии 164
 Принцип ковариантности 174
 — Маха 191
 — относительности 26
 — эквивалентности 182
 Псевдотензор потенциальной энергии
 и импульса 232
 Равновесие в мире Эйнштейна 412,
 436
 Равновесие между веществом и излу-
 чением 154
 — — водородом и гелием 151
 — тепловое 142, 318, 322
 — термодинамическое 136, 138, 313
 — химическое 140, 317
 Разбегание туманностей 493
 Размерность пространства — времени
 42
 Расстужение времени 37
 Римана — Кристоффеля тензор 193
 — — — свернутый 194
 Света и частиц взаимодействия 285
 Светимость туманности 467, 477
 — —, связь с координатами 475, 478
 Свободная энергия 134
 Сила Минковского 64
 Символы Кристоффеля 181
 Собственные величины, использование
 20
 — координаты 46, 187, 188
 Сокращение длины 36
 Сохранение массы, энергии и импуль-
 са в общей теории относительности
 233, 236, 268, 292
 — — —, — — — для механической си-
 стемы 70—74, 85—88
 — — —, — — — — частиц 55, 61, 62, 64
 — — —, — — — — электромагнитной си-
 стемы 101—105
 — — — момента количества движения 88
 — — — электрического заряда 97, 121, 270
 Среда, зависимость от свойств 223
 — механическая 223
 Стефана — Больцмана уравнение 150
 Температура туманности видимая 464
 Тензор метрический 49, 190
 — Римана — Кристоффеля 193, 194
 — электромагнитного поля 109, 115,
 266
 — энергии — импульса для вещества
 82, 196, 223, 262—264
 — — — — идеальной жидкости 224
 — — — — излучения 225, 276, 280
 — — — — электромагнитного поля
 112, 127, 268
 Тензорный анализ 47—55, 506
 Теорема Шура 374, 379
 Тепловой показатель 463—465
 Термодинамический потенциал 134
 Туманности, диаметры и массы 272
 —, звездные величины 460, 462
 —, — — и видимый диаметр 470
 —, — — и красное смещение 467
 —, — — и расстояния 466

- Туманности, координаты и астрономическое расстояние 478
 —, — и видимый диаметр 480
 —, — и красное смещение 483
 —, — и светимость 475
 —, распределение в пространстве 473, 474, 481
 —, расстояния 466
- Уравнение Пуассона 192, 195, 206
 — Сакура — Тетроде 149
- Хаббла постоянная 484, 496
- Цикл Карно релятивистский 166
- Часов парадокс 201
- Часы, влияние потенциала на ход 199
- Электродинамика 96, 265
 Эмиссионная теория света 29
 Энергии — импульса тензор для вещества 83, 196, 224
 — — — — идеальной жидкости 225
 — — — — излучения 226, 276, 279
 — — — — электромагнитного поля 112, 127, 280
 Энергии несохранение 229
 Энергия в термодинамике 131
 Энтропия, вектор 172, 300
 — в термодинамике 132, 133
 Эффект Допплера 294, 465
 — — в модели де Ситтера 361
 — — — — Эйнштейна 351
 — — в нестатических моделях 396

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	13
---------------------------------	----

Г Л А В А I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Цель книги	15
§ 2. Метод изложения	21
§ 3. Точка зрения	22

Г Л А В А II

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Часть I. Два основных постулата и преобразования Лоренца	26
§ 4. Введение	26
§ 5. Первый постулат, или принцип относительности	26
§ 6. Второй постулат теории относительности	29
§ 7. Необходимость изменения прежних представлений о пространстве и времени	30
§ 8. Преобразования Лоренца	32
§ 9. Правила преобразования пространственных и временных интервалов. Сокращение Лоренца и растяжение времени	35
§ 10. Преобразование скорости	38
§ 11. Преобразование лоренцева множителя	40
§ 12. Преобразование ускорения	40
Часть II. Изложение специальной теории относительности с помощью четырехмерной геометрии	41
§ 13. Пространственно-временной континуум	41
§ 14. (3+1)-мерное пространство — время	42
§ 15. Геометрия пространства — времени	43
§ 16. Сигнатура линейного элемента и три типа интервалов	44
§ 17. Лоренцевы повороты осей	45
§ 18. Переход в систему собственных координат	46
§ 19. Применение тензорного анализа в специальной теории относительности	47
§ 20. Упрощение тензорного анализа в случае специальной теории относительности. Галилеевы координаты	50
§ 21. Четырехмерный аппарат и постулаты специальной теории относительности	52

Г Л А В А III

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И МЕХАНИКА

Часть I. Динамика частицы	55
§ 22. Законы сохранения массы и импульса	55
§ 23. Масса движущейся частицы	58
§ 24. Правило преобразования массы	58
§ 25. Определение силы и правило ее преобразования	60
§ 26. Работа и кинетическая энергия	61
§ 27. Соотношения между массой, энергией и импульсом	63
§ 28. Четырехмерное описание механики частицы	65
§ 29. Применения динамики частицы	
а) Масса быстрого электрона (66). б) Связь между силой и ускорением (66). в) Приложения динамики частицы в электромагнетизме (67). г) Проверка взаимной связи массы, энергии и импульса (69).	
Часть II. Динамика сплошных механических сред	70
§ 30. Основные постулаты	70
§ 31. Сохранение импульса и компоненты тензора натяжений t_{ij}	72
§ 32. Уравнения движения, выраженные через тензор натяжений t_{ij}	72
§ 33. Уравнение непрерывности	74
§ 34. Формулы преобразований для тензора натяжений t_{ij}	74
§ 35. Формулы преобразований для плотностей массы и импульса	77
§ 36. Выражение результатов через (абсолютные) натяжения p_{ij}	80
§ 37. Четырехмерная формулировка механики сплошных сред	82
§ 38. Применения механики сплошных сред	85
а) Масса и импульс конечной системы (85). б) Момент количества движения системы конечных размеров (88). в) Угольник (пример) (91). г) Случай замкнутой статической системы (92).	

Г Л А В А IV

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Часть I. Электронная теория	96
§ 39. Полевые уравнения Максвелла — Лоренца	96
§ 40. Правила преобразования E , H и ρ	98
§ 41. Сила, действующая на движущийся заряд	100
§ 42. Энергия и импульс электромагнитного поля	101
§ 43. Тензор электромагнитных натяжений	103
§ 44. Формулы преобразований для электромагнитных плотностей и натяжений	104
§ 45. Совместное механическое и электромагнитное воздействие	105
§ 46. Четырехмерная формулировка электронной теории	108
а) Уравнения поля (108). б) Четырехмерное выражение силы, действующей на заряд (110). в) Четырехмерное выражение для электромагнитного тензора энергии — импульса (111).	
§ 47. Применение электронной теории	112
Часть II. Макроскопическая теория	113
§ 48. Уравнения поля покоящегося вещества	113
§ 49. Уравнения, определяемые свойствами покоящегося вещества	114
§ 50. Уравнения поля в четырехмерном виде	115
§ 51. Четырехмерная формулировка материальных уравнений	116

§ 52. Основные уравнения поля для движущегося вещества в обычной векторной записи	117
§ 53. Уравнения для движущегося вещества в обычной векторной записи	120
§ 54. Применения макроскопической теории	121
а) Сохранение электрического заряда (121). б) Граничные условия (121). в) Джоулево тепло (123). г) Электромагнитная энергия и импульс (123). д) Тензор энергии — импульса (127). е) Сравнение с экспериментальными данными (128).	

Г Л А В А V

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
И ТЕРМОДИНАМИКА

Часть I. Термодинамика покоящихся систем	129
§ 55. Введение	129
§ 56. Первый закон термодинамики и нулевая точка отсчета энергии	131
§ 57. Второй закон термодинамики и нулевая точка отсчета энтропии	132
§ 58. Теплота, свободная энергия и термодинамический потенциал	134
§ 59. Основные условия для термодинамических переходов и равновесия	136
§ 60. Условия для переходов и равновесия в однородных системах	138
§ 61. Равномерность распределения температуры при тепловом равновесии	142
§ 62. Необратимость и скорость переходов	143
§ 63. Конечное состояние изолированной системы	146
§ 64. Энергия и энтропия идеального одноатомного газа	147
§ 65. Энергия и энтропия излучения абсолютно черного тела	150
§ 66. Равновесие между водородом и гелием	151
§ 67. Равновесие между веществом и излучением	154
Часть II. Термодинамика движущихся систем	158
§ 68. Два закона термодинамики для движущихся систем	158
§ 69. Лоренцевы преобразования термодинамических величин	159
а) Объем и давление (160). б) Энергия (161). в) Работа (162). г) Теплота (163). д) Энтропия (164). е) Температура (164).	
§ 70. Некоторые приложения	166
а) Цикл Карно для системы, изменяющей скорость (166). б) Динамика теплового излучения (169).	
§ 71. Четырехмерный подход в термодинамике	169

Г Л А В А VI

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Часть I. Основные принципы общей теории относительности	173
§ 72. Введение	173
§ 73. Принцип ковариантности	174
а) Оправдание принципа ковариантности (174). б) Следствия принципа ковариантности (175). в) Способ получения ковариантных выражений (176). г) Ковариантное выражение для интервала (177). д) Ковариантное выражение для траекторий свободных частиц и световых лучей (179).	

§ 74. Принцип эквивалентности	182
а) Формулировка принципа эквивалентности. Метрика и гравитация (182). б) Принцип эквивалентности и относительность движения (184). в) Обоснование принципа эквивалентности (186). г) Обобщение законов специальной теории относительности с помощью принципа эквивалентности. Естественные и собственные координаты (187). д) Интервал и траектория в присутствии гравитационных полей (189).	
§ 75. Зависимость гравитационного поля и метрики от распределения материи и энергии. Принцип Маха	191
§ 76. Поля, соответствующие специальной теории относительности. Тензор Римана — Кристоффеля	193
§ 77. Гравитационные поля в пустоте. Свернутый тензор Римана — Кристоффеля	194
§ 78. Гравитационные поля при наличии материи и энергии	195
Часть II. Элементарные применения общей теории относительности	199
§ 79. Простейшие следствия принципа эквивалентности	199
а) Пропорциональность веса и массы (199). б) Воздействие гравитации на ход часов (199). в) Парадокс часов (201).	
§ 80. Ньютонова теория как первое приближение	204
а) Движение свободной частицы в слабом гравитационном поле (205). б) Уравнение Пуассона как приближение к уравнениям Эйнштейна (206).	
§ 81. Единицы, используемые в релятивистских вычислениях	208
§ 82. Интервал Шварцшильда	209
§ 83. Три «решающих опыта» теории относительности	212
а) Движение перигелия (215). б) Гравитационное отклонение света (216). в) Гравитационное смещение спектральных линий (218).	

Г Л А В А VII

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Часть I. Некоторые общие принципы механики	222
§ 84. Основные уравнения релятивистской механики	222
§ 85. Свойства тензора энергии — импульса. Общее выражение в случае идеальной жидкости	223
§ 86. Механика идеальной жидкости	226
§ 87. Уравнения механики в лагранжевой форме	230
§ 88. Закон сохранения энергии — импульса для конечных систем	233
§ 89. Плотности энергии и импульса, записанные в виде дивергенций	236
§ 90. Предельные значения некоторых величин на больших расстояниях от изолированной системы	237
§ 91. Масса, энергия и импульс изолированной системы	239
§ 92. Вычисление энергии квазистатической изолированной системы при помощи интеграла только по занимаемому ею пространству	241
Часть II. Решение уравнений поля	243
§ 93. Общие эйнштейновские решения уравнений поля в случае слабых полей	243
§ 94. Интервалы для систем, обладающих сферической симметрией	246
§ 95. Статический сферически симметричный интервал	248
§ 96. Внешнее и внутреннее решения Шварцшильда	252
§ 97. Энергия сферы из идеальной жидкости	255
§ 98. Нестатический сферически симметричный интервал	257
§ 99. Теорема Биркгоффа	260
§ 100. Более общая форма интервала	261

Г Л А В А VIII

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Часть I. Ковариантное обобщение теории электричества	265
§ 101. Введение	265
§ 102. Обобщенная электронная теория Лоренца. Уравнения поля	265
§ 103. Движение заряженной частицы	267
§ 104. Тензор энергии — импульса	268
§ 105. Обобщенная макроскопическая теория	269
Часть II. Некоторые приложения релятивистской электродинамики	270
§ 106. Сохранение электрического заряда	270
§ 107. Гравитационное поле заряженной частицы	272
§ 108. Распространение электромагнитных волн	274
§ 109. Тензор энергии — импульса изотропного излучения	276
§ 110. Гравитационная масса изотропного излучения	278
§ 111. Тензор энергии — импульса направленного потока излучения	279
§ 112. Гравитационное поле направленного потока излучения	280
§ 113. Гравитационное воздействие пучка света	281
а) Интервал в окрестности ограниченного пучка света (281). б) Скорость пробного луча вблизи пучка (282). в) Ускорение пробных частиц вблизи пучка (284).	
§ 114. Гравитационное воздействие светового пакета	285
а) Вид интервала вблизи траектории светового пакета, проходящего конечный отрезок пути (285). б) Скорость пробного луча света вблизи пакета (288). в) Ускорение пробных частиц вблизи пакета (289).	
§ 115. Гравитационное взаимодействие световых лучей и частиц	292
§ 116. Обобщенный эффект Допплера	294

Г Л А В А IX

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

Часть I. Расширение термодинамики в общей теории относительности	297
§ 117. Введение	297
§ 118. Релятивистский аналог первого закона термодинамики	298
§ 119. Релятивистский аналог второго закона термодинамики	299
§ 120. К интерпретации релятивистского второго закона термодинамики	301
§ 121. К интерпретации теплоты в релятивистской термодинамике	303
§ 122. О применении в термодинамике сопутствующих систем координат	307
Часть II. Применение релятивистской термодинамики	309
§ 123. Применение первого закона термодинамики к изменениям статического состояния системы	309
§ 124. Применение второго закона термодинамики к изменениям статического состояния системы	311
§ 125. Условия статического термодинамического равновесия	313
§ 126. Статическое равновесие в случае сферически симметричного распределения жидкости	313
§ 127. Химическое равновесие в гравитирующей жидкой сфере	317
§ 128. Тепловое равновесие в гравитирующей жидкой сфере	318
§ 129. Тепловое равновесие в статическом поле общего типа	322

§ 130. О расширении в релятивистской термодинамике возможностей для протекания обратимых процессов с конечными скоростями	326
§ 131. О возможности протекания необратимых термодинамических процессов, не приводящих к конечным состояниям с максимальной энтропией	332
§ 132. Заключение	335

Г Л А В А X

КОСМОЛОГИЯ

Часть I. Статические космологические модели	337
§ 133. Введение	337
§ 134. Однородная статическая Вселенная	339
§ 135. Эйнштейновский интервал	341
§ 136. Интервал в пространстве де Ситтера	342
§ 137. Интервал в специальной теории относительности	343
§ 138. Геометрия Вселенной Эйнштейна	343
§ 139. Плотность и давление материи в эйнштейновской Вселенной	346
§ 140. Частицы и свет эйнштейновской Вселенной	348
§ 141. Сравнение свойств эйнштейновской модели с реальной Вселенной	351
§ 142. Геометрия Вселенной де Ситтера	353
§ 143. Отсутствие вещества и излучения в деситтеровской Вселенной	355
§ 144. Пробные частицы и световые лучи в деситтеровской Вселенной	356
а) Уравнение геодезической (356). б) Орбиты частиц (358). в). Поведение лучей света во Вселенной де Ситтера (360). г) Допплер-эффект в деситтеровской Вселенной (361).	
§ 145. Сравнение модели де Ситтера с реальной Вселенной	366
Часть II. Нестатические однородные космологические модели	367
§ 146. Преимущества нестатических моделей	367
§ 147. Предположения, лежащие в основе нестатических моделей	368
§ 148. Вывод формулы интервала из предположения о пространственной изотропии	370
§ 149. Общие свойства интервала	377
а) Некоторые формулы для интервала (377). б) Внутренняя геометрия модели (378). в) Сдвиг начала координат (379). г). Физическая интерпретация интервала (381).	
§ 150. Плотность и давление в нестатической Вселенной	382
§ 151. Изменение энергии со временем	386
§ 152. Изменение количества вещества со временем	388
§ 153. Движение частиц в модели	389
§ 154. Распространение лучей света в модели	393
§ 155. Допплер-эффект в модели	396
§ 156. Зависимость доплер-эффекта от расстояния	399
§ 157. Временная эволюция закрытых моделей	401
а) Общие черты эволюции (R вещественно, $\rho_{00} \geq 0$, $p_0 \geq 0$ (402). б) Зависимость критической функции от R (403). в) $\Lambda > \Lambda_E$. Монотонные Вселенные типа M_1 (405). г) $\Lambda = \Lambda_E$. Асимптотические Вселенные типа A_1 и A_2 (406). д) $0 < \Lambda < \Lambda_E$. Монотонные Вселенные типа M_2 и осциллирующие Вселенные типов O_1 и O_2 (407). е) $\Lambda \leq 0$. Осциллирующие Вселенные типа O_1 (408).	

§ 158.	Зависимость эволюции от времени для открытых моделей	409
§ 159.	Неустойчивость статической Вселенной Эйнштейна	412
§ 160.	Модели с постоянным количеством вещества	414
§ 161.	Модели, расширяющиеся из статического начального состояния	415
§ 162.	Монотонно расширяющиеся модели с нестатическим начальным состоянием	418
§ 163.	Осциллирующие модели ($\Lambda=0$)	418
§ 164.	Открытая модель Эйнштейна — де Ситтера ($\Lambda=0, R_0=\infty$)	421
§ 165.	Исследование отброшенных малых величин в рассмотренных моделях.	422
§ 165 *	Эффект неоднородности в космологических моделях	425
Часть III.	Релятивистская термодинамика нестатических однородных космологических моделей	433
§ 166.	Следствие первого закона релятивистской термодинамики	433
§ 167.	Следствие второго закона релятивистской термодинамики	435
§ 168.	Условия термодинамического равновесия в статической Вселенной Эйнштейна	436
§ 169.	Условия обратимости и необратимости в нестатических моделях	438
§ 170.	Термодинамика модели, заполненной пылевидным веществом	440
§ 171.	Термодинамика модели, заполненной излучением черного тела	440
§ 172.	Невозможность периодических движений без сингулярных состояний	443
§ 173.	Интерпретация обратимого расширения обычным наблюдателем	445
§ 174.	Аналитическое исследование последовательных расширений и сжатий в закрытой модели с $\Lambda=0$	449
а) Верхняя граница расширения (450). б) Время, необходимое для достижения максимума (451). в) Время, нужное для полного сжатия (451). г) Поведение вблизи предельного сжатия (452).		
§ 175.	Термодинамика необратимых колебаний	454
Часть IV.	Реальная Вселенная и однородные нестатические модели	458
§ 176.	Введение	458
§ 177.	Данные наблюдений	460
а) Абсолютная звездная величина ближайших туманностей (460). б) Поправки к видимым величинам более далеких туманностей (462). в) Расстояния до туманностей, вычисленные с помощью видимых величин (466). г) Связь наблюдаемого красного смещения с звездной величиной и расстоянием (467). д) Соотношение между видимым диаметром, звездной величиной и расстоянием (470). е) Диаметры и массы туманностей (472). ж) Распределение туманностей в пространстве (473). з) Плотность вещества во Вселенной (474).		
§ 178.	Координаты туманности и светимость	475
§ 179.	Координаты туманности и астрономическое расстояние до нее	478
§ 180.	Координаты и видимый диаметр	480
§ 181.	Распределение числа туманностей в пространстве	481
§ 182.	Расстояние до туманности и ее красное смещение	483
§ 183.	Связь плотности с пространственной кривизной и космологической постоянной	486
§ 184.	Связь между красным смещением и скоростью исчезновения вещества	489
§ 185.	Соответствие между моделью и реальной Вселенной	491

§ 186. Несколько общих замечаний относительно космологических моделей	496
а) Однородность (497). б) Пространственная кривизна (497). в) Развитие во времени (499).	
§ 187. Наша окрестность как образ Вселенной в целом	501
Приложение I. Обозначения	503
Приложение II. Некоторые формулы векторного анализа	505
Приложение III. Несколько формул тензорного анализа	506
Приложение IV. Важнейшие константы	510
Литература	512
Именной указатель	515
Предметный указатель	517

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
18	11 сверху	t_{μ}^{ν}	t_{μ}^{ν}
21	26 снизу	t^{ν}_{μ}	t^{ν}_{μ}
46	ф. (18.2)	$dx' = \frac{dx - (V/c)cdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$	$dx' = \frac{dx - (V/c)cdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$
88	ф. (38.10)	$\begin{cases} x'_2 \\ x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x'^2 \\ x^2 \end{cases}$
103	6 снизу	$\dots - \frac{1}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv,$	$\dots - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv,$
119	ф. (52.14)	$\sqrt{1 - V/c^2}$	$\sqrt{1 - V^2/c^2}$
161		116	161
144	19 снизу	... не меньше с.	... не меньше сил, необходимых для сжатия газа до прежнего состояния.
156	ф. (67.8)	$e^{-mc^2/kT}$	$e^{-mc^2/kT}$
221	5 сверху	работе ***)	работе *****)
221	5 снизу	****) Hefele a. Keating, Science 108,000 (1972).	****) I. C. Hafele a. R. Keating, Science 177, 166 (1972).
230	4 снизу	$g_{\alpha}^{\mu\nu}$	$g_{\alpha}^{\mu\nu}$
232	1 снизу	t^{ν}_{μ}	t^{ν}_{μ}
232	ф. (87.14)	t^{ν}_{μ}	t^{ν}_{μ}
253	3 снизу	$e^{1/2\nu}$	$e^{1/2\nu}$
260	15 снизу	$T_1^4 0$	$T_1^4 = 0$
277	ф. (109.7)	$\dots = T^{33} = \rho_0$	$\dots = T^{33} = p_0$
284	6 сверху	$\dots \frac{dx^{\nu}}{d} = 0$	$\dots \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$
289	3 снизу	$\dots + y]^{1/2}$	$\dots + y^2]^{1/2}$
290	22 снизу	$+(l-x)^2 + \dots$	$+[(l-x)^2 + \dots$
309	19 сверху	релятивистской	релятивистской
358	5 сверху	$\frac{dt}{ds} = e^{-\nu}$	$\frac{dt}{ds} = ke^{-\nu}$
368	22 сверху	обратиться к изучению другой модели — модели де-Ситтера	тельствуют о нестатичности Вселенной. Например, излучение
488	12 снизу	$< 5,2 \cdot 10^{-27}$	$< 5,2 \cdot 10^{-27}$
496	26 снизу	$\cdot 10^{31} \text{ г/см}^3$	$\cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$