Л.Такач

КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В книге излагаются комбинаторные методы решения обширного класса задач теории случайных процессов. Методы эти отличаются изяществом и простотой, а решаемые задачи имеют многочисленные приложения в теории очередей, теории запасов, в процессах страхования и в непараметрической статистике. Автор начинает с рассмотрения классических задач и постепенно переходит к постановке более сложных современных проблем.

Книга предназначена в первую очередь для специалистов по теории вероятностей и ее применениям, но она, несомненно, заинтересует и читателей других специальностей, так как комбинаторные методы в настоящее время широко используются не только в теории вероятностей, но и в ряде прикладных инженерных и биологических дисциплин. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Хотя имя Лайоша Такача хорошо известно советскому читателю по многочисленным работам, посвященным теории массового обслуживания, это — первая его монография, появляющаяся в русском переводе. В ней развиты методы, позволяющие получать эффективные решения задач теории случайных блужданий, теории массового обслуживания, математической статистики и т. п.

Суть этих методов, изложенных во второй и третьей главах книги, состоит в следующем. Изучается последовательность переставляемых случайных величин, т. е. величин, совместное распределение которых не меняется при любой их перестановке. Такую последовательность можно интерпретировать как последовательность случайных величин, зависящих от одного и того же случайного параметра. Если придать этому параметру фиксированное значение, то условные величины будут независимы и одинаково распределены. Таким образом, переставляемые величины можно рассматривать как прямое обобщение последовательности независимых и одинаково распределенных величин. Автор находит распределения ряда случайных величин, связанных с этой последовательностью, а затем, переходя к непрерывному времени, изучает переставляемые случайные процессы и строит аналогичную теорию.

В последующих главах выясняется, что многие случайные последовательности и случайные процессы, естественным образом возникающие в теории массового обслуживания, статистике и других приложениях теории вероятностей, оказываются переставляемыми, что позволяет применить развитую выше теорию к решению ряда задач.

Книга написана довольно сжато, доказательства и выводы в ней предельно лаконичны, что несколько затрудняет чтение. От читателя требуется не только знание основ теории вероятностей, но и вообще достаточно высокая математическая культура. Для менее подготовленного читателя, интересующегося приложениями теории вероятностей, книга может служить неплохим справочником.

Нам кажется, что читателю, который, не пожалев времени и усилий, разберется в содержании этой книги, она принесет большую пользу.

А. Д. Соловьев

ПРЕДИСЛОВИЕ

В теории вероятностей есть много задач, для решения которых требуется находить распределение максимума случайных величин или распределение верхней грани значений случайного процесса. Подобные задачи часто возникают в теории очередей, водохранилищ, запасов, страховом деле, физике, технике, в теории порядковых статистик, азартных игр, случайных блужданий и т. д. В этой книге будет показано, что для широкого класса случайных величин и широкого класса случайных процессов результаты в явном виде можно получить просто и элементарными методами, если использовать обобщение классической теоремы о баллотировке. Эта теорема, относящаяся к 1887 г., связана с именем Бертрана. Интересно отметить, однако, что теорема Бертрана эквивалентна более раннему результату в теории азартных игр, полученному Муавром в 1708 г.

В этой книге мы докажем сначала ряд общих теорем о распределениях максимума случайных величин и верхней грани значений случайного процесса. Затем дадим много примеров применения этих общих теорем. Будет охвачен довольно широкий круг их применений, включая вышеупомянутые области. В книге приведены задачи для решения, большинство которых являются не просто упражнениями, а расширяют и дополняют теоретический материал.

Книга разделена на восемь глав. В конце каждой главы дается литература, включающая как статьи и книги, упомянутые в данной главе, так и другие работы, относящиеся к тематике этой главы. Главы разделяются на параграфы; нумерация формул и теорем в каждом параграфе своя. Если ссылка делается на формулу или теорему другого параграфа, то это указывается особо.

Материал данной книги основывается только на элементах теории вероятностей и теории случайных процессов. Большинство представленных здесь результатов получено автором в течение последних шести лет, некоторые из них опубликованы в ряде статей.

Пало-Альто

Лайош Такач

Глава 1

ТЕОРЕМЫ О БАЛЛОТИРОВКЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В теории вероятностей часто возникает задача нахождения распределений максимума случайных величин и верхней грани значений случайного процесса. Цель настоящей книги состоит в том, чтобы показать, что для широкого класса случайных величин и широкого класса случайных процессов такие задачи можно решить элементарными методами на основе следующего обобщения классической теоремы о баллотировке.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(u)$ — *неубывающая функция при* $0 \leqslant u \leqslant t$, *для которой* $\varphi'(u) = 0$ *почти всюду и* $\varphi(0) = 0$. *Пусть* $\varphi(t+u) = \varphi(t) + \varphi(u)$ *для* $0 \leqslant u \leqslant t$. *Определим на отрезке* $0 \leqslant u \leqslant t$ *функцию* $\delta(u)$, *положив ее равной* 1, *если* $\varphi(v) - \varphi(u) \leqslant v - u$ *для* $u \leqslant v \leqslant u + t$, *и равной* 0 *в противном случае. Тогда*

$$\int_0^t \delta(u)\, du = t - \varphi(t), \tag{1}$$

если $\varphi(t) \leqslant t$ [1]).

Если $\varphi(u)$ — неубывающая ступенчатая функция при $0 \leqslant u \leqslant t$, то $\varphi(u)$ имеет конечное или счетное число скачков, $\varphi'(u) = 0$ почти всюду, и поэтому теорема 1 применима. Если $\varphi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant t$, — неубывающая непрерывная сингулярная функция, то $\varphi'(u) = 0$ почти всюду, и к таким функциям теорема 1 также применима. Примером может служить лебегова сингулярная функция (Хьюитт и Стромберг [21, стр. 113]). Другой пример для случая строго возрастающей сингулярной функции дан Секефальви-Надем [32, стр. 198—200].

Следующая теорема является интересным частным случаем теоремы 1.

Теорема 2. *Если* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — *неотрицательные целые числа, причем* $k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n$, *то для* $n - k$ *из* n *циклических перестановок* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *сумма первых* r *элементов меньше* r *для всех* $r = 1, 2, \ldots, n$.

---

[1]) Здесь t фиксировано, а равенство $\varphi(t+u) = \varphi(t) + \varphi(u)$ определяет функцию $\varphi(u)$ на отрезке $[t, 2t]$. — *Прим. ред.*

Если в теореме 1 положить $t=n$ и $k_1+\ldots+k_r=\varphi(n)$ для $r\leqslant u<r+1$, то получится теорема 2. Обратно, с помощью подходящего предельного перехода можно вывести теорему 1 из теоремы 2.

Мы будем пользоваться теоремой 1 при нахождении явных формул для распределений максимума случайных величин и верхней грани значений случайного процесса. При нахождении некоторых предельных распределений мы будем также обращаться и к таким теоремам, как слабый закон больших чисел, к некоторым абелевым и тауберовым теоремам. Все эти теоремы приводятся в дополнении. Иногда будет указываться, что некоторые результаты можно получить, используя сильный закон больших чисел, теоремы для рекуррентных процессов и теорему непрерывности для преобразований Лапласа — Стильтьеса. Эти теоремы также приводятся в дополнении.

Используя упомянутые методы, мы сможем найти распределения максимума случайных величин и верхней грани значений случайного процесса, возникающих в теориях очередей, водохранилищ, запасов, страхования, в физике, технике, в теории порядковых статистик, случайных блужданий, азартных игр и т. д.

§ 2. ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ О БАЛЛОТИРОВКЕ

Следующая теорема, которая достойна названия *классической теоремы о баллотировке*, относится к 1887 г.

Теорема 1. *Если при баллотировке кандидат A набирает a голосов, а кандидат B набирает b голосов, причем $a\geqslant\mu b$, где μ — неотрицательное целое число, то вероятность того, что при последовательном подсчете бюллетеней число голосов, поданных за A, все время более чем в μ раз превосходит число голосов, поданных за B, равна*

$$P=\frac{a-\mu b}{a+b} \tag{1}$$

в предположении, что все возможные избирательные протоколы[1]) *равновероятны.*

Заметим, что вероятность того, что число голосов, поданных за A, всегда по меньшей мере в μ раз больше числа голосов, поданных за B, равна

$$Q=\frac{a+1-\mu b}{a+1}. \tag{2}$$

[1]) Здесь под протоколом понимается вся последовательность бюллетеней, поданных за кандидатов. — *Прим. ред.*

Можно легко доказать, что из формулы (1) следует (2) и обратно.

Вероятность (1) была найдена в 1887 г. Бертраном [8] для случая $\mu = 1$ и Барбье [6] для случая $\mu \geqslant 1$. Доказательство формулы (1) для $\mu = 1$ дал в 1887 г. Андрэ [5], а для $\mu \geqslant 1$ в 1924 г. Эппли [2, 3]. Другие доказательства формулы (1) были даны в 1947 г. Дворецким и Моцкином [13], в 1950 г. Гроссманом [18] и в 1961 г. Моханти и Нараяна [29].

В действительности же частный случай $\mu = 1$ можно отнести к 1708 г., когда Муавр [11] изучал следующую задачу о продолжительности игры в теории азартных игр. Два игрока A и B разыгрывают между собой последовательность игр. В каждой игре, независимо от остальных, либо A выигрывает монету у B с вероятностью p, либо B выигрывает монету у A с вероятностью q, причем $p + q = 1$. Предположим, что начальный капитал игрока A составляет $a - b$ монет, а у B капитал бесконечный. Какова вероятность того, что A разорится на $(a + b)$-й игре?

Муавр нашел, что вероятность того, что продолжительность игры ρ равна $a + b$, определяется по формуле

$$\mathbf{P}\{\rho = a + b\} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a} q^a p^b, \tag{3}$$

но не привел доказательства. Задача была полностью решена в 1775 г. Лагранжем [22] и в 1812 г. Лапласом [23, стр. 228—242]. Вероятность того, что в $a + b$ играх A проигрывает a игр, а B проигрывает b игр, равна

$$\binom{a+b}{a} q^a p^b,$$

и, следовательно, условная вероятность того, что A разорится на $(a + b)$-й игре, если в $a + b$ играх он проигрывает a игр, а B проигрывает b игр, равна

$$P = \frac{a-b}{a+b}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь последовательность из $a + b$ игр в обратном порядке и проигрыш A будем считать голосом, поданным за A, а проигрыш B — голосом, поданным за B. Тогда сразу видно, что $P = (a - b)/(a + b)$ есть вероятность того, что при подсчете $a + b$ голосов A все время ведет. Таким образом, мы получили формулу (1) для $\mu = 1$. Интересно отметить, что Ампер [4] считал формулу (3) замечательной по своей простоте и изяществу.

В 1879 г. Уитворт [36, 37] показал, что число способов упорядочить a выигрышей и b проигрышей так, чтобы число проигрышей никогда не превосходило числа выигрышей, равно

$$\frac{a+1-b}{a+1}\binom{a+b}{a}. \tag{5}$$

Отсюда следует формула (2) при $\mu=1$.

Классическая теорема о баллотировке эквивалентна следующей теореме.

Теорема 2. *Если урна содержит a карт, отмеченных числом 0, и b карт, отмеченных числом $\mu+1$, и если все $a+b$ карт вынимаются из урны без возвращения, то вероятность того, что для всех $r=1, 2, \ldots, a+b$ сумма первых r вынутых чисел меньше r, равна*

$$P=1-\frac{k}{n}, \tag{6}$$

где $n=a+b$ есть число карт в урне, $k=b(\mu+1)$ — сумма чисел на всех картах, причем предполагается, что $k \leqslant n$ и что все возможные выборы равновероятны.

Легко видеть, что теорема 1 и теорема 2 эквивалентны. Действительно, если среди первых r вынутых карт α_r помечены числом 0 и β_r помечены числом $\mu+1$, то $\alpha_r 0+\beta_r(\mu+1)<r=\alpha_r+\beta_r$ тогда и только тогда, когда $\beta_r\mu<\alpha_r$.

Последняя формулировка классической теоремы о баллотировке наводит на следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть урна содержит n карт, помеченных неотрицательными целыми числами $k_1, k_2, \ldots, k_n$ соответственно, причем $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\leqslant n$. Все n карт вынимаются из урны без возвращения. Обозначим через ν_r, $r=1, \ldots, n$, число на r-й вынутой карте. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\nu_1+\ldots+\nu_r<r \text{ для } r=1, \ldots, n\}=1-\frac{k}{n} \tag{7}$$

в предположении, что все возможные выборы равновероятны.

Эта теорема вытекает из следующей более общей теоремы.

Теорема 4. *Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — неотрицательные целые числа, причем $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\leqslant n$. Для $n-k$ из n циклических перестановок $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ сумма первых r элементов для всех $r=1, 2, \ldots, n$ меньше r.*

Доказательство. Положим $k_{r+n}=k_r$ для $r=1, 2, \ldots$ и $\varphi_r=k_1+\ldots+k_r$, $r=1, 2, \ldots$; $\varphi_0=0$. Пусть

$$\delta_r=\begin{cases}1, & \text{если } i-\varphi_i>r-\varphi_r \text{ для } i>r,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases} \tag{8}$$

и

$$\psi_r=\inf\{i-\varphi_i \text{ для } i>r\} \tag{9}$$

для $r=0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, что $\delta_r = \psi_{r+1} - \psi_r$. Так как $\varphi_{r+n} = \varphi_r + \varphi_n$, то $\delta_{r+n} = \delta_r$ и $\psi_{r+n} = \psi_r + n - k$ для $r = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, среди n циклических перестановок $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ точно

$$\sum_{r=1}^{n} \delta_r = \psi_{n+1} - \psi_1 = n - k \tag{10}$$

перестановок таковы, что сумма их первых r элементов меньше r для всех $r = 1, 2, \ldots, n$.

Из теоремы 4 следует, что среди $n!$ перестановок $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ существует точно $(n-1)!\,(n-k)$ перестановок, у которых сумма первых r элементов для всех $r = 1, 2, \ldots, n$ меньше r. Это замечание доказывает теорему 3.

Теорему 4 можно переформулировать так. Положим $\varphi(u) = \varphi_i$, если $i \leqslant u < i+1$, и пусть

$$\delta(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } v - \varphi(v) \geqslant u - \varphi(u) \text{ для } v \geqslant u, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{11}$$

Формула (10) эквивалентна тогда формуле

$$\int_0^n \delta(u)\, du = n - \varphi(n), \tag{12}$$

если $\varphi(n) \leqslant n$. Это следует из того, что $\delta(u) = \delta(r)$ при $r < u < r+1$.

В последней формулировке теоремы 4 $\varphi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant n$, — неубывающая ступенчатая функция, равная нулю при $u=0$. Естественно возникает вопрос, остается ли верным равенство (12), если $\varphi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant n$, — произвольная неубывающая ступенчатая функция, для которой $\varphi(0) = 0$. Докажем теорему, показывающую, что ответ на этот вопрос утвердителен.

Теорема 5. *Пусть $\varphi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant t$, — неубывающая ступенчатая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Определим $\varphi(u)$ для $0 \leqslant u < \infty$, положив $\varphi(u+t) = \varphi(u) + \varphi(t)$ при $u \geqslant 0$, и пусть*

$$\delta(u) = \begin{cases} 1, & \textit{если } v - \varphi(v) \geqslant u - \varphi(u) \textit{ для } v \geqslant u, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{13}$$

Тогда

$$\int_0^1 \delta(u)\, du = \begin{cases} t - \varphi(t), & \textit{если} \quad \varphi(t) < t, \\ 0, & \textit{если} \quad \varphi(t) \geqslant t. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. Если $\varphi(t) > t$, то $\delta(u) = 0$ для всех $u \geqslant 0$ и теорема очевидна. Рассмотрим случай $\varphi(t) \leqslant t$. Для $u \geqslant 0$ положим

$$\psi(u) = \inf\{v - \varphi(v) \text{ для } v \geqslant u\}. \tag{15}$$

Так как $\varphi(u+t)=\varphi(u)+\varphi(t)$ для $u \geqslant 0$, то $\psi(u+t)=\psi(u)+t-\varphi(t)$ для $u \geqslant 0$. Более того, $0 \leqslant \psi(v)-\psi(u) \leqslant v-u$ для $0 \leqslant u \leqslant v$. Таким образом, $\psi(u)$ — монотонная неубывающая абсолютно непрерывная функция от u. Следовательно, $\psi'(u)$ существует для почти всех u, $0 \leqslant \psi'(u) \leqslant 1$, и

$$\int_0^t \psi'(u)\,du = \psi(t)-\psi(0) = t-\varphi(t). \tag{16}$$

Докажем теперь, что $\psi'(u)=\delta(u)$ для почти всех u, откуда и будет следовать теорема. Заметим, что $\delta(u)=1$ тогда и только тогда, когда $\psi(u)=u-\varphi(u)$. Неравенство $\psi(u) \leqslant u-\varphi(u)$ всегда выполняется. Кроме того, $\varphi(u+0)=\varphi(u)$ и почти всюду $\varphi'(u)=0$.

Покажем сначала, что

$$\psi'(u) \leqslant \delta(u) \quad \text{для почти всех} \quad u. \tag{17}$$

Если производная $\psi'(u)$ существует и равна 0, то (17) с очевидностью выполняется. Если $\psi'(u)$ существует, $\psi'(u)>0$ и $\varphi(u+0)=\varphi(u)$, то $\delta(u)=1$. В самом деле, если $\psi'(u)>0$, то $\psi(v)>\psi(u)$ для $v>u$ и, следовательно, $\psi(u)=\inf\{s-\varphi(s) \text{ для } u \leqslant s \leqslant v\}$ для всех $v>u$. Таким образом, $u-\varphi(v) \leqslant \psi(u) \leqslant u-\varphi(u)$ для всех $v>u$ и, следовательно, $u-\varphi(u+0) \leqslant \psi(u) \leqslant u-\varphi(u)$. Если $\varphi(u+0)=\varphi(u)$, то $\psi(u)=u-\varphi(u)$, откуда $\delta(u)=1$. Утверждение (17) вытекает теперь из того, что всегда $\psi'(u) \leqslant 1$.

Остается доказать, что

$$\delta(u) \leqslant \psi'(u) \quad \text{для почти всех} \quad u. \tag{18}$$

Это очевидно, если $\delta(u)=0$ и производная $\psi'(u)$ существует. Докажем, что $\psi'(u)=1$, если $\delta(u)=1$, $\psi'(u)$ существует, $\varphi'(u)=0$ и u — точка накопления для множества $D=\{u\colon\ \delta(u)=1,\ 0 \leqslant u < \infty\}$. Предположим, что $u \in D$ и $u=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, где $u_n \in D$ и $u_n \neq u$. Тогда $\psi(u)=u-\varphi(u)$ и $\psi(u_n)=u_n-\varphi(u_n)$. Если $\psi'(u)$ существует и $\varphi'(u)=0$, то

$$\psi'(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(u)-\psi(u_n)}{u-u_n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(u)-\varphi(u_n)}{u-u_n}=1-\varphi'(u)=1. \tag{19}$$

Так как изолированные точки множества D образуют не более чем счетное множество, то утверждение (18) доказано.

Одновременное выполнение неравенств (17) и (18) дает $\psi'(u)=\delta(u)$ для почти всех u. Используя (16), получаем отсюда (14) для $\varphi(t) \leqslant t$, и теорема доказана.

В доказательстве теоремы 5 мы использовали только то, что $\varphi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant t$, — неубывающая функция, для которой $\varphi(0)=0$ и $\varphi'(u)=0$ почти всюду. Таким образом, справедлива и более общая теорема 1 § 1.

Заметим, что если определить $\delta(u)$ так, чтобы $\delta(u)=1$, когда $v-\varphi(v)>u-\varphi(u)$ для всех $v>u$, и $\delta(u)=0$ в противном случае, то (14) все равно будет выполняться. Далее, если u — точка разрыва $\varphi(u)$, то $\varphi(u)$ может принимать любое значение из отрезка $[\varphi(u-0), \varphi(u+0)]$.

Доказательство теоремы 5 можно существенно упростить, если предположить, что $\varphi(u)$ имеет на $[0, t]$ только конечное число скачков.

Итак, мы получили теорему 5 постепенным обобщением классической теоремы о баллотировке. В свою очередь теорема о баллотировке немедленно следует из теоремы 5.

§ 3. ЗАДАЧИ

1. При баллотировке кандидат A получает a голосов, а кандидат B получает b голосов, причем все избирательные протоколы равновероятны. Найти вероятность $P(a, b)$ того, что при последовательном подсчете число голосов, поданных за A, все время более чем в μ раз превосходит число голосов, поданных за B, где μ — неотрицательное целое число.

2. При баллотировке кандидат A получает a голосов, а кандидат B получает b голосов, причем все избирательные протоколы равновероятны. Найти вероятность $Q(a, b)$ того, что при подсчете число голосов, поданных за A, всегда не менее чем в μ раз превосходит число голосов, поданных за B, где μ — неотрицательное целое число.

3. При баллотировке кандидат A получает a голосов, а кандидат B получает b голосов, причем все избирательные протоколы равновероятны. Пусть $b<a+c$, где c — положительное целое число. Обозначим через α_r и β_r числа голосов среди первых r зарегистрированных, поданных за A и B соответственно. Найти вероятность $Q_c(a, b)=\mathbf{P}\{\beta_r<\alpha_r+c$ для $r=1, 2, \ldots, a+b\}$.

4. При баллотировке кандидат A получает a голосов, а кандидат B получает b голосов, причем все избирательные протоколы равновероятны. Пусть $c-d<b-a<c$, $0<c<d$, где c и d — целые. Обозначим через α_r и β_r число голосов среди первых r зарегистрированных, поданных за A и B соответственно. Найти вероятность $P=\mathbf{P}\{c-d<\beta_r-\alpha_r<c$ для $r=1, 2, \ldots, a+b\}$.

5. Доказать теорему 3 § 2 математической индукцией по n.

6. Доказать теорему 5 § 2 для случая, когда $\varphi(u)$ имеет только конечное число скачков в интервале $(0, t)$.

7. Следующие три задачи являются вопросами 5669, 5744, 5804 в Educational Times (1878) в июньском, сентябрьском и ноябрьском выпусках соответственно (см. Уитворт [36]).

а) Человек выпивает в случайном порядке n стаканов вина и n стаканов воды (все равного объема). Доказать, что вероятность того, что выпитое им количество вина после каждого стакана не будет превышать выпитого им количества воды, равна $1/(n+1)$.

б) Пусть n мужчин со своими женами переходят мост в случайном порядке, но так, что число перешедших мужчин всегда не превосходит числа перешедших женщин. Доказать, что вероятность того, что ни один мужчина не перейдет мост раньше своей жены, равна $(n+1)/2^n$.

в) Пусть человек, играя по постоянной ставке, выигрывает $2n+1$ игр и проигрывает $n+1$ игр. Доказать, что вероятность того, что он никогда не будет беднее, чем в начале, и никогда не будет богаче, чем в конце игры, равна $n/(4n+6)$.

8. Предположим, что при баллотировке кандидаты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ получают $a_1, a_2, \ldots, a_n$ голосов соответственно. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Обозначим

через $\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)}$ числа голосов среди первых r зарегистрированных, поданных за $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно. Найти

$$\mathbf{P}\left\{\alpha_1^{(r)} \geqslant \alpha_2^{(r)} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n^{(r)} \quad \text{для} \quad r=1, 2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n\right\}$$

в предположении, что все избирательные протоколы равновероятны. (Макмагон [26, стр. 133].)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Aebly J., Démonstration du problème du scrutin par des considerations géometriques, *L'Enseignement Math.*, **23** (1923), 185—186.

[2] Aeppli A., A propos de l'interprétation géometrique du problème du scrutin, *L'Enseignement Math.*, **23** (1923), 328—329.

[3] Aeppli A., Zur Theorie verketteter Wahrscheinlichkeiten, Markoffsche Ketten höherer Ordnung, Zürich, 1924.

[4] Ampère A. M., Considerations sur la théorie mathématique de Jeu, Lyon, Paris, 1802.

[5] André D., Solution directe du problème résolu par M. Bertrand, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **105** (1887), 436—437.

[6] Barbier É., Généralisation du problème résolu par M. J. Bertrand, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **105** (1887), 407, 440 (список опечаток).

[7] Barton D. E., Mallows C. L., Some aspects of the random sequence, *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 236—260.

[8] Bertrand J., Solution d'un problème, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **105** (1887), 369.

[9] Bizley M. T. L., Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from (0, 0) to (km, kn) having just t contacts with the line $my=nx$ and having no points above this line; and a proof of Grossman's formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line, *J. Inst. Actuar.*, **80** (1954), 55—62.

[10] Bizley M. T. L., Grossman H. D., Fun with lattice-points 25. Paths having a given number of lattice points in a given region, *Scripta Math.*, **20** (1954), 203—204.

[11] De Moivre A., De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus, *Philos. Trans. London*, **27** (1711), 213—264.

[12] Dinges H., Eine kombinatorische Überlegung und ihre masstheoretische Erweiterung, *Z. Wahr.*, **1** (1963), 278—287.

[13] Dvoretzky A., Motzkin Th., A problem of arrangements, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 305—313.

[14] Erdös P., Kaplansky I., Sequences of plus and minus, *Scripta Math.*, **12** (1946), 73—75.

[15] Göbel F., Some remarks on ballot problems, Mathematisch Centrum, Amsterdam, August, 1964.

[16] Graham R. L., A combinatorial theorem for partial sums, *Ann. Math. Statist.*, **34** (1963), 1600—1602.

[17] Grossman H. D., Fun with lattice-points 4, The ballot-box problem, *Scripta Math.*, **12** (1946), 223—225.

[18] Grossman H. D., Fun with lattice-points 21, Another extension of the ballot problem», *Scripta Math.*, **16** (1950), 120—124.

[19] Grossman H. D., Fun with lattice-points 22, Paths in a lattice triangle, *Scripta Math.*, **16** (1950), 207—212.

[20] Harper L. H., A family of combinatorial identities, *Ann. Math. Statist.*, **37** (1966), 509—512.

[21] Hewitt E., Stromberg K., Real and abstract analysis, Springer, New York, 1965.

[22] Lagrange J. L., Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières, différentes, ou sur l'intégration des équations

linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hazards, Noveaux Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1775, 183—272. (Oeuvres de Lagrange, IV, pp. 151—251, Paris, 1869.)
[23] Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812. (Oeuvres complètes de Laplace, VII, Paris, 1886.)
[24] Lucas E., Théorie des nombres. I, Paris, 1891.
[25] MacMahon P. A., Memoir on the theory of the partitions of numbers. Part IV. On the probability that the successful condidate at the election by ballot may never at any time have fewer votes than the one who is unsuccessful; on a generalisation of this question; and on its connexion with other questions of partition, permutation and combination, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, *Ser. A*, **209** (1909), 153—175.
[26] MacMahon P. A., Combinatory analysis, I, Cambridge University Press, 1915.
[27] Mirimanoff D., A propos de l'interprêtation géometrique de problème du scrutin, *L'Enseignement Math.*, **23** (1923), 185—186.
[28] Mohanty S. G., An urn problem related to the ballot problem, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 526—528.
[29] Mohanty S. G., Narayana T. V., Some properties of compositions and their application to probability and statistics, *Biometrische Z.*, **3** (1961), 252—258, **5** (1963), 8—18.
[30] Narayana T. V., A partial order and its applications to probability theory, *Sankhyā*, *Ser. A*, **21** (1959), 91—98.
[31] Riordan J., The enumeration of election returns by number of lead positions, *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 369—379.
[32] Sz.-Nagy B., Introduction to real functions and orthogonal expansions, Oxford University Press, New York, 1965.
[33] Takács L., A generalization of the ballot problem and its application in the theory of queues, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **57** (1962), 327—337.
[34] Takács L., Ballot problems, *Z. Wahr.*, **1** (1962), 154—158.
[35] Takács L., The distribution of majority times in a ballot, *Z. Wahr.*, **2** (1963), 118—121.
[36] Whitworth W. A., Arrangements of *m* things of one sort and *n* things of another sort, under certain conditions of priority, *Messenger of Math.*, **8** (1879), 105—114.
[37] Whitworth W. A., Choice and chance, 4-е изд., Cambridge, 1886.

Глава 2

ФЛУКТУАЦИИ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 4. ЦИКЛИЧЕСКИ ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ называются *циклически переставляемыми*, если все n циклических перестановок последовательности $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ имеют одинаковое совместное распределение. Примерами циклически переставляемых случайных величин $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ могут служить переставляемые случайные величины[1]) и взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины.

Докажем основную теорему о циклически переставляемых случайных величинах.

Теорема 1. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — циклически переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots, n$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1, \ldots, n \mid N_n = k\} = \begin{cases} (n-k)/n, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

где условная вероятность определена с точностью до эквивалентности.

Доказательство. Определим ν_{r+n} для $r = 1, 2, \ldots$, положив $\nu_{r+n} = \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots$. Пусть $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots$ и $N_0 = 0$. Положим

$$\delta_r = \begin{cases} 1, & \text{если } i - N_i > r - N_r \text{ для } i > r, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Случайные величины δ_r одинаково распределены для всех $r = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, что δ_0 — индикатор события $\{N_r < r$ для

---

[1]) То есть величины, совместное распределение которых не меняется при любой перестановке. У Феллера (Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II, „Мир“, 1967, стр. 283) такие величины названы *симметрично зависимыми*. — *Прим. ред.*

$r=1, 2, \ldots, n\}$. Таким образом, с вероятностью 1

$$\mathbf{P}\{N_r<r \text{ для } r=1, \ldots, n \mid N_n\}=\mathbf{E}\{\delta_0 \mid N_n\}=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{E}\{\delta_r \mid N_n\}=$$

$$=\frac{1}{n}\mathbf{E}\left\{\sum_{r=1}^{n}\delta_r \mid N_n\right\}=\begin{cases}(n-N_n)/n, & \text{если } 0\leqslant N_n\leqslant n,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{3}$$

поскольку из формулы (10) § 2 следует, что для почти всех реализаций $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$

$$\sum_{r=1}^{n}\delta_r=\begin{cases}n-N_n, & \text{если } 0\leqslant N_n\leqslant n,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{4}$$

Теорема доказана.

Из формулы (1) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{N_r<r \text{ для } r=1, \ldots, n\}=\mathbf{E}\left\{\left[1-\frac{N_n}{n}\right]^+\right\}, \tag{5}$$

где $[x]^+=x$, если $x\geqslant 0$, и $[x]^+=0$, если $x\leqslant 0$.

§ 5. ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И НЕЗАВИСИМЫЕ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В следующих параграфах этой главы мы будем иметь дело либо с конечным числом случайных величин $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, принимающих неотрицательные целые значения, либо с бесконечной последовательностью случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения. Мы будем предполагать, что случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ либо переставляемые, либо взаимно независимые одинаково распределенные. Аналогично $\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_r, \ldots$ будут либо переставляемыми [1]), либо взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

При этом во всех случаях случайные величины $\{\nu_r\}$ одинаково распределены. Введем ряд обозначений, которыми будем пользоваться на протяжении всей книги. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, 2, \ldots, N_0=0$. Пусть

$$\pi_j=\mathbf{P}\{\nu_r=j\}, \qquad j=0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

[1]) Бесконечная последовательность случайных величин называется переставляемой, если совместное распределение любого конечного набора этих величин не меняется при любой их перестановке. — *Прим. ред.*

для распределений ν_r,

$$\gamma = \mathbf{E}\{\nu_r\} = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j \tag{2}$$

для математических ожиданий ν_r (возможно, что $\gamma = \infty$),

$$\gamma_2 = \mathbf{E}\{\nu_r(\nu_r - 1)\} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\pi_j \tag{3}$$

для второго факториального момента ν_r (γ_2 также может равняться ∞),

$$\pi(z) = \mathbf{E}\left(z^{\nu_r}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j \tag{4}$$

для производящей функции ν_r, причем ряд для нее сходится при $|z| \leqslant 1$. Очевидно, что $\gamma = \pi'(1-0)$ и $\gamma_2 = \pi''(1-0)$.

Для произвольной бесконечной последовательности $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ переставляемых случайных величин существует функция распределения $G(x)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{N_n}{n} \leqslant x\right\} = G(x). \tag{5}$$

Если же, в частности, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ взаимно независимы и одинаково распределены, то $G(x) = 1$ при $x \geqslant \gamma$ и $G(x) = 0$ при $x < \gamma$. Иначе говоря, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = \gamma \tag{6}$$

по вероятности. Последнее утверждение составляет слабый закон больших чисел.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 1. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$, — бесконечная последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, то*

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для всех } r = 1, 2, \ldots\} = \begin{cases} 1-\gamma, & \text{если } \gamma < 1, \\ 0, & \text{если } \gamma \geqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. По теореме непрерывности для вероятностей

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для всех } r = 1, 2, \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{N_r < r \text{ для всех } r = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Для любого конечного n случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ циклически переставляемы, следовательно, для них справедлива формула (5) § 4. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1,\ 2,\ \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{N_n}{n}\right]^+\right\}. \tag{9}$$

Из формулы (6) следует, что $[(n - N_n)/n]^+$ стремится к $[1-\gamma]^+$ по вероятности, а так как величины $[(n-N_n)/n]^+$ ограничены в совокупности, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{N_n}{n}\right]^+\right\} = [1-\gamma]^+. \tag{10}$$

Формула (7) получается теперь из формул (9) и (10).

Теорема 2. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — бесконечная последовательность переставляемых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, то*

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1,\ 2\ \ldots\} = \int_0^1 (1-x)\,dG(x), \tag{11}$$

где функция $G(x)$ определена формулой (5).

Доказательство. Можно воспользоваться формулой (9). Так как величины $[(n-N_n)/n]^+$ ограничены в совокупности, то из формулы (5) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{N_n}{n}\right]^+\right\} = \int_0^1 (1-x)\,dG(x), \tag{12}$$

и теорема доказана.

Далее нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть $w = \delta$ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения*

$$\pi(w) = w. \tag{13}$$

Тогда если $\gamma \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\delta = 1$. Если же $\gamma > 1$ или $\pi_1 = 1$, то $0 \leqslant \delta < 1$. Уравнение (13) *не имеет других корней в круге $|w| \leqslant \delta$.*

Доказательство. На отрезке $0 \leqslant w \leqslant 1$ обе функции $\pi(w)$ и $\pi'(w)$ не убывают по w, причем $\pi(1) = 1$ и $\pi'(1) = \gamma$. Если $\gamma = \pi'(1) \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то уравнение (13) имеет один и только один корень на отрезке $[0, 1]$. Если $\gamma > 1$, то на отрезке $[0, 1]$ уравнение (13) имеет точно два корня: $w = 1$ и $w = \delta$, где $0 \leqslant \delta < 1$. Если $\pi_1 = 1$, то все значения $w \in [0, 1]$ удовлетворяют уравнению (13). Отсюда следует первое утверждение теоремы. Для доказательства второго заметим, что всегда $\pi'(\delta) \leqslant 1$ и, следовательно, $|\pi(w)| < \pi'(\delta) \leqslant 1$ при $|w| < \delta$. В соответствии с этим при $|w| \leqslant \delta$ и $w \neq \delta$

$$|\pi(w) - \pi(\delta)| = \left|\int_\delta^w \pi'(z)\,dz\right| < |w - \delta|,$$

что показывает невозможность равенства $\pi(w)=w$ при $|w|\leqslant\delta$ и $w\neq\delta$.

Теорема 4. *Если* $0\leqslant z<1$, *то уравнение*

$$w=z\pi(w) \tag{14}$$

имеет точно один вещественный корень $w=\delta(z)$ *в интервале* $0\leqslant w<1$, *причем* $\lim\limits_{z\to 1-0}\delta(z)=\delta$, *где* δ — *наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\pi(w)=w$.

Доказательство. Так как обе функции $\pi(w)$ и $\pi'(w)$ на отрезке $[0, 1]$ не убывают, уравнение (14) имеет точно один корень на этом отрезке. Очевидно, что $\delta(z)$ — неубывающая функция от z. Так как $\delta(z)<\delta$ при $0\leqslant z<1$ и $\lim\limits_{z\to 1-0}\delta(z)=\delta^*$ — корень уравнения $\pi(w)=w$, то $\delta^*=\delta$.

Замечание. Если $|z|<1$, то уравнение

$$w=z\pi(w) \tag{15}$$

имеет точно один корень $w=\delta(z)$ в области $|w|<1$ и

$$\delta(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\left(\frac{d^{j-1}[\pi(w)]^j}{dw^{j-1}}\right)_{w=0}. \tag{16}$$

Действительно, если $|w|=1$, то $|z\pi(w)|<|w|$. Тогда из теоремы Руше следует, что уравнение (15) имеет точно один корень в области $|w|<1$. Равенство (16) получается из разложения Лагранжа (см. дополнение).

§ 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{N_r-r\}$

Теперь мы займемся нахождением распределения случайной величины $\max\limits_{1\leqslant r\leqslant n}(N_r-r)$ для конечного n, а также распределением величины $\sup\limits_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)$.

Теорема 1. *Если* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — *переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, то*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}(N_r-r)<k\right\}=$$
$$=\mathbf{P}\{N_n<n+k\}-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-j}\left(1-\frac{l}{n-j}\right)\mathbf{P}\{N_j=j+k,\ N_n=j+k+l\}, \tag{1}$$

где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. *Если* $k<0$, *то обе части равенства* (1) *равны* 0.

Доказательство. Мы докажем чуть более общую формулу, из которой будет следовать формула (1). Если $i = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$\mathbf{P}\{N_r < r + k \text{ для } r = 1, 2, \ldots, n \text{ и } N_n \leqslant n + k - i\} = \mathbf{P}\{N_n \leqslant n + k - i\} - \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{l=0}^{n-i-j} \left(1 - \frac{l}{n-j}\right) \mathbf{P}\{N_j = j + k,\ N_n = j + k + l\}. \qquad (2)$$

Достаточно доказать, что вычитаемое в правой части формулы (2) есть вероятность события $\{N_r \geqslant r + k$ для некоторого $r = 1, 2, \ldots, n-1$ и $N_n \leqslant n + k - i\}$. Это событие может произойти в следующих исключающих друг друга случаях: максимальное r, для которого $N_r \geqslant r + k$, равно $j = 1, 2, \ldots, n - i$. Тогда $N_j = j + k$ и $N_r < r + k$ для $r = j + 1, \ldots, n$, что эквивалентно $N_r - N_j < r - j$ для $r = j + 1, \ldots, n$. По теореме 1 § 4

$$\mathbf{P}\{N_r - N_j < r - j \text{ для } r = j + 1, \ldots, n \mid N_j = j + k,\ N_n = j + k + l\} = 1 - \frac{l}{n-j}, \qquad (3)$$

если $0 \leqslant l \leqslant n - j$ и левая часть равенства (3) определена. Если умножить обе части равенства (3) на $\mathbf{P}\{N_j = j + k,\ N_n = j + k + l\}$ и сложить получившиеся равенства почленно для всех (j, l), удовлетворяющих условию $1 \leqslant j \leqslant j + l \leqslant n - i$, то получим вычитаемое правой части формулы (2). Формула (1) получается подстановкой $i = 1$ в формулу (2).

Если в формуле (2) положить $k = 0$, то из формулы (1) § 4 получим

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1, 2, \ldots, n \text{ и } N_n \leqslant n - i\} = \sum_{j=1}^{n-i} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{P}\{N_n = j\}. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, то*

$$\mathbf{E}\left\{\max_{0 \leqslant r \leqslant n} (N_r - r)\right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \mathbf{E}\{[N_j - j]^+\}. \qquad (5)$$

Доказательство. Так как

$$\mathbf{E}\left\{\max_{0 \leqslant r \leqslant n} (N_r - r)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leqslant r \leqslant n} (N_r - r) < k\right\}\right], \qquad (6)$$

равенство (5) следует из (1). Если случайная величина γ конечна, то обе части равенства (5) конечны; если $\gamma=\infty$, то обе части равенства (5) равны ∞.

Если, в частности, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, то в формулы (1) и (2) можно подставить

$$\mathbf{P}\{N_j=j+k,\ N_n=j+k+l\}=\mathbf{P}\{N_j=j+k\}\mathbf{P}\{N_n-N_j=l\}= \\ =\mathbf{P}\{N_j=j+k\}\mathbf{P}\{N_{n-j}=l\}. \qquad (7)$$

В этом частном случае формула (1) принимает вид

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}(N_r-r)<k\right\}= \\ =\mathbf{P}\{N_n<n+k\}-\sum_{j=1}^{n-1}\mathbf{P}\{N_j=j+k\}\mathbf{E}\left\{\left[1-\frac{N_{n-j}}{a-j}\right]^+\right\}. \qquad (8)$$

Теорема 3. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Если $\gamma<1$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\right\}=1-(1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\{N_j=j+k\} \qquad (9)$$

для всех $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если $\gamma\geqslant 1$ и $\pi_1=1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\}=0 \qquad (10)$$

для всех $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если $\pi_1=1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)=0\}=1. \qquad (11)$$

Доказательство. По теореме непрерывности для вероятностей

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}(N_r-r)<k\}. \qquad (12)$$

Правую часть этого равенства можно заменить правой частью равенства (8).

Рассмотрим сначала случай $\gamma<1$. Из слабого закона больших чисел следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{n}=\gamma$$

по вероятности. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{N_n<n+k\}=1$ для $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left\{\left[1-\frac{N_{n-j}}{n-j}\right]^+\right\}=1-\gamma \qquad (13)$$

для $j = 1, 2, \ldots$. Мы покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \tag{14}$$

для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если в (8) перейти к пределу при $n \to \infty$, то получится (9). Остается доказать (14). Так как правая часть равенства (8) неотрицательна, $\mathbf{P}\{N_n < n + k\} \leqslant 1$ и

$$\mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{N_{n-j}}{n-j}\right]^+\right\} \geqslant \mathbf{E}\left\{1 - \frac{N_{n-j}}{n-j}\right\} = 1 - \gamma, \tag{15}$$

то

$$(1-\gamma) \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\{N_j = j + k\} \leqslant 1 \tag{16}$$

для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots$, откуда следует (14).

Если теперь $\gamma > 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}\{N_n < n + k\} = 0$ для всех k, и из неравенства

$$0 \leqslant \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant r \leqslant n} (N_r - r) < k\} \leqslant \mathbf{P}\{N_n < n + k\} \tag{17}$$

получаем формулу (10).

Наконец, если $\gamma = 1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < 0\} = 0 \tag{18}$$

в силу формулы (7) § 5.

Отсюда уже видно, что (10) выполняется при $k \leqslant 0$. Если $k > 0$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\pi_0 > 0$, и формула (10) для $k > 0$ вытекает из очевидного неравенства

$$\pi_0^k \mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k\} \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < 0\}. \tag{19}$$

Если $\pi_1 = 1$, то $\mathbf{P}\{N_r = r\} = 1$ для всех $r = 1, 2, \ldots$, откуда получаем формулу (11).

Замечание. Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — переставляемые случайные величины, то можно определить такую случайную величину θ, что $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ будут условно независимы и одинаково распределены при данном значении θ. Иначе говоря, последовательность $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ можно получить из последовательности независимых одинаково распределенных величин рандомизацией параметра. Таким образом, вероятность $\mathbf{P}\{\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k \mid \theta\}$ можно определить с помощью формулы (9), а потом, беря математическое ожидание по θ, можно получить $\mathbf{P}\{\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k\}$.

Теорема 4. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные значения, и $\gamma < 1$, то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k\} = Q_k, \tag{20}$$

где $Q_k = 0$ для $k < 0$, $Q_0 = 1 - \gamma$ и

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k = \frac{Q_0 \pi(z)}{\pi(z) - z} \tag{21}$$

для $|z| < 1$.

Доказательство. Используя формулу полной вероятности и учитывая, что случайная величина ν_1 может принимать значения 0, 1, 2, ..., получаем для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{N_r < r + k \text{ для } r = 1, \ldots, n+1\} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \pi_j \mathbf{P}\{N_r < r + k + 1 - j \text{ для } r = 1, \ldots, n\}. \tag{22}$$

При $n \to \infty$ отсюда следует формула

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j} \tag{23}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. С помощью этой формулы и формулы (7) § 5 можно вычислить рекуррентно вероятности $Q_1, Q_2, \ldots$, начиная с $Q_0 = 1 - \gamma$. Если $k < 0$, то очевидно, что $Q_k = 0$. Равенство (21) получается переходом к производящим функциям, причем соответствующий ряд сходится при $|z| < 1$. Так как $0 \leqslant Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant Q_k \leqslant \ldots \leqslant 1$, то $\lim_{k \to \infty} Q_k$ существует и по теореме Абеля (см. дополнение)

$$\lim_{k \to \infty} Q_k = \lim_{z \to 1-0} (1 - z) Q(z) = \frac{Q_0}{1 - \pi'(1-0)} = \frac{Q_0}{1 - \gamma} = 1. \tag{24}$$

Соответственно, если $\gamma < 1$, то $\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r)$ является собственной случайной величиной, которая с вероятностью 1 принимает только конечные значения.

Равенство $Q_0 = 1 - \gamma$ мы получили, используя слабый закон больших чисел, а из него по теореме Абеля заключили, что $\lim_{k \to \infty} Q_k = 1$. Если применить сильный закон больших чисел, то можно непосредственно получить, что $\lim_{k \to \infty} Q_k = 1$, откуда по теореме Абеля $Q_0 = 1 - \gamma$.

Интересно отметить, что если уравнение $\pi(z)=z$ имеет корень $z=a$ при $|z|>1$ и не имеет других корней при $1<|z|\leqslant a$, то

$$1-Q_k \sim \frac{1-\gamma}{\pi'(a)-1}\,a^{-k} \tag{25}$$

при $k\to\infty$.

Замечание. Сравнивая равенства (9) и (20), приходим к интересному тождеству. Если $\gamma<1$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\{N_j=j+k\}=\frac{1-Q_k}{1-\gamma}, \tag{26}$$

где $Q_k=0$ при $k<0$, $Q_0=1-\gamma$, а значения Q_k для $k>0$ даются формулой (21).

§ 7. ДИСКРЕТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ О РАЗОРЕНИИ

Классическая теорема о разорении формулируется так:

Теорема 1. *Два игрока A и B разыгрывают между собой последовательность игр. В каждой игре, независимой от остальных, либо A выигрывает одну монету у B с вероятностью p, либо B выигрывает у A одну монету с вероятностью q* $(0<p<1,\ p+q=1)$. *Предположим, что в начале игры A имеет a монет, а B имеет b монет. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не разорится. Тогда вероятность того, что разорится именно A, равна*

$$P_A=\begin{cases}\left[1-(p/q)^b\right]/\left[1-(p/q)^{a+b}\right], & \text{если}\quad p\neq q,\\ b/(a+b), & \text{если}\quad p=q.\end{cases} \tag{1}$$

Формула для вероятности P_B того, что разорится B, аналогична.

В 1657 г. Гюйгенс [11] вычислил P_A/P_B в частном случае $a=b=12$, $p/q=5/9$. Около 1680 г. Бернулли нашел P_A/P_B в общем случае; его доказательство приводит де Муавр [7].

Докажем следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Обозначим через $\rho(i)$, $i\geqslant 1$, наименьшее из чисел r, для которых $N_r=r-i$. Если такого числа r не существует, положим $\rho(i)=\infty$. Тогда если $\pi_0>0$, то при $1\leqslant i\leqslant k$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r\leqslant\rho(i)}(N_r-r)<k-i\}=\frac{Q_{k-1}}{Q_k}, \tag{2}$$

где $Q_0 \neq 0$ выбирается произвольно, а вероятности Q_k, $k = 1, 2, \ldots$, можно получить с помощью рекуррентной формулы

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Доказательство. Положим

$$Q(k, i) = \mathbf{P}\{N_r < r + k - i \text{ для } r = 1, \ldots, \rho(i)\}. \tag{4}$$

Если $\pi_0 > 0$, то вероятности $Q(k, i)$, $1 \leqslant i \leqslant k < \infty$, положительны. Функцию $\rho(i)$ можно представить в виде суммы взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин: $\rho(i) = \rho(1) + [\rho(2) - \rho(1)] + \ldots + [\rho(i) - \rho(i-1)]$. Отсюда легко получить формулу

$$Q(k, i) = \prod_{l=k+1-i}^{k} Q(l, 1). \tag{5}$$

Пусть $Q(k, 1) = Q_{k-1}/Q_k$ для $k = 1, 2, \ldots$, где $Q_0 \neq 0$ выбирается произвольно. Тогда $Q(k, i) = Q_{k-i}/Q_k$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Так как ν_1 может принимать значения $j = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$Q(k+i, i) = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q(k+i, i+j-1), \tag{6}$$

откуда

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j} \tag{7}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$, и теорема доказана.

Интересно отметить, что система уравнений (3) полностью совпадает с системой (23) § 6.

Систему линейных уравнений (3) можно решить в явном виде, используя метод производящих функций. В самом деле,

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k = \frac{Q_0 \pi(z)}{\pi(z) - z} \tag{8}$$

для $|z| < \delta$, где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z) = z$. Если $\gamma \leqslant 1$, то $\delta = 1$, а если $\gamma > 1$, то $0 < \delta < 1$.

Если число $|z|$ достаточно мало, то

$$Q(z) = Q_0 + \frac{Q_0 z}{\pi_0 - [\pi_0 + z - \pi(z)]} = Q_0 + Q_0 z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi_0^{k+1}} [\pi_0 + z - \pi(z)]^k, \tag{9}$$

откуда

$$Q_1 = \frac{Q_0}{\pi_0} \tag{10}$$

и

$$Q_{k+1} = Q_0 \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^\nu \nu!}{\pi_0^{\nu+1}} \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_k=\nu \\ i_1+2i_2+\ldots+ki_k=k}} \frac{(\pi_1-1)^{i_1}\pi_2^{i_2}\cdots\pi_k^{i_k}}{i_1!\,i_2!\ldots i_k!} \tag{11}$$

для $k=1,\ 2,\ \ldots$.

Замечание. Если $0<\gamma<\infty$, то Q_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, можно получить еще и так. Введем вероятностное распределение

$$\pi_j^* = \frac{1}{\gamma}\left(1-\pi_0-\pi_1-\ \ldots\ -\pi_j\right), \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{12}$$

с производящей функцией

$$\pi^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^* z^j = \frac{1-\pi(z)}{\gamma(1-z)}. \tag{13}$$

Положим $P_0 = Q_0$ и $P_k = Q_k - Q_{k-1}$ при $k=1,\ 2,\ \ldots$. Тогда

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = Q(z)(1-z) = P_0(1-z) + \frac{P_0 z}{1-\gamma\pi^*(z)}. \tag{14}$$

Из равенства (14) непосредственно следует, что

$$P_1 = P_0 \frac{\gamma\pi_0^*}{1-\gamma\pi_0^*} \tag{15}$$

и

$$P_{k+1} = P_0 \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu!\,\gamma^\nu}{\left(1-\gamma\pi_0^*\right)^{\nu+1}} \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_k=\nu \\ i_1+2i_2+\ldots+ki_k=k}} \frac{\left(\pi_1^*\right)^{i_1}\left(\pi_2^*\right)^{i_2}\cdots\left(\pi_k^*\right)^{i_k}}{i_1!\,i_2!\ldots i_k!} \tag{16}$$

для $k=1,\ 2,\ \ldots$.

Выведем теперь другие выражения для вероятностей Q_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Теорема 3. *Если* $\gamma \neq 1$, *то*

$$Q_k = Q_0\left[\frac{(1/\delta)^k}{1-\pi'(\delta)} - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j+k\}\right] \tag{17}$$

для всех $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, *где* δ — *наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\pi(z)=z$. *Если* $\gamma<1$, *то* $\delta=1$, *а если* $\gamma > 1$, *то* $0 < \delta < 1$. *При* $k < 0$ *правая часть равенства* (17) *обращается в* 0.

Доказательство. Для случая $\gamma < 1$ равенство (17) уже доказано в теореме 3 § 6. Там значение Q_0 было равно $1-\gamma$. Но так как Q_0 служит множителем пропорциональности, это не ограничивает общности.

Докажем теперь равенство (17) для $\gamma > 1$. Не теряя общности, можно предположить, что $Q_0 = 1$. Тогда из формулы (8) следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k z^k = \frac{\pi(z)}{\pi(z) - z} \tag{18}$$

при $|z| < \delta$ и $Q_k = 0$ при $k < 0$. Кроме того,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\} \right) z^k = \frac{\pi(z)}{z - \pi(z)} \tag{19}$$

при $\delta < |z| < 1$.

Если вычесть $1/(1-\pi'(\delta))\delta^k$ из Q_k, $k \geqslant 0$, то результирующая последовательность будет иметь производящую функцию

$$\frac{\pi(z)}{\pi(z) - z} - \frac{\delta}{(1-\pi'(\delta))(\delta - z)}, \tag{20}$$

сходящуюся при $|z| \leqslant \delta$. Аналогично, если мы вычтем $1/[1-\pi'(\delta)]\delta^k$ из $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\}$ для $k < 0$, то результирующая последовательность будет иметь производящую функцию

$$\frac{\pi(z)}{z - \pi(z)} + \frac{\delta}{[1-\pi'(\delta)](\delta - z)}, \tag{21}$$

определенную при $\delta \leqslant |z| < 1$.

При $|z| = \delta$ сумма производящих функций (20) и (21) равна 0 и, следовательно, сумма соответствующих элементов в двух последовательностях также равна 0, т. е.

$$Q_k + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\} = \frac{1}{(1-\pi'(\delta))\delta^k} \tag{22}$$

для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Это доказывает равенство (17) для $\gamma > 1$. Если $\gamma < 1$, то $\delta = 1$ и оба ряда для производящих функций (20) и (21) сходятся при $|z| = 1$. Таким образом, в этом случае равенство (22) также выполняется, что и доказывает (17) для $\gamma < 1$.

Если $k < 0$, то $Q_k = 0$. Выбирая специальным образом последовательности случайных величин $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots\}$, можно вывести из этого факта интересные тождества.

Теорема 4. *Если* $\pi_0 > 0$, *то для* $i \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\{\sup_{1\leqslant r\leqslant\rho(i)}(N_r - r)\} = \sum_{k=i}^{\infty}\left(\frac{Q_k - Q_{k-1}}{Q_k}\right) - 1. \tag{23}$$

Доказательство. Случайная величина $\sup\limits_{1\leqslant r\leqslant\rho(i)}(N_r - r)$ может принимать значения $-1, 0, 1, 2, \ldots$, и потому ее математическое ожидание равно

$$\mathbf{E}\{\sup_{1\leqslant r\leqslant\rho(i)}(N_r - r)\} = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r\leqslant\rho(i)}(N_r - r)\geqslant j\} - 1. \tag{24}$$

Учитывая формулу (2), получаем требуемое.

В заключение докажем теоремы об асимптотическом поведении Q_k при $k\to\infty$.

Теорема 5. *Пусть* $\pi_0 > 0$. *Если* $\gamma < 1$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \frac{Q_0}{1-\gamma}. \tag{25}$$

Если $\gamma = 1$, *то*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{Q_k}{k} = \frac{2Q_0}{\gamma_2}, \tag{26}$$

где $\gamma_2 = \pi''(1-0)$. *Если* $\gamma > 1$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} Q_k\delta^k = \frac{Q_0}{1-\pi'(\delta)}, \tag{27}$$

где δ — *наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\pi(z) = z$, *причем* $0 < \delta < 1$.

Доказательство. Если $Q_0 > 0$, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$ — неубывающая последовательность положительных чисел, откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k$ (возможно, равный ∞) существует. Если $\gamma < 1$, то по теореме Абеля

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \lim_{z\to 1-0}(1-z)Q(z) = \frac{Q_0}{1-\pi'(1-0)} = \frac{Q_0}{1-\gamma}, \tag{28}$$

что доказывает равенство (25).

Заметим, что если $\gamma < 1$, то значения Q_k конечны и Q_0 можно выбрать так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = 1$. Но если $\gamma \geqslant 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = \infty$ для всех $Q_0 > 0$, т. е. невозможно выбрать Q_0 так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = 1$.

Если $\gamma = 1$, то по тауберовой теореме Харди — Литлвуда (см. дополнение)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{Q_k}{k} = \lim_{z\to 1-0}(1-z)^2 Q(z) = \frac{2Q_0}{\pi''(1-0)} = \frac{2Q_0}{\gamma_2}, \tag{29}$$

откуда следует формула (26). Этот результат можно получить и из теории рекуррентных событий. Если мы наблюдаем появления рекуррентного события в моменты $t=1, 2, \ldots$, предполагая при этом, что рекуррентное событие произошло в начальный момент $t=1$, а время возвращения имеет распределение π_j^*, $j=0, 1, 2, \ldots$, определенное равенствами (12), то Q_k/Q_0 есть среднее число появлений рекуррентного события к моменту времени $t=k$. Таким образом, из теории рекуррентных событий следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Q_k}{k} = \frac{Q_0}{\pi^{*\prime}(1-0)}, \tag{30}$$

вполне согласующееся с (29).

При $\gamma_2=\infty$ правая часть равенства (26) равна 0. В этом случае для нахождения асимптотического поведения Q_k при $k\to\infty$ можно использовать другую тауберову теорему Харди — Литлвуда (см. дополнение). В соответствии с этой теоремой, если при $z\to 1$ $(0<z<1)$

$$Q(z) \sim \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} L\left(\frac{1}{1-z}\right), \tag{31}$$

где $\alpha \geqslant 0$ и $L(cx) \sim L(x)$ при $x\to\infty$ для любого положительного числа c, то при $k\to\infty$

$$Q_k \sim \frac{k^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L(k). \tag{32}$$

Если $\gamma>1$, то по теореме Абеля

$$\lim_{k\to\infty} Q_k\delta^k = \lim_{z\to 1-0} (1-z)\, Q(z\delta) = \frac{Q_0}{1-\pi'(\delta)} \tag{33}$$

в предположении, что $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k\delta^k$ существует. Существование этого предела проверяется непосредственно. Так как ряд для $Q(z\delta)$ сходится при $|z|\leqslant 1$ и единственной особенностью функции $Q(z\delta)$ в единичном круге является простой полюс при $z=1$, то

$$Q(z\delta) = \frac{Q_0}{(1-\pi'(\delta))(1-z)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{34}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$. Отсюда немедленно следует равенство (27).

Замечание. С помощью явной формулы (17) для Q_k равенство (27) можно усилить, а именно

$$\lim_{k\to\infty} \left[Q_k - \frac{Q_0(1/\delta)^k}{1-\pi'(\delta)}\right] = -\frac{Q_0}{\gamma-1}. \tag{35}$$

Действительно, по теореме Чжун Кай-лая (см. дополнение)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\} = \frac{1}{\gamma - 1}, \tag{36}$$

если $\gamma > 1$, и, таким образом, (35) следует из (17).

Если $\gamma < 1$, то по той же теореме Чжун Кай-лая

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\} = 0, \tag{37}$$

откуда в силу (17)

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \frac{Q_0}{1-\gamma}, \tag{38}$$

что согласуется с формулой (25) при $\gamma < 1$.

§ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{r - N_r\}$

В этом параграфе мы займемся нахождением распределения $\max\limits_{1\leqslant r\leqslant n}(r - N_r)$ для конечных n и распределения $\sup\limits_{1\leqslant r<\infty}(r - N_r)$.

Теорема 1. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — представляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, то при $k > 0$*

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}(r - N_r) < k\} = 1 - \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j}\mathbf{P}\{N_j = j - k\}. \tag{1}$$

Доказательство. Найдем вероятность дополнительного к $\{\max\limits_{1\leqslant r\leqslant n}(r - N_r) < k\}$ события, т. е. вероятность того, что $N_r \leqslant r - k$ для некоторого $r = 1, 2, \ldots, n$. Это событие может произойти в следующих исключающих друг друга случаях: наименьшее r такое, что $N_r = r - k$, есть $r = i$ $(j = k, \ldots, n)$. Тогда $N_j = j - k$ и $N_r > r - k$ для $r = 1, \ldots, j - 1$, или, эквивалентно, $N_j - N_r < j - r$ для $r = 1, \ldots, j - 1$. По теореме 1 § 4

$$\mathbf{P}\{N_j - N_r < j - r \quad \text{для} \quad r = 1, \ldots, j-1 \mid N_j = j - k\} = \frac{k}{j} \tag{2}$$

для $0 \leqslant k \leqslant j$, где условная вероятность определена с точностью до эквивалентности. Если умножить (2) на $\mathbf{P}\{N_j = j - k\}$ и сложить получившиеся равенства почленно для $k \leqslant j \leqslant n$, найдем вероятность дополнительного события. Теорема доказана.

Подобным образом доказывается более общая формула

$$\mathbf{P}\{r - N_r < k \quad \text{для} \quad r = 1, \ldots, n-1,\ n - N_n < k - i\} =$$

$$= \mathbf{P}\{N_n > n + i - k\} - \sum_{j=1}^{n} \frac{k}{j}\mathbf{P}\{N_j = j - k,\ N_n > n + i - k\} \tag{3}$$

для $k>0$, $n\geqslant 1$ и $i>0$.

Теорема 2. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значення, то*

$$\mathbf{E}\{\max_{0\leqslant r\leqslant n}(r-N_r)\}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\,\mathbf{E}\{[j-N_j]^+\}. \tag{4}$$

Доказательство. Случайная величина $\max\limits_{0\leqslant r\leqslant n}(r-N_r)$ может принимать значения $0, 1, \ldots, n$ и поэтому

$$\mathbf{E}\{\max_{0\leqslant r\leqslant n}(r-N_r)\}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}(r-N_r)\geqslant k\}. \tag{5}$$

Утверждение теоремы следует из равенства (5) с учетом формулы (1).

Заметим, что если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — бесконечная последовательность переставляемых величин, принимающих неотрицательные целые значения, то, устремляя n к ∞ в формуле (1), получаем для $k>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\}=1-\sum_{j=k}^{\infty}\frac{k}{j}\{N_j=j-k\}\,P. \tag{6}$$

Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — бесконечная последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, то, как показывает следующая теорема, $\sup\limits_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)$ имеет геометрическое распределение.

Теорема 3. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Если $k>0$, то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\}=1-\delta^k, \tag{7}$$

где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения

$$\pi(w)=w. \tag{8}$$

Если $\gamma\leqslant 1$ и $\pi_1=1$, то $\delta=1$, а если $\gamma>1$ или $\pi_1=1$, то $\delta<1$.

Доказательство. Для $i\geqslant 1$ определим $\rho(i)$ как наименьшее из чисел r, для которых $N_r=r-i$. Если такого числа r не существует, положим $\rho(i)=\infty$. Функцию $\rho(i)$ можно представить в виде суммы i взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин: $\rho(i)=\rho(1)+[\rho(2)-\rho(1)]+\ldots+[\rho(i)-\rho(i-1)]$. Пусть

$$\mathbf{E}\{z^{\rho(1)}\}=\delta(z) \tag{9}$$

при $|z| < 1$. Тогда

$$\mathbf{E}\{z^{\rho(i)}\} = [\delta(z)]^i \tag{10}$$

при $|z| < 1$. Если теперь предположить, что $N_i = j$, то $\rho(i) = i + \rho^*(j)$, где $\rho^*(j)$ имеет то же распределение, что и $\rho(j)$, и последовательность $\{\rho^*(j)\}$ независима от последовательности $\{N_i\}$. Таким образом,

$$\mathbf{E}\{z^{\rho(i)}\} = z^i [\pi(\delta(z))]^i, \tag{11}$$

где $|z| < 1$. Сравнивая (10) и (11), получаем

$$\delta(z) = z\pi(\delta(z))$$

для $|z| < 1$. Если $0 < z < 1$, то уравнение

$$w = z\pi(w) \tag{13}$$

имеет один и только один вещественный корень в интервале $0 < w < 1$, откуда $w = \delta(z)$. Если $z \to 1$, $0 < z < 1$, то $\delta(z) \to \delta$, где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $w = \pi(w)$. Если $\gamma \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\delta = 1$, а если $\gamma > 1$ или $\pi_1 = 1$, то $\delta < 1$.

По определению $\rho(i)$ имеем

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant r \leqslant n} (r - N_r) < k\} = 1 - \mathbf{P}\{\rho(k) \leqslant n\} \tag{14}$$

для $k > 0$, а в силу теоремы Абеля

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\rho(k) \leqslant n\} = \lim_{z \to 1} [\delta(z)]^k = \delta^k, \tag{15}$$

и доказательство закончено.

Если $\gamma > 1$ или $\pi_1 = 1$, то $\sup_{1 \leqslant r < \infty} (r - N_r)$ есть собственная случайная величина, конечная с вероятностью 1. Если $\gamma \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\sup_{1 \leqslant r < \infty} (r - N_r)$ бесконечна с вероятностью 1.

Случайная величина $\rho(k)$ при $k = 1, 2, \ldots$ играет важную роль в теории азартных игр. Она интерпретируется как продолжительность игры. Ее распределение дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r \ldots$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Определим $\rho(k)$ при $k \geqslant 1$ как наименьшее из чисел r, для которых $N_r = r - k$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\rho(k) = n\} = \frac{k}{n} \mathbf{P}\{N_n = n - k\} \tag{16}$$

для $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\rho(k) \leqslant n\} = 1 - P\{\max_{1 \leqslant r \leqslant n} (r - N_r) < k\}. \tag{17}$$

Подставляя (1) в правую часть этого равенства, получаем окончательный результат.

Заметим, что формула (3) § 2 является частным случаем формулы (16). Удивительно, что и в этом более сложном случае сохраняется ее первоначальная простота.

Теперь предположим, что $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения.

Если $\gamma \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\rho(k) \leqslant n\} = 1$, т. е. $\rho(k)$ — собственная случайная величина. Если $\gamma > 1$ или $\pi_1 = 1$, то $\mathbf{P}\{\rho(k) = \infty\} = 1 - \delta^k > 0$.

Если $\gamma < 1$, то математическое ожидание случайной величины $\rho(k)$ равно

$$\mathbf{E}\{\rho(k)\} = k\sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{N_n = n - k\} = \frac{k}{1-\gamma}, \tag{18}$$

что следует из формулы (26) § 6. Если $\gamma = 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\mathbf{E}\{\rho(k)\} = \infty$. Интересно отметить, что из (18) следует

$$\mathbf{E}\{\rho(k)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < n - N_n \leqslant k\} \tag{19}$$

для $\gamma < 1$.

Если $|z| < 1$, то с помощью (16) можно получить

$$\mathbf{E}\{z^{\rho(k)}\} = [\delta(z)]^k = k\sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}\{N_n = n - k\}, \tag{20}$$

и $w = \delta(z)$ есть единственный корень уравнения $w = z\pi(w)$ в области $|w| < 1$.

Замечание. Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные величины, принимающие неотрицательные целые значения, то, сравнивая (6) и (7), получаем

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\} = \delta^k \tag{21}$$

при $k > 0$, где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(w) = w$.

§ 9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С каждой последовательностью случайных величин $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$, принимающих неотрицательные целые значения, связывается последовательность случайных величин $\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_r^*, \ldots$, также принимающих неотрицательные целые значения, следующим образом: пусть $N_0 = 0$ и $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots$ и аналогично $N_0^* = 0$ и $N_r^* = \nu_1^* + \ldots + \nu_r^*$ для $r = 1, 2, \ldots$. Предположим, что

$$N_n^* = \sup \{r\colon \quad N_r < n \quad \text{и} \quad r = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{1}$$

для $n = 1, 2 \ldots$. Тогда мы будем говорить, что $\{\nu_r^*\}$ — двойственная последовательность для $\{\nu_r\}$. Обратно, $\{\nu_r\}$ — двойственная последовательность для $\{\nu_r^*\}$.

Из очевидного соотношения

$$\{N_n^* < k\} \equiv \{N_k \geqslant n\} \tag{2}$$

для $n + k > 0$ вытекают тождества

$$\{N_r^* - r < k \text{ для } r = 1, \ldots, n\} \equiv$$
$$\equiv \{r - N_r \leqslant k \text{ для } r = 1, \ldots, n + k\} \tag{3}$$

и

$$\{r - N_r^* \leqslant k \text{ для } r = 1, \ldots, n\} \equiv$$
$$\equiv \{N_r - r < k \text{ для } r = 1, \ldots, n - k\}. \tag{4}$$

Если известны распределения максимумов для последовательностей $\{N_r - r\}$ и $\{r - N_r\}$, то с помощью тождеств (3) и (4) можно найти распределения максимумов двойственных последовательностей $\{N_r^* - r\}$ и $\{r - N_r^*\}$, и обратно.

§ 10. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим некоторые специфические последовательности случайных величин $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots\}$ и определим для них все величины, фигурирующие в условиях общих теорем, доказанных в этой главе.

1. Последовательность Бернулли. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\nu_r = 0\} = q$, $\mathbf{P}\{\nu_r = 2\} = p$, где $p + q = 1$ и $0 < p < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\{N_n = 2j\} = \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \tag{1}$$

при $j = 0, 1, \ldots, n$. Далее, $\pi(z) = q + pz^2$, и формула (8) § 7 принимает вид

$$Q(z) = \frac{Q_0 (q + pz^2)}{(1 - z)(q - pz)}, \tag{2}$$

откуда

$$Q = \frac{Q_0}{q} \frac{1 - (p/q)^k}{1 - p/q} \quad \text{при} \quad p \neq q, \ k \geqslant 1 \tag{3}$$

и

$$Q_k = 2Q_0 k \text{ при } p = q, \ k \geqslant 1. \tag{4}$$

Здесь $\gamma = 2p$. Если $\gamma \leqslant 1$, то $\delta = 1$, и если $\gamma > 1$, то $\delta = q/p$.

2. Последовательность Паскаля. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = pq^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $p + q = 1$, $0 < p < 1$. Тогда $\pi_j = pq^j$ для $j = 0, 1, \ldots$ и $\pi(z) = p/(1 - qz)$. Теперь

$$\mathbf{P}\{N_n = j\} = \binom{n+j-1}{n-1} p^n q^j \tag{5}$$

при $j = 0, 1, 2, \ldots$. Формула (8) § 7 принимает вид

$$Q(z) = \frac{Q_0 p}{(1-z)(p-qz)}, \tag{6}$$

откуда

$$Q_k = Q_0 \frac{1-(q/p)^{k+1}}{1-q/p} \text{ при } p \neq q, \ k \geqslant 0 \tag{7}$$

и

$$Q_k = Q_0 (k+1) \text{ при } p = q, \ k \geqslant 0. \tag{8}$$

Здесь $\gamma = p/q$. Если $\gamma \leqslant 1$, то $\delta = 1$, а если $\gamma > 1$, то $\delta = p/q$.

3. Последовательность Пуассона. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = e^{-a} \frac{a^j}{j!}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Тогда $\pi(z) = e^{-a(1-z)}$ и

$$\mathbf{P}\{N_n = j\} = e^{-an} \frac{(an)^j}{j!}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Формула (8) § 7 принимает вид

$$Q(z) = \frac{Q_0}{1 - e^{a(1-z)} z}, \tag{11}$$

откуда

$$Q_k = Q_0 \sum_{j=0}^{k} (-1)^j e^{a(k-j)} \frac{[a(k-j)]^j}{j!} \tag{12}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь $\gamma = a$. Если $\gamma \leqslant 1$, то $\delta = 1$, а если $\gamma > 1$, то δ — единственный корень уравнения $e^{-a(1-\delta)} = \delta$ в интервале $(0, 1)$.

4. Последовательность Пойа (см. Эггенбергер и Пойа [9]).Пусть в урне a белых и b черных шаров. Производится выборка по одному шару. После каждой выборки шар возвращается в урну вместе с другими c шарами того же цвета. Положим $\nu_r = h$, если r-й вытянутый шар белый, и $\nu_r = 0$, если r-й вытянутый шар черный; h — положительное целое число.

Здесь $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — переставляемые случайные величины. Для них $\mathbf{P}\{\nu_r = h\} = a/(a+b)$, $\mathbf{P}\{\nu_r = 0\} = b/(a+b)$ и $\mathbf{E}\{\nu_r\} = ah/(a+b)$ для $r = 1, 2, \ldots$. Далее,

$$\mathbf{P}\{N_n = jh\} = \frac{\binom{\alpha+j-1}{j}\binom{\beta+n-j-1}{n-j}}{\binom{\alpha+\beta+n-1}{n}}, \tag{13}$$

где $j = 0, 1, \ldots, \alpha = a/c$ и $\beta = b/c$. Кроме того,

$$\mathbf{P}\{N_n = jh,\ N_{n+m} = (j+k)h\} = \\ = \frac{\binom{\alpha+j-1}{j}\binom{\beta+n-j-1}{n-j}\binom{\alpha+j+k-1}{k}\binom{\beta+n-j+m-k-1}{m-k}}{\binom{\alpha+\beta+n-1}{n}\binom{\alpha+\beta+n+m-1}{m}} \tag{14}$$

для $j = 0, 1, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, m$.

Определим теперь такую случайную величину θ, что при данном значении θ случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Если предположить, что $\mathbf{P}\{\nu_2 = h\} = \theta$, $\mathbf{P}\{\nu_r = 0\} = 1-\theta$ и функция распределения для θ задается равенством

$$\mathbf{P}\{\theta \leqslant x\} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{15}$$

то $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ будет определенной выше последовательностью Пойа. Иначе говоря, последовательность Пойа можно представить как рандомизированную последовательность Бернулли.

Далее, $\mathbf{E}\{\nu_r \mid \theta\} = h\theta$ с вероятностью 1 и по теореме 1 § 5

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1, 2 \ldots \mid \theta = x\} = [1 - hx]^+, \tag{16}$$

а соответствующая безусловная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1, 2, \ldots\} = \int_0^{1/h} (1-hx)\,d\mathbf{P}\{\theta \leqslant x\}. \tag{17}$$

Так как

$$\mathbf{P}\{N_n = jh \mid \theta = x\} = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \tag{18}$$

для $j = 0, 1, \ldots, n$, то в силу теоремы 3 § 6

$$\mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k \mid \theta = x\} = \\ = 1 - (1-hx) \sum_{l \geqslant (k+1)/h} \binom{lh-k}{l} x^l (1-x)^{l(h-1)-k}, \tag{19}$$

если $0 \leqslant x < 1/h$. При $x \geqslant 1/h$ эта вероятность равна 0. Тогда безусловная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k\} = \mathbf{P}\{\theta < 1/h\} -$$
$$- \sum_{l \geqslant (k+1)/h} \binom{lh-k}{l} \int_0^{1/h} (1-hx)\, x^l (1-x)^{l(h-1)-k}\, d\mathbf{P}\{\theta \leqslant x\} \qquad (20)$$

и из формулы (6) § 8 следует, что равенство

$$\mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (r - N_r) < k\} = 1 - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\} \qquad (21)$$

справедливо для всех $k > 0$.

§ 11. ДРУГИЕ МЕТОДЫ

В этой главе мы нашли распределение случайной величины $\eta_n = \max(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n)$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ — либо переставляемые случайные величины, либо взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $-1, 0, 1, 2, \ldots$ или $1, 0, -1, -2, \ldots$.

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с произвольным распределением, то для нахождения распределения случайной величины $\eta_n = \max(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n)$ можно применить метод Полячека [16], Спарре-Андерсена [1], Спицера [17] и Феллера [10], Мы изложим этот метод, предварительно введя оператор $\mathbf{A}$ и изучив его основные свойства.

Пусть $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда

$$\gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\, dG(x) \qquad (1)$$

и этот интеграл сходится при $\operatorname{Re}(s) = 0$. Если дана функция $\gamma(s)$, то

$$\gamma^+(s) = \int_{-0}^{\infty} e^{-sx}\, dG(x) \qquad (2)$$

определяется однозначно при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Зададим оператор $\mathbf{A}$ равенством

$$\gamma^+(s) = \mathbf{A}\gamma(s). \qquad (3)$$

Этот оператор линейный и $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$. Пусть

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}F_n(x), \tag{4}$$

где $F_n(x)$ есть n-я свертка функции распределения $F(x)$ с собой; $F_0(x)=1$ для $x\geqslant 0$ и $F_0(x)=0$ для $x<0$. Если

$$\varphi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}\,dF(x), \tag{5}$$

при $\operatorname{Re}(s)=0$, то преобразование Лапласа — Стильтьеса функции распределения $G(x)$ равно

$$\gamma(s)=e^{a\varphi(s)} \tag{6}$$

при $\operatorname{Re}(s)=0$. Далее мы будем использовать следующие два утверждения, справедливость которых видна непосредственно.

(i) Если $\mathbf{A}\varphi(s)=\varphi(s)$, то $\mathbf{A}\gamma(s)=e^{a\varphi(s)}$.
(ii) Если $\mathbf{A}\varphi(s)=0$, то $\mathbf{A}\gamma(s)=1$.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых*

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\xi_r}\right\}=\varphi(s) \tag{7}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. *Пусть* $\eta_n=\max(0,\ \xi_1,\ \xi_1+\xi_2,\ \ldots,\ \xi_1+\ldots+\xi_n)$ *и*

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\eta_n}\right\}=\Phi_n(s) \tag{8}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. *Если* $0\leqslant w<1$ *и* $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n}\,\mathbf{A}\{[\varphi(s)]^n\}\right), \tag{9}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n=\exp(-\mathbf{A}\{\log[1-w\varphi(s)]\}). \tag{10}$$

Доказательство. Из определения величины η_n следует, что

$$\eta_n=\max(0,\ \xi_1+\eta^*_{n-1}), \tag{11}$$

где случайная величина η^*_{n-1} имеет то же распределение, что и η_{n-1}, и независима от ξ_1. Таким образом, $\Phi_0(s)\equiv 1$ и

$$\Phi_n(s)=\mathbf{A}\{\varphi(s)\,\Phi_{n-1}(s)\} \tag{12}$$

при $n=1, 2, \ldots$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. Решение этого рекуррентного соотношения задается производящей функцией (9). В самом деле, из (9) и (i) получаем

$$\mathbf{A}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n\right\}=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n}\,\mathbf{A}\{[\varphi(s)]^n\}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n, \tag{13}$$

а из (9) и (ii) —

$$\mathbf{A}\left\{[1-w\varphi(s)]\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n\right\}=$$

$$=\mathbf{A}\left\{\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n}[(\varphi(s))^n-A(\varphi(s))^n]\right)\right\}=1. \tag{14}$$

Два последние равенства дают

$$\mathbf{A}\left\{w\varphi(s)\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n-1 \tag{15}$$

при $0\leqslant w<1$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. Отсюда следует, что $\Phi_0(s)\equiv 1$ и функции $\Phi_n(s)$, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяют соотношению (12). Теорема доказана.

Из формулы (9) следует, что

$$\Phi_n(s)=\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\frac{[A(\varphi(s))]^{k_1}\,[\mathbf{A}(\varphi(s))^2]^{k_2}\ldots[\mathbf{A}(\varphi(s))^n]^{k_n}}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!\,1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}} \tag{16}$$

и распределение величины η_n можно вычислить по формуле обращения.

Теорему 1 в форме (10) доказал Полячек [16]. Но он ограничился случаем, когда $\varphi(\varepsilon)<\infty$ для некоторого $\varepsilon>0$, и задал оператор $\mathbf{A}$ равенством

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\frac{s}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{\varphi(z)}{z(s-z)}\,dz. \tag{17}$$

Заметим, что это равенство можно использовать также при $\varepsilon=0$, если определять интеграл в смысле главного значения Коши. Форма (9) теоремы 1 приводится у Спицера [17].

Во многих случаях производящую функцию (9) можно получить так. Пусть

$$1-w\varphi(s)=[\Phi^+(s,\ w)]^{\alpha}\,[\Phi^-(s,\ w)]^{\beta} \tag{18}$$

при $\operatorname{Re}(s)$, где $\alpha=\pm 1$, $\beta=\pm 1$, функция $\Phi^+(s,\ w)$ регулярна и отлична от нуля в области $\operatorname{Re}(s)>0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}(s)<0$, а $\Phi^-(s, w)$ регулярна и отлична от нуля в области $\operatorname{Re}(s)<0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}(s)\leqslant 0$. Тогда

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{\log\Phi^+(s, w)}{s}=0, \qquad \operatorname{Re}(s)>0,$$

и

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{\log\Phi^-(s, w)}{s}=0, \qquad \operatorname{Re}(s)<0.$$

Отсюда

$$\mathbf{A}\{\log[1-w\varphi(s)]\}=\alpha\log\Phi^+(s, w)+\beta\log\Phi^-(0, w) \tag{19}$$

и

$$(1-w)\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n=\left[\frac{\Phi^+(0, w)}{\Phi^+(s, w)}\right]^{\alpha} \tag{20}$$

при $0<w<1$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$.

Величина

$$\eta=\sup(0, \xi_1, \xi_1+\xi_2, \ldots, \xi_1+\ldots+\xi_r, \ldots) \tag{21}$$

будет собственной случайной величиной, если $\mathbf{E}\{\xi_1\}<0$. Если $\mathbf{E}\{\xi_1\}\geqslant 0$ и $\mathbf{P}\{\xi_1=0\}\neq 1$, то $\mathbf{P}\{\eta=\infty\}=1$ (см. дополнение). Если $\mathbf{E}\{\xi_1\}<0$, то при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$\Phi(s)=\mathbf{E}\{e^{s\eta}\} \tag{22}$$

существует и $\Phi(s)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(s)$. По теореме Абеля из формулы (9) вытекает, что

$$\Phi(s)=\lim_{w\to 1}(1-w)\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(s)\,w^n=\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1-\mathbf{A}(\varphi(s))^n]\right). \tag{23}$$

Этот результат принадлежит Тэклинду [27] и Спицеру [17]. В силу формулы (20)

$$\Phi(s)=\lim_{w\to 1}\left[\frac{\Phi^+(0, w)}{\Phi^+(s, w)}\right]^{\alpha}. \tag{24}$$

Очевидно, что η имеет то же распределение, что и $(0, \xi+\eta)$, где случайная величина ξ независима от η и $\mathbf{P}\{\xi\leqslant x\}=F(x)$ ($F(x)$ — общая функция распределения случайных величин ξ_r, $r=1, 2, \ldots$). Если $\mathbf{E}\{\xi_1\}<0$, то функция распределения $W(x)=\mathbf{P}\{\eta\leqslant x\}$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению типа Винера — Хопфа:

$$W(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}W(x-y)\,dF(y) & \text{для} \quad x\geqslant 0,\\ 0 & \text{для} \quad x<0.\end{cases} \tag{25}$$

§ 12. ЗАДАЧИ

1. При баллотировке кандидат A набирает a голосов, а кандидат B набирает b голосов, причем все возможные избирательные протоколы равновероятны. Предположим, что $\mu b < a + c$, причем μ и c — положительные целые числа. Обозначим через α_r и β_r числа голосов среди r зарегистрированных, поданных за A и B соответственно. Найти вероятность $P = \mathbf{P}\{\mu\beta_r < \alpha_r + c$ для $r = 1, 2, \ldots \ldots, a+b\}$.

2. Два игрока A и B разыгрывают между собой последовательность игр. В каждой игре, независимо от остальных, либо A выигрывает одну монету у B с вероятностью p, либо B выигрывает одну монету у A с вероятностью q $(p + q = 1,\ 0 < p < 1)$. Предположим, что первоначальный капитал игрока A составляет a монет, а у B имеется b монет. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не разорится. Найти вероятность P_A того, что разорится именно A.

3. Обдумать предыдущую задачу для случая, когда B обладает бесконечным капиталом. Найти распределение и математическое ожидание продолжительности $\rho(a)$ игры.

4. Два игрока разыгрывают между собой последовательность игр. Игры независимы друг от друга. Предположим, что в начале игры A имеет a монет, а B имеет b монет. В каждой игре либо A выигрывает k монет $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ у B с вероятностью pq^{k+1}, либо B выигрывает одну монету у A с вероятностью p $(p + q = 1,\ 0 < p < 1)$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не разорится. Найти вероятность P_A того, что разорится игрок A.

5. Рассмотреть предыдущую задачу в случае, когда B обладает бесконечным капиталом. Найти распределение и математическое ожидание продолжительности $\rho(a)$ игры.

6. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\nu_r = 0\} = q$, $\mathbf{P}\{\nu_r = 2\} = p$, где $p + q = 1$ и $0 < p < 1$. Найти распределение случайных величин $\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r)$ и $\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (r - N_r)$.

7. Урна содержит a белых и b черных шаров. Производится последовательная выборка. Каждый вынутый шар возвращается обратно вместе с c шарами того же цвета. Положим $\nu_r = 2$, если r-й вынутый шар оказался белым, и $\nu_r = 0$, если он оказался черным. Найти распределение случайных величин $\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r)$ и $\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (r - N_r)$.

8. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = e^{-a}a^j/j!$ для $j = 0, 1, 2, \ldots$. Записать тождества (26) § 6 и (21) § 8 для этого случая.

9. Доказать, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \binom{n-1}{j-1} \left(\frac{j}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-1} = 1$$

для $n = 1, 2, \ldots$.

10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ — последовательность взаимно независимых случайных величин с общей функцией распределения

$$\mathbf{P}\{\xi_r \leqslant x\} = \begin{cases} e^{-\lambda(\alpha - x)}, & \text{если } x \leqslant \alpha, \\ 1, & \text{если } x \geqslant \alpha, \end{cases}$$

где α — положительная константа. Найти функции распределения случайной величины $\eta_n = \max(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Andersen E. A., On the fluctuations of sums of random variables, I—II, *Math. Scand.*, **1** (1953), 263—285; 2 (1954), 195—223.
[2] Baxter G., An operator identity, *Pacific J. Math.*, 4 (1958), 649—663.
[3] Baxter G., An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 731—742.
[4] Bernoulli J., Ars conjectandi (Opus posth.), Basileae, 1713.
[5] Боровков А. А., Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых случайных величин, *Сиб. мат. журнал,* **3** (1962), 645—694.
[6] Darling D. A., The maximum of sums of stable random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 164—169.
[7] De Moivre A., De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus, *Philos. Trans. London*, **27** (1711), 213—264.
[8] Dwass M., A fluctuation theorem for cyclic random variables, *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 1450—1454.
[9] Eggenberger F., Pólya G., Über die Statistik verketteter Vorgänge, *Z. ang. Math. und Mech.*, **3** (1923), 279—289.
[10] Feller W., On combinatorial methods in fluctuation theory, Probability and Statistics, The Harald Cramér Volume, New York, 1959, pp. 75—91.
[11] Huygens C., Opera Varia C. Hugenius, Lugdunum Batavorum, 1724, pp. 723—744.
[12] Kac M., Pollard H., The distribution of the maximum of partial sums of independent random variables, *Canadian J. Math.*, **2** (1950), 375—384.
[13] Kemperman J. H. B., The passage problem for a stationary Markov chain, The University of Chicago Press, 1961.
[14] Kingman J. F. C., Spitzer's identity and its use in probability theory, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 309—316.
[15] Kinney J. R., First passage times of a generalized random walk, *Ann. Math. Statist.*, **32** (1961), 235—243.
[16] Pollaczek F., Fonctions caractéristiques de certaines répartitions définies au moyen de la notion d'ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 2334—2336.
[17] Spitzer F., A combinatorial lemma and its application to probability theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 323—339. (Русский перевод: Спицер Ф., Комбинаторная лемма и ее приложения к теории вероятностей, сб. *Математика*, **8 : 4** (1964), 135—160.)
[18] Spitzer F., A Tauberian theorem and its probability interpretation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 150—169.
[19] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, изд-во «Мир», М., 1969.
[20] Takács L., The probability law of the busy period for two types of queuing processes, *Operations Res.*, **9** (1961), 402—407.
[21] Takács L., Combinatorial methods in the theory of queues, *Rev. Inst. Internat. Statist.*, **32** (1964), 207—219.
[22] Takács L., Combinatorial methods in the theory of dams, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 69—76.
[23] Takács L., A combinatorial method in the theory of Markov chains, *J. Math. Anal. Appl.*, **9** (1964), 153—161.
[24] Takács L., Application of ballot theorems in the theory of queues, Proceedings of the Symposium on Congestion Theory, University of North Carolina Press, 1965, pp. 337—398.
[25] Takács L., From ballot theorems to the theory of queues, Columbia University Report CU-41-64-Nonr-266 (59), MS, March, 1964. (Резюме: Post Office Telecommunications Journal, Special Issue, Report of the Proceedings of the Fourth International Teletraffic Congress, London 1964, pp. 25—26.)
[26] Tanner J. C., A derivation of the Borel distribution, *Biometrika*, **48** (1961), 222—224.

[27] Täcklind S., Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables, *Skand. Akt.*, **25** (1942), 1—42.
[28] Vogel W., Die kombinatorische Lösung einer Operator-Gleichung, *Z. Wahr.*, **2** (1963), 122—134.
[29] Wendel J. G., Spitzer's formula: a short proof, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 905—908. (Русский перевод: Вендель Дж., Краткое доказательство формулы Спицера, сб. *Математика*, **8 : 4** (1964), 151—154.)
[30] Wendel J. G., Brief proof of a theorem of Baxter, *Math. Scand.*, **11** (1962), 107—108.

Глава 3

ФЛУКТУАЦИИ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 13. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ЦИКЛИЧЕСКИ ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Мы будем говорить, что случайный процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ *имеет циклически переставляемые приращения*, если для всех $n = 2, 3, \ldots$ случайные величины

$$\chi\left(\frac{rt}{n}\right) - \chi\left(\frac{rt-t}{n}\right), \qquad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

циклически переставляемы, т. е. все $n\,(n = 2, 3, \ldots)$ их циклических перестановок имеют одинаковое совместное распределение.

Если для всех $n = 2, 3, \ldots$ случайные величины (1) переставляемы или взаимно независимы и одинаково распределены, то они циклически переставляемы.

Докажем основную теорему для процессов с циклически переставляемыми приращениями.

Теорема 1. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ — вещественный сепарабельный случайный процесс с циклически переставляемыми приращениями, причем почти все его выборочные функции являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u = 0$, то*

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t \mid \chi(t) = y\} = \begin{cases} (t-y)/t, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant t, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

где условная вероятность определена с точностью до эквивалентности.

Доказательство. Доопределим процесс $\chi(u)$ при $0 \leqslant u < \infty$, положив $\chi(u+t) = \chi(u) + \chi(t)$ при $u \geqslant 0$. Пусть

$$\delta(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi(v) - \chi(u) \leqslant v - u \text{ для } v \geqslant u, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Случайные величины $\delta(u)$ одинаково распределены для всех $u \geqslant 0$. Очевидно, что $\delta(0)$ есть индикатор события $\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}$.

Таким образом, равенство

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t \mid \chi(t)\} = \mathbf{E}\{\delta(0) \mid \chi(t)\} =$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{E}\{\delta(u) \mid \chi(t)\} du = \mathbf{E}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \delta(u)\, du \mid \chi(t)\right\} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \frac{\chi(t)}{t}, & \text{если } 0 \leqslant \chi(t) \leqslant t, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{4}$$

выполняется с вероятностью 1, так как в силу теоремы 5 § 2

$$\int_0^t \delta(u)\, du = \begin{cases} t - \chi(t), & \text{если } 0 \leqslant \chi(t) \leqslant t, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{5}$$

для почти всех выборочных функций. Доказательство закончено.

Заметим, что левую часть формулы (2) можно заменить выражением $\mathbf{P}\{\chi(u) < u$ для $0 < u \leqslant t \mid \chi(t) = y\}$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\} = \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{\chi(t)}{t}\right]^+\right\}, \tag{6}$$

где $[x]^+$ означает положительную часть x.

§ 14. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Случайный процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ называется *процессом с переставляемыми приращениями*, если для всех $n = 2, 3, \ldots$ и для любого конечного $t \in (0, T]$ случайные величины

$$\chi\left(\frac{rt}{n}\right) - \chi\left(\frac{rt-t}{n}\right), \qquad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

переставляемы, т. е. все $n!$ их перестановок имеют одинаковое совместное распределение.

Если, в частности, для всех $n = 2, 3, \ldots$ и для любого конечного $t \in (0, T]$ случайные величины (1) взаимно независимы и одинаково распределены, то случайный процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ называется *процессом со стационарными независимыми приращениями*.

Если $\mathbf{P}\{\chi(0) = 0\} = 1$, то в обоих случаях случайный процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ имеет циклически переставляемые приращения для любого конечного $t \in (0, T]$.

Везде далее в данной главе мы будем рассматривать вещественные процессы $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ либо с переставляемыми, либо со стационарными независимыми приращениями, причем почти все выборочные функции этих процессов будут неубывающими ступенчатыми функциями, равными 0 при $u=0$. Интервал изменения параметра будет либо конечным, либо бесконечным. Тривиальный случай, когда $\mathbf{P}\{\chi(u)=0\}=1$ для $u>0$, исключается.

Сначала мы остановимся на некоторых основных свойствах рассматриваемых процессов $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$.

Для обоих типов процессов

$$\mathbf{E}\{\chi(u)\}=\rho u, \qquad 0 \leqslant u \leqslant T, \tag{2}$$

где ρ — неотрицательное число (возможно, равное ∞). Если $\rho=0$, то $\mathbf{P}\{\chi(u)=0\}=1$ для $0 \leqslant u \leqslant T$, но этот случай мы условились исключать.

Пусть теперь $T=\infty$. Если процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ имеет переставляемые приращения, то существует такая функция распределения $G(x)$, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi(t)}{t} \leqslant x\right\} = G(x). \tag{3}$$

Если, в частности, $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, $\mathbf{E}\{\chi(u)\}=\rho u$, то $G(x)=0$ при $x<\rho$ и $G(x)=1$ при $x \geqslant \rho$, т. е. в этом случае

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\chi(t)}{t} = \rho \tag{4}$$

по вероятности. Это утверждение составляет слабый закон больших чисел.

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 1. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — вещественный случайный сепарабельный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, равными 0 при $u=0$, то*

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u < \infty\} = \begin{cases} 1-\rho, & \text{если } \rho < 1, \\ 0, & \text{если } \rho \geqslant 1. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. По теореме непрерывности для вероятностей

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u < \infty\} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}. \tag{6}$$

Для любого конечного t процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ имеет циклически переставляемые приращения, и, следовательно, можно применить теорему 1 § 13. Формула (6) § 13 дает

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u < \infty\} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{\chi(t)}{t}\right]^+\right\}. \tag{7}$$

С помощью равенства (4) получаем, что $\lim\limits_{t \to \infty}[1-\chi(t)/t]^+ = [1-\rho]^+$ по вероятности. Так как величины $[1-\chi(t)/t]^+$ ограничены в совокупности, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{\chi(t)}{t}\right]^+\right\} = [1-\rho]^+. \tag{8}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — вещественный сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, равными 0 при $u = 0$, то*

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u \quad \text{для } 0 \leqslant u < \infty\} = \int_0^1 (1-x)\,dG(x), \tag{9}$$

где функция $G(x)$ определена формулой (3).

Доказательство. Здесь равенство (7) также выполняется. Так как величины $[(t-\chi(t))/t]^+$ ограничены в совокупности, то из формулы (3) следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\left\{\left[1 - \frac{\chi(t)}{t}\right]^+\right\} = \int_0^1 (1-x)\,dG(x), \tag{10}$$

а это эквивалентно (9).

Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — вещественный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, равными 0 при $u = 0$, то для всех $u \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\} = e^{-u\Phi(s)}, \tag{11}$$

где

$$\Phi(s) = \int_{+0}^{\infty} (1-e^{-sx})\,dN(x), \tag{12}$$

$N(x)$, $0 < x < \infty$, — неубывающая вещественная функция, для которой $\lim\limits_{x \to \infty} N(x) = 0$ и

$$\int_{+0}^{1} x\,dN(x) < \infty. \tag{13}$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $N(x)$ непрерывна справа. Тогда на интервале $(0, t)$ среднее число скачков, превышающих x, равно $t[N(\infty)-N(x)]$. Положим $\lambda = N(\infty)-N(0) = -N(0)$ (возможно, $\lambda=\infty$). Тогда $\lambda = \lim\limits_{s\to\infty} \Phi(s)$, причем случай $\lambda=0$ исключается, так как в этом случае $\mathbf{P}\{\chi(u)=0\}=1$, $u\geqslant 0$. Среднее число скачков на интервале $(0, t)$ равно λt, причем $\mathbf{P}\{\chi(t)=0\}=e^{-\lambda t}$ для $t\geqslant 0$.

Если λ — конечное положительное число, то

$$H(x)=\frac{N(0)-N(x)}{N(0)} \tag{14}$$

является функцией распределения неотрицательной случайной величины, причем

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x)=1-\frac{\Phi(s)}{\lambda} \tag{15}$$

для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$.

Положим

$$\rho=\int_{+0}^\infty x\,dN(x). \tag{16}$$

Если $\operatorname{Re}(s)>0$, то производная $\Phi'(s)$ существует и равна

$$\Phi'(s)=\int_{+0}^\infty e^{-sx}x\,dN(x). \tag{17}$$

При этом $\rho=\lim\limits_{s\to+0}\Phi'(s)$ и, кроме того,

$$\mathbf{E}\{\chi(t)\}=\rho t \tag{18}$$

для всех $t\geqslant 0$.

Если ρ — конечное положительное число, то

$$H^*(x)=\frac{\int_0^x N(y)\,dy}{\int_0^\infty N(y)\,dy}, \quad 0\leqslant x<\infty, \tag{19}$$

является функцией распределения неотрицательной случайной величины, причем

$$\psi^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH^*(x)=\frac{\Phi(x)}{\rho s} \tag{20}$$

при $\operatorname{Re}(s)>0$. Если и λ и ρ конечны и положительны, то

$$\psi^*(s)=\frac{\lambda[1-\psi(s)]}{\rho s} \tag{21}$$

при $\operatorname{Re}(s)>0$.

Везде в этой главе через $H_n(x)$ мы будем обозначать n-ю свертку функции $H(x)$ с собой; при этом $H_0(x)=1$, если $x\geqslant 0$, и $H_0(x)=0$, если $x<0$. Аналогично через $H_n^*(x)$ будем обозначать n-ю свертку функции $H^*(x)$, причем $H_0^*(x)=1$ для $x\geqslant 0$ и $H_0^*(x)=0$ для $x<0$.

Заметим также, что

$$\operatorname{Var}\{\chi(t)\}=\sigma^2(t), \tag{22}$$

где

$$\sigma^2=\int\limits_{+0}^{\infty} x^2\,dN(x)=-\Phi''(+0). \tag{23}$$

В заключение докажем три теоремы относительно функции $\Phi(s)$, определенной равенством (12).

Теорема 3. *Если* $\operatorname{Re}(s)>0$, *то*

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{\Phi(s)}{s}=0. \tag{24}$$

Доказательство. Если $\operatorname{Re}(s)>0$, то $|1-e^{-sx}|\leqslant|s|x$ для $x\geqslant 0$ и, кроме того, $|1-e^{sx}|\leqslant 2$ для $x\geqslant 0$. Тогда в силу (12) при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$|\Phi(s)|\leqslant|s|\int\limits_0^{\varepsilon} x\,dN(x)-2N(\varepsilon) \tag{25}$$

для любого $\varepsilon>0$, а в силу (25)

$$\lim_{|s|\to\infty}\left|\frac{\Phi(s)}{s}\right|\leqslant\int\limits_0^{\varepsilon} x\,dN(x) \tag{26}$$

для любого $\varepsilon>0$. Из (13) следует, что при $\varepsilon\to 0$ правая часть равенства (26) стремится к 0, и теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $s=\omega$ — *наибольший неотрицательный корень уравнения*

$$\Phi(s)=s. \tag{27}$$

Если $\rho\leqslant 1$, *то* $\omega=0$, *а если* $\rho>1$, *то* $\omega>0$. *Уравнение* (27) *не имеет других корней в области* $\operatorname{Re}(s)>\omega$.

Доказательство. В интервале $[0,\infty)$ функция $\Phi(s)$ монотонно возрастает, а $\Phi'(s)$ монотонно убывает, причем $\Phi(0)=0$,

$\Phi'(+0)=\rho$ и $\lim\limits_{s\to\infty}\Phi(s)/s=0$. Если $\rho\leqslant 1$, то $s=0$ — единственный корень уравнения $\Phi(s)=s$ в интервале $[0, \infty)$. Если $\rho>1$, то уравнение $\Phi(s)=s$ при $s\in[0, \infty)$ имеет точно два корня: $s=0$ и $s=\omega$, где $0<\omega<\infty$. Это доказывает первую часть теоремы. Для доказательства второй части заметим, что всегда $|\Phi'(\omega)|\leqslant 1$ и, следовательно, $|\Phi'(s)|<|\Phi'(\omega)|\leqslant 1$ при $\operatorname{Re}(s)>\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re}(s)>\omega$

$$|\Phi(s)-\Phi(\omega)|=\left|\int\limits_{\omega}^{s}\Phi'(z)\,dz\right|<|s-\omega|, \tag{28}$$

откуда следует, что равенство $\Phi(s)=s$ при $\operatorname{Re}(s)>\omega$ невозможно.

Теорема 5. *Если z — вещественное положительное число, то уравнение*

$$\Phi(s)=s-z \tag{29}$$

имеет точно один неотрицательный вещественный корень $s=\omega(z)$, причем $\lim\limits_{z\to+0}\omega(z)=\omega$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$.

Доказательство. Так как $\Phi(s)$ монотонно возрастает, а $\Phi'(s)$ монотонно убывает в интервале $(0, \infty)$ и $\lim\limits_{s\to\infty}\Phi(s)/s=0$, то уравнение (29) имеет точно один корень $s=\omega(z)$ в интервале $(0, \infty)$. Очевидно, что $\omega(z)$ — неубывающая функция от z и $\omega(z)>\omega$ при всех $z>0$. Таким образом, $\lim\limits_{z\to+0}\omega(z)=\omega^*$ существует и $\Phi(\omega^*)=\omega^*$. При этом $\omega^*=\omega$, и доказательство закончено.

Заметим, что если z — комплексное число с $\operatorname{Re}(z)>0$, то уравнение (29) имеет точно один корень $s=\omega(z)$ в области $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$.

В этой главе мы будем часто использовать интегралы типа

$$\int\limits_{a}^{b} g(u)\,\mathbf{P}\{u+x<\chi(u)<u+x+du\} \tag{30}$$

и сокращенно обозначать их

$$\int\limits_{a}^{b} g(u)\,d_u\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u+x\}. \tag{31}$$

Если случайная величина $\chi(u)$ имеет плотность, то интеграл (30) приводится к виду

$$\int\limits_{a}^{b} g(u)\,\frac{\partial\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u+x\}}{\partial x}\,du. \tag{32}$$

Если $\chi(u)$ — дискретная случайная величина, то интеграл (30) можно записать в виде

$$\sum_{a \leqslant u \leqslant b} g(u)\, \mathbf{P}\{\chi(u) = u + x\}. \tag{33}$$

§ 15. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ЗНАЧЕНИЙ ПРОЦЕССА $\{\chi(u) - u\}$

Сначала мы рассмотрим случай, когда $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, а затем будем изучать процессы со стационарными независимыми приращениями.

В дальнейшем мы будем писать $d_x\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{x < \chi(u) < x + dx\}$ независимо от того, зависит u от x или нет.

Теорема 1. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ — сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u = 0$, то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < t} [\chi(u) - u] \leqslant x\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t + x\} - \iint\limits_{0 < y \leqslant z \leqslant t} \left(\frac{t-z}{t-y}\right) d_y d_z \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x,\ \chi(t) \leqslant z + x\} \tag{1}$$

для всех x и $t \in (0, T]$.

Доказательство. Мы докажем чуть более общее утверждение, из которого будет следовать формула (1): если $c \geqslant 0$, то

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u + x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ и } \chi(t) \leqslant t + x - c\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t + x - c\} -$$
$$- \iint\limits_{0 < y \leqslant z \leqslant t - c} \left(\frac{t-z}{t-y}\right) d_y d_z \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x,\ \chi(t) \leqslant z + x\} \tag{2}$$

для всех x и $t \in (0, T]$. Достаточно доказать, что вычитаемое в правой части этого равенства есть вероятность того, что $\chi(t) \leqslant t + x - c$ и $\chi(u) > u + x$ для некоторого $u \in (0, t]$. Положим $y = \sup\{u\colon \chi(u) > u + x \text{ и } 0 \leqslant u \leqslant t - c\}$. Тогда $\chi(y) = y + x$ и $\chi(u) \leqslant u + x$ для $y \leqslant u \leqslant t - c$, что эквивалентно неравенству $\chi(u) + \chi(y) \leqslant u - y$ для $y \leqslant u \leqslant t - c$. При условии, что $\chi(y) = y + x$ и $\chi(t) = z + x$, вероятность того, что $\chi(u) - \chi(y) \leqslant u - y$ для $y \leqslant u \leqslant t - c$, равна $(t - z)/(t - y)$ при $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant t - c$. Это следует из теоремы 1 § 13, если применить ее к процессу $\chi(y + u) - \chi(y)$, $0 \leqslant u \leqslant t - y$. Если проинтегрировать $(t - z)/(t - y)$ по мере $d_y d_z \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x,\ \chi(t) \leqslant z + x\} = \mathbf{P}\{y + x < \chi(y) < y + x + dy,\ z - y < \chi(t) - \chi(y) < z - y + dz\}$ в области $0 < y \leqslant z \leqslant t - c$, то получится как раз вычитаемое в правой части равенства (2). Формула (2) доказана. При $c=0$ из нее следует формула (1).

Если $x=0$, равенство (2) сводится к равенству

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } \chi(t)\leqslant t-c\}=$$
$$=\int_0^{t-c}\left(1-\frac{y}{t}\right)d_y\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant y\}, \qquad (3)$$

где $0\leqslant c\leqslant t$. Это становится очевидным, если применить формулу (2) § 13.

Теорема 2. *Если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant T\}$ — сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u=0$, то для всех $t\in(0,\ T]$*

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\}=\int_0^t\frac{1}{y}\mathbf{E}\left\{[\chi(y)-y]^+\right\}dy. \qquad (4)$$

Доказательство. Формула (4) следует из (1), поскольку

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\}=\int_0^\infty\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]>x\}\,dx. \qquad (5)$$

Если ρ конечно, то обе части формулы (4) также конечны, а если $\rho=\infty$, то они бесконечны.

Если, в частности, $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant T\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, то в формулах (1) и (2) можно заменить $d_yd_z\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x,\ \chi(t)\leqslant z+x\}$ на $\mathbf{P}\{y+x<\chi(y)<y+x+dy\}\,\mathbf{P}\{z-y<\chi(t)-\chi(y)<z-y+dz\}$. Тогда формула (1) принимает вид

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}-\int_{+0}^t\mathbf{E}\left\{\left[1-\frac{\chi(t-y)}{t-y}\right]^+\right\}d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}, \qquad (6)$$

или, если ввести обозначение

$$W(t,\ x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}, \qquad (7)$$

вид

$$W(t,\ x)=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}-\int_{+0}^t W(t-y,\ 0)\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}. \qquad (8)$$

Применяя преобразование Лапласа — Стильтьеса к этому уравнению, можно найти $W(t, x)$. Положим

$$\Omega(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx} d_x W(t, x), \tag{9}$$

причем интеграл сходится при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Если

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\} = e^{-u\Phi(s)} \tag{10}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, то преобразование Лапласа — Стильтьеса уравнения (8) можно переписать в виде

$$\Omega(t, s) = e^{[s-\Phi(s)]t} - s\int_0^t W(t-y, 0)\, e^{[s-\Phi(s)]y}\, dy. \tag{11}$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-zt}\Omega(t, s)\, dt = \frac{1}{z-s+\Phi(s)}\left[1 - s\int_0^\infty e^{-zt}W(t, 0)\, dt\right] \tag{12}$$

для $\operatorname{Re}(z) > 0$. Если $\operatorname{Re}(z) > 0$, то левая часть равенства (12) ограничена в области $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. В этой области знаменатель правой части имеет один и только один корень $s = \omega(z)$, который должен быть также и корнем числителя, т. е.

$$\int_0^\infty e^{-zt}W(t, 0)\, dt = \frac{1}{\omega(z)} \tag{13}$$

для $\operatorname{Re}(z) > 0$, где $s = \omega(z)$ — единственный корень уравнения $\Phi(s) = s - z$ в области $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. В соответствии с этим

$$\int_0^\infty e^{-zt}\Omega(t, s)\, dt = \frac{1}{z-s+\Phi(s)}\left(1 - \frac{s}{\omega(z)}\right), \tag{14}$$

если $\operatorname{Re}(z) > 0$ и $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. И, наконец, $W(t, x)$ находим по формуле обращения.

Теорема 3. *Предположим, что $\{\chi(u), 0 \leqslant u \leqslant \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u = 0$. Если $\rho > 1$, то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [\chi(u) - u] \leqslant x\} = 1 - (1-\rho)\int_{+0}^\infty dy\,\mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x\} \tag{15}$$

для всех x. Если $\rho \geqslant 1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}=0 \tag{16}$$

для всех x.

Доказательство. По теореме непрерывности для вероятностей

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}, \tag{17}$$

правую часть можно получить по формуле (6).

Рассмотрим сначала случай $\rho<1$. Из слабого закона больших чисел следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\chi(t)}{t}=\rho$$

по вероятности. Отсюда $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\chi(t)<t+x\}=1$ для всех x и

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left\{\left[1-\frac{\chi(t-y)}{t-y}\right]^+\right\}=1-\rho \tag{18}$$

для любого $y\geqslant 0$. Покажем, что

$$\int\limits_{+0}^{\infty}d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}\leqslant\frac{1}{1-\rho} \tag{19}$$

для всех x. Если в формуле (6) перейти к пределу при $t\to\infty$, то получится (15). Докажем (19). Если принять во внимание, что правая часть формулы (6) неотрицательна, $\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}\leqslant 1$ и

$$\mathbf{E}\left\{\left[1-\frac{\chi(t-y)}{t-y}\right]^+\right\}\geqslant\mathbf{E}\left\{1-\frac{\chi(t-y)}{t-y}\right\}=1-\rho, \tag{20}$$

то сразу получим неравенство

$$(1-\rho)\int\limits_{+0}^{t}d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}\leqslant 1, \tag{21}$$

справедливое для всех $t\geqslant 0$ и x. Формула (19) доказана.

Пусть теперь $\rho>1$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}=0$ для всех x и неравенство

$$0\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}\leqslant\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\} \tag{22}$$

влечет (16).

Наконец, если $\rho=1$, то соотношение (5) § 14 дает

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant 0\}=0, \tag{23}$$

откуда при $x \leqslant 0$ следует (16). При $x > 0$ можно найти такое y, что $0 < x < y$ и $\mathbf{P}\{\chi(y) < y - x\} > 0$. При этом (16) вытекает из очевидного неравенства

$$\mathbf{P}\{\chi(y) < y - x\} \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \infty} [\chi(u) - u] \leqslant x\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [\chi(u) - u] \leqslant 0\} = 0. \tag{24}$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Если процесс $\{\chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ имеет переставляемые приращения, то его можно представить как процесс с условно стационарными и независимыми приращениями. Тогда условное распределение величины $\sup\limits_{0 \leqslant u < \infty} [\chi(u) - u]$ можно найти из соотношения (15), после чего безусловное распределение получается, если взять математическое ожидание.

Теорема 4. *Если $\{\chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими вещественными функциями, обращающимися в 0 при $u = 0$, то при $\rho < 1$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [\chi(u) - u] \leqslant x\} = W(x), \tag{25}$$

где $W(x) = 0$ для $x < 0$, $W(0) = 1 - \rho$ и

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)} \tag{26}$$

при $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Доказательство. Согласно формуле (5) § 14, $W(0) = 1 - \rho$. Далее, очевидно, что $W(x) = 0$ при $x < 0$. Найдем $W(x)$ при $x > 0$. Если $0 < y$ и $0 \leqslant y + x$, то

$$W(x) = \int_0^{y+x} W(y + x - z)\, d_z\mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant z\} - W(0) \int_0^{y} d_z\mathbf{P}\{\chi(z) \leqslant z + x\}. \tag{27}$$

Первый интеграл в правой части равенства (27) есть вероятность того, что $\chi(y) = z$ $(0 \leqslant z \leqslant y + x)$ и $\chi(v) - v \leqslant x$ для $y \leqslant v < \infty$. Второй интеграл есть вероятность того, что неравенство $\chi(v) - v \leqslant x$ нарушается для некоторого v из интервала $(0, y)$, но $\chi(v) - v \leqslant x$ при $y \leqslant v < \infty$. Если $z = \sup\{v\colon \chi(v) - v > x$ и $0 \leqslant v < y\}$, то $\chi(z) - z = x$ и событие $\{\chi(v) - v \leqslant x$ для $z \leqslant v < \infty\}$ имеет ту же вероятность, что и событие $\{\chi(v) - \chi(z) \leqslant v - z$ для $0 \leqslant v - z < \infty\}$, а именно $W(0)$. Итак, мы нашли интеграл в правой части равенства (27). При $-y \leqslant x < 0$ правая часть этого равенства равна 0, ибо она представляет собой вероятность невозможного события.

Положим

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x) \tag{28}$$

для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$ и возьмем преобразование Лапласа — Стильтьеса от обеих частей равенства (27). Получим

$$\Omega(s)=e^{y[s-\Phi(s)]}\Omega(s)-W(0)\,s\int_0^y e^{z[s-\Phi(s)]}\,dz \tag{29}$$

для всех $y>0$. Так как

$$\int_0^y e^{z[s-\Phi(s)]}\,dz=\frac{e^{y[s-\Phi(s)]}-1}{s-\Phi(s)} \tag{30}$$

для $\operatorname{Re}(s)>0$, то

$$\Omega(s)=\frac{W(0)\,s}{s-\Phi(s)} \tag{31}$$

для $\operatorname{Re}(s)>0$, и формула (26) доказана.

Мы определили $W(x)$ как функцию, непрерывную справа. Таким образом, $W(x)$ однозначно определяется своим преобразованием Лапласа — Стильтьеса (26). Поскольку $W(x)$ — неубывающая функция от x и $0\leqslant W(x)\leqslant 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} W(x)$ существует и по теореме Абеля (см. дополнение)

$$\lim_{x\to\infty} W(x)=\lim_{s\to+0}\Omega(s)=\frac{W(0)}{1-\Phi'(+0)}=\frac{W(0)}{1-\rho}=1. \tag{32}$$

В соответствии с этим $\sup\limits_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]$ при $\rho<1$ является собственной случайной величиной, конечной с вероятностью 1. Используя слабый закон больших чисел, мы показали, что $W(0)=1-\rho$, и отсюда по теореме Абеля заключили, что $\lim\limits_{x\to\infty} W(x)=1$. Сильный закон больших чисел позволяет непосредственно доказать последнее соотношение, а по теореме Абеля из него следует, что $W(0)=1-\rho$.

Так как $\rho<1$, то $\Phi(s)=\rho s\psi^*(s)$, где $\psi^*(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса функции распределения, определенной равенством (19) § 14. Согласно (26),

$$\Omega(s)=\frac{1-\rho}{1-\rho\psi^*(s)}=(1-\rho)\sum_{n=0}^\infty \rho^n[\psi^*(s)]^n \tag{33}$$

для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, и формула обращения дает

$$W(x)=(1-\rho)\sum_{n=0}^\infty \rho^n H_n^*(x), \tag{34}$$

где $H_n^*(x)$ есть n-я свертка функции $H^*(x)$; $H_0^*(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $H_0^*(x) = 0$ при $x < 0$.

Функция $W(x)$ является единственным решением интегрального уравнения

$$W(x) = (1 - \rho) H_0^*(x) + \rho H^*(x) * W(x). \tag{35}$$

Интересно заметить, что если уравнение $\Phi(s) = s$ имеет корень $s = -\alpha$ в области $\operatorname{Re}(s) < 0$ и не имеет других корней в области $-\alpha \leqslant \operatorname{Re}(s) < 0$, то

$$1 - W(x) \sim \frac{1 - \rho}{\Phi'(-\alpha) - 1} e^{-\alpha x} \tag{36}$$

при $x \to \infty$.

Замечание. Сравнивая формулы (15) и (25), получаем интересное тождество: если $\rho < 1$, то

$$\int_{+0}^{\infty} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x\} = \frac{1 - W(x)}{1 - \rho}, \tag{37}$$

где $W(x) = 0$ при $x < 0$, $W(0) = 1 - \rho$, а $W(x)$ для $x > 0$ задается формулами (26) или (34).

§ 16. КОНТИНУАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ О РАЗОРЕНИИ

В § 7 мы доказали дискретное обобщение классической теоремы о разорении. Здесь докажем непрерывный аналог этого утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u = 0$. Для $c \geqslant 0$ положим*

$$\theta(c) = \inf\{u\colon\ \chi(u) \leqslant u - c \ \text{ и } \ 0 \leqslant u < \infty\}$$

и $\theta(c) = \infty$, если $\chi(u) > u - c$ для всех $u \geqslant 0$. Если $0 \leqslant x \leqslant y$, то

$$\mathbf{P}\{\chi(u) - u \leqslant x \ \text{ для } \ 0 \leqslant u \leqslant \theta(y - x)\} = \frac{W(x)}{W(y)} \tag{1}$$

и

$$\Omega(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dW(x) \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)} \tag{2}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s) = s$. Если $\rho \leqslant 1$, то $\omega = 0$, а если $\rho > 1$, то $\omega > 0$. Здесь $W(0) > 0$ можно выбрать произвольно.

Доказательство. Пусть при $0 \leqslant x \leqslant y < \infty$

$$Q(x, y) = \mathbf{P}\{\chi(u) - u \leqslant x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant \theta(y-x)\} \tag{3}$$

и $Q(x, y) = 0$, если $x < 0 \leqslant y < \infty$. Тогда при $0 \leqslant x \leqslant z \leqslant y$

$$Q(x, y) = Q(x, z)\, Q(z, y). \tag{4}$$

В самом деле, при $0 \leqslant u \leqslant \theta(y-x)$ неравенство $\chi(u) - u \leqslant x$ верно тогда и только тогда, когда $\chi(u) - u \leqslant x$ при $0 \leqslant u \leqslant \theta(z-x)$ и $\chi(u) - u \leqslant x$ при $\theta(z-x) \leqslant u \leqslant \theta(y-x)$. Так как $\chi(u) - u = x - z$ при $u = \theta(z-x)$, то второе из этих событий независимо от первого и имеет ту же вероятность, что и событие $\{\chi(u) - u \leqslant z$ для $0 \leqslant u \leqslant \theta(y-z)\}$. Это доказывает (4).

Легко видеть, что $Q(x, y) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant y$. Из (4) следует, что $Q(x, y) \leqslant Q(x, z)$, если $0 \leqslant x \leqslant z \leqslant y$, и $Q(x, y) \leqslant Q(z, y)$, если $0 \leqslant x \leqslant z \leqslant y$. Таким образом, из (4) следует, что

$$Q(x, y) = \frac{W(x)}{W(y)}, \tag{5}$$

где $W(0)$ — произвольное положительное число, а $W(x)$ — неубывающая функция от x. Если $W(x) = 0$ для $x < 0$, то (5) выполняется также при $x < 0 \leqslant y < \infty$.

Если $0 < u$ и $0 \leqslant u + x < y$, то

$$Q(x, y) = \int_0^{u+x} Q(u + x - z, y)\, d_z \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant z\} - \\ - Q(0, y) \int_0^u d_z \mathbf{P}\{\chi(z) \leqslant z + x\}. \tag{6}$$

Первый интеграл в правой части равенства (6) представляет собой вероятность того, что $\chi(u) = z$ $(0 \leqslant z \leqslant u + x)$ и $\chi(v) - v \leqslant x$ для $u \leqslant v \leqslant \theta(y-z)$. Второй интеграл есть вероятность того, что неравенство $\chi(v) - v \leqslant x$ нарушается для некоторого v в интервале $(0, u)$, но $\chi(v) - v \leqslant x$ при $u \leqslant v \leqslant \theta(y, x)$. Если $z = \sup\{v : \chi(v) - v > x$ и $0 \leqslant v \leqslant u\}$, то $\chi(z) - z = x$, и событие $\{\chi(v) - v \leqslant x$ для $z \leqslant v \leqslant \theta(y-x)\}$ имеет ту же вероятность, что и событие $\{\chi(v) \leqslant v$ для $0 \leqslant v \leqslant \theta(y)\}$, а именно $Q(0, y)$. Таким образом, мы получили второй интеграл в правой части равенства (6). Если $-u \leqslant x < 0$ в формуле (6), то ее правая часть равна 0, ибо это есть вероятность невозможного события.

Если предположить, что $y > u + x \geqslant 0$, и умножить обе части равенства (6) на $W(y)$, то получится

$$W(x) = \int_0^{u+x} W(u + x - z)\, d_z \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant z\} - W(0) \int_0^u d_z \mathbf{P}\{\chi(z) \leqslant z + x\} \tag{7}$$

для $0<u$ и $0\leqslant u+x$. Если $-u\leqslant x<0$, то правая часть равенства (7) равна 0.

Положим

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x) \tag{8}$$

и перейдем в (7) к преобразованию Лапласа — Стильтьеса:

$$\Omega(s)=e^{u\,[s-\Phi(s)]}\Omega(s)-W(0)\,s\int_0^u e^{z\,[s-\Phi(s)]}\,dz. \tag{9}$$

Это соотношение выполняется для всех $u>0$. Здесь мы использовали то, что правая часть формулы (7) при $-u\leqslant x<0$ равна 0. Из (9) следует, что

$$\Omega(s)=\frac{W(0)\,s}{s-\Phi(s)}, \tag{10}$$

и это преобразование Лапласа — Стильтьеса сходится при $\mathrm{Re}(s)>\omega$, где ω — максимальный неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$. Если $\rho\leqslant 1$, то $\omega=0$, а если $\rho>1$, то $\omega>0$. Теорема доказана.

Мы определили $W(x)$ как функцию, непрерывную справа. Таким образом, $W(x)$ однозначно определяется своим преобразованием Лапласа — Стильтьеса (2).

Если ρ — конечное положительное число, что $\Phi(s)=\rho s\psi^*(s)$, где $\psi^*(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса функции распределения $H^*(x)$, определенной соотношением (19) § 14. Так как $|\rho\psi^*(s)|<1$ при $\mathrm{Re}(s)>\omega$, то

$$\Omega(s)=\frac{W(0)}{1-\rho\psi^*(s)}=W(0)\sum_{n=0}^\infty \rho^n\,[\psi^*(s)]^n \tag{11}$$

для $\mathrm{Re}(s)>\omega$. Применяя формулу обращения, получаем

$$W(x)=W(0)\sum_{n=0}^\infty \rho^n H_n^*(x), \tag{12}$$

где H_n^* — это n-я свертка функции распределения $H^*(x)$ с собой; $H_0^*(x)=1$ при $x\geqslant 0$ и $H_0^*(x)=0$ при $x<0$.

Функция $W(x)$ является единственным решением интегрального уравнения

$$W(x)=W(0)\left[H_0^*(x)+\rho H^*(x)*W(x)\right]. \tag{13}$$

Приведем теперь другое выражение для $W(x)$.

Теорема 2. *Если* $\rho \neq 1$, *то*

$$W(x) = W(0)\left[\frac{e^{\omega x}}{1-\Phi'(\omega)} - \int\limits_{+0}^{\infty} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x\}\right] \tag{14}$$

для всех x, *где* ω — *наибольший неотрицательный корень уравнения* $\Phi(s) = s$. *Если* $\rho < 1$, *то* $\omega = 0$, *если же* $\rho > 1$, *то* $\omega > 0$. *Правая часть формулы* (14) *равна* 0 *при* $x < 0$.

Доказательство. Случай $\rho < 1$ уже доказан в теореме 3 § 15. Там $W(0) = 1 - \rho$, что не ограничивает общности, так как $W(0)$ служит множителем пропорциональности.

Пусть $\rho > 1$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $W(0) = 1$. Тогда по формуле (2)

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-sx} W(x)\,dx = \frac{1}{s - \Phi(s)} \tag{15}$$

при $\operatorname{Re}(s) > \omega$ и $W(x) = 0$ при $x < 0$. Положим для любого x

$$K(x) = \int\limits_{+0}^{\infty} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x\}; \tag{16}$$

тогда интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} K(x)\,dx = \frac{1}{\Phi(s) - s} \tag{17}$$

сходится при $0 < \operatorname{Re}(s) < \omega$.

Если вычесть $e^{\omega s}/(1 - \Phi'(\omega))$ из $W(x)$ при $x \geqslant 0$, то разность будет иметь преобразование Лапласа

$$\frac{1}{s - \Phi(s)} - \frac{1}{(1 - \Phi'(\omega))(s - \omega)}, \tag{18}$$

сходящееся при $\operatorname{Re}(s) \geqslant \omega$. Аналогично, если вычесть $e^{\omega x}/(1 - \Phi'(\omega))$ из $K(x)$ при $x < 0$, то разность будет иметь преобразование Лапласа

$$\frac{1}{\Phi(s) - s} + \frac{1}{(1 - \Phi'(\omega))(s - \omega)}, \tag{19}$$

сходящееся при $0 < \operatorname{Re}(s) \leqslant \omega$. Если $\operatorname{Re}(s) = \omega$, то сумма преобразований (18) и (19) равна 0 и, следовательно, сумма непреобразованных функций также равна 0, т. е.

$$W(x) + K(x) = \frac{e^{\omega x}}{1 - \Phi'(\omega)} \tag{20}$$

для всех x. Это доказывает формулу (14) для $\rho > 1$. Если $\rho < 1$ то $\omega = 0$ и оба преобразования (18) и (19) сходятся при $\operatorname{Re}(s) = 0$, Поэтому (20) в этом случае также выполняется, а это доказывает формулу (14) для $\rho < 1$.

Если $x < 0$, то $W(x) = 0$. Отсюда можно извлечь интересные тождества, если специальным образом выбирать процесс $\{\chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ в формуле (14).

Теорема 3. *Если* $c \geqslant 0$, *то*

$$\mathbf{E}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} [\chi(u) - u]\} = \int_0^\infty \left(\frac{W(x) - W(x-c)}{W(x)}\right) dx. \tag{21}$$

Доказательство. Здесь $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} [\chi(u) - u]$ — неотрицательная случайная величина с математическим ожиданием

$$\mathbf{E}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} [\chi(u) - u]\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} [\chi(u) - u] > x\} \, dx, \tag{22}$$

где интегральное выражение можно найти по формуле (1).

В заключение докажем теорему об асимптотическом поведении $W(x)$ при $x \to \infty$.

Теорема 4. *Если* $\rho < 1$, *то*

$$\lim_{x \to \infty} W(x) = \frac{W(0)}{1-\rho}. \tag{23}$$

Если $\rho = 1$, *то*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{W(x)}{x} = \frac{2W(0)}{\sigma^2}, \tag{24}$$

где $\sigma^2 = -\Phi''(+0)$. *Если же* $\rho > 1$, *то*

$$\lim_{x \to \infty} W(x) e^{-\omega x} = \frac{W(0)}{1 - \Phi'(\omega)}, \tag{25}$$

где ω — *наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\Phi(s) = s$. *При этом* $0 < \omega < \infty$.

Доказательство. Если $W(0) > 0$, то $W(x)$ не убывает при $0 \leqslant x \leqslant \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} W(x)$ существует (возможно, бесконечный). Если $\rho < 1$, то по теореме Абеля для преобразований Лапласа — Стильтьеса (см. дополнение)

$$\lim_{x \to \infty} W(x) = \lim_{s \to +0} \Omega(s) = \frac{W(0)}{1 - \Phi'(+0)} = \frac{W(0)}{1-\rho}, \tag{26}$$

и первое утверждение теоремы доказано. Если $\rho < 1$, то $\lim\limits_{x \to \infty} W(x)$ конечен и можно так выбрать $W(0)$, чтобы он равнялся 1. Такой выбор невозможен при $\rho \geqslant 1$, ибо в этом случае $\lim\limits_{x \to \infty} W(x) = \infty$ для всех $W(0) > 0$.

При $\rho=1$ тауберова теорема для преобразований Лапласа — Стильтьеса (см. дополнение) дает

$$\lim_{x\to\infty}\frac{W(x)}{x}=\lim_{s\to+0}s\Omega(s)=\frac{-2W(0)}{\Phi''(+0)}=\frac{2W(0)}{\sigma^2},\tag{27}$$

и формула (24) доказана. Этот результат можно также вывести из теории рекуррентных процессов[1]). Именно, при $\rho=1$ отношение $W(x)/W(0)$ можно интерпретировать как 1 плюс среднее число появлений рекуррентных событий в интервале $(0, x]$ для рекуррентного процесса, время восстановления которого имеет функцию распределения $H^*(x)$. Таким образом, согласно теории рекуррентных процессов,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{W(x)}{x}=\frac{-W(0)}{\psi^{*\prime}(+0)},\tag{28}$$

что вполне согласуется с (24).

При $\sigma^2=\infty$ правая часть равенства (24) обращается в 0. Для нахождения асимптотического поведения $W(x)$ при $x\to\infty$ в этом случае можно использовать тауберову теорему Харди — Литлвуда (см. дополнение). Если при $s\to 0$ $(0<s<\infty)$

$$\Omega(s)\sim\frac{1}{s^{\alpha}}L\left(\frac{1}{s}\right),\tag{29}$$

где $\alpha\geqslant 0$ и $L(cx)\sim L(x)$ для любого положительного c при $x\to\infty$, то

$$W(x)\sim\frac{x^{\alpha}L(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\tag{30}$$

при $x\to\infty$.

При $\rho>1$ из абелевой теоремы для преобразований Лапласа — Стильтьеса получаем

$$\lim_{x\to\infty}e^{-\omega x}W(x)=\lim_{s\to\omega}(s-\omega)\frac{\Omega(s)}{\omega}=\frac{W(0)}{1-\Phi'(\omega)}\tag{31}$$

в предположении, что $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\omega x}W(x)$ существует. Существование этого предела можно доказать с помощью тауберовой теоремы Икеара (см. дополнение).

Замечание. Если использовать явную формулу (14) для $W(x)$, то можно показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[W(x)-\frac{W(0)e^{\omega x}}{1-\Phi'(\omega)}\right]=-\frac{W(0)}{\rho-1}\tag{32}$$

при $\rho>1$.

[1]) Или процессов восстановления; см. Кокс Д., Смит В. Т., Теория восстановления, изд-во „Сов. радио“, М., 1967. — *Прим. ред.*

§ 17. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ЗНАЧЕНИЙ ПРОЦЕССА $\{u - \chi(u)\}$

Рассмотрим сначала случай, когда процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ имеет переставляемые приращения, а потом перейдем к случаю процессов со стационарными независимыми приращениями.

Теорема 1. *Если* $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ — *сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в* 0 *при* $u=0$, *то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} [u - \chi(u)] \leqslant x\} = 1 - \int_x^t \frac{x}{y}\, d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y - x\} \tag{1}$$

при $0 < x \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Найдем вероятность дополнительного для $\{\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} [u - \chi(u)] \leqslant x\}$ события, т. е. вероятность того, что $u - \chi(u) > x$ для некоторого $u \in (0, t]$. Последнее событие может произойти, если $\inf\{u\colon u - \chi(u) > x\} = y$, где $0 \leqslant y \leqslant t$. Тогда $\chi(y) = y - x$ и $u - \chi(u) \leqslant x$ для $0 \leqslant u \leqslant y$, откуда $\chi(y) - \chi(u) \leqslant \leqslant y - u$ для $0 \leqslant u \leqslant y$. По теореме 1 § 13

$$\mathbf{P}\{\chi(y) - \chi(u) \leqslant y - u \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant y \mid \chi(y) = y - x\} = \frac{x}{y} \tag{2}$$

для $0 < x \leqslant y$, причем условная вероятность определена с точностью до эквивалентности. Если проинтегрировать (2) от x до t по мере $d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y - x\} = \mathbf{P}\{y - x < \chi(y) < y - x + dy\}$, то получится вероятность дополнительного события. Теорема доказана.

Аналогично доказывается более общая формула

$$\mathbf{P}\{u - \chi(u) \leqslant x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \quad \text{и} \quad t - \chi(t) \leqslant x - c\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\chi(t) \geqslant t + c - x\} - \int_x^t \frac{x}{y}\, d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y - x,\ \chi(t) \geqslant t + c - x\} \tag{3}$$

для $0 < x \leqslant t \leqslant T$ и $c > 0$.

Теорема 2. *Если* $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ — *сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в* 0 *при* $u=0$, *то*

$$\mathbf{E}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} [u - \chi(u)]\} = \int_0^t \frac{1}{y} \mathbf{E}\{[y - \chi(y)]^+\}\, dy. \tag{4}$$

Доказательство. Так как случайная величина $\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]$ принимает значения из отрезка $[0, t]$, то

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]\}=\int_0^t \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]>x\}\,dx, \tag{5}$$

где подинтегральное выражение определяется формулой (1).

Заметим, что если $T=\infty$ в теореме 1, то, устремляя в формуле (1) t к ∞, получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[u-\chi(u)]\leqslant x\}=1-\int_x^\infty \frac{x}{y}\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y-x\} \tag{6}$$

для $x>0$.

Если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, то случайная величина $\sup\limits_{0\leqslant u<\infty}[u-\chi(u)]$ имеет экспоненциальное распределение, как показывает следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant\infty\}$ — *сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в* 0 *при* $x\geqslant 0$, *то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[u-\chi(u)]\leqslant x\}=1-e^{-\omega x}, \tag{7}$$

где ω — *наибольший вещественный корень уравнения* $\Phi(\omega)=\omega$. *Если* $0\leqslant\rho\leqslant 1$, *то* $\omega=0$, *а если* $\rho>1$, *то* $\omega>0$.

Доказательство. Положим

$$\theta(x)=\inf[u\colon\ u-\chi(u)>x\ \text{ и }\ 0\leqslant u<\infty] \tag{8}$$

и $\theta(x)=\infty$, если $u-\chi(u)\leqslant x$ для всех $u\geqslant 0$. Тогда $\{\theta(x),\ 0\leqslant x<\infty\}$ — случайный процесс с неотрицательными стационарными независимыми приращениями. Таким образом, для $\mathrm{Re}(z)>0$

$$\mathbf{E}\{e^{-z\theta(x)}\}=e^{-x\omega(z)} \tag{9}$$

при надлежащем выборе функции $\omega(z)$. Если теперь $\chi(x)=y$, то $\theta(x)=x+\theta^*(y)$, где $\theta^*(y)$ имеет то же распределение, что и $\theta(y)$, $\{\theta^*(y)\}$ независима от $\{\chi(x)\}$. Иначе говоря,

$$\mathbf{E}\{e^{-z\theta(x)}\}=e^{-xz-x\Phi(\omega(z))} \tag{10}$$

для $\mathrm{Re}(z)>0$. Сравнивая (9) и (10), получаем

$$\omega(z)=z+\Phi(\omega(z)) \tag{11}$$

при $\operatorname{Re}(z)>0$. Если z — положительное вещественное число, то уравнение

$$s=z+\Phi(s) \tag{12}$$

имеет один и только один неотрицательный вещественный корень, и, следовательно, $s=\omega(z)$. Если $z\to 0$, то $\omega(z)\to\omega$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$. Если $0\leqslant\rho\leqslant 1$, то $\omega=0$, а если $\rho>1$, то $\omega>0$.

По определению $\theta(x)$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]\leqslant x\}=1-\mathbf{P}\{\theta(x)\leqslant t\} \tag{13}$$

для $x\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$, а по абелевой теореме

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\theta(x)\leqslant t\}=\lim_{z\to+0}e^{-x\omega(z)}=e^{-x\omega}, \tag{14}$$

и теорема доказана.

В соответствии с предыдущим, если $\rho>1$, то $\sup\limits_{0\leqslant u<\infty}[u-\chi(u)]$ есть собственная случайная величина, конечная с вероятностью 1. Если же $\rho\leqslant 1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[u-\chi(u)]=\infty\}=1.$$

Случайная величина $\theta(x)$ представляет собой время первого прохождения процесса $\{u-\chi(u)\}$ через x. Ее распределение дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant\infty\}$ — случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u=0$. Для $x\geqslant 0$ определим $\theta(x)$ как наименьшее u, для которого $u-\chi(u)=x$. Тогда*

$$P\{\theta(x)\leqslant t\}=\int_x^t\frac{x}{y}\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y-x\} \tag{15}$$

при $0<x\leqslant t$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\theta(x)\leqslant t\}=1-\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]\leqslant x\}, \tag{16}$$

а правую часть можно найти с помощью формулы (1).

Дальше мы будем предполагать, что $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u=0$.

Если $\rho \leqslant 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\theta(x) \leqslant t\} = 1$, а если $\rho > 1$, то

$$\mathbf{P}\{\theta(x) = \infty\} = 1 - e^{-\omega x} > 0.$$

Если $\rho < 1$, то математическое ожидание случайной величины $\theta(x)$ равно

$$\mathbf{E}\{\theta(x)\} = x \int\limits_x^\infty d_u \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u - x\} = \frac{x}{1-\rho}, \tag{17}$$

что следует из формулы (37) § 15. Если $\rho = 1$, то $\mathbf{E}\{\theta(x)\} = \infty$. Интересно отметить, что (17) можно записать также в виде

$$\mathbf{E}\{\theta(x)\} = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{0 < u - \chi(u) \leqslant x\}\, du \tag{18}$$

для $\rho < 1$.

Если $\operatorname{Re}(z) > 0$, то по (9) и (15)

$$\mathbf{E}\{e^{-z\theta(x)}\} = e^{-x\omega(z)} = x \int\limits_x^\infty \frac{e^{zt}}{t} d_t \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t - x\}, \tag{19}$$

и $s = \omega(z)$ — единственный корень уравнения $\Phi(s) = s - z$ в области $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$.

Распределение случайной величины $\theta(x)$ и его преобразование Лапласа — Стильтьеса нашел Кендалл [5]; однако он не дал полного доказательства своих результатов.

Замечание. Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс с независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u = 0$, то формулы (6) и (7) дают при $x > 0$

$$\int\limits_x^\infty \frac{x}{y} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y - x\} = e^{-\omega x}, \tag{20}$$

где ω — наибольший вещественный корень уравнения $\Phi(\omega) = \omega$.

§ 18. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРХНИХ ГРАНЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

С каждым вещественным сепарабельным случайным процессом $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, удовлетворяющими условиям $\chi(u+0) = \chi(u)$ и $\chi(0) = 0$, связывается двойственный процесс $\{\chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, определяемый как

$$\chi^*(t) = \sup\{u\colon\ \chi(u) \leqslant t \text{ и } 0 \leqslant u < \infty\} \tag{1}$$

для всех $t \geqslant 0$.

Очевидно, что для всех $t \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$

$$\{\chi^*(t) \leqslant x\} \equiv \{\chi(x) > t\}, \tag{2}$$

откуда

$$\{\chi^*(u) - u \leqslant x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\} \equiv \{u - \chi(u) < x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t + x\} \tag{3}$$

и

$$\{u - \chi^*(u) < x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\} \equiv \{\chi(u) - u \leqslant x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t - x\}. \tag{4}$$

Поэтому если известны распределения верхних граней значений случайных процессов $\{\chi(u) - u\}$ и $\{u - \chi(u)\}$, то с помощью соотношений (3) и (4) можно непосредственно получить распределения верхних граней значений двойственных случайных процессов $\{\chi^*(u) - u\}$ и $\{u - \chi^*(u)\}$, и обратно.

§ 19. ПРИМЕРЫ

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые специальные случайные процессы $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ и вычислим все величины, фигурирующие в условиях общих теорем, доказанных в этой главе.

Сначала предположим, что $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u = 0$. Для подобных процессов

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\} = e^{-u\Phi(s)} \tag{1}$$

при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, где

$$\Phi(s) = \int_{+0}^{\infty} (1 - e^{-sx})\, dN(x) \tag{2}$$

и $N(x)$, $0 < x < \infty$, — неубывающая функция, причем $\lim_{x \to \infty} N(x) = 0$ и

$$\int_{+0}^{1} x\, dN(x) < \infty. \tag{3}$$

В зависимости от вида функции $N(x)$ получаются различные типы процессов $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$.

1. *Обобщенный пуассоновский процесс.* Если $\lambda = -N(0)$ — конечное положительное число, то процесс называют обобщенным пуассоновским. Функцию $N(x)$ можно тогда записать в виде

$$N(x) = -\lambda[1 - H(x)], \tag{4}$$

где $H(x)$ — функция распределения положительной случайной величины. Если

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x) \tag{5}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, то

$$\Phi(s)=\lambda[1-\psi(s)] \tag{6}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. В этом случае

$$\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant x\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}H_n(x), \tag{7}$$

где $H_n(x)$ означает n-ю свертку функции $H(x)$ с собой; $H_0(x)=1$ при $x\geqslant 0$ и $H_0(x)=0$ при $x<0$.

Если

$$\alpha=\int_0^\infty x\,dH(x), \tag{8}$$

то $\rho=\lambda\alpha$.

Если ρ — конечное положительное число, то можно определить функцию распределения $H^*(x)$ формулой

$$H^*(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x[1-H(y)]\,dy \tag{9}$$

при $x\geqslant 0$ и $H^*(x)=0$ при $x<0$. Тогда

$$\psi^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH^*(x)=\frac{1-\psi(s)}{\alpha s} \tag{10}$$

при $\operatorname{Re}(s)>0$.

Если ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$, то $\omega=0$ при $\rho=\lambda\alpha\leqslant 1$ и $\omega<0$ при $\rho=\lambda\alpha>1$. Если $\rho>1$, то, используя разложение Лагранжа (см. дополнение), получаем

$$\omega=\lambda\left[1-\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}\,dH_j(x)\right]. \tag{11}$$

Найдем теперь $W(x)$. Имеем

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x)=\frac{W(0)\,s}{s-\Phi(s)} \tag{12}$$

при $\operatorname{Re}(s) > \omega$. Формула обращения дает возможность получить различные выражения для $W(x)$. Если число $\rho = \lambda\alpha$ конечно и положительно, то, согласно (6) и (10), $\Phi(s) = \rho s \psi^*(s)$, и по формуле (12) § 16

$$W(x) = W(0) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n H_n^*(x), \tag{13}$$

где $H_n^*(x)$ — это n-я свертка функции $H^*(x)$ с собой; $H_0^*(x) = 1$ при $\chi \geqslant 0$ и $H_0^*(x) = 0$ при $x < 0$.

Если $\rho \neq 1$, то по формуле (14) § 16

$$W(x) = W(0) \left[\frac{e^{\omega x}}{1 - \Phi'(\omega)} - K(x) \right], \tag{15}$$

где

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{+0}^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} d_u H_n(u + x). \tag{16}$$

Далее, учитывая (6) и (12), можно написать

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} W(x) dx = \frac{W(0)}{s - \lambda[1 - \psi(s)]} = \frac{W(0)}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\lambda}{s - \lambda} \right)^{n+1} [\psi(s)]^n,$$

если $\operatorname{Re}(s)$ достаточно велико. Снова применяя формулу обращения, получаем

$$W(x) = W(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n e^{\lambda x}}{n!} \int_0^x e^{-\lambda y} (x - y)^n dH_n(y) \tag{17}$$

для $x \geqslant 0$.

Располагая полученными только что выражениями, можно применить общие теоремы этой главы и найти явные формулы для интересующих нас вероятностей. Полезно более подробно рассмотреть некоторые частные случаи

(i) Пусть

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant \alpha, \\ 0, & \text{если } x > \alpha. \end{cases} \tag{18}$$

Тогда $\psi(s) = e^{-s\alpha}$, $\Phi(s) = \lambda(1 - e^{-\alpha s})$, $\rho = \lambda\alpha$ и

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\} = \sum_{n=0}^{[x/\alpha]} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{19}$$

для $x \geqslant 0$. В силу (17)

$$W(x) = W(0) \sum_{n=0}^{[x/\alpha]} e^{-\lambda(n\alpha - x)} \frac{[\lambda(n\alpha - x)]^n}{n!} \tag{20}$$

для $x \geqslant 0$ и $W(x)=0$ для $x<0$. Согласно (14),

$$W(x)=W(0)\left[\frac{e^{\omega x}}{1-(\lambda-\omega)\alpha}-K(x)\right], \tag{21}$$

где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\lambda(1-e^{-\alpha\omega})=\omega$ и

$$K(x)=\sum_{n>x/\alpha} e^{-\lambda(n\alpha-x)}(\lambda(n\alpha-x))^n/n!. \tag{22}$$

Замечание. Если требуется указать зависимость $K(x)$ от λ, то можно написать

$$K(x)=K_\lambda(x)=e^{\lambda x}\sum_{n>x/\alpha}(e^{-\lambda\alpha}\lambda\alpha)^n(n-x/\alpha)^n/n!. \tag{23}$$

Если функция $K_\lambda(x)$ известна для $\lambda\alpha>1$, то легко получить отсюда $K_\lambda(x)$ и для $\lambda\alpha>1$. В самом деле, если $\lambda\alpha>1$, то существует такое число λ^*, что $\lambda^*\alpha<1$ и $e^{-\lambda\alpha}\lambda\alpha=e^{-\lambda^*\alpha}\lambda^*\alpha$. А именно $\lambda-\lambda^*=\omega$; функция ω определена выше. По формуле (23) тогда $e^{-\lambda x}K_\lambda(x)=e^{-\lambda^* x}K_{\lambda^*}(x)$, т. е.

$$K_\lambda(x)=e^{\omega x}K_{\lambda^*}(x), \tag{24}$$

где $\lambda^*\alpha<1$ и $e^{-\lambda^*\alpha}\lambda^*\alpha=e^{-\lambda\alpha}\lambda\alpha$.

Например, если $\lambda\alpha<1$ и $x<0$, то, согласно (37) § 15, $K_\lambda(x)=1/(1-\lambda\alpha)$. Значит, если $\lambda\alpha>1$ и $x<0$, то

$$K_\lambda(x)=e^{\omega x}K_{\lambda^*}(x)=\frac{e^{\omega x}}{1-\lambda^*\alpha}=\frac{e^{\omega x}}{1-(\lambda-\omega)\alpha}, \tag{25}$$

что вполне согласуется с (21).

(ii) Пусть

$$H(x)=\begin{cases}1-e^{-\mu x}, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases} \tag{26}$$

Тогда $\psi(s)=\mu/(\mu+s)$, $\Phi(s)=\lambda s/(\mu+s)$, $\rho=\lambda/\mu$ и для $x\geqslant 0$

$$H_n(x)=\int_0^x e^{-\mu y}\frac{(\mu y)^{n-1}}{(n-1)!}\mu\,dy=\sum_{j=n}^{\infty}e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^j}{j!}. \tag{27}$$

Таким образом, для $x\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant x\}=e^{-\lambda t}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\int_0^x e^{-\mu y}\frac{(\mu y)^{n-1}}{(n-1)!}\mu\,dy=$$

$$=e^{-\lambda t}\left[1+\sqrt{\lambda\mu t}\int_0^x e^{-\mu y}y^{-1/2}I_1\left(2\sqrt{\lambda\mu t y}\right)dy\right], \tag{28}$$

где

$$I_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+r}}{(n+r)!} \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{29}$$

— модифицированная функция Бесселя первого рода.

Для $x \geqslant 0$ можно переписать (28) в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^j}{j!} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^j}{j!} \sum_{n=0}^{j} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^j}{j!} \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \lambda\, du = \\
&= 1 - \lambda e^{-\mu x} \int_0^t e^{-\lambda u} J(\lambda \mu x u)\, du,
\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$J(x) = I_0(2x^{1/2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}. \tag{31}$$

Теперь $\mathbf{P}\{\chi(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$ и для $x > 0$ из (28) следует

$$\frac{\partial \mathbf{P}\ \{\chi(t) \leqslant x\}}{\partial x} = \lambda \mu t e^{-\lambda t - \mu x} J'(\lambda \mu t x), \tag{32}$$

так как $J'(x) = I_0'(2x^{1/2})/x^{1/2} = I_1(2x^{1/2})/x^{1/2}$.

Далее, $H^*(x) = H(x)$ и в силу (13) при $x \geqslant 0$

$$W(x) = W(0)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \int_0^x e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^{n-1}}{(n-1)!} \mu\, dy\right], \tag{33}$$

или

$$W(x) = \begin{cases} W(0)\dfrac{\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}}{\mu - \lambda}, & \text{если } \mu \neq \lambda, \\ W(0)(1 + \lambda x), & \text{если } \mu = \lambda. \end{cases} \tag{34}$$

Если $\lambda \leqslant \mu$, то $\omega = 0$, а если $\lambda > \mu$, то $\omega = \lambda - \mu$. При $\lambda \neq \mu$ формула (14) дает

$$W(x) = W(0)\left[\frac{e^{\omega x}}{1 - \Phi'(\omega)} - K(x)\right], \tag{35}$$

где $\omega=0$, $\Phi'(0)=\lambda/\mu$ при $\lambda<\mu$ и $\omega=\lambda-\mu$, $\Phi'(\lambda-\mu)=\mu/\lambda$ при $\lambda>\mu$. Кроме того,

$$K(x)=e^{-\mu x}\int\limits_{\max(0,\,-x)}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)\,y}\left(\frac{\lambda\mu y}{y+x}\right)^{1/2} I_1\left(2\sqrt{\lambda\mu y(x+y)}\right)dy+ \\ +\begin{cases} e^{\lambda x}, & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x\geqslant 0,\end{cases} \tag{36}$$

для всех x.

Замечание. Если рассматривать $K(x)=K_{\lambda,\mu}(x)$ как функцию от λ и μ, то в силу (36) будем иметь $e^{\mu x}K_{\lambda,\mu}(x)=e^{\lambda x}K_{\mu,\lambda}(x)$. Таким образом, если функция $K(x)$ известна при $\rho=\lambda/\mu<1$, то можно получить $K(x)$ и для $\rho=\lambda/\mu>1$, используя соотношение

$$K_{\lambda,\mu}(x)=e^{(\lambda-\mu)\,x}K_{\mu,\lambda}(x). \tag{37}$$

2. *Устойчивый процесс.* Положим для $0<x<\infty$

$$N(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-c)\,x^{c}}, \tag{38}$$

где $0<c<1$. Тогда $\lambda=\rho=\infty$,

$$\Phi(s)=\frac{c}{\Gamma(1-c)}\int\limits_0^\infty (1-e^{-sx})\frac{dx}{x^{c+1}}=s^c \tag{39}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$ и для $x\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant x\}=\int\limits_0^{x/t^{1/c}} f_c(y)\,dy, \tag{40}$$

где

$$f_c(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,\Gamma(nc+1)\sin nc\pi}{n!\,x^{nc+1}} \tag{41}$$

при $x>1$ (см. Поллард [8] и Хумберт [3]).

В частности,

$$f_{1/2}(x)=\frac{1}{(4\pi x^3)^{1/2}}\,e^{-1/4x} \tag{42}$$

и

$$f_{2/3}(x)=\frac{\sqrt{3\pi}}{x}\exp\left(-\frac{2}{27x^2}\right)W_{1/2,\,1/6}\left(\frac{4}{27x^2}\right), \tag{43}$$

где

$$W_{k,m}(x)=\frac{e^{-x/2}x^k}{\Gamma(1/2-k+m)}\int\limits_0^\infty u^{-k-1/2+m}\left(1+\frac{u}{x}\right)^{k-1/2+m}e^{-u}\,du \tag{44}$$

— функция Уиттекера, определенная при $\operatorname{Re}(m-k+1/2)>0$ (см. Уиттекер [21]).

Пусть теперь $\omega=1$ и

$$\Omega(s)=\frac{W(0)\,s}{s-s^{c}} \tag{45}$$

при $\operatorname{Re}(s)>1$. Используя формулу обращения, получаем для $x\geqslant 0$

$$W(x)=W(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n(1-c)}}{\Gamma(n(1-c)+1)}=W(0)\,E_{1-c}(x^{1-c}), \tag{46}$$

где

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{\Gamma(n\alpha+1)} \tag{47}$$

— функция Миттаг-Леффлера. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}W(x)=\frac{W(0)}{1-\Phi'(1)}=\frac{W(0)}{1-c}. \tag{48}$$

Теорема 2 § 16 дает еще одну формулу:

$$W(x)=W(0)\left[\frac{e^{x}}{1-c}-\int\limits_{\max(0,\,-x)}^{\infty}f_c\left(\frac{x+y}{y^{1/c}}\right)\frac{dy}{y^{1/c}}\right] \tag{49}$$

для всех x.

3. *Обобщенный устойчивый процесс.* Положим для $0<x<\infty$

$$N(x)=-\frac{c}{\Gamma(1-c)}\int\limits_{x}^{\infty}e^{-\mu y}\frac{dy}{y^{c+1}}, \tag{50}$$

где $0<c<1$ и $\mu\geqslant 0$. При $\mu=0$ получаем отсюда (38).

Здесь $\lambda=\infty$, $\rho=c\mu^{c-1}$,

$$\Phi(s)=\frac{c}{\Gamma(1-c)}\int\limits_{0}^{\infty}(1-e^{-sx})\,e^{-\mu x}\frac{dx}{x^{c+1}}=(s+\mu)^{c}-\mu^{c} \tag{51}$$

и

$$\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant x\}=e^{t\mu^{c}}\int\limits_{0}^{x/t^{1/c}}e^{-\mu t^{1/c}y}f_c(y)\,dy, \tag{52}$$

где $x\geqslant 0$, а функция $f_c(x)$ определена формулой (41).

Далее, ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения

$$\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)^{c}=1+\frac{\omega}{\mu^{c}}. \tag{53}$$

Если $\rho = c\mu^{c-1} \leqslant 1$, то $\omega = 0$ и $\Phi'(0) = c\mu^{c-1}$. Если $\rho = c\mu^{c-1} > 1$, то $\omega > 0$ и $\Phi'(\omega) = c(\mu^c + \omega)^{(c-1)/c}$. Если $\rho \neq 1$, то по теореме 2 § 16

$$W(x) = W(0)\left[\frac{e^{\omega x}}{1-\Phi'(\omega)} - \int\limits_{\max(0,\,-x)}^{\infty} e^{\mu^c y - \mu(x+y)} f_c\left(\frac{x+y}{y^{1/c}}\right)\frac{dy}{y^{1/c}}\right] \tag{54}$$

для всех x.

4. *Гамма-процесс.* Пусть для $x > 0$

$$N(x) = -\int\limits_x^{\infty} \frac{e^{-\mu y}}{y}\,dy, \tag{55}$$

где μ — положительная константа. Тогда $\lambda = \infty$, $\rho = 1/\mu$,

$$\Phi(s) = \int\limits_0^{\infty} (1 - e^{-sx})\,e^{-\mu x}\frac{dx}{x} = \log\left(1 + \frac{s}{\mu}\right) \tag{56}$$

и

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\} = \frac{1}{\Gamma(t)}\int\limits_0^{\mu x} e^{-y} y^{t-1}\,dy \tag{57}$$

для $x > 0$ и $t > 0$. Здесь ρ — конечное положительное число, и по формуле (19) § 14 для $x \geqslant 0$

$$H^*(x) = \int\limits_0^x h^*(y)\,dy, \tag{58}$$

где

$$h^*(x) = \mu\int\limits_{\mu x}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \tag{59}$$

при $x > 0$. Тогда

$$\psi^*(s) = \frac{\mu}{s}\log\left(1 + \frac{s}{\mu}\right). \tag{60}$$

В силу формулы (12) § 16

$$W(x) = W(0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^n H_n^*(x). \tag{61}$$

Если $\mu \neq 1$, то, согласно (14) § 16, для всех x

$$W(x) = W(0)\left[\frac{e^{\omega x}}{1-\Phi'(\omega)} - K_\mu(x)\right], \tag{62}$$

где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\mu e^{\omega}=\mu+\omega$, причем $\Phi'(\omega)=1/(\mu+\omega)$ и

$$K_{\mu}(x)=e^{-\mu x}\int\limits_{\max(0,\,-x)}^{\infty}\frac{(e^{-\mu}\mu)^{y}(x+y)^{y-1}}{\Gamma(y)}\,dy. \tag{63}$$

Если $\rho=1/\mu<1$, то $\omega=0$, а если $\rho=1/\mu>1$, то $\omega>0$.

Замечание. Если функция $K_{\mu}(x)$ известна при $\mu>1$, то легко найти $K_{\mu}(x)$ для $\mu<1$. Действительно, если $\mu<1$, то существует такое число $\mu^{*}>1$, что $e^{-\mu}\mu=e^{-\mu^{*}}\mu^{*}$. А именно, $\mu^{*}-\mu=\omega$, и в силу (63) $e^{\mu x}K_{\mu}(x)=e^{\mu^{*}x}K_{\mu^{*}}(x)$, т. е.

$$K_{\mu}(x)=e^{\omega x}K_{\mu^{*}}(x), \tag{64}$$

где $e^{-\mu^{*}}\mu^{*}=e^{-\mu}\mu$ и $\mu^{*}>1$.

Например, если $\mu>1$ и $x<0$, то, согласно (37) § 15, $K_{\mu}(x)=$ $=\mu/(\mu-1)$. Значит, если $\mu<1$ и $x<0$, то

$$K_{\mu}(x)=\frac{e^{\omega x}\mu^{*}}{\mu^{*}-1}=\frac{e^{\omega x}(\mu+\omega)}{\mu+\omega-1}, \tag{65}$$

что вполне согласуется с (62).

Рассмотрим в заключение пример случайного процесса $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в 0 при $u=0$.

5. *Процесс Пойа* (Лундберг [7]). Предположим, что $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — марковский процесс с пространством состояний $I=\{0,\ c,\ 2c,\ \ldots\}$ и вероятностями перехода $\mathbf{P}\{\chi(u+\Delta u)=$ $=(n+1)c\mid\chi(u)=nc\}=\lambda_n(u)\,\Delta u+o(\Delta u)$ и $\mathbf{P}\{\chi(u+\Delta u)=nc\mid\chi(u)=nc\}=$ $=1-\lambda_n(u)\,\Delta u+o(\Delta u)$, где $\lambda_n(u)=\lambda(h+n)/(\lambda u+h)$ и $c,\ \lambda,\ h$ — положительные константы. Пусть $\mathbf{P}\{\chi(0)=0\}=1$. Тогда процесс $\{\chi(0),\ 0\leqslant u<\infty\}$ имеет переставляемые приращения. Его можно представить также как рандомизированный процесс Пуассона.

Пусть $\{\nu_{\theta}(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ для каждого фиксированного θ есть пуассоновский процесс с интенсивностью θ, где θ — неотрицательная случайная величина с функцией распределения

$$\mathbf{P}\{\theta\leqslant x\}=F(x)=\frac{1}{\Gamma(h)}\int\limits_{0}^{x}e^{-hy/\lambda}\left(\frac{hy}{\lambda}\right)^{h-1}\frac{h\,dy}{\lambda} \tag{66}$$

для $x\geqslant 0$. Тогда для $0\leqslant u<\infty$ можно использовать представление $\chi(u)=c\nu_{\theta}(u)$. Отсюда легко получить

$$\mathbf{E}\{\chi(t)\}=\lambda ct, \tag{67}$$

$$\mathbf{P}\{\chi(t)=nc\}=P_n(\lambda t,\ h) \tag{68}$$

и

$$\mathbf{P}\{\chi(u)=mc,\ \chi(u+t)=(m+n)c\}=P_m(\lambda u,\ h)\,P_n\left(\lambda t\,\frac{h+m}{\lambda u+h},\ m+h\right), \tag{69}$$

где

$$P_n(\lambda t,\ h)=\binom{n+h-1}{n}\left(\frac{\lambda t}{\lambda t+h}\right)^n\left(\frac{h}{\lambda t+h}\right)^h. \tag{70}$$

Предположим теперь, что процесс $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ сепарабелен. Тогда по теореме 1 § 15

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}=$$

$$=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}-\sum_{0<y\leqslant z\leqslant t}\sum\left(\frac{t-z}{t-y}\right)\mathbf{P}[\chi(y)=y+x,\ \chi(t)=z+x\}=$$

$$=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}-\sum_{x<cj\leqslant ck\leqslant t+x}\sum\left(\frac{t+x-ck}{t+x-cj}\right)\mathbf{P}\{\chi(cj-x)=cj,\ \chi(t)=kc\}, \tag{71}$$

а вероятности в правой части определяются по формулам (68) и (69). В частности, формула (3) § 15 дает

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]=0\}=$$

$$=1-\sum_{0\leqslant y\leqslant t}\left(1-\frac{y}{t}\right)\mathbf{P}\{\chi(t)=y\}=1-\sum_{j=0}^{[t/c]}\left(1-\frac{cj}{t}\right)\mathbf{P}\{\chi(t)=cj\}. \tag{72}$$

Далее, $\mathbf{E}\{\chi(t)\mid\theta\}=c\theta t$ с вероятностью 1 и, поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\chi(t)}{t}\leqslant x\right\}=\mathbf{P}\{c\theta\leqslant x\}=F\left(\frac{x}{c}\right). \tag{73}$$

По теореме 2 § 14 имеем

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\}=0=\int_0^{1/c}(1-cy)\,dF(y), \tag{74}$$

а с учетом (20) получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\mid\theta\}=(1-c\theta)\sum_{n=0}^{[x/c]}e^{-\theta(cn-x)}\frac{[\theta(cn-x)]^n}{n!}, \tag{75}$$

если $0\leqslant\theta\leqslant 1/c$; при $\theta>1/c$ левая часть равна 0 с вероятностью 1.

Соответствующая безусловная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}=\sum_{n=0}^{[x/c]}\frac{(cn-x)^n}{n!}\int_0^{1/c}(1-cy)\,y^ne^{-y(cn-x)}\,dF(y). \tag{76}$$

Если $x>0$, то в силу (1) § 17

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]\leqslant x\}=1-\sum_{x\leqslant y\leqslant t}\frac{x}{y}\mathbf{P}\{\chi(y)=y-x\}=$$

$$=1-\sum_{j=0}^{[(t-x)/c]}\left(\frac{x}{cj+x}\right)\mathbf{P}\{\chi(cj+x)=cj\} \qquad (77)$$

как для конечных t, так и для $t=\infty$.

§ 20. ЗАДАЧИ

1. Пусть $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Найти $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}$ и $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]\leqslant x\}$, $t<\infty$.

2. Пусть $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Найти $\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u$ для $0\leqslant u<\infty\}$.

3. Пусть $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — обобщенный сепарабельный пуассоновский процесс с неотрицательными приращениями, для которого $\mathbf{E}\{\chi(u)\}=\lambda\alpha u$. Найти $\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant xu$ для $0\leqslant u<\infty\}$ (см. Летак [6]).

4. Пусть $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Записать для этого случая тождества (37) § 15 и (20) § 17 (см. Йенсен [4]).

5. Найти сумму

$$F_{\lambda\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda(\alpha j+x)}\frac{[\lambda(\alpha j+x)]^j}{j!}$$

для $x>0$ (см. Полиа и Сегё [9, т. 1, гл. 3, задача 214]).

6. Доказать следующее тождество Абеля:

$$\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}(x+k)^{k-1}(t-x-k)^{n-k}=t^n$$

для всех t и x (см. Абель [1]).

7. Доказать, что

$$\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{k}(x+k)^k(t-x-k)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$$

для всех t и x (см. Арфведсон [2]).

8. Пусть $\{\nu(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а c — положительная константа. Найти

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\nu(u)-cu]\leqslant x\} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[cu-\nu(u)]\leqslant x\},$$

а также их пределы при $t\to\infty$ (см. Пайк [10]).

9. В электронной лампе расстояние между анодом и катодом равно t. Электроны вылетают из катода с энергией, равной 0. Энергия возрастает линейно с увеличением расстояния от катода, если не произошло ни одного столкновения с молекулами газа. Выбирая подходящим образом единицу энергии

можно допустить, что энергия электрона на расстоянии u от катода равна u, если не было ни одного столкновения с молекулами газа. Интенсивность столкновений с молекулами газа равна λ, т. е. вероятность того, что электрон будет иметь хотя бы одно столкновение на длине Δu, равна $\lambda\,\Delta u + o(\Delta u)$. Если при столкновении электрона с молекулой газа его энергия не меньше α, то он ионизирует эту молекулу и теряет часть энергии, равную α. Если энергия при столкновении с молекулой газа меньше α, то ионизации не происходит и электрон энергии не теряет. Найти вероятность $P_n(t)$ того, что, проходя все расстояние от катода до анода, электрон ионизирует по крайней мере n молекул газа (см. [18]).

10. Пусть $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный пуассоновский (обобщенный) процесс, для которого

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant x\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} H_n(x),$$

где $H(x)$ — функция распределения неотрицательной случайной величины. Найти $W(x) = \mathbf{P}\{\sup\limits_{0 \leqslant u < \infty} [\chi(u) - u] \leqslant x\}$ прямым методом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abel N. H., Démonstration d'une expression de laquelle la formule binome est un cas particulier, *J. reine und angew. Math.*, **1** (1826), 159—160. (Oeuvres complètes, I, Christiania, Grøndahl, 1881, pp. 102—103.)

[2] Arfwedson G., Research in collective risk theory. The case of equal risk sums, *Skand. Akt.* **36** (1953), 1—15.

[3] Humbert P., Nouvelles correspondances symboliques, *Bull. Soc. Math. France*, **69** (1945), 121—129.

[4] Jensen J. L. W. V., Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues, *Acta Math.*, **26** (1902), 307—318.

[5] Kendall D. G., Some problems in the theory of dams, *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, **19** (1957), 207—212.

[6] Letac G., Une propriété de fluctuation des processus de Poisson composés croissants, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 1700—1703.

[7] Lundberg O., On random processes and their application to sickness and accident statistics, Thesis, Stockholm, 1940.

[8] Pollard H., The representation of e^{-x^λ} as a Laplace integral, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 908—910.

[9] Полиа Г., Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, ОНТИ М. — Л., 1937.

[10] Pyke R., The supremum and infimum on the Poisson process, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 568—576.

[11] Takács L., The time dependence of a single-server queue with Poisson input and general service times, *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 1340—1348.

[12] Takács L., The distribution of the content of a dam when the input process has stationary independent increments, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 101—112.

[13] Takács L., Combinatorial methods in the theory of dams, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 69—76.

[14] Takács L., From ballot theorems to the theory of queues, Columbia University Report CU-41-64-Nonr-266 (59), MS, March 1964.

[15] Takács L., On the distribution of the supremum for stochastic processes with interchangeable increments, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119** (1965), 367—373.

[16] Takács L., A combinatorial theorem for stochastic processes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 649—650.

[17] T a k á c s L., Application of ballot theorems in the theory of queues, Proceedings of the Symposium on Congestion Theory, University of North Carolina Press, 1965, pp. 337—398.
[18] T a k á c s L., Applications of a ballot theorem in physics and in order statistics, *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, **27** (1965), 130—137.
[19] T a k á c s L., On combinatorial methods in the theory of stochastic processes, Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Vol. II, Part I, University of California Press, 1967, pp. 431—447.
[20] T a k á c s L., The distribution of the content of finite dams, *J. Appl. Prob.*, **4** (1967), 151—161.
[21] W h i t t a k e r E. T., An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **10** (1904), 125—134.

Глава 4

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

§ 21. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ, ПРИНИМАЮЩИЕ ЦЕЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots$ и $N_0 = 0$. Пусть $\{\nu(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а $\{\nu_r\}$ и $\{\nu(u)\}$ независимы. Пусть, кроме того, $\xi(u) = N_{\nu(u)} - \nu(u)$ и $\xi^*(u) = \nu(u) - N_{\nu(u)}$ для $0 \leqslant u < \infty$.

Тогда $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются ступенчатыми функциями со скачками величины $1, -1, -2, \ldots$. Аналогично $\{\xi^*(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются ступенчатыми функциями со скачками величины $-1, 1, 2 \ldots$. Очевидно, что $\xi^*(u) = -\xi(u)$, но нам будет удобно различать эти два процесса и по-разному их обозначать.

Если, в частности, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, то процессы $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ и $\{\xi^*(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ имеют стационарные независимые приращения.

В этой главе мы найдем распределения случайных величин $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$ и $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi^*(u)$ как для конечных t, так и для $t = \infty$.

Мы будем использовать в этом параграфе те же обозначения, касающиеся случайных величин $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$, что и в гл. 2. В частности, $\gamma = \mathbf{E}\{\nu_r\}$, $\pi(z) = \mathbf{E}\{z^{\nu_r}\}$ и δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z) = z$.

Если $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс с переставляемыми или стационарными и независимыми приращениями, то

$$\mathbf{P}\{\xi(u) = k\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu(u) = n\} \mathbf{P}\{N_n - n = k\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \mathbf{P}\{N_n - n = k\} \tag{1}$$

для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $u \geqslant 0$, и

$$\mathbf{E}\{\xi(u)\} = \lambda(\gamma - 1) u. \tag{2}$$

Если процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ имеет стационарные независимые приращения, то

$$\mathbf{E}\left\{z^{\xi(u)}\right\} = \exp\left[-\lambda u\left(1 - \frac{\pi(z)}{z}\right)\right] \tag{3}$$

при $0 < |z| \leqslant 1$ или

$$\mathbf{E}\{e^{-s\xi(u)}\} = e^{u\Psi(s)} \tag{4}$$

при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, где

$$\Psi(s) = \lambda(e^s\pi(e^{-s}) - 1). \tag{5}$$

Дальше мы всюду будем предполагать, что $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс с переставляемыми или стационарными независимыми приращениями, и распределение случайной величины $\xi(u)$ определяется по формуле (1). Тривиальный случай $\pi_0 = 0$, вообще говоря, исключается. Кроме того, мы будем считать, что $\xi^*(u) = -\xi(u)$ для всех $u \geqslant 0$.

Мы увидим, что все теоремы из § 6—8 имеют аналоги для процесса $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$.

Теорема 1. *Если $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то при $k > 0$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k\} = \mathbf{P}\{\xi(t) < k\} - \sum_{r=1}^{\infty} r \int_0^t \frac{1}{t-u} \mathbf{P}\{\xi(u) = k,\ \xi(t) = k - r\}\, du. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем более общую формулу, из которой будет следовать (6). Если $k = 1, 2, \ldots$ и $i = 1, 2, \ldots$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k \text{ и } \xi(t) \leqslant k - i\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant k - i\} - \sum_{r=i}^{\infty} r \int_0^t \frac{1}{(t-u)} \mathbf{P}\{\xi(u) = k,\ \xi(t) - \xi(u) = -r\}. \tag{7}$$

При условии, что $\nu(t) = n$, вероятность события $\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k$ и $\xi(t) \leqslant k - i\}$ можно найти по формуле (2) § 6 для $n = 1, 2, \ldots$, а если $n = 0$, эта вероятность равна 1 или 0 соответственно при $k \geqslant i$ и $k < i$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k \text{ и } \xi(t) \leqslant k - i\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant k - i\} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{r=i}^{n-j} \frac{r}{(n-j)} \mathbf{P}\{N_j - j = k,\ N_n - N_j - (n-j) = -r\}\, \mathbf{P}\{\nu(t) = n\}. \tag{8}$$

Используя тождество

$$\mathbf{P}\{\nu(t)=n\}=(n-j)\int_0^t \frac{1}{(t-u)}\mathbf{P}\{\nu(u)=j\}\mathbf{P}\{\nu(t)-\nu(u)=n-j\}\,du \tag{9}$$

для $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ и меняя порядок суммирования в (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-i}\sum_{r=i}^{n-j}=\sum_{r=i}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=r+j}^{\infty},$$

получаем (7). Формула (6) получается из (7) при $i=1$.

Теорема 2. *Если* $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — *процесс с переставляемыми приращениями, то*

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)\}=\int_0^t \mathbf{E}\{[\xi(u)]^+\}\frac{du}{u}. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)\geqslant k\}, \tag{11}$$

а правую часть здесь можно найти с помощью формулы (6).

Если, в частности, $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, то (6) можно также записать в виде

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)<k\}=\mathbf{P}\{\xi(t)<k\}-\int_0^t \frac{\mathbf{E}\{[\xi^*(t-u)]^+\}}{t-u}\mathbf{P}\{\xi(u)=k\}\,du, \tag{12}$$

где $\xi^*(t-u)=-\xi(t-u)$.

Теорема 3. *Если* $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — *процесс со стационарными независимыми приращениями и* $\gamma<1$, *то при* $k>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\xi(u)<k\}=1-\lambda(1-\gamma)\int_0^{\infty}\mathbf{P}\{\xi(u)=k\}\,du. \tag{13}$$

Доказательство. Равенство (13) можно вывести непосредственно из (12). Кроме того, можно воспользоваться теоремой 3 § 6. Так как очевидно, что для $k>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\xi(u)<k\}=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}(N_r-r)<k\}, \tag{14}$$

то из формулы (9) § 6 следует, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\xi(u)<k\}=1-(1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\{N_j=j+k\} \tag{15}$$

для $k=1, 2, \ldots$. Эквивалентность равенств (13) и (15) вытекает из соотношений

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(u)=k\}\,du = \sum_{j=0}^\infty \mathbf{P}\{N_j=j+k\}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\nu(u)=j\}\,du \tag{16}$$

и

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\nu(u)=j\}\,du = \int_0^\infty e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^j}{j!}\,du = \frac{1}{\lambda}. \tag{17}$$

Теорема 4. *Если* $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — *процесс со стационарными независимыми приращениями и* $\gamma<1$, *то для* $k>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\xi(u)<k\}=Q_k, \tag{18}$$

где

$$\sum_{k=1}^\infty Q_k e^{-sk} = \frac{\lambda(1-\gamma)}{\Psi(s)} \tag{19}$$

для $\mathrm{Re}(s)>0$, *а* $\Psi(s)$ *определяется по формуле* (5).

Доказательство. Ввиду (14) эта теорема немедленно следует из теоремы 4 § 6. Но легко доказать ее и непосредственно. Действительно, для $k=1, 2, \ldots$

$$Q_k=(1-\lambda\,\Delta u)\,Q_k+\lambda\,\Delta u\sum_{j=0}^{k}\pi_j Q_{k+1-j}+o(\Delta u), \tag{20}$$

откуда

$$Q_k=\sum_{j=0}^{k}\pi_j Q_{k+1-j}. \tag{21}$$

Введя производящие функции, получим

$$\sum_{k=1}^\infty Q_k z^k = \frac{Cz}{\pi(z)-z} \tag{22}$$

при $|z|<1$, где константа C определяется условием $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k=1$. Таким образом, $C=1-\gamma$. Если подставить $z=e^{-s}$ в (22), то получится формула (19).

Положим теперь

$$\theta(k)=\inf\{u\colon\ \xi(u)=-k \text{ и } 0\leqslant u<\infty\} \tag{23}$$

для $k>0$. Если $\xi(u)>-k$ для всех $u\geqslant 0$, то $\theta(k)=\infty$. Случайная величина $\theta(k)$ есть время первого прохождения процесса $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ через $x=-k$, или время прохождения процесса $\{\xi^*(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ через $x=k$.

Теорема 5. *Если $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, причем $\pi_0 > 0$, то для $1 \leqslant i \leqslant k$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta(i)} \xi(u) < k - i\} = \frac{Q_{k-i}}{Q_k}, \tag{24}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k e^{-sk} = \frac{C}{\Psi(s)} \tag{25}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, *а* ω — *наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\psi(s) = 0$; C — *произвольная константа, отличная от* 0.

Доказательство. Теорема немедленно следует из теоремы 2 § 7. Мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k z^k = \frac{Cz}{\pi(z) - z} \tag{26}$$

для $|z| < \delta$, где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z) = z$. Если в (26) подставить $z = e^{-s}$, то сразу получится (25), причем $\delta = e^{-\omega}$.

Теорема 6. *Если $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то при $k > 0$*

$$\mathbf{P}\{\theta(k) \leqslant t\} = k \int_0^t \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k\} \frac{du}{u}. \tag{27}$$

Доказательство. По теореме 1 § 8

$$\mathbf{P}\{\theta(k) \leqslant t \mid \nu(t) = n\} = 1 - \mathbf{P}\{r - N_r < k \text{ для } r = 1, \ldots, n\} = \\ = \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\}, \tag{28}$$

если $0 < k \leqslant n$. Соответствующая вероятность равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\theta(k) \leqslant t\} &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\} = \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\} \sum_{n=j}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\} \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{j-1}}{(j-1)!} \lambda\, du = \\ &= k \int_0^t \mathbf{P}\{\xi(u) = -k\} \frac{du}{u}. \end{aligned} \tag{29}$$

Теорема доказана.

По формуле (27)

$$\frac{\partial \mathbf{P}\{\theta(k) \leqslant t\}}{\partial t} = \frac{k}{t} \mathbf{P}\{\xi^*(t) = k\} \tag{30}$$

для $k = 1, 2, \ldots$ и $t > 0$. Эта формула является аналогом формулы (3) § 2, найденной еще Муавром.

Теорема 7. *Если* $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — *процесс со стационарными независимыми приращениями, то*

$$\mathbf{P}\{\theta(k) < \infty\} = e^{-\omega k}, \tag{31}$$

где ω — *наибольший неотрицательный корень уравнения* $\Psi(s) = 0$. *Если* $\gamma \leqslant 1$ *и* $\pi_1 \neq 1$, *то* $\omega = 0$, *а если* $\gamma > 1$ *или* $\pi_1 = 1$, *то* $\omega > 0$. *При* $\gamma < 1$

$$\mathbf{E}\{\theta(k)\} = k \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k\}\, du = \frac{k}{\lambda(1-\gamma)}. \tag{32}$$

Если $\gamma = 1$ *и* $\pi_1 \neq 1$, *то* $\mathbf{E}\{\theta(k)\} = \infty$.

Доказательство. Так как $\theta(k) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) = \infty$, то (31) следует из теоремы 3 § 8. В теореме 5 использовалось обозначение $\delta = e^{-\omega}$. Утверждение (32) получаем из (27) с помощью соотношения

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k\}\, du = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^\infty \mathbf{P}\{N_j = j - k\} = \frac{1}{\lambda(1-\gamma)} \tag{33}$$

для $k > 0$; при этом второе равенство следует из формулы (26) § 6.

Очевидно, что (32) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{E}\{\theta(k)\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{0 < \xi^*(u) \leqslant k\}\, du. \tag{34}$$

Теорема 8. *Если* $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — *процесс со стационарными независимыми приращениями, то для* $\operatorname{Re}(s) > 0$ *и* $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\theta(k)}\} = k \int_0^\infty e^{-su} \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k\} \frac{du}{u}, \tag{35}$$

или

$$\mathbf{E}\{e^{-s\theta(k)}\} = e^{-\omega(s)k}, \tag{36}$$

где $z = \omega(s)$ — *единственный корень уравнения*

$$\Psi(z) = s \tag{37}$$

в области $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Доказательство. Равенство (35) сразу следует из (27). Докажем (36). Если определить $\rho(k)$ как наименьшее из чисел r, для которых $N_r = r - k$, то в силу (20) § 8

$$\mathbf{E}\{z^{\rho(k)}\} = [\delta(z)]^k \tag{38}$$

для $|z| < 1$, где $w = \delta(z)$ — единственный корень уравнения $w = z\pi(w)$ в области $|w| < 1$. Так как $\theta(k)$ можно представить в виде суммы $\rho(k)$ взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, причем эти случайные величины независимы от $\rho(k)$, то в силу (38)

$$\mathbf{E}\{e^{-s\theta(k)}\} = \left[\delta\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)\right]^k \tag{39}$$

для $\operatorname{Re}(s) > 0$. Если положить

$$\delta\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right) = e^{-\omega(s)}, \tag{40}$$

то сразу получается (36), а $\omega(s)$ можно охарактеризовать как единственный корень уравнения $\Psi(z) = s$ в области $\operatorname{Re}(z) > 0$. Доказательство закончено.

Теорема 9. *Если $\{\xi^*(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то для $k > 0$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi^*(u) < k\} = 1 - k \int_0^t \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k\} \frac{du}{u}. \tag{41}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi^*(u) < k\} = 1 - \mathbf{P}\{\theta(k) \leqslant t\}, \tag{42}$$

что позволяет сразу вывести (41) из (27). Легко видеть, что верна также более общая формула

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi^*(u) < k \text{ и } \xi^*(t) < k - i\} = \mathbf{P}\{\xi^*(t) < k - i\} - \\ - k \int_0^t \frac{1}{u} \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k, \xi^*(t) - \xi^*(u) < -i\} du$$

при $1 \leqslant i < k$. Это также следует из соотношения (3) § 8.

Устремляя в (41) t к ∞, получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} \xi^*(u) < k\} = 1 - k \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^*(u) = k\} \frac{du}{u}. \tag{44}$$

Если, в частности, $\{\xi^*(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, то правая часть равенства (44) превращается в $1 - e^{-\omega k}$, где ω то же, что и в теореме 7.

§ 22. ПРОЦЕСС СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Пусть частица совершает случайное блуждание по оси x. Находясь сначала в точке $x=0$, частица за один шаг может сдвинуться на единицу вправо с вероятностью p и на единицу влево с вероятностью q $(p+q=1,\ 0<p<1)$. Смещения частицы происходят в случайные моменты времени в интервале $(0, \infty)$. Обозначим через $\nu(u)$ число шагов, сделанных частицей в интервале $(0, u]$. Предположим, что $\{\nu(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ и последовательные смещения независимы друг от друга и от процесса $\{\nu(u), 0\leqslant u<\infty\}$. Пусть $\xi(u)$ — положение частицы в момент времени u. Тогда $\{\xi(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — случайный процесс со стационарными независимыми приращениями. При этом $\mathbf{P}\{\xi(0)=0\}=1$ и почти все выборочные функции являются ступенчатыми функциями со скачками 1 и -1.

Процесс $\{\xi(u), 0\leqslant u<\infty\}$ подобен процессам, рассмотренным в § 21, и теоремы, доказанные там, можно применить к этому процессу. Далее, $\xi(u)=N_{\nu(u)}-\nu(u)$ для $0\leqslant u<\infty$, где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с распределениями

$$\mathbf{P}\{\nu_r=0\}=q \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\nu_r=2\}=p, \tag{1}$$

где $p+q=1$ и $0<p<1$. При этом

$$\mathbf{P}\{N_n=n+k\}=\binom{n}{{}^1/_2(n+k)}p^{(n+k)/2}q^{(n-k)/2} \tag{2}$$

для $k=n, n-2, \ldots, -n+2, -n$ и $\mathbf{P}\{N_n=n+k\}=0$ в противном случае. Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\xi(u)=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^n}{n!}\mathbf{P}\{N_n=n+k\}=e^{-\lambda u}\left(\frac{p}{q}\right)^{k/2}I_k(2\lambda p^{1/2}q^{1/2}u) \tag{3}$$

для $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $I_r(x)$ — модифицированная функция Бесселя порядка r, определяемая рядом

$$I_r(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2j+r}}{j!\,(j+r)!} \tag{4}$$

для $r\geqslant 0$ и $I_{-r}(x)=I_r(x)$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\{\xi(u)\}=\lambda(p-q)u \tag{5}$$

и

$$\operatorname{Var}\{\xi(u)\}=\lambda u. \tag{6}$$

Найдем теперь распределение случайной величины $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$. По формуле (21) § 21

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k\} = \mathbf{P}\{\xi(t) < k\} - \int_0^t \frac{\mathbf{E}\{[\xi^*(t-u)]^+\}}{t-u} \mathbf{P}\{\xi(u) = k\} du \qquad (7)$$

для $k > 0$, где $\xi^*(t-u) = -\xi(t-u)$.

Так как $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс того же типа, что и $\{\xi^*(u), 0 \leqslant u < \infty\}$, то для нахождения распределения $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$ можно применить теорему 9 § 21. Из соотношения (41) § 21 получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k\} = 1 - k \int_0^t \mathbf{P}\{\xi(u) = k\} \frac{du}{u} \qquad (8)$$

для $k > 0$.

Докажем теперь непосредственно, что для $k > 0$ также верно и равенство

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k\} = \mathbf{P}\{\xi(t) < k\} - \left(\frac{p}{q}\right)^k \mathbf{P}\{\xi(t) < -k\}. \qquad (9)$$

Если $k > 0$ и $j < k$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k \text{ и } \xi(t) = j \mid \nu(t) = n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{N_r - r < k \text{ для } r = 0, 1, \ldots, n \text{ и } N_n - n = j\} =$$
$$= \left[\binom{n}{^1/_2(n+j)} - \binom{n}{^1/_2(n+j) - k}\right] p^{(n+j)/2} q^{(n-j)/2}. \qquad (10)$$

Смысл этого соотношения можно понять, если принять во внимание, что последовательность $\{N_r - r, r = 0, 1, \ldots, n\}$ описывает рассматриваемое случайное блуждание за первые n шагов. Тогда (10) можно рассматривать как вероятность того, что после n шагов частица находится в точке $x = j$ и в течение этих n шагов никогда не попадает в точку $x = k$. В этих условиях каждый путь имеет вероятность $p^{(n+j)/2} q^{(n-j)/2}$, а число благоприятных путей равно

$$\binom{n}{^1/_2(n+j)} - \binom{n}{^1/_2(n+j) - k}, \qquad (11)$$

что следует из принципов отражения. Это доказывает формулу (10), которую можно представить в эквивалентном виде

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) < k \text{ и } \xi(t) = j \mid \nu(t) = n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \nu(t) = n\} - \left(\frac{p}{q}\right)^k \mathbf{P}\{\xi(t) = j - 2k \mid \nu(t) = n\}. \qquad (12)$$

Соответствующая безусловная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi(u)<k \text{ и } \xi(t)=j\}=\mathbf{P}\{\xi(t)=j\}-\left(\frac{p}{q}\right)^k\mathbf{P}\{\xi(t)=j-2k\}. \quad (13)$$

Складывая равенства (13) для $j<k$, получаем формулу (9), которую и требовалось доказать.

Заметим, что так как $\{\xi^*(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс того же типа, что и $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$, то формулы (7)—(9) также верны и для процесса $\{\xi^*(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$.

Если $\theta(k)$ — время первого прохождения процесса $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ через $x=-k$, где $k>0$, то для $k>0$

$$\mathbf{P}\{\theta(k)\leqslant t\}=1-\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi^*(u)<k\}, \quad (14)$$

где $\xi^*(u)=-\xi(u)$, а правую часть можно получить с помощью формул (7)—(9).

Согласно теореме 4 § 21,

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\xi(u)<k\}=1-\left(\frac{p}{q}\right)^k, \quad (15)$$

если $p<q$ и $k>0$, а согласно теореме 7 § 21,

$$\mathbf{P}\{\theta(k)<\infty\}=\left(\frac{q}{p}\right)^k, \quad (16)$$

если $q<p$ и $k>0$.

Если $1\leqslant i\leqslant k$, то теорема 5 § 21 дает

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant\theta(i)}\xi(u)<k-i\}=\frac{Q_{k-i}}{Q_k}, \quad (17)$$

где

$$Q_k=\frac{C}{q}\left(\frac{1-(p/q)^k}{1-(p/q)}\right), \quad (18)$$

если $p\neq q$ и $k>0$, и, наконец,

$$Q_k=2Ck, \quad (19)$$

если $p=q$ и $k>0$, причем C — произвольная отличная от 0 константа.

§ 23. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Пусть $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — вещественный сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, для которого $\mathbf{P}\{\zeta(0)=0\}=1$ и при всех x

$$\mathbf{P}\{\zeta(u)\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-au}{\sigma u^{1/2}}\right), \quad (1)$$

где a — вещественная константа, σ — положительная константа и

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy \quad (2)$$

— нормальная функция распределения. В этом случае процесс $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ называется процессом броуновского движения или винеровским процессом. Для него $\mathbf{E}\{\zeta(u)\} = au$ и $\operatorname{Var}\{\zeta(u) = \sigma^2 u$ при $u \geqslant 0$, и, кроме того,

$$\mathbf{E}\{e^{-s\zeta(u)}\} = e^{u\Psi(s)}, \tag{3}$$

где

$$\Psi(s) = -as + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \tag{4}$$

для всех $u \geqslant 0$ и всех s.

Пусть $\theta(x)$ — момент первого прохождения процесса $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ через $-x$. Тогда

$$\theta(x) = \inf\{u\colon \zeta(u) < -x \text{ и } 0 \leqslant u < \infty\} \tag{5}$$

при $x > 0$.

Найдем теперь распределения случайных величин $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u)$, $\sup\limits_{0 \leqslant u < \infty} \zeta(u)$, $\theta(x)$ и $\sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} \zeta(u)$. Для этого аппроксимируем процесс $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ семейством подходящих нормализованных процессов случайного блуждания (определенных в § 22). Искомые распределения окажутся пределами соответствующих вероятностей, вычисленных в § 22.

Зададим семейство случайных процессов $\{\xi_\lambda(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ следующим образом: $\{\xi_\lambda(u)\}$ для любого λ есть сепарабельный процесс случайного блуждания со стационарными независимыми приращениями, определенный в § 22, причем связанный с ним пуассоновский процесс имеет интенсивность λ и

$$p = \frac{1}{2} + \frac{a}{2\sigma\lambda^{1/2}}, \quad q = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\sigma\lambda^{1/2}} \tag{6}$$

для любого $\lambda > \sigma^2/a^2$ при $a \neq 0$. Положим

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\xi_\lambda(u)}\right\} = e^{u\Psi_\lambda(s)}. \tag{7}$$

При $\lambda \to \infty$ конечномерные распределения процесса $\left\{\sigma\xi_\lambda(u)/\lambda^{1/2}\right\}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\{\zeta(u)\}$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi_\lambda\left(\frac{\sigma s}{\lambda^{1/2}}\right) = \Psi(s), \tag{8}$$

где $\Psi(s)$ определяется по формуле (4). Но это равенство следует из формулы (6) и представления

$$\Psi_\lambda(s) = \lambda(qe^s + pe^{-s} - 1). \tag{9}$$

В соответствии с этим для $x>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x\}=\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\xi_\lambda(u)<k\}, \tag{10}$$

где $k=[\lambda^{1/2}x/\sigma]$. Правую часть формулы (10) можно получить либо из (7), либо из (8), либо из (9) § 22. Формула (8) § 22 дает

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x\}=1-x\int_0^t\frac{\partial\mathbf{P}\{\zeta(u)\leqslant x\}}{\partial x}\frac{du}{u}=1-\frac{x}{\sigma}\int_0^t\Phi'\left(\frac{x-au}{\sigma u^{1/2}}\right)\frac{du}{u^{3/2}} \tag{11}$$

для $x>0$, а формула (9) § 22 дает для $x>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqslant x\}-e^{2ax/\sigma^2}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqslant -x\}=$$

$$=\Phi\left(\frac{x-at}{\sigma t^{1/2}}\right)-e^{2ax/\sigma^2}\Phi\left(\frac{-x-at}{\sigma t^{1/2}}\right); \tag{12}$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^k=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1+a/(\sigma\lambda^{1/2})}{1-a/(\sigma\lambda^{1/2})}\right)^{x\lambda^{1/2}/\sigma}=e^{2ax/\sigma^2}. \tag{13}$$

Распределение случайной величины $\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)$ получили Бакстер и Донскер [1] аналитическими методами.

Если $a<0$, то, полагая в формуле (11) $t\to\infty$, получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)\leqslant x\}=1-\frac{x}{\sigma}\int_0^\infty\Phi'\left(\frac{x-au}{\sigma u^{1/2}}\right)\frac{du}{u^{3/2}}=1-e^{2ax/\sigma^2} \tag{14}$$

для $x>0$. Если в (12) положить $t\to\infty$, получится тот же результат. Прямое доказательство см. Дуб [4]. Если $a\geqslant 0$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)\leqslant x\}=0$$

для всех x. Если $\theta(x)$ обозначает момент времени, когда в первый раз $\xi(u)=-x$, то из формул (8) и (14) § 22 имеем для $x>0$ и $t>0$

$$\mathbf{P}\{\theta(x)\leqslant t\}=x\int_0^t\frac{\partial\mathbf{P}\{\zeta^*(u)\leqslant x\}}{dx}\frac{du}{u}, \tag{15}$$

где $\zeta^*(u)=-\zeta(u)$ при $u\geqslant 0$. Отсюда

$$\frac{\partial\mathbf{P}\{\theta(x)\leqslant t\}}{\partial t}=\frac{x}{t}\frac{\partial\mathbf{P}\{\zeta^*(t)\leqslant x\}}{\partial x}=\frac{x}{\sigma t^{3/2}}\Phi'\left(\frac{x+at}{\sigma t^{1/2}}\right) \tag{16}$$

при $x>0$ и $t>0$.

Наконец, с помощью (17) § 22 находим

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant\theta(c)}\zeta(u)\leqslant x-c\}=\frac{W(x-c)}{W(x)}\tag{17}$$

при $0<c<x$, где

$$W(x)=\frac{C}{a}(e^{2ax/\sigma^2}-1),\quad\text{если}\quad a\neq 0,\tag{18}$$

и

$$W(x)=\frac{2Cx}{\sigma^2},\quad\text{если}\quad a=0,\tag{19}$$

а C — нулевая константа. Это немедленно получается из (17) — (19) § 22, если положить $k=[\lambda^{1/2}x/\sigma]$, $i=[\lambda^{1/2}c/\sigma]$ и $\lambda\to\infty$.

Если величины $Q_k^{(\lambda)}$, $k=1, 2, \ldots$, определяются формулами (18) и (19) § 22, а p и q задаются формулами (6), то

$$\int_0^\infty e^{-sx}W(x)\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sigma}{\lambda^{1/2}}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k^{(\lambda)}\exp\left[-\frac{sk\sigma}{\lambda^{1/2}}\right]=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{C_\lambda}{\lambda^{1/2}}\frac{\sigma}{\Psi_\lambda(s\sigma/\lambda^{1/2})}=\frac{C}{\Psi(s)}\tag{20}$$

для $\operatorname{Re}(s)>\omega$, где $\omega=0$ при $a\leqslant 0$ и $\omega=2a/\sigma^2$ при $a>0$. Мы взяли здесь $C_\lambda=C\lambda^{1/2}/\sigma$, $C\neq 0$, а $\Psi(s)$ задается формулой (4). Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-sx}W(x)\,dx=\frac{2C}{s(\sigma^2s-2a)}=\frac{C}{a}\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2s-2a}-\frac{1}{s}\right]\tag{21}$$

при $\operatorname{Re}(s)>\omega$, а (18) и (19) можно получить по формуле обращения.

§ 24. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ, НЕ ИМЕЮЩИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СКАЧКОВ

Пусть $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — вещественный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, выборочные функции которого не имеют отрицательных скачков и обращаются в 0 при $u=0$ с вероятностью 1. Тогда функция

$$\mathbf{E}\{e^{-s\zeta(u)}\}=e^{u\Psi(s)}\tag{1}$$

определена при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, а наиболее общая форма $\Psi(s)$ дается выражением

$$\Psi(s)=as+\frac{1}{2}\sigma^2s^2-\int_{+0}^{\infty}\left(1-e^{-sx}-\frac{sx}{1+x^2}\right)dN(x),\tag{2}$$

где a — вещественная константа, σ^2 — неотрицательная константа, а $N(x)$, $0<x<\infty$, — неубывающая функция от x, удовлетворяющая условиям $\lim\limits_{x\to\infty} N(x)=0$ и

$$\int\limits_{+0}^{1} x^2\,dN(x)<\infty. \tag{3}$$

Заметим, что если

$$\int\limits_{+0}^{1} x\,dN(x)<\infty, \tag{4}$$

то (2) сводится к виду

$$\Psi(s)=as+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2-\int\limits_{+0}^{\infty}(1-e^{-sx})\,dN(x), \tag{5}$$

где, вообще говоря, константа a не та, что в (2). Если

$$\int\limits_{1}^{\infty} x\,dN(x)<\infty, \tag{6}$$

то (2) сводится к виду

$$\Psi(s)=as+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2-\int\limits_{+0}^{\infty}(1-e^{-sx}-sx)\,dN(x), \tag{7}$$

где константа a также, вообще говоря, отлична от константы a в формуле (2).

Математическое ожидание случайной величины $\zeta(u)$ равно $\mathbf{E}\{\zeta(u)\}=-\rho u$, где

$$\rho=a-\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{x^3}{1+x^2}\,dN(x); \tag{8}$$

ρ может равняться $-\infty$, но не $+\infty$. Если $\rho\neq-\infty$, то выполняются условия (4) и (6), и $\Psi(s)$ задается формулой (5).

Далее мы будем предполагать, что $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — вещественный сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, причем $\mathbf{P}\{\zeta(0)=0\}=1$, для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$ справедливо равенство (1) и $\Psi(s)$ задается формулой (2). Тривиальные случаи $\mathbf{P}\{\zeta(u)\geqslant 0\}=1$ для всех $u\geqslant 0$ или $\mathbf{P}\{\zeta(u)\leqslant 0\}=1$ для всех $u\geqslant 0$ исключаются. Мы будем также обозначать $\zeta^*(u)=-\zeta(u)$ для всех $u\geqslant 0$ и положим $\mathbf{E}\{\zeta(u)\}=-\rho u$, где $\rho=\Psi'(+0)$.

В этом параграфе мы покажем, что все теоремы § 21 имеют аналоги для процесса $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$. Для нахождения этих аналогов мы аппроксимируем процесс $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ семейством процессов типа, определенного в § 21, после чего искомые распределения окажутся пределами соответствующих вероятностей из § 21.

Рассмотрим процесс $\{\xi(u) = N_{\nu(u)} - \nu(u),\ 0 \leqslant u \leqslant \infty\}$, определенный в § 21, но теперь $\{\nu(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = \pi_j^{(\lambda)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, причем $\{\nu_r\}$ и $\{\nu(u)\}$ независимы. Иначе говоря, мы теперь предполагаем, что распределение величины ν_r, $r = 1, 2, \ldots$, зависит также от λ. Для каждого фиксированного λ обозначим через $\{\xi_\lambda(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ соответствующий процесс. Это процесс со стационарными независимыми приращениями, $\mathbf{P}\{\xi_\lambda(0) = 0\} = 1$ и функция

$$\mathbf{E}\{e^{-s\xi_\lambda(u)}\} = e^{u\Psi_\lambda(s)} \tag{9}$$

определена для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$.

Легко видеть, что можно выбрать распределения $\pi_j^{(\lambda)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и нормировочный множитель $g(\lambda) = c\lambda^{1/2}$ так, что при $\lambda \to \infty$ конечномерные распределения процесса $\{g(\lambda)\xi_\lambda(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, определенного в начале параграфа. Для доказательства достаточно убедиться, что можно выбрать $\pi_j^{(\lambda)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и $g(\lambda)$ так, чтобы при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ выполнялось соотношение

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi_\lambda(g(\lambda)s) = \Psi(s). \tag{10}$$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели броуновское движение и получили выражения для $g(\lambda)$ и $\pi_j^{(\lambda)}$ в явном виде. Сейчас мы применим аналогичную процедуру для нахождения $g(\lambda)$ и подходящих распределений $\{\pi_j^{(\lambda)}\}$.

Рассмотрим семейство сепарабельных случайных процессов $\{\xi_\lambda(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, определенных выше. Для этого семейства при всех x

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u) \leqslant x\} = \lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{P}\{g(\lambda) \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi_\lambda(u) \leqslant x\}. \tag{11}$$

Для процесса $\{\xi_\lambda(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ мы будем использовать те же обозначения, что и для процесса $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, определенного в § 21, и будем добавлять индекс λ. Например, $\gamma_\lambda = \mathbf{E}\{\nu_r\}$, $r = 1, 2, \ldots$, $\rho_\lambda = \lambda(1 - \gamma_\lambda)$ и $Q_k^{(\lambda)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (см. (25) § 21), вместо $\Psi(s)$ мы будем писать $\Psi_\lambda(s)$.

Приступим теперь к формулировке теорем, аналогичных теоремам § 21.

Теорема 1. *Для $x>0$*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqslant x\}-$$
$$-\int_0^t \frac{\mathbf{E}\{[\zeta^*(t-u)]^+\}}{t-u}\mathbf{P}\{x<\zeta(u)<x+du\}, \qquad (12)$$

где $\zeta^*(u)=-\zeta(u)$ *при* $u\geqslant 0$.

Доказательство. Применив формулу (12) § 21 к процессу $\{\xi_\lambda(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ и положив $k=[x/g(\lambda)]$, получим при $\lambda\to\infty$ формулу (12).

Теорема 2.

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\}=\int_0^t \mathbf{E}\{[\zeta(u)]^+\}\frac{du}{u}. \qquad (13)$$

Доказательство. Достаточно применить формулу (10) § 21 к процессу $\{\xi_\lambda(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ и устремить λ к ∞.

Теорема 3. *Если* $\rho>0$, *то для* $x>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)\leqslant x\}=1-\rho\int_0^\infty \mathbf{P}\{x<\zeta(u)<x+du\}. \qquad (14)$$

Доказательство. Применим формулу (13) § 21 к процессу $\{\xi_\lambda(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ и положим $k=[x/g(\lambda)]$. Так как

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda)\lambda(1-\gamma\lambda)=\rho,$$

то доказательство закончено. Формулу (14) можно также получить непосредственно из (12). Заметим, что если $\rho\leqslant 0$, то $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)\leqslant x\}=0$ для всех x.

Теорема 4. *Если* $\rho>0$, *то для всех* $x>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)\leqslant x\}=W(x), \qquad (15)$$

где

$$\int_0^\infty e^{-sx}W(x)\,dx=\frac{\rho}{\Psi(s)} \qquad (16)$$

при $\operatorname{Re}(s)>0$.

Доказательство. Согласно теореме 4 § 21,

$$W(x)=\lim_{\lambda\to\infty} Q^{(\lambda)}_{[x/g(\lambda)]}, \qquad (17)$$

а в силу (19) § 21

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) \sum_{k=1}^\infty Q_k^{(\lambda)} e^{-g(\lambda)sk} =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{g(\lambda)\,\rho_\lambda}{\Psi_\lambda(g(\lambda)\,s)} = \frac{\rho}{\Psi(s)} \tag{18}$$

для $\operatorname{Re}(s) > 0$. Теорема доказана.

Пусть $\theta(x)$ — момент времени первого прохождения процесса $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ через $-x$. Тогда для $x > 0$

$$\theta(x) = \inf\{\zeta(u) \leqslant -x \ \text{ и } \ 0 \leqslant u < \infty\} \tag{19}$$

и $\theta(x) = \infty$ при $\zeta(u) > -x$ для всех $u \geqslant 0$.

Теорема 5. *Для* $0 < c \leqslant x$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant\theta(c)} \zeta(u) \leqslant x - c\} = \frac{W(x-c)}{W(x)}, \tag{20}$$

где

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\,dx = \frac{C}{\Psi(s)} \tag{21}$$

при $\operatorname{Re}(s) > \omega$; *здесь* ω — *наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\Psi(s) = 0$, *а* C — *отличная от* 0 *константа. Если* $\rho \geqslant 0$, *то* $\omega = 0$, *а если* $\rho < 0$, *то* $\omega > 0$.

Доказательство. Применяя теорему 5 § 21 к процессу $\{\xi_\lambda(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ и полагая $k = [x/g(\lambda)]$, $i = [c/g(\lambda)]$ и $\lambda \to \infty$, получаем формулу (20). В ней

$$W(x) = \lim_{\lambda\to\infty} Q^{(\lambda)}_{[x/g(\lambda)]} \tag{22}$$

при $x \geqslant 0$. В силу (25) § 21

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) \sum_{k=1}^\infty Q_k^{(\lambda)} e^{-g(\lambda)sk} =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{g(\lambda)\,C_\lambda}{\Psi_\lambda(g(\lambda)\,s)} = \frac{C}{\Psi(s)}, \tag{23}$$

где для получения предела мы положили $C_\lambda = C/g(\lambda)$, $C \neq 0$.

Это преобразование Лапласа сходится при $\operatorname{Re}(s) > \omega$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Psi(s) = 0$.

Теорема 6. *Если* $x>0$, *то*

$$\mathbf{P}\{\theta(x)\leqslant t\}=\int_0^t \frac{x}{u}\,\mathbf{P}\{x<\zeta^*(u)<x+du\}, \tag{24}$$

где $\zeta^*(u)=-\zeta(u)$ *для всех* $u\geqslant 0$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из теоремы 6 § 21, если ее применить к процессу $\{\xi_\lambda(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$, положив $k=[x/g(\lambda)]$ и устремив λ к ∞.

Теорема 7. *Если* $x>0$, *то*

$$\mathbf{P}\{\theta(x)<\infty\}=e^{-\omega x}, \tag{25}$$

где ω — *наибольший неотрицательный корень уравнения* $\Psi(s)=0$. *Если* $\rho\geqslant 0$, *то* $\omega=0$, *а если* $\rho<0$, *то* $\omega>0$. *Если* $\rho>0$, *то*

$$\mathbf{E}\{\theta(x)\}=\frac{x}{\rho}, \tag{26}$$

а если $\rho=0$, *то* $\mathbf{E}\{\theta(x)\}=\infty$.

Доказательство. Пусть ω_λ — наибольший неотрицательный корень уравнения $\Psi_\lambda(s)=0$. Тогда по теореме 7 § 21 равенство (25) верно для $\omega=\lim\limits_{\lambda\to\infty} g(\lambda)\,\omega_\lambda$. Отсюда $\Psi(\omega)=0$ и ω — максимальный неотрицательный корень уравнения $\Psi(\omega)=0$. Из соотношения (32) § 21 следует, что при $x>0$ и $\rho>0$

$$\mathbf{E}\{\theta(x)\}=x\int_0^\infty \frac{1}{u}\,\mathbf{P}\{x<\zeta^*(u)<x+du\}=\frac{x}{\rho}, \tag{27}$$

или

$$\mathbf{E}\{\theta(x)\}=\int_0^\infty \mathbf{P}\{0<\zeta^*(u)\leqslant x\}\,du. \tag{28}$$

Теорема 8. *Если* $x>0$, *то для* $\operatorname{Re}(s)>0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\theta(x)}\}=e^{-x\omega(s)}, \tag{29}$$

где $z=\omega(s)$ — *единственный корень уравнения*

$$\Psi(z)=s \tag{30}$$

в области $\operatorname{Re}(z)>0$.

Доказательство. Пусть $\omega_\lambda(s)$ для $\operatorname{Re}(s)>0$ будет единственным корнем уравнения $\Psi_\lambda(z)=s$ в области $\operatorname{Re}(z)>0$. Тогда теорема 8 § 21 дает (29), где $\omega(s)=\lim\limits_{\lambda\to\infty} g(\lambda)\,\omega_\lambda(s)$. При этом $z=\omega(s)$ удовлетворяет уравнению $\Psi(z)=s$ и является единственным корнем уравнения в области $\operatorname{Re}(z)>0$. Доказательство закончено.

Рассмотрим теперь процесс $\{\zeta^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, где $\zeta^*(u) = -\zeta(u)$ при $u \geqslant 0$.

Теорема 9. *Если* $x > 0$, *то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta^*(u) \leqslant x\right\} = 1 - \int_0^t \frac{x}{u} \mathbf{P}\{x < \zeta^*(u) < x + du\}. \tag{31}$$

Доказательство. Так как

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta^*(u) \leqslant x\right\} = 1 - \mathbf{P}\{\theta(x) \leqslant t\}, \tag{32}$$

то (31) следует из (24).

Если в (31) положить $t \to \infty$, то получим

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} \zeta^*(u) \leqslant x\right\} = 1 - \int_0^\infty \frac{x}{u} \mathbf{P}\{x < \zeta^*(u) < x + du\} = 1 - e^{-\omega x} \tag{33}$$

для $x > 0$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Psi(s) = 0$.

В. М. Золотарев [10] доказал теоремы 4, 6—8 этого параграфа аналитическими методами.

§ 25. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Если $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — вещественный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями и $\mathbf{P}\{\zeta(0) = 0\} = 1$, то функция

$$\mathbf{E}\{e^{-s\zeta(u)}\} = e^{u\Psi(s)} \tag{1}$$

определена для $\operatorname{Re}(s) = 0$ и

$$\Psi(s) = as + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 - \int_{+0}^{\infty} \left(1 - e^{-sx} - \frac{sx}{1+x^2}\right) dN(x) - \\ - \int_{-\infty}^{-0} \left(1 - e^{-sx} - \frac{sx}{1+x^2}\right) dM(x), \tag{2}$$

где a — вещественная константа, σ^2 — неотрицательная константа, $N(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, — неубывающая функция от x, удовлетворяющая условиям $\lim\limits_{x \to \infty} N(x) = 0$ и

$$\int_{+0}^{1} x^2\, dN(x) < \infty, \tag{3}$$

а $M(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, — неубывающая функция от x, удовлетворяющая условиям $\lim\limits_{x \to -\infty} M(x) = 0$ и

$$\int\limits_{-1}^{-0} x^2\, dM(x) < \infty. \tag{4}$$

Для сепарабельного процесса $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ в общем случае Бакстер и Донскер [1] дали метод нахождения распределения функции от случайной величины $\eta(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u)$. Их результат можно сформулировать так. Если $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ и $0 < w < \infty$, то

$$w \int\limits_0^\infty e^{-wt} \mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\, dt = \exp\left[-\mathbf{A}\left\{\log\left(1 - \frac{\Psi(s)}{w}\right)\right\}\right], \tag{5}$$

где оператор $\mathbf{A}$ определяется так же, как в § 11.

Обобщая результат Спицера (формула (9) § 11), Бакстер и Донскер на самом деле показали, что при $s > 0$ и $w > 0$

$$w \int\limits_0^\infty e^{-wt} \mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\, dt = \exp\left\{-\int\limits_w^\infty \int\limits_0^\infty e^{-ut}\left[1 - \mathbf{A} e^{t\Psi(s)}\right] dt\, du\right\}. \tag{6}$$

Если в этой формуле поменять местами интегралы и оператор $\mathbf{A}$, получим (5). Бакстер и Донскер смогли упростить формулу (6), выбирая специальным образом представление для оператора $\mathbf{A}$ (формула (17) § 11) и налагая некоторые ограничения на функцию $\Psi(s)$. Кажется вполне правдоподобным, что формула (5) выполняется без всяких ограничений. Ограничения на $\Psi(s)$ необходимы только при специализации оператора $\mathbf{A}$.

Во многих случаях двойное преобразование Лапласа — Стильтьеса (5) можно найти методом факторизации. Предположим, что

$$1 - \frac{\Psi(s)}{w} = \left[\Psi^+(z, w)\right]^\alpha \left[\Psi^-(z, w)\right]^\beta \tag{7}$$

при $\operatorname{Re}(z) = 0$, где $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, функция $\Psi^+(z, w)$ регулярна и отлична от нуля в области $\operatorname{Re}(z) > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, а $\Psi^-(z, w)$ регулярна и отлична от нуля в области $\operatorname{Re}(z) < 0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}(z) \leqslant 0$. Кроме того,

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\log \Psi^+(z, w)}{z} = 0 \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0),$$

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\log \Psi^-(z, w)}{z} = 0 \qquad (\operatorname{Re}(z) < 0).$$

Тогда

$$\mathbf{A}\left\{\log\left(1-\frac{\Psi(s)}{w}\right)\right\}=\alpha\log\Psi^{+}(s, w)+\beta\log\Psi^{-}(0, w) \tag{8}$$

и

$$w\int_0^\infty e^{-wt}\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\,dt=\left[\frac{\Psi^{+}(0, w)}{\Psi^{+}(s, w)}\right]^{\alpha} \tag{9}$$

для $\operatorname{Re}(w)>0$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$.

Если $\eta=\sup\limits_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)$ — собственная случайная величина, то

$$\mathbf{E}\{e^{-s\eta}\}=\lim_{w\to 0} w\int_0^\infty e^{-wt}\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\,dt \tag{10}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. Формулу (10) можно получить также факторизацией функции $\Psi(z)$.

§ 26. ЗАДАЧИ

1. Пусть требования, поступающие в интервале времени $(0, \infty)$, образуют пуассоновский процесс интенсивности λ. Их обслуживает единственный прибор. Времена обслуживания являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $H(x)=1-e^{-\mu x}$ $(x\geqslant 0)$. Они не зависят от моментов поступления требований. Прибор бездействует тогда и только тогда, когда в системе нет требований. Обозначим через $\zeta(t)$ длину очереди в момент t. Найти вероятность $P_{ik}(t)=\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqslant k\mid\zeta(0)=i\}$.

2. В условиях предыдущей задачи обозначим через $\theta(i)$ момент, когда в интервале времени $(0, \infty)$ впервые $\zeta(u)=0$ в предположении, что $\zeta(0)=i$. Иначе говоря, $\theta(i)$ — продолжительность начального периода занятости. Найти вероятность $P\{\theta(i)\leqslant t\}$.

3. Пусть $\{\zeta(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный процесс броуновского движения, для которого $\mathbf{E}\{\zeta(u)\}=\alpha u$ и $\operatorname{Var}\{\zeta(u)\}=\sigma^2 u$. Найти вероятность $\mathbf{P}\{-y\leqslant\zeta(u)\leqslant x$ для $0\leqslant u\leqslant t\}$, где x и y положительны.

4. Пусть $\{\zeta(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный процесс броуновского движения, для которого $\mathbf{E}\{\zeta(u)\}=au$ и $\operatorname{Var}\{\zeta(u)=\sigma^2 u\}$. Найти вероятность $\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x\}$ методом факторизации (см. Бакстер и Донскер [1], а также Дингес [3]).

5. Пусть $\{\xi(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями и распределением

$$\mathbf{P}\{\xi(u)=k\}=e^{-\lambda u}\left(\frac{p}{q}\right)^{k/2}I_k(2\lambda p^{1/2}q^{1/2}u)$$

для $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (см. § 22). Доказать, что

$$1-k\int_0^t \mathbf{P}\{\xi(u)=k\}\frac{du}{u}=\mathbf{P}\{\xi(t)<k\}-\left(\frac{p}{q}\right)^k P\{\xi(t)<-k\}$$

для $k>0$.

6. Пусть $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, для которого $\mathbf{E}\{e^{-s\zeta(u)}\} = e^{u\Psi(s)}$ при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, где

$$\Psi(s) = as - \int_0^\infty \left(1 - e^{-sx} - \frac{sx}{1+x^2}\right) dN(x)$$

и $N(x) = -1/x$ при $x > 0$. Обозначим через $\theta(c)$ момент первого прохождения процесса $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ через $x = -c$. Найти

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} \zeta(u) \leqslant x - c\}$$

для $0 < c < x$.

7. Пусть $\{\zeta(u), 0 \leqslant 0 < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, для которого $\mathrm{E}\{e^{-s\zeta(u)}\} = e^{-u|s|}$ при $\operatorname{Re}(s) = 0$, т. е. $\mathbf{P}\{\zeta(u) \leqslant x\} = {}^1/_2 + (1/\pi) \operatorname{arctg} x/u$. Процесс $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — устойчивый процесс с индексом $c = 1$; он называется процессом Коши. Найти

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u) \leqslant x\}$$

(см. Дарлинг [2]).

8. Доказать формулу (5) § 25.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baxter G., Donsker M. D., On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 73—87.

[2] Darling D. A., The maximum of sums of stable random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 164—169.

[3] Dinges H., Ein verallgemeinertes Spiegelungsprinzip für den Prozess der Brownschen Bewegung, *Z. Wahr.*, **1** (1962), 177—196.

[4] Doob J. L., Heuristic approach to the Kolmogorov — Smirnov theorems, *Ann. Math. Statist.*, **20** (1949), 393—403.

[5] Kac M., Some remarks on stable processes with independent increments, Probability and Statistics. The Harald Cramér Volume, Stockholm, New York, 1959, pp. 130—138.

[6] Keilson J., The first passage time density for homogeneous skip-free walks on the continuum, *Ann. Math. Statist.*, **34** (1963), 1003—1011.

[7] Reich E., Some combinatorial theorems for continuous parameter processes, *Math. Scand.*, **9** (1961), 243—257.

[8] Takács L., On combinatorial methods in the theory of stochastic processes, Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., vol. II, Part I, University of California Press, 1967, pp. 431—447.

[9] Золотарев В. М., Закон двойственности в классе безгранично делимых законов, *Труды Математ. ин-та им. Стеклова*, **64** (1961), 52—60.

[10] Золотарев В. М., Момент первого достижения уровня и поведение в бесконечности для одного класса процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, **9** (1964), 653—662.

Глава 5

ТЕОРИЯ ОЧЕРЕДЕЙ

§ 27. ОЧЕРЕДИ К ОДНОМУ ОБСЛУЖИВАЮЩЕМУ ПРИБОРУ

Теория очередей начала развиваться в XX веке в связи с запросами телефонии. Первые работы были сделаны Эрлангом [20—22], изучившим распределение времени задержки вызовов в телефонных переговорах. Значительный прогресс в математической теории очередей был достигнут в тридцатые годы благодаря работам Полячека [53, 54], А. Н. Колмогорова [45], А. Я. Хинчина [42, 43] и других. В настоящее время имеется огромное количество литературы по теории очередей и ее применениям (см. Дойг [19], Саати [66], Вольд [90]). Применяется теория очередей в основном в технике (телефония, сети связи, электронные вычислительные машины), в промышленности (обслуживающие автоматы, конвейеры, склады), на транспорте (аэропорты, гавани, железнодорожные и автобусные станции, уличное движение, почта), в торговле (рынки сбыта, банки, билетные кассы), а также в повседневной жизни (лифты, рестораны, парикмахерские).

Мы будем пользоваться терминами: система обслуживания, требования, обслуживающие приборы, время обслуживания. На этом языке можно описать любой мыслимый процесс. Например, в телефонии термины телефонная станция, вызовы, линии, время занятости соответствуют системе обслуживания, требованиям, обслуживающим приборам, времени обслуживания.

Механизм образования очереди очень прост. Требования поступают в очередь и обслуживаются одним или более приборами. После обслуживания каждое требование выходит из системы. Время, проведенное требованием в системе, состоит из времени ожидания (возможно, равного нулю) и времени обслуживания. Время прибора складывается из чередующихся между собой периодов занятости и периодов, свободных от требований.

Наиболее важные задачи в теории очередей связаны со случайными флуктуациями длины очереди (линии ожидания) и случайными флуктуациями времени ожидания (задержки). Знание стохастических законов, управляющих этими флуктуациями, дает возможность проектировать требуемые системы обслуживания (достаточно большое помещение для ожидания, достаточное число приборов и т. д.).

В этой главе мы будем рассматривать следующую математическую модель обслуживания: в интервале времени $[0, \infty)$ требования прибывают на обслуживание в соответствии с некоторым случайным процессом. Прибывшие требования обслуживаются одним обслуживающим прибором, причем времена обслуживания являются случайными величинами. Порядок обслуживания не задается, но предполагается, что обслуживающий прибор занят, если в системе есть хотя бы одно требование.

Мы изучим задачи, связанные с флуктуациями длины очереди и флуктуациями времени ожидания.

Длина очереди в момент t обозначается через $\xi(t)$ и определяется как число требований в системе в момент t, включая обслуживаемое, если таковое имеется. Будем обозначать через ξ_n длину очереди непосредственно перед поступлением n-го требования, а через ζ_n — длину очереди непосредственно после окончания обслуживания n-го требования.

Время ожидания в момент t обозначается через $\eta(t)$ и определяется как время, необходимое для завершения обслуживания всех требований, имеющихся в системе к моменту t. Если, в частности, обслуживание производится в порядке поступления, то $\eta(t)$ является временем ожидания требования, поступившего в систему в момент t. При этом $\eta(t)$ можно интерпретировать как виртуальное время ожидания в момент t, определяемое для всех $t \geqslant 0$. Если требование поступает в момент t, то его действительное время ожидания равно $\eta(t-0)$. Виртуальному времени ожидания можно придавать реальный физический смысл. Например, если рассматривать поступление телеграфных сообщений, то виртуальное время ожидания равно длине ленты непрочитанной части телеграфного сообщения к моменту t. Можно даже представить себе, что используется стрелка с часовым механизмом, отсчитывающая время, и в момент поступления требования мы передвигаем стрелку вперед на длину, равную времени, необходимому для его обслуживания. Так как такие часы идут только до тех пор, пока в системе есть требования, они в любой момент показывают виртуальное время ожидания. Таким образом, на этих часах прибывающий клиент может немедленно увидеть свое действительное время ожидания. Вообще $\eta(t)$ можно интерпретировать как время занятости (полной загрузки) прибора в момент t. Через η_n мы будем обозначать время ожидания непосредственно перед поступлением n-го требования. Если обслуживание производится в порядке поступления, то η_n есть истинное время ожидания n-го поступившего требования.

Процесс обслуживания можно охарактеризовать с двух различных точек зрения в соответствии с тем, интересуемся ли мы флуктуациями длины очереди или флуктуациями времени ожидания.

Процесс Q. Предположим, что обслуживающий прибор начинает работу в момент времени $t=0$ и к этому моменту ζ_0 требований уже ожидают обслуживания. Начальная длина очереди ζ_0 является случайной величиной, принимающей неотрицательные целые значения. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — числа требований, вставших в очередь во время обслуживания первого, второго, ..., r-го, ... требований, и пусть $N_0 = 0$, $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots$. В этом случае будет рассматриваться процесс типа

$$Q = \{\zeta_0;\ N_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Нас будут интересовать распределения следующих случайных величин:

ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, длины очереди непосредственно перед поступлением n-го требования;

ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, длины очереди непосредственно после окончания обслуживания n-го требования; ζ_0 — начальная длина очереди;

ρ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, числа требований, обслуженных в n-й период занятости;

α_n, числа нулей среди $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$;

β_n, числа положительных членов среди $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$. Очевидно, что $\alpha_n + \beta_n = n$.

Случайные величины α_n и β_n можно также интерпретировать как число обслуживаний среди первых n обслуживаний, которым предшествует период бездействия прибора, и число обслуживаний среди первых n обслуживаний, которым не предшествует период бездействия прибора. При $\zeta_0 = i$ среди первых n поступающих требований число требований, для которых в момент их поступления обслуживающий прибор занят, равно $\beta_{n+1} - i$.

Все эти случайные величины полностью определяются заданием

$$\zeta_0 \text{ и } N_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots.$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что ζ_0 и N_r, $r = 0, 1, 2, \ldots$, независимы. Случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ будут либо переставляемыми случайными величинами, принимающими неотрицательные целые значения, либо, в частности, взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, принимающими неотрицательные целые значения.

Процесс W. Пусть обслуживающий прибор начинает работу в момент времени $u = 0$ и в этот момент его начальное время занятости определяется неотрицательной случайной величиной $\eta(0)$. Обозначим через $\chi(u)$ полное (накопленное) время обслуживания всех требований, прибывших в интервале времени $[0, u]$. В этом случае рассматриваемый процесс будет процессом образования очереди — процессом типа

$$W = \{\eta(0);\ \chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}.$$

Нас будут интересовать распределения следующих случайных величин:

$\eta(t)$, времени ожидания в момент t;

θ_r $(r=0, 1, 2, \ldots)$, длины r-го периода занятости;

$\alpha(t)$, полного (накопленного) времени бездействия обслуживающего прибора в интервале $(0, t)$;

$\beta(t)$, полного (накопленного) времени занятости обслуживающего прибора в интервале $(0, t)$. Очевидно, что $\alpha(t)+\beta(t)=t$.

Все эти случайные величины полностью определяются заданием

$$\eta(0) \text{ и } \{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}.$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что случайная величина $\eta(0)$ и случайный процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ независимы. Случайный процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ будет иметь либо переставляемые, либо стационарные независимые приращения. Почти все его выборочные функции будут неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u=0$.

Двойственные процессы

Удобно рассматривать вместе с процессами Q и W тесно связанные с ними процессы Q^* и W^*.

Процесс Q^*. Рассмотрим определенный выше процесс образования очереди $Q=\{\zeta_0;\ N_r,\ r=0, 1, 2, \ldots\}$. Предположим, что числа требований, поступающих в течение 1-го, 2-го, ..., r-го ... периодов обслуживания, равны соответственно $\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_r^*, \ldots$, где $\{\nu_r^*\}$ — двойственная последовательность для $\{\nu_r\}$, определенная в § 9. Положим $N_0^*=0$ и $N_r^*=\nu_1^*+\ldots+\nu_r^*$ для $r=1, 2, \ldots$. Тогда процесс образования очереди

$$Q^*=\{\zeta_0;\ N_r^*,\ r=0, 1, 2, \ldots\}$$

называется двойственным процессом для $Q=\{\zeta_0;\ N_r,\ r=0, 1, 2, \ldots\}$. Обратно, Q есть двойственный процесс для Q^*. Длина очереди непосредственно перед моментом времени $u=0$ в двойственном процессе Q^* равна ζ_0. Для двойственного процесса используются те же обозначения, что и для Q, но с добавлением звездочки. Таким образом, для процесса Q^* обозначения ξ_n^*, ζ_n^*, ρ_n^*, α_n^*, β_n^* имеют тот же смысл, что и ξ_n, ζ_n, ρ_n, α_n, β_n для процесса Q.

Процесс W^*. Рассмотрим определенный выше процесс образования очереди $W=\{\eta(0);\ \chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$. Предположим, что полное время обслуживания всех требований, поступающих в интервале времени $[0, u]$, равно $\chi^*(u)$, где $\{\chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — определенный в § 18 двойственный процесс для $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$. Процесс образования очереди

$$W^*=\{\eta(0);\ \chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$$

называется двойственным процессом для $W=\{\eta(0); \chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$. Обратно, W — двойственный процесс для W^*. В двойственном процессе W^* время занятости обслуживающего прибора непосредственно перед моментом $u=0$ равно $\eta(0)$. Для двойственного процесса W^* используются те же обозначения, что и для W, но с добавлением звездочки. Таким образом, для W^* обозначения $\eta^*(t)$, θ_r^*, $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ имеют тот же смысл, что и $\eta(t)$, θ_r, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ для процесса W.

Некоторые результаты, полученные для процессов Q и W, можно перенести на процессы Q^* и W^* и обратно.

Обратные процессы

Рассмотрим процессы Q и W в следующей ситуации. В интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают в очередь в моменты τ_r, $r=1, 2, \ldots$; $\tau_0=0$. Пусть в момент $u=0$ требование не поступает. Пусть χ_r, $r=1, 2, \ldots$, — длительность r-го обслуживания. Для процесса Q начальное состояние равно ζ_0 (начальная длина очереди к моменту $u=0$). Для процесса W начальное состояние равно $\eta(0)$ (начальное время занятости прибора в момент $u=0$).

Зададим теперь процессы Q' и W'. Пусть в интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают на обслуживание в моменты τ_r', $r=1, 2, \ldots$, причем $\tau_0'=0$. Для процесса Q' в момент $\tau_0'=0$ требование не поступает, а для процесса W' в момент $\tau_0'=0$ поступает одно требование. Пусть χ_r', $r=1, 2, \ldots$, — длительность r-го обслуживания. Для процесса Q' начальное состояние равно ζ_0 (начальная длина очереди непосредственно перед моментом $u=0$). Для процесса W' начальное состояние равно $\eta(0)$ (начальное время занятости прибора непосредственно перед $u=0$). Время обслуживания требования, поступившего в момент $u=0$, в $\eta(0)$ не включается.

Если

$$\tau_r'=\chi_1+\chi_2+\ldots+\chi_r \text{ для } r=1, 2, \ldots$$

и

$$\chi_r'=\tau_r-\tau_{r-1} \text{ для } r=1, 2, \ldots,$$

то Q' называется обратным процессом для Q, а W' — обратным процессом для W. Иначе говоря, если для данного процесса поменять местами времена поступления требований и времена обслуживания, оставляя начальное состояние неизменным, то получится обратный процесс.

Для данного процесса образования очереди обратные процессы Q' и W' тесно связаны с двойственными процессами Q^* и W^*. Многие вероятности для обратных процессов совпадают с соответствующими вероятностями для двойственных процессов.

§ 28. ФЛУКТУАЦИИ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ

Рассмотрим процесс образования очереди $Q=\{\zeta_0; N_r, r=0, 1, 2, \ldots\}$, введенный в § 27. Предполагается, что $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$, $r=1, 2, \ldots$, где $\{\nu_r\}$ — случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Нас будут интересовать распределения случайных величин ξ_n; ζ_n, α_n, β_n и ρ_n для любого n. Эти случайные величины полностью определяются процессом Q. Легко проверить, что справедливы следующие утверждения.

Длина очереди непосредственно после окончания n-го требования равна

$$\zeta_n=\max\{N_n-N_r-n+r+1 \text{ для } r=0, 1, \ldots, n-1 \text{ и } \zeta_0+N_n-n\}. \tag{1}$$

Действительно,

$$\zeta_n=[\zeta_{n-1}-1]^+ +\nu_n, \qquad n=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

а потому формула (1) верна, ибо если среди чисел $0, 1, \ldots, n-1$ найдется такое наибольшее r, что $\zeta_r=0$, то $\zeta_n=\nu_{r+1}+\ldots+\nu_n-n+r+1$, а если такого r нет, то $\zeta_n=\zeta_0-\nu_1+\ldots+\nu_n-n$.

Если для любого n известно распределение случайной величины ζ_n, то распределение величины ξ_n немедленно получается из равенства

$$\mathbf{P}\{\xi_{n+k+1}\leqslant k|\zeta_0=i\}=\mathbf{P}\{\zeta_{n+1}\leqslant k|\zeta_0=i\}. \tag{3}$$

Действительно, при $\zeta_0=i$ каждое из событий $\{\xi_{n+k+1}\leqslant k\}$ и $\{\zeta_{n+i}\leqslant k\}$ происходит тогда и только тогда, когда $(n+k+1)$-е требование поступает после окончания $(n+i)$-го требования.

Число обслуживаний (среди первых n), которым предшествует период бездействия прибора, равно

$$\alpha_n=\max\{0 \text{ и } r-N_r+1-\zeta_0 \text{ для } r=0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{4}$$

и $\beta_n=n-\alpha_n$. Кроме того, очевидно, что

$$\beta_n=\zeta_0+N_n-\zeta_n. \tag{5}$$

Число обслуживаний в начальный период занятости прибора равно

$$\rho_0=\min\{r\colon \zeta_0+N_r=r \text{ и } r=0, 1, \ldots\}, \tag{6}$$

а если такого r нет, то $\rho_0=\infty$.

Между распределениями случайных величин α_n и ρ_0 существует интересная связь: для $0\leqslant k<n$

$$\mathbf{P}\{\alpha_n>k|\zeta_0=i\}=\mathbf{P}\{\rho_0<n|\zeta_0=i+k\} \tag{7}$$

и

$$\mathbf{P}\{\alpha_n=0|\zeta_0=i\}=\mathbf{P}\{\rho_0\geqslant n|\zeta_0=i\}. \tag{8}$$

Равенство (8) очевидно. Для доказательства (7) заметим, что из (4) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{\alpha_n > k\} = \mathbf{P}\{\zeta_0 + N_r + k \leqslant r \text{ для некоторого } r = 0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{9}$$

а из (6), что

$$\mathbf{P}\{\rho_0 < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_0 + N_r \leqslant r \text{ для некоторого } r = 0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), видим, что вероятность того, что $\alpha_n > k$ для процесса с начальной длиной очереди $\zeta_0 = i$, равна вероятности того, что $\rho_0 < n$ для процесса с начальной длиной очереди $\zeta_0 = i + k$. Отсюда и следует (7).

Процесс Q

Далее мы будем предполагать, что $\{\nu_r\}$ — либо переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, либо, в частности, взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Для них мы будем использовать те же обозначения, что и в гл. 2, а именно $\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = \pi_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbf{E}\{z^{\nu_r}\} = \pi(z)$, $\mathbf{E}\{\nu_r\} = \gamma$, $\mathbf{E}\{\nu_r(\nu_r - 1)\} = \gamma_2$, $\operatorname{Var}\{\nu_r\} = \sigma^2$ и $z = \delta$ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z) = z$. Если $\gamma \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\delta = 1$. Если $\gamma > 1$ или $\pi_1 = 1$, то $0 \leqslant \delta < 1$.

Теорема 1. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, то при $i \geqslant 1$*

$$\mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k \mid \zeta_0 = i\} = \mathbf{P}\{N_n \leqslant n + k - i\} - \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{l=0}^{n-i-j} \left(1 - \frac{l}{n-j}\right) \mathbf{P}\{N_j = j + k,\ N_n = j + k + l\},$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k \mid \zeta_0 = 0\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k \mid \zeta_0 = 1\} \tag{11}$$

и, в частности,

$$\mathbf{P}\{\zeta_n = 0 \mid \zeta_n = i\} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{P}\{N_n = j\} \tag{12}$$

при $i \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим соотношение (1) для ζ_n. Если заменить $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ на $\nu_n, \nu_{n-1}, \ldots, \nu_1$, получим новую случайную величину

$$\xi_n = \max\{N_r - r + 1 \text{ для } r = 1, \ldots, n \text{ и } N_n - n + \zeta_0\}, \tag{13}$$

распределение которой совпадает с распределением величины ζ_n. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k \mid \zeta_0 = i\} = \mathbf{P}\{N_r < r + k \text{ для } r = 1, \ldots, n \text{ и } N_n \leqslant n + k - i\}. \tag{14}$$

Для $i \geqslant 1$ правую часть равенства (14) можно найти из формулы (2) § 6. При $j = 0$ и $i = 1$ значения (14) совпадают. Если же $k = 0$, то (14) можно получить из формулы (4) § 6. Теорема доказана.

Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, то в соотношении (11) можно написать $\mathbf{P}\{N_j = j + k, \quad N_n = j + k + l\} = \mathbf{P}\{N_j = j + k\}\mathbf{P}\{N_{n-j} = l\}$. Тогда (11) и (12) дают

$$\mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k \mid \zeta_0 = i\} = \mathbf{P}\{N_n \leqslant n + k - i\} - \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\{\zeta_{n-j} = 0 \mid \zeta_0 = i\}\mathbf{P}\{N_j = j + k\} \tag{15}$$

для $i \geqslant 0$. Устранив условие $\zeta_0 = j$, получим

$$\mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k\} = \mathbf{P}\{\zeta_0 + N_n \leqslant n + k\} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{\zeta_{n-j} = 0\}\mathbf{P}\{N_j = j + k\}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Если $\{\nu_r\}$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины и $\gamma < 1$, то предельное распределение $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = k\} = P_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, существует и не зависит от распределения начальной длины очереди. Для $|z| < 1$*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = \frac{(1-\gamma)(1-z)\pi(z)}{\pi(z) - z}, \tag{17}$$

где $P_0 = 1 - \gamma$, а P_k, $k = 1, 2, \ldots$, задаются формулами (15) и (16) § 7. Вероятности $Q_k = P_0 + \ldots + P_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, задаются формулами (10) и (11) § 7. Кроме того, для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$Q_k = 1 - (1 - \gamma)\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_j = j + k\}. \tag{18}$$

Если $\gamma \geqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = k\} = 0$ для любого k вне зависимости от распределения начальной длины очереди.

Доказательство. Предельные распределения для $\{\xi_n\}$ и $\{\zeta_n\}$ совпадают, ибо из (3) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant k \mid \zeta_0 = i\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k \mid \zeta_0 = i\} \tag{19}$$

для любого i. Далее, в силу (14)

$$\mathbf{P}\{N_r < r+k \text{ для } r=1, \ldots, n\} - \mathbf{P}\{\zeta_0 + N_n > n+k\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k\} \leqslant \mathbf{P}\{N_r < r+k \text{ для } r=1, \ldots, n\}. \quad (20)$$

Согласно слабому закону больших чисел, $\lim\limits_{n\to\infty} N_n/n = \gamma$ по вероятности. Если $\gamma < 1$, то из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta_0 + N_n > n+k\} = 0$ для любой случайной величины ζ_0 и для любого k. Пусть $\gamma < 1$; положим в (20) $n \to \infty$. Тогда по теореме о непрерывности для вероятностей

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k\} = \mathbf{P}\{N_r < r+k \text{ для } r=1, 2, \ldots\} = Q_k, \quad (21)$$

вне зависимости от распределения начальной длины очереди. Вероятности $\{Q_k\}$ заданы в теореме 3 (или теореме 4) § 6. Явные формулы для Q_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, и $P_k = Q_k - Q_{k-1}$, $k=1, 2, \ldots$, приведены в § 7.

При $\gamma \geqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$ по теореме 3 § 6 правая часть неравенства (20) стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant k\} = 0$ для всех k, и теорема доказана.

Замечание. При $\pi_0 > 0$ и $\pi_0 + \pi_1 < 1$ теорему 2 можно доказать также с помощью теории цепей Маркова. В этом случае $\{\zeta_n, n=0, 1, 2, \ldots\}$ является неприводимой и апериодической цепью Маркова с пространством состояний $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Следовательно, пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta_n = k\} = P_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, существуют и не зависят от начальной длины очереди. При этом либо (i) $P_k > 0$ для $k=0, 1, 2, \ldots$ и $\{P_k\}$ — вероятностное распределение, т. е. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k = 1$, либо (ii) $P_k = 0$ для $k=0, 1, 2, \ldots$. В случае (i) $\{\zeta_n\}$ имеет единственное стационарное распределение, согласующееся с $\{P_k\}$. В случае (ii) $\{\zeta_n\}$ не имеет стационарного распределения.

Пусть $\{P_k\}$ — стационарное распределение для $\{\zeta_n\}$. Положим

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k \quad (22)$$

для $|z| \leqslant 1$. Тогда в силу (2)

$$P(z) = \left[P_0 + \frac{P(z) - P_0}{z}\right] \pi(z), \quad (23)$$

откуда

$$P(z) = P_0 \frac{(1-z)\,\pi(z)}{\pi(z) - z}. \quad (24)$$

Требование $P(1)=1$ дает $P_0 = 1-\pi'(1) = 1-\gamma$. Следовательно, если $\gamma < 1$, то существует стационарное распределение $\{P_k\}$, производящая функция которого задается формулой (24) с $P_0 = 1-\gamma$, а для $\{\zeta_n;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ выполняется случай (i). При $\gamma \geqslant 1$ предположение о существовании стационарного распределения ведет к противоречию. Поэтому $\{\zeta_n;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ не имеет стационарного распределения и выполняется случай (ii).

В следующей теореме вычисляется вероятность

$$\mathbf{P}\{\beta_n < k\} = \mathbf{P}\{\alpha_n > n-k\} \quad \text{для} \quad 0 < k \leqslant n.$$

Теорема 3. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, то*

$$\mathbf{P}\{\alpha_n > k-i \mid \zeta_0 = i\} = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j-k\} \tag{25}$$

для $i \leqslant k < n$ и $k > 0$. Если $k=i=0$, то $\mathbf{P}\{\alpha_n > 0 \mid \zeta_0 = 0\} = 1$.

Доказательство. Согласно (4),

$$\mathbf{P}\{\alpha_n > k-i \mid \zeta_0 = i\} = 1 - \mathbf{P}\{r - N_r < k \text{ для } r = 0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{26}$$

Если $k > 0$, то правая часть определяется из формулы (1) § 8. Случай $k=0$ тривиален.

Теорема 4. *Если ν_r, $r=1, 2, \ldots,$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}\{\nu_r\} = \gamma < 1$ и $\operatorname{Var}\{\nu_r\} = \sigma^2$, то независимо от распределения величины ζ_0*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\beta_n - n\gamma}{\sigma n^{1/2}} \leqslant x\right\} = \Phi(x), \tag{27}$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения со средним 0 и дисперсией 1.

Доказательство. Согласно (5),

$$\beta_n = \zeta_0 + N_n - \zeta_n. \tag{28}$$

Тогда по центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{N_n - n\gamma}{\sigma n^{1/2}} \leqslant x\right\} = \Phi(x). \tag{29}$$

Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_0/n^{1/2} = 0$ по вероятности для любого ζ_0. Если $\gamma > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} N_n/n = \gamma < 1$ по вероятности, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n/n^{1/2} = 0$ по вероятности. Поэтому если $\gamma < 1$, то β_n и N_n имеют одно и то же асимптотическое распределение при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Если предельное распределение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{N_n - n\gamma}{g_n} \leqslant x\right\} = G(x) \tag{30}$$

существует и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \infty$, то из (28) следует, что при $\gamma < 1$ случайная величина β_n имеет то же асимптотическое распределение, что и N_n.

Например, если $\mathbf{P}\{\nu_r > x\} = h(x)/x^\alpha$, где $1 < \alpha < 2$ и $\lim\limits_{x\to\infty} h(cx)/h(x) = 1$ для любого положительного числа c, а также если g_n таковы, что $\mathbf{P}\{\nu_r > g_n\} \sim 1/n$, то в формуле (30) $G(x) = G_\alpha(x)$, где $G_\alpha(x)$ — устойчивая функция распределения, характеристическая функция которого равна

$$\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{izx}\, dG_\alpha(x) = \exp\left\{-|z|^\alpha\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} - i\sin\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sgn} z\right)\Gamma(1-\alpha)\right\} \tag{31}$$

для вещественных значений z.

Теорема 5. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, а начальная длина очереди ζ_0 равна $i \geqslant 1$, то вероятность того, что начальный период занятости прибора состоит из n обслуживаний, равна*

$$\mathbf{P}\{\rho_0 = n \mid \zeta_0 = i\} = \frac{1}{n}\mathbf{P}\{N_n = n - i\}. \tag{32}$$

Доказательство. Формула (6) и теорема 1 § 4 дают

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\rho_0 = n \mid \zeta_0 = i\} &= \\ &= \mathbf{P}\{N_r > r - i \text{ для } r = 1, \ldots, n-1 \text{ и } N_n = n - i\} = \\ &= \mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1, \ldots, n \text{ и } N_n = n - i\} = \\ &= \frac{i}{n}\mathbf{P}\{N_n = n - i\},\end{aligned} \tag{33}$$

и теорема доказана.

Если, в частности, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, то ρ_r, $r = 0, 1, 2, \ldots$ — также взаимно независимые случайные величины и

$$\mathbf{P}\{\rho_r = n\} = \mathbf{P}\{\rho_0 = n \mid \zeta_0 = 1\} \tag{34}$$

для $r = 1, 2, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 6. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, то для $i \geqslant 1$*

$$\mathbf{P}\{\rho_0 < \infty \mid \zeta_0 = i\} = \delta^i, \tag{35}$$

где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z) = z$. Если $\gamma \leqslant 1$ и $\pi_1 \neq 1$, то $\delta = 1$, а если $\gamma > 1$ или $\pi_1 = 1$, то $\delta < 1$.

Доказательство. Согласно (6),

$$\mathbf{P}\{\rho_0<\infty \mid \zeta_0=i\}=1-\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<i\right\}, \tag{36}$$

а правую часть можно получить из формулы (7) § 8.

Теорема 7. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины и начальная длина очереди ζ_0 равна $i\geqslant 1$, то вероятность того, что максимальная длина очереди в начальном периоде занятости прибора не превышает k, равна при $k\geqslant 1$*

$$\mathbf{P}\{\zeta_r\leqslant k \text{ для } r=1, \ldots, \rho_0 \mid \zeta_0=i\}=\frac{Q_{k-i}}{Q_k}, \tag{37}$$

где Q_k определяется производящей функцией

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k z^k=\frac{Q_0\pi(z)}{\pi(z)-z} \tag{38}$$

для $|z|<\delta$; δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z)=z$, а Q_0 — произвольная отличная от нуля константа.

Доказательство. Пусть $\rho(i)$ — минимальное из чисел r, для которых $N_r=r-i$. Если $\zeta_0=i$, то вероятность того, что максимальная длина очереди в начальном периоде занятости прибора не превышает k, равна

$$\mathbf{P}\{N_r<r+k-i \text{ для } r=1, \ldots, \rho(i)\}=\frac{Q_{k-i}}{Q_k}, \tag{39}$$

где функции Q_k, $k=0, 1, \ldots$, определяются в теореме 2 § 7.

Если, в частности, в (37) $i=1$, то получается вероятность того, что максимальная длина очереди в r-м периоде занятости ($r=1, 2, \ldots$) не превосходит k.

Примеры. (i) Предположим, что в интервале времени $(0, \infty)$ закон поступления требований на обслуживание — пуассоновский с интенсивностью λ. Начальная длина очереди в момент $u=0$ равна ζ_0. Требования обслуживает единственный прибор, начинающий работать в момент $u=0$. Обслуживающий прибор занят, если в системе имеется по крайней мере одно требование. Времена обслуживания $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r, \ldots$ являются взаимно независимыми и одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $\mathbf{P}\{\chi_r\leqslant x\}=H(x)$. Они не зависят от моментов поступления требований. Положим

$$\psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dH(x) \tag{40}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$,

$$a = \int_0^\infty x\, dH(x) \tag{41}$$

и

$$\sigma_a^2 = \int_0^\infty (x-a)^2\, dH(x), \tag{42}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Обозначим через ν_r, $r = 1, 2, \ldots$, число поступлений в r-м периоде обслуживания. Тогда $\{\nu_r\}$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}\, dH(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{43}$$

Распределение величины N_r, $r = 0, 1, 2, \ldots$, равно

$$\mathbf{P}\{N_r = j\} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}\, dH_r(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{44}$$

где $H_r(x)$ есть r-я свертка функции $H(x)$ с самой собой; $H_0(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $H_0(x) = 0$ при $x < 0$.

В этом случае $\pi(z) = \psi(\lambda(1-z))$, $\gamma = \lambda a$ и $\sigma^2 = \lambda(a^2 + \sigma_a^2)$. С помощью теорем настоящего параграфа можно найти распределения величин ξ_n, ζ_n, α_n, β_n, ρ_n, а также их асимптотические распределения.

(ii) Рассмотрим предыдущий пример с той единственной разницей, что в интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают партиями случайного объема в соответствии с законом Пуассона с интенсивностью λ. Предположим, что объемы партий являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими от времени поступления. Обозначим через p_j, $j = 1, 2, \ldots$, вероятность того, что партия состоит из j требований, и положим

$$p(z) = \sum_{j=1}^\infty p_j z^j. \tag{45}$$

Если ν_r, $r = 1, 2, \ldots$, — число требований, поступивших в очередь в течение r-го периода обслуживания, то $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые случайные величины. Их общая производящая функция имеет вид

$$\pi(z) = \psi[\lambda(1 - p(z))]. \tag{46}$$

Зная распределение величины ν_r, $r=1, 2, \ldots$, можно с помощью теорем настоящего параграфа найти распределения величин ξ_n, ζ_n, α_n, β_n, ρ_n, а также их асимптотические распределения.

Процесс Q^*

Рассмотрим процесс $Q^*=\{\zeta_0;\ N_r^*,\ r=0, 1, 2, \ldots\}$, введенный в § 27. Предполагается, что $N_r^*=\nu_1^*+\ldots+\nu_r^*$ для $r=1, 2, \ldots$, где $\{\nu_r^*\}$ — двойственная последовательность для $\{\nu_r\}$, а $\{\nu_r\}$ — либо переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, либо, в частности, взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, 2, \ldots$.

Мы хотим найти распределения величин ξ_n^*, ζ_n^*, α_n^*, β_n^*, ρ_n^* для любого n. Эти случайные величины полностью определяются процессом Q^*, или, что то же самое, процессом Q. В § 27 были получены распределения случайных величин ξ_n, ζ_n, α_n, β_n, ρ_n для процесса Q. Сейчас мы сведем задачу нахождения распределений величин α_n^*, β_n^* и ρ_n^* к нахождению распределения случайной величины ζ_n.

Вероятность $\mathbf{P}\{\beta_n^*<k\}=\mathbf{P}\{\alpha_n^*>n-k\}$ для $0<k\leqslant n$ определяется следующей теоремой.

Теорема 8. *Если $\{\nu_r\}$ — переставляемые случайные величины, то*

$$\mathbf{P}\{\beta_n^*<k+i \mid \zeta_0=i\}=\mathbf{P}\{N_k\geqslant n-1\}+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=0}^{k-j}(1-l/(k-j))\,\mathbf{P}\{N_j=j+n-k-1,\ N_k-N_j=l\}, \tag{47}$$

где $0<k\leqslant n-i$ и $0<k<n$. Если $k=n-1$, то формула (47) принимает вид

$$\mathbf{P}\{\beta_n^*<n-1+i \mid \zeta_0=i\}=\sum_{j=1}^{n-1}(1-j/(n-1))\,\mathbf{P}\{N_{n-1}=j\}. \tag{48}$$

Доказательство. Если $k\leqslant n-i$, то в силу (4)

$$\mathbf{P}\{\beta_n^*<k+i \mid \zeta_0=i\}=$$
$$=\mathbf{P}\{N_r^*\leqslant r-n+k \text{ для некоторого } r=0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{49}$$

Следовательно, если $k\leqslant n-1$, то в силу (2) § 9

$$\mathbf{P}\{\beta_n^*<k+i \mid \zeta_0=i\}=$$
$$=\mathbf{P}\{N_r\geqslant r-n-k-1 \text{ для некоторого } r=1, 2, \ldots, k\}=$$
$$=1-\mathbf{P}\{N_r-r<n-k-1 \text{ для } r=1, 2, \ldots, k\}, \tag{50}$$

а правая часть задается формулой (1) § 6. Равенство (47) доказано. Если, в частности, в (50) $k=n-1$, то с учетом формулы (4) § 6 получаем (48). Здесь $i=0$ или $i=1$.

Отметим также интересное равенство

$$\mathbf{P}\{\beta_n^* < k+i \mid \zeta_0 = i\} = 1 - \mathbf{P}\{\zeta_k \leqslant n-k-1 \mid \zeta_0 = 0\}, \tag{51}$$

вытекающее из (14) и (50).

Теорема 9. *Если $\{\nu_r\}$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины,* $\mathbf{E}\{\nu_r\} = \gamma > 1$ *и* $\mathrm{Var}\{\nu_r\} = \sigma^2 < \infty$, *то независимо от распределения случайной величины* ζ_0

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta_n^* - n/\gamma}{\sqrt{n\sigma^2/\gamma^3}} \leqslant x \right\} = \Phi(x). \tag{52}$$

Доказательство. Имеем

$$\beta_n^* = \zeta_0 + N_n^* - \zeta_n^*, \tag{53}$$

где ζ_n^* определяется по формуле (1), в которой N_r надо заменить на N_r^*. В силу (2) § 9

$$\mathbf{P}\{N_n^* < k\} = \mathbf{P}\{N_k \geqslant n\} \tag{54}$$

для $n+k>0$. Теперь, используя (29), легко доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{N_n^* - n/\gamma}{\sqrt{n\sigma^2/\gamma^3}} \leqslant x \right\} = \Phi(x). \tag{55}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} N_n/n = \gamma$ по вероятности, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^*}{n} = \frac{1}{\gamma} \tag{56}$$

по вероятности. При $\gamma > 1$ отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n^*}{n^{1/2}} = 0$$

по вероятности. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_0}{n^{1/2}} = 0$$

по вероятности. В соответствии с этим, если $\gamma > 1$, то при $n \to \infty$ случайная величина β_n^* имеет то же асимптотическое распределение, что и N_n^*. Доказательство закончено.

Замечание. Если $\mathbf{P}\{\nu_r > x\} = h(x)/x^\alpha$, где $1 < \alpha < 2$ и $\lim\limits_{x\to\infty} h(cx)/h(x) = 1$ для любого положительного числа c и g_n таково, что $\mathbf{P}\{\nu_r > g_n\} \sim 1/n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{N_n - n/\gamma}{g_n} \leqslant x\right\} = G_\alpha(x), \tag{57}$$

где $G_\alpha(x)$ — устойчивая функция распределения, определенная соотношением (31). С помощью формулы (54) можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{N_n^* - n/\gamma}{g_n/\gamma^{(1+\alpha)/\alpha}} \leqslant x\right\} = 1 - G_\alpha(-x) \tag{58}$$

и, если $\gamma > 1$, то β_n^* при $n \to \infty$ имеет такое же асимптотическое распределение, что и N_n^*.

Теорема 10. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — взаимно независимые случайные величины, то*

$$\mathbf{P}\{\rho_0^* < n + k \mid \zeta_0 = k\} = \mathbf{P}\{N_n \geqslant n + k - 1\} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-j} \left(1 - \frac{l}{n-j}\right) \mathbf{P}\{N_j = j + k - 1,\ N_n - N_j = l\} \tag{59}$$

для $n \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$. Если $k = 1$, то (59) принимает вид

$$\mathbf{P}\{\rho_0^* \leqslant n \mid \zeta_0 = 1\} = 1 - \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{P}\{N_n = j\}. \tag{60}$$

Доказательство. В силу (6)

$$\mathbf{P}\{\rho_0^* < n + k \mid \zeta_0 = k\} = \\ = \mathbf{P}\{N_r^* \leqslant r - k \text{ для некоторого } r = 0, 1, \ldots, n + k - 1\}. \tag{61}$$

Отсюда и из (2) § 9 получаем, что при $k \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\{\rho_0^* < n + k \mid \zeta_0 = k\} = \\ = \mathbf{P}\{N_r \geqslant r + k - 1 \text{ для некоторого } r = 1, 2, \ldots, n\} = \\ = 1 - \mathbf{P}\{N_r - r < k - 1 \text{ для } r = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{62}$$

а правая часть находится по формуле (1) § 6 для $k \geqslant 1$ и по формуле (4) § 6 для $k = 1$.

В силу (7)

$$\mathbf{P}\{\rho_0^* < n + k \mid \zeta_0 = k\} = \mathbf{P}\{\beta_{n+k}^* < n \mid \zeta_0 = 0\}, \tag{63}$$

а правую часть можно получить из формулы (47).

Отметим еще интересное равенство

$$\mathbf{P}\left\{\rho_0^* < n+k \mid \zeta_0 = k\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{\zeta_n < k \mid \zeta_0 = 0\right\}, \tag{64}$$

вытекающее из (1) и (62).

Теорема 11. *Если* $\{\nu_r\}$ — *взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, то для* $k \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\left\{\rho_0^* < \infty \mid \zeta_0 = k\right\} = 1 - Q_{k-1}, \tag{65}$$

где Q_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *определяется в теореме* 2.

Доказательство. Согласно (62),

$$\mathbf{P}\left\{\rho_0^* < \infty \mid \zeta_0 = k\right\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant r < \infty} (N_r - r) < k - 1\}, \tag{66}$$

а правую часть можно получить из теорем 3 и 4 § 6. Если $\pi_1 \neq 1$ и $\gamma \geqslant 1$, то $Q_k = 0$ для любого k. Если $\gamma < 1$, то $Q_k > 0$ при $k \geqslant 0$.

Пример. Предположим, что в интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают в очередь в моменты $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_r', \ldots$, где $\tau_r' - \tau_{r-1}'$, $r = 1, 2, \ldots$, являются взаимно независимыми и одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $F(x)$, а $\tau_0' = 0$. Требования обслуживаются единственным прибором, начинающим работать в момент $u = 0$. Пусть времена обслуживания будут взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ $(x \geqslant 0)$, и пусть они не зависят от моментов прибытия требований. Обозначим через ζ_0 начальную длину очереди. Этот процесс Q' образования очереди — обратный для процесса Q, определенного следующим образом.

В интервале $(0, \infty)$ требования поступают в очередь согласно закону Пуассона с интенсивностью μ. Требования обслуживает единственный прибор, начинающий работать в момент $u = 0$. Времена обслуживания являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)$. Они не зависят от моментов прибытия требований. Начальная длина очереди равна ζ_0. Иначе говоря, Q' — обратный процесс для $Q = \{\zeta_0; N_r, r = 0, 1, 2, \ldots\}$, где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\nu_r = j\} = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^j}{j!} dF(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{67}$$

Распределение для $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, равно

$$\mathbf{P}\{N_r = j\} = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^j}{j!} dF_r(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{68}$$

где $F_r(x)$ есть r-кратная свертка функции $F(x)$; $F_0(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $F_0(x) = 0$ при $x < 0$.

Для обратного процесса Q' обозначения ξ'_n, ζ'_n, α'_n, β'_n, ρ'_n имеют тот же смысл, что и ξ_n, ζ_n, α_n, β_n, ρ_n для процесса Q. Пусть Q^* — двойственный процесс для Q. Мы будем обозначать через ξ^*_n, ζ^*_n, α^*_n, β^*_n, ρ^*_n соответствующие случайные величины для Q^*. Легко видеть, что $\alpha'_n = \alpha^*_n$, $\beta'_n = \beta^*_n$ и $\rho'_0 = \rho^*_0$. В этом параграфе определены распределения случайных величин α^*_n, β^*_n и ρ^*_n. Для того чтобы можно было применить общие теоремы, введем следующие обозначения:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \tag{69}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$,

$$b = \int_0^\infty x\, dF(x) \tag{70}$$

и

$$\sigma_b^2 = \int_0^\infty (x - b)^2 dF(x), \tag{71}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Достаточно найти распределения величин ξ'_n и ζ'_n. Согласно (3),

$$\mathbf{P}\{\zeta'_{n+i} \leqslant k \mid \zeta_0 = i\} = \mathbf{P}\{\xi'_{n+k+1} \leqslant k \mid \zeta_0 = i\}, \tag{72}$$

откуда следует, что можно ограничиться нахождением распределения величины ξ'_n для $n = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением $\xi'_0 = \zeta_0 - 1$. Найдем распределение случайной величины ξ'_n.

Теорема 12.

$$\mathbf{P}\{\xi'_n < k \mid \xi'_0 = i\} =$$

$$= \mathbf{P}\{N_n > n + i - k\} - \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} \mathbf{P}\{N_j = j - k\} \mathbf{P}\{N_{n-j} > n + i - j\}, \tag{73}$$

если $k=1, 2, \ldots$ *и* $i=0, 1, \ldots$. *В частности,*

$$\mathbf{P}\{\xi'_n<k \mid \xi'_0=0\}=\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{j}\mathbf{P}\{N_j=j-k\} \tag{74}$$

для $k=1, 2, \ldots$. *Распределение случайной величины* N_r, $r=0, 1, 2, \ldots$, *определяется по формуле* (68).

Доказательство. Легко видеть, что

$$\xi'_n=[\xi'_{n-1}+1-\nu_n]^+ \tag{75}$$

при $n=1, 2, \ldots$, откуда

$$\xi'_n=\max\{(n-r)-(N_n-N_r) \text{ для } r=0, 1, \ldots, n \text{ и } \xi'_0+n-N_n\}. \tag{76}$$

Если в (76) заменить $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ на $\nu_n, \nu_{n-1}, \ldots, \nu_1$ соответственно, то получится новая случайная величина

$$\tilde{\xi}'_n=\max\{r-N_r \text{ для } r=0, 1, \ldots, n \text{ и } \xi'_0+n-N_n\} \tag{77}$$

с таким же распределением, что и (76). Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi'_n<k \mid \xi'_0=i\}=$$
$$=\mathbf{P}\{r-N_r<k \text{ для } r=0, 1, \ldots, n \text{ и } n-N_n<k-i\}, \tag{78}$$

а правую часть можно получить из (3) § 8. Доказательство закончено, ибо в случае $i=0$ (78) получается из (1) § 8.

Теорема 13. *Если* $k\geqslant 1$, *то независимо от распределения случайной величины* ξ'_0

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\xi'_n<k\}=1-\delta^k, \tag{79}$$

где δ — *наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения*

$$\varphi(\mu(1-\delta))=\delta. \tag{80}$$

Если $\mu b\leqslant 1$, *то* $\delta=1$, *а если* $\mu b>1$, *то* $\delta<1$.

Доказательство. Из формулы (78) вытекает, что независимо от распределения случайной величины ξ'_0

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\xi'_n<k\}=\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\}, \tag{81}$$

а правую часть находим из теоремы 3 § 8.

§ 29. ФЛУКТУАЦИИ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Рассмотрим процесс образования очереди $W=\{\eta(0); \chi(u), 0\leqslant u<\infty\}$, введенный в § 27. Пусть $\{\chi(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — вещественный сепарабельный случайный процесс, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u=0$. Мы хотим найти распределения величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и θ_r, $r=0, 1, 2, \ldots$. Эти случайные величины полностью определяются процессом W.

Время ожидания в момент t равно

$$\eta(t)=\sup\{\chi(t)-\chi(u)-(t-u) \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } \eta(0)+\chi(t)-t\}. \tag{1}$$

Действительно, пусть u — наибольшее из чисел отрезка $[0, t]$, для которых $\eta(u)=0$. Тогда $\eta(t)=\chi(t)-\chi(u)-(t-u)$. Если такого u нет, положим $\eta(t)=\eta(0)+\chi(t)-t$. В любом из этих двух случаев соотношение (1) выполняется.

Полное время бездействия обслуживающего прибора в интервале времени $[0, t]$ равно

$$\alpha(t)=\sup\{u-\chi(u)-\eta(0) \quad \text{для} \quad 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } 0\}. \tag{2}$$

Тогда $\beta(t)=t-\alpha(t)$. Кроме того, очевидно, что

$$\beta(t)=\eta(0)+\chi(t)-\eta(t). \tag{3}$$

Длительность начального периода занятости равна

$$\theta_0=\inf\{u\colon \eta(0)+\chi(u)\leqslant u \text{ и } 0\leqslant u<\infty\}, \tag{4}$$

если такого u нет, то $\theta_0=\infty$.

Между распределениями случайных величин $\alpha(t)$ и θ_0 существует интересная связь: при $0<x\leqslant t$ и $c\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\alpha(t)\geqslant x\mid\eta(0)=c\}=\mathbf{P}\{\theta_0\leqslant t\mid\eta(0)=c+x\} \tag{5}$$

и

$$\mathbf{P}\{\alpha(t)=0\mid\eta(0)=c\}=\mathbf{P}\{\theta_0\geqslant t\mid\eta(0)=c\}. \tag{6}$$

Равенство (6) очевидно. Для доказательства (5) заметим, что в силу (2)

$$\mathbf{P}\{\alpha(t)\geqslant x\}=\mathbf{P}\{\eta(0)+\chi(u)+x\leqslant u \text{ для некоторого } u\in[0, t]\}, \tag{7}$$

а в силу (4)

$$\mathbf{P}\{\theta_0\leqslant t\}=\mathbf{P}\{\eta(0)+\chi(u)\leqslant u \text{ для некоторого } u\in[0, t]\}. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем, что вероятность того, что $\alpha(t)\geqslant x$ для процесса с начальным временем занятости $\eta(0)=c$, равна вероятности того, что $\theta_0\leqslant t$ для процесса с начальным временем занятости $\eta(0)=c+x$. Равенство (5) доказано.

Процесс W

Дальше мы будем предполагать, что $\{\chi(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный стохастический процесс с переставляемыми или, в частности, стационарными независимыми приращениями. В обоих случаях почти все выборочные функции процесса будут неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при

$u=0$, и $\mathbf{E}\{\chi(u)\}=\rho u$ при $u\geqslant 0$, где ρ — неотрицательное число (возможно, равное ∞). Тривиальный случай, когда $\mathbf{P}\{\chi(u)=0\}=1$ для всех $u\geqslant 0$, исключается.

Если процесс $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ имеет стационарные независимые приращения, то для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\}=e^{-u\Phi(s)} \tag{9}$$

при надлежащем выборе функции $\Phi(s)$. Если число $\lambda=\Phi(\infty)$ конечно и положительно, зададим такую функцию распределения $H(x)$, что для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x)=1-\frac{\Phi(s)}{\lambda} \tag{10}$$

и $H(x)=0$ при $x<0$. Далее, $\rho=\Phi'(+0)$. Если ρ конечно и положительно, зададим такую функцию распределения $H^*(x)$, что для $\operatorname{Re}(s)>0$

$$\psi^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH^*(x)=\frac{\Phi(s)}{\rho s} \tag{11}$$

и $H^*(x)=0$ при $x<0$. Через $H_n^*(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, будем обозначать n-кратную свертку функции $H^*(x)$; $H_0^*(x)=1$ при $x\geqslant 0$ и $H_0^*(x)=0$ при $x<0$. Пусть ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$. Если $\rho\leqslant 1$, то $\omega=0$, а если $\rho>1$, то $\omega>0$. Далее, положим $\sigma^2=-\Phi''(+0)$; тогда $\operatorname{Var}\{\chi(u)\}=\sigma^2 u$ для $u\geqslant 0$.

Теорема 1. *Если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant\infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то*

$$\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\mid\eta(0)=c\}=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x-c\}-$$
$$-\iint\limits_{0<y\leqslant z\leqslant t-c}\left(\frac{t-z}{t-y}\right)d_y d_z\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x,\ \chi(t)\leqslant z+x\} \tag{12}$$

для всех x, $c\geqslant 0$ и $t>0$. В частности,

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=0\mid\eta(0)=c\}=\int_0^{t-c}\left(1-\frac{y}{t}\right)d_y\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant y\}, \tag{13}$$

если $0\leqslant c\leqslant t$, и $\mathbf{P}\{\eta(t)=0\mid\eta(0)=0\}=0$ при $t<c$.

Доказательство. Функция $\eta(t)$ определяется по формуле (1). Если в (1) заменить $\chi(t)-\chi(u)$ на $\chi(t-u)$, то получится новая случайная величина

$$\tilde{\eta}(t)=\sup\{\chi(u)-u \quad \text{для} \quad 0\leqslant u\leqslant t \ \text{и}\ \eta(0)+\chi(t)-t\} \tag{14}$$

с таким же распределением, как и у $\eta(t)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\mid\eta(0)=c\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u+x \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } \chi(t)\leqslant t+x-c\}, \quad (15)$$

а правую часть можно найти по формуле (2) § 15. Если $x=0$, то (15) можно получить также из соотношения (3) § 15. Теорема доказана.

Заметим, что если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant T\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, а T — конечное положительное число, то формулы (12) и (13) верны для всех $t\in(0,\ T]$.

Если процесс $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ имеет стационарные независимые приращения, то в формуле (12)

$$\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x,\ \chi(t)\leqslant z+x\}=\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}\,\mathbf{P}\{\chi(t-y)\leqslant z-y\}.$$

В этом случае в силу (13)

$$\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\mid\eta(0)=c\}=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x-c\}-$$
$$-\int_{+0}^{t-c}\mathbf{P}\{\eta(t-y)=0\mid\eta(0)=c\}\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}, \quad (16)$$

а если отказаться от условия $\eta(0)=c$, то

$$\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\eta(0)+\chi(t)\leqslant t+x\}-$$
$$-\int_{+0}^{t}\mathbf{P}\{\eta(t-y)=0\}\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\} \quad (17)$$

для всех x. При $x<0$ обе части равенства (17) равны нулю.

Теорема 2. *Если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями и $\rho<1$, то предельное распределение $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}=W(x)$ существует и не зависит от распределения начального времени занятости прибора. Кроме того,*

$$W(x)=1-(1-\rho)\int_{+0}^{\infty}d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}, \quad (18)$$

или

$$W(x)=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n H_n^*(x) \quad (19)$$

для всех x. Если $\rho\geqslant 1$, то предел $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}$ равен 0 для любого x и не зависит от распределения величины $\eta(0)$.

Доказательство. В силу (15)

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}-\mathbf{P}\{\eta(0)+\chi(t)>t+x\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\}. \tag{20}$$

Если $\rho<1$, то из слабого закона больших чисел вытекает, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(0)+\chi(t)>t+x\}=0$ для всех $\eta(0)$ и x. По теореме непрерывности для вероятностей получаем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}, \tag{21}$$

причем предел не зависит от распределения величины $\eta(0)$. Правую часть равенства (21) можно получить из формулы (15) или из (34) § 15. Если $\rho\geqslant 1$, то из формулы (16) § 15 следует, что правая часть в (20) стремится к нулю при $t\to\infty$. Поэтому при $\rho\geqslant 1$ предел $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}$ равен нулю для всех x и не зависит от распределения величины $\eta(0)$. Теорема доказана.

В силу теоремы 4 § 15

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x)=\frac{1-\rho}{1-\rho\psi^*(s)} \tag{22}$$

для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, где функция $\psi^*(s)$ задана формулой (11).

Замечание. При $\rho<1$ существует еще один способ определения $\Omega(s)$. Так как $\{\eta(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ — марковский процесс, то если предельное распределение для $\eta(t)$ не зависит от распределения величины $\eta(0)$, процесс $\{\eta(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ имеет единственное стационарное распределение, совпадающее с предельным.

Если $\{\eta(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ — стационарный процесс, то $\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}=W(x)$ для всех $t\geqslant 0$. Если

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x) \tag{23}$$

для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, то, переходя в (17) к преобразованию Лапласа — Стильтьеса, получаем

$$\Omega(s)=e^{t\,[s-\Phi(s)]}\,\Omega(s)-sW(0)\int_0^t e^{y\,[s-\Phi(s)]}\,dy \tag{24}$$

для всех $t\geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, откуда

$$\Omega(s)=\frac{W(0)\,s}{s-\Phi(s)} \tag{25}$$

для $\operatorname{Re}(s)>0$. Из равенства $\Omega(0)=1$ следует, что $W(0)=1-\rho$. Поэтому, если $\rho<1$, то процесс $\{\eta(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ имеет одно и только одно стационарное распределение $W(x)$, преобразование Лапласа — Стильтьеса которого определяется по формуле (25), где $W(0)=1-\rho$. Если $\rho<1$, то предел $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}$ существует и не зависит от начального распределения, а потому он необходимо равен $W(x)$, стационарному распределению процесса. При $\rho\geqslant 1$ предположение о том, что процесс $\{\eta(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ имеет стационарное распределение, ведет к противоречию.

Так как $\alpha(t)+\beta(t)=t$ для всех $t\geqslant 0$, достаточно найти распределение случайной величины $\alpha(t)$ или $\beta(t)$. При этом $\mathbf{P}\{\beta(t)<x\}=\mathbf{P}\{\alpha(t)>t-x\}$ для всех $0<x\leqslant t$.

Теорема 3. *Если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то*

$$\mathbf{P}\{\alpha(t)>x-c\mid\eta(0)=c\}=\int\limits_x^t\frac{x}{y}\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y-x\}\tag{26}$$

для $0\leqslant c<x\leqslant t$.

Доказательство. Согласно (2), при $0\leqslant c<x$

$$\mathbf{P}\{\alpha(t)>x-c\mid\eta(0)=c\}=1-\mathbf{P}\{u-\chi(u)\leqslant x\ \text{для}\ 0\leqslant u\leqslant t\},\tag{27}$$

а правую часть можно получить из теоремы 1 § 17.

Заметим, что для процесса $\{\chi(u),\ 0\leqslant u\leqslant T\}$ с переставляемыми приращениями, где число T конечно и положительно, равенство (26) справедливо при всех $t\in(0,\ T]$.

Теорема 4. *Если $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, $\rho<1$ и $0<\sigma^2<\infty$, то независимо от распределения случайной величины $\eta(0)$*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\beta(t)-\rho(t)}{\sqrt{\sigma^2 t}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),\tag{28}$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения с нулевым средним и единичной дисперсией.

Доказательство. Мы уже отмечали очевидное соотношение

$$\beta(t)=\eta(0)+\chi(t)-\eta(t).\tag{29}$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\chi(t)-\rho t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\leqslant x\right\}=\Phi(x).\tag{30}$$

При $\rho<1$ из слабого закона больших чисел следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)/\sqrt{t}=0$ по вероятности. В то же время очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(0)/\sqrt{t}=0$ по вероятности для любой случайной величины $\eta(0)$. Тогда, если $\rho<1$, то $\beta(t)$ и $\chi(t)$ имеют одинаковое асимптотическое распределение при $t\to\infty$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть предельное распределение

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\chi(t)-\rho t}{g(t)}\leqslant x\right\}=G(x) \tag{31}$$

существует и функция $g(t)$ такова, что $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$. Тогда с помощью соотношения (29) легко убедиться, что если $\rho<1$, то $\beta(t)$ и $\chi(t)$ имеют одинаковое асимптотическое распределение при $t\to\infty$.

Пусть, например, $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс, для которого

$$\chi(u)=\sum_{r=1}^{\nu(u)}\chi_r, \tag{32}$$

где $\{\nu(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины. Пусть они не зависят от $\{\nu(u)\}$ и удовлетворяют условиям $\mathbf{E}\{\chi_r\}=a$, $\mathbf{P}\{\chi_r>x\}=h(x)/x^{\alpha}$, где $1<\alpha<2$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(cx)}{h(x)}=1$$

для любого положительного числа c. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\chi(t)-\rho t}{\lambda^{1/\alpha}g(t)}\leqslant x\right\}=G_{\alpha}(x), \tag{33}$$

где $G_{\alpha}(x)$ — устойчивая функция распределения, определенная соотношением (31) § 28, $\rho=\lambda a$, а $g(t)$ выбирается из условия $\mathbf{P}\{\chi_r>g(t)\}\sim 1/t$.

Теорема 5. *Пусть $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, а начальное время занятости прибора $\eta(0)$ равно $c<0$. Тогда вероятность того, что длительность начального периода занятости не превышает t, равна*

$$\mathbf{P}\{\theta_0\leqslant t\mid\eta(0)=c\}=\int_c^t\frac{c}{y}\,d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y-c\} \tag{34}$$

при $t\geqslant c$. Если $t<c$, то $\mathbf{P}\{\theta_0\leqslant t\mid\eta(0)=c\}=0$.

Доказательство. Согласно (4),

$$\mathbf{P}\{\theta_0 \leqslant t \mid \eta(0)=c\} = 1 - \mathbf{P}\{u-\chi(u) \leqslant c \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}, \tag{35}$$

а вероятность в правой части можно получить из теоремы 1 § 17. Формула (34) доказана.

Пусть $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями и $\lambda = \Phi(\infty) < \infty$. Тогда $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс, θ_0, θ_1, θ_2, ... — взаимно независимые случайные величины, причем θ_1, θ_2, ... распределены одинаково. Если $\eta(0)$ — случайная величина с тем же распределением, что и величина положительного скачка процесса $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, то $\mathbf{P}\{\theta_r \leqslant t\} = \mathbf{P}\{\theta_0 \leqslant t\}$ для $r = 1, 2, \ldots$, таким образом,

$$\mathbf{P}\{\theta_r \leqslant t\} = \frac{1}{\lambda}\int_0^t \frac{1}{y}\, d_y \mathbf{P}\{0 < \chi(y) \leqslant y\} \tag{36}$$

при $t \geqslant 0$ и $r = 1, 2, \ldots$.

Теорема 6. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant x < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, то*

$$\mathbf{P}\{\theta_0 < \infty \mid \eta(0) = c\} = e^{-\omega c}, \tag{37}$$

где ω — наибольший вещественный корень уравнения

$$\Phi(\omega) = \omega. \tag{38}$$

Если $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то $\omega = 0$, а если $\rho > 1$, то $\omega = 0$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\theta_0 < \infty \mid \eta(0) = c\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \infty} [u - \chi(u)] \leqslant c\}, \tag{39}$$

а вероятность в правой части можно получить из теоремы 3 § 17.

Теорема 7. *Пусть $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, а начальное время занятости прибора $\eta(0)$ равно $c > 0$. Тогда вероятность того, что максимальное время ожидания в начальном периоде занятости не превышает x, при $x \geqslant c$ равна*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta_0} \eta(u) \leqslant x \mid \eta(0) = c\} = \frac{W(x-c)}{W(x)}, \tag{40}$$

где $W(x)$ определяется из соотношения

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, qW(x) = \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)} \tag{41}$$

при $\operatorname{Re}(s) > \omega$, а $W(0)$ произвольно. Функция $W(x)$ в явном виде задается формулами (12) или (14) § 16.

Доказательство. Положим $\theta(c)=\inf\{u\colon \chi(u)-u\leqslant -c$ и $0\leqslant u<\infty\}$ и $\theta(c)=\infty$, если $\chi(u)-u>-c$ для всех $u\geqslant 0$. Если $\eta(0)=c$, то вероятность того, что максимальное время ожидания в начальном периоде занятости не превосходит x, равна

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u+x-c \text{ для } 0\leqslant u\leqslant\theta(c)\}=\frac{W(x-c)}{W(x)} \tag{42}$$

при $x\geqslant c$. Функция $W(x)$ определяется в теореме 1 § 16. Теорема доказана.

Примеры. (i) Предположим, что в интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают в очередь согласно закону Пуассона с интенсивностью λ. Требования обслуживаются единственным прибором, начинающим работать в момент $u=0$. Времена обслуживания $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r, \ldots$ являются взаимно независимыми и одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $\mathbf{P}\{\chi_r\leqslant x\}=H(x)$. Они не зависят от моментов прибытия требований. Прибор занят, если в системе есть по крайней мере одно требование.

Положим

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x) \tag{43}$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$,

$$a=\int_0^\infty x\,dH(x) \tag{44}$$

и

$$\sigma_a^2=\int_0^\infty (x-a)^2\,dH(x), \tag{45}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Обозначим через $\chi(u)$ сумму времени обслуживания всех требований, поступивших в интервале времени $(0, u]$. Тогда $\{\chi(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — стохастический процесс со стационарными независимыми приращениями. Это обобщенный пуассоновский процесс.

Далее,

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant x\}=\sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^n}{n!}H_n(x), \tag{46}$$

где $H_n(x)$ обозначает n-кратную свертку функции $H(x)$; $H_0(x)=1$ при $x\geqslant 0$ и $H_0(x)=0$ при $x<0$. Кроме того,

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\}=e^{-u\Phi(s)} \tag{47}$$

для $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, где

$$\Phi(s)=\lambda[1-\psi(s)], \tag{48}$$

и $\rho=\Phi'(+0)=\lambda a$, $\sigma^2=-\Phi''(+0)=\lambda\left(a^2+\sigma_a^2\right)$. Для нахождения распределений и асимптотических распределений величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, θ_r $(r=0, 1, 2, \ldots)$ можно применить теоремы этого параграфа.

В частности, при $\lambda a<1$ предельное распределение виртуального времени ожидания

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}=W(x) \tag{49}$$

равно

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x)=\frac{1-\lambda a}{1-\lambda\dfrac{1-\psi(s)}{s}} \tag{50}$$

для $\mathrm{Re}(s)>0$. Если $\lambda a\geqslant 1$, то $W(x)=0$ для всех x.

Формула Полячека — Хинчина. Пусть в предыдущем примере требования обслуживаются в порядке поступления. Обозначим через η_n, $n=1, 2, \ldots$, время ожидания n-го требования и положим $\eta_0=\eta(0)$. В 1932 г. А. Я. Хинчин [42] доказал, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n\leqslant x\}=W(x)$ при $\lambda a<1$, а преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $W(x)$ определяется по формуле (50). В 1930 г. Полячек [53] рассмотрел процесс образования очереди, в котором n требований поступают в интервале $(0, t)$ таким образом, что времена между их поступлениями являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Он нашел распределение времени ожидания случайно выбираемого требования в предположении, что требования обслуживаются единственным прибором в порядке поступления, а времена обслуживания являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $H(x)$ и не зависят от моментов поступления требований. Полячек обнаружил, что при $\lambda a<1$ и $n\to\infty$, $t\to\infty$ так, что $n/t\to\lambda$, функция распределения времени ожидания случайно выбранного требования стремится к $W(x)$. При этом $W(x)$ имеет преобразование Лапласа — Стильтьеса (50).

Теперь покажем, что независимо от распределения случайной величины $\eta(0)$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}, \tag{51}$$

и дадим, таким образом, новое доказательство результата Полячека — Хинчина. Интересно отметить, что формулу (50) также получил в 1930 г. Крамер [16] в связи с одной задачей страхования.

Докажем равенство (51). Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r, \ldots$ моменты поступления требований. Тогда $\tau_r-\tau_{r-1}$ $(r=1, 2, \ldots, \tau_0=0)$

будут взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$. Очевидно, что

$$\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]=\sup_{0\leqslant r<\infty}[\chi(\tau_r+0)-\tau_r]=\sup_{0\leqslant r<\infty}(\chi_1+\ldots+\chi_r-\tau_r). \tag{52}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant r<\infty}(\chi_1+\ldots+\chi_r-\tau_r)\leqslant x\}; \tag{53}$$

отсюда и будет следовать равенство (51).

Случайные величины $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\eta_{n+1}=[\eta_n+\chi_n-(\tau_n-\tau_{n-1})]^+ \tag{54}$$

для $n=0, 1, 2, \ldots$, откуда

$$\eta_{n+1}=\max[0,\ \chi_n-(\tau_n-\tau_{n-1}),\ \chi_{n-1}+\chi_n-(\tau_n-\tau_{n-2}),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \chi_2+\ldots+\chi_n-(\tau_n-\tau_1),\ \chi_1+\ldots+\chi_n-(\tau_n-\tau_0)+\eta_0]. \tag{55}$$

Если в формуле (55) заменить $\chi_n, \chi_{n-1}, \ldots, \chi_1$ на $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ и $(\tau_n-\tau_{n-1}), (\tau_n-\tau_{n-2}), \ldots, (\tau_n-\tau_0)$ на $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ соответственно, то получится новая случайная величина с тем же распределением, что и (55). Поэтому

$$\mathbf{P}\{\eta_{n+1}\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\max(0,\ \chi_1-\tau_1,\ \chi_1+\chi_2-\tau_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \chi_1+\ldots+\chi_{n-1}-\tau_{n-1},\ \chi_1+\ldots+\chi_n-\tau_n+\eta_0)\leqslant x\}. \tag{56}$$

Если мы в (56) устремим n к ∞, то получим (53) независимо от распределения величины η_0. Доказательство закончено.

(ii) Рассмотрим предыдущий пример, но теперь пусть требования поступают на обслуживание в интервале времени $(0, \infty)$ по закону Пуассона с интенсивностью λ партиями случайного объема. Предположим, что размеры партий являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими от моментов поступления. Обозначим через p_j, $j=1, 2, \ldots$, вероятность того, что партия состоит из j требований, и положим

$$p(z)=\sum_{j=1}^{\infty}p_jz^j. \tag{57}$$

Если через $\chi(u)$ обозначить сумму времен обслуживания требований, поступающих в интервале $(0, u]$, то $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ будет стохастическим процессом со стационарными независимыми приращениями. Это обобщенный пуассоновский процесс. При $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\}=e^{-u\Phi(s)}, \tag{58}$$

где

$$\Phi(s) = \lambda[1 - p(\psi(s))]. \tag{59}$$

Кроме того,

$$\rho = \lambda a \sum_{j=1}^{\infty} j p_j \tag{60}$$

и

$$\sigma^2 = \lambda \sigma_a^2 \sum_{j=1}^{\infty} j p_j + \lambda a^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_j. \tag{61}$$

Зная распределение для $\chi(u)$, $0 \leqslant u < \infty$, можно с помощью теорем этого параграфа найти распределения и асимптотические распределения величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, θ_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$.

Процесс W^*

Рассмотрим процесс образования очереди $W^* = \{\eta(0);\ \chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, введенный в § 27. Будем считать, что $\{\chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — двойственный процесс для $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, где $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс либо с переставляемыми приращениями, либо со стационарными независимыми приращениями, а почти все его выборочные функции являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u = 0$.

Мы будем искать распределения и асимптотические распределения величин $\eta^*(t)$, $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ для $t > 0$ и θ_r^* для $r = 0, 1, 2, \ldots$. Эти случайные величины полностью определяются заданием процесса W^* или W. Для процесса W распределения случайных величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, θ_r уже были найдены в этом параграфе. Мы сведем задачу нахождения распределений величин $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ и θ_r^* к нахождению распределения величины $\eta(t)$.

Вероятность $\mathbf{P}\{\beta^*(t) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\alpha^*(t) \geqslant t - x\}$ для $0 \leqslant x < t$ вычисляется в следующей теореме.

Теорема 8. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то*

$$\mathbf{P}\{\beta^*(t) \leqslant x + c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\chi(x) > t\} +$$
$$+ \iint\limits_{0 < y \leqslant z \leqslant x} \left(\frac{x - z}{x - y}\right) d_y d_z \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + t - x,\ \chi(x) \leqslant z + t - x\} \tag{62}$$

для $0 \leqslant x < t - c$.

Доказательство. В силу (2)

$$\mathbf{P}\{\beta^*(t) \leqslant x + c \mid \eta(0) = c\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi^*(u) \leqslant u + x - t \text{ для некоторого } u \in [0, t]\}. \tag{63}$$

Тогда из формулы (2) § 18 следует, что

$$\mathbf{P}\{\beta^*(t) \leqslant x + c \mid \eta(0) = c\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi(u) > u + t - x \text{ для некоторого } u \in [0, x]\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}\{\chi^-(u) - u \leqslant t - x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant x\}, \quad (64)$$

а правую часть можно найти по формуле (1) § 15. Теорема доказана.

Представляет интерес также соотношение

$$\mathbf{P}\{\beta^*(t) \leqslant x + c \mid \eta(0) = c\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta(x) \leqslant t - x \mid \eta(0) = 0\}, \quad (65)$$

вытекающее из (15) и (64).

Теорема 9. *Если* $\{\chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — *процесс со стационарными независимыми приращениями,* $\rho > 1$ *и* $0 < \sigma^2 < \infty$, *то независимо от распределения величины* $\eta(0)$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\beta^*(t) - \frac{t}{\rho}}{\sqrt{\sigma^2 t/\rho^3}} \leqslant x\right\} = \Phi(x). \quad (66)$$

Доказательство. Имеем

$$\beta^*(t) = \eta(0) + \chi^*(t) - \eta^*(t), \quad (67)$$

где $\eta^*(t)$ определяется соотношением (1), в котором надо заменить $\chi(u)$ на $\chi^*(u)$. Из формулы (2) § 18 получаем, что

$$\mathbf{P}\{\chi^*(t) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\chi(x) > t\} \quad (68)$$

для всех $t \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Теперь легко доказать (используя (30)), что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi^*(t) - t/\rho}{\sqrt{\sigma^2 t/\rho^3}} \leqslant x\right\} = \Phi(x). \quad (69)$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} \chi(t)/t = \rho$ по вероятности, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\chi^*(t)}{t} = \frac{1}{\rho} \quad (70)$$

по вероятности. Отсюда следует, что если $\rho > 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \eta^*(t)/\sqrt{t} = 0$ по вероятности. Очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(0)/\sqrt{t} = 0$ по вероятности. Поэтому при $\rho > 1$ величины $\beta^*(t)$ и $\chi^*(t)$ имеют одинаковые асимптотические распределения при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $\{\chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс, определяемый соотношением (32), причем для него верно (33). Тогда, используя (68), можно доказать, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi^*(t) - t/\rho}{g(t)\,\lambda^{1/\alpha}/\rho^{(1+\alpha)/\alpha}} \leqslant x\right\} = 1 - G_\alpha(-x). \quad (71)$$

Если $\rho > 1$, то $\beta^*(t)$ и $\chi^*(t)$ имеют одинаковые асимптотические распределения при $t \to \infty$.

Теорема 10. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, то*

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\chi(t) > t + c\} + \\ + \iint\limits_{0<y\leqslant z\leqslant t} \left(\frac{t-z}{t-y}\right) d_y d_z \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + c,\ \chi(t) \leqslant z + c\} \qquad (72)$$

для $t \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Если в (72) $c = 0$, то

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* \leqslant t \mid \eta(0) = 0\} = 1 - \int\limits_0^t \left(1 - \frac{y}{t}\right) d_y \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant y\}. \qquad (73)$$

Доказательство. В силу (4)

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\chi^*(u) \leqslant u - c \text{ для некоторого } u \in [0, t + c]\}. \qquad (74)$$

Отсюда и из (2) § 18

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\chi(u) > u + c \text{ для некоторого } u \in [0,\ t]\} = \\ = 1 - \mathbf{P}\{\chi(u) - u \leqslant c \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}; \qquad (75)$$

вероятность в правой части можно найти по формуле (1) § 15. При $c = 0$ (75) следует из (3) § 15.

Сравнивая (64) и (75), получаем, что для $c > 0$

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\beta^*(t + c) \leqslant t \mid \eta(0) = 0\}, \qquad (76)$$

а правую часть определяем по формуле (62). Отсюда следует (72).

Представляет интерес также соотношение

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant c \mid \eta(0) = 0\} \qquad (77)$$

при $c \geqslant 0$. Оно вытекает из (1) и (75).

Теорема 11. *Пусть $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями. Тогда для $c \geqslant 0$*

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* < \infty \mid \eta(0) = c\} = 1 - W(c), \qquad (78)$$

где $W(x)$ определяется в теореме 2 для $\rho < 1$ и $W(x) = 0$ при $\rho \geqslant 1$.

Доказательство. Согласно (75),

$$\mathbf{P}\{\theta_0^* < \infty \mid \eta(0) = c\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [\chi(u) - u] \leqslant c\}, \qquad (79)$$

а правую часть можно получить из теоремы 2. Если $\rho<1$, то $W(c)>0$ для $c\geqslant 0$, а если $\rho\geqslant 1$, то $W(c)=0$ для $c\geqslant 0$.

Пример. Пусть в интервале времени $[0, \infty)$ требования поступают в моменты τ_0', τ_1', ..., τ_r', ..., где $\tau_0'=0$ и $\tau_r'-\tau_{r+1}'$, $r=1, 2, \ldots,$ — взаимно независимые одинаково распределенные положительные случайные величины с функцией распределения $\mathbf{P}\{\tau_r'-\tau_{r-1}'\leqslant x\}=F(x)$. Требования обслуживаются единственным прибором, начинающим работать в момент $u=0$. Пусть $\eta(0)$ — начальное время занятости прибора. Времена обслуживания χ_1', χ_2', ..., χ_r', ... являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $H(x)=1-e^{-\mu x}$ $(x\geqslant 0)$; они не зависят от моментов поступления требований. Обслуживающий прибор занят, если в системе есть по крайней мере одно требование. Обозначим через $\chi'(u)$ полное время обслуживания требований, поступающих в интервале $[0, u]$. Тогда процесс $W'=\{\eta(0);\ \chi'(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ будет обратным для процесса $W=\{\eta(0);\ \chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$, определяемого следующим способом. В интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают в очередь, подчиняясь пуассоновскому процессу с интенсивностью μ. Требования обслуживаются единственным прибором, начинающим работать в момент $u=0$. Начальное время занятости прибора равно $\eta(0)$. Времена обслуживания являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)$, не зависящими от моментов поступления. Иначе говоря, W' — процесс, обратный к $W=\{\eta(0);\ \chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$, где $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс, для которого

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant x\}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu u}\frac{(\mu u)^n}{n!}F_n(x). \tag{80}$$

Здесь $F_n(x)$ обозначает n-кратную свертку функции $F(x)$; $F_0(x)=1$ при $x\geqslant 0$ и $F_0(x)=0$ при $x<0$.

Для обратного процесса W' обозначим через $\eta'(t)$, $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$, θ_r' те же случайные величины, что и $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, θ_r для процесса W. Если W^* — двойственный процесс для W, то будем обозначать через $\eta^*(t)$, $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$, η_r^* соответствующие случайные величины для W^*. Тогда легко видеть что $\alpha'(t)=\alpha^*(t)$, $\beta'(t)=\beta^*(t)$ и $\theta_0'=\theta_0^*$. Распределения случайных величин $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ и θ_0^* найдены в этом параграфе. Для применения общих теорем введем следующие обозначения:

$$\varphi(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dF(x) \tag{81}$$

для $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$,

$$b = \int_0^\infty x\, dF(x) \tag{82}$$

и

$$\sigma_b^2 = \int_0^\infty (x-b)^2\, dF(x), \tag{83}$$

если интегралы в этих формулах сходятся. Тогда

$$\Phi(s) = \mu[1-\varphi(x)] \tag{84}$$

при $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$, $\rho = \Phi'(+0) = \mu b$ и $\sigma^2 = -\Phi''(+0) = \mu(b^2+\sigma_b^2)$.

§ 30. ЗАДАЧИ

1. В интервале времени $(0, \infty)$ требования поступают в очередь в соответствии с пуассоновским процессом с интенсивностью λ. Их обслуживает единственный прибор, начинающий работать в момент $u=0$. Времена обслуживания $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r, \ldots$ являются взаимно независимыми одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $\mathbf{P}\{\chi_r \leqslant x\} = H(x)$. Они не зависят от моментов поступления требований. Обслуживающий прибор занят, если в системе есть хотя бы одно требование. Найти вероятность $G_n(x)$ того, что период занятости (отличный от начального периода) состоит из n обслуживаний и его длительность не превосходит x.

2. В условиях задачи 1 предположим, что начальное время занятости прибора ζ_0 равно $i \geqslant 1$. Найти вероятность $G_n^{(i)}(x)$ того, что начальный период занятости состоит из n обслуживаний и его длительность не превосходит x.

3. В условиях задачи 1 предположим, что начальная длина очереди $\eta(0)$ равна $c > 0$. Найти вероятность $G_n(x \mid c)$ того, что начальный период занятости состоит из n обслуживаний и его длительность не превосходит x.

4. В условиях задачи 1 обозначим через $G(x)$ вероятность того, что длительность периода занятости (отличного от начального) не превосходит x. Найти моменты функции $G(x)$.

5. В условиях задачи 1 пусть $\eta(t)$ — виртуальное время ожидания в момент t. Найти стационарное распределение величины $\eta(t)$ и его моменты.

6. В условиях задачи 1 обозначим через ξ_n длину очереди непосредственно перед поступлением n-го требования. Найти стационарное распределение величины ξ_n и его моменты.

7. В условиях задачи 1 обозначим через $\xi(t)$ длину очереди в момент t. Найти стационарное распределение величины $\xi(t)$.

8. В условиях задачи 1 предположим, что начальное время занятости прибора $\eta(0)$ равно c. Пусть $\eta(t)$ — виртуальное время ожидания в момент t. Найти $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0) = c\}$.

9. В условиях задачи 1 предположим, что требования обслуживаются в порядке поступления. Пусть η_n — время ожидания n-го требования. Найти предельное распределение величины η_n при $n \to \infty$.

10. В интервале времени $[0,T]$ в очередь поступают n требований. Моменты поступления являются взаимно независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на $[0, T]$. Требования обслуживает один прибор. Времена обслуживания — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $\mathbf{P}\{\chi_r \leqslant x\} = H(x)$. Они не зависят от моментов поступления требований. Прибор занят, если в системе есть хотя

бы одно требование. Найти распределение виртуального времени ожидания $\eta(t)$ в момент t $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

11. В интервале времени $[0, \infty]$ требования поступают в моменты $\tau'_0, \tau'_1, \ldots, \tau'_r, \ldots$, где $\tau'_0 = 0$, а промежутки $\tau'_r - \tau'_{r-1}$, $r = 1, 2, \ldots$, между моментами поступления требований являются взаимно независимыми одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $\mathbf{P}\left\{\tau'_r - \tau'_{r-1} \leqslant x\right\} = F(x)$. Требования обслуживаются единственным прибором. Времена обслуживания $\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_r$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ $(x \geqslant 0)$. Они не зависят от моментов поступления требований. Прибор занят, если в системе есть хотя бы одно требование. Длина очереди непосредственно перед моментом $u = 0$ равна нулю. Найти вероятность того, что начальный период занятости прибора состоит из n обслуживаний, а также вероятность того, что длительность начального периода занятости не превосходит x.

12. Пусть в условиях задачи 11 длина очереди ζ_0 непосредственно перед моментом $u = 0$ равна i. Найти вероятность того, что длительность начального периода занятости прибора не превосходит x.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bailey N. T. J., A continuous time treatment of a simple queue using generating functions, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **16** (1954), 288—291.

[2] Bailey N. T. J., Some further results in the non-equilibrium theory of a simple queue, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **19** (1957), 326—333.

[3] Beneš V. E., On queues with Poisson arrivals, *Ann. Math. Statist.*, **28** (1957), 670—677.

[4] Beneš V. E., General stochastic processes in traffic systems with one server, *Bell System Tech. J.*, **39** (1960), 127—160.

[5] Beneš V. E., Combinatory methods and stochastic Kolmogorov equations in the theory of queues with one server, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 282—294.

[6] Beneš V. E., Weakly Markov queues, Transactions of the Second Praque Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Praque, 1960, pp. 9—25.

[7] Beneš V. E., General Stochastic Processes in the Theory of Queues, Mass., 1963.

[8] Bhat U. N., Customer overflow in queues with finite waiting space, *Austral J. Statist.*, **7** (1965), 15—19.

[9] Borel É., Sur l'emploi du théorème de Bernoulli pour faciliter le calcul d'un infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un quichet, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **214** (1942), 452—456.

[10] Brockmeyer E., Halstrøm H. L., Jensen A., The life and works of A. K. Erlang, *Trans. Danish Acad. Tech. Sci.*, **2** (1948), 1—277.

[11] Champernowne D. G., An elementary method of solution of the queueing problem with a single server and constant parameters, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **18** (1956), 125—128.

[12] Clarke A. B., A waiting line process of Markov type, *Ann. Math. Statist.*, **27** (1956), 452—459.

[13] Conolly B. W., The busy period in relation to the queueing process GI/M/1, *Biometrika*, **46** (1959), 246—251.

[14] Cox D. R., The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **51** (1955), 433—441.

[15] Кокс Д. Р., Смит У. Л., Теория очередей, изд-во «Мир», М., 1966.

[16] Cramèr H., On the mathematical theory of risk, Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.
[17] Crommelin C. D., Delay probability formulae when the holding times are constant, *Post Office Elect. Engin. J.* **25** (1932), 41—50; **26** (1934), 266—274.
[18] Daley D. J., Single-server queueing processes with uniformly limited queueing time, *J. Austral. Math. Soc.*, **4** (1964), 489—505.
[19] Doig A., A bibliography on the theory of queues, *Biometrika*, **44** (1957), 490—514.
[20] Erlang A. K., The theory of probabilities and telephone conversations (датск.), *Nyt Tidskrift for Matematik*, *B***20** (1909), 33—39. (Французский перевод: Calcul des probabilités et conversations téléphoniques, *Revue générale de l'Electricité*, **18** (1925), 305—309, Английский перевод см. [10, стр. 131—137].)
[21] Erlang A. K., Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges (датск.), *Elektroteknikeren*, **13** (1917), 5—13. (Английский перевод см. *Post Office Elect. Engin. J.*, **10** (1917—18), 189—197 и [10, стр. 138—155].)
[22] Erlang A. K., Telephone waiting times (датск.), *Matematisk Tidsskrift*, *B***31** (1920), 25—42. (Французский перевод: Calcul des probabilités et conversations téléphoniques, *Revue générale de l'Electricité*, **20** (1926), 270—278. Английский перевод см. [10, стр. 156—171].)
[23] Finch P. D., On the distribution of the queue size in queueing problems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **10** (1959), 327—336.
[24] Finch P. D., On the transient behaviour of a simple queue, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **22** (1960), 277—284.
[25] Finch P. D., On the busy period in the queueing system GI/G/1, *J. Austral Math. Soc.*, **2** (1961), 217—228.
[26] Gaver D. P., Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 698—720.
[27] Chosal A., Queues with finite waiting time, *Operations Res.*, **11** (1963), 919—921.
[28] Hasofer A. M., On the integrability, continuity and differentiability of a family of functions introduced by L. Takács, *Ann. Math. Statist.*, **34** (1963), 1045—1049.
[29] Hasofer A. M., On the single-server queue with non-homogeneous Poisson input and general service times, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 369—384.
[30] Heathcote C. R., On the queuieng process M/G/1, *Ann. Math. Statist.*, **32** (1961), 770—773.
[31] Karlin S., McGregor J., Many server queueing processes with Poisson input and exponential service times, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 87—118.
[32] Karlin S., Miller R. G., Prabhu N. U., Note on a moving single server problem, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 243—246.
[33] Kawata T., On the imbedded queueing process of general type, *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **38** (1961), 445—455.
[34] Keilson J., The use of Green's functions in the study of bounded random walks with application to queuing theory, *J. Math. Phys.*, **41** (1962), 42—52.
[35] Keilson J., A gambler's ruin type problem in queuing theory, *Operations Res.*, **11** (1963), 570—576.
[36] Keilson J., Some comments on single-server queuing methods and some new results, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **60** (1964), 237—251.
[37] Keilson J., Kooharian A., On time dependent queuing processes, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 104—112.
[38] Keilson J., Kooharian A., On the general time dependent queue with a single server, *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 767—791.
[39] Kendall D. G., Some problems in the theory of queues, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **13** (1951), 151—185.
[40] Kendall D. G., Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the inbedded Markov chain, *Ann. Math.*

Statist., **24** (1953), 338—354. (Русский перевод: Кендалл Д., Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова, сб. *Математика*, **3** : **6** (1959), 97—111.)

[41] Kendall D. G., Some recent work and further problems in the theory of queues, *Теория вероятн. и ее примен.*, **9** (1964), 1—13.

[42] Хинчин А. Я., Математическая теория стационарных очередей, *Матем. сб.*, **39**, № 4 (1932), 73—84.

[43] Хинчин А. Я., Математические методы в теории массового обслуживания, *Труды Матем. ин-та им. Стеклова*, **49** (1955), 1—122.

[44] Kingman J. F. C., The use of Spitzer's identity in the investigation of the busy period and other quantities in the queue GI/G/1, *J. Austral. Math. Soc.*, **2** (1962), 345—356.

[45] Колмогоров Л. Н., Sur le problème d'attente, *Матем. сб.*, **38**, № 1, 2 (1931), 101—106.

[46] Lindley D. V., The theory of queues with a single server, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **48** (1952), 277—289.

[47] Loyness R. M., A continuous-time treatment of certain queues and infinite dams, *J. Austral. Math. Soc.*, **2** (1962), 484—498.

[48] Luchak G., The solution of the single-channel queuing equation characterized by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times, *Operations Res.*, **4** (1956), 711—732.

[49] McMillan B., Riordan J., A moving single server problem, *Ann. Math. Statist.*, **28** (1957), 471—478.

[50] Morimura H., On the number of served customers in a busy period, *J. Operat. Res. Soc. Japan*, **4** (1961—62), 67—75.

[51] Neuts M. F., The distribution of the maximum length of a Poisson queue during a busy period, *Operations Res.*, **12** (1964), 281—285.

[52] Neuts M. F., An alternative proof of a theorem of Takács on the GI/M/1 queue, *Operations Res.*, **14** (1966), 313—316.

[53] Pollaczek F., Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie, I—II, *Math. Z.*, **32** (1930), 64—100, 729—750.

[54] Pollaczek F., Über das Warteproblem, *Math. Z.*, **38** (1934), 492—537.

[55] Pollaczek F., Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 136, Paris, 1957.

[56] Prabhu N. U., Application of storage theory to queues with Poisson arrivals, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 475—482.

[57] Prabhu N. U., Some results for the queue with Poisson arrivals, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **22** (1960), 104—107.

[58] Prabhu N. U., Bhat U. N., Some first passage problems and their application to queues, *Sankhyā, Ser. A*, **25** (1963), 281—292.

[59] Prabhu N. U., Bhat U. N., Further results for the queue with Poisson arrivals, *Operations Res.*, **11** (1963), 380—385.

[60] Reich E., On the integrodifferential equation of Takács, I—II, *Ann. Math. Statist.*, **29** (1958), 563—570; **30** (1959), 143—148.

[61] Rice S. O., Single server systems-II, Busy periods, *Bell. System Tech. J.*, **41** (1962), 279—310.

[62] Riordan J., Delays for last-come first-served service and the busy period, *Bell. System Tech. J.*, **40** (1961), 785—793.

[63] Риордан Дж., Вероятностные системы обслуживания, изд-во «Связь», М., 1966.

[64] Runnenburg Th. J., Probabilistic interpretation of some formulae in queueing theory, *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **37** (1960), 405—414.

[65] Runnenburg Th. J., On the use of Markov processes in one-server waiting-time problems and renewal theory, Thesis, Amsterdam, 1960.

[66] Саати Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, изд-во «Сов. радио», М., 1965.

[67] Shanbag D. N., On queues with Poisson service time, *Austral. J. Statist.*, **5** (1963), 57—61.
[68] Smith W. L., On the distribution of queueing times, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **49** (1953), 449—461.
[69] Spitzer F., The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 327—343.
[70] Syski R., Introduction to congestion theory in telephone systems, Edinburgh, 1960.
[71] Takács L., Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6** (1955), 101—129.
[72] Takács L., Transient behavior of single-server queuing processes with recurrent input and exponentially distributed service times, *Operations Res.*, **8** (1960), 231—245.
[73] Takács L., The transient behavior of a single server queueing process with a Poisson input, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, Univ. California Press, Berkeley, 1961, pp. 535—567.
[74] Takács L., The transient behavior of a single server queuing process with recurrent input and gamma service time, *Ann. Math. Statist.*, **32** (1961), 1286—1298.
[75] Takács L., Transient behavior of single-server queueing processes with Erlang input, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 1—28.
[76] Takács L., The probability law of the busy period for two types of queuing processes, *Operations Res.*, **9** (1961), 402—407.
[77] Takács L., Introduction to the theory of queues, Oxford Univ. Press, New York, 1962.
[78] Takács L., A generalization of the ballot problem and its application in the theory of queues, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **57** (1962), 327—337.
[79] Takács L., A single-server queue with recurrent input and exponentially distributed service times, *Operations Res.*, **10** (1962), 395—399.
[80] Takács L., A combinatorial method in the theory of queues, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **10** (1962), 691—694.
[81] Takács L., The distribution of the virtual waiting time for a single-server queue with Poisson input and general service times, *Operations Res.*, **11** (1963), 261—264.
[82] Takács L., The stochastic law of the busy period for a single-server queue with Poisson input, *J. Math. Anal. and Appl.*, **6** (1963), 33—42.
[83] Takács L., The limiting distribution of the virtual waiting time and the queue size for a single-server queue with recurrent input and general service times, *Sankhyā*, *Ser. A*, **25** (1963), 91—100.
[84] Takács L., The time dependence of a single-server queue with Poisson input and general service times, *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 1340—1348.
[85] Takács L., Delay distributions for one line with Poisson input, general holding times, and various orders of service, *Bell System Tech. J.*, **42** (1963), 487—503.
[86] Takács L., A combinatorial method in the theory of Markov chains, *J. Math. Anal. and Appl.*, **9** (1964), 153—161.
[87] Takács L., Occupation time problems in the theory of queues, *Operations Res.*, **12** (1964), 753—767.
[88] Takács L., Combinatorial methods in the theory of queues, *Rev. Internat. Statist.*, **32** (1964), 207—219.
[89] Takács L., Application of ballot theorems in the theory of queues, Proceedings of the Symposium on Congestion Theory, Univ. of North Carolina Press, 1965, pp. 337—398.
[90] Wold H. O. A. (редактор), Bibliography on time series and stochastic processes, Cambridge, Mass., 1965.

Глава 6

ПРОЦЕССЫ ХРАНЕНИЯ И СОЗДАНИЯ ЗАПАСОВ

§ 31. ПРОЦЕССЫ ХРАНЕНИЯ И СОЗДАНИЯ ЗАПАСОВ

Инициатором математических исследований в теории хранилищ, ведущихся с 1950 г., был Моран [21 — 23]. При проектировании хранилищ или резервуаров необходимо знание математических законов, управляющих флуктуациями содержимого хранилища или резервуара. Например, при строительстве атомного реактора необходимо принять во внимание, что установка нуждается в громадном количестве воды для охлаждения конденсаторов. Пусть это количество, которое может доходить до многих миллионов галлонов воды в час, а также предполагаемый приток воды известны. Тогда задача состоит в определении емкости резервуара, который смог бы постоянно удовлетворять этим требованиям с высокой вероятностью.

В дальнейшем мы займемся исследованием законов, которым подчиняются случайные флуктуации содержимого хранилища при известных стохастических свойствах входа. Мы рассмотрим различные математические модели, описывающие резервуары как конечной, так и бесконечной емкости. Мы будем говорить о водохранилищах, но такие же результаты справедливы и для общих процессов создания запасов. При этом содержимое хранилища соответствует объему запасов. Рассматриваемые ниже случаи, где содержимое является непрерывной величиной, соответствуют, например, случаям хранения воды (резервуары, водохранилища), других жидкостей или газа. Будут также рассмотрены случаи, где содержимое является дискретной величиной; например, число единиц некоторого товара на складе.

§ 32. ФЛУКТУАЦИИ СОДЕРЖИМОГО ВОДОХРАНИЛИЩА БЕСКОНЕЧНОЙ ЕМКОСТИ

Рассмотрим следующую математическую модель бесконечных водохранилищ. В интервале времени $(0, \infty)$ вода втекает в водохранилище (резервуар). Пусть $\chi(u)$ — полное количество воды, втекающее в водохранилище в интервале времени $(0, u]$. Обозначим через $\delta(u)$ полный спрос на воду в интервале времени $(0, u]$. Спрос удовлетворяется, если в резервуаре достаточное количество воды; если же воды в резервуаре недостаточно, то разница покрывается за счет других источников. Положим $\zeta(u) = \chi(u) - \delta(u)$. Если $\eta(0)$ — начальное содержимое резервуара, то содержимое в момент t равно

$$\eta(t) = \sup\{\eta(0) + \zeta(t) \text{ и } \zeta(t) - \zeta(u) \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}. \tag{1}$$

Это можно проверить так. Если в интервале $(0, t]$ не требуется дополнительной воды[1]) для удовлетворения потребителя, то $\eta(t) = \eta(0)+\zeta(t)$, и формула (1) верна. Пусть в интервале $(0, t]$ требуются дополнительные источники воды, причем u — последний момент времени, когда они используются. Иначе говоря, $u = \sup\{v\colon \eta(v)=0$ и $0 \leqslant v \leqslant t\}$. Тогда $\eta(t)=\zeta(t)-\zeta(u)$, и формула (1) также верна. Общее количество дополнительной воды, необходимой в интервале $[0, t]$, равно

$$\alpha(t)=\sup\{0 \text{ и } -\eta(0)-\zeta(u) \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\eta(t)=\eta(0)+\zeta(t)+\alpha(t). \tag{3}$$

Определим θ_0 как момент времени в интервале $(0, \infty)$, когда дополнительная вода требуется впервые, т. е.

$$\theta_0=\inf\{u\colon \eta(0)+\zeta(u) \leqslant 0 \text{ и } 0 \leqslant u \leqslant \infty\} \tag{4}$$

и $\theta_0=\infty$, если $\eta(0)+\zeta(u)>0$ для всех $u \geqslant 0$.

Во многих приложениях функция спроса $\delta(u)$ линейно зависит от u, и при соответствующей нормировке ее можно задать в виде $\delta(u)=u$ при $0 \leqslant u<\infty$.

Если $\chi(u)$, $0 \leqslant u<\infty$, — неубывающая ступенчатая функция, для которой $\chi(0)=0$, а $\delta(u)=u$ при $0 \leqslant u<\infty$, то $\alpha(t)$ есть полное время в интервале $[0, t]$, в течение которого резервуар пуст, а θ_0 — момент времени, когда резервуар впервые опустел.

Пусть либо приток воды $\{\chi(u), 0 \leqslant u<\infty\}$, либо спрос $\{\delta(u), 0 \leqslant u<\infty\}$, либо они оба являются случайными процессами, которые мы будем предполагать сепарабельными. Тогда $\eta(t)(0 \leqslant t<\infty)$, $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t<\infty)$ и θ_0 будут случайными величинами. Наша цель — найти распределение величины θ_0 и стохастические законы, управляющие процессами $\{\eta(t), 0 \leqslant t<\infty\}$ и $\{\alpha(t), 0 \leqslant t<\infty\}$.

Заметим, что всегда выполняются следующие соотношения. Если $c \geqslant 0$ и $0<x \leqslant t$, то

$$\mathbf{P}\{\alpha(t) \geqslant x \mid \eta(0)=c\}=\mathbf{P}\{\theta_0 \leqslant t \mid \eta(0)=c+x\}. \tag{5}$$

Если $c \geqslant 0$ и $t>0$, то

$$\mathbf{P}\{\alpha(t)=0 \mid \eta(0)=c\}=\mathbf{P}\{\theta_0 \geqslant t \mid \eta(0)=c\}. \tag{6}$$

Эти равенства немедленно следуют из (2) и (4).

Замечание. В важном частном случае, когда $\delta(u)=u$ для всех $u \geqslant 0$, функции $\eta(t)$, $\alpha(t)$ и θ_0 зависят от притока $\{\chi(u), 0 \leqslant u<\infty\}$ точно так же, как виртуальное время ожидания в момент t, полное время бездействия прибора в интервале $(0, t)$ и длительность начального периода занятости зависят от входа

[1]) То есть воды из других источников. — *Прим. ред.*

$\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ для определенного в § 29 процесса образования очереди. Именно по этой причине мы используем в этом параграфе аналогичные обозначения.

Далее мы увидим, что доказанные в гл. 2—4 общие теоремы можно применить и в теории водохранилищ. Мы рассмотрим различные математические модели для процессов хранения и создания запасов и укажем, как эти общие теоремы применяются для них. Математические модели мы разделим на два главных типа: соответствующие дискретному процессу хранения, когда случайные величины $\zeta(u)$, $u = 0, 1, 2, \ldots$, принимают только целочисленные значения, и общему процессу хранения, когда случайные величины $\zeta(u)$, $0 \leqslant u < \infty$, принимают любые вещественные значения. Мы будем предполагать, что начальное содержимое водохранилища $\eta(0)$ и процесс $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ взаимно независимы.

Дискретные процессы хранения

(i) Пусть начальное содержимое водохранилища равно η_0, где случайная величина η_0 принимает лишь неотрицательные целые значения. Пусть количество воды, втекающее в водохранилище в моменты $r = 1, 2, \ldots$, равно $\nu_1, \nu_2, \ldots$ соответственно. Если водохранилище непусто, то отток воды осуществляется непрерывно с постоянной единичной скоростью. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots$ и $N_0 = 0$. Обозначим через η_n содержимое водохранилища непосредственно после момента n. Обозначим через θ_0 момент времени, когда водохранилище впервые опустело, т. е. наименьшее из чисел r, для которых $\eta_r = 0$. И наконец, пусть α_n — полное время в интервале $[0, n]$, когда водохранилище пусто.

Тогда $\chi(u) = N_{[u]}$, $\delta(u) = u$ и $\zeta(u) = N_{[u]} - u$ для $u \geqslant 0$. Кроме того, $\eta_n = \eta(n+0)$, $\alpha_n = \alpha(n)$, а θ_0 определяется формулой (4). В этом случае будет рассматриваться процесс хранения типа

$$Q = \{\eta_0;\ N_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Этот процесс хранения обладает точно такими же стохастическими свойствами, что и процесс образования очереди Q, введенный в § 27. Здесь η_0 соответствует начальной длине очереди ζ_0; η_n соответствует длине очереди ζ_n непосредственно после окончания обслуживания n-го требования; α_n имеет одно и то же значение для обоих процессов; θ_0 соответствует ρ_0 — числу требований, обслуженных в начальный период занятости.

Предположим, что $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — либо переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, либо, в частности, взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Тогда можно применить теоремы § 28 для нахождения распределений и асимптотических распределений величин η_n, α_n и θ_0. Имеем

$$\mathbf{P}\{\eta_k \leqslant k \mid \eta_0 = i\} = \mathbf{P}\{N_r < r+k \text{ для } r=1, 2, \ldots, n \text{ и } N_n \leqslant n+k-i\} \quad (7)$$

при $i = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\mathbf{P}\{\alpha_n > k - i \mid \eta_0 = i\} = 1 - \mathbf{P}\{r - N_r < k \text{ для } r = 0, 1, \ldots, n-1\} \quad (8)$$

при $0 \leqslant i \leqslant k < n$ и

$$\mathbf{P}\{\theta_0 = n \mid \eta_0 = i\} = \mathbf{P}\{N_r < r \text{ для } r = 1, \ldots, n \text{ и } N_n = n - i\} \quad (9)$$

при $i = 1, 2, \ldots$. Теперь теоремы 1—6 § 28 применимы.

Теоремы § 28 можно использовать также для нахождения распределений и асимптотических распределений величин η_n, α_n, θ_0, если вместо предыдущего случая рассмотреть случай с $\zeta(u) = u - N_{[u]}$ при $u \geqslant 0$.

Замечание. Пусть $\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_r^*, \ldots$ — двойственная последовательность для определенной выше последовательности $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$, и пусть $N_r^* = \nu_1^* + \ldots + \nu_r^*$ при $r = 1, 2, \ldots$; $N_0 = 0$. Процесс хранения

$$Q^* = \{\eta_0;\ N_r^*,\ r = 0, 1, 2, \ldots\}$$

обладает точно такими же стохастическими свойствами, как и двойственный процесс образования очереди Q^*, введенный в § 27. Случайные величины α_n^* и θ_0^* для Q^* обозначают то же, что α_n и θ_0 для Q. Тогда распределения величин α_n^* и θ_0^* можно получить с помощью теорем 8—11 § 28.

(ii) Пусть начальный объем запасов на складе определяется случайной величиной $\eta(0)$, принимающей неотрицательные целые значения. Пусть $\{\zeta(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс либо с переставляемыми, либо, в частности, со стационарными независимыми приращениями. Пусть $\mathbf{P}\{\zeta(0) = 0\} = 1$ и $\zeta(u)$ принимает только целочисленные значения. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta(t) < k \mid \eta(0) = i\} = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} -\zeta(u) < k \text{ и } \zeta(t) < k - i\}. \quad (10)$$

Это следует из (1). В самом деле, если в (1) заменить $\zeta(t) - \zeta(u)$ на $\zeta(t-u)$, $0 \leqslant u \leqslant t$, то получится новая случайная величина с точно таким же распределением, что и $\eta(t)$. Это и доказывает равенство (10). Согласно (2),

$$\mathbf{P}\{\alpha(t) > x - i \mid \eta(0) = i\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta^*(u) \leqslant x\} \quad (11)$$

для $0 \leqslant i < x < t + i$, где $\zeta^*(u) = -\zeta(u)$. Согласно (3),

$$\mathbf{P}\{\theta_0 \leqslant t \mid \eta(0) = i\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta^*(u) \leqslant x\} \quad (12)$$

для $i > 0$, где $\zeta^*(u) = -\zeta(u)$.

Предположим, что почти все выборочные функции процесса $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ имеют своими скачками либо только величины $1, -1, -2, \ldots$, либо только величины $-1, 1, 2, \ldots$. Иначе говоря, либо $\zeta(u) = \xi(u)$, либо $\zeta(u) = \xi^*(u) = -\xi(u)$ при $0 \leqslant u < \infty$, где процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ определен в § 21. Тогда для нахождения распределений и асимптотических распределений величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, θ_0 можно применить теоремы § 21.

Общие процессы хранения

(i) Пусть начальное содержимое водохранилища определяется неотрицательной случайной величиной $\eta(0)$. Обозначим через $\chi(u)$ полное количество воды, втекающей в водохранилище в интервале времени $[0, u]$. Пусть отток воды осуществляется непрерывно с постоянной единичной скоростью, если водохранилище непусто. Тогда $\delta(u) = u$ и $\zeta(u) = \chi(u) - u$ для $u \geqslant 0$. В этом случае мы будем говорить о процессе хранения типа

$$W = \{\eta(0);\ \chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}.$$

Этот процесс хранения обладает точно такими же стохастическими свойствами, что и процесс образования очереди W, введенный в § 27. При этом $\eta(t)$, содержимое водохранилища в момент t, соответствует времени ожидания в момент t. Полное время $\alpha(t)$ в интервале $(0, t)$, в течение которого используется дополнительный источник (полное время, в течение которого водохранилище пусто), соответствует полному времени бездействия обслуживающего прибора в интервале времени $(0, t)$. Момент времени θ_0, когда впервые требуется дополнительный источник воды, соответствует длительности начального периода занятости.

Предположим, что $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс либо с переставляемыми приращениями, либо, в частности, со стационарными независимыми приращениями, а почти все его выборочные функции являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u = 0$. Тогда для нахождения распределений и асимптотических распределений величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, θ_0 можно применить теоремы § 29.

Если предположить, что $\zeta(u) = u - \chi(u)$ для $u \geqslant 0$, где процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ определен выше, то теоремы § 29 также дают распределения и асимптотические распределения величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, θ_0.

В то время как в теории очередей процесс $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ обычно является простым скачкообразным процессом, имеющим с вероятностью 1 только конечное число скачков в конечных интервалах, для процессов хранения $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ может иметь с вероятностью 1 бесконечное число скачков в любом конечном интервале.

Замечание. Пусть $\{\chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — двойственный процесс для определенного выше процесса $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$. Рассмотрим процесс хранения

$$W^* = \{\eta(0);\ \chi^*(u),\ 0 \leqslant u \leqslant \infty\}.$$

Он обладает точно такими же стохастическими свойствами, что и двойственный процесс образования очереди, введенный в § 27. Случайные величины $\alpha^*(t)$ и θ_0^* для W^* соответствуют случайным величинам $\alpha(t)$ и θ_0 для процесса W. Тогда распределения величин $\alpha^*(t)$ и θ_0^* можно найти с помощью теорем 8—11 § 29.

(ii) Можно получить более общие типы процесса $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$, если рассмотреть следующую эквивалентную интерпретацию процесса $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$. Пусть процесс $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ описывает флуктуации уровня водохранилища, когда уровень изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда $\eta(0) + \zeta(t)$ есть уровень водохранилища в момент t. Предположим, что дополнительный источник воды используется, если это необходимо, для того, чтобы уровень никогда не опускался ниже нулевой отметки. Тогда $\eta(t)$ — уровень (содержимое) водохранилища в момент t.

Пусть начальное содержимое водохранилища определяется неотрицательной случайной величиной $\eta(0)$. Пусть $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный процесс либо с переставляемыми приращениями, либо со стационарными независимыми приращениями и $\mathbf{P}\{\zeta(0) = 0\} = 1$. Тогда в силу (1)

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u) \leqslant x \text{ и } \zeta(t) \leqslant x - c\}, \tag{13}$$

в силу (2)

$$\mathbf{P}\{\alpha(t) > x - c \mid \eta(0 = c)\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta^*(u) \leqslant x\} \tag{14}$$

для $0 \leqslant c < x < t + c$, а в силу (3)

$$\mathbf{P}\{\theta_0 \leqslant t \mid \eta(0) = c\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta^*(u) \leqslant c\} \tag{15}$$

при $c > 0$, где $\zeta^*(u) = -\zeta(u)$.

Пусть $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого не имеют отрицательных скачков и обращаются в нуль при $u = 0$. Тогда для нахождения распределений и асимптотических распределений величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, θ_0 можно применить теоремы § 24.

Если же $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого не имеют положительных скачков и обращаются в нуль при $u = 0$, то для нахождения распределений и асимптотических распределений величин $\eta(t)$, $\alpha(t)$, θ_0 можно также применить теоремы § 24, заменив в них $\zeta(u)$ на $\zeta^*(u) = -\zeta(u)$.

В самом общем случае, когда $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — произвольный сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, можно использовать методы, описанные в § 25.

§ 33. ФЛУКТУАЦИИ СОДЕРЖИМОГО ВОДОХРАНИЛИЩА КОНЕЧНОЙ ЕМКОСТИ

Рассмотрим теперь следующую математическую модель конечных водохранилищ. Вода втекает в водохранилище (резервуар) в интервале времени $(0, \infty)$. Обозначим через $\chi(u)$ полное количество воды, втекающей в водохранилище в интервале времени $(0, u]$. Емкость водохранилища равна конечному положительному числу m. При переполнении водохранилища избыток воды вытекает. Обозначим через $\delta(u)$ полное количество воды, потребляемое в интервале времени $(0, u]$. Спрос удовлетворяется, если в резервуаре для этого достаточно воды, в противном случае разница возмещается из другого источника. Положим $\zeta(u) = \chi(u) - \delta(u)$ для $u \geqslant 0$. Пусть процесс $\{\zeta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ не имеет скачков отрицательной величины. Обозначим через $\eta(t)$ содержимое водохранилища в момент t.

Наша первая цель — выразить $\eta(t)$ через $\eta(0)$ и $\zeta(u)$, $0 \leqslant u \leqslant t$. Для простоты предположим, что $\eta(0) = m$, и для фиксированного t обозначим $\xi(u) = \zeta(t) = \zeta(t-u)$ при $0 \leqslant u \leqslant t$.

Теорема 1. *Если* $\eta(0) = m$, *процесс* $\{\zeta(0),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ *не имеет скачков отрицательной величины и*

$$\theta(m-x) = \inf\{u\colon\ \xi(u) \leqslant x - m \ \text{и}\ 0 \leqslant u \leqslant t\} \tag{1}$$

существует для $0 \leqslant x \leqslant m$, *то* $\eta(t) \leqslant x$ $(0 \leqslant x \leqslant m)$ *тогда и только тогда, когда* $\xi(u) \leqslant x$ *при* $0 \leqslant u \leqslant \theta(m-x)$.

Доказательство. При $x = m$ теорема тривиальна. Предположим, что $0 \leqslant x < m$. Пусть $\eta(0) = m$ и u — наибольшее из чисел отрезка $[0, t]$, для которых $\eta(u) = m$. Тогда содержимое водохранилища в момент t равно

$$\eta(t) = \sup\{\zeta(t) - \zeta(v) \quad \text{для} \quad u \leqslant v \leqslant t \ \text{и}\ \zeta(t) - \zeta(u) + m\}, \tag{2}$$

откуда

$$\eta(z) = \sup\{\zeta(z) - \zeta(v) \quad \text{для} \quad u \leqslant v \leqslant z \ \text{и}\ \zeta(z) - \zeta(u) + m\} < m \tag{3}$$

при $u < z < t$.

Если обозначить $\xi(v) = \zeta(t) - \zeta(t-v)$ для $0 \leqslant v \leqslant t$, то из (2) и (3) получим, что $\eta(t) \leqslant x$ $(0 \leqslant x < m)$ тогда и только тогда, когда

$$\xi(z) \leqslant x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant z \leqslant t - u \tag{4}$$

и

$$\xi(t-u) \leqslant x - m, \tag{5}$$

где u — наименьшее из чисел в интервале $[0, t]$, удовлетворяющих условиям

$$\zeta(z)-\zeta(v)<m \quad \text{для} \quad 0<v\leqslant z\leqslant t-u \tag{6}$$

и

$$\zeta(t-u)-\zeta(z)<0 \quad \text{для} \quad 0<z<t-u. \tag{7}$$

Теперь, если $\eta(t)\leqslant x$ $(0\leqslant x<m)$, то в силу (5) существует такое число $v\in(0, t-u]$, что $\zeta(v)\leqslant x-m$. Положим $y=\inf\{v: \zeta(v)\leqslant \leqslant x-m$ и $0<v\leqslant t-u\}$. Тогда $\zeta(y)=x-m$ и $y>0$. Покажем, что неравенства (4) при $y\leqslant z\leqslant t-u$ и (5) автоматически выполняются. Положим в (6) $v=y$. Тогда $\zeta(z)-\zeta(y)<m$ при $0<y\leqslant z\leqslant t-u$, или $\zeta(z)<x$ при $0<y\leqslant z\leqslant t-u$, т. е. (4) выполняется при $y\leqslant z\leqslant t-u$. Если $y=t-u$, то очевидно, что (5) верно. Если же $y<t-u$, положим в (7) $z=y$. Тогда $\zeta(t-u)<\zeta(y)=x-m$, т. е. (5) верно и в этом случае. Обратно, если (4) выполняется для $u=t-y$, где y то же, что и выше, то из (4) следуют (5), (6) и (7).

В соответствии с этим $\eta(t)\leqslant x$ $(0\leqslant x\leqslant m)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $y\in[0, t]$, что $\zeta(y)=x-m$. Если y — наименьшее из этих чисел, то $\zeta(z)\leqslant x$ при $0\leqslant z\leqslant y$. Теорема доказана.

Пусть $\eta(0)$ — случайная величина, принимающая значения из отрезка $[0, m]$, и $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — вещественный сепарабельный случайный процесс. Тогда $\eta(t)$ — случайная величина для всех $t\geqslant 0$. Мы будем предполагать, что $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ и $\eta(0)$ независимы, и найдем распределение величины $\eta(t)$ для нескольких типов процессов хранения и создания запасов.

Дискретные процессы хранения

(i) Пусть m — положительное целое число. Начальное содержимое водохранилища емкости m равно $\eta(0)=\eta_0$, где η_0 — случайная величина, принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, m$. Предположим, что в моменты времени $u=1, 2, \ldots, r, \ldots$ в водохранилище втекает соответственно $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ единиц количества воды. Отток воды осуществляется непрерывно с постоянной единичной скоростью, если водохранилище непусто. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, 2, \ldots$ и $N_0=0$. Тогда $\chi(u)=N_{[u]}$, $\delta(u)=u$ и $\zeta(u)=N_{[u]}-u$ для $u\geqslant 0$. Пусть $\eta_n=\eta(n+0)$, $n=1, 2, \ldots$. Для $i\geqslant 1$ определим $\rho(i)$ как наименьшее из чисел r, для которых $N_r\leqslant r-i$ и $r=1, 2, \ldots$.

Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — переставляемые случайные величины, или, в частности, взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, то

$$\mathbf{P}\{\eta_n\leqslant k\mid\eta_0=m\}=$$
$$=\mathbf{P}\{N_r<r+k \quad \text{для} \quad r=1, \ldots, \rho(m-k) \text{ и } \rho(m-k)\leqslant n\} \tag{8}$$

при $k=0, 1, \ldots, m$. Это следует из теоремы 1, если принять во внимание, что процессы $\{\zeta(u),\ u=0, 1, \ldots, n\}$ и $\{\zeta(n)-\zeta(n-u),\ u=0, 1, \ldots, n\}$ имеют одно и то же совместное распределение.

Теорема 2. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\nu_r=j\}=\pi_j$ для $j=0, 1, 2, \ldots$ и $\pi_0>0$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_k\leqslant k\}=\frac{Q_k}{Q_m} \tag{9}$$

для $k=0, 1, \ldots, m$, где Q_0 — отличная от нуля константа, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ вычисляются из рекуррентного соотношения

$$Q_k=\sum_{j=0}^{k}\pi_j Q_{k+1-j} \qquad (k=0, 1, \ldots). \tag{10}$$

Предельное распределение (9) *не зависит от начального распределения.*

Доказательство. Случай $k=m$ очевиден. Пусть $k=0, 1, \ldots, m-1$. Если в (8) устремить n к ∞, то получим

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n\leqslant k\,|\eta_0=m\}=\mathbf{P}\{N_r<r+k \ \text{ для } \ r=1, \ldots, \rho(m-k)\}. \tag{11}$$

При $\mathbf{P}\{\rho(m-k)<\infty\}=1$ это очевидно. Если же $\mathbf{P}\{\rho(m-k)=\infty\}>0$, то $\mathbf{P}\{N_r<r+k$ для $r=1, 2, \ldots\}=0$ и, следовательно, (11) также верно. Правую часть равенства (11) можно найти из теоремы 2 § 7. Легко видеть, что (9) не зависит от распределения величины η_0.

Обозначим через $\pi(z)$ производящую функцию величин ν_r, $r=1, 2, \ldots$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}Q_k z^k=\frac{Q_0 z}{\pi(z)-z} \tag{12}$$

для $|z|<\delta$, где δ — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\pi(z)=z$. Явные формулы для Q_k, $k=1, 2, \ldots$, приведены в § 7.

Замечание. Последовательность случайных величин $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ образует цепь Маркова с пространством состояний $I=\{0, 1, \ldots, m\}$. Если $\pi_0>0$ и $\pi_0+\pi_1<1$, то эта цепь Маркова неприводима и апериодична. Таким образом, предельное распределение

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n\leqslant k\}=Q_k^* \qquad (k=0, 1, \ldots, m) \tag{13}$$

существует и не зависит от распределения величины η_0. Очевидно, что

$$\eta_{n+1}=\min\{[\eta_n-1]^+ +\nu_n,\ m\} \tag{14}$$

для $n=0, 1, 2, \ldots$. Отсюда

$$Q_k^* = Q_{k+1}^*\pi_0 + Q_k^*\pi_1 + \ldots + Q_1^*\pi_k \tag{15}$$

для $k=0, 1, \ldots, m-1$ и $Q_m^*=1$. Сравнивая (10) и (15), видим, что $Q_k^* = Q_k/Q_m$ для $k=0, 1, \ldots, m$.

(ii) Пусть m — положительное целое число. Начальный объем запасов на складе вместимости m определяется случайной величиной $\eta(0)$ со значениями $0, 1, \ldots, m$. Пусть $\zeta(u) = \xi(u)$ для $u \geqslant 0$, где стохастический процесс $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ определен в § 21. Иначе говоря, мы предполагаем, что $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — переставляемые или взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r=1, 2, \ldots$ и $N_0=0$. Пусть $\{\nu(u), u \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а величины $\{\nu_r\}$ и $\{\nu(u)\}$ независимы. Положим $\xi(u) = N_{\nu(u)} - \nu(u)$ для $u \geqslant 0$ и

$$\theta(i) = \inf\{u\colon \xi(u) = -i \text{ и } 0 \leqslant u < \infty\} \tag{16}$$

при $i > 0$.

Из теоремы 1 следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k \mid \eta(0) = m\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi(u) \leqslant k \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant \theta(m-k) \text{ и } \theta(m-k) \leqslant t\} \tag{17}$$

при $k=0, 1, \ldots, m$. В самом деле, легко видеть, что теорему 1 можно применить к процессу $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$, если m — положительное целое число и $x=0, 1, \ldots, m$. Отсюда и получается (17), если принять во внимание, что стохастические процессы $\{\xi(u), 0 \leqslant u \leqslant t\}$ и $\{\xi(t) - \xi(t-u), 0 \leqslant u \leqslant t\}$ имеют одинаковые конечномерные распределения.

Теорема 3. *Если $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями и $\pi_0 > 0$, то для $k=0, 1, \ldots, m$*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k\} = \frac{Q_k}{Q_m}, \tag{18}$$

где $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ заданы в теореме 2. Предельное распределение (18) *не зависит от начального распределения.*

Доказательство. Случай $k=m$ очевиден. Если $k=0, 1, \ldots, m-1$, то в силу (17)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k \mid \eta(0) = m\} = \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant\theta(m-k)} \xi(u) \leqslant k\}, \tag{19}$$

а правую часть получаем из теоремы 5 § 21. Легко видеть, что предел (19) не зависит от распределения величины $\eta(0)$. Теорема доказана.

Замечание. Стохастический процесс $\{\eta(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ является марковским процессом с пространством состояний $I = \{0, 1, \ldots, m\}$. Предположим, что $\pi_0 > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k\} = Q_k^*$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ существует и не зависит от распределения величины $\eta(0)$. Для $t \geqslant 0$, $u > 0$ и $k = 0, 1, \ldots, m-1$ имеем

$$\mathbf{P}\{\eta(t+u) \leqslant k\} = (1-\lambda u)\,\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k\} + \lambda u \sum_{j=0}^{k} \pi_j \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k+1-j\} + o(u) \tag{20}$$

и $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant m\} = 1$. Если из обеих частей равенства (20) вычесть $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant k\}$, устремить t к ∞, разделить уравнение на u и устремить u к 0, то получим

$$Q_k^* = \sum_{j=0}^{k} \pi_j Q_{k+1-j}^* \tag{21}$$

для $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и $Q_m^* = 1$. Отсюда $Q_k^* = Q_k/Q_m$ для $k = 0, 1, \ldots, m$, где Q_k $(k = 0, 1, \ldots)$ заданы соотношением (10). Этот результат согласуется с (18).

Общие процессы хранения

(i) Пусть m — положительное вещественное число. Начальное содержимое водохранилища емкости m определяется случайной величиной $\eta(0)$, принимающей значения из отрезка $[0, m]$. Обозначим через $\chi(u)$ полное количество воды, втекающее в водохранилище в интервале времени $(0, u]$. При переполнении водохранилища избыток воды вытекает. Если водохранилище непусто, то отток воды осуществляется непрерывно с постоянной единичной скоростью, т. е. $\delta(u) = u$ для $u \geqslant 0$. Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u = 0$, то для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\} = e^{-u\Phi(s)} \tag{22}$$

с надлежащей функцией $\Phi(s)$. Тривиальный случай $\mathbf{P}\{\chi(u) = 0\} = 1$ для всех $u \geqslant 0$ исключается из рассмотрения.

Для $c \geqslant 0$ положим

$$\theta(c) = \inf\{u\colon\ \chi(u) \leqslant u - c \text{ и } 0 \leqslant u < \infty\} \tag{23}$$

и $\theta(c) = \infty$, если $\chi(u) > u - c$ для всех $u \geqslant 0$.

Из теоремы 1 следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0) = m\} = \\ = \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u + x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant \theta(m-x) \text{ и } \theta(m-x) \leqslant t\} \tag{24}$$

при $0 \leqslant x \leqslant m$, так как процессы $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ и $\{\chi(t)-\chi(t-u),\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ имеют одинаковые конечномерные распределения.

Теорема 4. *Если $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого являются неубывающими ступенчатыми функциями, обращающимися в нуль при $u=0$, то для $0 \leqslant x \leqslant m$*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \frac{W(x)}{W(m)}; \tag{25}$$

функция $W(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ определяется соотношением

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x) = \frac{W(0)\,s}{s-\Phi(s)} \tag{26}$$

для $\mathrm{Re}(s) > \omega$, где ω — наибольший вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$, а $W(0)$ — отличная от нуля константа.

Доказательство. Согласно (24), при $0 \leqslant x \leqslant m$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0)=m\} = \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant u+x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant \theta(m-x)\}, \tag{27}$$

а правую часть находим из теоремы 1 § 16. Процесс $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — марковский. Легко видеть, что предельное распределение $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}$ не зависит от распределения величины $\eta(0)$. Теорема доказана.

Явные формулы для $W(x)$ приведены в § 16. Если $\rho = \Phi'(+0)$ — конечное положительное число, то $\Phi(s) = \rho s \psi^*(s)$, где $\psi^*(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса функции распределения $H^*(x)$ неотрицательной случайной величины. Тогда в силу (12) § 16

$$W(x) = W(0) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n H_n^*(x), \tag{28}$$

где $H_n^*(x)$ есть n-кратная свертка функции $H^*(x)$; $H_0^*(x)=1$ при $x \geqslant 0$ и $H_0^*(x)=0$ при $x<0$.

Если $\rho \neq 1$, то в силу (14) § 16

$$W(x) = W(0)\left[\frac{e^{\omega x}}{1-\Phi'(\omega)} - \int_{+0}^{\infty} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y+x\}\right] \tag{29}$$

для всех x, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s)=s$. Если $\rho<1$, то $\omega=0$, а если $\rho>1$, то $\omega>0$.

Замечание. Пусть приток определяется обобщенным пуассоновским процессом $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, т. е. число $\lambda = \Phi(\infty)$ конечно и положительно. Как и ранее, обозначим через $\eta(t)$ содержимое водохранилища емкости m в момент t. Если $m = \infty$, т. е. водохранилище имеет бесконечную емкость, то его содержимое в момент t будем обозначать через $\eta^*(t)$. Предположим, что $\eta(0) = \eta^*(0) = m$. Тогда

$$w \int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}\, dt = \frac{\int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{P}\{\eta^*(t) \leqslant x\}\, dt}{\int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{P}\{\eta^*(t) \leqslant m\}\, dt} \tag{30}$$

для $\operatorname{Re}(w) > 0$. Явный вид функции распределения $\mathbf{P}\{\eta^*(t) \leqslant x\}$ приведен в § 15 (см. § 32). Обращая формулу (30), получаем $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}$.

Докажем (30). Пусть $m^*(t)$ — среднее число переходов $m \to m - 0$ в интервале $(0, t)$ для процесса $\{\eta^*(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$, а $m(t)$ — то же для процесса $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$. Положим $G(t, x) = \mathbf{P}\{\eta^*(u) < m$ для $0 \leqslant u < t$ и $\eta^*(t) \leqslant x\}$. Очевидно, что $G(t, x) = \mathbf{P}\{\eta(u) < m$ для $0 \leqslant u < t$ и $\eta(t) \leqslant x\}$. Далее, для $0 \leqslant x \leqslant m$

$$\mathbf{P}\{\eta^*(t) \leqslant x\} = \int_0^t G(t - u, x)\, dm^*(u) \tag{31}$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \int_0^t G(t - u, x)\, dm(u). \tag{32}$$

Пусть

$$\mu^*(w) = \int_0^\infty e^{-wt}\, dm^*(t) \tag{33}$$

и

$$\mu(w) = \int_0^\infty e^{-wt}\, dm(t) \tag{34}$$

для $\operatorname{Re}(w) > 0$.

Возьмем преобразования Лапласа — Стильтьеса от (31) и (32) и найдем их отношение:

$$\int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}\, dt = \frac{\mu(w)}{\mu^*(w)} \int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{P}\{\eta^*(t) \leqslant x\}\, dt \tag{35}$$

для $\operatorname{Re}(w)>0$ и $0 \leqslant x \leqslant m$. Если в (35) $x=m$, то $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant m\}=1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{w}=\frac{\mu(w)}{\mu^*(w)} \int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{P}\{\eta^*(t) \leqslant m\} dt. \tag{36}$$

Разделив (35) на (36), получим (30).

(ii) Можно получить более общие типы процесса $\{\xi(u), 0 \leqslant u<\infty\}$, если рассмотреть следующую эквивалентную интерпретацию процесса $\{\eta(t), 0 \leqslant t<\infty\}$. Пусть процесс $\{\zeta(u), 0 \leqslant u<\infty\}$ описывает флуктуации уровня водохранилища, когда он меняется в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда $\eta(0)+\zeta(t)$ есть уровень водохранилища в момент t. Допустим, что уровень не может подняться выше m и не может опуститься ниже 0. Иначе говоря, избыток воды вытекает, а недостаток всегда покрывается за счет другого источника. Тогда $\eta(t)$ — уровень (содержимое) водохранилища в момент t.

Пусть m — положительное вещественное число. Начальное содержимое водохранилища емкости m определяется случайной величиной $\eta(0)$, принимающей значения из отрезка $[0, m]$. Пусть $\{\zeta(u), 0 \leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный стохастический процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого не имеют отрицательных скачков и обращаются в нуль при $u=0$. Тогда для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\zeta(u)}\}=e^{u\Psi(s)} \tag{37}$$

с надлежащей функцией $\Psi(s)$. Тривиальные случаи $\mathbf{P}\{\zeta(u) \geqslant 0\}=1$ для всех $u \geqslant 0$ и $\mathbf{P}\{\zeta(u) \leqslant 0\}=1$ для всех $u \geqslant 0$ исключаются из рассмотрения.

Для $c \geqslant 0$ положим

$$\theta(c)=\inf\{\zeta(u) \leqslant -c \text{ и } 0 \leqslant u<\infty\} \tag{38}$$

и $\theta(c)=\infty$, если $\zeta(u)>-c$ для всех $u \geqslant 0$.

Из теоремы 1 следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0)=m\}= \\ =\mathbf{P}\{\zeta(u) \leqslant x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant \theta(m-x) \text{ и } \theta(m-x) \leqslant t\} \tag{39}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$, так как процессы $\{\xi(u), 0 \leqslant u \leqslant t\}$ и $\{\zeta(t)-\zeta(t-u), 0 \leqslant u \leqslant t\}$ имеют одинаковые конечномерные распределения.

Теорема 5. *Пусть $\{\zeta(u), 0 \leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, почти все выборочные функции которого не имеют отрицательных скачков и обращаются в нуль при $u=0$. Тогда предельное распределение*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}=\frac{W(x)}{W(m)} \tag{40}$$

существует для $0 \leqslant x \leqslant m$, *не зависит от распределения величины* $\eta(0)$ *и*

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\,dx = \frac{C}{\Psi(s)} \tag{41}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, *где* ω — *наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения* $\Psi(s) = 0$, *а* C — *ненулевая константа.*

Доказательство. В силу (39)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0) = m\} = \mathbf{P}\{\zeta(u) \leqslant x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant \theta(m - x)\} \tag{42}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$, а правую часть находим из теоремы 5 § 24. Процесс $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — марковский. Легко видеть, что предел $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}$ не зависит от распределения величины $\eta(0)$. Теорема доказана.

§ 34. ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим водохранилище бесконечной емкости. Обозначим через $\chi(u)$ полное количество воды, втекающее в водохранилище в интервале времени $(0, u]$. Пусть $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями и для $u \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\} = \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^u,$$

где μ — положительная константа. Предположим, что отток воды осуществляется непрерывно с постоянной единичной скоростью, если водохранилище непусто. Обозначим через $\eta(t)$ содержимое водохранилища в момент t, а через $\alpha(t)$ полное время в интервале $(0, t)$, в течение которого водохранилище пустует. Найти $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0) = c\}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\}$, $\mathbf{P}\{\alpha(t) \leqslant x - c \mid \eta(0) = c\}$ и асимптотическое распределение величины $\alpha(t)$ при $t \to \infty$.

2. В условиях задачи 1 вода втекает в водохранилище согласно процессу $\{\chi^*(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, совпадающему с двойственным для процесса $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$, определенного в задаче 1. Обозначим через θ_0^* момент времени, когда водохранилище впервые становится пустым, а через $\beta^*(t)$ полное время в интервале $(0, t)$, в течение которого водохранилище непусто. Найти распределения величин θ_0^* и $\beta^*(t)$, а также асимптотическое распределение для $\beta^*(t)$ при $t \to \infty$.

3. Рассмотрим водохранилище конечной емкости m, где m — положительное вещественное число. Пусть приток $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ описывается сепарабельным случайным процессом со стационарными независимыми приращениями и для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\} = e^{-u\Phi(s)},$$

где

$$\Phi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sx})\,dN(x).$$

Предположим, что спрос задается функцией $\delta(u)=u$ для всех $u \geqslant 0$. Найти стационарное распределение содержимого водохранилища для случая

$$N(x)=\frac{-1}{\sqrt{4\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-\mu y}\frac{dy}{y^{3/2}}, \qquad x>0,$$

где $\mu>0$.

4. В условиях задачи 3 найти стационарное распределение содержимого водохранилища для случая

$$N(x)=-\int_{0}^{\infty} e^{-\mu y}\frac{dy}{y}, \qquad x>0.$$

где $\mu>0$.

5. В условиях задачи 3 найти стационарное распределение содержимого водохранилища для случая $N(x)=-1/\sqrt{\pi x}$, $x>0$.

6. Рассмотрим водохранилище емкости m, где m — положительное вещественное число. Пусть $\{\zeta(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный процесс броуновского движения, для которого $\mathbf{E}\{\zeta(u)\}=au$ и $\operatorname{Var}\{\zeta(u)\}=\sigma^2 u$ при $u\geqslant 0$. Найти стационарное распределение количества воды в водохранилище.

7. Рассмотрим водохранилище емкости m, где m — вещественное положительное число. Пусть $\{\zeta(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, причем при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\zeta(u)}\right\}=e^{u\Psi(s)},$$

где

$$\Psi(s)=as-\int_{0}^{\infty}\left(1-e^{sx}-\frac{sx}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Найти стационарное распределение количества воды в водохранилище.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Downton F., A note on Moran's theory of dams, *Quart. J. Math. Oxford, Sec. Ser.*, **8** (1957), 282—286.

[2] Gani J., Some problems in the theory of provisioning and of dams, *Biometrika*, **42** (1956), 179—200.

[3] Gani J., Problems in the probability theory of storage systems, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **19** (1957), 181—206.

[4] Gani J., Elementary methods for an occupancy problem of storage, *Math. Ann.*, **136** (1958), 454—465.

[5] Gani J., A stochastic dam process with non-homogeneous Poisson inputs, *Studia Math.*, **21** (1962), 307—315.

[6] Gani J., Prabhu N. U., Stationary distributions of the negative exponential type for the infinite dam, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **19** (1957), 342—351.

[7] Gani J., Prabhu N. U., Continuous time treatment of a storage problem, *Nature*, **182** (1958), 39—40.

[8] Gani J., Prabhu N. U., Remarks on the dam with Poisson type inputs, *Austral J. Appl. Sci.*, **10**, 1959, 113—122.

[9] Gani J., Prabhu N. U., The time dependent solution of a storage model with Poisson input, *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 653—663.

[10] Gani J., Prabhu N. U., A storage model with continuous infinitely divisible inputs, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **59** (1963), 417—429.

[11] Gani J., Pyke R., The content of a dam as the supremum of an infinitely divisible process, *J. Math. Mech.*, **9** (1960), 639—651.

[12] G h o s a l A., Emptiness' in the finite dam, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 803—808.
[13] H a s o f e r A. M., On the distribution of the time to first emptiness of a store with stochastic input, *J. Austral. Math. Soc.*, **4** (1964), 506—517.
[14] H a s o f e r A. M., A dam with inverse Gaussian input, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **60** (1964), 931—933.
[15] K e n d a l l D. G., Some problems in the theory of dams, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **19** (1957), 207—212.
[16] K i n g m a n J. F. C., On continuous time models in the theory of dams, *J. Austral. Math. Soc.*, **3** (1963), 480—487.
[17] K i n n e y J. R., A transient discrete time queue with finite storage, *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 130—136.
[18] L l o y d E. H., The epochs of emptiness of a semi-infinite discrete reservoir, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **25** (1963), 131—136.
[19] L l o y d E. H., O d o n S., A note on the solution of dam equations, *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, **26** (1964), 338—344.
[20] L o y n e s s R. M., A continuous-time treatment of certain queues and infinite dams, *J. Austral. Math. Soc.*, 2 (1962), 484—498.
[21] M o r a n P. A. P., A probability theory of dams and storage systems, *Austral. J. Appl. Sci.*, **5** (1954), 116—124.
[22] M o r a n P. A. P., A probability theory of dams and storage systems: modifications of the release rules, *Austral. J. Appl. Sci.*, **6** (1955), 117—130.
[23] M o r a n P. A. P., A probability theory of a dam with continuous release, *Quart. J. Math. Oxford, Sec. Ser.*, **7** (1956), 130—137.
[24] M o r a n P. A. P., The theory of storage, London, 1959.
[25] M o t t J. L., The distribution of the time-to-emptiness of a discrete dam under steady demand, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **25** (1963), 137—139.
[26] P r a b h u N. U., Some exact results for the finite dam, *Ann. Math. Statist.*, **29** (1958), 1234—1243.
[27] P r a b h u N. U., On the integral equation for the finite dam, *Quart. J. Math. Oxford, Sec. Ser.*, **9** (1958), 183—188.
[28] P r a b h u N. U., Application of generating functions to a problem in finite dam theory, *J. Austral. Math. Soc.*, **1** (1959), 116—120.
[29] P r a b h u N. U., Time-dependent results in storage theory, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 1—46.
[30] P r a b h u N. U., Queues and inventories, New York, 1964.
[31] P r a b h u N. U., Unified results and methods for queues and dams, Proceedings of the Symposium on Congestion Theory, University of North Carolina Press, 1965, pp. 317—336.
[32] T a k á c s L., The distribution of the content of a dam when the input process has stationary independent increments, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 101—112.
[33] T a k á c s L., Combinatorial methods in the theory of dams, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 69—76.
[34] T a k á c s L., The distribution of the content of finite dams, *J. Appl. Prob.*, **4** (1967), 151—161.
[35] T a k á c s L., On dams of finite capacity, *J. Austral. Math. Soc.*, **9** (1967).
[36] W e e s a k u l B., First emptiness in a finite dam, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **23** (1961), 343—351.
[37] W e e s a k u l B., Y e o G. F., Some problems in finite dams with an application to insurance risk, *Z. Wahr.*, **2** (1963), 135—146.
[38] Y e o G. F., The time dependent solution for an infinite dam with discrete additive inputs, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **23** (1961), 173—179.

Глава 7

ПРОЦЕССЫ РАЗОРЕНИЯ

§ 35. ПРОЦЕССЫ РАЗОРЕНИЯ В СТРАХОВОМ ДЕЛЕ

Математическая теория процессов разорения, возникающих в страховом деле, ведет начало с 1903 г. с работ Лундберга [21, 22]. Дальнейшие исследования в этой области проводились между 1926 и 1955 г. Лундбергом [23—25], Крамером [9—14], Эстером [17], Сегердалом [31—34], Тэклиндом [36], Саксеном [29, 30], Амметером [1], Арфведсоном [2—6] и др.

Предположим, что компания производит обычные страховые операции (страхование жизни, нетрудоспособности, несчастного случая, болезни, аварии, пожара, страхование обязательств и т. д). Держатели полисов регулярно выплачивают страховые премии. Компания собирает премии в резервный фонд и, если происходит страховой случай, выплачивает договорную сумму. Страховую компанию можно рассматривать как регулировочный аппарат для держателей полисов, индивидуальные риски определяются компанией в виде цены страховой премии. Размеры страховых премий назначаются таким образом, чтобы в течение длительного периода они покрывали в среднем выплаты компании на страховые случаи. Страховая премия, исчисляемая этим способом, называется чистой страховой премией. В дополнение к чистой страховой премии держатели полисов выплачивают ценную страховую премию для покрытия нежелательных отклонений от среднего. Сумма чистой и ценной страховых премий составляет общую страховую премию. Это пример страхования лишь с положительными премиями и положительными страховыми суммами.

Существуют другие виды страхования, противоположные описанному. Типичный случай—операции с пожизненной рентой. Здесь компания постоянно выплачивает ренту держателям полисов, в то время как случайная смерть одного из держателей полисов представляет соответствующую сумму в распоряжение компании, играя таким образом роль выплаты держателя полиса компании, или выплаты компании держателю полиса отрицательной суммы. Рента также может рассматриваться как отрицательная страховая премия. Это пример страхования лишь с отрицательными страховыми премиями и отрицательными страховыми суммами.

Случаи только положительных страховых сумм (отсутствие ренты) и только отрицательных страховых сумм (чистые операции с рентой) являются важными частными случаями. Однако, вообще говоря, компания может вести страховые дела обоих типов.

Суммы, выплачиваемые компанией при установлении страхового случая, могут тогда быть как положительными, так и отрицательными. Аналогично страховые премии, взимаемые компанией, могут быть как положительными, так и отрицательными (выплата по ренте).

Теория разорения изучает вероятностные законы, которым подчиняются случайные флуктуации резервного фонда. Знание этих законов важно для того, чтобы быть в состоянии вовремя принять меры предосторожности.

Математическая модель процесса разорения

Пусть в интервале времени $(0, \infty)$ страховые случаи происходят согласно процессу Пуассона с интенсивностью $\lambda(\tau)$, $0 \leqslant \tau < \infty$. Страховые суммы, выплачиваемые компанией, которые могут быть как положительными, так и отрицательными, являются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $H(x)$, и они не зависят от моментов наступления страховых случаев.

Вместо того чтобы рассматривать процесс наступления страховых случаев в обычном времени, удобно ввести новую временную переменную (оперативное время, преобразованное время) $u = u(\tau)$:

$$u = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\tau} \lambda(v)\, dv, \tag{1}$$

где λ — положительная константа. Если тогда обозначить через $\tilde{\chi}(u)$ общую страховую сумму, выплаченную в интервале $(0, u]$, то $\{\tilde{\chi}(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ будет стохастическим процессом со стационарными независимыми приращениями и функцией распределения

$$\mathbf{P}\{\tilde{\chi}(u) \leqslant x\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} H_n(x), \tag{2}$$

где $H_n(x)$ есть n-я свертка функции $H(x)$; $H_0(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $H_0(x) = 0$ при $x < 0$. Процесс $\{\tilde{\chi}(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — это обобщенный пуассоновский процесс.

Если интеграл

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dH(x) \tag{3}$$

существует, то общая средняя страховая сумма, выплачиваемая компанией в интервале $(0, u]$, равна

$$\mathbf{E}\{\tilde{\chi}(u)\} = \lambda a u. \tag{4}$$

В условиях частного бизнеса накопленная чистая страховая премия (премии за вычетом выплачиваемой ренты) в интервале $(0, u]$ равна $\lambda a u$. Если применяются также ценные страховые премии, то общая страховая премия равна $(\lambda a + b)u$, где $b>0$ при $a>0$ (например, в случае положительных страховых премий) и $b<0$ при $a<0$ (например, в случае отрицательных страховых премий).

Предположим, что в момент $u=0$ компания располагает начальным капиталом x для покрытия потерь из-за случайных флуктуаций. Тогда резервный фонд в момент u равен

$$\gamma(u) = x + cu - \tilde{\chi}(u) \tag{5}$$

для $0 \leqslant u < \infty$, где $\gamma(0) = x$ — начальный резервный фонд в момент $u=0$, а c — константа.

Одна из основных задач в теории разорения состоит в определении вероятности разорения, т. е. вероятности того, что резервный фонд когда-нибудь станет отрицательным, или, более точно, вероятности того, что разорение произойдет до момента t.

Обозначим через θ_x момент времени, когда впервые резервный фонд становится отрицательным в интервале $(0, \infty)$, т. е.

$$\theta_x = \inf\{u\colon\ \gamma(u) < 0 \text{ для } 0 \leqslant u < \infty\} \tag{6}$$

и $\theta_x = \infty$ при $\gamma(u) \geqslant 0$ для $u \geqslant 0$.

Тогда вероятность того, что разорение произойдет в интервале $(0, t]$, равна

$$\mathbf{P}\{\theta_x \leqslant t\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leqslant x\}, \tag{7}$$

а вероятность того, что разорение когда-нибудь произойдет, равна

$$\mathbf{P}\{\theta_x < \infty\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leqslant x\}. \tag{8}$$

Если вероятности $\mathbf{P}\{\theta_x < \infty\}$ и $\mathbf{P}\{\theta_x \leqslant t\}$ известны, то можно принять меры предосторожности (увеличение премии, перестрахование и т. д.), позволяющие уменьшить вероятность разорения настолько, чтобы оно было практически невозможно.

Обозначим

$$W(t, x) = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leqslant x\} \tag{9}$$

и

$$W(x) = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leqslant x\}. \tag{10}$$

Большинство исследований посвящено нахождению функций распределения $W(x)$, $W(t, x)$ и их асимптотик при больших значениях x.

Положительные страховые суммы

Предположим, что страховая компания выплачивает только положительные страховые суммы, т. е. $H(x)=0$ при $x<0$. Тогда $\tilde{\chi}(u)=\chi(u)$ при $u\geqslant 0$, где теперь $\{\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс, для которого

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant x\}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^n}{n!}H_n(x) \tag{11}$$

и при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\}=e^{-u\Phi(s)}, \tag{12}$$

где

$$\Phi(s)=\lambda[1-\psi(s)], \tag{13}$$

а $\psi(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $H(x)$. Если

$$a=\int_0^\infty x\,dH(x), \tag{14}$$

то $\mathbf{E}\{\chi(u)\}=\rho u$, где $\rho=\lambda a$. Если же

$$\sigma_a^2=\int_0^\infty (x-a)^2\,dH(x) \tag{15}$$

то $\operatorname{Var}\{\chi(u)\}=\sigma^2 u$, где $\sigma^2=\lambda\left(a^2+\sigma_a^2\right)$.

Здесь c — положительная постоянная, причем выбором денежной единицы можно достичь того, чтобы $c=1$. Наша задача свелась к нахождению функции

$$W(t,\ x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u]\leqslant x\} \tag{16}$$

для конечных значений t, а также функции

$$W(x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-u]\leqslant x\}. \tag{17}$$

А это можно сделать с помощью теорем § 15.

По теореме 1 § 15

$$W(t,\ x)=\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant t+x\}-$$
$$-\iint\limits_{0<y\leqslant z\leqslant t}\left(\frac{t-z}{t-y}\right)d_y\mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y+x\}\,d_z\mathbf{P}\{\chi(t-y)\leqslant z-y\} \tag{18}$$

и

$$W(t,\ 0)=\int_0^t\left(1-\frac{y}{t}\right)d_y\mathbf{P}\{\chi(t)\leqslant y\}. \tag{19}$$

Если положить

$$\Omega(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx} d_x W(t, x) \tag{20}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, то по формуле (14) § 15

$$\int_0^\infty e^{-zt} \Omega(t, s)\, dt = \frac{1}{z - s + \Phi(s)} \left(1 - \frac{s}{\omega(z)}\right) \tag{21}$$

для $\operatorname{Re}(z) > 0$, где $s = \omega(z)$ — единственный корень уравнения $\Phi(s) = s - z$ в области $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Обращая формулу (21), получаем $W(t, x)$.

Если $\rho < 1$, то по теореме 3 § 15

$$W(x) = 1 - (1 - \rho) \int_{+0}^\infty d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x\} \tag{22}$$

для всех x. Если $x < 0$, то $W(x) = 0$ и $W(0) = 1 - \rho$. Если $\rho \geqslant 1$, то $W(x) = 0$ для всех x.

Если $\rho < 1$, по теореме 4 § 15 для $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)}. \tag{23}$$

Обращая эту формулу, получаем $W(x)$.

В силу теоремы 9 § 29 при $\rho > 1$ и $\sigma^2 < \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\theta_x - \dfrac{x}{\rho - 1}}{\sqrt{\sigma^2 x / (\rho - 1)^3}} \leqslant z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}\, dy. \tag{24}$$

Пример 1. Если

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x \geqslant a, \\ 0 & \text{для} \quad x < a, \end{cases} \tag{25}$$

то $\psi(s) = e^{-sa}$, $\Phi(s) = \lambda(1 - e^{-sa})$, $\rho = \lambda a$, $\sigma^2 = \lambda a^2$ и

$$\mathbf{P}\{\chi(u) = ak\} = e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} \tag{26}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Формула (18) тогда дает

$$W(t, x) = \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t + x\} -$$

$$- \sum_{x < aj \leqslant ak \leqslant t + x} \left(\frac{t + x - ak}{t + x - aj}\right) \mathbf{P}\{\chi(aj - x) = aj\}\, \mathbf{P}\{\chi(t + x - aj) = a(k - j)\}, \tag{27}$$

а формула (19) —

$$W(t,\ 0) = \sum_{0 \leqslant aj \leqslant t} \left(1 - \frac{aj}{t}\right) \mathbf{P}\{\chi(t) = aj\}. \tag{28}$$

Если $\rho = \lambda a < 1$, то, обращая (23), получаем

$$W(x) = (1 - \lambda a) \sum_{j=0}^{[x/a]} e^{-\lambda(aj - x)} \frac{[\lambda(aj - x)]^j}{j!}. \tag{29}$$

Пример 2. Если

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{для} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0, \end{cases} \tag{30}$$

то $\psi(s) = \mu/(\mu + s)$, $\Phi(s) = \lambda s/(\mu + s)$, $\rho = \lambda/\mu$ и $\sigma^2 = 2\lambda/\mu^2$. Кроме того, $\mathbf{P}\{\chi(u) = 0\} = e^{-\lambda u}$ для $u \geqslant 0$ и

$$\frac{\partial \mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant x\}}{\partial x} = \lambda\mu u e^{-\lambda u - \mu x} J'(\lambda\mu u x) \tag{31}$$

для $u > 0$ и $x > 0$, где

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \tag{32}$$

— функция Бесселя. Тогда

$$W(t,\ x) = \\ = 1 - \lambda e^{-\mu x} \int_0^t \frac{e^{-(\lambda+\mu)y}}{x + y} [xJ(\lambda\mu y(x + y)) + yJ'(\lambda\mu y(x + y))]\, dy \tag{33}$$

для $x \geqslant 0$, а при $\rho = \lambda/\mu < 1$

$$W(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)x} \tag{34}$$

для $x > 0$.

Отрицательные страховые суммы

Предположим, что страховая компания занимается только операциями с рентой. В этом случае общее количество страховых сумм, выплачиваемых компанией в интервале времени $(0,\ u]$, равно $\tilde{\chi}(u) = -\chi(u)$, где $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс с теми же свойствами, что и процесс, введенный в предыдущем пункте. Распределение величины $\chi(u)$ задается формулой (11); обозначения (12) — (15) мы будем использовать для процесса $\{\chi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ без изменений.

В этом случае число c отрицательно и выбором подходящей денежной единицы его можно сделать равным -1.

Теперь наша задача свелась к нахождению функции

$$W(t, x) = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} [u - \chi(u)] \leqslant x\} \tag{35}$$

для конечных значений t, а также функции

$$W(x) = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} [u - \chi(u)] \leqslant x\}. \tag{36}$$

Ее можно решить с помощью теорем § 17.

По теореме 1 § 17

$$W(t, x) = 1 - \int_x^t \frac{x}{y} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y - x\} \tag{37}$$

для $0 < x \leqslant t$, а по теореме 3 § 17

$$W(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{x}{y} d_y \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y - x\} = 1 - e^{-\omega x} \tag{38}$$

для $x > 0$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\Phi(s) = s$. Если $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то $\omega = 0$, а если $\rho > 1$, то $\omega > 0$.

Далее,

$$\mathbf{E}\{e^{-z\theta_x}\} = e^{-x\omega(z)} \tag{39}$$

для $x > 0$ и $\mathrm{Re}(z) > 0$, где $s = \omega(z)$ — единственный корень уравнения $\Phi(s) = s - z$ в области $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$. Отсюда

$$\mathbf{E}\{\theta_x\} = \frac{x}{1 - \rho} \tag{40}$$

при $\rho < 1$ и

$$\mathrm{Var}\{\theta_x\} = \frac{\sigma^2 x}{(1 - \rho)^3} \tag{41}$$

при $\rho < 1$ и $\sigma^2 < \infty$. В силу теоремы 9 § 29

$$\lim_{x \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\theta_x - x/(1 - \rho)}{\sqrt{\sigma^2 x/(1 - \rho)^3}} \leqslant z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2} dy, \tag{42}$$

если $\rho < 1$ и $\sigma^2 < \infty$.

Пример 1. Если

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x \geqslant a, \\ 0 & \text{для} \quad x < a, \end{cases} \tag{43}$$

то

$$\mathbf{P}\{\chi(u) = ak\} = e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} \tag{44}$$

для $k=0, 1, 2, \ldots$. Тогда формула (37) дает

$$W(t, x)=1-\sum_{j=0}^{[(t-x)/a]} \frac{x}{aj+x} \mathbf{P}\{\chi(aj+x)=aj\}=$$

$$=1-\mathbf{P}\{\chi(x)=0\}-\lambda x \sum_{j=1}^{[(t-x)/a]} \frac{1}{j} \mathbf{P}\{\chi(aj+x)=a(j-1)\} \tag{45}$$

для $0<x\leqslant t$, а формула (38) —

$$W(x)=1-e^{-\omega x} \tag{46}$$

для $x>0$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\lambda(1-e^{-a\omega})=\omega$.

Замечание. Из (45) следует, что для $0<x\leqslant t$

$$W(t, x)=1-e^{-\lambda x}-\lambda x \sum_{j=1}^{[(t-x)/a]} e^{-\lambda(aj+x)} \frac{[\lambda(aj+x)]^{j-1}}{j!}. \tag{47}$$

Саксен [29] нашел, что

$$W(t, x)=1-e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x} \sum_{k=1}^{[(t-x)/a]} e^{-\lambda a k}(\lambda a)^k \sum_{\substack{\sum_i j_i=k \\ j_i>0}} \left(\frac{x}{a}\right)^{j_1} \frac{j_1^{j_2} j_2^{j_3} \ldots}{j_1!\, j_2!\, j_3! \ldots}. \tag{48}$$

Сравнивая (47) и (48), мы получаем интересное тождество

$$z \frac{(k+z)^{k-1}}{k!}=\sum_{\substack{\sum_i j_i=k \\ j_i>0}} z^{j_1} \frac{j_1^{j_2} j_2^{j_3} \ldots}{j_1!\, j_2! \ldots}, \tag{49}$$

справедливое для $k=1, 2, \ldots$ и для всех z.

Пример 2. Пусть

$$H(x)=\begin{cases} 1-e^{-\mu x} & \text{для } x\geqslant 0, \\ 0 & \text{для } x<0. \end{cases} \tag{50}$$

Тогда в силу (37)

$$W(t, x)=1-e^{-\lambda x}+\int_x^t \frac{x}{y} \frac{\partial \mathbf{P}\{\chi(y)\leqslant y-x\}}{\partial x} dy=$$

$$=1-e^{-\lambda x}-\lambda\mu x e^{\mu x} \int_x^t e^{-(\lambda+\mu) y} J'(\lambda\mu y(y-x))\, dy \tag{51}$$

для $0<x\leqslant t$, где функция $J(x)$ задана формулой (32).

Если $\rho=\lambda/\mu<1$, то $\omega=0$, а если $\rho=\lambda/\mu>1$, то $\omega=\lambda-\mu$. Тогда (38) дает

$$W(x)=1-e^{-(\lambda-\mu)x} \tag{52}$$

при $x>0$ и $\lambda>\mu$.

Произвольные страховые суммы

Пусть теперь страховые суммы могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Иначе говоря, $\{\tilde{\chi}(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — пуассоновский процесс и его распределение задается формулой (2). Тогда $\tilde{\chi}(u)$ можно представить в виде суммы случайного числа случайных величин:

$$\tilde{\chi}(u)=\sum_{0\leqslant\tau_i\leqslant u}\chi_i, \tag{53}$$

где $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_i, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots$ — моменты наступления событий данного пуассоновского процесса. Случайные величины $\{\chi_i\}$ и $\{\tau_i\}$ независимы. Кроме того, разности $\tau_i-\tau_{i-1}$ ($j=1, 2, \ldots; \tau_0=0$) являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ для $x\geqslant 0$. Обозначим $a=\mathbf{E}\{\chi_i\}$.

Положим $\zeta(u)=\tilde{\chi}(u)-cu$ для $u\geqslant 0$. Тогда

$$W(t, x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x\} \tag{54}$$

и

$$W(x)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)\leqslant x\}. \tag{55}$$

Для $x\geqslant 0$ имеем

$$W(t, x)=e^{-\lambda t}\varepsilon(x+ct)+ \\ +\int_0^{\delta(t, x, c)}\int_{-\infty}^{x+cu}W(t-u, x+cu-y)e^{-\lambda u}\lambda\,du\,dH(y), \tag{56}$$

где $\varepsilon(x)=1$ при $x\geqslant 0$ и $\varepsilon(x)=0$ при $x<0$; $\delta(t, x, c)=t$ при $c\geqslant 0$ и $\delta(t, x, c)=\min(t-x/c)$ при $c<0$. В самом деле,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\zeta(u)\leqslant x \mid \tau_1=u \text{ и } \chi_1=y\right\}= \\ =\begin{cases}\varepsilon(x+ct) & \text{при } u>t,\\ W(t-u, x+cu-y) & \text{при } u<\delta(t, x, c),\\ 0 & \textbf{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{57}$$

Взяв математическое ожидание от (57) по τ_1 и χ_1, получим (56). Решив интегральное уравнение (56), найдем $W(t, x)$.

Из уравнения (56) можно вывести интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} = c\frac{\partial W(t, x)}{\partial x} - \lambda\left[W(t, x) - \int_{-\infty}^{x} W(t, x-y)\,dH(y)\right], \tag{58}$$

справедливое для почти всех $(t, x)\,(t \geqslant 0,\ x \geqslant 0)$.

Рассуждая так же, как при выводе уравнения (56), получаем

$$W(x) = \int_{0}^{\delta(x, c)} \int_{-\infty}^{x+cu} W(x + cu - y)\,e^{-\lambda u}\lambda\,du\,dH(y) \tag{59}$$

при $x \geqslant 0$, где $\delta(x, c) = \infty$ при $c \geqslant 0$ и $\delta(x, c) = -x/c$ при $c < 0$. Если $\lambda a < c$, то $W(\infty) = 1$, а $W(x)$ определяется по формуле (59). Если $\lambda a \geqslant c$, то $W(\infty) = 0$, откуда $W(x) = 0$ для всех x.

Те же рассуждения, что и при выводе уравнения (58) из (56), дают

$$cW'(x) = \lambda\left[W(x) - \int_{-\infty}^{x} W(x-y)\,dH(y)\right] \tag{60}$$

для всех $x \geqslant 0$. Проинтегрировав (60) от x до ∞, получим

$$c[1 - W(x)] = \lambda\int_{x}^{\infty}[1 - H(u)]\,du + \lambda\int_{0}^{x}[1 - W(u)]\,du - \\ - \lambda\int_{0}^{\infty}[1 - W(u)]\,H(x-u)\,du \tag{61}$$

для $x \geqslant 0$.

Если $\lambda a < c$ и $c \geqslant 0$, то

$$\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\,dW(x) = A(s) \tag{62}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, а если $\lambda a < c$ и $c \leqslant 0$, то

$$\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\,dW(x) = A(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda - cs}\right) \tag{63}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, где

$$A(s) = \exp\left\{-\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\,dM(x)\right\} \tag{64}$$

и

$$M(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda v}u^{n-1}[1-H_n(x+cu)]\,du, \tag{65}$$

или

$$M(x)=\int_0^{\infty}\frac{\mathbf{P}\{\zeta(u)>x\}}{u}\,du \tag{66}$$

при $x\geqslant 0$.

Формулы (62) и (63) легко доказать с помощью соотношения (23) § 11. Положим $\zeta=\sup\limits_{0\leqslant u<\infty}\zeta(u)$. Если $c\geqslant 0$, то

$$\zeta=\sup_{0\leqslant r<\infty}\zeta(\tau_r+0)=\sup_{0\leqslant r<\infty}(\chi_1+\ldots+\chi_r-c\tau_r), \tag{67}$$

а если $c\leqslant 0$, то

$$\zeta=\sup_{1\leqslant r<\infty}\zeta(\tau_r-0)=\sup_{1\leqslant r<\infty}(\chi_1+\ldots+\chi_{r-1}+c\tau_r). \tag{68}$$

В соответствии с этим, если $\xi_r=\chi_r-c(\tau_r-\tau_{r-1})$ для $r=1, 2, \ldots$, то для $c\geqslant 0$ формула (67) дает

$$\zeta=\sup(0,\ \xi_1,\ \xi_1+\xi_2,\ \ldots,\ \xi_1+\ldots+\xi_r,\ \ldots), \tag{69}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины. Если $\mathbf{E}\{\xi_r\}=a-c/\lambda<0$, то ζ — собственная случайная величина, а преобразование Лапласа—Стильтьеса распределения $\mathbf{P}\{\zeta\leqslant x\}=W(x)$ определяется по формуле (23) § 11. Если $\mathbf{E}\{\xi_r\}=a-c/\lambda\geqslant 0$, то $\mathbf{P}\{\xi=\infty\}=1$, т. е. $W(x)=0$ для всех x.

Если $\xi_r=\chi_r-c(\tau_{r+1}-\tau_r)$ для $r=1, 2, \ldots$, то для $c\leqslant 0$ формула (68) дает

$$\zeta=-c\tau_1+\sup(0,\ \xi_1,\ \xi_1+\xi_2,\ \ldots,\ \xi_1+\ldots+\xi_r,\ \ldots), \tag{70}$$

откуда $\zeta=c\tau_1+\zeta^*$, где величина ζ^* не зависит от τ_1 и имеет такое же распределение, что и (69).

Замечание. В заключение приведем небольшой обзор исторического развития математической теории разорения. Асимптотическое распределение процесса разорения $\{\tilde\chi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ было впервые изучено в 1903 г. Лундбергом [21] и далее исследовалось им же в работах [22—26]. Лундберг заметил, что если $\mathbf{E}\{\tilde\chi(u)\}=\rho u$ и $\operatorname{Var}\{\tilde\chi(u)\}=\sigma^2 u$, где число σ^2 конечно и положительно, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\tilde\chi(u)-\rho u}{\sqrt{\sigma^2 u}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy. \tag{71}$$

Погрешность нормального приближения оценили Крамер [9, 10] и Эссеен [18]. Приближенную формулу для $\mathbf{P}\{\tilde{\chi}(u)-\rho u \leqslant xu\}$ при $x<0$ дал Эстер [17], а потом его метод развивали Крамер [11] и Феллер [19].

Функцию разорения $\mathbf{P}\{\theta_x<\infty\}=1-W(x)$, определенную соотношением (55), ввел Лундберг [23, 25, 26]. Для случая положительных страховых сумм ($H(0)=0$) Лундберг нашел, что $1=W(x)\leqslant e^{-Rx}$ при $x\geqslant 0$ и $1-W(x)\sim Ce^{-Rx}$ при $x\to\infty$, где R и C — положительные константы. В 1926 г. Крамер [9] обнаружил, что при $\lambda a<c$ и $H(0)=0$ функция $W(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерры

$$c[1-W(x)]=\lambda a-\lambda\int_0^x W(u)[1-H(x-u)]\,du \tag{72}$$

для $x\geqslant 0$. В 1930 г. Крамер [10] нашел преобразование Фурье функции $W(x)$ (формула Полячека — Хинчина в теории очередей). Для постоянных страховых сумм функция $W(x)$ была найдена в явном виде Феллером (см. также Сегердал [31, стр. 88]). В этом случае ее еще раньше нашел Эрланг (см. [20] в литературе к гл. 5). Для произвольных страховых сумм Сегердал [31—33] показал, что $1-W(x)\leqslant e^{-Rx}$ при $x\geqslant 0$ и $1-W(x)\sim Ce^{-Rx}$ при $x\to\infty$. В 1937 г. Крамер [12] доказал, что в случае произвольных страховых сумм $W(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (61). Решение интегрального уравнения (61) в виде (62) и (63) дали Тэклинд [36] и Крамер [13].

Моменты случайной величины θ_x, определенной формулой (6), вычислили Лундберг [23] и Сегердал [31].

Функцию разорения $\mathbf{P}\{\theta_x\leqslant t\}=1-W(t, x)$, определенную формулой (54), изучал первым Саксен [29, 30]. В случае отрицательных страховых сумм Саксен [29] вывел интегро-дифференциальное уравнение (58), а для отрицательных и постоянных сумм он нашел решение (48). В 1950 г. Арфведсон [2] получил интегро-дифференциальное уравнение (58) и нашел явное выражение для $W(t, x)$ в случае, когда страховые суммы являются положительными экспоненциально распределенными случайными величинами (формула (33)), а также в случае, когда страховые суммы являются отрицательными экспоненциально распределенными случайными величинами (формула (51)); см. также Арфведсон [3]. Для положительных и постоянных страховых сумм функцию $W(t, x)$ нашли Саксен [30] и Арфведсон [4] при $t=m/c$ и $x=n$ (m, n — неотрицательные целые числа). Арфведсон [4] нашел также $W(m/c, n)$ для отрицательных и постоянных страховых сумм. Для случая, когда страховые суммы положительны или только отрицательны, Арфведсон [6] нашел двойное преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $W(t, x)$. Для произвольных страховых сумм метод определения $W(t, x)$ предложил в 1955 г. Крамер [14]. (См. также работу Бакстера и Донскера [1] в гл. 4.)

§ 36. ЗАДАЧИ

1. Рассмотреть пример 2 раздела „Положительные страховые суммы". Найти функцию $\Omega(t, s)$, определенную формулой (20).

2. Доказать, что

$$z\frac{(k+z)^{k-1}}{k!} = \sum_{\substack{\Sigma j_i = k \\ j_i > 0}} z^{j_1}\frac{j_1^{j_2} j_2^{j_3}\ldots}{j_1! j_2!}$$

для $k = 1, 2, \ldots$ и всех z (Арфведсон [4]).

3. Доказать формулы (40), (41) и (42).

4. Доказать формулу (58).

5. Найти функцию $W(x)$, определенную формулой (10), где

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

а c — положительная константа.

6. Найти функцию $W(x)$, определенную формулой (10), где

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}(1+2x) & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

а c — положительная константа.

7. Найти функцию $W(x)$, определенную формулой (10), где

$$H(x) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ (1-\alpha)e^{x} & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

и $0 < \alpha < 1$.

8. Положим

$$\Omega(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx} d_x W(t, x)$$

при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, где функция $W(t, x)$ задана соотношением (54) и

$$\mathbf{E}\{e^{-s\zeta(u)}\} = e^{csu - \lambda u[1-\psi(s)]}$$

для $\operatorname{Re}(s) = 0$, где $\psi(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $H(x)$. Доказать, что

$$w\int_0^\infty e^{-wt}\Omega(t, s)\,dt = \begin{cases} A(s, w), & \text{если} \quad c \geqslant 0, \\ A(s, w)\left(\dfrac{\lambda + w}{\lambda + w - cs}\right), & \text{если} \quad c \leqslant 0, \end{cases}$$

для $0<w<\infty$, где

$$A(s,\,w)=\exp\left\{-\int_{0}^{\infty}e^{-sx}d_xM(x,\,w)\right\}$$

и

$$M(x,\,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_{0}^{\infty}e^{-(\lambda+w)u}u^{n-1}[1-H_n(x+cu)]\,du=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-wu}}{u}\,\mathbf{P}\{\zeta(u)>x\}\,du$$

при $x\geqslant 0$. (См. Крамер [14].)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ammeter H., A generalisation of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic-probabilities, *Skand. Akt.*, **31** (1948), 171—198.

[2] Arfwedson G., Some problems in the collective theory of risk, *Skand. Akt.*, **33** (1950), 1—38.

[3] Arfwedson G., A semi-convergent series with application to the collective theory of risk, *Skand. Akt.*, **35** (1952), 16—35.

[4] Arfwedson G., Research in collective risk theory. The case of equal risk sums, *Skand. Akt.*, **36** (1953), 1—15.

[5] Arfwedson G., On the collective theory of risk, Trans. Internat. Congress of Actuaries, Madrid, 1954.

[6] Arfwedson G., Research in collective risk theory, Part I, *Skand. Akt.*, **37** (1954), 191—223; Part II, *Skand. Akt.*, **38** (1955), 53—100.

[7] Arfwedson G., Notes on collective risk theory, *Skand. Akt.*, **40** (1957), 46—59.

[8] Brans J. P., Quelques aspects du problème de la ruine en théorie collective du risque, *Cahiers Centre Études Rech. Oper.*, **5** (1963), 139—159.

[9] Cramér H., Review of F. Lundberg «Försäkringsteknisk Riskutjämning I, Teori», *Skand. Akt.*, **9** (1926), 223—245.

[10] Cramér H., On the mathematical theory of risk, Skandia Jubille Volume, Stockholm, 1930.

[11] Cramér H., Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités, Act. Sci., № 736, Paris, 1938.

[12] Cramér H., Deux conférences sur la théorie des probabilités, *Skand. Akt.*, **24** (1941), 34—69.

[13] Cramér H., On some questions connected with mathematical risk, *Univ. of California Pub. in Statist.*, **2** (1954), 99—124.

[14] Cramér H., Collective risk theory. A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes, Jubilee Volume of Försäkringsaktiebolaget Skandia (Skandia Insurance Company), Stockholm, 1955, pp. 1—92.

[15] Davidson A., Om ruinproblemet i den kollektiva riskteorien under antagande av variabel säkerhetsbelastning, F. Lundberg Jubilee Volume, Stockholm, 1946, pp. 32—47.

[16] Dubourdieu J., Théorie mathématique des assurances. I. Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition, Paris, 1952.

[17] Esscher F., On the probability function in the collective theory of risk, *Skand. Akt.*, **15** (1932), 175—195.

[18] Esseen C. G., Fourier analysis of distribution functions, *Acta Math.*, **77** (1954), 1—125.

[19] Feller W., Generalization of a probability limit theorem by Cramér, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 361—372.

[20] Laurin I., An introduction into Lundberg's theory of risk, *Skand. Akt.*, **13** (1930), 84—111.

[21] Lundberg F., Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Återförsäkring av kollektivrisker, Uppsala, 1903.
[22] Lundberg F., Zur Theorie der Rückversicherung, Verhandl. Kongr. Versicherungsmath., Wien, 1909.
[23] Lundberg F., Försäkringsteknisk Riskutjämning, I—II, Stockholm, 1926—1928.
[24] Lundberg F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse, *Skand. Akt.*, **13** (1930), 1—83.
[25] Lundberg F., Some supplementary researches on the collective risk theory, *Skand. Akt.*, **15** (1932), 137—158.
[26] Lundberg F., On the numerical application of the collective risk theory, De Förenade Jubilee Volume, Stockhom, 1934.
[27] Philipson C., A note on different models of stochastic processes dealt with in the collective theory of risk, *Skand. Akt.*, **39** (1956), 26—37.
[28] Prabhu N. U., On the ruin problem of collective risk theory, *Ann. Math. Statist.*, **32** (1961), 757—764.
[29] Saxen T., On the probability of ruin in the collective risk theory for insurance enterprises with only negative risk sums, *Skand. Akt.*, **31** (1948), 199—228.
[30] Saxen T., Sur les mouvements aléatoires et le problème de ruine de la théorie du risque collective, *Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys. Math.*, **16** (1951), 1—55.
[31] Segerdahl C. O., On homogeneous random processes and collective risk theory, Thesis, Stockholm, 1939.
[32] Segerdahl C. O., Über einge risikotheoretische Fragestellungen, *Skand. Akt.*, **25** (1942), 43—83.
[33] Segerdahl C. O., Some properties of the ruin function in the collective theory of risk, *Skand. Akt.*, **31** (1948), 46—87.
[34] Segerdahl C. O., When does ruin occur in the collective theory of risk?, *Skand. Akt.*, **38** (1955), 22—36.
[35] Segerdahl C. O., A survey of results in the collective theory of risk, Probability and Statistics, The Harald Cramér Volume, Stockholm, New York, 1959, pp. 276—299.
[36] Täcklind S., Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables, *Skand. Akt.*, **25** (1942), 1—42.

Глава 8

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ

§ 37. ДРУГОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О БАЛЛОТИРОВКЕ

Классическую теорему о баллотировке, о которой шла речь в § 2, можно сформулировать несколько иначе.

Предположим, что баллотирующийся кандидат A набирает a голосов, а кандидат B набирает b голосов, причем все избирательные протоколы равновероятны. Обозначим через α_r и β_r числа голосов среди первых r бюллетеней, поданных за A и за B соответственно. Пусть P_j — вероятность того, что $\alpha_r > \mu\beta_r$ точно для j индексов среди $r = 1, 2, \ldots, a+b$. Если μ — неотрицательное целое число и $a \geqslant \mu b$, то по теореме 1 § 2

$$P_{a+b} = \frac{a - \mu b}{a + b}. \tag{1}$$

Интересно найти полное распределение $\{P_j\}$.

Мы докажем две комбинаторные теоремы, с помощью которых найдем P_j, $j = 0, 1, \ldots, a+b$, когда μ — неотрицательное целое число.

Теорема 1. *Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$. Тогда среди n циклических перестановок множества $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ существует одна и только одна такая, для которой точно j частичных последовательных сумм положительны* ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Доказательство. Пусть $k_{j+n} = k_j$ для $j = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$d_j = n(k_1 + \ldots + k_j) - j$$

для $j = 1, 2, \ldots$. Тогда $d_{j+n} = d_j$ для $j = 1, 2, \ldots$. Числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ различны и $d_n = 0$. Докажем, что если d_i есть r-е по величине число среди $d_1, d_2, \ldots, d_n$, то циклическая перестановка $(k_{i+1}, \ldots, k_{i+n})$ имеет точно $n+1-r$ положительных частичных сумм. Отсюда будет следовать теорема.

Очевидно, что перестановка $(k_{i+1}, k_{i+1} + k_{i+2}, \ldots, k_{i+1} + \ldots + k_{i+n})$ имеет столько же положительных членов, сколько $(d_{i+1} - d_i, d_{i+2} - d_i, \ldots, d_{i+n} - d_i)$ неотрицательных. Действительно, если $k_{i+1} + \ldots + k_{i+j} > 0$, то $d_{i+j} - d_i = n(k_{i+1} + \ldots + k_{i+j}) - j \geqslant 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Обратно, если $d_{i+j} - d_i \geqslant 0$, то $k_{i+1} + \ldots + k_{i+j} > 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $(k_{i+1}, k_{i+1} + k_{i+2}, \ldots, k_{i+1} + \ldots + k_{i+n})$ имеет столько же положительных членов, сколько $(d_1-d_i,\ d_2-d_i,\ \ldots,\ d_n-d_i)$ неотрицательных. Если d_i есть r-е по величине число в последовательности $d_1, d_2, \ldots, d_n$, то последняя содержит $n+1-r$ неотрицательных элементов. Теорема доказана.

Эту терему можно также доказать с помощью теоремы 2.1 из работы Спицера [26] или теоремы 3 из работы Спарре Андерсена [3].

Из нее немедленно вытекает

Теорема 2. *Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — циклически переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, и Δ_n — число положительных частичных сумм среди $\nu_1+\ldots+\nu_r$, $r=1, 2, \ldots, n$, то*

$$\mathbf{P}\{\Delta_n=j \mid \nu_1+\ \ldots\ +\nu_n=1\}=1/n \tag{2}$$

для $j=1, 2, \ldots, n$ в предположении, что условная вероятность определена.

Теперь, используя теорему 2 и теорему 1 § 4, докажем следующую общую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, и пусть $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$, $r=1, 2, \ldots, n$. Обозначим через Δ_n число индексов $r=1, 2, \ldots, n$, для которых $N_r<r$. Если $k<n-1$, то*

$$\mathbf{P}\{\Delta_n=j \mid N_n=k\}=$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{при } j=0, 1, \ldots, n-k-1, \\ \displaystyle\sum_{i=n-j+1}^{k+1} \frac{(n-k-1)}{i\,(n-i)}\,\mathbf{P}\{N_i=i-1 \mid N_n=k\} & \text{при } j=n-k, \ldots, n-1, \\ 1-\dfrac{k}{n} & \text{при } j=n. \end{cases} \tag{3}$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\Delta_n=j \mid N_n=n-1\}=1/n \tag{4}$$

для $j=1, 2, \ldots, n$ и

$$\mathbf{P}\{\Delta_n=j \mid N_n=n\}=$$
$$=\begin{cases} 1-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\,\mathbf{P}\{N_i=i-1 \mid N_n=n\} & \text{при } j=0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-j}\frac{1}{i\,(n-i)}\,\mathbf{P}\{N_i=i-1 \mid N_n=n\} & \text{при } j=1, 2, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = n \mid N_n = k\} = 1 - k/n \tag{6}$$

для $k=0, 1, \ldots, n$. Это в точности соответствует теореме 1 § 4. Далее,

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j \mid N_n = n-1\} = 1/n \tag{7}$$

при $j=1, 2, \ldots, n$, что следует из теоремы 2, примененной к случайным величинам $\gamma_i = 1 - \nu_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. В дальнейшем через Δ_j мы будем обозначать число индексов $r=1, 2, \ldots$, для которых $N_r < r$.

Докажем сначала (3). Без ограничения общности можно предположить, что число $N_n = k$ фиксировано. Пусть $j \leqslant n-1$. Если $\Delta_n = j < n$ и $N_n = k < n-1$, то существует такое число r, что $N_r = r-1$. Обозначим через i $(i=1, \ldots, k+1)$ наибольшее из этих чисел. Тогда $N_i = i-1$ и $N_r - N_i < r - i$ при $r = i+1, \ldots, n$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j\} = \\ = \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}\{N_i = i-1\}\,\mathbf{P}\{\Delta_i = i+j-n \mid N_i = i-1\}\,\mathbf{P}\{\Delta_n - \Delta_i = n-i \mid N_i = i-1\}. \tag{8}$$

Согласно (7), вероятность $\mathbf{P}\{\Delta_i = i+j-n \mid N_i = i-1\}$ равна $1/i$ при $n-j < i \leqslant n$ и 0 в остальных случаях, а в силу (6)

$$\mathbf{P}\{\Delta_n - \Delta_i = n-i \mid N_i = i-1\} = \mathbf{P}\{\Delta_n - \Delta_i = n-i \mid N_n - N_i = k-i+1\} = \\ = (n-k-1)/(n-i) \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, k+1. \tag{9}$$

Таким образом, формула (3) доказана для $j \leqslant n-1$. Если $j < n-k$, то $\mathbf{P}\{\Delta_n = j\} = 0$. При $j=n$ формула (3) сводится к (6). Итак, формула доказана.

Формула (4) идентична с формулой (7).

Осталось доказать (5). Пусть число $N_n = n$ фиксировано. Если $\Delta_n = j$, $j=1, 2, \ldots, n-1$, то существует число $r=1, 2, \ldots, n$, для которого $N_r < r$. Обозначим через i наименьшее из таких чисел. Тогда $N_i = i-1$, $N_r \geqslant r$ при $r=1, 2, \ldots, i-1$ и $N_r < r$ точно для j индексов среди $r=i, i+1, \ldots, n$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j\} = \\ = \sum_{i=1}^{n-j} \mathbf{P}\{N_i = i-1\}\,\mathbf{P}\{\Delta_i = 0 \mid N_i = i-1\}\,\mathbf{P}\{\Delta_n - \Delta_i = j \mid N_n - N_i = n-i+1\}. \tag{10}$$

Согласно (7), $\mathbf{P}\{\Delta_i = 0 \mid N_i = i-1\} = 1/i$ при $i=1, 2, \ldots, n-1$. Теорема 2, примененная к случайным величинам $(\nu_{i+1}-1), \ldots, (\nu_n - 1)$, дает $\mathbf{P}\{\Delta_n-\Delta_i=j\,|\,N_n-N_i=n-i+1\}=1/(n-i)$ для $i=1,\,2,\,\ldots,\,n-j$, откуда

$$\mathbf{P}\{\Delta_n=j\}=\sum_{i=1}^{n-j}\frac{1}{i\,(n-i)}\,\mathbf{P}\{N_i=i-1\} \tag{11}$$

при $j=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$. Просуммировав равенства (11) для $j=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$, получим

$$1-\mathbf{P}\{\Delta_n=0\}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\,\mathbf{P}\{N_i=i-1\}. \tag{12}$$

Формула (5) вытекает теперь из (11) и (12). Теорема доказана.

С помощью теоремы 3 можно найти вероятности P_j, $j=0,\,1,\,\ldots,\,a+b$, когда $a\geqslant\mu b$, где $\mu\geqslant 0$ — целое число.

Теорема 4. *Если $a>\mu b+1$, то*

$$P_j=\frac{1}{\binom{a+b}{a}}\sum_{\frac{a+b-j}{\mu+1}\leqslant s<b}\frac{(a-b\mu-1)}{s\,(b-s)}\binom{s\mu+s}{s-1}\binom{a+b-s\mu-s-2}{b-s-1} \tag{13}$$

для $j=0,\,1,\,\ldots,\,a+b-1$ и $P_{a+b}=(a-b\mu)/(a+b)$. Если $a=\mu b+1$, то

$$P_j=\frac{1}{a+b} \tag{14}$$

для $j=1,\,2,\,\ldots,\,a+b$. Если $a=\mu b$, то

$$P_j=\frac{1}{\binom{a+b}{a}}\sum_{0<s\leqslant\frac{a+b-j-1}{\mu+1}}\frac{1}{s\,(b-s)}\binom{s\mu+s}{s-1}\binom{a+b-s\mu-s-2}{b-s-1} \tag{15}$$

для $j=1,\,2,\,\ldots,\,a+b-1$ и

$$P_0=1-\frac{1}{\binom{a+b}{a}}\sum_{0\leqslant s\leqslant\frac{a+b-2}{\mu+1}}\frac{1}{s}\binom{s\mu+s}{s-1}\binom{a+b-s\mu-s-1}{b-s}. \tag{16}$$

Доказательство. Зададим случайные величины ν_r, $r=1,\,2,\,\ldots,\,a+b$, следующим образом: $\nu_r=0$, если r-й голос подан за кандидата A, и $\nu_r=\mu+1$, если r-й голос подан за кандидата B. Пусть $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1,\,2,\,\ldots,\,a+b$ и $N_0=0$. Тогда $\nu_1,\,\nu_2,\,\ldots,\,\nu_{a+b}$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, причем $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{a+b}=b\,(\mu+1)$. Так как $N_r=\beta_r(\mu+1)$ и $r=\alpha_r+\beta_r$ для $r=1,\,2,\,\ldots,\,a+b$, то $\alpha_r>\mu\beta_r$ тогда и только тогда, когда

$N_r < r$. Таким образом, $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}\{\Delta_n = j \mid N_n = k\}$ можно найти с помощью теоремы 3, положив в ней $n = a + b$, $k = b(\mu + 1)$,

$$\mathbf{P}\{N_i = s(\mu+1)\} = \frac{\binom{a}{i-s}\binom{b}{s}}{\binom{a+b}{i}} = \frac{\binom{i}{s}\binom{a+b-i}{b-s}}{\binom{a+b}{a}} \tag{17}$$

при $s = 0, 1, \ldots, \min(i, b)$ и $\mathbf{P}\{N_i = j\} = 0$ в остальных случаях. Формулы (13)—(16) получаются из соответствующих формул теоремы 3.

Существует другой метод нахождения вероятностей P_j, $j = 0, 1, \ldots, a+b$. Он основан на следующей теореме Спарре Андерсена [4] и Феллера [19].

Теорема 5. *Пусть даны n вещественных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Среди $n!$ перестановок последовательности $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ число перестановок, у которых точно k из n последовательных частичных сумм строго положительны (неотрицательны), равно числу перестановок, у которых первый (последний) максимальный элемент последовательности, состоящей из 0 и n последовательных частичных сумм, встречается на k-м месте.*

Доказательство. Удобно дать эквивалентную вероятностную формулировку теоремы.

Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — случайная перестановка последовательности $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, причем все $n!$ перестановок равновероятны. Положим $\zeta_r = \xi_1 + \ldots + \xi_r$ для $r = 1, 2, \ldots, n$ и $\zeta_0 = 0$. Обозначим через Δ_n число строго положительных чисел среди $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ и через Δ_n^* число неотрицательных чисел среди $\zeta_1, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$. Пусть ρ_n — индекс первого максимального числа в последовательности $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, т. е. $\rho_n = j$, где j — наименьший из индексов, для которых $\zeta_j = \max(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Пусть ρ_n^* — индекс последнего максимального числа в последовательности $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, т. е. $\rho_n^* = j$, где j — наибольший из индексов, для которых $\zeta_j = \max(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = k\} = \mathbf{P}(\rho_n = k) \tag{18}$$

и

$$\mathbf{P}\{\Delta_n^* = k\} = \mathbf{P}\{\rho_n^* = k\} \tag{19}$$

для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Заметим сначала, что если заменить $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ на $(-c_1, -c_2, \ldots, -c_n)$, то случайные величины Δ_n, Δ_n^*, ρ_n, ρ_n^* заменятся на $n - \Delta_n^*$, $n - \Delta_n$, $n - \rho_n^*$, $n - \rho_n$ соответственно. В самом деле, отображение $(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}) \to (-c_{i_1}, -c_{i_2}, \ldots, -c_{i_n})$ доказывает, что верны первые два соотношения, а отображение $(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}) \to (-c_{i_n}, -c_{i_{n-1}}, \ldots, -c_{i_1})$, что верны вторые два.

Будем доказывать теорему по индукции. При $n=1$ равенства (18) и (19) очевидны. Предположим, что (18) и (19) выполняются для $n-1$, и докажем, что они выполняются для n.

Пусть $c_1 + \ldots + c_n < 0$. Тогда $\zeta_n < 0$. Так как $\zeta_0 = 0$, то максимум достигается не на последней сумме. Следовательно, все четыре случайные величины Δ_n, Δ_n^*, ρ_n, ρ_n^* зависят от перестановок лишь из $n-1$ элемента, а тогда (18) и (19) выполняются по предположению индукции. Если $c_1 + \ldots + c_n = 0$, то Δ_n и ρ_n зависят от перестановок лишь из $n-1$ элемента и (18) опять верно по предположению индукции.

Пусть теперь $c_1 + \ldots + c_n > 0$. Тогда случайные величины $n - \Delta_n^*$, $n - \Delta_n$, $n - \rho_n^*$, $n - \rho_n$ зависят от перестановок лишь из $n-1$ элемента и снова равенства (18) и (19) верны. Для случая $c_1 + \ldots + c_n = 0$ равенство (19) также выполняется в силу предположения индукции для $n - \Delta_n^*$ и $n - \rho_n^*$. Теорема доказана.

Дадим более общую формулировку этой теоремы.

Теорема 6. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие вещественные значения. Пусть $\zeta_r = \xi_1 + \ldots + \xi_r$ при $r = 1, 2, \ldots, n$ и $\zeta_0 = 0$. Обозначим через Δ_n число положительных членов в последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, а через Δ_n^* число неотрицательных членов в последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Пусть ρ_n — индекс первого среди максимальных членов в последовательности $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, а ρ_n^* — индекс последнего среди максимальных членов в этой последовательности. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = k\} = \mathbf{P}\{\rho_n = k\} \tag{20}$$

и

$$\mathbf{P}\{\Delta_n^* = k\} = \mathbf{P}\{\rho_n^* = k\} \tag{21}$$

для $k = 0, 1, \ldots, n$.

С помощью этой теоремы легко доказывается

Теорема 7. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots, n$ и $N_0 = 0$. Пусть Δ_n — число индексов $r = 1, 2, \ldots, n$, для которых $N_r < r$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = 0\} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbf{P}\{N_i = i - 1\} \tag{22}$$

и

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j\} = \\ = \sum_{l=0}^{j} \left(1 - \frac{l}{j}\right) \left[\mathbf{P}\{N_j = l\} - \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{(i-j)} \mathbf{P}\{N_j = l,\ N_i - N_j = i - j - 1\} \right] \tag{23}$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = 0\} = \mathbf{P}\{N_r \geqslant r \text{ для } r = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{24}$$

а правую часть можно найти из теоремы 1 § 8. Отсюда следует (22). Если $j = 1, 2, \ldots, n$, то в силу теоремы 6

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j\} = \mathbf{P}\{r - N_r < j - N_j \text{ для } r = 0, \ldots, j-1 \\ \text{ и } r - N_r \leqslant j - N_j \text{ для } r = j, \ldots, n\}, \tag{25}$$

откуда

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j\} = \sum_{l=0}^{j} \mathbf{P}\{N_j - N_r < j - r \text{ для } r = 0, \ldots, j-1 \mid N_j = l\} \times \\ \times \mathbf{P}\{N_j - N_r \leqslant j - r \text{ для } r = j, \ldots, n \text{ и } N_j = l\}. \tag{26}$$

По теореме 1 § 4 первая вероятность в правой части равна $(j-l)/j$ и по формуле (3) § 8 вторая вероятность равна

$$\mathbf{P}\{N_j = l\} - \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{(i-j)} \mathbf{P}\{N_j = l,\ N_i - N_j = i - j - 1\}. \tag{27}$$

Это доказывает формулу (23), а вместе с ней и всю теорему.

Замечание. Если Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — число индексов $r = 1, 2, \ldots, j$, для которых $N_r < r$, то, согласно формуле (26),

$$\mathbf{P}\{\Delta_n = j \mid N_n = k\} = \sum_{l=0}^{j} \left(1 - \frac{l}{j}\right) \mathbf{P}\{N_j = l\} \mathbf{P}\{\Delta_{n-j} = 0 \mid N_{n-j} = k - l\} \tag{28}$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 7 позволяет находить вероятности P_j, $j = 0, 1, \ldots, a+b$, в случае, когда $\mu \geqslant 0$ — целое число. Если использовать те же обозначения, что и при доказательстве теоремы 4, и принять во внимание, что в этом случае

$$\mathbf{P}\{N_j = s(\mu+1),\ N_i - N_j = r(\mu+1)\} = \frac{\binom{j}{s}\binom{i-j}{r}\binom{a+b-i}{b-s-r}}{\binom{a+b}{a}} \tag{29}$$

для $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant a+b$, то из теоремы 7 будет следовать

Теорема 8. *При* $\mu \geqslant 0$

$$P_0 = 1 - \frac{1}{\binom{a+b}{a}} \left[\sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{a+b-1}{\mu+1}} \frac{1}{[s(\mu+1)+1]} \binom{s\mu+s+1}{s} \binom{a-b-s\mu-s-1}{b-s} \right] \tag{30}$$

и

$$P_j = \frac{1}{\binom{a+b}{a}} \left[\sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{j}{\mu+1}} \frac{(j-s\mu-s)}{j} \binom{j}{s} \binom{a+b-j}{b-s} - \right.$$

$$\left. - \sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{j}{\mu+1}} \sum_{0 \leqslant r \leqslant \frac{a+b-1-j}{\mu+1}} \frac{(j-s\mu-s)}{j(r\mu+r+1)} \binom{j}{s} \binom{r\mu+r+1}{r} \binom{a-b-1-j-r\mu-r}{b-s-r} \right] \tag{31}$$

для $j = 1, 2, \ldots, a+b$. *Если* $j < a - b\mu$ *или* $j \geqslant a(\mu+1)/\mu$, *то* $P_j = 0$.

Если использовать обозначения $P_j = P_j(a, b)$, указывающие зависимость P_j от числа голосов, поданных за A и за B, то по теореме 8

$$P_j(a, b) = \frac{1}{\binom{a+b}{a}} \sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{j}{\mu+1}} \left(1 - \frac{s\mu+s}{j}\right) \binom{j}{s} \binom{a+b-j}{b-s} P_0(a+s-j, b-s). \tag{32}$$

§ 38. ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $\mathbf{P}\{\xi_r \leqslant x\} = F(x)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$. Случайные величины образуют *выборку* размерности n. Обозначим через $(\overset{*}{\xi}_1, \overset{*}{\xi}_2, \ldots, \overset{*}{\xi}_n)$ случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке возрастания. Случайная величина $\overset{*}{\xi}_r$ называется r-й *порядковой статистикой* выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определим эмпирическую функцию $F_n(x)$ распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ как число величин ξ_i, не превосходящих x, деленное на n. Для каждого x эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ является случайной величиной с распределением

$$\mathbf{P}\left\{F_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = \binom{n}{k} [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Рассмотрим бесконечную последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с функцией распределения $\mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x\} = F(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ образуем *эмпирическую функцию* *распределения* $F_n(x)$ выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Тогда, согласно слабому закону больших чисел, для любого x

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{2}$$

по вероятности, а согласно сильному закону больших чисел для любого x

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{3}$$

с вероятностью 1. Обозначим

$$\delta_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)|; \tag{4}$$

по теореме Гливенко [43]

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0\} = 1. \tag{5}$$

А. Н. Колмогоров [50] доказал, что если функция распределения $F(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{n}\,\delta_n \leqslant z\right\} = K(z), \tag{6}$$

где $K(z)$ — функция распределения, не зависящая от $F(x)$ и имеющая вид

$$K(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2z^2} & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z \leqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Если

$$\delta_n^+ = \sup_{-\infty<x<\infty} [F_n(x) - F(x)] \tag{8}$$

и

$$\delta_n^- = \sup_{-\infty<x<\infty} [F(x) - F_n(x)], \tag{9}$$

а $F(x)$ — непрерывная функция распределения, то независимо от $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{n}\,\delta_n^+ \leqslant z\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{n}\,\delta_n^- \leqslant z\right\} = 1 - e^{-2z^2} \tag{10}$$

для $z \geqslant 0$.

Случайные величины δ_n, δ_n^+, δ_n^- называются *статистиками, свободными от распределения.*

Рассмотрим теперь две последовательности взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$, причем $\mathbf{P}\{\xi_m \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = F(x)$ $(m = 1, 2, \ldots;$

$n=1, 2, \ldots$). Пусть $F_m(x)$ — эмпирическая функция распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, а $G_n(x)$ — эмпирическая функция распределения выборки $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Обозначим

$$\delta(m, n) = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_m(x) - G_n(x)| \tag{11}$$

и

$$\delta^+(m, n) = \sup_{-\infty<x<\infty} [F_m(x) - G_n(x)]. \tag{12}$$

Если $F(x)$ — непрерывная функция распределения, то $\delta(m, n)$ и $\delta^+(m, n)$ — статистики, свободные от распределения.

Н. В. Смирнов [56] доказал, что для непрерывной функции распределения $F(x)$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\,\delta(m, n) \leqslant z\right\} = K(z), \tag{13}$$

где функция $K(z)$ определена формулой (7), и

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{n+n}}\,\delta^+(m, n) \leqslant z\right\} = 1 - e^{-2z^2} \tag{14}$$

для $z \geqslant 0$.

Случайные величины δ_n, δ_n^+, δ_n^-, $\delta(m, n)$, $\delta^+(m, n)$ играют важную роль в математической статистике. Так как они свободны от распределения, можно сформулировать статистические критерии для случаев, когда функция распределения наблюдаемых случайных величин неизвестна.

Далее мы будем заниматься задачами, связанными с величинами $F_n(x) - F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ и $F_m(x) - G_n(x)$ $(-\infty < x < \infty)$.

§ 39. ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Сравнение теоретического и эмпирического распределений. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$. Пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, т. е. $F_n(x)$ определяется как число величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не превосходящих x, деленное на n. Обозначим через $\overset{*}{\xi}_1, \overset{*}{\xi}_2, \ldots, \overset{*}{\xi}_n$ случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке возрастания их значений.

Рассмотрим отклонения $\delta_n(r) = F_n(\overset{*}{\xi}_r) - F(\overset{*}{\xi}_r)$, $r = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что случайные величины $\delta_n(r)$, $r = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны и различны с вероятностью 1. Их совместное распределение не зависит от $F(x)$. Если требуется найти распределение случайной величины, зависящей только от $\delta_n(1)$, $\delta_n(2)$, ..., $\delta_n(n)$, то можно допустить без ограничения общности, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые величины с равномерной функцией распределения на интервале $(0, 1)$, т. е. $F(x)=x$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$\delta_n(r)=\frac{r}{n}-\xi_r^* \qquad (r=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Введем еще одну случайную величину и вычислим ее распределение.

Пусть $\delta_n = \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \delta_n(r)$. Обозначим через ρ_n число неотрицательных элементов среди величин $\delta_n(r)$, $r=1, 2, \ldots, n$, а через ρ_n^* то значение r, для которого функция $\delta_n(r)$, $r=1, 2, \ldots, n$, достигает своего максимума. Случайная величина ρ_n^* определена с вероятностью 1.

Чжень [35] показал, что справедлива

Теорема 1. *Для* $j=1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{P}\{\rho_n=j\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\binom{n}{i-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{i-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{n-i}. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через ν_ν, $r=1, 2, \ldots, n$, число величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, попадающих в интервал $((r-1)/n, r/n]$, и положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, 2, \ldots, n$. По формуле (1) $\delta_n(r) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $N_r \geqslant r$. Следовательно, ρ_n есть число индексов $r=1, 2, \ldots, n$, для которых $N_r \geqslant r$. Очевидно, что $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, и $N_n=\nu_1+\ldots$ $\ldots+\nu_n=n$. Тогда вероятность $\mathbf{P}\{\rho_n=j\}=\mathbf{P}\{\Delta_n=n-j \mid N_n=n\}$ вычисляется по формуле (5) § 37. Так как в этом случае

$$\mathbf{P}\{N_r=j\}=\binom{n}{j}\left(\frac{r}{n}\right)^j\left(1-\frac{r}{n}\right)^{n-j} \tag{3}$$

для $j=0, 1, \ldots, n$, то (2) следует из формулы (5) § 37.

Теорема 2. *Для* $j=1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{P}\{\rho_n^*=j\}=\mathbf{P}\{\rho_n=j\}, \tag{4}$$

где правая часть определяется по формуле (2).

Доказательство. По теореме 6 § 37 положение максимума в последовательности $\sigma_n(r)$, $r=1, 2, \ldots, n$, распределено так же, как число неотрицательных элементов среди величин $\delta_n(r)$, $r=1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует равенство (4).

Распределение величины ρ_n^* непосредственно нашли Бирнбаум и Пайк [31].

Теорема 3. *Если* $k=1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\mathbf{P}\left\{\delta_n \leqslant \frac{k}{n}\right\} = 1 - \sum_{j=1}^{n-k} \frac{k}{(n-j)} \binom{n}{j+k} \left(\frac{j}{n}\right)^{j+k} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-j-k}. \tag{5}$$

Доказательство. Используя те же обозначения, что и при доказательстве теоремы 1, имеем для $k=1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{P}\left\{\delta_n \leqslant \frac{k}{n}\right\} = \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant r \leqslant n} (N_r - r) < k\} = 1 - \sum_{j=1}^{n-k} \frac{k}{(n-j)} \mathbf{P}\{N_j = j+k\}, \tag{6}$$

а правую часть находим из формулы (1) § 8.

Сравнение двух эмпирических функций распределения. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — взаимно независимые случайные величины с общей непрерывной функцией распределения. Обозначим через $F_m(x)$ и $G_n(x)$ эмпирические функции распределения выборок $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ соответственно, т. е. $F_m(x)$ — это число величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, не превосходящих x, деленное на m, а $G_n(x)$ — число величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, не превосходящих x, деленное на n. Обозначим через $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, расположенные в порядке их возрастания.

Пусть $\gamma(m, n)$ — число индексов $r=1, 2, \ldots, n$, для которых $F_m(\eta_r^*) \leqslant G_n(\eta_r^* - 0)$, т. е. $\gamma(m, n)$ — число положительных скачков функции $G_n(x)$ относительно $F_m(x)$. Положим

$$\delta^+(m, n) = \sup_{-\infty < x < \infty} [F_m(x) - G_n(x)]. \tag{7}$$

Легко видеть, что $\gamma(m, n)$ и $\delta^+(m, n)$ являются статистиками, свободными от распределения.

Теорема 4. *Если $n = mp$, где p — положительное целое число, то*

$$\mathbf{P}\{\gamma(m, n) = j\} = 1/(n+1) \tag{8}$$

для $j = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть ν_r, $r=1, 2, \ldots, n+1$, — число величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, попадающих в интервал $(\eta_{r-1}^*, \eta_r^*]$ (где $\eta_0^* = -\infty$, $\eta_{n+1}^* = \infty$), умноженное на p. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, \ldots, n+1$. Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1}$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, а их сумма $N_{n+1} = \nu_1 + \ldots + \nu_{n+1}$ равна mp. Далее,

$$\mathbf{P}\{N_i = sp\} = \frac{\binom{i+s-1}{s}\binom{m+n-i-s}{m-s}}{\binom{m+n}{n}} \tag{9}$$

для $i=1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что $F_m(\eta_r^*)=N_r/mp$ и $G_n(\eta_r^*-0)=(r-1)/n$ для $r=1, 2, \ldots, n$. Если $n=mp$, то $N_{n+1}=n$, а случайная величина $\gamma(m, n)$ равна числу индексов $r=1, 2, \ldots, n$, для которых $N_r<r$. Так как $N_{n+1}<n+1$, то (8) следует из теоремы 2 § 37, примененной к случайным величинам $1-\nu_1, 1-\nu_2, \ldots, 1-\nu_{n+1}$.

Для $p=1$ теорему 4 доказали Б. В. Гнеденко и В. С. Михалевич [45]; доказательство для $p\geqslant 1$ приведено в работе [46].

Теорема 5. *Если $n=mp$, где p — положительное целое число, и c — неотрицательное число, то*

$$\mathbf{P}\left\{\delta^+(m, n)\leqslant\frac{c}{n}\right\}=1-\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\sum_{\frac{c+1}{p}\leqslant s\leqslant m}\frac{c+1}{n+c+1-sp}\binom{sp+s-c-1}{s}\binom{m+n+c-sp-s}{m-s}. \tag{10}$$

Доказательство. Используя те же обозначения, что и при доказательстве теоремы 4, имеем для $n=mp$

$$\delta^+(m, n)=\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left[F_m(\eta_r^*)-G_n(\eta_r^*-0)\right]=\frac{1}{n}\max_{1\leqslant r\leqslant n+1}(N_r-r+1). \tag{11}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\left\{\delta^+(m, n)\leqslant\frac{c}{n}\right\}=\mathbf{P}\{N_r<r+c \text{ для } r=1, 2, \ldots, n+1\}, \tag{12}$$

а правую часть находим из теоремы 1 § 6, применяя ее к случайным величинам $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1}$, определенным в доказательстве теоремы 4. Распределение величины N_i находим по формуле (9), причем $N_{n+1}=n$.

Если $p=1$, то (10) принимает вид

$$\mathbf{P}\left\{\delta^+(m, m)\leqslant\frac{c}{m}\right\}=1-\frac{\binom{2m}{m+1+c}}{\binom{2m}{m}}. \tag{13}$$

Распределение случайной величины $\delta^+(m, n)$ для $n=m$ получили Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк [44], а для $n=mp$, где p — положительное целое число, В. С. Королюк [51].

§ 40. НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Сравнение теоретического и эмпирического распределений. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$, и пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, т. е. число величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не превосходящих x, деленное на n. Обозначим

$$\delta_n^+ = \sup_{-\infty < x < \infty} [F_n(x) - F(x)] \tag{1}$$

и

$$\delta_n^- = \sup_{-\infty < x < \infty} [F(x) - F_n(x)]. \tag{2}$$

Это свободные от распределения статистики. Для нахождения их распределений можно без ограничения общности считать, что $F(x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\delta_n^+ \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} [\chi_n(u) - u] \leqslant x\} \tag{3}$$

и

$$\mathbf{P}\{\delta_n^- \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} [u - \chi_n(u)] \leqslant x\}, \tag{4}$$

где $\{\chi_n(u), 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ — случайный процесс, определенный следующим образом. В интервале $(0, 1)$ выберем независимо n точек, причем каждая из них имеет в $(0, 1)$ равномерное распределение. Обозначим через $\chi_n(u)$ отношение числа точек, попавших в интервал $(0, u)$, к n. Тогда $\{\chi_n(u), 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ — процесс с переставляемыми приращениями, а $\chi_n(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, — неубывающая ступенчатая функция; $\mathbf{P}\{\chi_n(0) = 0\} = 1$ и $\mathbf{P}\{\chi_n(1) = 1\} = 1$. Кроме того, для $0 \leqslant u \leqslant 1$ и $j = 0, 1, \ldots, n$

$$\mathbf{P}\left\{\chi_n(u) = \frac{j}{n}\right\} = \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j} \tag{5}$$

и для $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1$ и $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$

$$\mathbf{P}\left\{\chi_n(u) = \frac{j}{n},\ \chi_n(v) = \frac{k}{n}\right\} = \frac{n!}{j!\,(k-j)!\,(n-k)!} u^j (v-u)^{k-j} (1-v)^{n-k}. \tag{6}$$

Для того чтобы найти распределения величин δ_n^+ и δ_n^-, можно воспользоваться теоремой 1 § 15 и теоремой 1 § 17 соответственно.

Теорема 1. *Если* $0 < x \leqslant 1$, *то*

$$\mathbf{P}\{\delta_n^+ \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\delta_n^- \leqslant x\} = 1 - \sum_{nx \leqslant j \leqslant n} \left(\frac{nx}{nx+n-j}\right) \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n} - x\right)^j \left(1 + x - \frac{j}{n}\right)^{n-j}. \tag{7}$$

Доказательство. Согласно формуле (1) § 15, для $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} [\chi_n(u) - u] \leqslant x\} = 1 - \sum_{0 \leqslant y \leqslant 1-x} \frac{x}{1-y} \mathbf{P}\{\chi_n(y) = y + x\}, \tag{8}$$

а согласно формуле (1) § 17, для $x>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}[u-\chi_n(u)]\leqslant x\}=1-\sum_{x\leqslant y\leqslant 1}\frac{x}{y}\mathbf{P}\{\chi_n(y)=y-x\}. \tag{9}$$

Так как $\mathbf{P}\{\chi_n(y)=x\}=0$, если $x\neq j/n$, $j=0, 1, \ldots$, то (8) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}[\chi_n(u)-u]\leqslant x\}=$$
$$=1-\sum_{nx\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{nx}{nx+n-j}\right)\mathbf{P}\left\{\chi_n\left(\frac{j}{n}-x\right)=\frac{j}{n}\right\}, \tag{10}$$

а (9) — в виде

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}[u-\chi_n(u)]\leqslant x\}=$$
$$=1-\sum_{0\leqslant j\leqslant n(1-x)}\left(\frac{nx}{nx+j}\right)\mathbf{P}\left\{\chi_n\left(\frac{j}{n}+x\right)=\frac{j}{n}\right\}. \tag{11}$$

Распределение величины $\chi_n(u)$, $0\leqslant u\leqslant 1$, определяется по формуле (5). Итак, (7) доказано. Очевидно, что (10) и (11) эквивалентны.

Распределения случайных величин δ_n^+ и δ_n^- были найдены Н. В. Смирновым [57]. См. также Вальд и Вольфовиц [66], Бирнбаум и Тинджи [32], Ван дер Варден [65] и Демпстер [37].

Аналогично можно найти функции распределения следующих статистик:

$$\delta_n^+(\alpha, \beta, \gamma)=\sup_{\alpha\leqslant F(x)\leqslant\beta}[F_n(x)-\gamma F(x)] \tag{12}$$

и

$$\rho_n^+(\alpha, \beta, \gamma)=\sup_{\alpha\leqslant F(x)\leqslant\beta}\left[\frac{F_n(x)-\gamma F(x)}{F(x)}\right], \tag{13}$$

где $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$ и $\gamma\geqslant 1$.

Легко видеть, что статистики $\delta_n^+(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\rho_n^+(\alpha, \beta, \gamma)$ свободны от распределений. Поэтому при нахождении их распределений можно считать, что $F(x)=x$ для $0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\delta_n^+(\alpha, \beta, \gamma)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\sup_{\alpha\leqslant u\leqslant\beta}[\chi_n(u)-\gamma u]\leqslant x\} \tag{14}$$

и

$$\mathbf{P}\{\rho_n^+(\alpha, \beta, \gamma)\leqslant x\}=\mathbf{P}\left\{\sup_{\alpha\leqslant u\leqslant\beta}\left[\frac{\chi_n(u)-\gamma u}{u}\right]\leqslant x\right\}, \tag{15}$$

где случайный процесс $\{\chi_n(u),\ 0\leqslant u\leqslant 1\}$ определяется, как и выше.

Если принять во внимание, что $\chi_n(u)$ — дискретная случайная величина для $0 \leqslant u \leqslant 1$, то небольшая модификация теоремы 1 § 15 даст нам формулу

$$\mathbf{P}\{\sup_{\alpha \leqslant u \leqslant \beta} [c\chi_n(u) - u] \leqslant a\} = \mathbf{P}\{c\chi_n(\beta) - \beta \leqslant a\} -$$
$$- \sum\sum_{\alpha < y \leqslant z \leqslant \beta} \left(\frac{\beta - z}{\beta - y}\right) \mathbf{P}\{c\chi_n(y) = a + y,\ c\chi_n(\beta) = a + z\} \qquad (16)$$

для $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. С помощью этой формулы легко получить распределения (14) и (15).

Теорема 2. *Для* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\delta_n^+(\alpha, \beta, \gamma) \leqslant x\} = \sum_{k \leqslant n(x+\beta\gamma)} \mathbf{P}\left\{\chi_n(\beta) = \frac{k}{n}\right\} -$$
$$- \sum\sum_{n(x+\alpha\gamma) < j \leqslant k \leqslant n(x+\beta\gamma)} \left(\frac{n(x+\beta\gamma) - k}{n(x+\beta\gamma) - j}\right) \mathbf{P}\left\{\chi_n\left(\frac{j - nx}{n\gamma}\right) = \frac{j}{n},\quad \chi_n(\beta) = \frac{k}{n}\right\}, \qquad (17)$$

где вероятности в правой части задаются формулами (5) *и* (6). *Если, в частности,* $\beta = 1$, *то для* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\delta_n^+(\alpha, 1, \gamma) \leqslant x\} =$$
$$= 1 - \sum_{n(x+\alpha\gamma) < j \leqslant n} \left(\frac{n(x+\gamma) - n}{n(x+\gamma) - j}\right) \mathbf{P}\left\{\chi_n\left(\frac{j - nx}{n\gamma}\right) = \frac{j}{n}\right\}. \qquad (18)$$

Доказательство. Если в формуле (16) положим $a = x/\gamma$ и $c = 1/\gamma$, получим правую часть равенства (14). Формулу (17) получим, если примем во внимание, что $\mathbf{P}\{c\chi_n(y) = a + y,\ c\chi_n(\beta) = a + z\} = 0$, за исключением тех случаев, когда $y = (j - nx)/n\gamma$ и $z = (k - nx)/n\gamma$, где $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. Если $\beta = 1$, то (17) сводится к (18), так как $\mathbf{P}\{\chi_n(1) = 1\} = 1$.

Теорема 3. *Для* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\rho_n + (\alpha, \beta, \gamma) \leqslant x\} = \sum_{k \leqslant n\beta(x+\gamma)} \mathbf{P}\left\{\chi_n(\beta) = \frac{k}{n}\right\} -$$
$$- \sum\sum_{n\alpha(x+\gamma) < j \leqslant k \leqslant n\beta(x+\gamma)} \left(\frac{n\beta(x+\gamma) - k}{n\beta(x+\gamma) - j}\right) \mathbf{P}\left\{\chi_n\left(\frac{j}{n(x+\gamma)}\right) = \frac{j}{n},\ \chi_n(\beta) = \frac{k}{n}\right\}, \qquad (19)$$

где вероятности в правой части определяются по формулам (5) *и* (6).

Если, в частности, $\beta=1$, *то для* $x\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left\{\rho_n^+(\alpha,\ 1,\ \gamma)\leqslant x\right\}=$$
$$=1-\sum_{n\alpha(x+\gamma)<j\leqslant n}\left(\frac{n(x+\gamma)-n}{n(x+\gamma)-j}\right)\mathbf{P}\left(\chi_n\left(\frac{j}{n(x+\gamma)}\right)=\frac{j}{n}\right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Если в формуле (16) положим $a=0$ и $c=1/(x+\gamma)$, получим правую часть формулы (15). Формулу (19) получим, если примем во внимание, что $\mathbf{P}\{c\chi_n(y)=a+y,\ c\chi_n(\beta)=$ $=a+z\}=0$, за исключением тех случаев, когда $y=j/n(x+\gamma)$ и $z=k/n(x+\gamma)$, где $0\leqslant j\leqslant k\leqslant n$.

Замечание. Если $\alpha=0$ и $x=0$, то формулу (20) можно упростить (с учетом теоремы 1 § 13):

$$\mathbf{P}\left\{\rho_n^+(0,\ 1,\ \gamma)\leqslant 0\right\}=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}[\chi(u)-\gamma u]\leqslant 0\}=1-1/\gamma. \tag{21}$$

Если определить случайные величины $\delta_n^-(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\rho_n^-(\alpha,\beta,\gamma)$ аналогично (12) и (13), то их распределения можно получить тем же способом, что и распределения случайных величин (12) и (13).

Заметим, что для разных частных случаев разные авторы определяли как распределения величин $\delta_n^+(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\rho_n^+(\alpha,\beta,\gamma)$, так и их асимптотическое поведение. Распределение для $\delta_n^+(0,\ 1,\ 1)$ было найдено Н. В. Смирновым [57] и Бирнбаумом и Тинджи [32]; для $\delta_n^+(\alpha,\ 1,\ 1)$ — Н. В. Смирновым [58], а для $\delta_n^+(0,\ 1,\ \gamma)$ — Демпстером [37] и Двоссом [41]. Распределение для $\rho_n^+(0,\beta,0)$ нашел Чжэнь [34], а для $\rho_n^+(\alpha,\ 1,\ 1)$ — Исии [48] и Н. В. Смирнов [58]. Формулу (21) получили Дэниэлс [36], Роббинс [55], Чжэнь [34] и др.

Теорема 4. *Пусть*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{k}{n}-\delta_n^+\leqslant\frac{x}{n}\quad\text{и}\quad\rho_n^*=k\right\}=G_k(x). \tag{22}$$

Если $0<x<k$, *то*

$$\frac{dG_k(x)}{dx}=\binom{n}{k}\frac{(k-x)(n-x)^{n-k-1}}{n^n}\left[kx^{k-1}-\sum_{j=1}^{[x]}\binom{k}{j}j^{j-1}(x-j)^{k-j}\right]. \tag{23}$$

Доказательство. В самом деле, $\delta_n^+=(k-x)/n$ и $\rho_n^*=k$ тогда и только тогда, когда $\xi_k^*=x/n$ и $\chi_n(u)-\chi_n(x/n)\leqslant u-(x/n)$ для $0\leqslant u\leqslant 1$. Условие $\xi_k^*=x/n$ эквивалентно условиям $\chi_n(x/n)=$ $=k/n$ и $\chi_n(x/n-0)=(k-1)/n$. По формуле (2) § 13

$$\mathbf{P}\left\{\chi_n(u)-\chi_n\left(\frac{x}{n}\right)\leqslant u-\frac{x}{n}\right.$$
$$\left.\text{для }\frac{x}{n}\leqslant u\leqslant 1\,\middle|\,\chi_n\left(\frac{x}{n}-0\right)=\frac{k-1}{n},\ \chi_n\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{k}{n}\right\}=\frac{k-x}{n-x}, \tag{24}$$

если $0 \leqslant x \leqslant k$, а по формуле (1) § 17

$$\mathbf{P}\left\{\chi_n(u) - \chi_n\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant u - \frac{x}{n} \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant \frac{x}{n} \,\middle|\, \chi_n\left(\frac{x}{n} - 0\right) = \frac{k-1}{n},\right.$$

$$\left.\chi_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{k}{n}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{u - \chi_n(u) \leqslant \frac{1}{n} \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant \frac{x}{n} \,\middle|\, \chi_n\left(\frac{x}{n} - 0\right) = \frac{k-1}{n}\right\} =$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{[x]} \frac{1}{j} \mathbf{P}\left\{\chi_n\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{j-1}{n} \,\middle|\, \chi_n\left(\frac{x}{n} - 0\right) = \frac{k-1}{n}\right\}, \tag{25}$$

так как в (25) можно заменить $\chi_n(x/n - 0) - \chi_n(u)$ на $\chi_n(x/n - u)$ для $0 \leqslant u \leqslant x/n$ и искомая вероятность при этом не изменится. Далее,

$$\frac{d\mathbf{P}\left\{\xi_k^* \leqslant x/n\right\}}{dx} = \frac{d\mathbf{P}\left\{\chi_n(x/n) \leqslant k/n\right\}}{dx}. \tag{26}$$

Перемножив равенства (24), (25) и (26), получим

$$\frac{dG_k(x)}{dx} = \left(\frac{k-x}{n-x}\right)\left[\frac{d\mathbf{P}\{\chi_n(x/n) \geqslant k/n\}}{dx} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{[x]} \frac{1}{j} \frac{d\mathbf{P}\{\chi_n(j/n) = (j-1)\,n,\ \chi_n(x/n) \geqslant k/n\}}{dx}\right] \tag{27}$$

для $0 < x < k$. Так как

$$\frac{d\mathbf{P}\{\chi_n(x/n) \geqslant k/n\}}{dx} = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{n}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} \tag{28}$$

и

$$\frac{d\mathbf{P}\{\chi_n(j/n) = (j-1)/n,\ \chi_n(x/n) \geqslant k/n\}}{dx} =$$

$$= \binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1}\left(\frac{j}{n}\right)^{j-1}\left(\frac{x-j}{n}\right)^{k-j}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} \tag{29}$$

для $1 \leqslant j \leqslant x \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, то из (27) следует (23).

Совместное распределение величин δ_n^+ и ρ_n^+ нашли Бирнбаум и Пайк [31].

Теорема 5. *Случайная величина* $\rho_n^*/n - \delta_n^+$ *равномерно распределена в интервале* (0, 1).

Доказательство. Если $\rho_n^*/n - \delta_n^+ = x$ $(0 < x < 1)$, то x обязательно является элементом выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, так что $\chi_n(x) - \chi_n(x-0) = 1/n$ и $\chi_n(u) - \chi_n(x) \leqslant u - x$, $0 \leqslant u \leqslant 1$. Пусть

$\chi_n^*(u) = \chi_n(u+x) - \chi_n(x)$ для $0 \leqslant u \leqslant 1-x$ и $\chi_n^*(x) = 1 - \chi_n(u+x-1) - \chi_n(x)$ для $1-x \leqslant u \leqslant 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\chi_n(u) - \chi_n(x) \leqslant u - x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant 1 \,|\, \chi_n(x) - \chi_n(x-0) = \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\chi_n^*(u) \leqslant u \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant 1 \,|\, \chi^*(1-0) = \frac{n-1}{n}\right\} = \frac{1}{n}. \quad (30)$$

Действительно, легко видеть, что к процессу $\{\chi_n^*(u), 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ можно применить теорему 1 § 13, и тогда из формулы (2) § 13 получается последнее равенство в (30). Так как вероятность того, что по крайней мере один элемент выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ попадет в интервал $(x, x+\Delta x)$, равна $n\Delta x + o(\Delta x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1 - \Delta x$, то плотность случайной величины $\rho_n^*/n - \delta_n^+$ равна 1 в интервале $(0, 1)$. Теорема доказана.

Эта теорема принадлежит Бирнбауму и Пайку [31]. Другие доказательства были даны Двоссом [40] и Кюйпером [52].

Выборки случайного размера. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ — бесконечная последовательность взаимно независимых случайных величин с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть ν — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с интенсивностью λ, т. е.

$$\mathbf{P}\{\nu = j\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} \quad (31)$$

для $j = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть ν не зависит от $\{\xi_n\}$. Обозначим через $F_\lambda(x)$, $-\infty < x < \infty$, эмпирическую функцию распределения выборки случайного размера $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu)$; $F_\lambda(x) \equiv 0$ при $\nu = 0$.

Положим

$$\gamma^+(\lambda) = \sup_{-\infty < x < \infty}\left[\frac{\nu}{\lambda}F_\lambda(x) - F(x)\right], \quad (32)$$

$$\gamma^-(\lambda) = \sup_{-\infty < x < \infty}\left[F(x) - \frac{\nu}{\lambda}F_\lambda(x)\right], \quad (33)$$

$$\delta^+(\lambda) = \sup_{-\infty < x < \infty}[F_\lambda(x) - F(x)] \quad (34)$$

и

$$\delta^-(\lambda) = \sup_{-\infty < x < \infty}[F(x) - F_\lambda(x)]. \quad (35)$$

Легко видеть, что $\gamma^+(\lambda)$, $\gamma^-(\lambda)$, $\delta^+(\lambda)$ и $\delta^-(\lambda)$ — статистики, свободные от распределения. Поэтому при нахождении их распределений будем считать, что $F(x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $\nu F_\lambda(x) = \nu(u)$ при $0 \leqslant u \leqslant 1$, где $\{\nu(u), 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ и $\nu = \nu(1)$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\nu(u) = j\} = e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^j}{j!} \quad (36)$$

для $j=0, 1, 2, \ldots$. При нахождении распределений величин (32)—(35) мы воспользуемся следующими утверждениями: если $a \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}[c\nu(u)-u]\leqslant a\}=\mathbf{P}\{c\nu(1)\leqslant a+1\}-\\ -\sum_{0<y\leqslant z\leqslant 1}\sum\left(\frac{1-z}{1-y}\right)\mathbf{P}\{c\nu(y)=a+y,\ c\nu(1)=a+z\} \quad (37)$$

(в силу теоремы 1 § 15), и

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}[u-c\nu(u)]\leqslant a\}=1-\sum_{a\leqslant y\leqslant 1}\frac{a}{y}\mathbf{P}\{c\nu(y)=y-a\} \quad (38)$$

(в силу теоремы 1 § 17).

Теорема 6. *Для* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\lambda)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\nu(1)\leqslant\lambda(x+1)\}-\sum_{\lambda x<j\leqslant k\leqslant\lambda(x+1)}\sum\left(\frac{\lambda(x+1)-k}{\lambda(x+1)-j}\right)\times\\ \times\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j}{\lambda}-x\right)=j\right\}\mathbf{P}\left\{\nu\left(x+1-\frac{j}{\lambda}\right)=k-j\right\}, \quad (39)$$

где распределение величины $\nu(u)$, $0\leqslant u\leqslant 1$, *определяется по формуле* (36).

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\lambda)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\nu(u)\leqslant\lambda(u+x) \text{ для } 0\leqslant u\leqslant 1\}, \quad (40)$$

а правую часть находим по формуле (37) при $a=x$ и $c=1/\lambda$.

Теорема 7. *Для* $x>0$

$$\mathbf{P}\{\gamma^-(\lambda)\leqslant x\}=1-\sum_{0\leqslant j\leqslant\lambda(1-x)}\left(\frac{\lambda x}{\lambda x+j}\right)\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j}{\lambda}+x\right)=j\right\}, \quad (41)$$

где распределение величины $\nu(u)$, $0\leqslant u\leqslant 1$, *определяется по формуле* (36).

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\{\gamma^-(\lambda)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\lambda u-\nu(u)\leqslant\lambda x \text{ для } 0\leqslant u\leqslant 1\}, \quad (42)$$

а правую часть находим по формуле (38) при $a=x$ и $c=1/\lambda$.

Теорема 8. *Для* $0<x\leqslant 1$

$$\mathbf{P}\left\{\delta^+(\lambda)\leqslant x\right\}=1-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{kx\leqslant j\leqslant k}\left(\frac{kx}{k(x+1)-j}\right)\times\\ \times\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j}{k}-x\right)=j\right\}\mathbf{P}\left\{\nu\left(x+1-\frac{j}{k}\right)=k-j\right\}, \quad (43)$$

где распределение величины $\nu(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, *определяется по формуле* (36).

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{+}(\lambda) \leqslant x\right\} = \mathbf{P}\{\nu(u) \leqslant (u+x)\nu(1) \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant 1\}. \tag{44}$$

Если $\nu(1)=k$, $k=1, 2, \ldots$, и в (37) положить $a=x$, $c=1/k$, то получим

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{+}(\lambda) \leqslant x \mid \nu(1)=k\right\} = 1 - \sum_{kx \leqslant j \leqslant k} \left(\frac{kx}{k(x+1)-j}\right) \mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j}{k}-x\right)=j \mid \nu(1)=k\right\}, \tag{45}$$

откуда

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{+}(\lambda) \leqslant x\right\} = \mathbf{P}\{\nu(1)=0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu(1)=k\} \mathbf{P}\left\{\delta^{+}(\lambda) \leqslant x \mid \nu(1)=k\right\}, \tag{46}$$

и теорема доказана.

Теорема 9. *Для* $0<x<1$

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{-}(\lambda) \leqslant x\right\} = \mathbf{P}\{\nu(1)>0\} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k(1-x)} \left(\frac{kx}{kx+j}\right) \times \mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j}{k}+x\right)=j\right\} \mathbf{P}\left\{\nu\left(1-x-\frac{j}{k}\right)=k-j\right\}, \tag{47}$$

где распределение величины $\nu(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, *определяется по формуле* (36).

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{-}(\lambda) \leqslant x\right\} = \mathbf{P}\{u\nu(1)-\nu(u) \leqslant x\nu(1) \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant 1\} - \mathbf{P}\{\nu(1)=0\}. \tag{48}$$

Если $\nu(1)=k$, $k=1, 2, \ldots$, и в формуле (38) положить $a=x$, $c=1/k$, то получим

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{-}(\lambda) \leqslant x/\nu(1)=k\right\} = 1 - \sum_{0 \leqslant j \leqslant k(1-x)} \left(\frac{kx}{kx+j}\right) \mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j}{k}+x\right)=j \mid \nu(1)=k\right\}, \tag{49}$$

откуда

$$\mathbf{P}\left\{\delta^{-}(\lambda) \leqslant x\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu(1)=k\} \mathbf{P}\left\{\delta^{-}(\lambda) \leqslant x \mid \nu(1)=k\right\}, \tag{50}$$

и теорема доказана.

Замечание. Положим

$$\gamma(\lambda)=\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{\nu}{\lambda}F_\lambda(x)-F(x)\right|. \tag{51}$$

Ясно, что $\gamma(\lambda)$ — статистика, свободная от распределения. Кац [49] доказал, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\{\sqrt{\lambda}\,\gamma(\lambda)\leqslant z\}=L(z),$$

где

$$L(z)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{2j+1}\exp\left(-\dfrac{(2j+1)^2\pi^2}{8z^2}\right) & \text{при} \quad z>0,\\[2ex] 0 & \text{при} \quad z\leqslant 0.\end{cases} \tag{53}$$

§ 41. ЗАДАЧИ

1. При баллотировке кандидат A набирает a голосов, а кандидат B набирает b голосов, причем всевозможные избирательные протоколы равновероятны. Обозначим через α_r и β_r числа голосов среди первых r бюллетеней, поданных за A и B соответственно. Пусть $Q_j(a, b)$ — вероятность того, что точно для j индексов выполняется неравенство $\alpha_r\geqslant\mu\beta_r$, $r=1, 2, \ldots, a+b$, а $P_j(a, b)$ — вероятность того, что точно для j индексов выполняется неравенство $\alpha_r>\mu\beta_r$, $r=1, 2, \ldots, a+b$.

Найти $Q_j(a, b)$, если a и b взаимно просты и $\mu=a/b$ (см. Бизли и Гроссман [9]).

2. В условиях задачи 1 найти $Q_j(a, b)$ при $b=a$ и $\mu=1$ (см. Энгельберг [15]).

3. В условиях задачи 1 найти $Q_j(a, b)$, если $a\geqslant\mu\beta$ и $\mu\geqslant 0$ — целое число (см. Энгельберг [15]).

4. В условиях задачи 1 найти $Q_j(a, b)$, где μ — неотрицательное целое число.

5. В условиях задачи 1 найти $Q_{a+b}(a, b)$ и $P_{a+b-1}(a, b)$ при $a=km$, $b=kn$, $(m, n)=1$ и $\mu=a/b$ (см. Гроссман [21] и Бизли [8]).

6. В условиях задачи 1 найти $P_j(a, b)$, $j=0, 1, \ldots, a+b$, при $a=km$, $b=kn$, $(m, n)=1$, $\mu=a/b$.

7. При баллотировке кандидат A набирает a голосов, а кандидат B набирает b голосов, причем всевозможные избирательные протоколы равновероятны. Пусть α_r и β_r — числа голосов среди первых r избирательных бюллетеней, поданных за A и B соответственно, причем $\alpha_0=\beta_0=0$. Для $0\leqslant u\leqslant a+b$ зададим $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ следующим образом: $\alpha(u)=\alpha r(r+1-u)+\alpha_{r+1}(u-r)$, если $r\leqslant u\leqslant r+1$, и $\beta(u)=\beta_r(r+1-u)+\beta_{r+1}(u-r)$, если $r\leqslant u\leqslant r+1$. Если бюллетени опускаются в моменты $u=1, 2, \ldots, a+b$, то $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ $(0\leqslant u\leqslant a+b)$ описывают временные флуктуации чисел голосов, поданных за A и B соответственно. Обозначим через $\delta_{a,b}$ полное время в интервале $(0, a+b)$, в течение которого A занимает лидирующее положение, т. е. $\delta_{a,b}$ — мера множества $\{u\colon \alpha(u)>\beta(u)$ и $0\leqslant u\leqslant a+b\}$. Найти распределение случайной величины $\delta_{a,b}$ (см. Чжун Кай-лай и Феллер [13]).

8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины с общим непрерывным и симметричным распределением (т. е. $\mathbf{P}\{\xi_r=x\}=0$ и $\mathbf{P}\{\xi_r\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\xi_r\geqslant -x\}$ для всех x). Положим $\zeta_0=0$ и $\zeta_r=\xi_1+\ldots+\xi_r$ для $r=1, 2, \ldots, n$. Пусть Δ_n — число неотрицательных (положительных) членов в последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Найти $\mathbf{P}\{\mu_n=j\}$ для $j=0, 1, \ldots, n$ (см. Андерсен [1] и Дарлинг [14]).

9. Пусть в условиях задачи 8 $(\alpha_0(n), \alpha_1(n), \ldots, \alpha_n(n))$ — такая перестановка множества $(0, 1, \ldots, n)$, для которой $\zeta_{\alpha_0(n)} < \zeta_{\alpha_1(n)} < \ldots < \zeta_{\alpha_n(n)}$. Найти $\mathbf{P}\{\alpha_k(n) = j\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ (см. Дарлинг [14] и Андерсен [4]).

10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Доказать, что статистика

$$\delta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$$

свободна от распределения.

11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — взаимно независимые случайные величины с общей непрерывной функцией распределения. Обозначим через $F_n(x)$ и $G_n(x)$ эмпирические функции распределения выборок $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Положим

$$\delta^+(n, n) = \sup_{-\infty < x < \infty} [F_n(x) - G_n(x)]$$

и

$$\delta(n, n) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)|.$$

Найти распределение и асимптотическое распределение величины $\delta^+(n, n)$.

12. В условиях задачи (11) найти асимптотическое распределение величины $\delta(n, n)$.

13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — взаимно независимые случайные величины с общей непрерывной функцией распределения.

Обозначим через $F_n(x)$ и $G_n(x)$ эмпирические функции распределения выборок $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Найти вероятность события

$$\inf_{0 < G_n(x) < 1} [F_m(x) - G_n(x)] > 0$$

(см. Дрион [37]).

14. Пусть $\{\nu(u), 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Найти

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} \left|\frac{\nu(u) - \lambda u}{\sqrt{\lambda}}\right| \leqslant z\right\}$$

(см. Кац [49]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Andersen E. S., On the number of positive sums of random variables, *Skand. Akt.*, **32** (1949), 27—36.

[2] Andersen E. S., On the frequency of positive partial sums of a series of random variables, *Math. Tidskrift B*, 1950, 33—35.

[3] Andersen E. S., On the fluctuations of sums of random variables, *Math. Scand.*, **1**, (1953), 263—285.

[4] Andersen E. S., On sums of symmetrically dependent random variables, *Scand. Akt.*, **36** (1953), 123—138.

[5] Andersen E. S., On the fluctuations of sums of random variables, *Math. Scand.*, 2 (1954), 195—223.

[6] Baxter G., An analytic approach to finite fluctuation problems in probability, *J. d'Analyse Math.*, **9** (1961), 37—70.

[7] Baxter G., Combinatorial methods in fluctuation theory, *Z. Wahr.*, **1** (1963), 263—270.

[8] Bizley M. T. L., Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from (0,0) to (km, kn) having just t contacts with the line $my = nx$ and having no points above this line; and a proof of Grossman's

formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line, *Inst. Actuaries*, **80** (1954), 55—62.
[9] Bizley M. T. L., Grossman H. D., Fun with lattice points 25. Paths having a given number of lattice points in a given region, *Scripta Math.*, **20** (1954), 203—204.
[10] Brandt A., A generalization of a combinatorial theorem of Sparre Andersen about sums of random variables, *Math. Skand.*, **9** (1961), 352—358.
[11] Brunk H. D., On a theorem of E. Sparre Andersen and its application to tests against trend, *Math. Scand.*, **8** (1960), 305—326.
[12] Brunk H. D., A generalization of Spitzer's combinatorial lemma, *Z. Wahr.*, **2** (1964), 395—405.
[13] Chung K. L., Feller W., On fluctuations in coin tossing, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 605—608.
[14] Darling D. A., Sums of symmetrical random variables, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 511—517.
[15] Engelberg O., Exact and limiting distributions of the number of lead positions in unconditional ballot problems, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 168—172.
[16] Engelberg O., On some problems concerning a restricted random walk, *J. Appl. Prob.*, **2** (1965), 369—404.
[17] Engelberg O., Generalization of the ballot problem, *Z. Wahr.*, **3** (1965), 271—275.
[18] Erdős P., Kac M., On the number of positive sums of independent random variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 1011—1020.
[19] Feller W., On combinatorial methods in fluctuation theory, Probability and Statistics, The Harald Cramér Volume, Stockholm, New York, 1959, pp. 75—91.
[20] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, изд-во «Мир», М., 1967.
[21] Grossman H. D., Fun with lattice-points 22. Paths in a lattice triangle, *Scripta Math.*, **16** (1950), 207—212.
[22] Hobby Ch., Pyke R., Combinatorial results in multi-dimensional fluctuation theory, *Ann. Math. Statist.*, **34** (1963), 402—404.
[23] Lipschutz M., Generalization of a theorem of Chung and Feller, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 659—670.
[24] Riordan J., The enumeration of election returns by number of lead positions, *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 369—379.
[25] Sarkadi K., On Galton's rank order test, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, **6** (1961), 127—131; **7** (1962), 223 (дополнение).
[26] Spitzer F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 323—339. (Русский перевод: Спицер Ф., Комбинаторная лемма и ее приложения к теории вероятностей, сб. *Математика*, **8 : 4** (1964), 135—160.)
[27] Takács L., Ballot problems, *Z. Wahr.*, **1** (1962), 154—158.
[28] Takács L., The distribution of majority times in a ballot, *Z. Wahr.*, **2** (1963), 118—121.
[29] Takács L., Fluctuations in the ratio of scores in counting a ballot, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 393—396.
[30] Wendel J. G., Order statistics of partial sums, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 1034—1044.

Порядковые статистики

[31] Birnbaum Z. W., Pyke R., On some distributions related to the statistic D_n^+, *Ann. Math. Statist.*, **29** (1958), 179—187.
[32] Birnbaum Z. W., Tingey F. H., One sided confidence contours for probability distribution functions, *Ann. Math. Statist.*, **22** (1951), 592—596.
[33] Боровков А. А., О проблеме двух выборок, *Изд. АН СССР, сер. матем.*, **26** (1962), 605—624.

[34] Chang Li-chien, On the ratio of an empirical distribution function to the theoretical distribution function (китайск.), *Acta Math. Sinica*, **5** (1955), 347—368. (Английский перевод см. *Selected Translations in Math. Statist. Prob., IMS and AMS*, **4** (1963), 17—38.)
[35] Cheng P., Non-negative jump points of an empirical distribution function relative to a theoretical distribution function (китайск.), *Acta Math. Sinica*, **8** (1958), 333—347. (Английский перевод см. *Selected Translations in Math. Statist. Prob. IMS and AMS*, **3** (1962), 205—224.)
[36] Daniels H. E., The statistical theory of the strengths of bundles of threads, I., *Proc. Roy. Soc. A*, **183** (1945), 405—435.
[37] Dempster A., Generalized D_n^+ statistics, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 593—597.
[38] Doob J. L., Heuristic approach to the Kolmogorov — Smirnov theorems, *Ann. Math. Statist.*, **20** (1949), 393—403.
[39] Drion E. F., Some distribution-free tests for the difference between two empirical cumulative distribution functions, *Ann. Math. Statist.*, **23** (1952), 563—574.
[40] Dwass M., On several statistics related to empirical distribution functions, *Ann. Math. Statist.*, **29** (1958), 188—191.
[41] Dwass M., The distribution of a generalized D_n^+ statistic., *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 1024—1028.
[42] Feller W., On the Kolmogorov-Smirnov theorems, *Ann. Math. Statist.*, **19** (1948), 177—189.
[43] Glivenko V., Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilitá, *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*, **4** (1933), 92—99.
[44] Гнеденко Б. В., Королюк В. С., О максимальном расхождении двух эмпирических распределений, *ДАН СССР*, **80** (1951), 525—528.
[45] Гнеденко Б. В., Михалевич В. С., О распределении числа выходов одной эмпирической функции распределения над другой, *ДАН СССР*, **82** (1952), 841—853.
[46] Гнеденко Б. В., Михалевич В. С., Две теоремы о поведении эмпирических функций распределения, *ДАН СССР*, **85** (1952), 25—27.
[47] Hobby Ch., Pyke R., A combinatorial theorem related to comparisons of empirical distribution functions, *Z. Wahr.*, **2** (1963), 85—89.
[48] Ishii G., On the exact probabilities of Rényi's tests, *Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo*, **11** (1959), 17—24.
[49] Kac M., On deviations between theoretical and empirical distributions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 252—257.
[50] Колмогоров А. Н., Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*, **4** (1933), 83—91.
[51] Королюк В. С., О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **19** (1955), 81—96.
[52] Kuiper N. H., Alternative proof of a theorem of Birnbaum and Pyke, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 251—252.
[53] Malmquist S., On a property of order statistics from a rectangular distribution, *Skand. Akt.*, **33** (1950), 214—222.
[54] Massey F. J., The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions, *Ann. Math. Statist.*, **22** (1951), 125—128.
[55] Robbins H., A one-sided confidence interval for an unknown distribution function (резюме), *Ann. Math. Statist.*, **25** (1954), 409.
[56] Смирнов Н. В., Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках, *Бюлл. МГУ, сер. А*, **2 : 2** (1939), 3—14.
[57] Смирнов Н. В., Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, *УМН*. **10** (1944), 179—206.
[58] Смирнов Н. В., Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия, *Труды Матем. ин-та им. Стеклова*, **64** (1961), 185—210.

[59] Takács L., On random walk problems (венгерск.), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.*, **2** (1957), 81—90.
[60] Takács L., Remarks on random walk problems, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. In. Közl.*, **2** (1957), 175—182.
[61] Takács L., The use of a ballot theorem in order statistics, *J. Appl. Prob.*, **1** (1964), 389—392.
[62] Takács L., An application of a ballot theorem in order statistics, *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 1356—1358.
[63] Takács L., Applications of a ballot theorem in physics and in order statistics, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **27** (1965), 130—137.
[64] Takács L., The distributions of some statistics depending on the deviation between empirical and theoretical distribution functions, *Sankhyā, Ser. A*, **27** (1965), 93—100.
[65] van der Waerden B. L., Testing a distribution function, *Indag. Math.*, **15** (1953), 201—207.
[66] Wald A., Wolfowitz J., Confidence limits for continuous distribution functions, *Ann. Math. Statist.*, **10** (1939), 105—118.

ДОПОЛНЕНИЕ

1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Случайные испытания. Когда говорят о случайном испытании, подразумевают, что с ним связано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где Ω — выборочное пространство, т. е. множество всевозможных исходов случайного испытания, $\mathscr{A}$ — это σ-поле (σ-алгебра) подмножеств в Ω, а $\mathbf{P}$ — вероятностная мера, определенная на $\mathscr{A}$. Элементы множества $\mathscr{A}$ называются событиями.

Теорема непрерывности для вероятностей. Пусть задана бесконечная последовательность событий: $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots$. Определим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{r=n}^{\infty} A_r$ как событие, состоящее в том, что произойдет бесконечное число событий $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots$, а $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{r=n}^{\infty} A_r$ — как событие, состоящее в том, что произойдут все, кроме конечного числа событий, $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots$. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, то будем говорить, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, который равен общему значению этих двух пределов. Если последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots$ монотонна, то $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ существует. Если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ существует, то

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} A_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{A_n\}. \tag{1}$$

Случайные величины. Под вещественной случайной величиной ξ понимается функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на Ω и измеримая относительно $\mathscr{A}$, т. е. для всякого x событие $\{\xi(\omega) \leqslant x\}$ принадлежит $\mathscr{A}$. Случайная величина $\xi(\omega)$ может принимать как конечные, так и бесконечные значения.

Если случайная величина $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, принимает только конечные значения, то функция $F(x) = \mathbf{P}\{\xi(\omega) \leqslant x\}$ называется функцией распределения случайной величины ξ. Если $F(x)$ абсолютно непрерывна, то ее можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \tag{2}$$

для любого x. Функция $f(x)$ называется плотностью случайной величины ξ. Спектром случайной величины ξ называется множество $R=\{x\colon F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)>0$ для всех $\delta>0\}$.

Если не указано противное, то мы будем рассматривать случайные величины, принимающие лишь конечные значения.

Математическое ожидание. Математическое ожидание случайной величины ξ, принимающей лишь конечные значения, определяется как интеграл

$$\mathbf{E}\{\xi\}=\int_{\Omega}\xi(\omega)\,d\mathbf{P}=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF(x). \tag{3}$$

Если функция $\xi(\omega)$ абсолютно интегрируема, то будем говорить, что ξ имеет конечное математическое ожидание. Если же интеграл от $|\xi(\omega)|$ по Ω бесконечен, то либо $\mathbf{E}\{\xi\}=\infty$, либо $\mathbf{E}\{\xi\}=-\infty$, либо $\mathbf{E}\{\xi\}$ не существует.

Если $g(x)$ — измеримая по Борелю функция от x, то $\eta=g(\xi)$ также есть случайная величина и ее математическое ожидание равно

$$\mathbf{E}\{\eta\}=\int_{\Omega}g(\xi(\omega))\,d\mathbf{P}=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dF(x), \tag{4}$$

если только интеграл сходится.

Производящие функции. Если ξ — вещественная случайная величина, принимающая только конечные значения, то математическое ожидание $G(z)=\mathbf{E}\{z^{\xi}\}$ существует при $|z|=1$ и называется производящей функцией случайной величины ξ. Распределение случайной величины ξ однозначно определяется ее производящей функцией. Производящей функцией чаще всего пользуются, когда спектр R случайной величины ξ содержит только неотрицательные целые числа. В этом случае $G(z)$ сходится при $|z|\leqslant 1$ и является регулярной функцией от z при $|z|<1$.

Преобразование Лапласа — Стильтьеса. Если ξ — вещественная случайная величина, принимающая только конечные значения, то математическое ожидание $\varphi(s)=\mathbf{E}\{e^{-s\xi}\}$ существует при $\operatorname{Re}(s)=0$ и называется преобразованием Лапласа — Стильтьеса функции распределения случайной величины ξ. Распределение случайной величины ξ однозначно определяется его преобразованием Лапласа — Стильтьеса. Преобразованием Лапласа — Стильтьеса случайной величины ξ часто пользуются, когда ее спектр R состоит только из неотрицательных чисел. В этом случае $\varphi(s)$ всегда сходится при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$ и является регулярной функцией от s при $\operatorname{Re}(s)>0$.

Характеристические функции. Если ξ — вещественная случайная величина, принимающая только конечные значения, то математическое ожидание $\psi(\omega) = \mathbf{E}\{\xi^{i\omega\xi}\}$ всегда существует при $-\infty < \omega < \infty$ и называется характеристической функцией случайной величины ξ. Очевидно, что $\psi(\omega) = \varphi(-i\omega)$. Распределение случайной величины ξ однозначно определяется ее характеристической функцией.

Условные вероятности. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $A \in \mathcal{A}$ — событие, а $\mathcal{B}$ — это σ-поле множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$, т. е. σ-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Условная вероятность события A относительно $\mathcal{B}$, обозначаемая через $\mathbf{P}\{A \mid \mathcal{B}\}$, определяется как произвольная функция от ω, измеримая относительно $\mathcal{B}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_B \mathbf{P}\{A \mid \mathcal{B}\}\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}\{AB\} \tag{5}$$

для всех $B \in \mathcal{B}$. Из теоремы Радона — Никодима следует, что такая функция существует и единственна с точностью до эквивалентности, т. е. любые две такие функции равны почти всюду; они могут отличаться лишь на ω-множестве нулевой вероятности.

Если $\xi = \xi(\omega)$ — вещественная случайная величина, принимающая только конечные значения, то $\mathbf{P}\{A \mid \xi\}$ определяется как одна из функций $\mathbf{P}\{A \mid \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ есть σ-поле, порожденное ξ, т. е. минимальное σ-поле, содержащее множества $\{\xi(\omega) \leqslant x\}$. В этом случае $\mathbf{P}\{A \mid \xi\}$ является бэровской функцией от ξ. Далее мы будем пользоваться обозначением $\mathbf{P}\{A \mid \xi = x\} = \mathbf{P}\{A \mid \xi\}\big|_{\xi(\omega)=x}$.

Утверждение

$$\mathbf{P}\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{A \mid \xi = x\}\, d\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} \tag{6}$$

называется *теоремой о полной вероятности*.

Условные математические ожидания. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, η — вещественная случайная величина, принимающая только конечные значения, с конечным математическим ожиданием, а $\mathcal{B}$ есть σ-поле множеств из $\mathcal{A}$. Условное математическое ожидание величины η относительно $\mathcal{B}$, обозначаемое $\mathbf{E}\{\eta \mid \mathcal{B}\}$, определяется как произвольная функция от ω, измеримая относительно $\mathcal{B}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_B \mathbf{E}\{\eta \mid \mathcal{B}\}\, dP = \int_B \eta\, d\mathbf{P} \tag{7}$$

для всех $B \in \mathcal{B}$. Из теоремы Радона — Никодима следует, что такая функция существует и единственна с точностью до эквивалентности, т. е. любые две такие функции равны почти всюду; они могут отличаться лишь на ω-множестве нулевой вероятности.

Если $\xi=\xi(\omega)$ — вещественная случайная величина, принимающая только конечные значения, то $\mathbf{E}\{\eta\mid\xi\}$ определяется как одна из функций $\mathbf{E}\{\eta\mid\mathscr{B}\}$, где $\mathscr{B}$ есть σ-поле, порожденное ξ. В этом случае $\mathbf{E}\{\eta\mid\xi\}$ является бэровской функцией от ξ, и мы будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\eta\mid\xi=x\}=\mathbf{E}\{\eta\mid\xi\}\big|_{\xi(\omega)=x}$.

Утверждение

$$\mathbf{E}\{\eta\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\{\eta\mid\xi=x\}\,d\mathbf{P}\{\xi\leqslant x\} \tag{8}$$

называется *теоремой о полном математическом ожидании*.

Теорема Колмогорова о согласовании. Пусть $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\xi_t(\omega)$, $t\in T$, — произвольное семейство вещественных случайных величин. Тогда вероятности

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathbf{P}\{\xi_{t_1}\leqslant x_1,\xi_{t_2}\leqslant x_2,\ldots,\xi_{t_n}\leqslant x_n\}, \tag{9}$$

определенные для произвольных конечных подмножеств $(t_1,t_2,\ldots$ $\ldots,t_n)\subset T$, называются конечномерными функциями распределения семейства случайных величин ξ_t, $t\in T$. Эти многомерные функции распределения взаимно согласованы, т. е.

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n})=F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{10}$$

для любой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ последовательности $(1,2,\ldots,n)$, и

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\lim_{\substack{x_j\to\infty\\ j=n+1,\ldots,m}}F_{t_1,t_2,\ldots,t_m}(x_1,x_2,\ldots,x_m) \tag{11}$$

для $m=n+1,\ n+2,\ \ldots$.

А. Н. Колмогоров доказал, что если для любых конечных подмножеств $(t_1,t_2,\ldots,t_n)\subset T$ заданы функции распределения $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и они согласованы, то существуют такие вероятностное пространство $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ и семейство случайных величин $\xi_t(\omega)$, $t\in T$, что для всех конечных подмножеств $(t_1,t_2,\ldots,t_n)\subset T$

$$\mathbf{P}\{\xi_{t_1}\leqslant x_1,\xi_{t_2}\leqslant x_2,\ldots,\xi_{t_n}\leqslant x_n\}=F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{12}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М. — Л., 1936.
[2] Лоэв М., Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
[3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, изд-во «Мир», М., 1969.

2. НЕЗАВИСИМЫЕ И ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Говорят, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ образуют последовательность взаимно независимых случайных величин, если

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1\}\mathbf{P}\{\xi_2 \leqslant x_2\} \ldots \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x_n\} \quad (1)$$

для $n = 2, 3, \ldots$ и всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ одинаково распределены, то $\mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x\} = F(x)$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Случайная величина ξ_n называется решетчатой, если существует такое число d, что $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = jd\} = 1$. Если d — максимальное число, обладающее этим свойством, то ξ_n называется d-решетчатой величиной. Если же такого d нет, то ξ_n называется нерешетчатой величиной.

Далее будем предполагать, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — бесконечная последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $\mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x\} = F(x)$, причем $\mathbf{E}\{\xi_n\} = a$ и $\mathrm{Var}\{\xi_n\} = b^2$, если они существуют. Положим $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Приведем ряд теорем о таких случайных величинах.

Слабый закон больших чисел. *Если* $\mathbf{E}\{|\xi_n|\} < \infty$, *то для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\zeta_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad (2)$$

т. е. ζ_n/n *сходится к* a *по вероятности.*

Эту теорему доказал Бернулли [2] для случаев, когда $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = q$, $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = p$ $(p + q = 1)$. П. Л. Чебышев [23] доказал ее при условии $b^2 < \infty$. В данной формулировке доказательство получил А. Я. Хинчин [17].

Сильный закон больших чисел. *Если* $\mathbf{E}\{|\xi_n|\} < \infty$, *то*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n}{n} = a\right\} = 1, \quad (3)$$

т. е. ζ_n/n *сходится к* a *с вероятностью* 1.

Эту теорему доказали для частного случая $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = 1/2$ Борель [5], для случая $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = q$, $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = p$ $(p + q = 1)$ — Кантелли [6], а для приведенного выше общего случая — А. Н. Колмогоров [18].

Центральная предельная теорема. *Если* $\mathbf{E}\{\xi_n^2\} < \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n - na}{\sqrt{nb^2}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du. \quad (4)$$

Муавр [11] и Лаплас [20] дали доказательство этой теоремы для случая $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = q$, $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = p$, $p + q = 1$, а для общего случая это сделал П. Л. Чебышев [24].

Сходимость к устойчивому закону. *Если* $F(0) = 0$ *и* $1 - F(x) = h(x)x^{-\alpha}$, *где* $0 < \alpha < 2$ — *константа и* $\lim\limits_{x\to\infty} h(cx)/h(x) = 1$ *для любой положительной константы* c, *то при* $\alpha < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\zeta_n}{b_n} \leqslant x\right\} = G_\alpha(x), \tag{5}$$

а при $\alpha > 1$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n - na}{b_n} \leqslant x\right\} = G_\alpha(x), \tag{6}$$

где b_n *выбираются так, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} n[1 - F(b_n)] = 1$, *а* $G_\alpha(x)$ — *устойчивая функция распределения, для которой*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dG_\alpha(x) = \exp\left\{-|z|^\alpha\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} - i\sin\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sgn} z\right)\Gamma(1-\alpha)\right\}. \tag{7}$$

Эта теорема принадлежит Дёблину [13].

В заключение приведем три теоремы о рекуррентных свойствах последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$.

1. *Если* $\mathbf{E}\{|\xi_n|\} < \infty$, *то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant n<\infty}\zeta_n = \infty\} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\xi_n = 0\} \neq 1, \\ 0 & \text{при} \quad a > 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = 1. \end{cases} \tag{8}$$

При $a \neq 0$ это утверждение следует из сильного закона больших чисел, а при $a = 0$ и $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} \neq 1$ из одной теоремы Чжун Кай-лая и Фукса [8].

2. *Если* $F(0) = 0$, *т. е.* ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — *неотрицательные случайные величины, то*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\zeta_n \leqslant x\} = \frac{1}{a}. \tag{9}$$

Эта теорема принадлежит Тэклинду [21].

3. *Если* ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — *нерешетчатые случайные величины и* $\mathbf{E}\{\xi_n\} = a > 0$ (*возможно, что* $a = \infty$), *то*

$$\lim\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{x < \zeta_n \leqslant x + h\} = \begin{cases} \dfrac{h}{a} & \text{при} \quad x\to\infty, \\ 0 & \text{при} \quad x\to-\infty. \end{cases} \tag{10}$$

Если ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, — *это* d-*решетчатые случайные величины и* $\mathbf{E}\{\xi_n\}=a>0$, *то*

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\zeta_n=kd\}=\begin{cases} \dfrac{d}{a} & \text{при} \quad k\to\infty, \\ 0 & \text{при} \quad k\to-\infty. \end{cases} \tag{11}$$

Теорему в этом виде доказал Блэкуэлл [4]. Частные случаи рассмотрели А. Н. Колмогоров [19], Эрдёш, Феллер и Поллард [14], Блэкуэлл [3], Чжун Кай-лай и Вольфовиц [10], Чжун Кай-лай и Поллард [9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beneš V. E., A renewal limit theorem for general stochastic processes, *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 98—113.
[2] Bernoulli J., Ars conjectandi (Opus posth.), Basileae, 1713.
[3] Blackwell D., A renewal theorem, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 145—150.
[4] Blackwell D., Extension of a renewal theorem, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 315—320.
[5] Borel E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **27** (1909), 247—271.
[6] Cantelli F. P., Sulla probabilità come limite della frequenza, *Rend. R. Accad. Lincei.* Ser. 5, *Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **26** (1), (1917), 39—45.
[7] Chung K. L., On the renewal theorem in higher dimensions, *Skand. Akt.*, **35** (1952), 188—194.
[8] Chung K. L., Fuchs W. H., On the distribution of values of sums of random variables, Four papers on probability, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 6 (1951), 1—12.
[9] Chung K. L., Pollard H., An extension of renewal theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 1—6.
[10] Chung K. L., Wolfowitz J., On a limit theorem in renewal theory, *Ann. Math.*, **55** (1952), 1—6.
[11] De Moivre A., The doctrine of chances, 3-е изд., London, 1756.
[12] De Moivre A., Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, London, 1730.
[13] Doeblin W., Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *Studia Math.*, **9** (1941), 71—96.
[14] Erdös P., Feller W., Pollard H., A theorem on power series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 201—204.
[15] Erdös P., Kac M., On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 292—302.
[16] Feller W., Fluctuation theory of recurrent events, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 98—119.
[17] Хинчин А. Я., Sur la loi des grands nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **188** (1929), 477—479.
[18] Колмогоров А. Н., Sur la loi forte des grands nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **191** (1930), 910—911.
[19] Колмогоров А. Н., Anfangsgründe der Markoffschen Ketten mit unendlichen vielen möglichen Zuständen, *Матем. сб., н. с.*, **1** (1936), 607—610.
[20] Laplace P. S., Theorie analytique des probabilités, Paris, 1812. (Oeuvres complètes de Laplace, VII, Paris, 1886.)
[21] Täckling S., Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem, *Skand. Akt.*, **27** (1944), 1—15.
[22] Täcklind S., Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem, *Skand. Akt.*, **28** (1945), 68—105.

[23] Чебышев П. Л., Des valeurs moyennes, *Liouv. J. Math. Pures et Appl.*, *sér.* 2, **12** (1867), 177—184. (Oeuvres I, St. Petersburg, 1907, pp. 687—694.)
[24] Чебышев П. Л., Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités, *Acta Math. Petr.*, 14 (1890—1891), 305—315. (Oeuvres II, St. Petersburg, 1907, pp. 481—491.)

3. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Пусть $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ — вещественный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, т. е. для любых $0\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_n$ случайные величины $\xi(t_1)-\xi(t_0),\ \xi(t_2)-\xi(t_1),\ \ldots$ $\ldots,\ \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ взаимно независимы, а распределение величины $\xi(t)-\xi(u)$ зависит только от $t-u$. Пусть $\mathbf{P}\{\xi(0)=0\}=1$. Тогда

$$\mathbf{E}\{e^{i\omega\xi(u)}\}=e^{u\Psi(\omega)} \tag{1}$$

для всех вещественных ω и $u\geqslant 0$, а функция $\Psi(\omega)$ в наиболее общем виде равна

$$\Psi(\omega)=i\omega c-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{i\omega x}-1-\frac{i\omega x}{1+x^2}\right)dM(x)+ \\ +\int_{+0}^{\infty}\left(e^{i\omega x}-1-\frac{j\omega x}{1+x^2}\right)dN(x), \tag{2}$$

где c — вещественная константа, σ^2 — неотрицательная константа, $M(x)$, $-\infty<x<0$, и $N(x)$, $0<x<\infty$, — неубывающие функции от x, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} M(x)=\lim\limits_{x\to\infty} N(x)=0$ и

$$\int_{-1}^{-0} x^2\,dM(x)+\int_{+0}^{1} x^2\,dN(x)<\infty. \tag{3}$$

Общую форму для $\Psi(\omega)$ нашел П. Леви [18]. В частных случаях функцию $\Psi(\omega)$ получили еще раньше Финетти [9, 10], А. Н. Колмогоров [16, 17]. Другое выражение для $\Psi(\omega)$ дал А. Я. Хинчин [13, 14].

Обратно, если выбрать c, σ^2, $N(x)$, $0<x<\infty$, и $M(x)$, $-\infty<$ $<x<0$, так, чтобы они удовлетворяли приведенным выше условиям, то по теореме Колмогорова о согласовании существует такой случайный процесс $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ со стационарными независимыми приращениями, что $\mathbf{P}\{\xi(0)=0\}=1$ и формула (1) верна.

Согласно теореме Дуба [8], процесс $\{\xi(u),\ 0\leqslant n<\infty\}$ можно считать сепарабельным. Процесс $\{\xi(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ называется сепарабельным, если найдется такая последовательность $\{u_j\}$ значений параметра, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{u\in I}\xi(u)=\sup_{u_j\in I}\xi(u_j)\}=1 \tag{4}$$

и

$$\mathbf{P}\{\inf_{u \in I} \xi(u) = \inf_{u_j \in I} \xi(u_j)\} = 1 \tag{5}$$

для любого открытого интервала $I \subset [0, \infty)$. В силу сепарабельности $\sup_{u \in I} \xi(u)$ и $\inf_{u \in I} \xi(u)$ — случайные величины, принимающие, возможно, и бесконечные значения, т. е. это измеримые функции.

Процесс $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ всегда можно выбрать так, чтобы он был центрированным. Тогда $\mathbf{P}\{\xi(u-0) = \xi(u) = \xi(u+0)\} = 1$ для всех $u > 0$, т. е. с вероятностью 1 процесс $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ не имеет фиксированных точек разрыва. Выборочные функции сепарабельного центрированного процесса со стационарными независимыми приращениями обладают простыми свойствами в смысле непрерывности (см. П. Леви [19] и Дуб [8]). Кроме, возможно, некоторого множества выборочных функций нулевой вероятности, все они ограничены на отрезке $[0, t]$ для любого конечного $t > 0$, имеют лево- и правосторонние предельные значения для любого $t > 0$ и все их разрывы представляют собой скачки.

Броуновское движение, или винеровский процесс. Здесь приращения $\xi(t) - \xi(u)$ нормально распределены, $\mathbf{E}\{\xi(t) + \xi(u)\} = 0$ и $\mathbf{E}\{[\xi(t) - \xi(u)]^2\} = \sigma^2 |t-u|$, где σ — положительная константа, т. е.

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi(t) - \xi(u)}{\sqrt{\sigma^2 (t-u)}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy \tag{6}$$

при $t > u$. Множеством значений параметра обычно служит луч $(0, \infty]$, причем $\mathbf{P}\{\xi(0) = 0\} = 1$. Этот процесс впервые рассматривал Башелье [1], а потом более строго Винер [23]. Отметим, что здесь $\Psi(\omega) = \sigma^2 \omega^2 / 2$.

Почти все выборочные функции сепарабельного процесса броуновского движения непрерывны.

Пуассоновский процесс. Приращения $\xi(t) - \xi(u)$ распределены согласно закону Пуассона $\mathbf{E}\{\xi(t) - \xi(u)\} = \lambda(t-u)$, где λ — положительная константа, т. е.

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(u) = k\} = e^{-\lambda(t-u)} \frac{[\lambda(t-u)]^k}{k!} \tag{7}$$

при $t > u$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$. В качестве множества значений параметра обычно берется $[0, \infty)$ и предполагается, что $\mathbf{P}\{\xi(0) = 0\} = 1$. Впервые этот процесс рассматривал Бейтмен [2, 3]. Здесь $\Psi(\omega) = \lambda(e^{-i\omega} - 1)$.

Почти все выборочные функции сепарабельного пуассоновского процесса являются неубывающими ступенчатыми функциями, и они возрастают только скачками единичной величины.

Рассмотрим теперь центрированный сепарабельный процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ со стационарными независимыми приращениями, для которого $\mathbf{P}\{\xi(0)=0\}=1$ и формулы (1) и (2) верны. С вероятностью 1 процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ не имеет фиксированных точек разрыва. Пусть $\nu_a(t)$ — число скачков в интервале $(0, t]$, величина которых больше a (>0). Говорят, что в точке u скачок имеет величину $>a$, если $\xi(u+0)-\xi(u-0)>a$. Процесс $\{\nu_a(t),\ 0 \leqslant t \leqslant a\}$ представляет собой пуассоновский процесс, для которого

$$\mathbf{E}\{\nu_a(t)\} = t\,[N(\infty) - N(a+0)] = -\,tN(a+0). \tag{8}$$

Аналогично, если $\nu_a^*(t)$ — число скачков в интервале $(0, t]$, величина которых не больше a (<0), то $\left\{\nu_a^*(t),\ 0 \leqslant t < \infty\right\}$ — пуассоновский процесс, для которого

$$\mathbf{E}\left\{\nu_a^*(t)\right\} = tM(a+0). \tag{9}$$

Если $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями и $\mathbf{P}\{\xi(0)=0\}=1$, то

$$\mathbf{E}\{\xi(t)\} = \rho t, \tag{10}$$

если математическое ожидание существует. Здесь ρ — константа (возможно, равная $\pm\infty$).

На процессы со стационарными независимыми приращениями переносятся многие теоремы о суммах взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин. Приведем некоторые из них.

Слабый закон больших чисел. *Если ρ — конечное число, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi(t)}{t} - \rho\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{11}$$

т. е. $\xi(t)/t$ сходится к ρ по вероятности.

Сильный закон больших чисел. *Если процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ сепарабелен и число ρ конечно, то*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t)}{t} = \rho\right\} = 1, \tag{12}$$

т. е. $\xi(t)/t$ сходится к ρ с вероятностью 1.

Доказательство можно найти у Дуба [8].

Центральная предельная теорема. *Если $\operatorname{Var}\{\xi(u)\} = \sigma^2 u$ существует и σ^2 — конечная положительная константа, то*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi(t)-\rho t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy. \tag{13}$$

Если процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ *сепарабелен и* $\mathbf{E}\{\xi(u)\} = \rho u$ *существует, то*

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u < \infty} \xi(u) = \infty\} =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \rho \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\xi(u) = 0\} \neq 1 \quad \text{для} \quad u > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \rho < 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{P}\{\xi(u) = 0\} = 1 \quad \text{для} \quad u \geqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bachelier L., Théorie de la speculation, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **3** (1900), 21—86.

[2] Bateman H., On the probability distribution of α-particles, *Phil. Mag., Ser. 6*, **20** (1910), 704—707.

[3] Bateman H., Some problems in the theory of probability, *Phil. Mag. Ser. 6*, **21** (1911), 745—752.

[4] Baxter G., Shapiro J. M., On bounded infinitely divisible random variables, *Sankhyā, Ser. A*, **22** (1960), 253—260.

[5] Blum J. R., Rosenblatt M., On the structure of infinitely divisible distributions, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1—7.

[6] Боровков А. А., О моменте первого перескока для одного класса процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, **10** (1965), 331—334.

[7] Chatterjee S. D., Pakshirajan R. P., On the unboundedness of the infinitely divisible laws, *Sankhyā, Ser. A*, **17** (1955), 349—350.

[8] Дуб Д. Л., Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.

[9] de Finetti B., Sulle funzioni a incremento aleatorio, *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **10** (1929), 163—168.

[10] de Finetti B., Le funzioni caratteristiche di legge istantanea, *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **12** (1930), 278—282.

[11] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М. — Л., 1949.

[12] Hartmann P., Wintner A., On the infinitesimal generators of integral convolutions, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 273—298.

[13] Хинчин А. Я., Новый вывод одной формулы П. Леви, *Бюлл. МГУ, сер. А*, **1 : 1** (1937), 1—5.

[14] Хинчин А. Я., Zur Theorie der unberschränkt teibaren Verteilungsgesetze, *Матем. сб., н. с.*, **2** (44) (1937), 79—120.

[15] Kingman J. F. C., Recurrence properties of processes with stationary independent increments, *J. Austral. Math. Soc.*, **4** (1964), 223—228.

[16] Колмогоров А. Н., Sulla forma generale di um processo stochastico omogeneo (Un problema di Bruno Finetti), *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **15** (1932), 805—808.

[17] Колмогоров А. Н., Ancora sulla forma generale di un processo stochastico omogeneo, *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **15** (1932), 866—869.

[18] Lévy P., Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. 2*, **3** (1934), 337—366. (Замечание к предыдущей работе автора, там же, **4** (1935), 217—218.)

[19] Lévy P., Théorie de l'addition des variables alétoires, Monographies des Probabilités, Paris, 1937.

[20] Линник Ю. В., Разложение вероятностных законов, изд-во ЛГУ, 1960.

[21] Лоэв М., Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.

[22] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, изд-во «Наука», М., 1964.

[23] Wiener N., Differential space, *J. Math. Phys. M. I. T.*, **2** (1923), 131—174.
[24] Золотарев В. М., Первое достижение уровня и поведение в бесконечности для одного класса процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, **9** (1964), 653—662.

4. ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются переставляемыми, если все $n!$ перестановок последовательности $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ имеют одинаковое совместное распределение, т. е.

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{i_1} \leqslant x_1, \xi_{i_2} \leqslant x_2, \ldots, \xi_{i_n} \leqslant x_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\right\} \quad (1)$$

для всех $n!$ перестановок $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ и всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Мы будем говорить также, что величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ образуют бесконечную последовательность переставляемых случайных величин, если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ для всех $n = 2, 3, \ldots$ являются переставляемыми случайными величинами.

Финетти [5—8] доказал, что свойство переставляемости для бесконечной последовательности случайных величин эквивалентно свойству условной независимости и условной одинаковой распределенности.

Теорема 1. *Пусть* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — *вероятностное пространство,* $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — *бесконечная последовательность переставляемых случайных величин. Тогда существует такая нетривиальная* σ-*подалгебра* $\mathscr{B}$ σ-*алгебры* $\mathscr{A}$, *что для всех* $n = 1, 2, \ldots, n$ *и* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega) \leqslant x_1, \ldots, \xi_n(\omega) \leqslant x_n \mid \mathscr{B}\} = \prod_{r=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_1(\omega) \leqslant x_r \mid \mathscr{B}\} \quad (2)$$

с вероятностью 1.

Доказательство этого утверждения можно найти у Лоэва [14]. Е. Б. Дынкин [3] доказал, что в этой теореме σ-подалгебра $\mathscr{B}$ порождается некоторой случайной величиной $\theta(\omega)$, т. е. с вероятностью 1

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n \mid \theta\} = \prod_{r=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_r \mid \theta\}. \quad (3)$$

Положим $\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x \mid \theta = y\} = F(x \mid y)$ и $\mathbf{P}\{\theta \leqslant x\} = H(x)$. Тогда в силу (3)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1 \mid y) F(x_2 \mid y) \ldots F(x_n \mid y)\, dH(y). \quad (4)$$

Таким образом, бесконечную последовательность переставляемых случайных величин можно реализовать как рандомизированную последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 1 позволяет применить слабый закон больших чисел, сильный закон больших чисел и центральную предельную теорему к переставляемым случайным величинам.

Сформулируем сильный закон больших чисел для переставляемых случайных величин.

Теорема 2. *Если* $\mathbf{E}\{|\xi_1|\}<\infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\xi_r=\mathbf{E}\{\xi_1\,|\,\mathscr{B}\} \tag{5}$$

с вероятностью 1.

Доказательство можно найти у Лоэва [14].

Если $G(x)$ — функция распределения случайной величины $\mathbf{E}\{\xi_1|\mathscr{B}\}$, то в силу (5)

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\xi_r\leqslant x\right\}=G(x). \tag{6}$$

Отметим в заключение, что совместную функцию распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *конечной* последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, вообще говоря, нельзя представить в виде (4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bühlmann H., Le problème limite central pour les variables alèatoires èchangeables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 534—536.

[2] Bühlmann H., Austauschbare stochastische Variabeln und ihre Grenzwertsaetze, *Univ. California Publ. in Statist.*, **3** (1960), 1—36.

[3] Дынкин Е. Б., Классы эквивалентных случайных величин, *УМН*, **54** (8), (1953), 125—134.

[4] de Finetti B., Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **14** (1931), 251—299.

[5] de Finetti B., Classi di numeri aleatori equivalenti, *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6,* **18** (1933), 107—110.

[6] de Finetti B., La legge dei grandi numeri nel casso dei numeri aleatori equivalenti, *Atti. R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **18** (1933), 203—207.

[7] de Finetti B., Sulla legge di distribuzione dei valori in una successione di numeri aleatori equivalenti, *Atti R. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 6*, **18** (1933), 279—284.

[8] de Finetti B., La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **7** (1937), 1—68.

[9] Fréchet M., Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants, II, Actualités Scientifiques et Industrielles, № 942, Paris, 1943.

[10] Haag J., Sur un problème général de probabilités et ses diverses applications, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Toronto, 1928, pp. 659—674.

[11] Hewitt E., Savage L. J., Symmetric measures on Cartesian products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 470—501.
[12] Хинчин А. Я., Sur les classes d'événements équivalents, *Матем. сб.*, **39** (1932), 40—43.
[13] Хинчин А. Я., О классах эквивалентных событий, *ДАН СССР*, **85** (1952), 713—714.
[14] Лоэв М., Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
[15] Teicher H., On the mixture of distributions, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 55—73.

5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ПЕРЕСТАВЛЯЕМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Случайный процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u \leqslant T\}$ называется процессом с переставляемыми приращениями, если для всех $n = 2, 3, \ldots$ и любого конечного $t \in (0, T]$ приращения

$$\xi\left(\frac{rt}{n}\right) - \xi\left(\frac{rt-t}{n}\right) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

являются переставляемыми случайными величинами.

Если математическое ожидание величины $\xi(u)$ существует, то при $0 \leqslant u \leqslant T$

$$\mathbf{E}\{\xi(u)\} = \rho u, \tag{2}$$

где ρ — константа (возможно, равная ∞).

Бюльман [1] доказал, что случайный процесс $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ с переставляемыми приращениями можно реализовать как случайный процесс с условно независимыми и стационарными приращениями.

Теорема 1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — *вероятностное пространство,* $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ — *случайный процесс с переставляемыми приращениями. Тогда существует такая нетривиальная* σ*-подалгебра* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, *что процесс* $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ *имеет условно независимые и стационарные приращения относительно* $\mathcal{B}$.

Отсюда вытекает сильный закон больших чисел для $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$.

Теорема 2. *Если процесс* $\{\xi(u),\ 0 \leqslant u < \infty\}$ *сепарабелен и* $\mathbf{E}\{|\xi(1)|\} < \infty$, *то*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\xi(t)}{t} = \mathbf{E}\{\xi(1) \mid \mathcal{B}\} \tag{3}$$

с вероятностью 1.

Если $G(x)$ — функция распределения случайной величины $\mathbf{E}\{\xi(1) \mid \mathcal{B}\}$, то в силу (3)

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi(t)}{t} \leqslant x\right\} = G(x). \tag{4}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blun J. R., Chernoff H., Rosenblatt M., Teicher H., Central limit theorems for interchangeable processes, *Canadian J. Math.*, **10** (1958), 222—229.
[2] Bühlmann H., Austauschbare stochastische Variabeln und ihre Grenzwertsaetze, *Univ. California Publ. in Statist.*, **3** (1960), 1—36.

6. АБЕЛЕВЫ И ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ — бесконечная последовательность комплексных чисел и

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

— производящая функция этой последовательности.

Абелевы теоремы

1. *Если ряд* $f(z)$ *сходится при* $|z|<1$ *и предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^k}{k^\alpha}=\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2}$$

существует для некоторого $\alpha \geqslant 0$, *то*

$$\lim_{z\to 1-0} (1-z)^{\alpha+1} f(z)=A. \tag{3}$$

При $\alpha=0$ получается первоначальная теорема Абеля. Случай $\alpha>0$ был рассмотрен Аппелем [2].

2. *Если ряд* $f(z)$ *сходится при* $|z|<1$ *и*

$$a_k \sim \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} k^\alpha L(k) \tag{4}$$

при $k\to\infty$, *где функция* $L(x)$ *такова, что* $\lim\limits_{x\to\infty} L(cx)/L(x)=1$ *для любого положительного числа* c, *то*

$$f(z)\sim \frac{A}{(1-z)^{\alpha+1}} L\left(\frac{1}{1-z}\right) \tag{5}$$

при $z\to 1-0$.

Эта теорема принадлежит Харди и Литлвуду [4].

Тауберовы теоремы

1. *Если ряд* $f(z)$ *сходится при* $|z|<1$, *предел*

$$\lim_{z\to 1-0} (1-z)^{\alpha+1} f(z)=A \tag{6}$$

существует для некоторого $\alpha \geqslant 0$ *и* $k(a_k-a_{k-1})>-K$, $k=1, 2, \ldots$, *где* K — *положительная константа, то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k^\alpha}=\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{7}$$

Если $\lim_{k\to\infty} k(a_k - a_{k-1}) = 0$, то получается первоначальная теорема Таубера. Данную теорему доказали Харди и Литлвуд [4, 5]; см. также Карамата [6].

2. *Пусть ряд $f(z)$ сходится при $|z|<1$ и*

$$f(z) \sim \frac{A}{(1-z)^{\alpha+1}} L\left(\frac{1}{1-z}\right) \tag{8}$$

при $z \to 1-0$, где $\alpha \geqslant 0$ и функция $L(x)$ такова, что $\lim_{x\to\infty} L(cx)/L(x) = 1$ для любого положительного числа c. Если $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant \ldots$ или $\alpha > 0$ и $k(a_k - a_{k-1}) > -Kk^\alpha L(k)$, где K — положительная константа, то

$$a_k \sim \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} k^\alpha L(k) \tag{9}$$

при $k \to \infty$.

Доказательство можно найти у Харди и Литлвуда [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abel N. H., Untersuhungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} x + m\frac{(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots$, *J. Reine Angew. Math.*, **1** (1826), 311—339.

[2] Appell P., Sur certaines sériés ordonnés par rapport aux puissances d'une variable, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **87** (1978), 689—692.

[3] Харди Г., Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.

[4] Hardy G. H., Littlewood J. E., Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, *Proc. London Math. Soc., Sec. Ser.*, **13** (1914), 174—192.

[5] Hardy G. H., Littlewood J. E., Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc., Sec. Ser.*, **30** (1929), 23—37.

[6] Karamata J., Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Z.*, **32** (1930), 319—320.

[7] Kronecker L., Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **103** (1886), 980—987.

[8] Littlewood J. E., The converse of Abel's theorem, *Proc. London Math. Soc., Sec. Ser.*, **9** (1911), 434—448.

[9] Tauber A., Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monat. Math. Phys.*, **8** (1897), 273—277.

7. АБЕЛЕВЫ И ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА — СТИЛЬТЬЕСА

Если функция $\alpha(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, имеет ограниченную вариацию в любом конечном интервале, то интеграл

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\alpha(x) = \alpha(0) + \int_{+0}^\infty e^{-sx}\, d\alpha(x) \tag{1}$$

называется ее преобразованием Лапласа — Стильтьеса.

Абелевы теоремы

1. *Если* $\varphi(s)$ *сходится при* $\operatorname{Re}(s)>0$ *и предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x^c}=\frac{A}{\Gamma(c+1)} \tag{2}$$

существует для некоторого $c\geqslant 0$, *то*

$$\lim_{s\to+0}s^c\varphi(x)=A. \tag{3}$$

За доказательством мы отсылаем к Уиддеру [6].

2. *Если* $\varphi(s)$ *сходится при* $\operatorname{Re}(s)>0$ *и*

$$\alpha(x)\sim\frac{Ax^c}{\Gamma(c+1)}L(x) \tag{4}$$

при $x\to\infty$, *где функция* $L(x)$ *такова, что* $\lim\limits_{x\to\infty}L(ax)/L(x)=1$ *для любого положительного числа* a, *то*

$$\varphi(s)\sim\frac{A}{s^c}L\left(\frac{1}{s}\right) \tag{5}$$

при $s\to+0$.

См. Харди и Литлвуд [3].

Тауберовы теоремы

1. *Если* $\alpha(x)$, $0\leqslant x<\infty$, — *неотрицательная неубывающая функция от* x, *а* $\varphi(s)$ *сходится при* $\operatorname{Re}(s)>0$ *и для некоторого* $c\geqslant 0$

$$\lim_{s\to+\infty}s^c\varphi(s)=A, \tag{6}$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x^c}=\frac{A}{\Gamma(c+1)}. \tag{7}$$

Доказательство см. Уиддер [6].

2. *Если* $\alpha(x)$, $0\leqslant x<\infty$, — *неотрицательная неубывающая функция от* x, *а* $\varphi(x)$ *сходится при* $\operatorname{Re}(s)>0$ *и*

$$\varphi(x)\sim\frac{A}{s^c}L\left(\frac{1}{s}\right) \tag{8}$$

при $s\to+0$, *где* $c\geqslant 0$ *и функция* $L(x)$ *такова, что*

$$\lim_{x\to\infty}L(ax)/L(x)=1$$

для любого положительного a, *то*

$$\alpha(x)\sim\frac{Ax^c}{\Gamma(c+1)}L(x) \tag{9}$$

при $x\to\infty$.

См. Харди [2].

3. *Если* $\alpha(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, — *неотрицательная неубывающая функция от* x, *а* $\varphi(s)$ *сходится при* $\operatorname{Re}(s) > 1$ *и существует такая константа* A, *что разность*

$$\varphi(s) - \frac{A}{s-1} \tag{10}$$

равномерно стремится к конечному пределу на любом конечном интервале прямой $\operatorname{Re}(s) = 1$ *при* $\operatorname{Re}(s) \to 1+0$, *то*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{e^x} = A. \tag{11}$$

Эту теорему доказал Икеара [4, 5]. См. также Н. И. Ахиезер [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, изд-во «Наука», М., 1965.
[2] Харди Г., Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.
[3] Hardy G. H., Littlewood J. E., Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc., Sec. Ser.*, **30** (1929), 23—37.
[4] Ikehara S., An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers, *J. Math. Phys. M. I. T.*, **10** (1930—31), 1—12.
[5] Ikehara S., On Tauberian theorems of Hardy and Littlewood and a note on Wintner's paper, *J. Math. Phys. M. I. T.*, **10** (1930—31), 75—83.
[6] Widder D. V., The Laplace transform, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1964.
[7] Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963.

8. ТЕОРЕМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — бесконечная последовательность случайных величин, принимающих вещественные значения. Пусть $F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x\}$ и $R_n = \{x\colon\ F_n(x+\varepsilon) - F_n(x-\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon > 0\}$. Положим $R = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} R_n$.

Теорема Хелли — Брея. *Пусть существует такая функция распределения* $F(x)$, *что* $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ *для любой точки* x, *в которой* $F(x)$ *непрерывна. Если функция* $g(x)$ *ограничена и непрерывна на* R, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x). \tag{1}$$

Доказательство см. Лоэв [4].

Если $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, то равенство (1) верно также и для несобственных функций $F(x)$.

Если $R_n \subset \{0, 1, \ldots\}$ и $g(x) = z^x$ при $|z| \leqslant 1$, то получается теорема непрерывности для производящих функций; при $|z| < 1$ равенство (1) верно также и для несобственных функций $F(x)$.

Если $R_n \subset [0, \infty)$ и $g(x) = e^{-sx}$, где $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$, то получается теорема непрерывности для преобразований Лапласа — Стильтьеса; при $\operatorname{Re}(s) > 0$ равенство (1) верно также и для несобственных функций $F(x)$.

Если $R_n \subset (-\infty, \infty)$ и $g(x) = e^{i\omega x}$, где $-\infty < \omega < \infty$, то получается теорема непрерывности для характеристических функций.

Сформулируем теоремы, обратные к теореме Хелли—Брея, отдельно для производящих функций, преобразований Лапласа — Стильтьеса и характеристических функций.

Производящие функции. Пусть случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, принимают только неотрицательные целые значения и

$$U_n(z) = \mathbf{E}\left\{z^{\xi_n}\right\} \tag{2}$$

при $|z| \leqslant 1$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z) = U(z)$ для $z \in D$, причем $z = 1$ является точкой накопления для множества D, и $\lim\limits_{z\to 1} U(z) = 1$, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = k\} = P_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, задает распределение вероятностей и

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = U(z) \tag{3}$$

для $|z| \leqslant 1$. Функция $U(z)$ однозначно определяется при $|z| \leqslant 1$ посредством аналитического продолжения и продолжения по непрерывности. (См. Феллер [2].)

Преобразования Лапласа—Стильтьеса. Пусть случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, принимают только неотрицательные значения и

$$\varphi_n(s) = \mathbf{E}\left\{e^{-s\xi_n}\right\} \tag{4}$$

при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \varphi(s)$ для $s \in D$, где $s = 0$ является точкой накопления для множества D, и $\lim\limits_{s\to 0} \varphi(s) = 1$, то существует такая функция распределения $F(x)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x\} = F(x)$ для любой точки x, в которой $F(x)$ непрерывна, и

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dF(x) = \varphi(s) \tag{5}$$

при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Функция $\varphi(s)$ однозначно определяется при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ посредством аналитического продолжения и продолжения по непрерывности. (См. Зигмунд [5] и Феллер [3].)

Характеристические функции. Пусть ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — вещественные случайные величины и

$$\varphi_n(\omega) = \mathbf{E}\left\{e^{i\omega\xi_n}\right\} \tag{6}$$

для вещественных ω. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(\omega) = \psi(\omega)$ для любого конечного ω и $\lim\limits_{\omega\to 0} \psi(\omega) = 1$, то существует такая функция распределения $F(x)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant x\} = F(x)$ для любой точки x, в которой $F(x)$ непрерывна, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, dF(x) = \psi(\omega). \tag{7}$$

(См. Крамер [1].)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, М., 1947.
[2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, изд-во «Мир», М., 1967.
[3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, изд-во «Мир», М., 1967.
[4] Лоэв М., Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
[5] Zygmund A., A remark on characteristic functions, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1951, 369—372.

9. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Теорема Адамара — Лиувилля. *Если функция $f(z)$ регулярна в конечной части комплексной плоскости и* $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)/z^k = 0$, *то $f(z)$ — полином степени k.*

См. Титчмарш [5].

Теорема Руше. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области (открытом связном множестве) D и $|g(z)| < |f(z)|$ на ее границе, то $f(z)$ и $f(z) \pm g(z)$ имеют в D одинаковое количество нулей.*

См. Титчмарш [5].

Разложение Лагранжа. *Пусть функция $g(z)$ регулярна в области D и $a \in D$. Если w таково, что на границе области D*

$$|wg(z)| < |z - a|, \tag{1}$$

то уравнение

$$\zeta = a + wg(\zeta), \tag{2}$$

рассматриваемое как уравнение относительно ζ, *имеет в* D *точно один корень. Если функция* $f(z)$ *регулярна в* D, *то*

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^{n-1}\{f'(a)\,[g(a)]^n\}}{da^{n-1}}. \tag{3}$$

См. Уиттекер и Ватсон [7].

Теорема Бюрмана. *Если первые* n *производных функции* $f(z)$ *и первые* $n-1$ *производных функции* $g(z)$ *существуют в точке* $z=0$ *и* $w = u/g(u)$, $g(0)\neq 0$, *то*

$$f(u) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{w^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}f'(a)\,[g(a)]^k}{da^{k-1}}\right)_{a=0} + o(w^n). \tag{4}$$

См. Уиттекер и Ватсон [7].

Формула Фаа ди Бруно. *Если* $z = f(y)$ *и* $y = g(x)$, *то* n-*я производная функции* $z = f(g(x))$ *по* x *в точке* $x=0$ *равна*

$$\left(\frac{d^n f(g(x))}{dx^n}\right)_{x=0} = \sum_{r=1}^{n} Y_{n,r} \left(\frac{d^r f(y)}{dy^r}\right)_{y=g(0)}, \tag{5}$$

где

$$Y_{n,r} = \sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_n=r\\ j_1+2j_2+\ldots+nj_n=n}} \frac{n!}{j_1!\,j_2!\ldots j_n!} \left(\frac{g^{(1)}(0)}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{g^{(2)}(0)}{2!}\right)^{j_2} \ldots \left(\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right)^{j_n}, \tag{6}$$

если только все рассматриваемые производные существуют.

См. Фаа ди Бруно [1] и Жордан [3, стр. 33].

В заключение отметим, что метод Винера—Хопфа решения интегрального уравнения

$$f(x) = \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} k(x-y)\,f(y)\,dy & \text{при} \quad x>0, \\ 0 & \text{при} \quad x\leqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

обсуждается в книге Титчмарша [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] di Bruno Faà, Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **1** (1857), 359—360.

[2] Hopf E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 31, Cambridge University Press, 1934.

[3] Jordan Ch., Calculus of finite differences, Budapest, 1939, Chelsea, New York, 1947.

[4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд-во «Наука», 1968.

[5] Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, М. — Л., 1951.

[6] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

[7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, Физматгиз, М., 1962.

[8] Wiener N., Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Klasse, Berlin*, **31** (1931), 696—706.

[9] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, изд-во «Наука», М., 1964.

РЕШЕНИЯ

Глава 1

1. Обозначим через $N(a, b)$ число благоприятных избирательных протоколов. Полное число всевозможных избирательных протоколов равно $\binom{a+b}{a}$. Таким образом, $P(a, b) = N(a+b)\Big/\binom{a+b}{a}$. Если $a \leqslant b\mu$, то очевидно, что $N(a, b) = 0$, а при $a > b\mu$

$$N(a, b) = N(a-1, b) + N(a, b-1). \tag{1}$$

Это уравнение отражает тот факт, что последний подсчитанный голос может быть подан либо за A, либо за B. Если исходить из равенства $N(a, 0) = 1$ для $a \geqslant 1$, то $N(a, b)$ можно получить последовательно с помощью (1). Общее решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $N(a, 0) = 1$ для $a \geqslant 1$, равно

$$N(a, b) = \sum_{j=0}^{b} C_j \binom{a+b-1-j}{b-j}, \tag{2}$$

где константы C_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, не зависят от a и b, причем $C_0 = 1$, а C_j, $j = 1, 2, \ldots$, определяются из условия

$$N([b\mu], b) = \sum_{j=0}^{b} C_j \binom{[b\mu]+b-1-j}{b-j} = 0 \tag{3}$$

для $b = 1, 2, \ldots$. Здесь $[b\mu]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $b\mu$. Отсюда

$$P(a, b) = \sum_{j=0}^{b} C_j \binom{a+b-1-j}{b-j}\Big/\binom{a+b}{a} = \frac{a}{a+b} \sum_{j=0}^{b} C_j \binom{b}{j}\binom{a+b-1}{j} \tag{4}$$

при $a > b\mu$ и $P(a, b) = 0$ при $a \leqslant b\mu$.

Если, в частности, μ — неотрицательное целое число, то из (3) получаем $C_j = -\mu$, $j = 1, 2, \ldots$, откуда в силу (4)

$$P(a, b) = \frac{a-b\mu}{a+b}$$

для $a \geqslant b\mu$, что согласуется с формулой (1) § 2.

2. Добавим еще один голос за A к имеющимся $a+b$ голосам. Тогда вероятность того, что при подсчете голосов A лидирует с преимуществом бо́льшим, чем $\mu:1$, равна

$$P(a+1, b) = \frac{a+1-\mu b}{a+1+b}.$$

С другой стороны,

$$P(a+1, b) = \frac{a+1}{a+1+b} Q(a, b).$$

Действительно, A все время лидирует с преимуществом бо́льшим, чем $\mu:1$, тогда и только тогда, когда первый голос подан за него и, если не считать этот голос, он ведет все время с преимуществом по крайней мере $\mu:1$. Сравнивая обе формулы для $P(a+1,\ b)$, получаем

$$Q(a,\ b)=\frac{a+1-\mu b}{a+1},$$

что согласуется с формулой (2) § 2.

3. Пусть частица совершает случайное блуждание по оси x. Отправляясь из начала координат, частица продвигается на единицу вправо, если зарегистрированный голос подан за A, и на единицу влево, если зарегистрированный голос подан за B. Для $a+b$ шагов возможны $\binom{a+b}{a}$ путей. Нам надо найти число путей, не проходящих через точку $x=-c$. Число путей, состоящих из a шагов в положительном направлении и b шагов в отрицательном направлении и проходящих через точку $x=-c$, равно $\binom{a+b}{a+c}$. Это следует из принципа отражения. Рассмотрим избирательный протокол, для которого соответствующий путь проходит через точку $x=-c$. После первого прохождения пути через точку $x=-c$ изменим последующие голоса на противоположные. Тогда мы получим избирательный протокол, состоящий из $b-c$ голосов за A и $a+c$ голосов за B. Обратно, каждому такому избирательному протоколу отвечает протокол, для которого соответствующий путь проходит через $x=-c$. Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами избирательных протоколов. Всего таких протоколов $\binom{a+b}{a+c}$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$Q_c(a,\ b)=\frac{\binom{a+b}{a}-\binom{a+b}{a+c}}{\binom{a+b}{a}}=1-\frac{\binom{b}{c}}{\binom{a+c}{c}}.$$

Если, в частности, $c=1$, то $Q_1(a,\ b)=(a+1-b)/(a+1)$, что согласуется с формулой (2) § 2, если положить там $\mu=1$.

4. Обозначим через S_0 множество всех избирательных протоколов, содержащих a голосов за A и b голосов за B. Их число равно

$$N(S_0)=\binom{a+b}{a}.$$

Вообще, через $N(S)$ обозначается число элементов множества S. Пусть S — множество всех избирательных протоколов, содержащих $a-kd$ голосов за A и $b+kd$ голосов за B, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Тогда

$$N(S)=\sum_k\binom{a+b}{a-kd}.$$

Обозначим через S^* множество всех избирательных протоколов, содержащих $b-c-kd$ голосов за A и $a+c+kd$ голосов за B, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Тогда

$$N(S^*)=\sum_k\binom{a+b}{a+c+kd}.$$

Множество всех избирательных протоколов, содержащих $a+b$ голосов, можно разделить на два непересекающиеся подмножества: подмножество C, содержащее те избирательные протоколы, для которых $c-d<\beta_r-\alpha_r<c$ при всех $r=1, 2, \ldots, a+b$, и подмножество $\overline{C}$, содержащее остальные избирательные протоколы. Искомая вероятность, очевидно, равна

$$P=\frac{N(S_0C)}{N(S_0)}=\frac{N(SC)}{N(S_0)}=\frac{N(S)-N(S\overline{C})}{N(S_0)}. \qquad (1)$$

Докажем теперь, что $N(S\overline{C})=N(S^*)$. Если избирательный протокол принадлежит множеству $S\overline{C}$, то существует наименьшее из чисел r ($r=1, 2, \ldots, a+b$), для которых либо $\beta_r-\alpha_r=c$, либо $\beta_r-\alpha_r=c-d$. Если это наименьшее число равно j, изменим $(j+1)$-й, $(j+2)$-й, $\ldots$, $(a+b)$-й голоса на противоположные. Новый избирательный протокол будет тогда принадлежать множеству S^*. Обратно, если избирательный протокол принадлежит S^*, то существует такое наименьшее r, что либо $\beta_r-\alpha_r=c$, либо $\beta_r-\alpha_r=c-d$. Если этот наименьший индекс равен j, изменим $(j+1)$-й, $(j+2)$-й, $\ldots$, $(a+b)$-й голоса на противоположные. Тогда новый избирательный протокол будет принадлежать множеству $S\overline{C}$. Мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $S\overline{C}$ и S^*. Следовательно, $N(S\overline{C})=N(S^*)$, и формула (1) дает

$$P=\frac{N(S)-N(S^*)}{N(S_0)}=\frac{1}{\binom{a+b}{a}}\sum_k\left[\binom{a+b}{a-ka}-\binom{a+b}{a+c+kd}\right]. \qquad (2)$$

5. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, \ldots, n$. Нам надо доказать, что

$$\mathbf{P}\{N_r<r \text{ для } r=1, \ldots, n\}=1-\frac{k}{n} \qquad (1)$$

при $k=0, 1, \ldots, n$. Для $n=1$ равенство (1) очевидно. Предположим, что оно верно для $n-1$. Докажем, что тогда оно верно и для n. Отсюда утверждение для $n\geqslant 1$ будет следовать по индукции. При $k=n$ соотношение (1) выполняется. При $k<n$ по предположению индукции

$$\mathbf{P}\{N_r<r \text{ для } r=1, \ldots, n-1 \mid N_{n-1}=j\}=1-\frac{j}{n-1} \qquad (2)$$

для $j=0, 1, \ldots, n-1$, где условная вероятность определена с точностью до эквивалентности. По теореме о полной вероятности

$$\mathbf{P}\{N_r<r \text{ для } r=1, \ldots, n\}=\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n-1}\right)\mathbf{P}\{N_{n-1}=j\}=$$

$$=1-\frac{1}{n-1}\mathbf{E}\{N_{n-1}\}=1-\frac{1}{(n-1)}\frac{(n-1)^k}{n}=1-\frac{k}{n}. \qquad (3)$$

Здесь мы использовали тот факт, что ν_i ($i=1, 2, \ldots, n$) имеют одинаковые математические ожидания. Так как $\nu_1+\ldots+\nu_n=k$, то $\mathbf{E}\{\nu_i\}=k/n$ для $i=1, 2, \ldots, n$.

6. Случай $\varphi(t)>t$ тривиален. Пусть $\varphi(t)\leqslant t$. Если $\psi(u)=\inf\{v-\varphi(v)$ для $v\geqslant u\}$, то $\psi(u)$ — непрерывная неубывающая функция от u и $\psi(t)-\psi(0)=t-\varphi(t)$. Так как $\varphi(u)$ в интервале $(0, t)$ имеет только конечное число скачков, этот интервал можно разделить на конечное число таких непересекающихся интервалов, что в них либо $\delta(u)=1$, либо $\delta(u)=0$. Если $\delta(u)=1$ в интервале (α, β), то $\psi(u)=u-\varphi(u)$ при $\alpha<u<\beta$. Тогда $\varphi(u)$ в (α, β) не имеет скачков, т. е. $\varphi(u)$

в (α, β) постоянна, и следовательно, $\psi(\beta)-\psi(\alpha)=\beta-\alpha$. Если $\delta(u)=0$ в интервале (α, β), то $\psi(\beta)-\psi(\alpha)=0$. Поэтому в интервале $(0, t)$ функция $\delta(u)$ равна 1 на множестве меры $\psi(t)-\psi(0)=t-\varphi(t)$.

7. (a) Можно поставить задачу иначе: если при баллотировке оба кандидата A и B набирают по n голосов, то чему равна вероятность того, что при подсчете число голосов, поданных за A, все время не меньше числа голосов, поданных за B? Если в формуле (2) § 2 положить $a=n$, $b=n$ и $\mu=1$, то получим искомую вероятность $Q=1/(n+1)$.

(b) Вероятность того, что среди перешедших через мост людей число мужчин всегда не превосходит числа женщин, равна $1/(n+1)$, а вероятность того, что ни один мужчина не перейдет через мост раньше своей жены, равна $1/2^n$. Таким образом, искомая условная вероятность равна $(n+1)/2^n$.

(c) Обозначим через α_r и β_r число соответственно проигранных и выигранных игр среди первых r игр. Тогда $\alpha_1+\ldots+\alpha_{3n+2}=n+1$ и $\beta_1+\ldots+\beta_{3n+2}=2n+1$, а искомая вероятность равна $P=\mathbf{P}\{0\leqslant\beta_r-\alpha_r\leqslant n$ для $r=1, 2, \ldots, 3n+2\}$. Применяя формулу (2) задачи 4 при $a=n+1$, $b=2n+1$, $c=n+1$, $d=n+2$, получаем

$$P=\frac{1}{\binom{3n+2}{n+1}}\left[\binom{3n+2}{n+1}+\binom{3n+2}{2n+3}-\binom{3n+2}{2n+3}-\binom{3n+2}{n}\right]=\frac{n}{4n+6}.$$

8. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\alpha_1^{(r)}\geqslant\alpha_2^{(r)}\geqslant\ldots\geqslant a_n^{(r)} \text{ для } r=1, 2, \ldots, a_1+\ldots+a_n\right\}=$$
$$=\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}\left(\frac{a_j-a_i+i-j}{a_j+i-j}\right).$$

Глава 2

1. Определим случайные величины ν_r, $r=1, 2, \ldots, a+b$, следующим образом: $\nu_r=0$, если r-й голос подан за A, и $\nu_r=\mu+1$, если r-й голос подан за B. Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{a+b}$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, а $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{a+b}=b(\mu+1)$. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$, $r=1, 2, \ldots, a+b$. Так как $N_r=\beta_r(\mu+1)$ и $r=\alpha_r+\beta_r$, то $\mu\beta_r<\alpha_r+c$ тогда и только тогда, когда $N_r<r+c$. В силу (1) § 6

$$P=\mathbf{P}\{N_r<r+c \text{ для } r=1, \ldots, a+b\}=$$
$$=1-\sum_{j=1}^{b(\mu+1)-c}\left(\frac{a+c-b\mu}{a+b-j}\right)\mathbf{P}\{N_j=j+c\}$$

и очевидно, что

$$\mathbf{P}\{N_j=s(\mu+1)\}=\binom{a}{j-s}\binom{b}{s}\Big/\binom{a+b}{j}$$

при $s=0, 1, \ldots, \min(b, j)$. Таким образом,

$$P=1-\frac{(a+c-b\mu)}{(a+b)}\sum_{(c+1)/(\mu+1)\leqslant s\leqslant b}\binom{a}{s\mu-c}\binom{b}{s}\Big/\binom{a+b-1}{s\mu+s-c}.$$

2. Определим ν_r $(r=1, 2, \ldots)$ как сумму единицы и выигрыша игрока A в r-й игре. Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины и $\mathbf{P}\{\nu_r=0\}=q$ и $\mathbf{P}\{\nu_r=2\}=p$. По теореме 2 § 7 $P_A=Q_b/Q_{a+b}$, где $Q_0=qQ_1$ и

$$Q_k=qQ_{k+1}+pQ_{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Решение этого рекуррентного уравнения имеет вид

$$Q_k=\begin{cases}\dfrac{Q_0}{q}\left(\dfrac{1-(p/q)^k}{1-p/q}\right), & \text{если}\quad p\neq q \text{ и } k\geqslant 1,\\ 2Q_0k, & \text{если}\quad p=q \text{ и } k\geqslant 1.\end{cases}$$

3. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$, $r=1,\ 2,\ \ldots$, где последовательность $\{\nu_r\}$ определяется в задаче 2. В силу (16) § 8

$$\mathbf{P}\{\rho(a)=n\}=\frac{a}{n}\mathbf{P}\{N_n=n-a\}=\frac{a}{n}\binom{n}{1/2\,(n-a)}p^{(n-a)/2}q^{(n+a)/2}$$

при $n=a,\ a+2,\ a+4,\ \ldots$. Если $p\leqslant q$, то $\mathbf{P}\{\rho(a)<\infty\}=1$. Далее, $\mathbf{E}\{\rho(a)\}=a/(1-2p)$ для $p<q$ и $\mathbf{E}\{\rho(a)\}=\infty$ для $p=q$. Если $p>q$, то $\mathbf{P}\{\rho(a)=\infty\}=(q/p)^a$.

4. Определим ν_r $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ как сумму единицы и выигрыша игрока A в r-й игре. Тогда $\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_r,\ \ldots$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины и $\mathbf{P}\{\nu_r=j\}=pq^j$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. По теореме 2 § 7 $P_A=Q_b/Q_{a+b}$, а в силу (8) § 7

$$\sum_{k=0}^{\infty}Q_kz^k=\frac{Q_0p}{(1-z)(p-qz)},$$

откуда

$$Q_k=Q_0\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{q}{p}\right)^j=\begin{cases}Q_0\left(\dfrac{1-(q/p)^{k+1}}{1-q/p}\right), & \text{если}\quad p\neq q,\\ Q_0(k+1), & \text{если}\quad p=q.\end{cases}$$

5. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$, $r=1,\ 2,\ \ldots$, где последовательность $\{\nu_r\}$ определяется в задаче 4. В силу (16) § 8

$$\mathbf{P}\{\rho(a)=n\}=\frac{a}{n}\mathbf{P}\{N_n=n-a\}=\frac{a}{n}\binom{2n-a-1}{n-a}p^nq^{n-a}$$

при $n=a,\ a+1,\ \ldots$. Если $q\leqslant p$, то $\mathbf{P}\{\rho(a)<\infty\}=1$. Кроме того, $\mathbf{E}\{\rho(a)\}=ap/(2p-1)$ при $q<p$ и $\mathbf{E}\{\rho(a)\}=\infty$ при $q=p$. Если $q>p$, то $\mathbf{P}\{\rho(a)=\infty\}=(p/q)^a$.

6. Здесь $\gamma=\mathbf{E}\{\nu_r\}=2p$. Если $2p<1$, то по теореме 3 § 6

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\}=1-(1-2p)\sum_{r\geqq\max(0,\ (k+1)/2)}\binom{2r-k}{r}p^rq^{r-k}$$

для всех k и по теореме 4 § 6

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\}=1-\left(\frac{p}{q}\right)^k,$$

если $k\geqslant 1$ и $\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<0\}=1-2p$. Если $2p\geqslant 1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)=\infty\}=1,$$

В силу (6) § 8

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\}=1-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k}{k+2r}\binom{k+2r}{r}p^r q^{k+r}$$

при $k>0$, а в силу (7) § 8 при $k>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\}=1-\delta^k,$$

где $\delta=q/p$, если $2p>1$, и $\delta=1$, если $2p\leqslant 1$.

7. Здесь случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ могут быть представлены так же, как и в примере 4 § 10 при $h=2$. Будем употреблять те же обозначения, что и в § 10. Используя результаты задачи 6, получаем

$$\mathbf{P}=\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\mid\theta=x\}=\begin{cases}1-\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^k, & \text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 0, & \text{если}\quad 1/2\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

при $k=1, 2, \ldots$ и

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<0)\mid\theta=x\}=\begin{cases}1-2x, & \text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 0, & \text{если}\quad 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Распределение величины θ определяется по формуле (15) § 10:

$$\mathbf{P}\{\theta\leqslant x\}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy$$

при $0\leqslant x\leqslant 1$, где $\alpha=a/c$ и $\beta=b/c$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<k\}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{1/2}[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}-x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-k-1}]\,dx$$

при $k=1, 2, \ldots$ и

$$\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(N_r-r)<0\}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{1/2}[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}-x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}]\,dx.$$

Из результатов задачи 6 следует также, что

$$\mathbf{P}\left\{\operatorname{sur}_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\mid\theta=x\right\}=\begin{cases}1-\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^k, & \text{если}\ {}^1/_2\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если}\ 0\leqslant x\leqslant {}^1/_2,\end{cases}$$

при $k=1, 2, \ldots$. Соответствующая безусловная вероятность равна

$$\mathbf{P}\left\{\operatorname{sur}_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{1/2}^{1}[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}-x^{\alpha-k-1}(1-x)^{\beta+k-1}]\,dx$$

при $k=1, 2, \ldots$. С учетом формулы (21) § 10 имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant r<\infty}(r-N_r)<k\right\}=$$

$$=1-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2r)}\binom{\alpha+r-1}{r}\binom{\beta+k+r-1}{k+r}\Big/\binom{\alpha+\beta+k+2r-1}{k+2r}$$

при $k=1, 2, \ldots$.

8. В силу (26) § 6 при $a<1$

$$\sum_{j=-k}^{\infty}e^{-aj}\frac{(aj)^{j+k}}{(j+k)!}=\frac{1}{1-a},$$

если $k<0$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}e^{-aj}\frac{(aj)^{j}}{j!}=\frac{a}{1-a}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty}e^{-aj}\frac{(aj)^{j+k}}{(j+k)!}=\frac{1-Q_k}{1-a},$$

если $k\geqslant 0$, где, согласно формуле (12) § 10,

$$Q_k=(1-a)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j e^{a(k-j)}\frac{[a(k-j)]^j}{j!}.$$

В силу (21) § 8

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{k}{j}e^{-aj}\frac{(aj)^{j-k}}{(j-k)!}=\delta^k$$

для $k=1, 2, \ldots$, где $\delta=1$ при $a\leqslant 1$, а если $a>1$, то δ — единственный корень уравнения $e^{-a(1-\delta)}=\delta$ в интервале $(0, 1)$.

9 Пусть $n-1$ точка распределены независимо и равномерно на интервале $(0, 1)$. Обозначим через ν_r число точек в интервале $((r-1)/n, r/n)$. Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\mathbf{P}\{N_r=j\}=\binom{n-1}{j}\left(\frac{r}{n}\right)^j\left(1-\frac{r}{n}\right)^{n-1-j}$$

при $r=1, 2, \ldots, n-1$ и $\mathbf{P}\{N_n=n-1\}=1$. Если в формуле (1) § 8 $k=1$, то

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\mathbf{P}\{N_j=j-1\}=1,$$

что и требовалось доказать.

10. Здесь $\varphi(s)=\mathbf{E}\{e^{-s\xi_r}\}=\lambda e^{-\alpha s}/(\lambda-s)$ для $\operatorname{Re}(s)>-\lambda$. Если $0\leqslant w<1$, то

$$1-w\varphi(s)=\frac{\lambda-s-\lambda we^{-\alpha s}}{\lambda-s}=\frac{\Phi^+(s, w)}{\Phi^-(s, w)}$$

для $\mathrm{Re}(s) > -\lambda$, где $\Phi^+(s, w) = (\lambda - s - \lambda w e^{-\alpha s})/(s - \delta(w))$ и $\Phi^-(s, w) = (\lambda - s)/(s - \delta(w))$. Величина $s = \delta(w)$ является единственным корнем уравнения

$$\lambda w e^{-\alpha s} = \lambda - s \tag{1}$$

в области $\mathrm{Re}(s) > 0$. Если $|\lambda - s| \geqslant \lambda$ и $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$, то $|\lambda w e^{-\alpha s}| < \lambda$ и (1) не может иметь корня в этой области. Если $|\lambda - s| = \lambda$, то $|\lambda w e^{-\alpha s}| < \lambda$ и в силу теоремы Руше уравнение (1) имеет в области $|\lambda - s| < \lambda$ столько же корней, что и уравнение $\lambda - s = 0$. Следовательно, (1) имеет ровно один корень $s = \delta(w)$ в области $|\lambda - s| < \lambda$.

Далее, $\Phi^+(s, w)$ — регулярная функция от s, не имеющая нулей в области $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$, а $\Phi^-(s, w)$ — регулярная функция от s, не имеющая нулей в области $\mathrm{Re}(s) \leqslant 0$.

Положим $\Phi_n(s) = \mathbf{E}\{e^{-s\eta_n}\}$ при $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$. По формуле (20) § 11

$$(1 - w)\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(s)\, w^n = \frac{\Phi^+(0, w)}{\Phi^+(s, w)} = \left(1 - \frac{s}{\delta(w)}\right)\frac{\lambda(1 - w)}{\lambda - s - \lambda w e^{-\alpha s}}.$$

Используя разложение Лагранжа, получаем

$$\frac{1}{\delta(w)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\alpha n} w^n}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)(\lambda\alpha n)^{n-1-j}}{(n-1-j)!}$$

при $|w| < 1$. Отсюда легко найти $\Phi_n(s)$, $n = 1, 2, \ldots$. С помощью формулы обращения теперь можно вычислить в явном виде вероятности $\mathbf{P}\{\eta_n \leqslant x\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Глава 3

1. Имеем

$$\mathbf{P}\{\chi(u) = j\} = e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^j}{j!}$$

при $u \geqslant 0$ и $j = 0, 1, 2, \ldots$. По теореме 1 § 15

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t} [\chi(u) - u] \leqslant x\right\} = \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t + x\} -$$

$$- \sum_{x<j\leqslant k\leqslant t+x}\sum \left(\frac{t + x - k}{t + x - j}\right)\mathbf{P}\{\chi(j - x) = j\}\,\mathbf{P}\{\chi(t + x - j) = k - j\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t + x\} - \sum_{x<j\leqslant t+x} \mathbf{P}\{\chi(j - x) = j\}\,[\mathbf{P}\{\chi(t + x - j) \leqslant t + x - j\} -$$

$$- \lambda\mathbf{P}\{\chi(t + x - j) \leqslant t + x - j - 1\}]$$

для всех x.

Здесь мы воспользовались равенством

$$j\mathbf{P}\{\chi(u) = j\} = \lambda u\mathbf{P}\{\chi(u) = j - 1\}$$

для $j = 1, 2, \ldots$ и $u \geqslant 0$.

Если, в частности, $x = 0$, то в силу (3) § 15

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t} [\chi(u) - u] \leqslant 0\right\} = \sum_{0\leqslant j\leqslant t} \left(1 - \frac{j}{t}\right)\mathbf{P}\{\chi(t) = j\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t\} - \lambda\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t - 1\},$$

а по теореме 1 § 17

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[u-\chi(u)]\leqslant x\right\}=1-\sum_{0\leqslant j\leqslant t}\frac{x}{x+j}\mathbf{P}\{\chi(x+j)=j\}.$$

2. В данном случае $\mathbf{E}\{\chi(u)\}=\lambda u$ при $u\geqslant 0$, т. е. $\rho=\lambda$. По теореме 1 § 14

$$\mathbf{P}(\chi(u)\leqslant u \text{ для } 0\leqslant u<\infty\}=\begin{cases}1-\lambda, & \text{если } \lambda\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } \lambda\geqslant 1.\end{cases}$$

3. Если $x>0$, то $\mathbf{E}\{\chi(u)/x\}=\lambda\alpha u/x$ при $u\geqslant 0$. Процесс $\{\chi(u)/x, 0\leqslant u<\infty\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 § 14, причем $\rho=\lambda\alpha/x$. Поэтому при $x>0$

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant xu \text{ для } 0\leqslant u<\infty\}=\begin{cases}1-\lambda\alpha/x, & \text{если } \lambda\alpha\leqslant x,\\ 0, & \text{если } \lambda\alpha>x.\end{cases}$$

4. Если $\lambda<1$, то по формуле (37) § 15

$$\sum_{j>x}\mathbf{P}\{\chi(j-x)=j\}=\sum_{j>\max(0,x)}e^{-\lambda(j-x)}\frac{[\lambda(j-x)]^j}{j!}=\frac{1-W(x)}{1-\lambda},$$

где $W(x)=0$ при $x<0$, $W(0)=1-\lambda$, а по формуле (20) § 19

$$W(x)=(1-\lambda)\sum_{j=0}^{[x]}(-1)^j e^{\lambda(x-j)}\frac{[\lambda(x-j)]^j}{j!}$$

для $x>0$.

В силу (20) § 17 для $x>0$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x}{x+j}\mathbf{P}\{\chi(x+j)=j\}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x}{x+j}e^{-\lambda(x+j)}\frac{[\lambda(x+j)]^j}{j!}=e^{-\omega x},$$

где $\omega=0$ при $\lambda\leqslant 1$, а если $\lambda>1$, то ω — единственный положительный вещественный корень уравнения $\omega=\lambda\left(1-e^{-\omega}\right)$.

5. Если $\lambda\alpha<1$, то в силу задачи 4 $F_{\lambda\alpha}(x/\alpha)=1/(1-\lambda\alpha)$ для $x>0$. Если $\lambda\alpha>1$, то существует такое λ^*, что $\lambda^*\alpha<1$ и $e^{-\lambda\alpha}\lambda\alpha=e^{-\lambda^*\alpha}\lambda^*\alpha$. Так как

$$e^{-\lambda\alpha x}F_{\lambda\alpha}(x/\alpha)=e^{-\lambda^*\alpha x}F_{\lambda^*\alpha}(x/\alpha)$$

и $F_{\lambda^*\alpha}(x/\alpha)=1/(1-\lambda^*\alpha)$ для $x>0$, то

$$F_{\lambda\alpha}(x/\alpha)=\frac{e^{(\lambda-\lambda^*)\alpha x}}{1-\lambda^*\alpha}$$

для $x>0$ и $\lambda\alpha>1$.

Эти два случая можно объединить в одну формулу:

$$F_{\lambda\alpha}(x/\alpha)=\frac{e^{\omega\alpha x}}{1-(\lambda-\omega)\alpha}$$

для $x>0$, где ω — наименьший неотрицательный вещественный корень уравнения $\lambda\left(1-e^{-\alpha\omega}\right)=\omega$. Если $\lambda\alpha<1$, то $\omega=0$, а если $\lambda\alpha>1$, то $\omega>0$. Если $\lambda\alpha=1$, то $F_{\lambda\alpha}(x/\alpha)=\infty$ при $x>0$.

6. Сначала докажем тождество Абеля для $x>0$ и $t>x+n$. Пусть n случайных точек распределены независимо и равномерно на интервале $(0, t)$. Обозначим через $\chi(u)$, $0\leqslant u\leqslant t$, число точек в интервале $(0, u)$. Тогда $\{\chi(u), 0\leqslant u\leqslant t\}$ — случайный процесс с неотрицательными переставляемыми приращениями и

$$\mathbf{P}\{\chi(u)=k\}=\binom{n}{k}\left(\frac{u}{t}\right)^k\left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k},$$

если $k=0, 1, 2, \ldots, n$ и $0\leqslant u\leqslant t$, причем $\mathbf{P}\{\chi(t)=n\}=1$. Если $0<x<t-n$, то в силу (1) § 17

$$\sum_{x\leqslant y\leqslant t}\frac{x}{y}\mathbf{P}\{\chi(y)=y-x\}=1,$$

или

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant t-x}\frac{x}{x+k}\mathbf{P}\{\chi(x+k)=k\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{x+k}\binom{n}{k}\left(\frac{x+k}{t}\right)^k\left(1-\frac{x+k}{t}\right)^{n-k}=1,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}(x+k)^{k-1}(t-x-k)^{n-k}=t^n$$

при $0<x<t-n$. Если t фиксировано, то левая часть этого уравнения является полиномом от x; при $0<x<t-n$ она постоянна. Следовательно, она постоянна для любого x (вещественного или комплексного). Аналогично при фиксированном x левая часть является полиномом от t и равна t^n при $t>n+x$. Следовательно, она равна t^n для всех t (вещественных или комплексных). Иначе говоря, приведенное выше тождество выполняется для всех x и t.

7. Пусть $0<x<t-n$ и $\{\nu(u), 0\leqslant u<\infty\}$ — пуассоновский процесс с единичной интенсивностью. Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu(u)=k\}=e^{-u}\frac{u^k}{k!}$$

при $k=0, 1, 2, \ldots$ и $u>0$. Тождество, которое требуется доказать, можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\{\nu(x+k)=k\}\mathbf{P}\{\nu(t-x-k)=n-k\}=\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant n\}.$$

Если $0<x<t-n$, то по формуле (2) § 15

$$\mathbf{P}\{\nu(u)\leqslant u-x \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } \nu(t)\leqslant n\}=\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant n\}-$$
$$-\sum_{0<k\leqslant l\leqslant n}\sum\left(1-\frac{l-k}{t-k}\right)\mathbf{P}\{\nu(x+k)=k\}\mathbf{P}\{\nu(t-x-k)=l-k\}.$$

Здесь левая часть, очевидно, равна нулю и, так как

$$\mathbf{P}\{\nu(t-x-k)=l-k\}=\frac{(t-k)}{(l-k)}\mathbf{P}\{\nu(t-x-k)=l-k-1\}$$

для всех $l=k+1, k+2, \ldots$, то

$$\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant n\}=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\{\nu(x+k)=k\}[\mathbf{P}\{\nu(t-x-k)\leqslant n-k\}-$$
$$-\mathbf{P}\{\nu(t-x-k)\leqslant n-k-1\}]$$

что и требовалось доказать. Так как левая часть доказываемого тождества является полиномом от x и t, то оно справедливо для всех x и t.

8. В данном случае

$$\mathbf{P}\{\nu(u)=j\}=e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^j}{j!}$$

при $j=0, 1, 2, \ldots$ и $u\geqslant 0$. По теореме 1 § 15

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\nu(u)-cu]\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant ct+x\}-$$

$$-\sum_{x<j\leqslant k\leqslant ct+x}\sum\left(\frac{ct+x-k}{ct+x-j}\right)\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j-x}{c}\right)=j\right\}\mathbf{P}\left\{\nu\left(t-\frac{j-x}{c}\right)=k-j\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant ct+x\}-\sum_{x<j\leqslant ct+x}\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j-x}{c}\right)=j\right\}\left[\mathbf{P}\left\{\nu\left(t-\frac{j-x}{c}\right)\leqslant ct+x-j\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{c}\mathbf{P}\left\{\nu\left(t-\frac{j-x}{c}\right)\leqslant ct+x-j-1\right\}\right]$$

для всех x, а в силу формулы (3) § 15

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\nu(u)-cu]\leqslant 0\}=$$

$$=\sum_{0\leqslant j\leqslant ct}\left(1-\frac{j}{ct}\right)\mathbf{P}\{\nu(t)=j\}=\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant ct\}-\frac{\lambda}{c}\mathbf{P}\{\nu(t)\leqslant ct-1\}.$$

Согласно теореме 3 § 15, при $\lambda<c$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\nu(u)-cu]\leqslant x\}=1-\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)\sum_{j>x}\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{j-x}{c}\right)=j\right\}$$

и $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[\nu(u)-cu]\leqslant x\}=0$ при $\lambda\geqslant c$.

По теореме 1 § 17

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[cu-\nu(u)]\leqslant x\}=1-\sum_{0\leqslant j\leqslant ct-x}\frac{cx}{x+j}\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{x+j}{c}\right)=j\right\}$$

для всех $x>0$, а в силу формулы (6) § 17

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty}[cu-\nu(u)]\leqslant x\}=1-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{cx}{x+j}\mathbf{P}\left\{\nu\left(\frac{x+j}{c}\right)=j\right\}$$

для всех $x>0$; при $\lambda\leqslant c$ правая часть равна 0.

9. Если $t<n\alpha$, то $P_n(t)=0$. Предположим, что $t\geqslant n\alpha$. Обозначим через $\nu(u)$, $0\leqslant u\leqslant t$, число столкновений электрона с молекулами газа в интервале $(0, u)$. Тогда $\{\nu(u), 0\leqslant u\leqslant t\}$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ и

$$\mathbf{P}\{\nu(u)=j\}=e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^j}{j!}$$

при $j=0, 1, 2, \ldots$ и $u\geqslant 0$. Положим $\chi(u)=\alpha\nu(u)$ для $0\leqslant u\leqslant t$. Вероятность того, что в интервале времени $(0, t)$ электрон имеет ровно $n+k$ столкновений с молекулами газа и по крайней мере n из них приводят к ионизации, равна

$$\mathbf{P}\{\chi(u)\leqslant u+k\alpha \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } \chi(t)=(n+k)\alpha\}$$

при $t \geqslant n\alpha$. По теореме 1 § 15 эта вероятность равна

$$\mathbf{P}\{\chi(t) = (n+k)\alpha\} - \sum_{0<y\leqslant n\alpha} \left(\frac{t-n\alpha}{t-y}\right) \mathbf{P}\{\chi(y) = y + k\alpha,\ \chi(t) = (n+k)\alpha\}$$

и $\mathbf{P}\{\chi(y) = y + k\alpha\} = 0$, кроме тех случаев, когда $y = j\alpha$ и $j \geqslant -k$. Таким образом, она принимает вид

$$\mathbf{P}\{\nu(t) = n+k\} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{t-n\alpha}{t-j\alpha}\right) \mathbf{P}\{\nu(j\alpha) = j+k,\ \nu(t) = n+k\}.$$

Просуммировав эти вероятности для $k = 0, 1, 2, \ldots$, получим

$$P_n(t) = \mathbf{P}\{\nu(t) \geqslant n\} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{t-n\alpha}{t-j\alpha}\right) \mathbf{P}\{\nu(j\alpha) \geqslant j\}\, \mathbf{P}\{\nu(t-j\alpha) = n-j\}$$

при $t \geqslant n\alpha$.

10. Пусть первое событие пуассоновского процесса происходит в момент $y\ (0<y<\infty)$, а величина первого скачка равна $z\ (0<z<\infty)$. Тогда

$$W(x) = \int_0^\infty \int_0^{x+y} W(x+y-z)\, e^{-\lambda y} \lambda\, dy\, dH(z).$$

Положим

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x)$$

и

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x)$$

при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ и обозначим через a математическое ожидание функции $H(x)$.

Если в написанном выше интегральном уравнении перейдем к преобразованию Лапласа, то получим

$$\Omega(s) = \lambda s \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u+z} e^{-su-sz-\lambda y+sy}\, W(u)\, du\, dH(z)\, dy.$$

При $s \neq \lambda$

$$\Omega(s) = \frac{\lambda s}{\lambda - s} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[e^{-s(u+z)} - e^{-\lambda(u+z)}\right] W(u)\, du\, dH(z) =$$

$$= \frac{\lambda s}{\lambda - s} \left[\frac{\Omega(s)}{s}\psi(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda}\psi(s)\right],$$

откуда

$$\Omega(s) = \frac{s\Omega(\lambda)\,\psi(\lambda)}{s - \lambda[1 - \psi(s)]}$$

для $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Если $\lambda a < 1$, то, согласно сильному закону больших чисел, $\lim\limits_{x\to\infty} W(x) = 1$, или $\lim\limits_{s\to+0} \Omega(s) = 1$. Это дает $\Omega(\lambda)\,\psi(\lambda) = 1 - \lambda a$, и потому

$$\Omega(s) = \frac{1 - \lambda a}{1 - \lambda \dfrac{[1 - \psi(s)]}{s}}$$

при $\mathrm{Re}(s) > 0$. Если $\lambda a \geqslant 1$, то $W(x) = 0$ для всех x. С помощью формулы обращения можно получить $W(x)$ в явном виде. См. формулы (13), (14) и (17) § 19.

Замечание. Так как вероятность того, что в нашем пуассоновском процессе в интервале времени $(0, u)$ произойдет точно одно событие, равна $\lambda u + o(u)$, а вероятность того, что в интервале $(0, u)$ произойдет более одного события, равна $o(u)$, то

$$W(x) = (1 - \lambda u)\,W(x + u) + \lambda u \int\limits_0^{x+u} W(x + u - y)\,dH(y) + o(u).$$

Предельный переход $u \to 0$ дает

$$W'(x) = \lambda W(x) - \lambda \int\limits_0^{x} W(x - y)\,dH(y)$$

для $x > 0$. Беря преобразование Лапласа от обеих частей этого уравнения, получаем

$$s[\Omega(s) - W(0)] = \lambda\Omega(s) - \lambda\Omega(s)\,\psi(s)$$

при $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$, откуда

$$\Omega(s) = \frac{sW(0)}{s - \lambda[1 - \psi(s)]}$$

при $\mathrm{Re}(s) > 0$. Если $\lambda a < 1$, то $\lim\limits_{s\to+0} \Omega(s) = 1$, а потому $W(0) = 1 - \lambda a$. Если $\lambda a \geqslant 1$, то $\Omega(s) \equiv 0$.

Глава 4

1. Моменты поступления требований образуют здесь пауссоновский процесс с интенсивностью λ. Моменты окончания обслуживания можно охарактеризовать следующим способом. Рассмотрим пуассоновский процесс с интенсивностью μ, независимый от процесса поступления. Окончание обслуживания наступает только тогда, когда происходит событие в пуассоновском процессе с интенсивностью μ и в этот момент в системе есть по крайней мере одно требование. В соответствии с этим длину очереди $\zeta(t)$ в момент t можно выразить следующим образом. Пусть $\{\nu_1(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ и $\{\nu_2(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — независимые пуассоновские процессы с интенсивностями λ и μ соответственно. Положим $\xi(u) = \nu_1(u) - \nu_2(u)$ для $u \geqslant 0$. Тогда

$$\zeta(t) = \sup\{\zeta(0) + \xi(t) \text{ и } \xi(t) - \xi(u) \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}.$$

Процесс $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ является процессом случайного блуждания, рассмотренным в § 22. По формуле (3) § 22

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k/2} I_k\left(2\lambda^{1/2}\mu^{1/2}t\right)$$

при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Заменив $\xi(t) - \xi(u)$ в формуле для $\zeta(t)$ на $\xi(t-u)$ при $0 \leqslant u \leqslant t$, получим новую случайную величину

$$\tilde{\zeta}(t) = \sup\{\zeta(0) + \xi(t) \text{ и } \xi(u) \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}.$$

Она имеет то же распределение, что и величина $\zeta(t)$. Таким образом,

$$P_{ik}(t) = \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) \leqslant k \text{ и } \xi(t) \leqslant k - i\}.$$

В силу (13) § 22

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) \leqslant k \text{ и } \xi(t) = j\} = \mathbf{P}\{\xi(t) = j\} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \mathbf{P}\{\xi(t) = j - 2k - 2\}$$

при $j \leqslant k$. Суммирование этих вероятностей для $j \leqslant k - i$ дает

$$P_{ik}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant k - i\} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant -k - i - 2\}.$$

Если $\lambda < \mu$, то

$$\lim_{t \to \infty} P_{ik}(t) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}.$$

2. Если процесс $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ определен так же, как в задаче 1, то $\theta(i)$ можно интерпретировать как момент, когда впервые $\xi(u) = -i$. В силу 14 § 22

$$\mathbf{P}\{\theta(i) \leqslant t\} = 1 - \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi^*(u) < i\},$$

где $\xi^*(u) = -\xi(u)$ при $u \geqslant 0$. Отсюда по формуле (9) § 22

$$\mathbf{P}\{\theta(i) \leqslant t\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant -i\} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i} \mathbf{P}\{\xi(t) > i\}.$$

3. Предположим сначала, что $\{\xi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — процесс случайного блуждания, рассмотренный в § 22, и найдем вероятность $\mathbf{P}\{-b < \xi(u) < a \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}$. Пусть

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\sigma\lambda^{1/2}}, \quad q = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\sigma\lambda^{1/2}},$$

где $a = [x\lambda^{1/2}/\sigma]$, $b = [y\lambda^{1/2}/\sigma]$. Устремив λ к ∞, найдем $\mathbf{P}\{-y \leqslant \zeta(u) \leqslant x \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t\}$.

Решение задачи 4 гл. 1 дает

$$\mathbf{P}\{-b < \xi(u) < a \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ и } \xi(t) = j \mid \nu(t) = n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{-b < N_r - r < a \text{ для } r = 0, 1, \ldots, n \text{ и } N_n - n = j\} =$$
$$= \left[\sum_k \binom{n}{1/2(n-j) - k(a+b)} - \sum_k \binom{n}{1/2(n-j) + a + k(a+b)}\right] p^{(n+j)/2} q^{(n-j)/2},$$

если $-b < j < a$. Действительно, процесс $\{N_r - r, r = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ задает путь случайного блуждания за первые n шагов. Если $N_n - n = j$, то каждый путь имеет вероятность $p^{(n+j)/2} q^{(n-j)/2}$, а число благоприятных путей можно найти из решения задачи 4 гл. 1 положив там $a=(n-j)/2$, $b=(n+j)/2$, $c=a$ и $d=a+b$. Тогда

$$\mathbf{P}\{-b<\xi(u)<a \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t \text{ и } \xi(t)=j\}=$$
$$=\sum_k\left(\frac{p}{q}\right)^{-k(a+b)}\mathbf{P}\{\xi(t)=j+2(a+b)k\}-$$
$$-\sum_k\left(\frac{p}{q}\right)^{k(a+b)+a}\mathbf{P}\{\xi(t)=j-2a-2k(a+b)\}.$$

Просуммировав эти вероятности для $-b<j<a$, получим

$$\mathbf{P}\{-b<\xi(u)<a \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t\}=$$
$$=\sum_k\left(\frac{p}{q}\right)^{-k(a+b)}\mathbf{P}\{2(a+b)k-b<\xi(t)<2(a+b)k+a\}-$$
$$-\sum_k\left(\frac{p}{q}\right)^{k(a+b)+a}\mathbf{P}\{-2(a+b)(k+1)+b<\xi(t)<-2(a+b)k-a\}.$$

Переход к пределу с учетом того, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{\sqrt{\lambda}}=e^{2\alpha/\sigma}$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{y\sqrt{\lambda}}{\sigma}<\xi(t)<\frac{x\sqrt{\lambda}}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{y-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du,$$

дает

$$\mathbf{P}\{-y\leqslant\zeta(u)\leqslant x \text{ для } 0\leqslant u\leqslant t\}=$$
$$=\sum_k\exp\left(\frac{-2k\alpha(x+y)}{\sigma^2}\right)\left[\Phi\left(\frac{2k(x+y)+x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{2k(x+y)-y-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right]-$$
$$-\sum_k\exp\left[\frac{2k\alpha(x+y)+2\alpha x}{\sigma^2}\right]\left[\Phi\left(\frac{-2k(x+y)-x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi\left(\frac{-2(k+1)(x+y)+y-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right].$$

4. Для процесса $\{\zeta(u),\ 0\leqslant u<\infty\}$ выполняются соотношения (3) и (4) § 23 Можно применить метод, описанный в § 25. В данном случае формула (7) § 25 принимает вид

$$1-\frac{\Psi(t)}{w}=\frac{w+az-{}^1/_2\sigma^2z^2}{w}=\Psi^+(z,\ w)\,\Psi^-(z,\ w)$$

при $0<w<\infty$ и $\operatorname{Re}(s)=0$, где функция

$$\Psi^+(z,\ w)=z-\frac{a-\sqrt{a^2+2w\sigma^2}}{\sigma^2}$$

регулярна и отлична от нуля в области $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, а $\Psi^-(z, w)$ регулярна и отлична от нуля в области $\operatorname{Re}(z) \leqslant 0$. Если $\eta(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u)$, то в силу (9) § 25

$$w \int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\, dt = \frac{\Psi^+(0, w)}{\Psi^+(s, w)} = \frac{\sqrt{a^2 + 2w\sigma^2} - a}{\sigma^2 s + \sqrt{a^2 + 2w\sigma^2} - a}.$$

Формула обращения дает

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^t \exp\left[-\frac{(x - au)^2}{2\sigma^2 u}\right] \frac{du}{u^{3/2}}$$

для $x \geqslant 0$.

Заметим, что если $a = 0$, то $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\eta(1) \leqslant x/\sqrt{t}\}$.

5. Применяя известные соотношения для функций Бесселя $I_k(t)$

$$\frac{2kI_k(t)}{t} = I_{k-1}(t) - I_{k+1}(t)$$

и

$$2I_k'(t) = I_{k-1}(t) + I_{k+1}(t),$$

получаем

$$\frac{k}{t} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = \lambda p \mathbf{P}\{\xi(t) = k - 1\} - \lambda q \mathbf{P}\{\xi(t) = k + 1\}$$

и

$$\frac{d\mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant k\}}{dt} = \lambda q \mathbf{P}\{\xi(t) = k + 1\} - \lambda p \mathbf{P}\{\xi(t) = k\}.$$

Последнее равенство можно доказать также вероятностным методом, а именно

$$\mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) \leqslant k\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \leqslant k\} + \mathbf{P}\{\xi(t) = k + 1\}\lambda q\,\Delta t - \mathbf{P}\{\xi(t) = k\}\lambda p\,\Delta t + o(\Delta t).$$

Так как $\mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = (p/q)^k\, \mathbf{P}\{\xi(t) = -k\}$, то

$$\frac{d\,[\mathbf{P}\{\xi(t) < k\} - (p/q)^k\, \mathbf{P}\{\xi(t) < -k\}]}{dt} =$$

$$= \lambda q \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} - \lambda p \mathbf{P}\{\xi(t) = k - 1\} - \left(\frac{p}{q}\right)^k \lambda q \mathbf{P}\{\xi(t) = -k\} +$$

$$+ \left(\frac{p}{q}\right)^k \lambda p \mathbf{P}\{\xi(t) = -k - 1\} = \lambda q \mathbf{P}\{\xi(t) = k + 1\} - \lambda p \mathbf{P}\{\xi(t) = k - 1\} =$$

$$= -\frac{k}{t} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение от нуля до t, придем к искомому тождеству.

6. По теореме 5 § 24

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant u \leqslant \theta(c)} \zeta(u) \leqslant x - c\} = \frac{W(x - c)}{W(x)}$$

для $0 < c < x$ и

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\, dx = \frac{1}{\Psi(s)}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, где

$$\Psi(s) = as - \int_0^\infty \left(1 - e^{-sx} - \frac{sx}{1+x^2}\right) \frac{dx}{x^2} = (a + \gamma - 1)\, s + s \log s,$$

$\gamma = 0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера, а $\omega = e^{1-a-\gamma}$ — наибольший неотрицательный корень уравнения $\Psi(\omega) = 0$. Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\, dx = \frac{1}{s \log (s/\omega)}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$ и по формуле обращения

$$W(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \frac{(\omega x)^{u+1}}{\Gamma(u+2)}\, du$$

для $x \geqslant 0$.

7. Пусть $\eta(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \zeta(u)$. Если $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ и $0 < w < \infty$, то

$$w \int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{E}\left\{e^{-s\eta(t)}\right\} dt = \exp\left[-\mathbf{A}\left\{\log\left(1 - \frac{\Psi(s)}{w}\right)\right\}\right],$$

где $\Psi(s) = -|s|$ для $\operatorname{Re}(s) = 0$. Легко видеть, что $\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = F(x/t)$ для $t > 0$, где функция распределения $F(x)$ имеет плотность $f(x) = F'(x)$ для $x > 0$. Следовательно,

$$w \int_0^\infty e^{-wt} \mathbf{E}\left\{e^{-s\eta(t)}\right\} dt = w \int_0^\infty e^{-wt} \int_0^\infty e^{-sx} f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dx}{t}\, dt = w \int_0^\infty \frac{f(x)}{w + sx}\, dx.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{A}\left\{\log\left(1 + \frac{|s|}{w}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s}{s^2 + y^2} \log\left(1 + \frac{|y|}{w}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s}{s^2 + y^2} \log\left(1 + \frac{y}{w}\right) dy.$$

Подстановка $\sigma = w/s$ дает интегральное уравнение Стильтьеса

$$\sigma^{1/2} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x + \sigma}\, dx = \exp\left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log(u + \sigma)}{1 + u^2}\, du\right],$$

решение которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi x^{1/2} (1 + x^2)^{3/4}} \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\log v}{1 + v^2}\, dv\right\}$$

для $x > 0$.

8. Так как

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t+h}\zeta(u)=\max\{\sup_{0\leqslant u\leqslant h}\zeta(u)\ \text{и}\ \zeta(h)+\sup_{h\leqslant u\leqslant t+h}(\zeta(u)-\zeta(h))\},$$

то

$$\mathbf{P}\{\eta(t+h)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\max(\eta(h)\ \text{и}\ \zeta(h)+\eta^*(t))\leqslant x\},$$

где случайная величина $\eta^*(t)$ так же распределена, как и $\eta(t)$, и не зависит от $\{\zeta(u), 0\leqslant u\leqslant h\}$. Если $x>0$, то можно доказать, что

$$\mathbf{P}\{\eta(t+h)\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\max(0\ \text{и}\ \zeta(h)+\eta^*(t))\leqslant x\}+o(h).$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t+h)}\}=\mathbf{A}\{e^{h\Psi(s)}\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\}+o(h).$$

Вычитая из обеих частей $\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}$, деля на h и устремляя h к 0, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}}{\partial t}=\mathbf{A}\{\Psi(s)\,\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\}.$$

Если

$$\Omega(s, w)=\int_0^\infty e^{-wt}\mathbf{E}\{e^{-s\eta(t)}\}\,dt$$

для $\operatorname{Re}(w)>0$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, то

$$w\Omega(s, w)=\mathbf{A}\{\Psi(s)\,\Omega(s, w)\},$$

и решение этого уравнения имеет вид

$$\Omega(s, w)=\exp(-\mathbf{A}\{\log[w-\Psi(s)]\}).$$

Глава 5

1. Рассмотрим период занятости прибора, начинающийся с прибытия требования. Обозначим через $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ длительности последовательных периодов обслуживания, а через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ числа требований, поступивших в течение 1-го, 2-го, ..., n-го периодов обслуживания соответственно. Тогда

$$G_n(x)=\mathbf{P}\{\chi_1+\ldots+\chi_n\leqslant x,\ \nu_1\geqslant 1,\ \nu_1+\nu_2\geqslant 2, \ldots, \nu_1+\ldots+\nu_{n-1}\geqslant n-1$$
$$\text{и}\ \nu_1+\ldots\nu_n=n-1\}.$$

Так как $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, то можно заменить $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ на $\nu_n, \nu_{n-1}, \ldots, \nu_1$ соответственно — вероятность при этом не изменится. Следовательно,

$$G_n(x)=\mathbf{P}\{\chi_1+\ldots+\chi_n\leqslant x,\ \nu_1<1,\ \nu_1+\nu_2<2, \ldots, \nu_1+\ldots+\nu_{n-1}<n-1$$
$$\text{и}\ \nu_1+\ldots+\nu_n=n-1\}.$$

По теореме 1 § 4

$$\mathbf{P}\{\nu_1<1, \nu_1+\nu_2<2, \ldots, \nu_1+\ldots\nu_{n-1}<n-1\mid\nu_1+\ldots+\nu_n=n-1,$$
$$\chi_1+\ldots+\chi_n=u\}=\frac{1}{n}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\nu_1+\ldots+\nu_n\}=n-1\mid\chi_1+\ldots+\chi_n=u\}=e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}$$

и

$$\mathbf{P}\{\chi_1+\ldots\chi_n\leqslant x\}=H_n(x),$$

где $H_n(x)$ означает n-ю свертку функции $H(x)$ с самой собой. И наконец,

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} dH_n(u)$$

для $n = 1, 2, \ldots$ и $x \geqslant 0$. Вероятность того, что длительность периода занятости прибора не превосходит x, равна

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} dH_n(u).$$

2. Обозначим через $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ длительности первых n периодов обслуживания, а через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ числа требований, поступивших в течение 1-го, 2-го, …, n-го периодов обслуживания соответственно. По теореме 1 § 4

$$G_n^{(i)}(x) =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi_1 + \ldots + \chi_n \leqslant x, \nu_1 + \ldots + \nu_r > r - i \text{ для } r = i, \ldots, n-1 \text{ и } \nu_1 + \ldots + \nu_n = n - i\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi_1 + \ldots + \chi_n \leqslant x, \nu_1 + \ldots + \nu_r < r \text{ для } r = 1, \ldots, n-i \text{ и } \nu_1 + \ldots + \nu_n = n - i\} =$$
$$= \frac{i}{n} \mathbf{P}\{\nu_1 + \ldots + \nu_n = n - i \text{ и } \chi_1 + \ldots + \chi_n \leqslant x\} = \frac{i}{n} \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-i}}{(n-i)!} dH_n(u).$$

В задаче 1 мы получили $G_n^{(1)}(x) = G_n(x)$. Вероятность того, что длительность начального периода занятости не превосходит x, равна

$$G^{(i)}x = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{i}{n} \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-i}}{(n-i)!} dH_n(u).$$

Здесь $G^{(i)}(x)$ обозначает i-ю свертку функции $G^{(1)}(x) = G(x)$ с самой собой

3. Имеем

$$G_n(x \mid c) = \frac{\lambda^n c e^{-\lambda c}}{n!} \int_0^{x-c} e^{-\lambda u} (u + c)^{n-1} dH_n(u)$$

для $x \geqslant c$ и $G_n(x \mid c) = 0$ для $x < c$. Если $n = 0$, то это очевидно. Пусть $n \geqslant 1$ Обозначим через $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ длительности первых n периодов обслуживания. следующих за начальным периодом занятости прибора, через ν_0 число требований, поступивших в интервале $(0, c)$, и через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ числа требований, поступивших за 1-й, 2-й, …, n-й периоды обслуживания, следующие за начальным периодом занятости прибора. Тогда

$$G_n(x \mid c) = \mathbf{P}\{\chi_1 + \ldots + \chi_n \leqslant x - c, \nu_0 \geqslant 1, \nu_0 + \nu_1 \geqslant 2, \ldots$$
$$\ldots, \nu_0 + \ldots + \nu_{n-1} \geqslant n, \nu_0 + \ldots + \nu_n = n\},$$

откуда

$$G_n(x \mid c) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{\nu_0 = j\} \mathbf{P}\{\chi_1 + \ldots + \chi_n \leqslant x - c,$$
$$\nu_1 + \ldots + \nu_j \geqslant 1, \ldots, \nu_1 + \ldots + \nu_{n-1} \geqslant n - j, \nu_1 + \ldots + \nu_n = n - j\}.$$

По теореме 1 § 4

$$\mathbf{P}\{\nu_1+\ldots+\nu_j\geqslant 1,\ldots,\ \nu_1+\ldots+\nu_{n-1}\geqslant n-j\mid \nu_1+\ldots+\nu_n=$$
$$=n-j,\ \chi_1+\ldots+\chi_n=u\}=\mathbf{P}\{\nu_1<1,\ \nu_1+\nu_2<2,\ldots,\ \nu_1+\ldots$$
$$\ldots+\nu_{n-j}<n-j\mid \nu_1+\ldots+\nu_n=n-j,\ \chi_1+\ldots+\chi_n=u\}=\frac{j}{n}$$

для $j=1,\ 2,\ldots,\ n$. Кроме того, $\mathbf{P}\{\nu_0=j\}=e^{-\lambda c}(\lambda c)^j/j!$,

$$\mathbf{P}\{\nu_1+\ldots+\nu_n=n-j\mid \chi_1+\ldots+\chi_n=u\}=e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{n-j}}{(n-j)!}$$

и

$$\mathbf{P}\{\chi_1+\ldots+\chi_n\leqslant x\}=H_n(x).$$

Таким образом, для $x\geqslant c$

$$G_n(x\mid c)=\sum_{j=1}^{n}e^{-\lambda c}\frac{(\lambda c)^j}{j!}\frac{j}{n}\int_0^{x-c}e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{n-j}}{(n-j)!}\,dH_n(u)=$$
$$=\frac{\lambda c}{n}\int_0^{x-c}e^{-\lambda(u+c)}\frac{[\lambda(u+c)]^{n-1}}{(n-1)!}\,dH_n(u).$$

4. Положим

$$a_r=\int_0^\infty x^r\,dH(x)$$

для $r=1,\ 2,\ldots$ и $a=a_1$. Если $\lambda a\leqslant 1$, то $G(\infty)=1$ и можно определить

$$\Gamma_r=\int_0^\infty x^r\,dG(x)$$

для $r=0,\ 1,\ 2,\ldots$ (возможно, $\Gamma_r=\infty$). Используя решение задачи 1, получаем

$$\Gamma_r=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{n-1+r}\,dH_n(x).$$

Если $\lambda a<1$ и $a_{r+1}<\infty$, то $\Gamma_r<\infty$. Если $\lambda a=1$ или $a_{r+1}=\infty$, то $\Gamma_r=\infty$.

Положим

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x).$$

Моменты функции $G(x)$ можно получить иначе. Покажем, что при $\mathrm{Re}(s)>0$

$$\gamma(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x)$$

является единственным корнем z уравнения

$$z=\psi(s+\lambda-\lambda z)$$

в области $|z|<1$.

Так как во время обслуживания первого требования может поступить $j=0, 1, 2, \ldots$ требований, то

$$\gamma(s)=\sum_{j=0}^{\infty}[\gamma(s)]^j\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)u}\frac{(\lambda u)^j}{j!}\,dH(u)=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-[s+\lambda-\lambda\gamma(s)]u}\,dH(u)=\psi(s+\lambda-\lambda\gamma(s))$$

при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. Если $\operatorname{Re}(s)>0$, то из теоремы Руше следует, что уравнение $z=\psi(s+\lambda-\lambda z)$ имеет в области $|z|<1$ в точности один корень, который и дает искомую функцию $\gamma(s)$. Если $\lambda a<1$, то $\gamma(+0)=1$ и $\Gamma_r=\gamma^{(r)}(+0)$. С помощью теоремы Бюрмана (см дополнение) легко вычислить $\gamma^{(r)}(+0)$.

Положим $u=s+\lambda[1-\gamma(s)]$. Тогда $s=u-\lambda[1-\psi(u)]$, откуда

$$\Gamma_1=\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{du}{ds}\right)_{s=0}-1\right]=\frac{a_1}{1-\lambda a}$$

при $\lambda a<1$. Далее,

$$\Gamma_{r+1}=\frac{(-1)^r}{\lambda}\left(\frac{d^{r+1}u}{ds^{r+1}}\right)_{s=0}=\frac{(-1)^r}{\lambda}\left[\frac{d^r}{du^r}\left(\frac{u}{s}\right)^{r+1}\right]_{u=0}=$$

$$=\frac{(-1)^r}{\lambda}\left[\frac{d^r}{du^r}\left(\frac{1}{1-\lambda\frac{1-\psi(u)}{u}}\right)^{r+1}\right]_{u=0}$$

для $r=1, 2, \ldots$, а производную в правой части можно вычислить с помощью формулы Фаа ди Бруно (см. дополнение).

Таким образом, если $\lambda a<1$, то

$$\Gamma_{r+1}=\sum_{\nu=1}^{r}\frac{(r+\nu)!\,\lambda^{\nu-1}}{r!\,(1-\lambda a)^{r+\nu+1}}Y_{r,\nu}$$

для $r=1, 2, \ldots$, где

$$Y_{r,\nu}=\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_r=\nu\\ j_1+2j_2+\ldots+rj_r=r}}\frac{r!}{j_1!\,j_2!\ldots j_r!}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{j_1}\left(\frac{a_3}{3!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{a_{r+1}}{(r+1)!}\right)^{j_r}.$$

В частности,

$$\Gamma_2=\frac{a_2}{(1-\lambda a)^3},\qquad \Gamma_3=\frac{a_3}{(1-\lambda a)^4}+\frac{3\lambda a_2^2}{(1-\lambda a)^5}$$

и

$$\Gamma_4=\frac{a_4}{(1-\lambda a)^5}+\frac{10\lambda a_2a_3}{(1-\lambda a)^6}+\frac{15\lambda^2a_2^3}{(1-\lambda a)^7}.$$

Замечание. Если $H(x)=1-e^{-x/a}$ для $x\geqslant 0$, то $a_r=r!\,a^r$ и

$$Y_{r,\nu}=a^{r+\nu}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_r=\nu\\ j_1+2j_2+\ldots+rj_r=r}}\frac{r!}{j_1!\,j_2!\ldots j_r!}=\frac{r!}{\nu!}\binom{r-1}{\nu-1}a^{r+\nu},$$

5. Пусть

$$a=\int_0^\infty x\,dH(x) \quad \text{и} \quad \psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x).$$

Если $\lambda a<1$, то процесс $\{\eta(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ имеет стационарное распределение $\mathbf{P}\{\eta(t)\leqslant x\}=W(x)$ и его преобразование Лапласа — Стильтьеса равно

$$\Omega(s)=\frac{1-\lambda a}{1-\lambda(1-\psi(s))/s}$$

для $\operatorname{Re}(s)>0$ (см. формулы (25) и (50) § 29). Функцию $W(x)$ можно получить в явном виде по формулам (13), (14) и (17) § 19. Пусть

$$W_r=\int_0^\infty x^r\,dW(x)$$

для $r=0, 1, 2, \ldots$. Тогда

$$W_r=(-1)^r\left(\frac{d^r\Omega(s)}{ds^r}\right)_{s=+0},$$

а правую часть можно вычислить с помощью формулы Фаа ди Бруно (см. дополнение). Таким образом,

$$W_r=\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^\nu \nu!}{(1-\lambda a)^\nu}Y_{r,\nu}$$

для $r=1, 2, \ldots$ (функция $Y_{r,\nu}$ задана в решении задачи 4). В частности,

$$W_1=\frac{\lambda a_2}{2(1-\lambda a)},\qquad W_2=\frac{\lambda a_3}{3(1-\lambda a)}+\frac{\lambda^2 a_2^2}{2(1-\lambda a)^2}$$

и

$$W_3=\frac{\lambda a_4}{4(1-\lambda a)}+\frac{\lambda^2 a_2 a_3}{(1-\lambda a)^2}+\frac{3\lambda^3 a_2^3}{4(1-\lambda a)^3}.$$

6. Из теоремы 2 § 28 следует, что при $\lambda a<1$ предельное распределение $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\xi_n=k\}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta_n=k\}=P_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, существует и не зависит от начального распределения, причем $\{P_k\}$ — единственное стационарное распределение для $\{\xi_n\}$ и $\{\zeta_n\}$. Далее,

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k z^k=\frac{(1-\lambda a)(1-z)\psi(\lambda(1-z))}{\psi(\lambda(1-z))-z}$$

для $|z|<1$, где $\psi(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $H(x)$. Если $\lambda a\geqslant 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\xi_n=k\}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta_n=k\}=0$ и $\{\xi_n\}$ и $\{\zeta_n\}$ не имеют стационарных распределений.

Так как

$$P(z)=\Omega(\lambda(1-z))\,\psi(\lambda(1-z))=(1-\lambda a)(1-z)+z\Omega(\lambda(1-z)),$$

где функция $\Omega(s)$ задана в решении задачи 5, то

$$B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \lambda\,(W_1 + a)$$

и

$$B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k = \frac{\lambda^r W_r}{r!} + \frac{\lambda^{r-1} W_{r-1}}{(r-1)!}$$

для $r = 2, 3, \ldots$, а $W_1, W_2, \ldots$ заданы в решении задачи 5.

7. Если a — среднее время обслуживания и $\lambda a < 1$, то процесс $\{\xi(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ имеет стационарное распределение $\mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = P_k^*$, $k = 0, 1, \ldots$, $P_k^* = P_k$, где $\{P_k\}$ заданы в решении задачи 6. Если $\lambda a \geqslant 1$, то процесс $\{\xi(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ не имеет стационарного распределения.

Пространством состояний процесса $\{\xi(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ служит $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Если процесс стационарный, то среднее число переходов $k \to k+1$ в интервале $(0, t)$ равно $\lambda P_k^* t$, а среднее число переходов $k+1 \to k$ в интервале $(0, t)$ равно $\lambda P_k t$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Так как эти средние для стационарного процесса совпадают, то $P_k^* = P_k$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$.

8. Если $\chi(u)$, $0 \leqslant u < \infty$, — полное время обслуживания всех требований, поступивших в интервале $(0, u]$, то $\{\chi(u), 0 \leqslant u < \infty\}$ — обобщенный пуассоновский процесс и

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant x\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} H_n(x),$$

где $H_n(x)$ означает n-ю свертку функции $H(x)$ с самой собой. По теореме 1 § 29

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0) = c\} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \Bigg[H_n(t + x - c) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \iint\limits_{0 \leqslant y \leqslant z \leqslant t-c} \left(\frac{t-z}{t-y}\right) \left(\frac{y}{t}\right)^j \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{n-j} d_y H_j(y + x)\, d_z H_{n-j}(z - y) \Bigg]$$

для всех $x, c \geqslant 0$ и $t > 0$.

9. Пусть η_n — время ожидания, а χ_n — время обслуживания n-го требования. Пусть $\mathbf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = W_n(x)$, $\mathbf{P}\{\chi_n \leqslant x\} = H(x)$, $\mathbf{E}\left\{e^{-s\eta_n}\right\} = \Omega_n(s)$ и $\mathbf{E}\left\{e^{-s\chi_n}\right\} = \psi(s)$. Обозначим через ζ_n длину очереди непосредственно после окончания обслуживания n-го требования.

Если начальная длина очереди равна нулю, то длина очереди непосредственно после окончания обслуживания n-го требования равна числу требований, поступивших в очередь в течение времени, проведенного в системе n-м требованием, т. е. в течение интервала времени длительности $\eta_n + \chi_n$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\zeta_n = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}\, d_x [W_n(x) * H(x)],$$

откуда для $|z| \leqslant 1$

$$\mathbf{E}\left\{z^{\zeta_n}\right\} = \Omega_n(\lambda(1 - z))\, \psi(\lambda(1 - z)).$$

Если $\lambda a < 1$, где a — среднее время обслуживания, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{z^{\zeta_n}\right\} = P(z)$ существует при $|z| \leqslant 1$, причем формула для $P(z)$ дана в решении задачи 6. В соответствии с этим предел

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n(s) = \Omega(s)$$

существует при $|s - \lambda| \leqslant \lambda$ и

$$\Omega(s) = \frac{\mathbf{P}(1 - s/\lambda)}{\psi(s)} = \frac{1 - \lambda a}{1 - \lambda(1 - \psi(s))/s}.$$

С помощью теоремы непрерывности для преобразований Лапласа — Стильтьеса (см. дополнение) получаем, что при $\lambda a < 1$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} W_n(x) = W(x)$ существует, $W(x)$ является функцией распределения и ее преобразование Лапласа — Стильтьеса равно $\Omega(s)$ для $\operatorname{Re}(s) > 0$. Если начальное состояние произвольно, результат тот же.

Если $\lambda a \geqslant 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = 0$ для всех x.

10. Пусть $\chi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant T$, — полное время обслуживания всех требований, поступивших в интервале времени $(0, u]$. Тогда $\{\chi(u), 0 \leqslant u \leqslant T\}$ — случайный процесс с переставляемыми приращениями. По теореме 1 § 29

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant t + x\} - \iint\limits_{0 < y \leqslant z \leqslant t} \left(\frac{t-z}{t-y}\right) d_y d_z \mathbf{P}\{\chi(y) \leqslant y + x,\ \chi(t) \leqslant z + x\}$$

для всех x и $0 < t \leqslant T$. Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant x\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{u}{T}\right)^j \left(1 - \frac{u}{T}\right)^{n-j} H_j(x)$$

для $0 \leqslant u \leqslant T$ и

$$\mathbf{P}\{\chi(u) \leqslant x,\ \chi(v) \leqslant y\} =$$

$$= \sum\sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \frac{n!}{j!\,(k-j)!\,(n-k)!} \left(\frac{u}{T}\right)^j \left(\frac{v-u}{T}\right)^{k-j} \left(1 - \frac{v}{T}\right)^{n-k} \int_0^x H_{k-j}(y-z)\, dH_j(z)$$

для $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant T$, где $H_j(x)$ означает j-ю свертку функции $H(x)$ с самой собой.

11. Обозначим через Q' искомый процесс образования очереди. Процесс Q' — обратный для процесса Q, определенного в примере, следуюшем за теоремой 11 § 28. Здесь $\zeta_0 = 1$. Пусть ρ_0' — число требований, обслуженных в начальный период занятости. По теореме 10 § 28

$$\mathbf{P}\left\{\rho_0' \leqslant n \mid \zeta_0 = 1\right\} = 1 - \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{P}\{N_n = j\},$$

где

$$\mathbf{P}\{N_n = j\} = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^j}{j!}\, dF_n(x)$$

в силу (68) § 28, а $F_n(x)$ — это n-я свертка функцни $F(x)$ с самой собой.

Если W' — искомый процесс образования очереди, то W' является обратным процессом для процесса W, определенного в примере, следующем за теоремой 11 § 29. В данном случае $\eta(0)=0$. Если θ_0' — длительность начального периода занятости, то по теореме 10 § 29

$$\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant t \mid \eta(0)=0\right\} = 1 - \int_0^t \left(1-\frac{y}{t}\right) d_y \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant y\},$$

а в силу (80) § 29

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant y\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} F_n(y),$$

откуда

$$\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant t \mid \eta(0)=0\right\} = \mu \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \int_0^t [1-F_n(y)]\, dy.$$

Замечание. Вероятность того, что начальный период занятости состоит из n обслуживаний и имеет длительность $\leqslant t$, равна

$$\mathbf{P}\left\{\rho_0'=n,\ \theta_0' \leqslant t\right\} = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \iint\limits_{\substack{u+v\leqslant t\\ 0\leqslant u,\ 0\leqslant v}} e^{-\mu(u+v)} v\,(u+v)^{n-2}[1-F(v)]\, dF_{n-1}(u)\, dv$$

(см. [76]).

12. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant x \mid \zeta_0=i\right\} = \sum_{n=i+1}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu x)^n}{n!} \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n}{i+j} \times$$

$$\times \iint\limits_{\substack{u+v\leqslant x\\ 0\leqslant u,\ 0\leqslant v}} \left(1-\frac{v}{x-u}\right)\left(\frac{u}{x}\right)^{i+j}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{n-i-j} dF_j(u)\, dF_{n-i-j}(v),$$

где $F_n(x)$ означает n-ю свертку функции $F(x)$ с самой собой. За прямым доказательством этого результата мы отсылаем к теореме 8 работы [88].

Можно также получить $\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant x \mid \zeta_0=i\right\}$ из теоремы 10 § 29. Действительно, $\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant x \mid \zeta_0=i\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant x \mid \eta(0)\right\}\right\}$, где $\mathbf{P}\{\eta(0)\leqslant x\} = F_i(x)$ и $\mathbf{P}\left\{\theta_0' \leqslant x \mid \eta(0)=c\right\}$ определяются по формуле (72) § 29.

Глава 6

1. Здесь

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\} = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{\mu x} e^{-y} y^{t-1}\, dy$$

для $x \geqslant 0$ и $t>0$. Кроме того, $\mathbf{E}\{\chi(t)\} = t/\mu$, т. е. $\rho = 1/\mu$. В силу (2) § 15

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x \mid \eta(0)=c\} = \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant t}[\chi(u)-u] \leqslant x \text{ и } \chi(t) \leqslant t+x-c\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{\mu(t+x-c)} e^{-y} y^{t-1}\, dy - \mu^t e^{-\mu x} \times$$

$$\times \iint\limits_{0\leqslant y\leqslant z\leqslant t-c} \left(\frac{t-z}{t-y}\right) \frac{c^{-\mu z}(x+y)^{y-1}(z-y)^{t-y-1}}{\Gamma(y)\,\Gamma(t-y)}\, dy\, dz$$

для $x \geqslant 0$ и $0 \leqslant c \leqslant t$. По теореме 3 § 15

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) < x\} = \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u<\infty} [\chi(u) - u] \leqslant x\} =$$

$$= 1 - (\mu - 1) e^{-\mu x} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu y}[\mu(x+y)]^{y-1}}{\Gamma(y)} dy$$

для $x \geqslant 0$ и $\mu > 1$, а по теореме 1 § 17

$$\mathbf{P}\{\alpha(t) \leqslant x - c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{u - \chi(u) \leqslant x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant t\} =$$

$$= 1 - xe^{\mu x} \int_0^t \frac{e^{-\mu t}\mu^y (y-x)^{y-1}}{\Gamma(y+1)} dy$$

для $0 \leqslant c \leqslant x < t$. Так как $\mathbf{E}\{\chi(t)\} = t/\mu$ и $\operatorname{Var}\{\chi(t)\} = t/\mu^2$, то по теореме 4 § 29

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\alpha(t) - \dfrac{(\mu-1)t}{\mu}}{\sqrt{t}/\mu} \leqslant x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

для любого $\mu > 1$, а по теореме 3 § 17

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\alpha(t) \leqslant x - c \mid \eta(0) = c\} = 1 - e^{-\omega x}$$

для $0 \leqslant c \leqslant x$, где ω — наибольший вещественный корень уравнения $\mu e^{\omega} = \mu + \omega$. Если $\mu < 1$, то $\omega > 0$, а если $\mu \geqslant 1$, то $\omega = 0$. Далее,

$$\omega = \mu \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\mu j} \frac{(\mu j)^{j-1}}{j!} - 1 \right);$$

это можно получить из разложения Лагранжа (см. дополнение).

2. Здесь

$$\mathbf{P}\{\chi^*(t) \leqslant x\} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_{\mu t}^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy$$

для $x \geqslant 0$, $\mathbf{E}\{\chi^*(t)\} = \mu t$ и $\operatorname{Var}\{\chi^*(t)\} = \mu t$.

В силу (77) § 29

$$\mathbf{P}\left\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\right\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant c \mid \eta(0) = 0\},$$

а правая часть получена при решении задачи 1.

В силу (65) § 29

$$\mathbf{P}\{\beta^*(t) \leqslant x + c \mid \eta(0) = c\} = \mathbf{P}\{\eta(x) \leqslant t - x \mid \eta(0) = 0\};$$

правая часть получена при решении задачи 1.

Если $\mu > 1$ и $0 \leqslant c$, $0 \leqslant t$, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\theta_0^* \leqslant t + c \mid \eta(0) = c\right\} = 1 - \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant c\};$$

правая часть также получена при решении задачи 1.

Если $\mu < 1$, то по формуле (66) § 29

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta^*(t) - \mu t}{\sqrt{\mu t}} \leqslant x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

3. Если $\{\eta(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ — стационарный процесс, то по теореме 4 § 33

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \frac{W(x)}{W(m)}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$, где $W(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, определяется равенством

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, а ω — наибольший вещественный корень уравнения $\Phi(s) = s$.
В данном случае

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \left(1 - e^{-sx}\right) e^{-\mu y} \frac{dy}{y^{3/2}} = (s+\mu)^{1/2} - \mu^{1/2},$$

$\rho = \Phi'(+0) = 1/2\sqrt{\mu}$, $\omega = 0$ при $\mu \geqslant 1/4$ и $\omega = 1 - 2\sqrt{\mu}$ при $\mu < 1/4$. Кроме того,

$$\frac{\partial \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\}}{\partial x} = \frac{t}{\sqrt{4\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\mu}{x}\left(x - \frac{t}{2\sqrt{\mu}}\right)^2\right]$$

для $x > 0$.
В силу (54) § 19

$$W(x) = W(0)\left\{\frac{e^{\omega x}}{1 - \Phi'(\omega)} - \frac{e^{-\mu x}}{\sqrt{4\pi}} \int_{\max(0,\,-x)}^\infty \exp\left[\left(\sqrt{\mu} - \mu\right) y - \frac{y^2}{4(x+y)}\right] \frac{dy}{(x+y)^{3/2}}\right\},$$

если $\mu \neq 1/4$, причем $\Phi'(\omega) = 1/2\left(\omega + \sqrt{\mu}\right)$.
Если $\mu = 1/4$, то $W(x)$ можно получить так: имеем

$$\frac{dH^*(x)}{dx} = \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\mu y} \frac{dy}{y^{3/2}}$$

для $x > 0$ и

$$\psi^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH^*(x) = \frac{\Phi(s)}{\rho s} = \frac{2\left[\sqrt{\mu^2 + \mu s} - \mu\right]}{s}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Если $\rho = 1$, т. е. $\mu = 1/4$, то

$$\Omega(s) = \frac{W(0)}{1 - \psi^*(s)} = W(0)\left[1 + \frac{1}{s} + \psi^*(s)\right],$$

откуда по формуле обращения

$$W(x) = W(0)\,[1 + x + H^*(x)].$$

Замечание. Можно также написать

$$\Omega(s) = \frac{W(0)\, s}{s + \mu^{1/2} - (s+\mu)^{1/2}} = W(0)\left\{\frac{s + 2\mu^{1/2}}{s + 2\mu^{1/2} - 1} + \frac{s/2\mu^{1/2}}{s + 2\mu^{1/2} - 1}\, \psi^*(s)\right\},$$

откуда по формуле обращения

$$W(x) = W(0)\left\{\frac{1 - \rho e^{-(1-\rho)\, x/\rho}}{1 - \rho} + \rho \int_0^x e^{-(1-\rho)(x-y)/\rho}\, dH^*(y)\right\},$$

если $\rho < 1$, и

$$W(x) = W(0)\left\{\frac{\rho e^{(\rho-1)x/\rho} - 1}{\rho - 1} + \rho\int_0^x e^{(\rho-1)(x-y)/\rho}\, dH^*(y)\right\},$$

если $\rho > 1$.

4. Для стационарного процесса $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ по теореме 4 § 33

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \frac{W(x)}{W(m)}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$, а $W(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, определяется равенством

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, где ω — наибольший вещественный корень уравнения $\Phi(s) = s$.

В данном случае

$$\Phi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sx})\, e^{-\mu x}\frac{dx}{x} = \log\left(1 + \frac{s}{\mu}\right)$$

и

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\} = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{\mu x} e^{-y} y^{t-1}\, dy$$

для $x \geqslant 0$ и $t > 0$. Далее, $\lambda = \Phi(\infty) = \infty$ и $\rho = \Phi'(+0) = 1/\mu$. Если $\rho \leqslant 1$, то $\omega = 0$. Если $\rho > 1$, то ω — наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\mu e^{\omega} = \mu + \omega$. Кроме того, $\Phi'(\omega) = 1/(\mu + \omega)$.

Если $\rho \neq 1$, то в силу (62) § 19

$$W(x) = W(0)\left\{\frac{e^{\omega x}}{1 - \Phi'(\omega)} - e^{-\mu x}\int_{\max(0,\,-x)}^{\infty}\frac{(e^{-\mu}\mu)^y (x+y)^{y-1}}{\Gamma(y)}\, dy\right\}.$$

Формулу для $W(x)$ можно получить еще и так: имеем

$$H^*(x) = \mu\int_0^x\left(\int_{\mu u}^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy\right) du = \frac{1 - e^{-\mu x}}{\mu} + x\int_{\mu x}^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy,$$

а в силу (61) § 19

$$W(x) = W(0)\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{\mu}\right)^n H_n^*(x),$$

где $H_n^*(x)$ — это n-я свертка функции $H^*(x)$ с самой собой.

5. Если $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — стационарный процесс, то по теореме 4 § 33

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \frac{W(x)}{W(m)}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$, а $W(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, определяется равенством

$$\Omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{W(0)\, s}{s - \Phi(s)}$$

для $\mathrm{Re}(s) > \omega$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный **корень урав**нения $\Phi(s) = s$.

В данном случае

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \left(1 - e^{-sx}\right) \frac{dx}{x^{3/2}} = s^{1/2}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x\}}{\partial x} = \frac{t}{\sqrt{4\pi x^3}}\, e^{-t^2/4x}$$

для $x > 0$. Далее, $\lambda = \Phi(\infty) = \infty$, $\rho = \Phi'(+0) = \infty$, $\omega = 1$ $\Phi'(\omega) = \dfrac{1}{2}$.

В силу (46) § 19

$$W(x) = W(0) \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

для $x \geqslant 0$, а в силу (49) § 19

$$W(x) = W(0) \left[2e^x - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\max(0,\,-x)}^\infty e^{-y^2/4\,(x+y)} \frac{dy}{(x+y)^{3/2}} \right]$$

для всех x.

6. Если $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — стационарный процесс, то по теореме **5 § 33**

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \frac{W(x)}{W(m)}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$, а $W(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, определяется равенством

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, W(x)\, dx = \frac{C}{\Psi(s)}$$

для $\mathrm{Re}(s) < \omega$, где ω — наибольший неотрицательный вещественный **корень ура**внения $\Psi(s) = 0$, а C — отличная от нуля константа.

В данном случае

$$\Psi(s) = -as + \sigma^2 s^2/2,$$

$\omega = 0$ при $a \leqslant 0$ и $\omega = 2a/\sigma^2$ при $a \geqslant 0$. Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\, dx = \frac{2C}{\sigma^2 s^2 - 2as} = \frac{C}{a}\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2 s - 2a} - \frac{1}{s}\right]$$

для $\mathrm{Re}(s) > \omega$ и по формуле обращения

$$W(x) = \frac{C}{a}\left(e^{2ax/\sigma^2} - 1\right)$$

при $a \neq 0$ и $W(x) = 2Cx/\sigma^2$ при $a = 0$.

7. Если $\{\eta(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — стационарный процесс, то по теореме 5 § 33

$$\mathbf{P}\{\eta(t) \leqslant x\} = \frac{W(x)}{W(x)}$$

для $0 \leqslant x \leqslant m$ и

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x)\,dx = \frac{C}{\Psi(s)} = \frac{C}{s \log(s/\omega)}$$

для $\operatorname{Re}(s) > \omega$, где C — отличная от нуля константа, $\omega = e^{1-a-\gamma}$ и $\gamma = 0{,}5772157\ldots$ — константа Эйлера. По формуле обращения

$$W(x) = \frac{C}{\omega} \int_0^\infty \frac{(\omega x)^{u+1}}{\Gamma(u+2)}\,du.$$

Глава 7

1. В силу (21) § 35

$$\int_0^\infty e^{-wt}\,\Omega(t,\ s)\,dt = \frac{1}{w - s + \lambda[1 - \psi(s)]}\left(1 - \frac{s}{\omega(w)}\right)$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(w) > 0$, где $\psi(s) = \mu/(\mu + s)$, а $s = \omega(w)$ — единственный корень уравнения $\lambda[1 - \psi(s)] = s - w$ в области $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$. Далее,

$$\omega(w) = \frac{\lambda + w - \mu + \sqrt{(\lambda + w + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2}$$

и, таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-wt}\,\Omega(t,\ s)\,dt = \frac{2(\mu + s)}{2w\mu + s(\lambda + w - \mu) + s\sqrt{(\lambda + w + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}$$

для $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(w) > 0$.

2. Пусть $\varphi_0(z) \equiv 1$ и

$$\varphi_k(z) = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots = k} z^{j_1} \frac{j_1^{j_2} j_2^{j_3} \ldots}{j_1!\, j_2! \ldots} \tag{1}$$

для $k = 1, 2, \ldots$, где $j_1, j_2, \ldots$ — положительные целые числа. Легко видеть, что

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{z^j}{j!}\,\varphi_{k-j}(j) \tag{2}$$

для $k = 1, 2, \ldots$. Докажем по индукции, что

$$\varphi_k(z) = \frac{(k + z)^{k-1} z}{k!}. \tag{3}$$

Для $k = 1$ равенство верно. Предположим, что оно верно также для $k = 2, \ldots, n-1$. С помощью приведенной выше рекуррентной формулы немедленно получаем, что оно верно и для $k = n$, а потому для всех $k = 1, 2, \ldots$.

3. В силу (39) § 35 для $\operatorname{Re}(z)>0$

$$\mathbf{E}\{e^{-z\theta_x}\}=e^{-x\omega(z)},$$

где $s=\omega(z)$ — единственный корень уравнения

$$s=z+\lambda[1-\psi(s)]$$

в области $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$. Если $\rho=\lambda a\leqslant 1$, то $\mathbf{P}\{\theta_x<\infty\}=\omega(+0)=1$, кроме того, $\mathbf{E}\{\theta_x\}=x\omega'(+0)=x/(1-\rho)$ для $\rho<1$ и $\mathbf{E}\{\theta_x\}=x\omega'(+0)=\infty$ для $\rho=1$. Если $\rho<1$, то $\operatorname{Var}\{\theta_x\}=-x\omega''(+0)=\sigma^2x/(1-\rho)^3$, где $\sigma^2=\lambda(a^2+\sigma a^2)$. Так как $\{\theta_x,\ 0\leqslant x<\infty\}$ — стохастический процесс со стационарными независимыми приращениями, то при $\rho<1$ и $\sigma^2<\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\theta_x-\mathbf{E}\{\theta_x\}}{\sqrt{\operatorname{Var}\{\theta_x\}}}\leqslant z\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-y^2/2}\,dy.$$

4. Имеем $W(t,x)=\mathbf{P}\{\tilde{\chi}(u)\leqslant cu+x$ для $0\leqslant u\leqslant t\}$. Так как для рассматриваемого пуассоновского процесса в интервале $(0,\Delta t)$одно событие происходит с вероятностью $\lambda\,\Delta t+o(\Delta t)$, а более одного события — с вероятностью $o(\Delta t)$, то

$$W(t+\Delta t,x)=(1-\lambda\,\Delta t)\,W(t,x+c\,\Delta t)+\lambda\,\Delta t\int_{-\infty}^{x+c\,\Delta t}W(t,x-y+c\,\Delta t)\,dH(y)+o(\Delta t).$$

Вычитая из обеих частей $W(t,x)$, деля на Δt и устремляя Δt к 0, получаем

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t}=c\,\frac{\partial W(t,x)}{\partial x}-\lambda W(t,x)+\lambda\int_{-\infty}^{x}W(t,x-y)\,dH(y)$$

для почти всех $t\geqslant 0$ и $x\geqslant 0$.

5. Имеем $W(x)=\mathbf{P}\{\sup\limits_{0<u<\infty}[\chi(u)-cu]\leqslant x\}$, где $\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\}=e^{-\lambda s/(1+s)}$.

Если $c>0$ и $\lambda<c$, то в силу (23) § 35

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x)=\frac{1-\lambda/c}{1-\lambda/[c(1+s)]},$$

откуда по формуле обращения $W(x)=1-(\lambda/c)\exp[-(1-\lambda/c)x]$ для $x\geqslant 0$.

6. Имеем $W(x)=\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant u<\infty}[\chi(u)-cu]\leqslant x\}$, где

$$\mathbf{E}\{e^{-s\chi(u)}\}=\exp\left\{-\lambda\left[1-\left(\frac{1}{1+s}\right)^2\right]\right\}.$$

Если $c\geqslant 0$ и $\lambda<c/2$, то в силу (23) § 35

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x)=\frac{1-2\lambda/c}{1-\lambda(2+s)/[c(1+s)^2]},$$

или

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dW(x)=\left(1-\frac{2\lambda}{c}\right)-\frac{A_1\gamma_1}{(s+\gamma_1)}+\frac{A_2\gamma_2}{(s+\gamma_2)},$$

где

$$\gamma_1 = 1 - \frac{\lambda}{2c} + \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda c}}{2c}; \qquad \gamma_2 = 1 - \frac{\lambda}{2c} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda c}}{2c};$$

$$A_1 = \lambda \frac{c + \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda c}}{c\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda c}}; \qquad A_2 = \lambda \frac{c + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda c}}{c\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda c}}.$$

Отсюда по формуле обращения для $x \geqslant 0$

$$W(x) = 1 + A_1 e^{-\gamma_1 x} - A_2 e^{-\gamma_2 x}.$$

7. Положим $\zeta(u) = \tilde{\chi}(u) - cu$ для $u \geqslant 0$. Тогда математическое ожидание

$$\mathbf{E}\left\{e^{-s\zeta(u)}\right\} = e^{u\Psi(s)}$$

существует для $-1 < \operatorname{Re}(s) < 1$, причем

$$\Psi(s) = cs + \lambda s \frac{s + 1 - 2\alpha}{(1+s)(1-s)}, \quad \text{или} \quad \Psi(s) = -\frac{cs(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)}{(1+s)(1-s)},$$

где $\gamma_1 = \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4c[c + \lambda(1-2\alpha)]}}{2c}$ и $\gamma_2 = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4c[c + \lambda(1-2\alpha)]}}{2c}$.

Если $c > 0$ и $c + \lambda(1-2\alpha) > 0$, то $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 < 0$. В этом случае $P\{\sup\limits_{0 \leqslant u < \infty} \zeta(u) \leqslant x\} = W(x)$ — собственная функция распределения, а ее преобразование Лапласа равно

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{(1+s)\gamma_2}{\gamma_2 - s},$$

что можно получить методом факторизации. По формуле обращения для $x \geqslant 0$

$$W(x) = 1 - (1+\gamma_2)e^{\gamma_2 x}.$$

Если $c < 0$ и $c + \lambda(1-2\alpha) > 0$, то $\gamma_1 < 0$ и $\gamma_2 < 0$. В этом случае $P\{\sup\limits_{0 \leqslant u < \infty} \zeta(u) \leqslant x\} = W(x)$ — собственная функция распределения, а ее преобразование Лапласа равно

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dW(x) = \frac{(1+s)\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1 - s)(\gamma_2 - s)},$$

что можно также получить методом факторизации. По формуле обращения

$$W(x) = 1 - \frac{(1+\gamma_1)\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\gamma_1 x} - \frac{(1+\gamma_2)\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{\gamma_2 x}$$

для $x \geqslant 0$.

8. В силу (5) § 25

$$w \int_0^\infty e^{-wt}\Omega(t, s)\, dt = \exp\left[-\mathbf{A}\left\{\log\left(1 - \frac{cs - \lambda[1 - \psi(s)]}{w}\right)\right\}\right]$$

для $0<w<\infty$ и $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$, где оператор $\mathbf{A}$ определен в § 11. Учитывая, что

$$\mathbf{A}\left\{\log\left(1-\frac{cs-\lambda[1-\psi(s)]}{w}\right)\right\}=$$

$$=\mathbf{A}\left\{\log\left(\frac{\lambda+w-cs}{w}\right)\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+w}\right)^{n}\mathbf{A}\left\{\left(\frac{\lambda+w}{\lambda+w-cs}\right)^{n}(\psi(s))^{n}\right\},$$

получаем искомый результат.

Глава 8

1. Так как $(a, b)=1$, можно выбрать такие положительные числа p и q, что $aq-bp=1$. Зададим случайные величины $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{a+b}$ следующим образом: $\gamma_r=q$, если r-й голос подан за кандидата A, и $\gamma_r=-p$, если r-й голос подан за кандидата B. Тогда $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{a+b}$ — переставляемые случайные величины, принимающие целые значения, причем $\gamma_1+\ldots+\gamma_{a+b}=1$. Далее, $\alpha_r\geqslant a\beta_r/b$ тогда и только тогда, когда $\alpha_r>p\beta_r/q$, или, что то же, $\gamma_1+\ldots+\gamma_r>0$. Поэтому $Q_j(a, b)=\mathbf{P}\{\gamma_1+\ldots+\gamma_r>0$ для j индексов $r=1, 2, \ldots, a+b\}=$ $=1/(a+b)$, что следует из теоремы 2 § 37.

2. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, \ldots, n$. Тогда

$$\mathbf{P}\{N_r\leqslant r \text{ для } j \text{ индексов } r=1, 2, \ldots, n \mid N_n=n\}=$$

$$=\mathbf{P}\{N_n-N_r<n-r \text{ для } n-j \text{ индексов } r=1, 2, \ldots, n \mid N_n=n\}=$$

$$=\mathbf{P}\{N_r<r \quad \text{для } n-j \text{ индексов } r=1, 2, \ldots, n \mid N_n=n\}=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i(n-i)}\mathbf{P}\{N_i=i-1 \mid N_n=n\} & \text{для } j=1, 2, \ldots, n-1,\\ \displaystyle 1-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\mathbf{P}\{N_i=i-1 \mid N_n=n\} & \text{для } j=n.\end{cases}$$

Последнее равенство следует из теоремы 3 § 37.

Зададим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2a}$ следующим образом: $\nu_r=0$, если r-й голос подан за кандидата A, и $\nu_r=2$, если r-й голос подан за кандидата B. Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2a}$ — переставляемые случайные величины и $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{2a}=2a$. Положим $N_r=\nu_1+\ldots+\nu_r$ для $r=1, 2, \ldots, 2a$. Тогда $Q_j(a, a)=\mathbf{P}\{N_r\leqslant r$ для j индексов $r=1, 2, \ldots, 2a\}$ и

$$\mathbf{P}\{N_r=2s\}=\binom{r}{s}\binom{2a-r}{as}\Big/\binom{2a}{a}.$$

Отсюда

$$Q_j(a, a)=\frac{1}{\binom{2a}{a}}\sum_{s=0}^{[(j-1)/2]}\frac{\binom{2s}{s}\binom{2a-2s-2}{a-s-1}}{(s+1)(a-s)}$$

для $j=1, 2, \ldots, 2a-1$ и

$$Q_{2a}(a, a)=1-\frac{1}{\binom{2a}{a}}\sum_{s=0}^{a-1}\frac{1}{s+1}\binom{2s}{s}\binom{2a-2s-1}{a-s}=\frac{1}{a+1}.$$

3. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Пусть $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\mathbf{P}\{N_r < r+1 \text{ для } j \text{ индексов } r = 1, \ldots, n \mid N_n = k\} = \sum_{i=n-j}^{k-1} \frac{(n+1-k)}{i(n-i)} \mathbf{P}\{N_i = i+1 \mid N_n = k\}$$

для $j = n-k+1, \ldots, n-1$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Эту формулу можно получить аналогично тому, как мы получили формулу (3) § 37, если учесть, что существует такое число r, что $N_r = r+1$, а i $(i = n-j, \ldots, k-1)$ — наибольшее среди этих чисел r. По теореме 1 § 6

$$\mathbf{P}\{N_r < r+1 \text{ для всех } r = 1, \ldots, n \mid N_n = k\} = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(n+1-k)}{(n-i)} \mathbf{P}\{N_i = i+1 \mid N_n = k\}$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$.

Зададим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{a+b}$ следующим образом: $\nu_r = 0$, если r-й голос подан за кандидата A, и $\nu_r = \mu + 1$, если r-й голос подан за кандидата B. Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{a+b}$ — переставляемые случайные величины и $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{a+b} = b(\mu+1)$. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots, a+b$. Тогда $Q_j(a, b) = \mathbf{P}\{N_r < r+1$ для j индексов $r = 1, 2, \ldots, a+b\}$ и

$$\mathbf{P}\{N_i = i+1\} = \binom{a}{s\mu - 1}\binom{b}{s} \Big/ \binom{a+b}{s\mu + s - 1}$$

для $i = s(\mu+1) - 1$, $s = 0, 1, \ldots, b$. Таким образом,

$$Q_j(a, b) = \sum_{\frac{a+b+1-j}{\mu+1} \leqslant s \leqslant b} \frac{(a+1-b\mu)}{(s\mu+s-1)(a+b+1-s\mu-s)} \binom{a}{s\mu-1}\binom{b}{s} \Big/ \binom{a+b}{s\mu+s-1},$$

если $0 \leqslant a - b\mu < j < a+b$ и $Q_{a+b}(a, b) = (a+1-b\mu)/(a+b)$.

4. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения. Положим $N_r = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ для $r = 1, 2, \ldots, n$ и $N_0 = 0$. По теореме 6 § 37

$$\mathbf{P}\{N_r < r+1 \text{ для } j \text{ индексов } r = 1, 2, \ldots, n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{N_j - N_i \leqslant j - i \text{ для } i = 0, 1, \ldots, j-1 \text{ и } N_j - N_i < j - i \text{ для } i = j+1, \ldots, n\} =$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \mathbf{P}\{N_j - N_i \leqslant j - i \text{ для } i = 0, 1, \ldots, j-1 \text{ и } N_j = l\} \times$$
$$\times \mathbf{P}\{N_j - N_i < j - i \text{ для } i = j+1, \ldots, n \mid N_j = l\}.$$

По теореме 1 § 6

$$\mathbf{P}\{N_j - N_i \leqslant j - i \text{ для } i = 0, 1, \ldots, j-1 \text{ и } N_j = l\} =$$
$$= \mathbf{P}\{N_r < r+1 \text{ для } r = 1, 2, \ldots, j \text{ и } N_j = l\} \times$$
$$\times \mathbf{P}\{N_j = l\} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j+1-l)}{(j-1)} \mathbf{P}\{N_i = i+1 \text{ и } N_j = l\}$$

и

$$\mathbf{P}\,(N_j - N_i < j - i \text{ для } i = j+1, \ldots, n \mid N_j = l\} = \mathbf{P}\,\{N_{j+1} - N_j > 1 \mid N_j = l\} -$$
$$- \sum_{r=j+2}^{n} \frac{1}{(r-j-1)} \mathbf{P}\,\{N_r - N_j = r - j,\ N_{j+1} - N_j = 0 \mid N_j = l\},$$

что можно получить из общей формулы

$$\mathbf{P}\,\{N_r > r \text{ для } r = 1, \ldots, n\} = \mathbf{P}\,\{N_1 > 1\} - \sum_{r=2}^{n} \frac{r}{(r-1)} \mathbf{P}\,\{N_r = r,\ N_1 = 0\}.$$

Наконец,

$$\mathbf{P}\,\{N_r < r+1 \text{ для } j \text{ индексов } r = 1, 2, \ldots, n\} =$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \left[\mathbf{P}\,\{N_j = l,\ N_{j+1} > l+1\} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j+1-l)}{(j-i)} \mathbf{P}\,\{N_i = i+1,\ N_j = l,\ N_{j+1} > l+1\} \right] -$$
$$- \sum_{l=0}^{j} \sum_{r=j+2}^{n} \left[\frac{1}{(r-j-1)} \mathbf{P}\,\{N_j = l,\ N_{j+1} = l,\ N_r = l+r-j\} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j+1-l)}{(j-i)(r-j-1)} \mathbf{P}\,\{N_i = i+1,\ N_j = l,\ N_{j+1} = l,\ N_r = l+r-j\} \right].$$

Если задать случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{a+b}$, как в задаче 3, то вероятность $Q_j(a, b) = \mathbf{P}\,\{N_r < r+1$ для j индексов $r = 1, 2, \ldots, a+b\}$ можно найти по приведенной выше формуле, в которой теперь

$$\mathbf{P}\,\{N_i = r(\mu+1)\} = \binom{i}{r}\binom{a+b-i}{b-r}\Big/\binom{a+b}{b},$$

$$\mathbf{P}\,\{N_i = r(\mu+1),\ N_j = s(\mu+1)\} = \binom{i}{r}\binom{j-i}{s-r}\binom{a+b-j}{b-s}\Big/\binom{a+b}{b}$$

для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant a+b$ и

$$\mathbf{P}\,\{N_i = r(\mu+1),\ N_j = s(\mu+1),\ N_k = t(\mu+1)\} =$$
$$= \binom{i}{r}\binom{j-i}{s-r}\binom{k-j}{t-s}\binom{a+b-k}{b-t}\Big/\binom{a+b}{b}$$

для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant a+b$.

Замечание. Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные значения, то

$$\mathbf{P}\,\{N_r > r \text{ для } r = 1, 2, \ldots, n\} = \mathbf{P}\,\{N_1 > 1\} - \sum_{r=2}^{n} \sum_{j=2}^{r} \frac{(j-1)}{(r-1)} \mathbf{P}\,\{N_1 = j,\ N_r = r\} =$$
$$= \mathbf{P}\,\{N_1 > 1\} - \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{(r-1)} \mathbf{P}\,\{N_1 = 0,\ N_r = r\}.$$

5. Ниже будем предполагать, что m и n являются фиксированными взаимно простыми положительными целыми числами. Рассмотрим избирательные протоколы с $a=km$ голосами за кандидата A и $b=kn$ голосами за кандидата B, где $k=1, 2, \ldots$. Обозначим через $\varphi(k, j)$, $j=1, 2, \ldots, k$, число избирательных протоколов, для которых $\alpha_r \geqslant a\beta_r/b$ при $r=1, 2, \ldots, a+b$ и $\alpha_r = a\beta_r/b$ для j индексов $r=1, 2, \ldots, a+b$. Пусть

$$C_k = \frac{1}{(m+n)k}\binom{mk+nk}{mk}$$

для $k=1, 2, \ldots$. Следуя Бизли [8], можно определить $\varphi(k, j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, следующим способом. Прежде всего,

$$C_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\varphi(k, j),$$

если $k=1, 2, \ldots$. Действительно, если образовать все $a+b$ перестановок всех тех избирательных протоколов, для которых $\alpha_r \geqslant a\beta_r/b$ для $r=1, 2, \ldots, a+b$, то, с одной стороны, получатся всевозможные избирательные протоколы, а с другой стороны, избирательный протокол встретится ровно j раз, если он представляет собой циклическую перестановку избирательного протокола, для которого $\alpha_r \geqslant a\beta_r/b$ для $r=1, 2, \ldots, a+b$ и $\alpha_r = a\beta_r/b$ для j индексов $r=1, 2, \ldots, a+b$. Поэтому

$$\binom{mk+nk}{mk} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(m+n)k}{j}\varphi(k, j),$$

и утверждение доказано.

Далее, очевидно, что

$$\varphi(k, j) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_j=k} \varphi(k_1, 1)\varphi(k_2, 1)\ldots\varphi(k_j, 1)$$

для $j=1, 2, \ldots, k$. Здесь k_i, $i=1, 2, \ldots, j$, — положительные целые числа.

Обозначим $\varphi(k)=\varphi(k, 1)$; тогда два последних соотношения дадут

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) z^k = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k\right)$$

для $|z| < m^m n^n/(m+n)^{m+n}$, откуда

$$\varphi(k) = \sum_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=k} (-1)^{1+j_1+\ldots+j_k} \frac{C_1^{j_1} C_2^{j_2} \ldots C_k^{j_k}}{j_1! j_2! \ldots j_k!},$$

где j_i, $i=1, 2, \ldots, k$, — неотрицательные целые числа.

Таким образом, если $a=km$ и $b=kn$, где $(m, n)=1$, то

$$P_{a+b-1}(a, b) = \varphi(k) \Big/ \binom{a+b}{a}.$$

Обозначив $\varphi^*(k) = \varphi(k, 1) + \varphi(k, 2) + \ldots + \varphi(k, k)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^*(k) z^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k\right) - 1$$

для $|z| < m^m n^n/(m+n)^{m+n}$, откуда

$$\varphi^*(k) = \sum_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=k} \frac{C_1^{j_1} C_2^{j_2} \ldots C_k^{j_k}}{j_1!\, j_2! \ldots j_k!},$$

где j_i, $i=1, 2, \ldots, k$, — неотрицательные целые числа.

Таким образом, если $a = km$ и $b = kn$, где $(m, n) = 1$, то

$$Q_{a+b}(a, b) = \varphi^*(k) \Big/ \binom{a+b}{a}.$$

6. В соответствии с одним неопубликованным результатом Бизли, решение можно записать в виде

$$P_j(a, b) = \frac{1}{\binom{a+b}{a}} \sum_{j/(m+n) < r \leqslant k} \varphi(r)\, \varphi^*(k-r) \qquad (j = 0, 1, \ldots, a+b-1),$$

где $\varphi(r)$ и $\varphi^*(r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ имеют то же значение, что и в решении задачи 5, а $\varphi^*(0) = 1$.

7. В данном случае $\delta_{a,b}$ — дискретная случайная величина, принимающая значения $a+b-2j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, [(a+b)/2])$. Покажем сначала, что если распределение величины $\delta_{k,k}$ $(k = 1, 2\ldots)$ известно, то можно легко найти распределение величины $\delta_{a,b}$. Если $a > b$, то

$$\mathbf{P}\{\delta_{a,b} = a+b-2j\} = \sum_{k=j}^{b} \left[\binom{a}{k}\binom{b}{k} \Big/ \binom{a+b}{2k}\right] \mathbf{P}\{\delta_{k,k} = 2k-2j\} \frac{a-b}{a+b-2k}.$$

Действительно, если $2k$ есть наибольшее из чисел u отрезка $[0, a+b]$, для которых $\alpha(u) = \beta(u)$, то по теореме 1 § 2

$$\mathbf{P}\{\alpha(u) > \beta(u) \text{ для } 2k < u \leqslant a+b \mid \alpha(2k) = \beta(2k)\} = \frac{a-b}{a+b-2k}$$

при $0 \leqslant k \leqslant b$ и

$$\mathbf{P}\{\alpha(2k) = \beta(2k)\} = \binom{a}{k}\binom{b}{k} \Big/ \binom{a+b}{2k}.$$

Если $a < b$, то $\mathbf{P}\{\delta_{a,b} = a+b-2j\}$ можно найти по симметрии.

Докажем теперь, что

$$\mathbf{P}\{\delta_{a,a} = 2j\} = 1/(a+1)$$

для $j = 0, 1, \ldots, a$ и $a = 1, 2, \ldots$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\delta_{a,a} = 2j\} &= \mathbf{P}\{\alpha_r + \alpha_{r-1} > \beta_r + \beta_{r-1} \text{ для } 2j \text{ индексов } r = 1, 2, \ldots, 2a\} = \\
&= \mathbf{P}\{\alpha_r + \alpha_{r-1} > \beta_r + \beta_{r-1} \text{ для } j \text{ индексов } r = 2, 4, \ldots, 2a\} = \\
&= \mathbf{P}\{\alpha_r + \alpha_{r-1} > \beta_r + \beta_{r-1} \text{ для } j \text{ индексов } r = 1, 3, \ldots, 2a-1\} = \\
&= \mathbf{P}\{\alpha_{2s-1} > \beta_{2s-1} \text{ для } j \text{ индексов } s = 1, 2, \ldots, a\}.
\end{aligned}$$

Последнюю вероятность можно выразить также следующим эквивалентным образом. Обозначим через ν_r $(r = 1, 2, \ldots, a+1)$ число голосов, поданных за кандидата B между $(r-1)$-м и r-м голосами, поданными за A. (При $r = 1$ или $r = a+1$ первая или вторая половина этого определения должны быть опущены.)

Тогда $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{a+1}$ — переставляемые случайные величины, принимающие неотрицательные целые значения, и $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{a+1}=a$. Легко проверить непосредственно, что

$$\mathbf{P}\{\delta_{a,a}=2j\}=\mathbf{P}\{\nu_1+\ldots+\nu_r<r \text{ для } j \text{ индексов } r=1, 2, \ldots, a\}.$$

Применив теорему 2 § 37 к случайным величинам $\gamma_r=1-\nu_r$, $r=1, 2, \ldots, a+1$ получим $\mathbf{P}\{\delta_{a,a}=2j\}=1/(a+1)$ для $j=0, 1, \ldots, a$.

8. Пусть ρ_n будет тем из значений $j=0, 1, \ldots, n$, при котором функция ζ_j достигает своего максимума. С вероятностью 1 существует только один максимальный элемент. Тогда по теореме 6 § 37

$$\mathbf{P}\{\Delta_n=j\}=\mathbf{P}\{\rho_n=j\}=\mathbf{P}\{\zeta_i\leqslant\zeta_j \text{ для } i=0, 1, \ldots, n\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\zeta_j-\zeta_i\geqslant 0 \text{ для } i=0, 1, \ldots, j\}\,\mathbf{P}\{\zeta_i-\zeta_j\leqslant 0 \text{ для } i=j, \ldots, n\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\Delta_j=0\}\,\mathbf{P}\{\Delta_{n-j}=0\},$$

откуда для всех $n\geqslant 0$

$$\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}\{\Delta_j=0\}\,\mathbf{P}\{\Delta_{n-j}=0\}=1.$$

Умножив это уравнение на z^n и просуммировав для $n=0, 1, 2, \ldots$, получим

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\Delta_j=0\}\,z^j=\frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

для $|z|<1$ и, таким образом,

$$\mathbf{P}\{\Delta_j=0\}=\binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}$$

для $j=0, 1, 2, \ldots$.

9. Событие $\{\alpha_k(n)=j\}$ может произойти в одном из следующих взаимно исключающих случаев: существует такое число r $[\max(0, j+k-n)\leqslant r\leqslant\min(j,k)]$, что среди величин $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}$ найдется r таких, которые меньше ζ_j, и для этого же числа r среди величин $\zeta_{j+1}, \zeta_{j+2}, \ldots, \zeta_n$ найдется $k-r$ таких, которые меньше ζ_j. Эти два события независимы. Вероятность первого события равна $\mathbf{P}\{\Delta_j=r\}$, а вероятность второго события равна $\mathbf{P}\{\Delta_{n-j}=k-r\}$, причем эти вероятности найдены при решении задачи 8. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\alpha_k(n)=j\}=\sum_{r=\max(0,\,j+k-n)}^{\min(j,\,k)}\{\mathbf{P}\Delta_j=r\}\,\mathbf{P}\{\Delta_{n-j}=k-r\}=$$
$$=\sum_{r=\max(0,\,j+k-n)}^{\min(j,\,k)}\mathbf{P}\{\Delta_r=0\}\,\mathbf{P}\{\Delta_{r-j}=0\}\,\mathbf{P}\{\Delta_{k-r}=0\}\,\mathbf{P}\{\Delta_{n-j-k+r}=0\},$$

где

$$\mathbf{P}\{\Delta_j=0\}=\binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}.$$

10. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины, одинаково распределенные с непрерывной функцией распределения $F(x)$, то $\eta_1=F(\xi_1)$, $\eta_2=F(\xi_2), \ldots, \eta_n=F(\xi_n)$ — взаимно независимые случайные величины с одинаковым равномерным распределением в интервале $(0, 1)$. Обозначим через $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а через $G_n(x)$ —

эмпирическую функцию распределения выборки $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Тогда $F_n(x) = G_n(F(x))$ и

$$\delta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| = \sup_{-\infty < x < \infty} |G_n(F(x)) - F(x)| = \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |G_n(y) - y|,$$

что и доказывает, что распределение величины δ_n не зависит от $F(x)$.

11. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — независимые выборки, являющиеся взаимно независимыми случайными величинами с общей непрерывной функцией распределения. Объединим обе выборки в одну последовательность и расположим ее элементы по возрастанию. Определим случайные величины $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2n}$ следующим образом: $\chi_i = 1$, если i-я величина в полученной упорядоченной последовательности принадлежит первой выборке, и $\chi_i = -1$, если i-я величина принадлежит второй выборке. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\delta^+(n, n) \leqslant \frac{c}{n}\right\} = \mathbf{P}\{\chi_1 + \ldots + \chi_r \leqslant c \text{ для всех } r = 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

Последовательность $\{\chi_1 + \ldots + \chi_r\}$ описывает путь частицы, совершающей случайное блуждание по оси x. Частица начинает движение из точки $x = 0$ и за $2n$ шагов может переместиться на n единиц вправо и на n единиц влево, причем все пути равновероятны.

Из решения задачи 3 гл. 1 следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\delta^+(n, n) \leqslant \frac{c}{n}\right\} = 1 - \binom{2n}{n+1+c} \Big/ \binom{2n}{n}$$

для $c = 0, 1, \ldots, n$. Если в этой формуле $c = [\sqrt{2n}\, z]$ и $n \to \infty$, то для $z \geqslant 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\, \delta^+(n, n) \leqslant z\right\} = 1 - e^{-2z^2}.$$

12. В обозначениях задачи 11

$$\mathbf{P}\left\{\delta(n, n) \leqslant \frac{c}{n}\right\} = \mathbf{P}\{|\chi_1 + \ldots + \chi_r| \leqslant c \text{ для } r = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Решение задачи 4 гл. 2 дает

$$\mathbf{P}\left\{\delta(n, n) \leqslant \frac{c}{n}\right\} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_k (-1)^k \binom{2n}{n + k(c+1)}$$

для $c = 0, 1, \ldots, n$. Если в этой формуле $c = [\sqrt{2\pi}\, z]$ и $n \to \infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\, \delta(n, n) \leqslant z\right\} = K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

для $z \geqslant 0$. Это согласуется с формулой (13) § 48.

13. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — независимые выборки, состоящие из взаимно независимых случайных величин с общей непрерывной функцией распределения. Расположим их в одну последовательность в порядке возрастания. Обозначим через α_r число элементов первой выборки среди первых r членов новой последовательности, а через β_r число элементов второй выборки среди первых r членов этой последовательности. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0 < G_n(x) < 1} [F_m(x) - G_n(x)] > 0\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\alpha_r}{m} > \frac{\beta_r}{n} \text{ для } r = 1, 2, \ldots, m+n-1\right\}.$$

При $m=n$ в силу теоремы 1 § 2 $\mathbf{P}\{\alpha_r>\beta_r$ для $r=1, 2, \ldots, 2m-1\}=\frac{1}{2m-1}$.

Если $(m, n)=1$, то с помощью решения задачи 1 гл. 8 получаем

$$\mathbf{P}\left\{\alpha_r>\frac{m}{n}\beta_r \text{ для } r=1, 2, \ldots m+n-1\right\}=\frac{1}{m+n}.$$

14. Обозначим через τ_r, $r=1, 2, \ldots$, моменты появления r-го события в пуассоновском процессе. Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|\nu(u)-\lambda u|\leqslant x\sqrt{\lambda}\}=$$

$$=\mathbf{P}\{-x\sqrt{\lambda}\leqslant\lambda\tau_r-r\leqslant x\sqrt{\lambda}-1 \text{ для } 0\leqslant\tau_r\leqslant 1 \text{ и } |\nu(1)-\lambda|\leqslant x\sqrt{\lambda}\}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|\nu(u)-\lambda u|\leqslant x\sqrt{\lambda}\}=\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant\tau_r\leqslant 1}\left|\tau_r-\frac{r}{\lambda}\right|\leqslant\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right\}.$$

Здесь τ_r является суммой r взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ при $x\geqslant 0$. В данном случае $\mathbf{E}\{\tau_r\}=r/\lambda$ и $\operatorname{Var}\{\tau_r\}=r/\lambda^2$. Используя принцип инвариантности Эрдёша и Каца, правую часть последнего равенства можно представить в виде

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant r<\lambda}|\zeta_r|\leqslant x\sqrt{\lambda}\},$$

где $\zeta_r=\xi_1+\ldots+\xi_r$ при $r=1, 2, \ldots$, а $\{\xi_r\}$ — взаимно независимые случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\xi_r=1\}=\mathbf{P}\{\xi_r=-1\}=1/2$. Решение задачи 4 гл. 1 дает $\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}|\zeta_r|<a\}=\sum_j(-1)^j\mathbf{P}\{(2j-1)a<\zeta_n<(2j+1)a\}$ для натурального числа a. Если $a=[x\sqrt{n}]$, то по центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant r\leqslant n}|\zeta_r|\leqslant x\sqrt{n}\}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j[\Phi((2j+1)x)-\Phi((2j-1)x)],$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du$. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|\nu(u)-\lambda u|\leqslant x\sqrt{\lambda}\}=L(x),$$

где

$$L(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j[\Phi((2j+1)x)-\Phi((2j-1)x)].$$

Этот результат согласуется с формулой (53) § 40.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ