

*Л.А. Тахтагджян  
Л.Д. Фагеев*

*Гамильтонов подход  
в теории солитонов*

*Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фагеев*

***Гамильтонов подход  
в теории солитонов***

*Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев*

## **ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД В ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ**

Посвящается одному из наиболее активно развивающихся направлений современной математической физики — теории солитонов — методу обратной задачи. Приводится полное и систематическое изложение основ метода обратной задачи с гамильтоновой точки зрения, что позволяет связать воедино различные аспекты теории. Основные понятия теории солитонов вначале излагаются на избранном примере нелинейного уравнения Шредингера и лишь затем вводятся в общем виде.

Для специалистов математиков и физиков-теоретиков, а также студентов математических и физических факультетов университетов.

### **Содержание**

Предисловие	5
Введение	7
Часть I. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА (модель НШ)	14
<b>Глава I. Представление нулевой кривизны</b>	<b>14</b>
§ 1. Формулировка модели НШ	14
§ 2. Условие нулевой кривизны	22
§ 3. Свойства матрицы монодромии в квазипериодическом случае	28
§ 4. Локальные интегралы движения	35
§ 5. Матрица монодромии в быстроубывающем случае	39
§ 6. Аналитические свойства коэффициентов перехода	46
§ 7. Динамика коэффициентов перехода	51
§ 8. Случай конечной плотности. Решения Йоста	55
§ 9. Случай конечной плотности. Коэффициенты перехода	61
§ 10. Случай конечной плотности. Временная динамика и интегралы движения	70
§ 11. Комментарии и литературные указания	75
<b>Глава II. Задача Римана</b>	<b>77</b>
§ 1. Быстроубывающий случай. Формулировка задачи Римана	77
§ 2. Быстроубывающий случай. Исследование задачи Римана	84
§ 3. Приложение решения обратной задачи к модели НШ	102
§ 4. Связь метода задачи Римана с формализмом интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко	108
§ 5. Быстроубывающий случай. Солитонные решения	120
§ 6. Решение обратной задачи для случая конечной плотности. Метод задачи Римана	130
§ 7. Решение обратной задачи для случая конечной плотности. Формализм Гельфанда — Левитана — Марченко	138
§ 8. Солитонные решения для случая конечной плотности	156
§ 9. Комментарии и литературные указания	167
<b>Глава III. Гамильтонова формулировка</b>	<b>171</b>
§ 1. Фундаментальные скобки Пуассона и $r$ -матрица	171
§ 2. Инволютивность интегралов движения в квазипериодическом случае	179

§ 3. Вывод представления нулевой кривизны из фундаментальных скобок Пуассона	184
§ 4. Интегралы движения в быстроубывающем случае и в случае конечной плотности	190
§ 5. L-оператор и иерархия пуассоновых структур	194
§ 6. Скобки Пуассона коэффициентов перехода в быстроубывающем случае	206
§ 7. Переменные действие — угол для быстроубывающего случая	212
§ 8. Динамика солитонов с гамильтоновой точки зрения	224
§ 9. Полная интегрируемость в случае конечной плотности	230
§ 10. Комментарии и литературные указания	247
Часть II. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ	253
<b>Глава I. Основные примеры и их общие свойства</b>	<b>253</b>
§ 1. Формулировка основных непрерывных моделей	253
§ 2. Примеры моделей на решетке	263
§ 3. Представление нулевой кривизны как способ построения интегрируемых уравнений	275
§ 4. Калибровочная эквивалентность моделей НШ при $\kappa = -1$ и МГ	284
§ 5. Гамильтонова формулировка уравнений главных киральных полей и связанных с ними моделей	289
§ 6. Задача Римана как способ построения решений интегрируемых уравнений	300
§ 7. Схема построения общего решения уравнения нулевой кривизны. Заключительные замечания по поводу интегрируемых уравнений	305
§ 8. Комментарии и литературные указания	312
<b>Глава II. Фундаментальные непрерывные модели</b>	<b>316</b>
§ 1. Вспомогательная линейная задача для модели МГ	316
§ 2. Обратная задача для модели МГ	328
§ 3. Гамильтонова формулировка модели МГ	340
§ 4. Вспомогательная линейная задача для модели SG	348
§ 5. Обратная задача для модели SG	359
§ 6. Гамильтонова формулировка модели SG	381
§ 7. Модель SG в координатах светового конуса	394
§ 8. Уравнение Л — Л как универсальная интегрируемая модель с двумерным вспомогательным пространством	403
§ 9. Комментарии и литературные указания	408
<b>Глава III. Фундаментальные модели на решетке</b>	<b>412</b>
§ 1. Полная интегрируемость модели Тода в квазипериодическом случае	412
§ 2. Вспомогательная линейная задача для модели Тода в быстроубывающем случае	416
§ 3. Обратная задача и динамика солитонов модели Тода в быстроубывающем случае	427
§ 4. Полная интегрируемость модели Тода в быстроубывающем случае	435

§ 5. Решеточная модель $L$ — $L$ как универсальная интегрируемая система с двумерным вспомогательным пространством	444
§ 6. Комментарии и литературные указания	454
<b>Глава IV. Ли-алгебраический подход к классификации и исследованию интегрируемых моделей</b>	<b>456</b>
§ 1. Фундаментальные скобки Пуассона, порожденные алгеброй токов	456
§ 2. Тригонометрические и эллиптические $g$ -матрицы и связанные с ними фундаментальные скобки Пуассона	466
§ 3. Фундаментальные скобки Пуассона на решетке	473
§ 4. Геометрическая интерпретация представления нулевой кривизны и метода задачи Римана	476
§ 5. Иллюстрация общей схемы на примере модели НШ	489
§ 6. Комментарии и литературные указания	497
Заключение	503
Список литературы	504
<b>Предметный указатель</b>	<b>523</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге излагаются основы метода обратной задачи и его приложение к теории солитонов в том виде, как мы его понимаем в Ленинграде.

Понятие солитона было введено Крускалом и Забуским в 1965 году. Солитоном (уединенной волной) называют локализованное частицеподобное решение нелинейного уравнения, описывающее возбуждения с конечной энергией, которое обладает рядом характеристических свойств: при распространении изолированной волны она сохраняет свой профиль; при взаимодействии нескольких волн происходит их упругое рассеяние, так что сохраняются как их число, так и профили. Иногда понятие солитона трактуют в более широком смысле как локализованное решение с конечной энергией. В настоящее время понятие солитона получило широкое распространение. Это объясняется его универсальностью и обилием приложений при объяснении различных процессов в нелинейных средах. Математический аппарат теории солитонов — метод обратной задачи — стал мощным инструментом математической физики для исследования нелинейных уравнений в частных производных, сравнимым по силе с методом Фурье.

В основу книги положена гамильтонова интерпретация метода, что и объясняет выбор ее названия. В современной математической физике методы дифференциальной геометрии и, в особенности, гамильтонов формализм имеют большую популярность. Именно на основе общих соображений гамильтонова формализма метод обратной задачи получил наиболее элегантную формулировку. Кроме того, гамильтонов формализм является связующим звеном классической и квантовой механики. Поэтому данная книга, помимо введения в классическую теорию солитонов, является основой для перехода к квантовой теории солитонов, которую мы планируем изложить в следующей монографии.

Мы адресуем эту книгу специалистам по современной математической физике. Этим обусловлен выбор материала и уровень математической строгости. В то же время мы надеемся, что она будет интересна и специалистам в других областях математики, а также физикам-теоретикам. Однако как математическая монография она не содержит приложений теории солитонов к конкретным физическим явлениям.

Книга создавалась в течение двух лет в Ленинграде. Ее содержание претерпевало ряд изменений в связи с продолжающимся развитием метода. Мы надеемся, что в настоящем виде она приобрела достаточно устойчивую форму. В то же время мы не претендуем на полное отражение современного состояния метода. В этом смысле она является введением в предмет, а не изложением всех современных конструкций, связанных с многомерными обобщениями и представлениями бесконечномерных алгебраических структур.

Мы благодарны нашим коллегам по лаборатории математических проблем теоретической физики ЛОМИ: В. Е. Корепину, П. П. Кулишу, А. Г. Рейману, Н. Ю. Решетихину, М. А. Семенову-Тян-Шанскому, Е. К. Складчину и Ф. А. Смирнову, общение с которыми, бесспорно, повлияло на содержание этой книги. Мы также признательны В. О. Тарасову, взявшему на себя труд внимательно прочитать рукопись книги.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория солитонов и связанная с ней теория интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений в двумерном пространстве-времени привлекли за последние 15 лет внимание большого количества исследователей широкого спектра: от алгебраических геометров до специалистов по прикладной гидродинамике. В современной математической физике сложилась целая большая область, посвященная этой теории, носящая название метода обратной задачи интегрирования нелинейных уравнений. (Альтернативные названия — метод обратного спектрального преобразования, метод изоспектральных деформаций и более жаргонное — метод  $L - A$  пар.)

Начало методу положила пионерская работа Принстонской группы. Мы имеем в виду работу «Метод для решения уравнения Кортевега—де Фриза» Гарднера, Грина, Крускала и Миуры, опубликованную в 1967 году [21]. Они предложили замечательную нелинейную замену переменных в этом уравнении, после которой оно становится линейным и явно решается. В описании этой замены участвует формализм прямой и обратной задач рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Название метода связано с этим обстоятельством.

Период становления метода обратной задачи связан с двумя работами:

1) работой Лакса «Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны», опубликованной в 1968 году [24], в которой были формализованы результаты работы [21] и введено понятие  $L - A$  пары Лакса;

2) работой Захарова и Шабата «Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах» 1971 года [2], в которой показано, что понятие  $L - A$  пары не является специальным свойством уравнения Кортевега—де Фриза, а применимо и к нелинейному уравнению Шредингера; тем самым были открыты перспективы для применения метода и к другим уравнениям.

После этого развитие метода обратной задачи и его приложений пошло с нарастающей скоростью и привело в настоящее время к созданию целой области математической физики. Характерно, что работы по этой теме носят в основном коллективный характер, и можно выделить несколько сложившихся групп; кроме уже упоминавшейся Принстонской группы, это:



Московская группа, представителями которой являются Захаров, Манаков, Новиков, Кричевер, Дубровин и Михайлов;

Потсдамская группа — Абловитц, Кауп, Ньюел, Сегур и их сотрудники;

Аризонская группа в составе Флашки, Лэмба и Маклаффлина.

В более позднее время появилась Кюотская группа — Сато, Мива, Джимбо, Кашивара и их сотрудники.

Есть и другие центры: Нью-Йорк — Лакс, Кейс и Трубовитц; Рим — Калоджеро и Дегасперис; Манчестер — Буллоу и его сотрудники; Фрайбург — Полмайер и Хонеркамп. В Москве к уже указанным выше присоединяются Гельфанд, Манин, Переломов и их сотрудники. И, наконец, в Ленинграде также сформировалась своя группа, к которой относятся авторы данной книги, а также Корепин, Кулиш, Рейман, Склянин, Семенов-Тянь-Шанский, Изергин, Итс и Матвеев. Кроме упомянутых групп, есть и более «одинокие» исследователи, сделавшие важный вклад: Шабат, Мозер, Костант и Адлер.

Здесь мы перечислили лишь специалистов в области математической физики и не упомянули о большой армии исследователей, занимающихся приложениями теории солитонов к квантовой теории поля, физике твердого тела, нелинейной оптике, физике плазмы, гидродинамике, биологии и к другим разделам естествознания. Одно это впечатляющее перечисление людей и сюжетов указывает на размах интересов участников и их географию.

В настоящее время можно считать, что теория солитонов достигла зрелости. Естественно, что во многих группах появилось желание отразить свои взгляды на развитие предмета в монографиях. Ряд книг, отражающих интересы и взгляды упомянутых школ, уже появился. Это монографии:

Захаров, Манаков, Новиков, Питаевский «Теория солитонов: Метод обратной задачи» [3];

Лэмб «Элементы теории солитонов» [23];

Абловитц, Сегур «Солитоны и обратное преобразование рассеяния» [8];

Дегасперис, Калоджеро «Спектральные преобразования и солитоны» [11];

Додд, Гиббон, Моррис, Эйлбек «Солитоны и нелинейные волны» [12].

Сборники статей:

«Солитоны в действии», под редакцией Лонгрена и Скотта [25];

«Солитоны», под редакцией Буллоу и Кодри [9];

«Преобразования Бэклунда», под редакцией Миуры [27];

«Теория солитонов», под редакцией Захарова и Манакова [26];

5) «Нелинейные эволюционные уравнения, решаемые с помощью спектрального преобразования», под редакцией Калоджера [10], а также учебник Эйленбергера «Солитоны: математические методы для физиков» [13].

Мы в Ленинграде тоже достигли такого состояния, что после написания ряда обзоров [5, 14—16], посвященных квантовой теории солитонов и ее применению в квантовой теории поля, решили изложить свои взгляды на метод обратной задачи в целом.

Естественно, что на эти взгляды накладывают отпечаток наши интересы, связанные с квантовой формулировкой теории солитонов. Развитие квантового варианта метода обратной задачи, начавшееся с 1978 года и отраженное в серии обзоров [4, 6, 7, 16—20, 22, 28], заставило нас по-новому взглянуть на основные приемы и средства метода обратной задачи в классическом варианте. Особенно это относится к использованию языка гамильтоновой динамики, естественно связанного с квантовыми приложениями.

Дело в том, что большинство интегрируемых моделей (в том числе все интересные для приложений) обладают гамильтоновой структурой, т. е. соответствующие уравнения представляют собой бесконечномерные аналоги гамильтоновых уравнений классической механики. При этом преобразования метода обратной задачи находят естественную интерпретацию как канонические преобразования по отношению к этой структуре, а переменные, в которых нелинейные уравнения линеаризуются, получают смысл переменных действие — угол.

На примере уравнения Кортевега — де Фриза эта программа была сформулирована и реализована в 1971 году в период становления теории в работе Захарова и Фаддеева «Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система» [1]. В дальнейшем она была осуществлена и для других интересных моделей.

В упомянутых выше монографиях других авторов гамильтонов подход, как правило, упоминается, но не играет руководящей методологической роли. Упор на гамильтоновость, соответствующий выбор материала и его расположение составляют основные отличия нашей книги от других. В то же время она внутренне самосогласована и может служить как самостоятельное введение в предмет.

Первоначально мы планировали написать книгу, посвященную главным образом квантовому варианту, в которой предполагалось поместить подходящее введение в классический метод. Однако в процессе работы этот проект, как это часто бывает, разросся, и поэтому мы решили разбить книгу на две. Первая из них посвящается только классической теории и представляет собой настоящую книгу.

Остановимся теперь подробнее на ее структуре и методических новшествах. В отличие от других авторов, в качестве основного примера мы выбираем нелинейное уравнение Шредингера (НШ)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa |\psi|^2 \psi,$$

где  $\psi(x, t)$  — комплекснозначная функция, а не уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Для этого есть ряд причин:

1. Во многих технических аспектах уравнение НШ проще и фундаментальнее уравнения КдФ. Так, уравнение НШ непосредственно иллюстрирует простые общие конструкции метода, в то время как переход от них к уравнению КдФ требует ряда редукций. В частности, вспомогательная линейная задача для уравнения НШ (задача на собственные значения для оператора Лапласа  $L$ ) имеет вид системы дифференциальных уравнений первого порядка в общем положении. Для уравнения КдФ роль оператора  $L$  играет одномерный оператор Шредингера, спектральная теория которого немного сложнее. Кроме того, этот оператор можно рассматривать как весьма специальный случай системы первого порядка.

2. Гамильтонов формализм для уравнения НШ проще и естественнее; переменные поля  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  (где черта означает комплексное сопряжение) образуют простой набор канонических переменных:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = i\delta(x - y).$$

В то же время скобки Пуассона для уравнения КдФ

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x - y)$$

не приводят сразу к очевидному выбору канонически сопряженных переменных.

3. Уравнение НШ имеет естественный квантовый аналог, описывающий квантовую систему с переменным числом частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала  $v_{ij} = \delta(x_i - x_j)$ . Поэтому оно особенно удобно для реализации нашего проекта, включающего квантовую теорию. В то же время уравнение КдФ в квантовой области не имеет непосредственного физического смысла.

4. Последнее, но не менее важное обстоятельство связано с духом противоречия, который не позволяет нам начинать еще одну книгу с набившего оскомину уравнения КдФ.

Описание уравнения НШ занимает почти половину книги и выделено в отдельную часть. Мы решили рассказать на этом примере об основах метода в такой форме, чтобы перенос его на другие уравнения был бы более или менее автоматическим. Все рассуждения проведены подробно и настолько строго математически доказаны, насколько это не противоречит чувству разумного. Зато при разборе других моделей мы ограничиваемся ссылками на пример уравнения НШ и более подробно разбираем лишь их характерные отличия.

Вторая часть посвящена разбору нескольких характерных моделей, сыгравших важную роль в развитии метода обратной задачи. Мы называем их фундаментальными. Список включает модели, задаваемые следующими уравнениями:

1) уравнением Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \varphi = 0$$

для вещественной функции  $\varphi(x, t)$ ;

2) уравнением магнетика Гейзенберга

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2},$$

где  $\vec{S}(x, t)$  лежит на единичной сфере в  $\mathbb{R}^3$ , а  $\wedge$  означает внешнее произведение;

3) уравнениями цепочки Toda

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}$$

для координат  $q_n$ ,  $-\infty < q_n < \infty$ .

Эти модели в основном тексте разобраны наиболее подробно. Кроме них в книге фигурирует еще ряд физически интересных моделей (модель  $N$ -волн, киральное поле, модель Ландау — Лифшица). Наконец, во второй части также содержится достаточно общая схема классификации интегрируемых моделей и метода построения их решений.

С технической точки зрения основные отличия нашего изложения состоят в следующем:

1. Вместо оригинального представления Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, A]$$

и соответствующей вспомогательной линейной задачи

$$L\Psi = \lambda\Psi$$

мы с самого начала используем представление нулевой кривизны

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0$$

и вспомогательную линейную задачу в форме

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, \lambda) F.$$

2. Наряду с обычным исследованием прямой и обратной задач для вспомогательной линейной системы на бесконечном интервале мы рассматриваем еще и конечный интервал  $-L \leq x \leq L$  с квазипериодическими граничными условиями. Однако соответствующая обратная задача основана на анализе на римановых поверхностях и выходит за рамки нашего изложения.

3. При исследовании обратной задачи вместо традиционных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко мы ставим в основу матричную задачу Римана — задачу об аналитической факторизации матриц-функций. Как теперь стало ясно, этот метод более универсален и технически более прозрачен. На примере уравнения НШ мы объясняем, как метод Гельфанда — Левитана — Марченко находит свое естественное место в рамках метода задачи Римана.

4. Гамильтонова структура задается в терминах так называемой  $r$ -матрицы. Этот метод родился в недрах квантового метода обратной задачи и лишь затем был использован в его классическом варианте. Мы считаем метод  $r$ -матрицы наиболее адекватным и универсальным и постараемся это объяснить.

5. Мы приводим достаточно содержательную классификацию интегрируемых моделей, основанную на понятии  $r$ -матрицы. Адекватным языком для непрерывных моделей оказывается формализм скобок Ли — Пуассона на (бесконечномерных) алгебрах токов. Мы обсуждаем также обобщение этой классификации на случай моделей на решетке.

Подчеркнем еще раз, что все эти характерные черты находят свое естественное место в квантовом варианте метода.

Скажем теперь несколько слов об уровне математической строгости. Изложение в книге ведется в основном элементарно и основано на технике классического анализа. Для модели НШ в быстроубывающем случае мы доказываем все результаты по прямой и обратной задачам для вспомогательной линейной системы. Мы не делаем этого при изложении других моделей, чтобы не загромождать книгу скучными деталями. Мы считаем, что модель НШ разобрана достаточно инвариантным образом и читатель сам может восстановить недостающие детали.

Однако строгое доказательство утверждений, связанных с гамильтоновой формулировкой, должно использовать анализ на

бесконечномерных многообразиях. Этот уровень строгости мы считаем для данной тематики пока излишним и поэтому смело пользуемся терминологией дифференциальной геометрии в бесконечномерном случае без полного обоснования. Мы делаем это сознательно, так как нам кажется, что строгие доказательства по этому поводу не проясняют существа дела, и мы оставляем их специалистам по глобальному анализу. Мы верим, что это соответствует состоянию дел в современной математической физике, к которой и относится данная монография.

Метод обратной задачи в настоящее время развит настолько, что его изложение можно вести с самого начала в общем виде. Однако мы думаем, что это далеко не самый лучший способ введения в предмет. Мы сознательно вводим основные понятия метода на конкретном примере, иллюстрируем их универсальность на других моделях и этим подводим читателя к естественной и достаточно общей конструкции, лежащей в основе метода. Мы считаем, что это соответствует духу современной математической физики.

На этом мы заканчиваем содержательную часть введения. Мы решили не давать здесь более формального пересказа книги и ограничились лишь основными историческими указаниями и методическими основами. Мы надеемся, что оглавление достаточно подробно и адекватно отражает содержание книги.

Наконец, остановимся на строении книги. Она состоит из двух частей, разделенных на главы и параграфы. В основном тексте мы не приводим ссылок на оригинальные работы. Для этого вводится специальный параграф в конце каждой главы, где содержатся также замечания и комментарии. Там же мы упоминаем другие аспекты метода, не вошедшие в основной текст, и даем соответствующие ссылки.

Все формулы в тексте перенумерованы и несут номер параграфа и собственно номер формулы. При ссылках на формулы из другой главы данной части используется тройная нумерация, где первое число указывает на номер главы. Ссылки на формулы из другой части оговариваются особо.

## Глава I

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

## § 1. Формулировка модели НШ

Рассматриваемая модель представляет собой динамическую систему, порожденную нелинейным уравнением

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa |\psi|^2 \psi \quad (1.1)$$

и начальным условием

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x). \quad (1.2)$$

Здесь  $\psi(x, t)$  — комплекснозначная функция (классическое заряженное поле), а  $|\psi|^2 = \psi \bar{\psi}$ , где черта означает комплексное сопряжение. В уравнение (1.1) входит вещественный параметр  $\kappa$  — константа связи. Переменная  $x$  пробегает всю вещественную ось  $-\infty < x < \infty$ , а начальные данные  $\psi(x)$  предполагаются достаточно гладкими.

В линейном пределе  $\kappa=0$  уравнение (1.1) совпадает с уравнением Шредингера для волновой функции свободной одномерной частицы с массой  $m=1/2$ . Отсюда происходит жаргонное название (1.1) — *нелинейное уравнение Шредингера*, хотя физический смысл его далек от квантовой механики одночастичной системы. Наиболее содержательные физические приложения уравнение (1.1) имеет в нелинейной оптике. В то же время оно представляет собой достаточно универсальную модель нелинейного уравнения.

Начальную задачу (1.1) — (1.2) следует снабдить граничными условиями. Мы будем рассматривать три типа таких условий.

1) *Быстроубывающий случай*. Считается, что

$$\psi(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

достаточно быстро, например,  $\psi$  принадлежит пространству Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ , т. е.  $\psi$  бесконечно дифференцируема и при  $|x| \rightarrow \infty$  убывает вместе со всеми своими производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ . Ниже будем использовать и более слабые условия.

2) *Случай конечной плотности.* Считается, что

$$\psi(x, t) \rightarrow \rho e^{i\varphi_{\pm}(t)} \text{ при } x \rightarrow \pm \infty, \quad (1.4)$$

где  $\rho > 0$ , а  $0 \leq \varphi_{\pm} < 2\pi$ . Величина  $\rho^2$  играет роль плотности, а  $\varphi_{\pm}$  называются *асимптотическими фазами*.

Будем говорить, что граничные условия *принимаются в смысле Шварца*, если  $\psi - \rho e^{i\varphi_{\pm}}$  является функцией типа Шварца в окрестности  $\pm \infty$ . Этот термин мы будем часто использовать в дальнейшем.

Условие (1.4) согласовано с уравнением (1.1) в том смысле, что  $\rho$  и  $\theta = \varphi_+ - \varphi_-$  не зависят от времени. Однако удобнее сделать постоянными обе фазы  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$ . Для этого уравнение (1.1) следует модифицировать, добавив линейный член  $-2\kappa\rho^2\psi$ , так что оно запишется в виде

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa (|\psi|^2 - \rho^2) \psi. \quad (1.5)$$

3) *Квазипериодические граничные условия.* Здесь мы считаем, что  $\psi$  — гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$\psi(x+2L, t) = e^{i\theta} \psi(x, t), \quad (1.6)$$

где  $0 \leq \theta < 2\pi$  и  $\theta$  не зависит от  $t$ . Как и в предыдущем случае, это условие согласовано с уравнением (1.1). Ясно, что в этом случае достаточно исследовать уравнение (1.1) в фундаментальной области группы сдвигов, порожденной преобразованием  $x \rightarrow x+2L$ . Для определенности в качестве этой области выберем интервал  $-L \leq x < L$ .

Условия 3) являются наиболее общими из приведенных. Остальные получаются из (1.6) последовательными предельными переходами  $L \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow 0$ .

Уравнение (1.1) вместе с приведенными граничными условиями определяет динамическую систему, которую мы называем моделью НШ.

Убедимся, что эта модель является гамильтоновой для всех трех граничных условий. Мы считаем, что читатель знаком с основными понятиями гамильтоновой механики, во всяком случае для конечномерных динамических систем. Поэтому ниже мы обсудим лишь специфику, связанную с бесконечномерностью нашей системы.

Начнем с быстроубывающего случая. Фазовое пространство  $\mathcal{M}_0$  является вещественным линейным бесконечномерным пространством, комплексные координаты в котором задаются парами функций  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  из  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ . Наглядно можно считать, что переменная  $x$  играет роль номера координат; при фиксированном  $x$  значения  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  пробегают двумерное веществ-



венное пространство  $\mathbb{R}^2$  с вещественными координатами  $\operatorname{Re} \psi(x) = (\psi(x) + \bar{\psi}(x))/2$ ,  $\operatorname{Im} \psi(x) = (\psi(x) - \bar{\psi}(x))/(2i)$ .

Введем алгебру наблюдаемых на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Для этого рассмотрим вещественнозначные функционалы вида

$$F(\psi, \bar{\psi}) = c + \sum_{\substack{n,m=0, \\ (n,m) \neq (0,0)}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m) \times \\ \times \psi(y_1) \dots \psi(y_n) \bar{\psi}(z_1) \dots \bar{\psi}(z_m) dy_1 \dots dy_n dz_1 \dots dz_m, \quad (1.7)$$

где  $c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m)$  — обобщенные функции над  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ , симметричные по наборам переменных  $y_1, \dots, y_n$  и  $z_1, \dots, z_m$  в отдельности и удовлетворяющие условию вещественности

$$c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m) = \overline{c_{mn}(z_1, \dots, z_m | y_1, \dots, y_n)}. \quad (1.8)$$

Предположим также, что ряд (1.7) абсолютно сходится при всех  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$  из  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ . Такие функционалы естественно называть *вещественно-аналитическими*.

В соответствии с общим определением *вариационных производных*

$$\delta F(\psi, \bar{\psi}) = F(\psi + \delta\psi, \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}) - F(\psi, \bar{\psi}) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta\psi(x)} \delta\psi(x) + \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)} \delta\bar{\psi}(x) \right) dx, \quad (1.9)$$

с точностью до членов более высокого порядка малости по  $\delta\psi$  и  $\delta\bar{\psi}$ , для функционалов вида (1.7) имеем

$$\frac{\delta F}{\delta\psi(x)} = \sum_{\substack{n,m=0, \\ (n,m) \neq (0,0)}}^{\infty} n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c_{nm}(x, y_1, \dots, y_{n-1} | z_1, \dots, z_m) \times \\ \times \psi(y_1) \dots \psi(y_{n-1}) \bar{\psi}(z_1) \dots \bar{\psi}(z_m) dy_1 \dots dy_{n-1} dz_1 \dots dz_m, \quad (1.10)$$

$$\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)} = \sum_{\substack{n,m=0, \\ (n,m) \neq (0,0)}}^{\infty} m \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c_{nm}(y_1, \dots, y_n | x, z_1, \dots, z_{m-1}) \times \\ \times \psi(y_1) \dots \psi(y_n) \bar{\psi}(z_1) \dots \bar{\psi}(z_{m-1}) dy_1 \dots dy_n dz_1 \dots dz_{m-1}. \quad (1.11)$$

Таким образом, вариационные производные  $\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}$ ,  $\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)}$  являются, вообще говоря, обобщенными функциями. Функционал называется *гладким*, если эти производные являются функциями из пространства Шварца.

Гладкие вещественно-аналитические функционалы составляют алгебру наблюдаемых на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . На алгебре наблюдаемых введем пуассонову структуру посредством скобок Пуассона

$$\{F, G\} = i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right) dx. \quad (1.12)$$

Введенная в (1.12) операция очевидным образом удовлетворяет основным свойствам скобок Пуассона:

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (1.13)$$

— свойство антисимметрии и

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0 \quad (1.14)$$

— тождество Якоби.

Формула (1.12) обобщает на бесконечномерный случай обычную скобку Пуассона для функций на фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  с вещественными координатами  $p_k, q_k, k=1, \dots, n$ ,

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right), \quad (1.15)$$

записанную в комплексных координатах  $z_k = (q_k + ip_k)/\sqrt{2}, \bar{z}_k = (q_k - ip_k)/\sqrt{2}$ :

$$\{f, g\} = i \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial g}{\partial z_k} \right). \quad (1.16)$$

Координаты  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  на  $\mathcal{M}_0$  сами можно рассматривать как функционалы, однако их вариационные производные являются обобщенными функциями

$$\frac{\delta \psi(x)}{\delta \psi(y)} = \delta(x-y), \quad \frac{\delta \bar{\psi}(x)}{\delta \bar{\psi}(y)} = \delta(x-y), \quad (1.17)$$

а  $\frac{\delta \psi(x)}{\delta \bar{\psi}(y)}$  и  $\frac{\delta \bar{\psi}(x)}{\delta \psi(y)}$  исчезают. Здесь  $\delta(x-y)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

Подставляя формально (1.17) в выражение (1.12), получаем соотношения

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0, \quad \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = i\delta(x-y), \quad (1.18)$$

которые можно положить в определение пуассоновой структуры, считая, что

$$\begin{aligned} \{F, G\} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(y)} \{\psi(x), \psi(y)\} + \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}(y)} \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(y)} \{\bar{\psi}(x), \psi(y)\} + \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}(y)} \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В самом деле, подставив (1.18) в (1.19), мы получим (1.12). Из этих формул также получаем выражения

$$\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} = -i \{F, \bar{\psi}(x)\}, \quad \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} = i \{F, \psi(x)\}. \quad (1.20)$$

Из приведенного определения очевидно, что введенная скобка Пуассона *невырождена* на алгебре наблюдаемых, т. е. из условия

$$\{F, G\} = 0 \quad (1.21)$$

для любой наблюдаемой  $G$  следует, что  $F(\psi, \bar{\psi}) = \text{const}$ . Действительно, из (1.21) вытекает, что вариационные производные  $\frac{\delta F}{\delta \psi(x)}$  и  $\frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)}$  исчезают, так что исчезают и коэффициентные функции  $c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m)$  в представлении (1.7). Тем самым можно говорить о *симплектической структуре* на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Соответствующая замкнутая 2-форма  $\Omega$  (*симплектическая форма*) имеет вид

$$\Omega = i \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\psi}(x) \wedge d\psi(x) dx. \quad (1.22)$$

Каждая наблюдаемая  $H$  порождает однопараметрическую группу преобразований на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ , задаваемую *гамильтоновыми уравнениями движения*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \{H, \psi\} = -i \frac{\delta H}{\delta \bar{\psi}}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \{H, \bar{\psi}\} = i \frac{\delta H}{\delta \psi}. \quad (1.23)$$

Функционал  $H$  принято называть *гамильтонианом*.

В частности, уравнение движения модели НШ — уравнение (1.1) — представляется в виде (1.23), если в качестве гамильтониана  $H$  задать следующий функционал:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \kappa |\psi|^4 \right) dx. \quad (1.24)$$

Гамильтониан  $H$  (иногда его называют *интегралом энергии*) является генератором группы сдвигов по времени.

Наряду с  $H$  рассмотрим функционалы

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx \quad (1.25)$$

и

$$P = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \psi \right) dx. \quad (1.26)$$

Гамильтоновы преобразования, порождаемые функционалами  $N$  и  $P$ , представляют собой соответственно фазовое преобразование

$$\psi(x) \mapsto e^{i\varphi} \psi(x) \quad (1.27)$$

и сдвиг переменной  $x$

$$\psi(x) \mapsto \psi(x+a). \quad (1.28)$$

Наблюдаемые  $N$  и  $P$  имеют соответственно смысл *заряда* (числа частиц) и *импульса*.

Нетрудно проверить соотношения

$$\{H, P\} = \{H, N\} = 0 \quad (1.29)$$

и

$$\{N, P\} = 0. \quad (1.30)$$

Для этого достаточно убедиться, что уравнение НШ инвариантно относительно преобразований (1.27) и (1.28). Вследствие (1.29) функционалы  $N$  и  $P$  являются *интегралами движения*, т. е. их значения постоянны вдоль траекторий уравнений (1.23). Действительно, для любой наблюдаемой  $F$  в силу (1.23) имеем

$$\frac{dF}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial t} \right) dx = \{H, F\}. \quad (1.31)$$

Принято говорить, что наблюдаемые *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона исчезает. Соотношение (1.30) показывает, что интегралы движения  $N$  и  $P$  находятся в инволюции. В дальнейшем мы убедимся, что модель НШ обладает бесконечным набором инволютивных интегралов движения, что приводит к ее полной интегрируемости.

Рассмотрим теперь квазипериодический случай. Координатами на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L, \theta}$  являются пары гладких функций  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ , удовлетворяющих условию (1.6). Естественно, что функционалы на  $\mathcal{M}_{L, \theta}$  зависят от значений  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  лишь в фундаментальной области группы сдвигов  $x \rightarrow x + 2nL$ ,  $n$  — целое.

Определение допустимых функционалов, отвечающих наблюдаемым, отличается от данного выше только в двух пунктах: во-первых, интегрирование по переменным  $y_i$  и  $z_j$  в (1.7) ведется по фундаментальной области; во-вторых, коэффициентные функции  $c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m)$  должны удовлетворять *условиям квазипериодичности*

$$\begin{aligned} c_{nm}(y_1, \dots, y_i + 2L, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m) = \\ = e^{i\theta} c_{nm}(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m), \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_j + 2L, \dots, z_m) = \\ = e^{i\theta} c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_j, \dots, z_m), \quad j=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.33)$$

понимаемым в смысле обобщенных функций. При этом подинтегральные выражения в интегралах вида (1.7) являются периодическими функциями по каждой переменной в отдельности, и интеграл не зависит от выбора фундаментальной области. По-прежнему считается, что вариационные производные даются формулами (1.10)–(1.11) и являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

В терминах вариационных производных условия (1.32)–(1.33) имеют вид

$$\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} = e^{i\theta} \frac{\delta F}{\delta \psi(y)} \Big|_{y=x+2L}, \quad \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} = e^{-i\theta} \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(y)} \Big|_{y=x+2L} \quad (1.34)$$

Скобка Пуассона наблюдаемых определяется аналогично (1.12) и выглядит следующим образом:

$$\{F, G\} = i \int_{-L}^L \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right) dx, \quad (1.35)$$

где результат интегрирования на самом деле не зависит от выбора фундаментальной области. Эта скобка Пуассона по-прежнему невырождена и не выводит из алгебры наблюдаемых.

Формальные скобки Пуассона координат  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  имеют вид

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0, \quad \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = i\delta_{L,0}(x-y), \quad (1.36)$$

где  $\delta_{L,0}(x)$  – усредненная  $\delta$ -функция

$$\delta_{L,0}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta n} \delta(x-2nL), \quad (1.37)$$

удовлетворяющая условию квазипериодичности по переменной  $x$ .

И в рассматриваемом случае уравнение НШ представляется в гамильтоновом виде (1.23). Гамильтониан  $H$  по-прежнему задается формулой вида (1.24), где интегрирование теперь ведется по фундаментальной области. Аналогичным образом определяются наблюдаемые  $N$  и  $P$ , имеющие такую же физическую интерпретацию, как и выше.

Наряду с функционалами, отвечающими наблюдаемым, в главе III нам будет удобно рассматривать также *финитные функционалы*. В их определении фиксируется фундаментальная область, например интервал  $-L \leq x < L$ , и требуется, чтобы носители коэффициентных функций  $c_{nm}(y_1, \dots, y_n | z_1, \dots, z_m)$  по каждой переменной в отдельности лежали внутри этого интервала. При этом вариационные производные считаются гладкими функциями внутри носителя. Для таких функционалов имеет смысл невырожденная скобка Пуассона, задаваемая формулой

(1.35). Алгебра допустимых функционалов получается замыканием финитных функционалов с наложением условия квазипериодичности. При этом скобка Пуассона наблюдаемых получается как соответствующий предел скобок Пуассона финитных функционалов.

Наконец, рассмотрим случай конечной плотности. Фазовое пространство  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  получается из  $\mathcal{M}_{L, \theta}$  при переходе к пределу  $L \rightarrow \infty$  из фундаментальной области  $-L \leq x < L$ , когда мы фиксируем значения функций  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  при  $x = -L$ , положив их равными  $\rho$ . В результате пространство  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  параметризуется двумя вещественными параметрами  $\rho$  и  $\theta$ ,  $0 < \rho < \infty$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  и образовано парами функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , удовлетворяющих в смысле Шварца граничным условиям (1.4), где  $\varphi_- = 0$  и  $\varphi_+ = \theta$ . Отметим, что, в отличие от предыдущих примеров, фазовое пространство  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  нелинейно.

Функционалы на  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  получаются как предельные значения при  $L \rightarrow \infty$  допустимых функционалов в квазипериодическом случае. Однако допустимые функционалы, отвечающие наблюдаемым, должны удовлетворять дополнительному условию, согласно которому их вариационные производные должны быть функциями типа Шварца. Действительно,  $\frac{\delta F}{\delta \psi(x)}$  и  $\frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)}$  входят в гамильтоновы уравнения (1.23), и убывание этих вариационных производных гарантирует, что гамильтоновы преобразования не выводят из фазового пространства  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$ .

Скобки Пуассона наблюдаемых задаются снова формулой (1.12), а формальные скобки Пуассона координат  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  имеют снова вид (1.18), поскольку при  $L \rightarrow \infty$   $\delta_{L, \theta}(x)$  переходит в обычную  $\delta$ -функцию. Эта пуассонова структура невырождена, так как она получается из невырожденной структуры квазипериодического случая предельным переходом  $L \rightarrow \infty$  после наложения двух некоммутирующих связей

$$\psi(-L) = \bar{\psi}(-L) = \rho. \quad (1.38)$$

Простейший пример недопустимого функционала на  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  дается выражением

$$N_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi|^2 - \rho^2) dx \quad (1.39)$$

— естественным аналогом заряда в быстроубывающем случае. Действительно, его вариационные производные

$$\frac{\delta N_\rho}{\delta \psi(x)} = \bar{\psi}(x), \quad \frac{\delta N_\rho}{\delta \bar{\psi}(x)} = \psi(x) \quad (1.40)$$

не исчезают при  $|x| \rightarrow \infty$  в силу граничных условий (1.4). Это связано с тем, что в нашем фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  не определены преобразования (1.27), так как значение аргумента  $\psi(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  фиксировано. Другой пример недопустимого функционала дается наивно регуляризованным гамильтонианом квазипериодического случая

$$\tilde{H}_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \kappa (|\psi|^4 - \rho^4) \right) dx. \quad (1.41)$$

В то же время функционалы

$$H_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \kappa (|\psi|^2 - \rho^2)^2 \right) dx \quad (1.42)$$

и

$$P = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \psi \right) dx \quad (1.43)$$

являются допустимыми на  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  и играют роль гамильтониана и импульса соответственно. Модифицированные уравнения движения (1.5) порождаются именно гамильтонианом  $H_\rho$ .

В описанных фазовых пространствах  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_{L, \theta}$  и  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  введенные пуассоновы структуры невырождены. Однако это ограничение имеет чисто математический характер, будучи порожденным соображениями симплектической геометрии. Ниже мы убедимся, что динамика солитонов в случае конечной плотности более естественно описывается в пространстве  $\mathcal{M}_\rho = \bigcup_{0 \leq \theta < 2\pi} \mathcal{M}_{\rho, \theta}$ . В пространстве  $\mathcal{M}_\rho$  скобка Пуассона вырождена и имеет нетривиальный центр (или, как иногда говорят, *аннулятор*), порожденный динамической переменной  $\theta$ .

На этом мы заканчиваем формулировку модели НШ и переходим к описанию ее динамики.

## § 2. Условие нулевой кривизны

В основе метода обратной задачи в применении к модели НШ лежит следующее замечательное наблюдение: *уравнение (1.1) является условием совместности переопределенной системы уравнений*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda) F. \quad (2.2)$$

Здесь  $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  — вектор-функция от  $x$  и  $t$ , а  $2 \times 2$  матрицы  $U$  и  $V$  даются формулами

$$U = U_0 + \lambda U_1, \quad (2.3)$$

где

$$U_0 = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\kappa} (\bar{\psi} \sigma_+ + \psi \sigma_-), \quad (2.4)$$

$$U_1 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \sigma_3, \quad (2.5)$$

и

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2, \quad (2.6)$$

где

$$V_0 = i\sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa} |\psi|^2 & -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & -\sqrt{\kappa} |\psi|^2 \end{pmatrix} = i\kappa |\psi|^2 \sigma_3 - i\sqrt{\kappa} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \sigma_+ - \frac{\partial \psi}{\partial x} \sigma_- \right), \quad (2.7)$$

$$V_1 = -U_0, \quad V_2 = -U_1. \quad (2.8)$$

Мы ввели здесь и часто будем использовать стандартные матрицы  $2 \times 2$  — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для  $\sqrt{\kappa}$  в (2.4)–(2.8) берется арифметическое значение при  $\kappa > 0$  и  $\sqrt{\kappa} = i\sqrt{|\kappa|}$  при  $\kappa < 0$ .

Обратим внимание на то, что матрицы  $U$  и  $V$  содержат помимо функций  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  еще и произвольный комплексный параметр  $\lambda$ .

Условие совместности системы (2.1)–(2.2) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \quad (2.10)$$

и должно выполняться при всех  $\lambda$ . Левая часть равенства (2.10) представляет собой полином третьей степени по  $\lambda$ . Коэффициенты при степенях  $\lambda$ ,  $\lambda^2$  и  $\lambda^3$  исчезают тождественно в силу специального выбора матриц  $U$  и  $V$ . Исчезновение постоянного члена эквивалентно уравнению (1.1).

Для случая конечной плотности, описываемого уравнением (1.5), формула (2.7) должна быть модифицирована. Соответ-



вующая матрица  $V_0$  имеет вид

$$V_0 = V - i\kappa r^2 \sigma_3, \quad (2.11)$$

а матрица  $U$  остается прежней. После этого уравнение (1.5) эквивалентно условию (2.10).

*Фундаментальная роль представления (2.10) для решения модели НШ станет ясной из дальнейшего изложения. Здесь же отметим, что (2.10) является одной из универсальных формул метода обратной задачи и будет возникать при рассмотрении всех других моделей.*

Система (2.1)–(2.2) и условие совместности (2.10) допускают естественную геометрическую интерпретацию. Именно, матрицы-функции  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  можно рассматривать как локальные коэффициенты связности в тривиальном расслоении  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ , где пространство-время  $\mathbb{R}^2$  играет роль базы, а значения вектор-функции  $F(x, t, \lambda)$  лежат в слое  $\mathbb{C}^2$ . При этом  $\lambda$  — дополнительный комплексный параметр. Уравнения (2.1) и (2.2) показывают, что вектор  $F$  ковариантно постоянен, а условие совместности (2.10) означает, что связность  $(U, V)$  имеет нулевую кривизну. Поэтому запись нелинейного уравнения в виде (2.10) мы называем *представлением нулевой кривизны*.

Коэффициенты связности  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  меняются при локальном изменении базиса в слоях. Преобразование

$$F(x, t, \lambda) \mapsto G(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda), \quad (2.12)$$

индуцированное заменой базиса в слое при помощи матрицы  $G(x, t, \lambda)$ , компенсируется преобразованием

$$U \mapsto \frac{\partial G}{\partial x} G^{-1} + GUG^{-1}, \quad (2.13)$$

$$V \mapsto \frac{\partial G}{\partial t} G^{-1} + GVG^{-1}.$$

Это преобразование в физической литературе принято называть *калибровочным*, и мы будем использовать этот термин. Ясно, что калибровочное преобразование сохраняет условие нулевой кривизны. Таким образом, представление уравнения (1.1) в виде условия совместности (2.10) справедливо для целого класса калибровочно эквивалентных связностей.

Опишем теперь *параллельный перенос*, определяемый связностью  $(U, V)$ . Рассмотрим контур  $\gamma$  на  $\mathbb{R}^2$  с начальной точкой  $(x_0, t_0)$  и конечной точкой  $(x, t)$ . Параллельный перенос из точки  $(x_0, t_0)$  в точку  $(x, t)$  вдоль контура  $\gamma$  задается матрицей

$$\Omega_\gamma = \widehat{\exp} \left( \int_\gamma U dx + V dt \right), \quad (2.14)$$

где интеграл понимается как мультипликативный. Здесь и ниже мы временно опустили в обозначении матриц  $U$  и  $V$  их зависимость от  $\lambda$ .

Более точно, рассмотрим разбиение контура  $\gamma$   $N-1$  промежуточными точками на последовательные подконтуров  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ . Введем матрицы

$$L_n = I + \int_{\gamma_n} (Udx + Vdt), \quad (2.15)$$

где  $I$  — единичная матрица  $2 \times 2$ , и положим

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^N L_n = L_N \dots L_1. \quad (2.16)$$

Тогда матрица  $\Omega_\gamma$  есть предел  $\Omega_N$  при бесконечном измельчении разбиения контура  $\gamma$ .

В физической литературе  $\Omega_\gamma$  называется  $\gamma$ -упорядоченной матричной экспонентой.

Результат параллельного переноса вектора  $F$  вдоль контура  $\gamma$  дается формулой

$$F_\gamma = \Omega_\gamma F. \quad (2.17)$$

Другими словами, векторное поле  $F_\gamma$ , заданное вдоль контура  $\gamma$ , ковариантно постоянно.

Очевидно, что имеет место формула суперпозиции

$$\Omega_{\gamma_1 + \gamma_2} = \Omega_{\gamma_2} \Omega_{\gamma_1}, \quad (2.18)$$

где считается, что конечная точка контура  $\gamma_1$  совпадает с начальной точкой контура  $\gamma_2$  и через  $\gamma_1 + \gamma_2$  обозначено объединение контуров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в указанном порядке.

При калибровочном преобразовании (2.13) матрица параллельного переноса преобразуется следующим образом:

$$\Omega_\gamma \mapsto G(x, t) \Omega_\gamma G^{-1}(x_0, t_0). \quad (2.19)$$

Исчезновение кривизны связности означает, что  $\Omega_\gamma$  зависит только от начальной и конечной точек  $(x_0, t_0)$  и  $(x, t)$ , а не от соединяющего их контура  $\gamma$ . Это позволяет по вектору  $F(x_0, t_0)$  построить векторное поле на  $\mathbb{R}^2$

$$F(x, t) = \Omega_\gamma F(x_0, t_0), \quad (2.20)$$

удовлетворяющее системе уравнений (2.1)–(2.2). Для замкнутого контура  $\gamma$  исчезновение кривизны связности означает, что параллельный перенос вдоль  $\gamma$  тривиален:

$$\Omega_\gamma = I \quad (2.21)$$

независимо от выбора начальной точки. Таким образом, локальное условие нулевой кривизны эквивалентно формуле (2.21).

Приведем первое приложение условия нулевой кривизны, иллюстрирующее его полезность. Покажем, что уравнения, допускающие представление нулевой кривизны, обладают бесконечным набором интегралов движения — *законов сохранения*.

Для этого зафиксируем момент времени  $t=t_0$  и рассмотрим параллельный перенос вдоль оси  $x$ . Условие ковариантного постоянства имеет вид

$$\frac{dF}{dx} = U(x, t_0, \lambda) F \quad (2.22)$$

и представляет собой линейную задачу со *спектральным параметром*  $\lambda$ . Ее принято называть *вспомогательной линейной задачей*.

Основной характеристикой этой задачи является *матрица монодромии*, которую мы введем здесь для квазипериодического случая. В терминах матриц  $U$  и  $V$  условия квазипериодичности переписываются следующим образом:

$$U(x + 2L, t, \lambda) = Q^{-1}(\theta) U(x, t, \lambda) Q(\theta), \quad (2.23)$$

$$V(x + 2L, t, \lambda) = Q^{-1}(\theta) V(x, t, \lambda) Q(\theta), \quad (2.24)$$

где  $Q(\theta)$  — диагональная матрица

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \exp\left\{\frac{i\theta\sigma_3}{2}\right\}. \quad (2.25)$$

Матрица монодромии представляет собой матрицу параллельного переноса вдоль контура  $t=t_0$ ,  $-L \leq x \leq L$ , ориентированного в порядке возрастания  $x$ :

$$T_L(\lambda, t_0) = \widehat{\exp} \int_{-L}^L U(x, t_0, \lambda) dx. \quad (2.26)$$

Условие нулевой кривизны приводит к замечательной связи матриц монодромии при разных значениях  $t$ . Для вывода рассмотрим замкнутый контур  $\gamma$ , представляющий собой прямоугольник, изображенный на рис. 1. В силу (2.21) и свойства суперпозиции (2.18) для такого контура  $\gamma$  имеем

$$S_-^{-1} T_L^{-1}(t_2) S_+ T_L(t_1) = I, \quad (2.27)$$

где

$$S_{\pm}(\lambda, t_1, t_2) = \widehat{\exp} \int_{t_1}^{t_2} V(\pm L, t, \lambda) dt. \quad (2.28)$$

Из условий квазипериодичности (2.24) и определения упорядоченной экспоненты получаем, что матрицы  $S_+$  и  $S_-$  подобны:

$$S_+ = Q^{-1}(\theta) S_- Q(\theta). \quad (2.29)$$

Таким образом, соотношение (2.27) принимает вид

$$T_L(\lambda, t_2) Q(\theta) = S_+(t_1, t_2) T_L(\lambda, t_1) Q(\theta) S_+^{-1}(t_1, t_2), \quad (2.30)$$

что означает, что матрицы  $T_L(\lambda, t) Q(\theta)$  в разные моменты времени подобны. В частности, из (2.30) получаем важное соотношение

$$\text{tr } T_L(\lambda, t_2) Q(\theta) = \text{tr } T_L(\lambda, t_1) Q(\theta), \quad (2.31)$$

где  $\text{tr}$  означает матричный след в  $\mathbb{C}^2$ . Это соотношение означает, что след матрицы  $T_L(\lambda, t) Q(\theta)$  не зависит от  $t$ .

Таким образом, исходя из представления нулевой кривизны, мы показали, что функционал  $F_L(\lambda)$ , задаваемый формулой

$$F_L(\lambda) = \text{tr } T_L(\lambda) Q(\theta), \quad (2.32)$$

является производящей функцией законов сохранения для уравнения (1.1).

Выбор фундаментальной области  $-L \leq x < L$  в определении матрицы монодромии не является обязательным. Для произвольной фундаментальной области  $x_0 - L \leq x < x_0 + L$  введем матрицу

$$T_{L, x_0}(\lambda, t) = \exp \int_{x_0 - L}^{x_0 + L} U(x, t, \lambda) dx \quad (2.33)$$

и покажем, что  $\text{tr } T_{L, x_0}(\lambda, t) Q(\theta)$  не зависит от  $x_0$ . Для этого убедимся, что матрицы  $T_L(\lambda, t) Q(\theta)$  и  $T_{L, x_0}(\lambda, t) Q(\theta)$  подобны. Действительно, из (2.33) следует, что

$$T_{L, x_0}(\lambda, t) = P_+ T_L(\lambda, t) P_-^{-1}, \quad (2.34)$$

где

$$P_{\pm}(x_0) = \exp \int_{\pm L}^{x_0 \pm L} U(x, t, \lambda) dx. \quad (2.35)$$

Используя условия квазипериодичности (2.23), имеем

$$P_+ = Q^{-1}(\theta) P_- Q(\theta), \quad (2.36)$$

откуда на основании (2.34) получаем искомое подобие

$$T_{L, x_0}(\lambda, t) Q(\theta) = P_+(x_0) T_L(\lambda, t) Q(\theta) P_+^{-1}(x_0). \quad (2.37)$$

Итак, мы убедились, что матрица монодромии  $T_L(\lambda)$  является полезным объектом для описания динамики нашей модели. В следующих параграфах мы продолжим ее исследование и получим для нее новые динамические приложения.

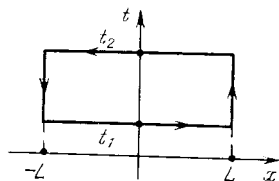


Рис. 1

### § 3. Свойства матрицы монодромии в квазипериодическом случае

Здесь мы исследуем матрицу монодромии — матрицу параллельного переноса вдоль фундаментальной области  $-L \leq x \leq L$

$$T_L(\lambda) = \exp \int_{-L}^L U(x, \lambda) dx, \quad (3.1)$$

где матрица  $U(x, \lambda)$  из (2.3)–(2.5) удовлетворяет условию квазипериодичности

$$U(x+2L, \lambda) = Q^{-1}(\theta) U(x, \lambda) Q(\theta). \quad (3.2)$$

Здесь мы опустили зависимость от переменной  $t$ , которая будет считаться фиксированной.

Наряду с матрицей монодромии будем рассматривать также и более общий объект — матрицу параллельного переноса вдоль оси  $x$  из точки  $y$  в точку  $x$

$$T(x, y, \lambda) = \exp \int_y^x U(z, \lambda) dz, \quad (3.3)$$

которую мы будем называть *матрицей перехода*. Матрица монодромии  $T_L(\lambda)$  является частным случаем матрицы перехода:

$$T_L(\lambda) = T(L, -L, \lambda). \quad (3.4)$$

Приведем основные свойства матрицы  $T(x, y, \lambda)$ .

Она удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.22) вспомогательной линейной задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x, y, \lambda) = U(x, \lambda) T(x, y, \lambda) \quad (3.5)$$

и начальному условию

$$T(x, y, \lambda) |_{x=y} = I. \quad (3.6)$$

Это свойство может быть взято за альтернативное определение матрицы перехода. Известные теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений позволяют утверждать, что решение  $T(x, y, \lambda)$  существует, единственно при любых конечных  $x$  и  $y$  и является целой функцией параметра  $\lambda$ . Последнее следует из того, что в силу (2.3) матрица  $U(x, \lambda)$  как и начальное условие (3.6) очевидным образом аналитически зависят от  $\lambda$ .

Имеет место свойство суперпозиции

$$T(x, z, \lambda) T(z, y, \lambda) = T(x, y, \lambda), \quad (3.7)$$

которое следует как из более общего соотношения (2.18), так и из дифференциального уравнения (3.5) и (3.6). В частности,

выполняется соотношение

$$T(x, y, \lambda) = T^{-1}(y, x, \lambda), \quad (3.8)$$

совместное с дифференциальным уравнением для  $T(x, y, \lambda)$  по  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} T(x, y, \lambda) = -T(x, y, \lambda) U(y, \lambda), \quad (3.9)$$

которое непосредственно следует из (3.3).

Также справедливо *свойство унимодулярности*

$$\det T(x, y, \lambda) = 1, \quad (3.10)$$

которое следует из бесследовости матрицы  $U(x, \lambda)$

$$\operatorname{tr} U(x, \lambda) = 0. \quad (3.11)$$

Действительно, из уравнения (3.5) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \det T(x, y, \lambda) = \operatorname{tr} U(x, \lambda) \det T(x, y, \lambda) = 0. \quad (3.12)$$

Приведенная выкладка пригодна для любого матричного решения уравнения (3.5) и показывает, что его определитель не зависит от  $x$ .

Матрица  $U(x, \lambda)$  имеет весьма специальный вид и удовлетворяет *соотношению инволюции*:

$$\bar{U}(x, \lambda) = \sigma U(x, \bar{\lambda}) \sigma, \quad (3.13)$$

где  $\sigma = \sigma_1$  при  $\kappa > 0$  и  $\sigma = \sigma_2$  при  $\kappa < 0$ ;  $\bar{U}$  означает матрицу с матричными элементами, комплексно сопряженными с  $U$ .

Свойство инволюции естественно переносится на матрицу перехода, так что имеет место соотношение

$$\bar{T}(x, y, \lambda) = \sigma T(x, y, \bar{\lambda}) \sigma. \quad (3.14)$$

В частности, для матрицы монодромии получаем, что она представляется в виде

$$T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} a_L(\lambda) & \varepsilon \bar{b}_L(\bar{\lambda}) \\ b_L(\lambda) & \bar{a}_L(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где  $\varepsilon = \operatorname{sign} \kappa$ . Функции  $a_L(\lambda)$  и  $b_L(\lambda)$  будем называть *коэффициентами перехода*. Они являются целыми функциями параметра  $\lambda$  и при вещественных  $\lambda$  удовлетворяют *соотношению нормировки*

$$|a_L(\lambda)|^2 - \varepsilon |b_L(\lambda)|^2 = 1, \quad (3.16)$$

которое следует из унимодулярности  $T_L(\lambda)$ .

Этим исчерпываются элементарные свойства матриц перехода и монодромии.

Обсудим теперь зависимость матрицы монодромии от времени. В § 2 с помощью геометрической интерпретации мы уже задали ее в виде формулы (2.30), носящей интегральный характер. **Альтернативный способ** состоит в получении дифференциального уравнения для  $T_L(\lambda, t)$  по  $t$ , к выводу которого мы и приступаем. Здесь в обозначениях мы восстанавливаем зависимость от  $t$ .

Получим сначала такое уравнение для матрицы перехода. Для этого продифференцируем уравнение (3.5) по  $t$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} = U \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} T \quad (3.17)$$

и с помощью условия нулевой кривизны перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} &= \left( \frac{\partial V}{\partial x} + VU - UV \right) T + U \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} T + V \frac{\partial T}{\partial x} - UV T + U \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (VT) + U \left( \frac{\partial T}{\partial t} - VT \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - VT \right) = U \left( \frac{\partial T}{\partial t} - VT \right), \quad (3.19)$$

откуда заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, y) = V(x) T(x, y) + T(x, y) C, \quad (3.20)$$

где матрица  $C$  не зависит от  $x$ . Используя начальное условие (3.6), отсюда получаем, что  $C = -V(y)$ . В результате имеем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, y) = V(x) T(x, y) - T(x, y) V(y) \quad (3.21)$$

— эволюционное уравнение для матрицы перехода.

Для матрицы монодромии это уравнение упрощается благодаря условиям квазипериодичности. Именно, для матрицы  $T_L(\lambda, t) Q(\theta)$  из (3.21) получаем эволюционное уравнение гейзенберговского типа

$$\frac{\partial}{\partial t} T_L(\lambda, t) Q(\theta) = [V(L, t, \lambda), T_L(\lambda, t) Q(\theta)]. \quad (3.22)$$

Формула (2.30) дает его решение в терминах упорядоченных экспонент.

Из уравнения (3.22) заключаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{tr } T_L(\lambda, t) Q(\theta) = 0, \quad (3.23)$$

так что мы еще раз убеждаемся, что функционал  $F_L(\lambda)$  (см. (2.32)) является производящей функцией интегралов движения уравнения (1.1).

Рассмотрим в заключение этого параграфа тонкие аналитические свойства матрицы монодромии. Будем считать, что функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  бесконечно дифференцируемы, и покажем, что целые функции  $a_L(\lambda)$  и  $b_L(\lambda)$  имеют экспоненциальный тип  $L$  и при больших вещественных  $\lambda$  допускают асимптотические разложения вида

$$a_L(\lambda) = e^{-i\lambda L} + e^{-i\lambda L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^n} + e^{i\lambda L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}) \quad (3.24)$$

и

$$b_L(\lambda) = e^{-i\lambda L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda^n} + e^{i\lambda L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{b}_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}). \quad (3.25)$$

Здесь через  $O(|\lambda|^{-\infty})$  мы обозначили функцию, имеющую исчезающий асимптотический ряд по степеням  $\lambda^{-1}$ .

Доказательство будет основано на интегральном представлении для матрицы перехода, которое будет полезно и в дальнейшем. Поэтому мы приведем его достаточно подробный вывод.

Будем исходить из интегральных уравнений для  $T(x, y, \lambda)$ , которые эквивалентны дифференциальной задаче (3.5)–(3.6)

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_y^x T(x, z, \lambda) U_0(z) E(z - y, \lambda) dz \quad (3.26)$$

и

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_y^x E(x - z, \lambda) U_0(z) T(z, y, \lambda) dz, \quad (3.27)$$

где для определенности считаем, что  $y \leq x$ . Здесь матрица  $U_0(x)$  дается формулой

$$U_0(x) = U(x, \lambda) + \frac{i\lambda}{2} \sigma_3 = \sqrt{x} (\bar{\psi} \sigma_+ + \psi \sigma_-), \quad (3.28)$$

(сравни (2.3)–(2.4)),  $E(x - y, \lambda)$  – решение задачи типа (3.5)–(3.6) при  $U_0 = 0$

$$E(x - y, \lambda) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{2i} (x - y) \sigma_3 \right\}. \quad (3.29)$$

Вследствие свойства

$$\sigma_3 \sigma_{\pm} = -\sigma_{\pm} \sigma_3 \quad (3.30)$$

имеем полезное соотношение

$$E(x, \lambda) U_0(y) = U_0(y) E(-x, \lambda). \quad (3.31)$$



Уравнения (3.26) и (3.27) представляют собой интегральные уравнения типа Вольтерра, поэтому последовательные приближения для них — итерации — абсолютно сходятся. Анализируя эти итерации, убеждаемся, что при  $y \leq x$  решение  $T(x, y, \lambda)$  можно представить в виде

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_{2y-x}^x \Gamma(x, y, z) E(z - y, \lambda) dz \quad (3.32)$$

или

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_y^{2x-y} E(x - z, \lambda) \tilde{\Gamma}(x, y, z) dz. \quad (3.33)$$

Действительно, используя (3.31), мы можем собрать в каждой итерации все множители  $E(\cdot, \lambda)$  слева или справа от произведения множителей  $U_0(\cdot)$ . После этого следует использовать свойство суперпозиции для  $E(x, \lambda)$ .

Для матричных ядер  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  имеют место уравнения

$$\Gamma(x, y, z) = \frac{1}{2} U_0\left(\frac{x+z}{2}\right) + \int_y^{(x+z)/2} \Gamma(x, s, 2s - z) U_0(s) ds, \quad (3.34)$$

где  $y \leq (x+z)/2 \leq x$ , и

$$\tilde{\Gamma}(x, y, z) = \frac{1}{2} U_0\left(\frac{y+z}{2}\right) + \int_{(y+z)/2}^x U_0(s) \tilde{\Gamma}(s, y, 2s - z) ds, \quad (3.35)$$

где  $y \leq (y+z)/2 \leq x$ .

Для их вывода, например для уравнения (3.34), подставим (3.32) в (3.26), поменяем порядки интегрирования и используем (3.31). Приравнявая члены при одинаковых  $E(z - y, \lambda)$ ,  $2y - x \leq z \leq x$ , получаем искомое уравнение. Аналогично выводится уравнение (3.35).

Очевидно, что приведенные рассуждения носят обратимый характер, так что интегральные уравнения (3.26) и (3.34), а также (3.27) и (3.35) равносильны. Интегральные представления (3.32), (3.33) для матрицы перехода и интегральные уравнения (3.34) и (3.35) для ядер  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  будут непосредственно использованы ниже в § 5–6.

Итерации для уравнений (3.34) и (3.35) абсолютно сходятся. При этом используется лишь ограниченность функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . Обозначим через  $\|\cdot\|$  какую-нибудь матричную норму и положим

$$c = \max_{-L \leq x \leq L} \|U_0(x)\|. \quad (3.36)$$

Из (3.34) и (3.35) легко получаем оценки

$$\|\Gamma(x, y, z)\| \leq \frac{c}{2} \left(1 + c \left(\frac{x+z}{2} - y\right)\right) I_0(c\sqrt{(x-z)(x+z-2y)}) \quad (3.37)$$

и

$$\|\tilde{\Gamma}(x, y, z)\| \leq \frac{c}{2} \left(1 + c \left(x - \frac{y+z}{2}\right)\right) I_0(c\sqrt{(z-y)(2x-y-z)}), \quad (3.38)$$

где  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя.

Укажем, что оценки (3.37) и (3.38) слишком грубы при больших значениях аргументов ядер  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$ . Более точные оценки будут получены в § 5.

Свойство инволюции справедливо и для ядер  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$ :

$$\bar{\Gamma}(x, y, z) = \sigma \Gamma(x, y, z) \sigma, \quad \bar{\tilde{\Gamma}}(x, y, z) = \sigma \tilde{\Gamma}(x, y, z) \sigma \quad (3.39)$$

и позволяет их записать в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \varepsilon \tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

где  $\varepsilon = \text{sign } x$ .

Интегральные представления (3.32) и (3.33) определяют связь скалярных ядер  $\alpha$  и  $\beta$  с  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  соответственно. Действительно, матрица  $E(x, \lambda)$  коммутирует с диагональной частью  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$ , а при переносе через антидиагональные части заменяется на обратную. Поэтому, пронося в (3.32) матрицу  $E(z-y, \lambda)$  налево, получаем представление типа (3.33); сравнивая коэффициенты, приходим к соотношениям

$$\alpha(x, y, z) = \tilde{\alpha}(x, y, x+y-z), \quad (3.41)$$

$$\beta(x, y, z) = \tilde{\beta}(x, y, x-y+z). \quad (3.42)$$

Отметим теперь, что свойства гладкости ядер  $\Gamma(x, y, z)$  и  $\tilde{\Gamma}(x, y, z)$ , как это показывают уравнения (3.34) и (3.35), те же, что и у функций  $\psi(x)$ ,  $\tilde{\psi}(x)$ . В частности, для бесконечно дифференцируемых  $\psi(x)$ ,  $\tilde{\psi}(x)$  ядра  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  бесконечно дифференцируемы по всем аргументам. Поэтому в интегральных представлениях (3.32) и (3.33) можно многократно интегрировать по частям. Используя дифференциальное уравнение для матрицы  $E(x, \lambda)$ , отсюда получаем асимптотическое разложение

для  $T(x, y, \lambda)$  при больших вещественных  $\lambda$ :

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(x, y)}{\lambda^n} E(x - y, \lambda) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{T}_n(x, y)}{\lambda^n} E(y - x, \lambda) + O(|\lambda|^{-\infty}). \quad (3.43)$$

Вернемся теперь к матрице монодромии  $T_L(\lambda)$ . Для нее имеют место представления

$$T_L(\lambda) = E(2L, \lambda) + \int_{-L}^{2L} \Gamma(L, -L, x - L) E(x, \lambda) dx \quad (3.44)$$

и

$$T_L(\lambda) = E(2L, \lambda) + \int_{-2L}^{2L} E(x, \lambda) \tilde{\Gamma}(L, -L, L - x) dx. \quad (3.45)$$

Для коэффициентов перехода  $a_L(\lambda)$  и  $b_L(\lambda)$  отсюда получаем

$$a_L(\lambda) = e^{-i\lambda L} + \int_{-L}^L \alpha_L(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (3.46)$$

и

$$b_L(\lambda) = \int_{-L}^L \beta_L(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (3.47)$$

где

$$\alpha_L(x) = 2\alpha(L, -L, 2x - L) = 2\tilde{\alpha}(L, -L, L - 2x), \quad (3.48)$$

$$\beta_L(x) = 2\beta(L, -L, 2x - L) = 2\tilde{\beta}(L, -L, L + 2x). \quad (3.49)$$

Таким образом, целые функции  $a_L(\lambda)$  и  $b_L(\lambda)$  имеют экспоненциальный тип  $L$  и в случае бесконечно дифференцируемых функций  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  допускают асимптотические разложения (3.24) и (3.25).

На этом обсуждение аналитических свойств заканчивается.

Производящая функция  $F_L(\lambda)$  следующим образом выражается через коэффициент  $a_L(\lambda)$ :

$$F_L(\lambda) = \text{tr } T_L(\lambda) Q(\theta) = a_L(\lambda) e^{i\theta/2} + \bar{a}_L(\bar{\lambda}) e^{-i\theta/2}. \quad (3.50)$$

Тем самым коэффициенты  $a_n$ ,  $\bar{a}_n$  участвуют в построении интегралов движения. В следующем параграфе мы приведем явную процедуру их вычисления в терминах  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ .

## § 4. Локальные интегралы движения

Семейство интегралов движения, порожденное производящей функцией

$$F_L(\lambda) = \text{tr } T_L(\lambda) Q(\theta), \quad (4.1)$$

до сих пор не было охарактеризовано достаточно явно. Здесь мы покажем, что функция

$$p_L(\lambda) = \arccos \frac{1}{2} F_L(\lambda) \quad (4.2)$$

является производящей для локальных интегралов движения, и дадим явную процедуру для их последовательного определения через  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ . Под локальными функционалами мы подразумеваем функционалы на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L,0}$  вида

$$F(\psi, \bar{\psi}) = \int_{-L}^L P(x) dx, \quad (4.3)$$

где  $P(x)$  является полиномом от  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и их производных в точке  $x$ . Естественно, что квазипериодические функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Упомянутая процедура будет основана на асимптотическом разложении  $p_L(\lambda)$  при больших вещественных  $\lambda$

$$p_L(\lambda) = -\lambda L + \frac{\theta}{2} + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (4.4)$$

которое следует из (3.24), (3.50) и (4.2). Здесь мы покажем, что коэффициенты  $I_n$  являются локальными функционалами от  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ .

Для этого рассмотрим сначала матрицу перехода  $T(x, y, \lambda)$ . В предыдущем параграфе мы доказали, что для нее справедливо асимптотическое разложение (3.43). Покажем, что это разложение можно перестроить и привести к виду

$$T(x, y, \lambda) = (I + W(x, \lambda)) \exp Z(x, y, \lambda) (I + W(y, \lambda))^{-1}, \quad (4.5)$$

где  $W$  и  $Z$  являются соответственно антидиагональной и диагональной матрицами, допускающими при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  асимптотические представления

$$W(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (4.6)$$

$$Z(x, y, \lambda) = \frac{(x-y)\lambda\sigma_3}{2i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(x, y)}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}). \quad (4.7)$$

Очевидно, что разложение, порожденное правой частью (4.5), имеет структуру (3.43). Поэтому для доказательства (4.5) до-

статочно показать, что коэффициенты  $W_n(x)$  и  $Z_n(x, y)$  однозначно определяются по матрице  $T(x, y, \lambda)$ . Для этого мы используем дифференциальное уравнение (3.5) с начальным условием (3.6), однозначно характеризующее  $T(x, y, \lambda)$ .

В геометрических терминах формулу (4.5) можно интерпретировать как калибровочное преобразование (см. (2.19)) с матрицей  $G(x, \lambda) = (I + W(x, \lambda))^{-1}$ . Это преобразование асимптотически приводит матрицу перехода к диагональному виду  $\exp Z(x, y, \lambda)$ . Альтернативно можно сказать, что это калибровочное преобразование асимптотически приводит к диагональному виду матрицу  $U(x, \lambda)$  из дифференциального уравнения (3.5).

Вернемся теперь к задаче (3.5)–(3.6) для  $T(x, y, \lambda)$  и определим матрицы  $W(x, \lambda)$  и  $Z(x, y, \lambda)$ .

Для этого подставим представление (4.5) в уравнение (3.5), сократим на не зависящую от  $x$  матрицу  $(I + W(y, \lambda))^{-1}$  и отделим диагональную и антидиагональную части. В результате получим систему уравнений

$$\frac{dW}{dx} + W \frac{\partial Z}{\partial x} = U_0 + \lambda U_1 W, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = U_0 W + \lambda U_1, \quad (4.9)$$

где мы опять использовали разложение  $U(x, \lambda) = U_0(x) + \lambda U_1$ ,  $U_1 = \frac{1}{2i} \sigma_3$ . Исключая  $\frac{\partial Z}{\partial x}$  из (4.8), получаем для  $W$  нелинейное уравнение типа Риккати

$$\frac{dW}{dx} + i\lambda \sigma_3 W + W U_0 W - U_0 = 0, \quad (4.10)$$

где мы учли, что матрица  $U_1$  антикоммутирует с  $W$ .

Дифференциальное уравнение (4.9) вместе с начальным условием  $Z(x, y, \lambda)|_{x=y} = 0$ , вытекающим из (3.6), элементарно интегрируется:

$$Z(x, y, \lambda) = \frac{\lambda(x-y)}{2i} \sigma_3 + \int_y^x U_0(z) W(z, \lambda) dz, \quad (4.11)$$

определяя асимптотический ряд (4.7) по асимптотическому ряду (4.6) для  $W(x, \lambda)$ .

Подставляя разложение (4.6) в дифференциальное уравнение (4.10), для матриц  $W_n(x)$  получаем рекуррентные соотношения

$$W_{n+1}(x) = i\sigma_3 \left( \frac{dW_n(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{n-1} W_k(x) U_0(x) W_{n-k}(x) \right) \quad (4.12)$$

и начальное условие

$$W_1(x) = -i\sigma_3 U_0(x) = i\sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\psi}(x) \\ \psi(x) & 0 \end{pmatrix} = i\sqrt{\kappa} (\psi(x)\sigma_- - \bar{\psi}(x)\sigma_+), \quad (4.13)$$

из которых они однозначно определяются и локально выражаются через  $U_0(x)$  и ее производные в точке  $x$ . В силу (4.12) и (4.13) асимптотический ряд  $W(x, \lambda)$  удовлетворяет условиям инволюции

$$\bar{W}(x, \lambda) = \sigma W(x, \bar{\lambda}) \sigma \quad (4.14)$$

и квазипериодичности

$$W(x+2L, \lambda) = Q^{-1}(\theta) W(x, \lambda) Q(\theta). \quad (4.15)$$

Таким образом,  $W(x, \lambda)$  представляется в виде

$$W(x, \lambda) = i\sqrt{\kappa} (\omega(x, \lambda)\sigma_- - \bar{\omega}(x, \bar{\lambda})\sigma_+), \quad (4.16)$$

где

$$\omega(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(x)}{\lambda^n} \quad (4.17)$$

и функции  $\omega_n(x)$  квазипериодичны:

$$\omega_n(x+2L) = e^{i\theta} \omega_n(x). \quad (4.18)$$

В терминах  $\omega_n(x)$  рекуррентные соотношения и начальное условие принимают вид

$$\omega_{n+1}(x) = -i \frac{d\omega_n}{dx}(x) + \kappa \bar{\psi}(x) \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k(x) \omega_{n-k}(x) \quad (4.19)$$

и

$$\omega_1(x) = \psi(x). \quad (4.20)$$

Возвращаясь к представлению для  $Z$ , мы видим, что диагональная матрица  $U_0 W$ , участвующая в (4.11), имеет вид

$$U_0(x) W(x, \lambda) = i\kappa \begin{pmatrix} \bar{\psi}(x) \omega(x, \lambda) & 0 \\ 0 & -\psi(x) \bar{\omega}(x, \bar{\lambda}) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где асимптотические ряды  $\bar{\psi}(x) \omega(x, \lambda)$  и  $\psi(x) \bar{\omega}(x, \bar{\lambda})$  уже периодичны. На этом закончим описание перестройки асимптотического разложения матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$ .

Перейдем теперь к матрице монодромии. Из (4.5) получаем для нее представление

$$T_L(\lambda) = (I + W(L, \lambda)) \exp Z_L(\lambda) (I + W(-L, \lambda))^{-1}, \quad (4.22)$$

где

$$Z_L(\lambda) = -i\lambda L \sigma_3 + \int_{-L}^L U_0(x) W(x, \lambda) dx. \quad (4.23)$$

В силу сказанного выше интеграл в (4.23) не зависит от выбора фундаментальной области.

Перемножая асимптотические ряды, участвующие в сомножителях  $I+W(\pm L, \lambda)$  и  $Z_L(\lambda)$ , из (4.22) получаем для  $T_L(\lambda)$  представление в виде асимптотического ряда, совпадающего по форме с (3.24)—(3.25). Тем самым мы получили способ вычисления коэффициентов  $a_n, \hat{a}_n$  и  $b_n, \hat{b}_n$ , участвующих в разложениях (3.24)—(3.25).

В частности, для коэффициентов  $I_n$  в разложении функции  $p_L(\lambda)$  эта процедура существенно упрощается. Действительно, используя условие квазипериодичности, получаем из (4.22)

$$T_L(\lambda)Q(\theta) = (I+W(L, \lambda)) \exp Z_L(\lambda)Q(\theta) (I+W(L, \lambda))^{-1}, \quad (4.24)$$

так что

$$F_L(\lambda) = \text{tr } T_L(\lambda)Q(\theta) = \text{tr} \exp \left\{ Z_L(\lambda) + \frac{i\theta}{2} \sigma_3 \right\}. \quad (4.25)$$

В силу унимодулярности матрицы  $T_L(\lambda)Q(\theta)$  получаем, что

$$\text{tr } Z_L(\lambda) = O(|\lambda|^{-\infty}). \quad (4.26)$$

Отсюда на основании (4.11) и (4.21) заключаем, что

$$\varphi_L(\lambda) = \kappa \int_{-L}^L \bar{\psi}(x) \omega(x, \lambda) dx \quad (4.27)$$

является асимптотическим рядом с вещественными коэффициентами

$$\varphi_L(\lambda) = \bar{\varphi}_L(\bar{\lambda}). \quad (4.28)$$

В результате для  $Z_L(\lambda)$  получаем выражение

$$Z_L(\lambda) = i\sigma_3(\varphi_L(\lambda) - \lambda L), \quad (4.29)$$

так что

$$F_L(\lambda) = 2 \cos \left( \varphi_L(\lambda) + \frac{\theta}{2} - \lambda L \right), \quad (4.30)$$

что и делает естественным введение функции  $p_L(\lambda) = \text{arccos} \frac{1}{2} F_L(\lambda)$  в (4.2).

В новых обозначениях имеем

$$p_L(\lambda) = -\lambda L + \frac{\theta}{2} + \varphi_L(\lambda), \quad (4.31)$$

где функция  $\varphi_L(\lambda)$ , введенная в (4.27), допускает асимптотическое разложение

$$\varphi_L(\lambda) = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}). \quad (4.32)$$

Здесь

$$I_n(\Psi, \bar{\Psi}) = \int_{-L}^L P_n(x) dx, \quad (4.33)$$

где

$$P_n(x) = \bar{\Psi}(x) w_n(x) \quad (4.34)$$

и представляют собой полиномы от  $\Psi(x)$ ,  $\bar{\Psi}(x)$  и их производных в точке  $x$ . Отсюда и из периодичности  $P_n(x)$  следует, что  $I_n$  являются допустимыми функционалами на  $\mathcal{M}_{L,0}$ , т. е. удовлетворяют условиям (1.34).

Первые четыре плотности  $P_n(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_1(x) &= |\Psi(x)|^2, & P_2(x) &= -i\bar{\Psi}(x) \frac{d\Psi}{dx}(x), \\ P_3(x) &= -\bar{\Psi}(x) \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \kappa |\Psi(x)|^4, \\ P_4(x) &= i \left( \bar{\Psi}(x) \frac{d^3\Psi(x)}{dx^3} - \kappa |\Psi(x)|^2 \left( \Psi(x) \frac{d\bar{\Psi}}{dx}(x) + 4\bar{\Psi}(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Функционалы  $I_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , и представляют собой локальные интегралы движения модели НШ в квазипериодическом случае. Как это следует из (4.35), первые три из них —  $I_1, I_2$  и  $I_3$  — совпадают с введенными в § 1 функционалами  $N, P$  и  $H$ . В дальнейшем мы убедимся, что все интегралы движения  $I_n$  находятся в инволюции по отношению к введенной в § 1 скобке Пуассона.

Приведенные здесь и в предыдущих параграфах результаты исчерпывают основные элементарные свойства модели НШ и матрицы монодромии для квазипериодических граничных условий. Полное описание динамики в этом случае требует привлечения более сложного аппарата, выходящего за рамки этой книги. Значительные упрощения возникают при  $L \rightarrow \infty$  для граничных условий быстрого убывания и конечной плотности, к исследованию которых мы и переходим.

## § 5. Матрица монодромии в быстроубывающем случае

Данный параграф носит вспомогательный характер. Мы исследуем здесь свойства матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  на всей оси  $-\infty < x, y < \infty$ , считая, что  $\Psi(x)$ ,  $\bar{\Psi}(x)$  убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Более точно, мы будем предполагать, что эти функции абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}^1$ , т. е.  $\Psi(x)$  принадлежит  $L_1(-\infty, \infty)$ . Для матрицы  $U_0(x)$  это означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|U_0(x)\| dx < \infty. \quad (5.1)$$



В дальнейшем пространство всех  $2 \times 2$  матриц-функций, удовлетворяющих условию (5.1), будем обозначать через  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ . Антидиагональная матрица  $U_0(x)$  является специальным элементом  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ .

При сделанном предположении мы докажем, что *при вещественных  $\lambda$  существуют пределы*

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} T(x, y, \lambda) E(y, \lambda), \quad (5.2)$$

где матрица  $E(x, \lambda)$  введена в § 3, и исследуем свойства матриц  $T_{\pm}(x, \lambda)$ , в частности, получим их асимптотики при больших  $x$  и  $\lambda$ .

Для доказательства будем использовать интегральные представления (3.32) и (3.33). Рассмотрим для определенности случай  $y \rightarrow -\infty$  и перепишем (3.32) в виде

$$T(x, y, \lambda) E(y, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{2y-x}^x \Gamma(x, y, z) E(z, \lambda) dz. \quad (5.3)$$

Покажем, что ядро  $\Gamma$  абсолютно интегрируемо на интервале  $2y-x \leq z \leq x$  равномерно по  $y$ . Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(x, y) = \int_{2y-x}^x \|\Gamma(x, y, z)\| dz. \quad (5.4)$$

Интегрируя уравнение (3.34) по  $z$  в указанном интервале и меняя порядок интегрирования, получаем неравенство

$$\Phi(x, y) \leq \int_y^x \|U_0(z)\| dz + \int_y^x U_0(s) \|\Phi(x, s)\| ds. \quad (5.5)$$

Интегрируя это неравенство, получаем оценку

$$\Phi(x, y) \leq \exp \int_y^x \|U_0(z)\| dz - 1. \quad (5.6)$$

Покажем теперь, что существует предел

$$\Gamma_-(x, z) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \Gamma(x, y, z), \quad (5.7)$$

где  $\Gamma_-(x, z)$  при фиксированном  $x$  принадлежит  $L_1(-\infty, x)$  и сходимость понимается в смысле  $L_1$ . Для этого достаточно доказать, что представление

$$\Gamma_-(x, z) = \frac{1}{2} U_0\left(\frac{x+z}{2}\right) + \int_{-\infty}^{(x+z)/2} \Gamma(x, s, 2s-z) U_0(s) ds, \quad (5.8)$$

получающееся из (3.34) формальным переходом к пределу при  $y \rightarrow -\infty$ , определяет функцию из  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ . Последнее сра-

зу следует из оценки (5.6):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \|\Gamma(x, z)\| dz &\leq \int_{-\infty}^x \|U_0(z)\| dz + \int_{-\infty}^x \|U_0(s)\| \Phi(x, s) ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^x \|U_0(z)\| dz \exp \int_{-\infty}^x \|U_0(z)\| dz. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теперь используя (5.7), получаем, что предел (5.2) при  $y \rightarrow -\infty$  действительно существует, и для  $T_-(x, \lambda)$  имеем интегральное представление

$$T_-(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, z) E(z, \lambda) dz. \quad (5.10)$$

Аналогичным образом доказывается существование предела (5.2) при  $y \rightarrow +\infty$ . При этом следует воспользоваться представлением (3.33). Вспомнив, что

$$T(x, y, \lambda) = T^{-1}(y, x, \lambda), \quad (5.11)$$

получаем, что предел существует и имеет место интегральное представление

$$T_+^{-1}(x, \lambda) = E(-x, \lambda) + \int_x^{\infty} E(-z, \lambda) \tilde{\Gamma}_+(x, z) dz. \quad (5.12)$$

Ядро  $\tilde{\Gamma}_+$  дается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_+(x, z) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}(y, x, z) = \\ &= \frac{1}{2} U_0\left(\frac{x+z}{2}\right) + \int_{(x+z)/2}^{\infty} U_0(s) \tilde{\Gamma}(s, x, 2s-z) ds \end{aligned} \quad (5.13)$$

и удовлетворяет оценке

$$\int_x^{\infty} \|\tilde{\Gamma}_+(x, z)\| dz \leq \int_x^{\infty} \|U_0(z)\| dz \exp \int_x^{\infty} \|U_0(z)\| dz. \quad (5.14)$$

Нетрудно получить интегральное представление и для самой матрицы  $T_+(x, \lambda)$ . Для этого заметим, что вместе с  $T(x, y, \lambda)$  и  $E(x, \lambda)$  матрица  $T_+(x, \lambda)$  также унитарна. Используя общую формулу

$$A^{-1} = \sigma_2 A^* \sigma_2, \quad (5.15)$$

справедливую для любой унитарной матрицы  $2 \times 2$  и связывающую обратную матрицу  $A^{-1}$  с транспонированной  $A^*$ , получаем для  $T_+(x, \lambda)$  интегральное представление

$$T_+(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_x^{\infty} \Gamma_+(x, z) E(z, \lambda) dz, \quad (5.16)$$

где

$$\Gamma_+(x, z) = \sigma_2 \tilde{\Gamma}_+^T(x, z) \sigma_2. \quad (5.17)$$

Свойство инволюции (3.39) естественно переносится на матрицы  $\Gamma_\pm(x, z)$ :

$$\bar{\Gamma}_\pm(x, z) = \sigma \Gamma_\pm(x, z) \sigma \quad (5.18)$$

и на матрицы  $T_\pm(x, \lambda)$ :

$$\bar{T}_\pm(x, \lambda) = \sigma T_\pm(x, \lambda) \sigma. \quad (5.19)$$

В частности, для  $\Gamma_\pm$  имеем представления

$$\Gamma_\pm = \begin{pmatrix} \alpha_\pm & \varepsilon \bar{\beta}_\pm \\ \beta_\pm & \bar{\alpha}_\pm \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \text{sign } \kappa. \quad (5.20)$$

Как и матрица  $T(x, y, \lambda)$ , матрицы  $T_\pm(x, \lambda)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F. \quad (5.21)$$

Роль начальных условий для них играют асимптотики

$$T_\pm(x, \lambda) = E(x, \lambda) + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (5.22)$$

которые немедленно следуют из (5.10), (5.16) и оценок (5.9), (5.14).

Здесь уместно сказать несколько слов о связи вышеизложенного с теорией рассеяния. Поскольку спектральный параметр  $\lambda$  входит в уравнение (5.21) линейно, его после умножения на  $i\sigma$ , слева можно привести к традиционному виду задачи на собственные значения

$$\mathcal{L}F = \frac{\lambda}{2} F \quad (5.23)$$

для матричного дифференциального оператора первого порядка

$$\mathcal{L} = i\sigma_3 \frac{d}{dx} + i\sqrt{\kappa} (\psi(x) \sigma_- - \bar{\psi}(x) \sigma_+). \quad (5.24)$$

Этот оператор формально самосопряжен при  $\kappa > 0$ . Спектральная задача для оператора  $\mathcal{L}$  со стабилизирующимися при  $|x| \rightarrow \infty$  коэффициентами  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и является предметом теории рассеяния. В частности, решения  $T_\pm(x, \lambda)$  играют в ней большую роль и носят название *решений Йоста*.

Перейдем теперь к изучению аналитических свойств матричных элементов решений  $T_\pm(x, \lambda)$  как функций  $\lambda$  при фиксированном  $x$ . Напомним, что матрица  $T(x, y, \lambda)$  была целой функцией  $\lambda$ . Однако, поскольку в определении  $T_\pm(x, \lambda)$  участвует предельный переход, матрицы  $T_\pm(x, \lambda)$  таковыми, вообще говоря,

не являются. В то же время из интегральных представлений (5.10) и (5.16) и абсолютной суммируемости ядер  $\Gamma_{\pm}(x, z)$  по  $z$  следует, что первый столбец матрицы  $T_{-}(x, \lambda)$  и второй столбец матрицы  $T_{+}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ , а первый столбец матрицы  $T_{+}(x, \lambda)$  и второй столбец матрицы  $T_{-}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются в нижнюю полуплоскость. Действительно, при указанных  $\lambda$  экспоненты вида  $\exp\{\pm i\lambda x/2\}$ , участвующие в интегральных представлениях (5.10) и (5.16), убывают, когда переменная интегрирования  $z$  уходит на  $+\infty$  или  $-\infty$  соответственно.

Введем для упомянутых столбцов специальные обозначения  $T_{\pm}^{(1,2)}(x, \lambda)$ , так что

$$T_{\pm}(x, \lambda) = (T_{\pm}^{(1)}(x, \lambda), T_{\pm}^{(2)}(x, \lambda)). \quad (5.25)$$

Из интегральных представлений и леммы Римана — Лебега следует, что при фиксированном  $x$  имеют место следующие асимптотики:

$$e^{i\lambda x/2} T_{-}^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1), \quad \text{Im } \lambda \geq 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (5.26)$$

$$e^{-i\lambda x/2} T_{+}^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1) \quad (5.27)$$

и

$$e^{i\lambda x/2} T_{+}^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1), \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (5.28)$$

$$e^{-i\lambda x/2} T_{-}^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1). \quad (5.29)$$

Свойство инволюции переносится и на комплексные  $\lambda$  и принимает вид

$$\bar{T}_{+}^{(1)}(x, \bar{\lambda}) = \tilde{\sigma} T_{+}^{(2)}(x, \bar{\lambda}), \quad (5.30)$$

где  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , и

$$\bar{T}_{-}^{(1)}(x, \bar{\lambda}) = \tilde{\sigma} T_{-}^{(2)}(x, \bar{\lambda}), \quad (5.31)$$

где  $\text{Im } \lambda \leq 0$  и  $\tilde{\sigma} = \sigma_1$  при  $x > 0$ ,  $\tilde{\sigma} = i\sigma_2$  при  $x < 0$ .

В случае, когда функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  отличны от нуля лишь в интервале  $-q \leq x \leq q$ , матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)E(-x, \lambda)$  являются целыми функциями экспоненциального типа  $q$ . Действительно, как нетрудно убедиться из (5.8) и (5.13), соответствующие ядра  $\Gamma_{+}(x, z)$  и  $\Gamma_{-}(x, z)$  исчезают при  $z > 2q - x$  и  $z < -2q - x$  соответственно.

Для использования в дальнейшем нам понадобятся формулы, связывающие ядра  $\Gamma_{\pm}(x, z)$  на диагонали  $z = x$  с

матрицей  $U_0(x)$ :

$$[\sigma_3, \Gamma_-(x, x)] = \sigma_3 U_0(x) \quad (5.32)$$

и

$$[\sigma_3, \Gamma_+(x, x)] = -\sigma_3 U_0(x). \quad (5.33)$$

Для доказательства (5.32) достаточно заметить, что из интегрального уравнения (3.34) следует равенство

$$\Gamma(x, y, 2y - x) = \frac{1}{2} U_0(y), \quad (5.34)$$

так что из (5.8) получаем

$$\Gamma_-(x, x) = \frac{1}{2} \left( U_0(x) + \int_{-\infty}^x U_0^2(s) ds \right). \quad (5.35)$$

Поскольку диагональная матрица  $U_0^2(s)$  коммутирует с  $\sigma_3$ , отсюда получаем (5.32). Формула (5.33) доказывается аналогично.

Заканчивая обсуждение свойств решений Йоста, упомянем, что более традиционный для теории рассеяния метод их исследования основан на интегральных уравнениях

$$T_-(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x E(x - z, \lambda) U_0(z) T_-(z, \lambda) dz \quad (5.36)$$

и

$$T_+(x, \lambda) = E(x, \lambda) - \int_x^{\infty} E(x - z, \lambda) U_0(z) T_+(z, \lambda) dz, \quad (5.37)$$

которые получаются при вещественных  $\lambda$  предельным переходом при  $y \rightarrow \pm \infty$  из уравнений (3.26) и (3.27). Использованный нами способ более предпочтителен, поскольку в интегральных представлениях (5.10) и (5.16) вся зависимость от  $\lambda$  локализована в элементарных функциях  $\exp\{\pm i\lambda x/2\}$ .

Введем теперь аналог матрицы  $T_L(\lambda)$  — приведенную матрицу монодромии. При вещественных  $\lambda$  она определяется следующим образом:

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty}} E(-x, \lambda) T(x, y, \lambda) E(y, \lambda). \quad (5.38)$$

Для доказательства существования предела (5.38) заметим, что матрицу перехода можно представить в виде

$$T(x, y, \lambda) = T_+(x, \lambda) T_+^{-1}(y, \lambda) = T_-(x, \lambda) T_-^{-1}(y, \lambda), \quad (5.39)$$

так как правые части в (5.39) удовлетворяют как дифференциальному уравнению (3.5), так и начальному условию (3.6). Из (5.39) видно, что матрица  $T_+^{-1}(x, \lambda) T_-(x, \lambda)$  не зависит от  $x$ . Покажем, что она совпадает с пределом (5.38).

Действительно, положим

$$T(\lambda) = T_+^{-1}(x, \lambda) T_-(x, \lambda), \quad (5.40)$$

откуда

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda). \quad (5.41)$$

Подставляя (5.41) в (5.39), получаем, что

$$T(x, y, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda) T_+^{-1}(y, \lambda). \quad (5.42)$$

Отсюда на основании граничных условий (5.22) заключаем, что предел (5.38) существует и совпадает с выражением (5.40).

Положив в (5.38)  $x=L$  и  $y=-L$ , получаем частный случай этой формулы:

$$T(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} E(-L, \lambda) T(L, -L, \lambda) E(-L, \lambda). \quad (5.43)$$

Средний множитель  $T(L, -L, \lambda)$  в правой части можно интерпретировать как матрицу монодромии  $T_L(\lambda)$  периодической задачи с функциями  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , продолженными с интервала  $(-L, L)$  периодическим образом (допуская разрывы). В этом смысле говорят, что матрицу  $T(\lambda)$  можно рассматривать как периодическую матрицу монодромии  $T_L(\lambda)$  в пределе бесконечного периода  $L \rightarrow \infty$ , сокращенную на тривиальные осциллирующие множители.

Для приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$ , как и для матрицы  $T_L(\lambda)$ , выполняется свойство инволюции

$$\overline{T(\lambda)} = \sigma T(\lambda) \sigma, \quad (5.44)$$

так что она представляется в виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \text{sign } \kappa. \quad (5.45)$$

За функциями  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  мы сохраним название *коэффициентов перехода*. Они удовлетворяют соотношению нормировки

$$|a(\lambda)|^2 - \varepsilon |b(\lambda)|^2 = 1. \quad (5.46)$$

В терминах коэффициентов перехода предельное соотношение (5.43) вместе с его интерпретацией переписывается в виде

$$a(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} e^{i\lambda L} a_L(\lambda), \quad b(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} b_L(\lambda). \quad (5.47)$$

Более тонкие свойства этих коэффициентов будут исследованы в следующем параграфе.

### § 6. Аналитические свойства коэффициентов перехода

Приведем несколько удобных представлений для коэффициентов перехода. Во-первых, используя унимодулярность  $T_+(x, \lambda)$  и представление (5.40), получаем для  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  выражения

$$a(\lambda) = \det(T_+^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)), \quad (6.1)$$

$$b(\lambda) = \det(T_+^{(1)}(x, \lambda), T_-^{(1)}(x, \lambda)), \quad (6.2)$$

где мы употребили введенное выше обозначение для матрицы через ее столбцы. Из свойств аналитичности столбцов  $T_+^{(1)}(x, \lambda)$ ,  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  и асимптотик (5.26), (5.27) получаем, что  $a(\lambda)$  аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость  $\text{Im} \lambda \geq 0$  и имеет там асимптотику при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$a(\lambda) = 1 + o(1). \quad (6.3)$$

Коэффициент  $\bar{a}(\lambda)$  аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость; обозначая это продолжение через  $a^*(\lambda)$ , имеем

$$a^*(\lambda) = \bar{a}(\bar{\lambda}), \quad \text{Im} \lambda \leq 0. \quad (6.4)$$

Выражение (6.2) и свойства аналитичности столбцов  $T_{\pm}^{(1)}(x, \lambda)$  показывают, что  $b(\lambda)$ , вообще говоря, не допускает аналитического продолжения в комплексную плоскость. Однако для финитных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  коэффициенты  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  являются целыми функциями.

Приведем теперь интегральные представления для  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ , которые получаются предельным переходом в интегральных представлениях (3.46) и (3.47) для  $a_L(\lambda)$  и  $b_L(\lambda)$ .

Начнем с коэффициента  $a_L(\lambda)$  и перепишем (3.46) в виде

$$e^{i\lambda L} a_L(\lambda) = 1 + \int_0^{2L} \alpha'_L(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.5)$$

где

$$\alpha'_L(x) = \alpha_L(L-x) = 2\alpha(L, -L, L-2x). \quad (6.6)$$

Из интегрального уравнения (3.34) получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(L, -L, L-2x) &= \varepsilon \sqrt{\kappa} \int_{-L}^{L-x} \bar{\beta}(L, s, 2s+2x-L) \psi(s) ds = \\ &= \varepsilon \sqrt{\kappa} \int_{-L}^{L-x} \bar{\beta}(L, s, s+2x) \psi(s) ds, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались соотношением (3.42). Вспоминая определения (5.17) ядра  $\Gamma_+(x, z)$  и оценку

(5.14), из (6.7) заключаем, что при  $x \geq 0$  существует предел

$$\alpha(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \alpha'_L(x) = -2\varepsilon \sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_+(s, s+2x) \psi(s) ds \quad (6.8)$$

и при этом

$$\int_0^{\infty} |\alpha(x)| dx < \infty. \quad (6.9)$$

Таким образом, мы получаем для  $a(\lambda)$  интегральное представление

$$a(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} \alpha(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.10)$$

где функция  $\alpha(x)$  принадлежит  $L_1(0, \infty)$ .

Рассмотрим теперь коэффициент  $b_L(\lambda)$ , для которого имеем представление (3.47):

$$b_L(\lambda) = \int_{-L}^L \beta_L(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.11)$$

где

$$\beta_L(x) = 2\beta(L, -L, 2x-L). \quad (6.12)$$

Покажем, что  $\beta_L(x)$  имеет предел при  $L \rightarrow \infty$ . Из интегрального уравнения (3.34) и соотношения (3.41) получаем

$$\begin{aligned} \beta(L, -L, 2x-L) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \psi(x) + \\ &+ \sqrt{\kappa} \int_{-L}^x \bar{\alpha}(L, s, 2s-2x+L) \psi(s) ds = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \psi(x) + \\ &+ \sqrt{\kappa} \int_{-L}^x \bar{\alpha}(L, s, 2x-s) \psi(s) ds. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Отсюда и из оценки (5.14) следует, что существует предел

$$\beta(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \beta_L(x) = \sqrt{\kappa} \psi(x) + 2 \sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^x \alpha_+(s, 2x-s) \psi(s) ds \quad (6.14)$$

и при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(x)| dx < \infty. \quad (6.15)$$

В результате для  $b(\lambda)$  получаем искомое представление

$$b(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.16)$$

где функция  $\beta(x)$  принадлежит  $L_1(-\infty, \infty)$ .



Множество всех функций вида

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.17)$$

где  $f(x)$  принадлежит  $L_1(-\infty, \infty)$ , образует известное в литературе полное нормированное кольцо  $\mathfrak{R}_0$ . Тем самым коэффициент  $b(\lambda)$  принадлежит  $\mathfrak{R}_0$  при наших условиях на  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . В свою очередь  $a(\lambda)$  принадлежит кольцу  $\mathfrak{R}_+$ , образованному функциями вида

$$F_+(\lambda) = c + \int_0^{\infty} f_+(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.18)$$

где  $f_+(x)$  из  $L_1(0, \infty)$ . Функции из  $\mathfrak{R}_+$  аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость и обращаются в  $c$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Сформулированные выше аналитические свойства коэффициентов перехода  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  также непосредственно следуют и из полученных интегральных представлений. Последние дают полную характеристику коэффициентов перехода в терминах их преобразований Фурье.

В отношении гладкости функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  ведут себя ровно так же, как и функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . Если последние принадлежат пространству Шварца, то такой же будет функция  $\beta(x)$  и, следовательно,  $b(\lambda)$ . Функция же  $\alpha(x)$  при этом будет бесконечно дифференцируема и шварцевского типа на  $+\infty$ .

Обсудим теперь вопрос о нулях коэффициента  $a(\lambda)$  в верхней полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

Покажем сначала, что *при  $\kappa > 0$   $a(\lambda)$  не имеет нулей*. Действительно, на вещественной оси  $a(\lambda)$  не обращается в нуль в силу соотношения нормировки. Предположим теперь, что  $a(\lambda_0) = 0$  при  $\text{Im } \lambda_0 > 0$ . Тогда из (6.1) получаем, что столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  линейно зависимы. Из интегральных представлений (5.10) и (5.16) следует, что при  $\text{Im } \lambda > 0$  столбец  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  экспоненциально убывает при  $x \rightarrow -\infty$ , а столбец  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  — при  $x \rightarrow +\infty$ . Таким образом, мы получаем, что при  $\lambda = \lambda_0$  уравнение (5.21) имеет столбец-решение, экспоненциально убывающее при  $|x| \rightarrow \infty$ . Однако (5.21) эквивалентно спектральной задаче (5.23) для формально самосопряженного оператора  $\mathcal{L}$  (5.24), для которого  $\lambda_0$  становится невещественным собственным значением. Полученное противоречие показывает, что  $a(\lambda)$  не может иметь комплексных нулей.

*При  $\kappa < 0$  оператор  $\mathcal{L}$  не самосопряжен и функция  $a(\lambda)$  может иметь нули*. Известные нам ее свойства накладывают на эти нули лишь слабые ограничения. Из аналитичности и асимптотики (6.3) следует, что эти нули сосредоточены в конечной

части полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и могут иметь точки сгущения лишь на вещественной оси.

Для упрощения дальнейшего исследования мы предположим, что выполняется следующее условие (A):

(A<sub>1</sub>) вещественные нули отсутствуют;

(A<sub>2</sub>) все нули простые.

Отсюда, в частности, следует, что общее число нулей конечно и для  $b(\lambda)$  выполняется строгое неравенство

$$|b(\lambda)| < 1. \quad (6.19)$$

В терминах функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  соответствующие достаточные условия сложно сформулировать. Это связано с трудными вопросами спектрального анализа несамосопряженных дифференциальных операторов. Однако для наших целей исследования динамической системы модели НШ это обстоятельство не слишком существенно. Дело в том, что функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , для которых выполняется условие (A), образуют в некотором естественном смысле открытое всюду плотное множество в фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Ниже в гл. III мы дадим альтернативное описание  $\mathcal{M}_0$ , при котором сделанное утверждение станет более ясным.

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — полный набор нулей  $a(\lambda)$ ,  $\text{Im } \lambda_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Как уже отмечалось выше, при  $\lambda = \lambda_j$  столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  пропорциональны; коэффициент пропорциональности обозначим через  $\gamma_j$ ,  $\gamma_j \neq 0$ :

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.20)$$

Набор комплексных чисел  $\gamma_j$  является характеристикой вспомогательной линейной задачи и будет играть важную роль в дальнейшем.

Из формулы (6.4) ясно, что функция  $a^*(\lambda)$  имеет в нижней полуплоскости нули в точках  $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ . Используя свойство инволюции, получаем, что

$$T_-^{(2)}(x, \bar{\lambda}_j) = -\bar{\gamma}_j T_+^{(1)}(x, \bar{\lambda}_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.21)$$

Для финитных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  формула (5.41), характеризующая приведенную матрицу монодромии, имеет смысл при всех комплексных  $\lambda$ . Полагая в ней  $\lambda = \lambda_j$  и  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_j$ , получаем для коэффициентов  $\gamma_j$  и  $\bar{\gamma}_j$  выражения  $\gamma_j = b(\lambda_j)$ ,  $\bar{\gamma}_j = \bar{b}(\lambda_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Подчеркнем, что эти формулы справедливы только для финитных  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ .

Набор чисел  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , составляет дискретный спектр спектральной задачи (5.23) при  $\kappa < 0$ . Кроме него, при любом  $\kappa$

оператор  $\mathcal{L}$  имеет двукратный *непрерывный спектр*, заполняющий всю вещественную ось в соответствии с тем, что при вещественных  $\lambda$  уравнение (5.23) имеет два ограниченных по  $x$  линейно независимых столбца-решения. Таковыми являются, например, столбцы матрицы  $T_-(x, \lambda)$  или  $T_+(x, \lambda)$ . В соответствии с этой интерпретацией  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  будем называть *коэффициентами перехода непрерывного спектра*, а  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ , — *коэффициентами перехода дискретного спектра*.

В заключение этого параграфа покажем, что *аналитичность  $a(\lambda)$  и соотношение нормировки позволяют выразить этот коэффициент через его нули, если таковые есть, и  $b(\lambda)$* . Именно, при  $\text{Im } \lambda > 0$  имеют место формулы

$$a(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu \right\}, \quad (6.22)$$

где  $\kappa > 0$ , и

$$a(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu \right\} \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j}, \quad (6.23)$$

где  $\kappa < 0$ . Они допускают переход на вещественную ось по правилу (*формула Сохоцкого — Племеля*)

$$\frac{1}{\mu - \lambda} \rightarrow \frac{1}{\mu - \lambda - i0} = \text{v. p.} \frac{1}{\mu - \lambda} + \pi i \delta(\mu - \lambda), \quad (6.24)$$

где *v. p.* означает главное значение.

Для доказательства представления (6.23) рассмотрим аналитическую в верхней полуплоскости функцию

$$\tilde{a}(\lambda) = a(\lambda) \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\lambda - \lambda_j}, \quad (6.25)$$

которая отличается от  $a(\lambda)$  на произведение элементарных множителей Бляшке. Функция  $\tilde{a}(\lambda)$  уже не имеет нулей при  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и по-прежнему удовлетворяет при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  асимптотическому условию (6.3). На вещественной оси

$$|\tilde{a}(\lambda)|^2 = |a(\lambda)|^2 = 1 - |b(\lambda)|^2. \quad (6.26)$$

Функция  $\eta(\lambda) = \ln \tilde{a}(\lambda)$  также аналитична при  $\text{Im } \lambda > 0$ , исчезает при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и непрерывна вплоть до вещественной оси в силу условия (A<sub>1</sub>). Поэтому ее вещественная и мнимая части при вещественных  $\lambda$  связаны соотношением

$$\text{Im } \eta(\lambda) = - \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } \eta(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad (6.27)$$

которое немедленно следует из теоремы Коши. В физической литературе формула (6.27) называется *дисперсионным соотношением*. Используя формулу (6.24), ее можно переписать в виде

$$\eta(\lambda) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \eta(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (6.28)$$

Представление (6.23) теперь следует из (6.28) и очевидного соотношения

$$\operatorname{Re} \eta(\lambda) = \ln |\tilde{a}(\lambda)| = \frac{1}{2} \ln (1 - |b(\lambda)|^2). \quad (6.29)$$

Формула (6.22) доказывается аналогично. На этом мы заканчиваем исследование аналитических свойств коэффициентов перехода.

Подводя итоги § 5—7, мы можем сказать, что в них построено отображение

$$(\psi(x), \bar{\psi}(x)) \rightarrow (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j) \quad (6.30)$$

и описан его образ для различных классов функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . Так, функциям  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  из  $L_1(-\infty, \infty)$  соответствуют  $b(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$  из  $\mathfrak{R}_0$ ; шварцевским функциям  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  соответствуют шварцевские функции  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$ .

Это отображение будет играть важную роль для полного описания динамики нашей модели. Так, в следующем параграфе мы убедимся, что в новых переменных уравнения движения становятся тривиальными, а в следующей главе мы исследуем обратимость отображения (6.30).

## § 7. Динамика коэффициентов перехода

В § 3 мы убедились, что матрица перехода  $T(x, y, \lambda)$  удовлетворяет уравнению эволюции

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, \lambda) = V(x, \lambda)T(x, y, \lambda) - T(x, y, \lambda)V(y, \lambda), \quad (7.1)$$

когда функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  удовлетворяют уравнению движения модели НШ. Здесь для быстроубывающих  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  мы перейдем в уравнении (7.1) к пределу  $y \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$  и получим простые эволюционные уравнения для коэффициентов перехода.

Для этого заметим, что при  $|x| \rightarrow \infty$

$$V(x, \lambda) \rightarrow V(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \sigma_3, \quad (7.2)$$

так что матрица  $V(\lambda)$  коммутирует с  $E(x, \lambda)$ . Умножим уравнение (7.1) при вещественных  $\lambda$  справа на матрицу  $E(y, \lambda)$  и

перейдем к пределу  $y \rightarrow \pm \infty$ . Вспоминая определение решений Иоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  — формулу (5.2), получаем для них уравнения

$$\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t}(x, \lambda) = V(x, \lambda) T_{\pm}(x, \lambda) - \frac{i\lambda^2}{2} T_{\pm}(x, \lambda) \sigma_3. \quad (7.3)$$

Повторяя эту операцию по переменной  $x$ , получаем уравнение для приведенной матрицы монодромии

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\lambda, t) = \frac{i\lambda^2}{2} [\sigma_3, T(\lambda, t)]. \quad (7.4)$$

Последнее уравнение замечательно тем, что в нем полностью исчезла зависимость от функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . В терминах коэффициентов перехода непрерывного спектра оно переписывается в следующем явном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} a(\lambda, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} b(\lambda, t) = -i\lambda^2 b(\lambda, t). \quad (7.5)$$

В частности, отсюда видно, что при  $\text{Im} \lambda = 0$  коэффициент  $a(\lambda)$  не зависит от времени

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0). \quad (7.6)$$

В силу аналитичности это верно и при  $\text{Im} \lambda > 0$ , откуда следует, что нули  $\lambda_j$  функции  $a(\lambda)$  также не зависят от  $t$ . Таким образом, *в быстроубывающем случае роль производящей функции законов сохранения играет коэффициент  $a(\lambda)$ .*

Определим теперь эволюцию коэффициентов перехода дискретного спектра. Для этого воспользуемся уравнениями (7.3) для столбцов  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$ :

$$\frac{\partial T_-^{(1)}}{\partial t}(x, \lambda) = V(x, \lambda) T_-^{(1)}(x, \lambda) - \frac{i\lambda^2}{2} T_-^{(1)}(x, \lambda) \quad (7.7)$$

и

$$\frac{\partial T_+^{(2)}}{\partial t}(x, \lambda) = V(x, \lambda) T_+^{(2)}(x, \lambda) + \frac{i\lambda^2}{2} T_+^{(2)}(x, \lambda). \quad (7.8)$$

Эти уравнения справедливы и при  $\text{Im} \lambda > 0$  и в случае  $\lambda = \lambda_j$  совместны с равенством (6.20)

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j), \quad (7.9)$$

только если

$$\frac{d}{dt} \gamma_j(t) = -i\lambda_j^2 \gamma_j(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Уравнения (7.5) и (7.10) тривиально решаются и зависимость от времени коэффициентов перехода дается замечатель-

ными по своей простоте формулами

$$b(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t} b(\lambda, 0),$$

$$\gamma_j(t) = e^{-i\lambda^2 t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.11)$$

В этом и заключается обещанное в конце предыдущего параграфа упрощение динамики при отображении (6.30). В новых переменных уравнения движения решаются явно. С точностью до утверждения об обратимости отображения (6.30) можно говорить о том, что формулы (7.11) дают полное решение начальной задачи (1.1)—(1.2) для быстроубывающего случая.

Обсудим теперь локальные интегралы движения. Будем считать, что  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  являются функциями типа Шварца. С тем чтобы использовать уже известные результаты, предположим, что  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  получаются пределом  $L \rightarrow \infty$  из функций  $\psi_L(x)$ ,  $\bar{\psi}_L(x)$  — периодических функций с периодом  $2L$ . В этом случае плотности  $P_n(x)$  локальных интегралов движения, определяемые формулами (4.19)—(4.20) и (4.34), имеют пределы при  $L \rightarrow \infty$ , которые также являются функциями типа Шварца. Поэтому в выражении (4.33) для законов сохранения можно перейти к пределу  $L \rightarrow \infty$ , после чего они приобретают вид

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) dx. \quad (7.12)$$

Здесь  $P_n(x)$  строится по  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  с помощью формул (4.19)—(4.20) и (4.34).

Рассмотрим теперь предельный переход  $L \rightarrow \infty$  в производящей функции  $p_L(\lambda)$ :

$$p_L(\lambda) = \arccos \frac{1}{2} \operatorname{tr} T_L(\lambda). \quad (7.13)$$

Обратим внимание, что, в отличие от (4.1)—(4.2), мы положили  $\theta=0$ . Из определения приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$  и (5.47) получаем, что при вещественных  $\lambda$  и  $L \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} T_L(\lambda) &= e^{-i\lambda L} a(\lambda) + e^{i\lambda L} \bar{a}(\lambda) + o(1) = \\ &= 2|a(\lambda)| \cos(\arg a(\lambda) - \lambda L) + o(1). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Из соотношения нормировки следует, что

$$|a(\lambda)| = 1 + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (7.15)$$

поскольку  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца. Поэтому с точностью до  $O(|\lambda|^{-\infty})$  имеем при  $L \rightarrow \infty$

$$p_L(\lambda) = -\lambda L + \arg a(\lambda) + o(1) = -\lambda L + \frac{1}{i} \ln a(\lambda) + o(1), \quad (7.16)$$

где мы использовали формулу

$$\ln a(\lambda) = i \operatorname{arg} a(\lambda) + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (7.17)$$

вытекающую из (7.15).

Таким образом, предел производящей функции законов сохранения при  $L \rightarrow \infty$  совпадает с  $\ln a(\lambda)$ :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (p_L(\lambda) + \lambda L) = \frac{1}{i} \ln a(\lambda), \quad (7.18)$$

где равенство понимается с точностью до  $O(|\lambda|^{-\infty})$ . Сравнивая это равенство с (4.4), получаем, что  $\ln a(\lambda)$  является производящей функцией локальных интегралов движения:

$$\ln a(\lambda) = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}). \quad (7.19)$$

Равномерность асимптотического ряда (4.4) для  $p_L(\lambda) + \lambda L$  по  $L$  при  $L \rightarrow \infty$  очевидным образом следует из доказанного в § 6 существования предела в интегральном представлении (3.44) для  $E(-L, \lambda) T_L(\lambda) E(-L, \lambda)$  при  $L \rightarrow \infty$ .

Коэффициенты разложения (7.19) можно определить из представлений (6.22)–(6.23). Плотности  $\ln(1 + \varepsilon |b(\mu)|^2)$  в интегралах (6.22) и (6.23) являются функциями типа Шварца, и разложение знаменателя  $\frac{1}{\mu - \lambda}$  в геометрическую прогрессию определяет асимптотический ряд

$$\ln a(\lambda) = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (7.20)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2) \lambda^{k-1} d\lambda + \frac{1}{i\kappa k} \sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_j^k - \lambda_j^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.21)$$

Здесь  $\varepsilon = \operatorname{sign} \kappa$  и при  $\varepsilon = 1$  сумма по нулям в правой части (7.21) отсутствует.

Сравнение асимптотических разложений (7.19) и (7.20) приводит к тождествам

$$c_n = I_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) dx, \quad (7.22)$$

которые связывают функционалы от  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  с функционалами от  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  и  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$ . В спектральной теории такие формулы называются *тождествами следов*.

Для наших целей важно, что мы сумели представить интегралы движения  $I_n$  как функционалы от новых переменных  $(b(\lambda), \bar{b}(\lambda), \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n)$ , введенных в (6.30). Характерно, что в них участвует только половина этих переменных, а именно,  $|b(\lambda)|^2$  и  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ . Интерпретация этого факта в терминах гамильтоновой механики будет дана в гл. III.

### § 8. Случай конечной плотности. Решения Йоста

Граничные условия конечной плотности имеют интересные приложения лишь в случае  $\kappa > 0$ , и поэтому мы ограничимся только этим случаем. Будем сразу считать, что функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  принимают граничные условия

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = \rho e^{i\varphi_{\pm}}, \quad \varphi_+ - \varphi_- = \theta \quad (8.1)$$

в смысле Шварца. Без ограничения общности положим  $\varphi_- = 0$ , так что  $\varphi_+ = \theta$ .

В терминах матрицы  $U(x, \lambda)$  эти граничные условия переписываются в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\lambda & \omega e^{-i\theta} \\ \omega e^{i\theta} & i\lambda \end{pmatrix} = U_+(\lambda) \quad (8.2)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\lambda & \omega \\ \omega & i\lambda \end{pmatrix} = U_-(\lambda), \quad (8.3)$$

где

$$\omega = 2\sqrt{\kappa\rho}. \quad (8.4)$$

Матрицы  $U_{\pm}(\lambda)$  связаны соотношением

$$U_+(\lambda) = Q^{-1}(\theta) U_-(\lambda) Q(\theta). \quad (8.5)$$

В этом параграфе мы введем подходящие решения линейной задачи

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F \quad (8.6)$$

с граничными условиями (8.2) — (8.3) и исследуем их свойства. При этом мы будем следовать схеме, развитой для быстрорубящего случая, опуская несущественные детали.

Роль матрицы  $E(x, \lambda)$  будет теперь играть матричное решение  $E_{\rho}(x, \lambda)$  уравнения

$$\frac{dE_{\rho}}{dx}(x, \lambda) = U_-(\lambda) E_{\rho}(x, \lambda), \quad (8.7)$$

которое получается из (8.6) при  $x \rightarrow -\infty$ . Непрерывный спектр задачи (8.7) состоит из вещественных  $\lambda$ , удовлетворяющих



условию

$$\lambda^2 \geq \omega^2. \quad (8.8)$$

Множество таких  $\lambda$  обозначим через  $\mathbb{R}_\omega$ . При  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  мы выберем матрицу  $E_\rho(x, \lambda)$  в виде

$$E_\rho(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i(k-\lambda)}{\omega} \\ \frac{i(\lambda-k)}{\omega} & 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{ikx}{\omega^2} \sigma_3}, \quad (8.9)$$

где

$$k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \quad (8.10)$$

и ветвь квадратного корня фиксируется условием

$$\text{sign } k(\lambda) = \text{sign } \lambda. \quad (8.11)$$

Такой выбор  $E_\rho(x, \lambda)$  однозначно определяется условиями об аналитической продолжимости  $E_\rho(x, \lambda)$  в плоскость  $k$ , при которых первый столбец убывает при  $x \rightarrow -\infty$  и  $\text{Im } k > 0$ , а второй — при  $x \rightarrow +\infty$  и  $\text{Im } k > 0$ .

Соответствующее решение уравнения, получающегося из (8.6) при  $x \rightarrow +\infty$ , имеет вид  $Q^{-1}(\theta) E_\rho(x, \lambda)$ .

Рассмотрим теперь более подробно аналитические свойства матрицы  $E_\rho(x, \lambda)$ . Заметим, что, в отличие от  $E(x, \lambda)$ , матрица  $E_\rho(x, \lambda)$  не унимодулярна:

$$\det E_\rho(x, \lambda) = \frac{2k(\lambda - k)}{\omega^2} \quad (8.12)$$

и, таким образом, вырождается при  $\lambda = \pm\omega$ . При  $\rho \rightarrow 0$  матрица  $E_\rho(x, \lambda)$  не унимодулярна:

Основное отличие вспомогательной линейной задачи (8.6) от аналогичной задачи для быстроубывающего случая состоит в том, что непрерывный спектр имеет *лауну*  $-\omega < \lambda < \omega$ . Точки вырождения матрицы  $E_\rho(x, \lambda)$  являются краями непрерывного спектра. Аналитические свойства  $E_\rho(x, \lambda)$  естественно формулировать на римановой поверхности  $\Gamma$  функции  $k(\lambda)$ . Поверхность  $\Gamma$  состоит из двух экземпляров  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}^1$  с разрезами по вещественной оси от  $-\infty$  до  $-\omega$  и от  $\omega$  до  $\infty$  (см. рис. 2) с отождествленными надлежащим образом берегами разрезов.

Точку на  $\Gamma$ , отличную от точек ветвления  $\pm\omega$ , будем задавать парой  $(\lambda, \epsilon)$ , где  $\lambda$  — комплексное число, а  $\epsilon = \pm 1$ , причем  $\epsilon = 1$  на листе  $\Gamma_+$  и  $\epsilon = -1$  на листе  $\Gamma_-$ . Функция  $k(\lambda)$  вводится на  $\Gamma$  формулой (8.10), где  $\pm \text{Im } k(\lambda) \geq 0$  на листах  $\Gamma_\pm$ . Альтернативным образом лист  $\Gamma_+$  характеризуется условием  $k(\lambda + i0) > 0$  при  $\text{Im } \lambda = 0$  и  $\lambda > \omega$ ; при этом  $k(\lambda + i0) < 0$  при  $\text{Im } \lambda = 0$ ,  $\lambda < -\omega$ . Таким образом, соглашение (8.11) выполняется для предельных

значений  $k$  на верхних берегах разрезов на листе  $\Gamma_+$  и на нижних берегах разрезов листа  $\Gamma_-$ .

В дальнейшем мы часто будем опускать зависимость функции  $k(\lambda)$  от  $\lambda$ . Таким образом, в формулах, где участвуют  $k$  и  $\lambda$ , всегда подразумевается, что  $k$  является введенной функцией  $\lambda$ .



Рис. 2

При  $\lambda$  вне разрезов матрица  $E_\rho(x, \lambda)$  не является ограниченной функцией  $x$ . При этом ее первый столбец на  $\Gamma_+$  и второй столбец на  $\Gamma_-$  экспоненциально убывают при  $x \rightarrow -\infty$ , а второй столбец на  $\Gamma_+$  и первый столбец на  $\Gamma_-$  экспоненциально убывают при  $x \rightarrow +\infty$ . В стороны, противоположные указанным, эти столбцы экспоненциально растут.

Матричные решения Йоста уравнения (8.6) при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\infty$  введем при помощи интегральных представлений

$$T_+(x, \lambda) = Q^{-1}(\theta) E_\rho(x, \lambda) + \int_x^\infty \Gamma_+(x, y) Q^{-1}(\theta) E_\rho(y, \lambda) dy \quad (8.13)$$

и

$$T_-(x, \lambda) = E_\rho(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, y) E_\rho(y, \lambda) dy. \quad (8.14)$$

Для их вывода используем альтернативный к § 3 метод. Именно, подставим представления (8.13) и (8.14) в уравнение (8.6) и соберем члены при одинаковых матрицах  $E_\rho(x, \lambda)$ . В результате получаем, что ядра  $\Gamma_\pm(x, y)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_\pm(x, y) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_\pm(x, y) \sigma_3 - U_0(x) \Gamma_\pm(x, y) + \sigma_3 \Gamma_\pm(x, y) \sigma_3 U_\pm = 0, \quad (8.15)$$

где

$$U_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_0(x) = U_\pm(\lambda) + \frac{i\lambda}{2} \sigma_3, \quad (8.16)$$

и граничным условиям

$$\Gamma_\pm(x, x) - \sigma_3 \Gamma_\pm(x, x) \sigma_3 = \mp (U_0(x) - U_\pm), \quad (8.17)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Gamma_\pm(x, y) = 0.$$

Эти дифференциальные задачи — задачи Гурса — могут быть сведены к системам интегральных уравнений. Например, для ядра  $\Gamma_-(x, y)$  имеем систему уравнений

$$\Gamma_-^{(d)}(x, y) = \int_{-\infty}^x (U_0(s) \Gamma_-^{(nd)}(s, s+y-x) + \Gamma_-^{(nd)}(s, s+y-x) U_-) ds, \quad (8.18)$$

$$\Gamma_-^{(nd)}(x, y) = \frac{1}{2} \left( U_0 \left( \frac{x+y}{2} \right) - U_- \right) + \int_{(x+y)/2}^x (U_0(s) \Gamma_-^{(d)}(s, x+y-s) - \Gamma_-^{(d)}(s, x+y-s) U_-) ds, \quad (8.19)$$

где  $x \geq y$  и через  $\Gamma_-^{(d)}$  и  $\Gamma_-^{(nd)}$  мы обозначили диагональную и антидиагональную части матрицы  $\Gamma_-$  соответственно.

Эти уравнения вольтерровы, и итерации для них абсолютно сходятся. При наших условиях на  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  решение  $\Gamma_-(x, y)$  является бесконечно дифференцируемой функцией  $x$  и  $y$ , шварцевского типа по  $y$  при  $y \rightarrow -\infty$ . Аналогичным образом исследуется ядро  $\Gamma_+(x, y)$ , которое является функцией типа Шварца по  $y$  при  $y \rightarrow +\infty$ .

Так доказываются представления (8.13) и (8.14), определяющие решения Йоста. Рассмотрим теперь их свойства.

1) Из представлений (8.13) и (8.14) следует, что решения Йоста имеют асимптотики при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$T_+(x, \lambda) = Q^{-1}(\theta) E_\rho(x, \lambda) + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (8.20)$$

и

$$T_-(x, \lambda) = E_\rho(x, \lambda) + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (8.21)$$

2) При  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  матрицы  $T_\pm(x, \lambda)$  получаются из матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  в пределе при  $y \rightarrow \pm\infty$ :

$$T_+(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow +\infty} T(x, y, \lambda) Q^{-1}(\theta) E_\rho(y, \lambda) \quad (8.22)$$

и

$$T_-(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow -\infty} T(x, y, \lambda) E_\rho(y, \lambda). \quad (8.23)$$

Для доказательства достаточно записать  $T(x, y, \lambda)$  в виде

$$T(x, y, \lambda) = T_\pm(x, \lambda) T_\pm^{-1}(y, \lambda) \quad (8.24)$$

и воспользоваться асимптотиками (8.20) и (8.21).

3) Определители решений Йоста совпадают с определителем  $E_\rho(x, \lambda)$ :

$$\det T_\pm(x, \lambda) = \det E_\rho(x, \lambda) = \frac{2k(\lambda - k)}{\omega^2}, \quad (8.25)$$

так что матрицы  $T_\pm(x, \lambda)$  вырождены при  $\lambda = \pm\omega$ .

4) При  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\infty$  имеет место свойство инволюции

$$\bar{T}_\pm(x, \lambda) = \sigma_1 T_\pm(x, \lambda) \sigma_1 \quad (8.26)$$

и аналогичное соотношение для  $E_\rho(x, \lambda)$ , которые совпадают с (5.19) при  $\kappa > 0$ . Ядра  $\Gamma_\pm(x, y)$  также обладают этим свойством и поэтому могут быть записаны в виде

$$\Gamma_\pm = \begin{pmatrix} \alpha_\pm & \bar{\beta}_\pm \\ \beta_\pm & \bar{\alpha}_\pm \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

5) Из интегральных представлений (8.13) и (8.14) и свойств аналитичности  $E_\rho(x, \lambda)$  следуют аналитические свойства решений Иоста: первый столбец  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  матрицы  $T_-(x, \lambda)$  и второй столбец  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  матрицы  $T_+(x, \lambda)$  аналитически продолжаются на лист  $\Gamma_+$  римановой поверхности  $\Gamma$ , а столбцы  $T_+^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_-^{(2)}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются на лист  $\Gamma_-$ . При фиксированном  $x$  имеют место асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$e^{\frac{ikx}{2}} T_-^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda - k) \\ \omega \end{pmatrix} + O\left(\frac{|1 + \lambda - k|}{|\lambda|}\right), \quad (8.28)$$

$$e^{-\frac{ikx}{2}} T_+^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i(k - \lambda) e^{-\frac{i\theta}{2}} \\ \omega \\ \frac{i\theta}{e^2} \end{pmatrix} + O\left(\frac{|1 + \lambda - k|}{|\lambda|}\right), \quad (8.29)$$

где  $\lambda$  на листе  $\Gamma_+$ , и

$$e^{\frac{ikx}{2}} T_+^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} \\ i(\lambda - k) \\ \omega \end{pmatrix} + O\left(\frac{|1 + \lambda - k|}{|\lambda|}\right), \quad (8.30)$$

$$e^{-\frac{ikx}{2}} T_-^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i(k - \lambda) \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{|1 + \lambda - k|}{|\lambda|}\right), \quad (8.31)$$

где  $\lambda$  на листе  $\Gamma_-$ .

Отметим, что для  $\lambda$  из  $\Gamma_+$

$$k = \lambda + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (8.32)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda > 0$  и

$$k = -\lambda + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (8.33)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda < 0$ . Поэтому для оценки остатков в формулах (8.28)–(8.31) следует иметь в виду, что в первом случае  $1 +$

$+\lambda-k=O(1)$ , а во втором случае  $1+\lambda-k=O(|\lambda|)$ . На листе  $\Gamma_-$  эти случаи меняются местами.

б) Свойство инволюции (8.26) переносится и на аналитически продолженные столбцы матриц  $\bar{T}_\pm(x, \lambda)$ . Для этого введем инволюцию  $P$  на  $\Gamma$ , при которой  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ ,  $k \rightarrow \bar{k}$ . Более формально ее можно определить как

$$P(\lambda, \varepsilon) = (\bar{\lambda}, -\varepsilon), \quad (8.34)$$

так что она переставляет листы  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ . Имеем

$$\bar{E}_\rho(x, \lambda) = \sigma_1 E_\rho(x, P(\lambda)) \sigma_1, \quad (8.35)$$

откуда получаем, что

$$\sigma_1 \bar{T}_\pm^{(1)}(x, \lambda) = T_\pm^{(2)}(x, P(\lambda)), \quad (8.36)$$

где для знака  $+$   $\lambda$  лежит на  $\Gamma_-$ , а для знака  $-$  соответственно на  $\Gamma_+$ .

На поверхности  $\Gamma$  можно ввести и вторую инволюцию  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ ,  $k \rightarrow -\bar{k}$ . Более формально эту инволюцию можно задать следующим образом:

$$J(\lambda, \varepsilon) = (\bar{\lambda}, \varepsilon), \quad (8.37)$$

так что она оставляет на месте листы  $\Gamma_\pm$ . При всех  $\lambda$  из  $\Gamma$  имеет место формула

$$\bar{E}_\rho(x, \lambda) = -\frac{i(\bar{\lambda} - \bar{k})}{\omega} \sigma_1 E_\rho(x, J(\lambda)) \sigma_3, \quad (8.38)$$

которая переносится и на соответствующие столбцы решений Юста. Имеем

$$\bar{T}_\pm^{(1)}(x, J(\lambda)) = \frac{\lambda + k}{i\omega} \sigma_1 T_\pm^{(1)}(x, \lambda) \quad (8.39)$$

и

$$\bar{T}_\pm^{(2)}(x, J(\lambda)) = -\frac{\lambda + k}{i\omega} \sigma_1 T_\pm^{(2)}(x, \lambda), \quad (8.40)$$

где  $\lambda$  лежит на соответствующих листах  $\Gamma_\pm$ . В частности, отсюда получаем связь значений столбцов матриц  $T_\pm(x, \lambda)$  на верхних и нижних берегах разрезов соответствующих листов аналитичности:

$$\bar{T}_\pm^{(1)}(x, \lambda - i0) = \frac{\lambda + k}{i\omega} \sigma_1 T_\pm^{(1)}(x, \lambda + i0) \quad (8.41)$$

и

$$\bar{T}_\pm^{(2)}(x, \lambda - i0) = -\frac{\lambda + k}{i\omega} \sigma_1 T_\pm^{(2)}(x, \lambda + i0), \quad (8.42)$$

где  $\lambda$  вещественно,  $|\lambda| \geq \omega$ .

На этом мы заканчиваем перечисление свойств матриц  $T_{\pm}(x, \lambda)$ .

Как и в быстроубывающем случае, существует *приведенная матрица монодромии*  $T_p(\lambda)$ , осуществляющая связь решений  $T_+(x, \lambda)$  и  $T_-(x, \lambda)$ :

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T_p(\lambda). \quad (8.43)$$

Матрица  $T_p(\lambda)$  определена и унитарна при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_{\omega}$ ,  $\lambda \neq \pm\omega$ . При таких  $\lambda$  она может быть также получена как предел

$$T_p(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} E_p^{-1}(L, \lambda) Q(\theta) T(L, -L, \lambda) E_p(-L, \lambda). \quad (8.44)$$

Из свойства инволюции при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_{\omega}$  следует, что опять имеется соотношение

$$\bar{T}_p(\lambda) = \sigma_1 T_p(\lambda) \sigma_1, \quad (8.45)$$

позволяющее представить матрицу  $T_p(\lambda)$  в уже привычном виде

$$T_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_p(\lambda) & \bar{b}_p(\lambda) \\ b_p(\lambda) & \bar{a}_p(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (8.46)$$

Коэффициенты  $a_p(\lambda)$  и  $b_p(\lambda)$  будем по-прежнему называть *коэффициентами перехода*. Унитарность  $T_p(\lambda)$  приводит к соотношению нормировки

$$|a_p(\lambda)|^2 - |b_p(\lambda)|^2 = 1. \quad (8.47)$$

Дальнейшие свойства  $a_p(\lambda)$  и  $b_p(\lambda)$  будут приведены в следующем параграфе.

## § 9. Случай конечной плотности. Коэффициенты перехода

Начнем с перечисления свойств коэффициентов перехода, взяв за образец быстроубывающий случай. Из соотношения (8.43) и (8.25) немедленно получаем представления

$$a_p(\lambda) = \frac{\omega^2}{2k(\lambda - k)} \det(T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) \quad (9.1)$$

и

$$b_p(\lambda) = \frac{\omega^2}{2k(\lambda - k)} \det(T_+^{(1)}(x, \lambda), T_-^{(1)}(x, \lambda)), \quad (9.2)$$

обобщающие формулы (6.1) и (6.2).

Из (9.1) следует, что коэффициент  $a_p(\lambda)$  аналитически продолжается на лист  $\Gamma_+$ , исключая точки ветвления  $\lambda = \pm\omega$ . Из (8.28) и (8.29) получаем, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$   $a_p(\lambda)$  имеет асимптотику

$$a_p(\lambda) = \cos \frac{\theta}{2} + i \frac{\lambda}{k} \sin \frac{\theta}{2} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (9.3)$$

Другими словами,

$$a_\rho(\lambda) = e^{\frac{i\theta}{2}} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (9.4)$$

при  $\text{Im } \lambda > 0$  и

$$a_\rho(\lambda) = e^{-\frac{i\theta}{2}} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (9.5)$$

при  $\text{Im } \lambda < 0$ .

Аналогичным образом функция  $\bar{a}_\rho(\lambda)$  аналитически продолжается на лист  $\Gamma_-$ , исключая  $\lambda = \pm\omega$ . Обозначая ее аналитическое продолжение через  $a_\rho^*(\lambda)$ , из (8.36) получаем, что

$$a_\rho^*(\lambda) = \bar{a}_\rho(P(\lambda)). \quad (9.6)$$

Представление (9.2) показывает, что  $b_\rho(\lambda)$ , вообще говоря, не продолжается из  $\mathbb{R}_\omega$ . Конечно, такое продолжение существует, если функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  отличаются от своих асимптотических значений лишь в конечном интервале. Из (8.28) и (8.30) следует, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$

$$b_\rho(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (9.7)$$

Обсудим теперь возможное поведение коэффициентов  $a_\rho(\lambda)$  и  $b_\rho(\lambda)$  в окрестностях точек  $\lambda = \pm\omega$ . Из (9.1) следует, что если столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  при  $\lambda = \omega$  или  $\lambda = -\omega$  (т. е. при  $k=0$ ) линейно независимы, то коэффициент  $a_\rho(\lambda)$  сингулярен и представляется в виде

$$a_\rho(\lambda)|_{\lambda \approx \pm\omega} = \frac{a_\pm}{k} + O(1), \quad (9.8)$$

где  $a_\pm$  отличны от нуля. Именно это реализуется в ситуации обшего положения. В специальной ситуации, когда столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  при  $\lambda = \omega$  или  $\lambda = -\omega$  становятся линейно зависимыми, коэффициенты  $a_+$  или  $a_-$  или оба исчезают и функция  $a_\rho(\lambda)$  не сингулярна в окрестности соответствующей точки ветвления. В теории рассеяния принято говорить, что в этом случае  $\lambda = \omega$  или  $\lambda = -\omega$  или оба эти значения являются *виртуальными уровнями*.

Коэффициент  $b_\rho(\lambda)$  сингулярен или регулярен в окрестности  $\lambda = \pm\omega$  одновременно с  $a_\rho(\lambda)$ . Действительно, при  $\lambda = \pm\omega$  матрицы  $T_\pm(x, \lambda)$  вырождаются, так что столбцы  $T_\pm^{(1)}(x, \pm\omega)$  и  $T_\pm^{(2)}(x, \pm\omega)$  пропорциональны. Из асимптотик (8.20) и (8.21) и определения  $E_\rho(x, \lambda)$  (формулы (8.9)) следует, что

$$T_+^{(1)}(x, \pm\omega) = \pm iT_+^{(2)}(x, \pm\omega). \quad (9.9)$$

Сравнение формул (9.1), (9.2) и (9.9) показывает, что если  $a_+$  или  $a_-$  отличны от нуля, то

$$b_p(\lambda)|_{\lambda \approx \pm \omega} = \mp \frac{ia_{\pm}}{k} + O(1). \quad (9.10)$$

В частности, при этом условии

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm \omega} \frac{a_p(\lambda)}{b_p(\lambda)} = \pm i. \quad (9.11)$$

Уместно подчеркнуть, что именно появление лакуны в непрерывном спектре в случае граничных условий конечной плотности привело к некоторому усложнению аналитических свойств коэффициентов перехода по сравнению с быстроубывающим случаем.

Инволюция  $J$  на  $\Gamma$  связывает значения коэффициента  $a_p(\lambda)$  в полуплоскостях  $\pm \text{Im} \lambda > 0$  листа  $\Gamma_+$ . Именно, из (8.39) и (8.40) следует, что

$$a_p(\lambda) = \bar{a}_p(J(\lambda)). \quad (9.12)$$

Кроме того, эта инволюция позволяет связать значения  $a_p(\lambda)$  и  $b_p(\lambda)$  на верхних и нижних берегах разрезов на листе  $\Gamma_+$ :

$$a_p(\lambda + i0) = \bar{a}_p(\lambda - i0), \quad b_p(\lambda + i0) = -\bar{b}_p(\lambda - i0), \quad (9.13)$$

где  $\lambda$  вещественно,  $|\lambda| > \omega$ . Последняя формула вытекает из (8.41). Предельным переходом отсюда получаем, что коэффициенты  $a_{\pm}$  — чисто мнимые.

Как и в быстроубывающем случае, имеют место интегральные представления

$$\begin{aligned} a_p(\lambda) = & \cos \frac{\theta}{2} + i \frac{\lambda}{k} \sin \frac{\theta}{2} + \int_0^{\infty} \alpha_1(x) e^{ikx} dx + \\ & + i \frac{\lambda}{k} \int_0^{\infty} \alpha_2(x) e^{ikx} dx + \frac{i}{k} \int_0^{\infty} \alpha_3(x) e^{ikx} dx \end{aligned} \quad (9.14)$$

и

$$b_p(\lambda) = i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1(x) e^{ikx} dx + \frac{\lambda}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_2(x) e^{ikx} dx + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_3(x) e^{ikx} dx. \quad (9.15)$$

Для вывода следует перейти к пределу  $x \rightarrow +\infty$  в формуле (8.43) и использовать представление (8.14) и уравнения (8.18), (8.19) (сравни с § 6). Функции  $\alpha_j(x)$ ,  $\beta_j(x)$ ,  $j=1, 2, 3$ , вещественны в силу (9.13) и являются функциями типа Шварца в окрестности  $+\infty$  и на всей оси соответственно. Поэтому коэффициент  $b_p(\lambda)$  является функцией типа Шварца при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .



Из представления (9.14) следует, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  функция  $a_p(\lambda)$  допускает асимптотические разложения по обратным степеням  $\lambda$  или  $k$ . Для этого воспользуемся следующими асимптотическими разложениями на  $\Gamma_+$ :

$$\frac{1}{k(\lambda)} = \pm \left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)^{-1/2} \frac{1}{\lambda} = \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2)^n}{\lambda^{2n+1}} \binom{-1/2}{n} + O(|\lambda|^{-\infty}) \quad (9.16)$$

или

$$\lambda = \pm k \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right)^{1/2} = \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n}}{k^{2n-1}} \binom{1/2}{n} + O(|k|^{-\infty}), \quad (9.17)$$

где общий знак  $\pm$  совпадает со знаком  $\text{Im } \lambda$ , а через  $\binom{\pm 1/2}{n}$  обозначены биномиальные коэффициенты. Интегрируя теперь в (9.14) по частям, получаем искомые разложения для  $a_p(\lambda)$ . Так, например, имеем разложения

$$a_p(\lambda) = e^{i\theta/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k^n} + O(|k|^{-\infty}), \quad (9.18)$$

где  $\text{Im } \lambda > 0$ , и

$$a_p(\lambda) = e^{-i\theta/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{a}_n}{k^n} + O(|k|^{-\infty}), \quad (9.19)$$

где  $\text{Im } \lambda < 0$ , которые согласованы с инволюцией (9.12).

Как и в быстроубывающем случае, нули коэффициента  $a_p(\lambda)$  при  $\lambda$  вне  $\mathbb{R}_0$  соответствуют дискретному спектру вспомогательной линейной задачи (8.6), которая эквивалентна спектральной задаче:

$$\mathcal{L}F = \frac{\lambda}{2} F, \quad (9.20)$$

где

$$\mathcal{L} = i\sigma_3 \frac{d}{dx} + i\sqrt{\kappa}(\psi\sigma_- - \bar{\psi}\sigma_+). \quad (9.21)$$

Действительно, если  $a_p(\lambda)$  исчезает при  $\lambda = \lambda_j$ , то столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  становятся линейно зависимыми:

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j) \quad (9.22)$$

и при  $\lambda$  вне  $\mathbb{R}_0$  экспоненциально убывают при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$  соответственно. Тем самым уравнение (9.20) имеет столбец-решение, экспоненциально убывающее при  $|x| \rightarrow \infty$ .

При  $\kappa > 0$  и наших граничных условиях оператор  $\mathcal{L}$  формально самосопряжен, так что его собственные значения, а тем са-

мым и нули  $a_p(\lambda)$ , вещественны. В силу соотношения нормировки (8.47) эти нули могут лежать лишь строго в лакуне  $-\omega < \lambda < \omega$ . В самом деле, мы имеем либо  $|a_p(\omega)| = \infty$  (общий случай), либо  $|a_p(\omega)| < \infty$  (виртуальный уровень), и тогда по соотношению нормировки  $|a_p(\omega)| > 1$ ; то же верно и для  $\lambda = -\omega$ . В частности, отсюда следует, что число нулей коэффициента  $a_p(\lambda)$  конечно; мы обозначим их через  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Покажем, что *эти нули простые*. Пусть  $\lambda_j$  — нуль  $a_p(\lambda)$ , лежащий в лакуне. Мы докажем, что  $\frac{d\gamma_p}{d\lambda}$  не исчезает при  $\lambda = \lambda_j$ . Из представления (9.1) и условия  $a_p(\lambda_j) = 0$  имеем

$$\dot{a}_p(\lambda_j) = \frac{\omega^2}{2k_j(\lambda_j - k_j)} (\det(\dot{T}_-^{(1)}(x, \lambda_j), T_+^{(2)}(x, \lambda_j)) + \det(T_-^{(1)}(x, \lambda_j), \dot{T}_+^{(2)}(x, \lambda_j))), \quad (9.23)$$

где точка обозначает производную по  $\lambda$ . Столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  удовлетворяют уравнению (8.6), так что столбцы  $\dot{T}_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $\dot{T}_+^{(2)}(x, \lambda)$  соответственно удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dx} \dot{F} = U(x, \lambda) \dot{F} - \frac{i\sigma_3}{2} F. \quad (9.24)$$

Из этих уравнений и соотношения

$$U^c(x, \lambda) = -\sigma_2 U(x, \lambda) \sigma_2 \quad (9.25)$$

легко получаем равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} \det(T_-^{(1)}(x, \lambda), \dot{T}_+^{(2)}(x, \lambda)) = \frac{i}{2} \det(\sigma_3 T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) \quad (9.26)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \det(\dot{T}_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) = -\frac{i}{2} \det(\sigma_3 T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)). \quad (9.27)$$

Учитывая, что при  $\lambda = \lambda_j$  столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  пропорциональны и экспоненциально убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ , получаем отсюда, что

$$\det(T_-^{(1)}(x, \lambda_j), \dot{T}_+^{(2)}(x, \lambda_j)) = \frac{1}{2i} \gamma_j \int_x^\infty \Delta(x', \lambda_j) dx' \quad (9.28)$$

и

$$\det(\dot{T}_-^{(1)}(x, \lambda_j), T_+^{(2)}(x, \lambda_j)) = \frac{1}{2i} \gamma_j \int_{-\infty}^x \Delta(x', \lambda_j) dx', \quad (9.29)$$

где

$$\Delta(x, \lambda) = \det(\sigma_3 T_+^{(2)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)). \quad (9.30)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\omega}{\lambda - k} = \frac{\lambda + k}{\omega}, \quad (9.31)$$

так что с помощью инволюции (8.40) выражение  $\frac{\omega}{\lambda - k} \Delta(x, \lambda)$  при  $\lambda$  из лакуны преобразуется к виду

$$\frac{\lambda + k}{\omega} \Delta(x, \lambda) = \det(\sigma_2 \bar{T}_+^{(2)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) = \frac{1}{i} \|T_+^{(2)}(x, \lambda_j)\|^2, \quad (9.32)$$

где  $\|\cdot\|$  обозначает обычную векторную норму в  $\mathbb{C}^2$ . Собирая полученные формулы, получаем для  $\dot{a}_\rho(\lambda_j)$  окончательное выражение

$$\dot{a}_\rho(\lambda_j) = - \frac{\omega \gamma_j}{4k_j} \int_{-\infty}^{\infty} \|T_+^{(2)}(x, \lambda_j)\|^2 dx, \quad (9.33)$$

откуда следует, что  $\dot{a}_\rho(\lambda_j)$  не исчезает.

Инволюция (8.40) показывает также, что коэффициенты перехода дискретного спектра  $\gamma_j$ , участвующие в формуле (9.22), чисто мнимые. Поэтому из (9.33) следует, что  $\dot{a}_\rho(\lambda_j)$  вещественно и его знак совпадает со знаком  $i\gamma_j$ :

$$\text{sign } \dot{a}_\rho(\lambda_j) = \text{sign } i\gamma_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.34)$$

Покажем теперь, что как и в быстроубывающем случае, коэффициент  $a_\rho(\lambda)$  однозначно определяется по коэффициенту  $b_\rho(\lambda)$ , своим нулям в лакуне  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и параметру  $\theta$ . Для этого получим аналог дисперсионных соотношений (6.22), (6.23). С этой целью конформно отображим лист  $\Gamma_+$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $z$  при помощи функции

$$z = z(\lambda) = \lambda + k(\lambda), \quad \text{Im } z \geq 0. \quad (9.35)$$

При этом отображении разрезы на  $\Gamma_+$  переходят в вещественную ось  $-\infty < z < \infty$  и окрестность  $\infty$  при  $\text{Im } \lambda < 0$  переходит в окрестность точки  $z = 0$ . Обратное отображение дается формулой

$$\lambda = \lambda(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{\omega^2}{z} \right), \quad (9.36)$$

где функция  $\lambda(z)$  иногда называется функцией Жуковского.

Рассмотрим при  $\text{Im } z \geq 0$  функцию

$$f(z) = e^{-i\theta/2} a_\rho(\lambda(z)). \quad (9.37)$$

Она аналитична в верхней полуплоскости, удовлетворяет при  $|z| \rightarrow \infty$  асимптотике

$$f(z) = 1 + O(1/|z|) \quad (9.38)$$

и имеет нули  $z_j$ , где

$$z_j = z(\lambda_j) = \lambda_j + i\sqrt{\omega^2 - \lambda_j^2}, \quad |z_j| = \omega, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.39)$$

Поэтому для нее справедливо дисперсионное соотношение

$$f(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(s)|}{s - z} ds \right\}, \quad (9.40)$$

представляющее собой другой вариант записи представления (6.28).

В силу формулы (9.12) функция  $f(z)$  обладает инволюцией

$$f(z) = e^{-i\theta} \bar{f}(\omega^2/\bar{z}). \quad (9.41)$$

В частности, при вещественных  $s$  имеем

$$|f(s)| = |\bar{f}(\omega^2/s)|. \quad (9.42)$$

Поэтому интеграл в (9.40) можно свести к интегралу по полосою  $|s| \geq \omega$ . Возвращаясь к исходным переменным  $\lambda$  и  $k$  и используя соотношение нормировки, получаем для  $a_p(\lambda)$  искомое представление

$$a_p(\lambda) = e^{\frac{i\theta}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{\lambda + k(\lambda) - \lambda_j - k_j}{\lambda + k(\lambda) - \lambda_j - \bar{k}_j} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(\mu)|^2)}{k(\mu)} \left( 1 + \frac{k(\lambda)}{\mu - \lambda} \right) d\mu \right\}, \quad (9.43)$$

где интегрирование ведется по верхним берегам разрезов на листе  $\Gamma_+$ , а  $\lambda$  лежит вне  $\mathbb{R}_\omega$ .

В отличие от быстроубывающего случая, данные  $b_p(\lambda)$ ,  $\lambda_j$  и  $\theta$  не являются независимыми. Именно, из асимптотики (9.5) следует, что должно выполняться соотношение

$$e^{-i\theta} = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j + k_j}{\lambda_j + \bar{k}_j} \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(\lambda)|^2)}{k(\lambda)} d\lambda \right\}, \quad (9.44)$$

которое получается из (9.43) предельным переходом  $|\lambda| \rightarrow \infty$  в полуплоскости  $\text{Im} \lambda < 0$  с учетом равенства  $\lambda + k = O(1/|\lambda|)$ . В дальнейшем полученное соотношение будем называть *условием*  $(\theta)$ .

Этим не исчерпываются ограничения на данные  $b_p(\lambda)$ ,  $\lambda_j$  и  $\theta$ . В ситуации общего положения коэффициент  $b_p(\lambda)$  сингулярен в окрестности  $\lambda = \pm \omega$ :

$$b_p(\lambda) |_{\lambda \approx \pm \omega} = \frac{b_\pm}{k} + O(1), \quad (9.45)$$

где  $b_{\pm}$  вещественны. В то же время коэффициент  $a_{\rho}(\lambda)$  удовлетворяет условию (9.8), где

$$a_{\pm} = \pm i b_{\pm}. \quad (9.46)$$

Так как в представлении (9.43) участвует только  $|b_{\rho}(\lambda)|$ , то последнее условие накладывает ограничения на  $b_{\pm}$ , которые имеют вид

$$\text{sign } b_{\pm} = (-1)^{N_{\pm}}, \quad (9.47)$$

где  $N_{\pm}$  — некоторые целые числа (см. (9.58)).

Для вывода и вычисления  $N_{\pm}$  рассмотрим интеграл в (9.43) при  $\lambda$  в окрестности  $\pm\omega$  вне  $\mathbb{R}_{\omega}$ . Очевидно, что при  $\lambda$  в окрестности  $\omega$  сингулярный вклад дает лишь интеграл

$$I(\lambda) = \int_{\omega}^{\omega \text{ ch } \delta} \frac{\ln(1 + |b_{\rho}(\mu)|^2) k(\lambda)}{k(\mu)(\mu - \lambda)} d\mu, \quad (9.48)$$

где  $\delta > 0$ . Из (9.45) следует, что

$$I(\lambda) = 2\pi i \ln |b_{+}| + I_0(\lambda) + O(|k(\lambda)|), \quad (9.49)$$

где

$$I_0(\lambda) = -2k(\lambda) \int_{\omega}^{\omega \text{ ch } \delta} \frac{\ln k(\mu)}{k(\mu)(\mu - \lambda)} d\mu. \quad (9.50)$$

С помощью замены переменной

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\omega^2}{x} \right), \quad k(\mu(x)) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{\omega^2}{x} \right) \quad (9.51)$$

последний интеграл приводится к виду

$$I_0(\lambda) = -2 \int_{\omega e^{-\delta}}^{\omega e^{\delta}} \frac{\ln |k(\mu(x))|}{x - z} dx + \int_{\omega e^{-\delta}}^{\omega e^{\delta}} \frac{\ln |k(\mu(x))|}{x} dx, \quad (9.52)$$

где  $z = z(\lambda)$  (см. (9.35)). Теперь воспользуемся формулой

$$\int_{\omega}^{\omega e^{\delta}} \frac{\ln k(\mu(x))}{x - z} dx = -\frac{1}{2} \ln^2 k(\lambda) + \pi i \ln k(\lambda) + \varphi(z), \quad (9.53)$$

где  $\varphi(z)$  регулярна в окрестности  $z = \omega$ , а  $\ln k$  в правой части означает ветвь логарифма с разрезом по положительной полуоси  $0 \leq k < \infty$ . Для доказательства (9.53) следует рассмотреть интеграл  $\int_{|\zeta - \omega| = \omega(e^{\delta} - 1)}$   $\frac{\ln^2 k(\mu(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta$  и воспользоваться теоремой Ко-

ши. Из (9.53) следует, что

$$\int_{\omega e^{-\delta}}^{\omega} \frac{\ln(-k(\mu(x)))}{x-z} dx = \frac{1}{2} \ln^2(-k(\lambda)) - \pi i \ln(-k(\lambda)) + \frac{1}{2} \int_{\omega e^{-\delta}}^{\omega e^{\delta}} \frac{\ln|k(\mu(x))|}{x} dx - \varphi\left(\frac{\omega^2}{z}\right), \quad (9.54)$$

в результате чего для  $I_0(\lambda)$  получаем представление в окрестности  $\lambda = \omega$

$$I_0(\lambda) = -2\pi i \ln k(\lambda) - \pi^2 + O(|k(\lambda)|). \quad (9.55)$$

Отсюда получаем, что

$$a_p(\lambda) |_{\lambda \approx \omega} = \frac{i|b_+|}{k(\lambda)} e^{\frac{i\theta}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{\omega - \lambda_j - k_j}{\omega - \lambda_j - \bar{k}_j} \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(u)|^2)}{k(u)} d\mu \right\} + O(1). \quad (9.56)$$

Заметим теперь, что при  $-\omega < \lambda < \omega$  выполняется соотношение

$$\left( \frac{\omega - \lambda - k}{\omega - \lambda - \bar{k}} \right)^2 = \frac{\lambda + k}{\lambda + \bar{k}}. \quad (9.57)$$

Сравнивая (9.56), (9.57) и (9.44), убеждаемся, что формула (9.46) справедлива, если целое число  $N_+$  определяется из условия

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \arg \frac{\omega - \lambda_j - \bar{k}_j}{\omega - \lambda_j - k_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(\lambda)|^2)}{k(\lambda)} d\lambda + \pi N_+ < \pi. \quad (9.58)$$

Ясно, что  $(-1)^{N_+}$  не зависит от выбора ветви аргумента.

Аналогично рассматривается окрестность  $\lambda = -\omega$ . Число  $N_-$  определяется из соотношения типа (9.58), где  $\omega$  заменено на  $-\omega$ . Условия (9.47) в дальнейшем будем называть *условиями выбора знаков*. Если коэффициент  $b_p(\lambda)$  регулярен при  $\lambda = \omega$  или  $\lambda = -\omega$ , то дополнительные ограничения описанного типа не возникают.

*Сформулированные свойства данных  $b_p(\lambda)$ ,  $\lambda_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , и  $\theta$ :*

- 1) инволюция (см. (9.13)),
- 2) условие  $(\theta)$  (см. (9.44)),
- 3) условия выбора знаков (см. (9.47) и (9.58)) позволяют однозначно восстановить коэффициент  $a_p(\lambda)$  по формуле (9.43), обладающий свойствами:

- 1) инволюция (см. (9.12)),

2) асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  (см. (9.3) — (9.5)),

3) условия согласования знаков (см. (9.46)).

Проверка свойств 2) и 3) тривиальна, так как их вывод носил обратимый характер. Для вывода свойства 1) следует использовать условие (θ) и равенство

$$\frac{\lambda - k - \lambda_j - \bar{k}_j}{\lambda - k - \lambda_j - k_j} \cdot \frac{\lambda_j + k_j}{\lambda_j + \bar{k}_j} = \frac{\lambda + k - \lambda_j - k_j}{\lambda + k - \lambda_j - \bar{k}_j}, \quad (9.59)$$

справедливое при  $-\omega < \lambda_j < \omega$ .

На этом мы заканчиваем перечисление свойств коэффициентов перехода.

### § 10. Случай конечной плотности. Временная динамика и интегралы движения

Начнем с вывода эволюционных уравнений для решений Юста. Для этого в уравнении (3.21) для матрицы перехода

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, \lambda) = V_\rho(x, \lambda) T(x, y, \lambda) - T(x, y, \lambda) V_\rho(y, \lambda) \quad (10.1)$$

перейдем к пределу  $y \rightarrow -\infty$ , предварительно умножив его справа на  $E_\rho(y, \lambda)$ . Рассмотрим предел выражения  $E_\rho^{-1}(y, \lambda) \times \times V_\rho(y, \lambda) E_\rho(y, \lambda)$  при  $y \rightarrow -\infty$ , где матрица  $V_\rho(y, \lambda)$  введена в § 2:

$$V_\rho = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_{0,\rho} \quad (10.2)$$

(см. формулы (2.4) — (2.8) и (2.11)). В силу граничных условий (8.1) последнее слагаемое в (10.2) исчезает при  $y \rightarrow -\infty$ , а первые два слагаемых превращаются в матрицу  $-\lambda U_-(\lambda)$  (см. (8.3)). Из дифференциального уравнения (8.7) и явной формулы (8.9) для матрицы  $E_\rho(y, \lambda)$  получаем, что

$$E_\rho^{-1}(y, \lambda) U_-(\lambda) E_\rho(y, \lambda) = E_\rho^{-1}(y, \lambda) \frac{d}{dy} E_\rho(y, \lambda) = -\frac{ik}{2} \sigma_3. \quad (10.3)$$

Таким образом, предельный переход в (10.1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial T_-}{\partial t}(x, \lambda) = V_\rho(x, \lambda) T_-(x, \lambda) - \frac{ik\lambda}{2} T_-(x, \lambda) \sigma_3. \quad (10.4)$$

Аналогичным образом рассматривается предел  $y \rightarrow +\infty$ ; получаем, что матрица  $T_+(x, \lambda)$  удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и  $T_-(x, \lambda)$ .

Вторым предельным переходом получаем эволюционное уравнение для приведенной матрицы монодромии

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\rho(\lambda) = \frac{ik\lambda}{2} [\sigma_3, T_\rho(\lambda)], \quad (10.5)$$

а сравнение эволюционных уравнений для столбцов  $T_{-}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{+}^{(2)}(x, \lambda)$  при  $\lambda = \lambda_j$  дает дифференциальное уравнение для коэффициентов перехода дискретного спектра

$$\frac{d}{dt} \gamma_j = -ik_j \lambda_j \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (10.6)$$

Заметим, что эти уравнения отличаются от аналогичных уравнений (7.4) и (7.10) лишь заменой  $\lambda^2$  на  $k\lambda$ .

Из (10.5) и (10.6) получаем, что зависимость от времени коэффициентов перехода дается формулами

$$a_\rho(\lambda, t) = a_\rho(\lambda, 0), \quad b_\rho(\lambda, t) = e^{-ik_j \lambda t} b_\rho(\lambda, 0), \quad (10.7)$$

$$\gamma_j(t) = e^{-ik_j \lambda_j t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n.$$

Итак, мы убедились, что и в случае граничных условий конечной плотности при переходе от функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  к коэффициентам перехода и дискретному спектру

$$(\psi(x), \bar{\psi}(x)) \rightarrow (b_\rho(\lambda), \bar{b}_\rho(\lambda); \lambda_j, \gamma_j, j = 1, \dots, n) \quad (10.8)$$

происходит существенное упрощение динамики. В следующей главе мы исследуем обратимость отображения (10.8), а в гл. III изучим его с гамильтоновой точки зрения.

Перейдем теперь к обсуждению интегралов движения. Из (10.7) следует, что производящей функцией для них является коэффициент  $a_\rho(\lambda)$ . Покажем, что, как и в быстроубывающем случае, функция  $\ln a_\rho(\lambda) e^{-i\theta/2}$  является производящей функцией локальных интегралов движения. Для того чтобы использовать результаты § 4, будем считать, что  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  получаются пределом  $L \rightarrow \infty$  из функций  $\psi_L(x)$ ,  $\bar{\psi}_L(x)$ , удовлетворяющих условию (1.6):

$$\psi_L(x + 2L) = e^{i\theta} \psi_L(x), \quad \bar{\psi}_L(x + 2L) = e^{-i\theta} \bar{\psi}_L(x) \quad (10.9)$$

и дополнительному соотношению

$$\psi_L(x)|_{x=-L} = \bar{\psi}_L(x)|_{x=-L} = \rho \quad (10.10)$$

(сравни с § 1).

Рассмотрим сначала предельный переход  $L \rightarrow \infty$  в производящей функции  $\rho_L(\lambda)$

$$\rho_L(\lambda) = \arccos \frac{1}{2} \operatorname{tr} T_L(\lambda) Q(\theta). \quad (10.11)$$

Вспоминая, что  $b_\rho(\lambda)$  является функцией типа Шварца при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , из (8.44) и явной формулы (8.9) для  $E_\rho(x, \lambda)$  получаем, что при  $L \rightarrow \infty$  и  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  с точностью  $O(|\lambda|^{-\infty})$  выполняется



соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} T_L(\lambda) Q(\theta) &= e^{-ikL} a_p(\lambda) + e^{ikL} \bar{a}_p(\lambda) + o(1) = \\ &= 2 \cos(-kL + \arg a_p(\lambda)) + o(1), \end{aligned} \quad (10.12)$$

где в последнем равенстве мы учли, что

$$|a_p(\lambda)| = 1 + O(|\lambda|^{-\infty}) \quad (10.13)$$

(сравни с § 7). Таким образом, с точностью  $O(|\lambda|^{-\infty})$  имеем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\rho_L(\lambda) + kL - \theta/2) = \frac{1}{i} \ln a_p(\lambda) e^{-i\theta/2}. \quad (10.14)$$

Воспользуемся теперь представлением (4.4)

$$\rho_L(\lambda) = -\lambda L + \frac{\theta}{2} + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (10.15)$$

где

$$I_n = \int_{-L}^L P_n(x) dx \quad (10.16)$$

(см. (4.32)–(4.34)).

С помощью асимптотического разложения

$$\lambda - k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (10.17)$$

где

$$p_{2n-1} = (-1)^{n+1} \omega^{2n} \binom{1/2}{n}, \quad p_{2n} = 0, \quad (10.18)$$

справедливого при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ , из (10.14) получаем, что выражения

$$I_n - \frac{p_n}{\kappa} L = \int_{-L}^L \left( P_n(x) - \frac{p_n}{2\kappa} \right) dx \quad (10.19)$$

в случае граничных условий конечной плотности уже имеют предел  $I_{n,p}$  при  $L \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы показали, что добавление слагаемого  $kL$  к  $\rho_L(\lambda)$  регуляризует функционалы  $I_n(\psi_L, \bar{\psi}_L)$ , так что при  $L \rightarrow \infty$  они имеют конечные пределы  $I_{n,p}$

$$I_{n,p} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( P_n(x) - \frac{1}{2\kappa} p_n \right) dx. \quad (10.20)$$

Из (10.14) и (9.43) следует, что  $I_{n,p}$  можно представить как функционалы от  $\ln(1 + |b_p(\lambda)|^2)$  и  $\lambda_{j,j}$ ,  $j=1, \dots, n$ . Однако функ-

ционалы  $I_{n,\rho}$  при нечетных  $n$  являются недопустимыми на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho,0}$ . Действительно, имеем, например,

$$\frac{\delta I_{3,\rho}}{\delta \psi(x)} = -\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + 2\kappa |\psi(x)|^2 \psi(x), \quad (10.21)$$

так что  $\frac{\delta I_{3,\rho}}{\delta \psi(x)}$  не исчезает при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Тем не менее подходящие линейные комбинации функционалов  $I_{n,\rho}$  уже будут допустимыми. Эти комбинации получаются при разложении  $p_L(\lambda)$  по степеням  $\frac{1}{k(\lambda)}$  вида

$$p_L(\lambda) = -kL + \frac{\theta}{2} + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{k^n} + O(|k|^{-\infty}). \quad (10.22)$$

Оно следует из (10.15) с использованием (10.17) и асимптотического разложения

$$\frac{1}{\lambda^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^{2m}}{k^{n+2m}} \binom{-n/2}{m}, \quad (10.23)$$

справедливого при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ . Функционалы  $J_n$  имеют вид, аналогичный (10.16), и имеют предел при  $L \rightarrow \infty$

$$J_{n,\rho} = \lim_{L \rightarrow \infty} J_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n,\rho}(x) dx. \quad (10.24)$$

В силу (10.23) функционалы  $J_{n,\rho}$  просто выражаются через  $I_{n,\rho}$ :

$$J_{n,\rho} = \sum_{n=l+2m, l>0} \omega^{2m} \binom{-l/2}{m} I_{l,\rho}. \quad (10.25)$$

В частности, имеем отсюда

$$J_{1,\rho} = N_\rho, \quad J_{2,\rho} = P, \quad J_{3,\rho} = H_\rho \quad (10.26)$$

(см. § 1), так что функционалы  $J_{2,\rho}$  и  $J_{3,\rho}$ , в отличие от  $J_{1,\rho}$ , соответствуют наблюдаемым. В гл. III мы приведем простое доказательство допустимости функционалов  $J_{n,\rho}$  при  $n > 1$  — покажем, что их вариационные производные исчезают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Его основу составит вывод явной формулы для вариационных производных функционала  $p_L(\lambda)$ .

Как и в быстроубывающем случае (см. § 7), локальные интегралы движения  $J_{n,\rho}$  являются функционалами только от половины новых переменных ( $b_\rho(\lambda)$ ,  $\bar{b}_\rho(\lambda)$ ;  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $j=1, \dots, n$ ). Для их определения рассмотрим асимптотическое разложение функции  $\ln a_\rho(\lambda) e^{-i\theta/2}$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ :

$$\ln a_\rho(\lambda) e^{-i\theta/2} = i\kappa \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{l,\rho}}{k^l} + O(|k|^{-\infty}), \quad (10.27)$$

которое следует из (9.18). Для явного вычисления вещественных коэффициентов  $c_{l,p}$  рассмотрим представление (9.43) и разложим знаменатель  $\frac{1}{\mu - \lambda}$  в геометрическую прогрессию (сравни с § 7). Используя формулу (10.23), получаем, что

$$c_{l,p} = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{\mathbb{R}_\omega} \varphi_l(\lambda) \ln(1 + |b_p(\lambda)|^2) d\lambda + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^n \varphi_{l,j}. \quad (10.28)$$

Для функции  $\varphi_l(\lambda)$  имеем представление

$$\varphi_l(\lambda) = \frac{1}{k(\lambda)} \sum_{l=p+2q} \lambda^p \omega^{2q} \binom{-(p+1)/2}{q}. \quad (10.29)$$

Для нечетных  $l=2m+1$  с помощью элементарной формулы

$$\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \binom{n-\alpha-1}{n} \quad (10.30)$$

и бинома Ньютона из (10.29) получаем, что

$$\varphi_{2m+1}(\lambda) = \lambda k^{2m-1}(\lambda). \quad (10.31)$$

В случае четных  $l=2m$ , используя (10.30) и простую формулу

$$\sum_{l=0}^n \binom{\alpha}{n-l} \binom{\beta}{l} = \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad (10.32)$$

представление (10.29) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{2m}(\lambda) &= \frac{1}{k(\lambda)} \sum_{p=0}^m \omega^{2p} (k^2(\lambda) + \omega^2)^{m-p} \binom{p-m-1/2}{p} = \\ &= k^{2m-1}(\lambda) \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{m-p} \left(\frac{\omega^2}{k^2(\lambda)}\right)^{m-q} \binom{m-p}{q} \binom{p-m-1/2}{p} = \\ &= k^{2m-1}(\lambda) \sum_{p=0}^m \binom{1/2}{p} \left(\frac{\omega^2}{k^2(\lambda)}\right)^p. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Для вычисления коэффициентов  $\varphi_{l,j}$  воспользуемся формулой

$$\ln \frac{\lambda + k - \lambda_j - k_j}{\lambda + k - \lambda_j - \bar{k}_j} = - \int_{\lambda_j}^{\omega} \frac{1}{k(\mu)} \left(1 + \frac{k(\lambda)}{\mu - \lambda}\right) d\mu, \quad (10.34)$$

справедливой при  $-\omega < \lambda_j < \omega$ , которая доказывается с помощью замены переменной из § 9 или непосредственно. Отсюда следует, что

$$\varphi_{l,j} = \frac{1}{i} \int_{\lambda_j}^{\omega} \varphi_l(\lambda) d\lambda, \quad (10.35)$$

и выполняя интегрирование, получаем

$$\Phi_{2m+1,j} = \frac{i}{2m+1} k_j^{2m+1} \quad (10.36)$$

и

$$\Phi_{2m,j} = \frac{i \lambda_j k_j^{2m-1}}{2m} \sum_{p=0}^{m-1} \binom{-1/2}{p} \left( \frac{\omega^2}{k_j^2} \right)^p. \quad (10.37)$$

Таким образом, получаем, что для  $\ln a_p(\lambda) e^{-i\theta/2}$  справедливо асимптотическое разложение (10.27), где коэффициенты  $c_{l,p}$  даются формулами (10.28), (10.31), (10.33) и (10.36), (10.37). Несколько первых коэффициентов имеют вид

$$c_{1,p} = \frac{1}{2\pi k} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(\lambda)|^2)}{k(\lambda)} \lambda d\lambda + \frac{i}{\varkappa} \sum_{j=1}^n k_j, \quad (10.38)$$

$$c_{2,p} = \frac{1}{2\pi k} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(\lambda)|^2)}{k(\lambda)} \left( k^2(\lambda) + \frac{\omega^2}{2} \right) d\lambda + \frac{i}{2\varkappa} \sum_{j=1}^n \lambda_j k_j, \quad (10.39)$$

$$c_{3,p} = \frac{1}{2\pi k} \int_{\mathbb{R}_\omega} \ln(1 + |b_p(\lambda)|^2) \lambda k(\lambda) d\lambda + \frac{i}{3\varkappa} \sum_{j=1}^n k_j^3. \quad (10.40)$$

Сравнение формул (10.14), (10.22), (10.24) с (10.27) приводит к тождествам

$$J_{n,p} = c_{n,p} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n,p}(x) dx \quad (10.41)$$

— тождествам следов для случая конечной плотности. Их интерпретацию в терминах гамильтоновой механики мы дадим в гл. III.

На этом мы заканчиваем исследование свойств коэффициентов перехода и их динамики. В следующей главе мы исследуем обратимость отображения от функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  к коэффициентам перехода и дискретному спектру для граничных условий быстрого убывания и конечной плотности. Полученные результаты составят основу для полного решения начальной задачи (1.1)—(1.2) для модели НШ с указанными граничными условиями.

## § 11. Комментарии и литературные указания

1) Представление нулевой кривизны (2.10) является альтернативным к представлению Лакса (см. Введение), которое использовалось на первом этапе развития метода обратной задачи. В отработке представления нулевой кривизны важную роль сыграли работы [1.4], [1.5], [1.10], [1.12]. В нашем

тексте мы отдаем предпочтение этому представлению, поскольку оно имеет четкий геометрический смысл, акцентированный в работе [1.6].

2) Уравнение НШ с различными граничными условиями моделирует широкий класс нелинейных явлений в физике. Мы уже упоминали его приращение в нелинейной оптике; оно также встречается в физике плазмы. Здесь же мы отметим его роль как уравнения Хартри — Фока для квантовой системы многих частиц (бозе-газа) с парным взаимодействием, задаваемым при помощи потенциала  $2\kappa\delta(x-y)$ . Знак константы связи  $\kappa$  отвечает притяжению ( $\kappa < 0$ ) и отталкиванию ( $\kappa > 0$ ) частиц. В случае притяжения физический смысл имеет задача о конечном числе частиц и их связанных состояний. В классическом пределе это моделируется быстроубывающими граничными условиями. В случае отталкивания интерес представляет задача, соответствующая газу частиц с конечной плотностью. Граничные условия, которые мы назвали условиями конечной плотности, моделируют эту ситуацию.

Первое погружение модели НШ в рамки метода обратной задачи дано в работах [1.2], [1.3].

3) Интегральные представления (3.32) и (3.33) для матрицы перехода представляют собой вариант формул М. Г. Крейна [1.7]. Более традиционными являются треугольные представления (5.10) и (5.16) для решений Поста. На примере задачи на собственные значения для *одномерного оператора Шредингера*

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + u(x)y = \lambda y \quad (11.1)$$

с потенциалом  $u(x)$ , удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty, \quad (11.2)$$

они были введены Б. Я. Левиным [1.8] и широко использовались В. А. Марченко (см. итоговую монографию [1.9]). Наш вывод этих представлений в § 5 отличается от традиционного, которому мы следуем в § 8 для случая конечной плотности.

4) Рассуждения в § 5—6 представляют собой вариант квантовой теории рассеяния для оператора  $\mathcal{L}$  (см. (5.24)), имеющего квантовомеханический смысл оператора Дирака с нулевой массой. В контексте метода обратной задачи этот оператор иногда называют *оператором Захарова — Шабата*.

5) Оператор  $\mathcal{L}$  в случае граничных условий конечной плотности фактически совпадает с оператором Дирака с ненулевой массой. Теория рассеяния для него более близка к теории рассеяния для одномерного оператора Шредингера (11.1), поскольку в обоих случаях непрерывный спектр имеет край. Минимальные условия на функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , при которых проходит общий формализм теории рассеяния, более жесткие, чем в быстроубывающем случае. Так, абсолютно интегрируемыми в окрестности  $\pm\infty$  должны быть не просто убывающие части функции  $\psi(x) : \psi(x) \sim \rho e^{i\varphi_{\pm}}$ , но и их первые моменты (сравни с (11.2)) [1.13]. Обратная задача изучалась в работах [1.1] и [1.11]; при этом в работе [1.11] было пропущено условие  $(\theta)$ .

## Г л а в а II

### ЗАДАЧА РИМАНА

В предыдущей главе мы изучили отображение

$$\mathcal{F}: (\psi(x), \bar{\psi}(x)) \mapsto (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \gamma_j)$$

от функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  к коэффициентам перехода и дискретному спектру вспомогательной линейной задачи. Как для быстроубывающих граничных условий, так и для случая конечной плотности мы убедились, что эта «замена переменных» сильно упрощает динамику; изменение со временем коэффициентов перехода непрерывного и дискретного спектра становится линейным.

В этой главе мы изучим отображение  $\mathcal{F}^{-1}$ . Более точно, мы покажем, в каком смысле отображение  $\mathcal{F}$  является обратимым, и дадим решение обратной задачи — опишем процедуру восстановления функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  по коэффициентам перехода и дискретному спектру. Основным средством решения обратной задачи для нас будет служить формализм задачи сопряжения в теории функций, которая также называется задачей Римана или задачей аналитической факторизации. Различные варианты этой задачи зависят от граничных условий, дискретного спектра и т. д. Мы приведем в этой главе конкретную формулировку задачи Римана для рассматриваемых граничных условий и дадим ее полное исследование.

#### § 1. Быстроубывающий случай. Формулировка задачи Римана

Задача Римана, отвечающая быстроубывающему случаю, выглядит следующим образом. Рассмотрим на вещественной оси  $-\infty < \lambda < \infty$  матрицу-функцию  $G(\lambda)$ . *Задача состоит в представлении ее в факторизованном виде*

$$G(\lambda) = G_+(\lambda) G_-(\lambda), \quad (1.1)$$

где матрицы  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  допускают аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости переменной  $\lambda$  соответственно. Разрешимость этой задачи в широком классе условий на матрицы  $G(\lambda)$ ,  $G_{\pm}(\lambda)$  подробно исследована в математи-

ческой литературе. Выясним, как соотношение (1.1) возникает в рамках вспомогательной линейной задачи

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F \quad (1.2)$$

и какими свойствами обладают матрицы-функции  $G(\lambda)$  и  $G_{\pm}(\lambda)$ .

Исходным пунктом является связь матричных решений Юста  $T_+(x, \lambda)$  и  $T_-(x, \lambda)$ , в которой участвует приведенная матрица монодромии  $T(\lambda)$ :

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda). \quad (1.3)$$

Эта формула еще не является примером соотношения (1.1), так как столбцы матриц  $T_{\pm}(x, \lambda)$  аналитичны в разных полуплоскостях. Действительно, как мы знаем из § 1.5, матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)$  имеют структуру

$$T_{\pm}(x, \lambda) = (T_{\pm}^{(1)}(x, \lambda), T_{\pm}^{(2)}(x, \lambda)), \quad (1.4)$$

где столбцы  $T_{\pm}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{\pm}^{(2)}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость, а столбцы  $T_{\pm}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{\pm}^{(2)}(x, \lambda)$  — в нижнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ . Однако соотношение (1.3) легко преобразуется к виду (1.1). Для этого введем матрицы

$$S_+(x, \lambda) = (T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) \quad (1.5)$$

и

$$S_-(x, \lambda) = (T_+^{(1)}(x, \lambda), T_-^{(2)}(x, \lambda)), \quad (1.6)$$

которые являются решениями линейной задачи (1.2) и аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. При  $|\lambda| \rightarrow \infty$  в соответствующих полуплоскостях они имеют асимптотики

$$S_{\pm}(x, \lambda) E^{-1}(x, \lambda) = I + o(1), \quad (1.7)$$

вытекающие из формул (I.5.26) — (I.5.29).

С помощью связи (1.3) матрицы  $S_{\pm}(x, \lambda)$  записываются следующим образом:

$$S_+(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) M_{++}(\lambda) = T_-(x, \lambda) M_{-+}(\lambda) \quad (1.8)$$

и

$$S_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) M_{+-}(\lambda) = T_-(x, \lambda) M_{--}(\lambda), \quad (1.9)$$

где матрицы  $M_{\pm\pm}(\lambda)$  даются формулами

$$\begin{aligned} M_{++}(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & 0 \\ b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, & M_{-+}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ 0 & a(\lambda) \end{pmatrix}, \\ M_{+-}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ 0 & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, & M_{--}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda) & 0 \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

а  $\epsilon = \text{sign } \kappa$ . Здесь  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  — коэффициенты перехода, участвующие в матрице  $T(\lambda)$  (см. представление (1.5.45)). Совместность формул (1.8) и (1.9) с (1.3) означает, что имеют место факторизации приведенной матрицы монодромии

$$T(\lambda) = M_{+-}(\lambda) M_{-}^{-1}(\lambda) = M_{++}(\lambda) M_{+}^{-1}(\lambda). \quad (1.11)$$

Специальный треугольный вид матриц  $M_{\pm, \pm}(\lambda)$  позволяет их однозначно восстановить по заданной унимодулярной матрице  $T(\lambda)$  вида (1.5.45).

В терминах матриц  $S_{\pm}(x, \lambda)$  соотношение (1.3) принимает вид

$$S_{-}(x, \lambda) = S_{+}(x, \lambda) S(\lambda), \quad (1.12)$$

где

$$S(\lambda) = M_{++}^{-1}(\lambda) M_{+-}(\lambda) = M_{-+}^{-1}(\lambda) M_{--}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \bar{b}(\lambda) \\ \frac{1}{a(\lambda)} & \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \\ -\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} & \frac{1}{a(\lambda)} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Для вспомогательной линейной задачи матрица  $S(\lambda)$  играет роль *матрицы рассеяния*. Коэффициенты  $\frac{1}{a(\lambda)}$  и  $\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$  в теории рассеяния принято называть *коэффициентами прохождения и отражения* соответственно. В отличие от матрицы  $T(\lambda)$ , матрица рассеяния не унимодулярна:

$$\det S(\lambda) = \frac{\bar{a}(\lambda)}{a(\lambda)}. \quad (1.14)$$

Она удовлетворяет инволюциям

$$\sigma \bar{S}(\lambda) \sigma = S^{-1}(\lambda) \quad (1.15)$$

и

$$\tilde{\sigma} S^*(\lambda) \tilde{\sigma} = S^{-1}(\lambda), \quad (1.16)$$

где  $\sigma = \sigma_1$  при  $\epsilon = 1$ ,  $\sigma = \sigma_2$  при  $\epsilon = -1$  (см. § 1.2),  $\tilde{\sigma} = I$  при  $\epsilon = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = \sigma_3$  при  $\epsilon = -1$ , а  $*$  означает эрмитово сопряжение. Формулу (1.16) можно интерпретировать как  $\tilde{\sigma}$ -унитарность матрицы рассеяния  $S(\lambda)$ . Соотношения (1.15) и (1.16) однозначно определяют ее вид.

Соотношение (1.12) уже почти имеет вид (1.1), и казалось бы, достаточно положить  $G_{+}(x, \lambda) = S_{+}^{-1}(x, \lambda)$  и  $G_{-}(x, \lambda) = S_{-}(x, \lambda)$ . Однако в силу (1.8) имеем

$$\det S_{+}(x, \lambda) = a(\lambda) \quad (1.17)$$

и при наличии нулей у функции  $a(\lambda)$  матрица  $S_{+}^{-1}(x, \lambda)$  имеет сингулярности в верхней полуплоскости. Поэтому введем



матрицы

$$G_-(x, \lambda) = S_-(x, \lambda) E^{-1}(x, \lambda) \quad (1.18)$$

и

$$G_+(x, \lambda) = a(\lambda) E(x, \lambda) S_+^{-1}(x, \lambda), \quad (1.19)$$

где мы одновременно сократили матрицы  $S_{\pm}(x, \lambda)$  на их асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  дают решение задачи Римана

$$G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda) = G(x, \lambda), \quad (1.20)$$

где

$$G(x, \lambda) = E(x, \lambda) G(\lambda) E^{-1}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x} \\ -b(\lambda) e^{i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

и

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

со стандартной нормировкой при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$G_{\pm}(x, \lambda) = I + o(1), \quad G(x, \lambda) = I + o(1). \quad (1.23)$$

Переменная  $x$  входит в задачу Римана как параметр, участвующий только в явном виде  $G(x, \lambda)$ .

Перечислим свойства матриц  $G(x, \lambda)$  и  $G_{\pm}(x, \lambda)$ , которые соответствуют вспомогательной линейной задаче для функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  из  $L_1(-\infty, \infty)$ . В случае  $\varkappa < 0$  мы также будем предполагать выполненным условие (A) из § 1.6 о структуре нулей коэффициента  $a(\lambda)$ . Начнем с матрицы  $G(\lambda)$  и связанной с ней матрицы  $G(x, \lambda)$ .

1) Свойство инволюции

$$\tau G^*(x, \lambda) \tau = G(x, \lambda), \quad (1.24)$$

где  $\tau = \sigma_3$  при  $\varepsilon = 1$  и  $\tau = I$  при  $\varepsilon = -1$ .

2) Свойство невырожденности

$$\det G(x, \lambda) = \det G(\lambda) = 1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2, \quad (1.25)$$

так что в силу условия (A) при всех  $\lambda$

$$\det G(x, \lambda) > 0. \quad (1.26)$$

3) Интегральные представления.

Из формулы (1.6.16) следует, что  $G(\lambda)$  допускает представление

$$G(\lambda) = I + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s) e^{i\lambda s} ds, \quad (1.27)$$

где матрица  $\Phi(s)$  имеет специальный вид

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \bar{\beta}(-s) \\ -\beta(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

а функция  $\beta(s)$  выглядит следующим образом:

$$\beta(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda \quad (1.29)$$

и принадлежит пространству  $L_1(-\infty, \infty)$ . Матрица  $G(x, \lambda)$  представляется в аналогичном виде, где вместо  $\Phi(s)$  участвует матрица  $\Phi(x, s)$

$$\Phi(x, s) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\bar{\beta}(-s-x)} \\ -\beta(s-x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Другими словами, матрицы  $G(\lambda)$  и  $G(x, \lambda)$  являются элементами специального вида *нормированного кольца*  $\mathfrak{R}^{(2 \times 2)}$ , состоящего из матриц вида

$$F(\lambda) = cI + \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(s) e^{i\lambda s} ds, \quad (1.31)$$

где  $\Omega(s)$  принадлежит  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ ,  $c$  — из  $\mathbb{C}^1$ , а норма вводится обычным образом:

$$\|F\| = |c| + \int_{-\infty}^{\infty} \|\Omega(s)\| ds \quad (1.32)$$

(сравни с § I.6). Для дальнейшего также введем *подкольца*  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$  кольца  $\mathfrak{R}^{(2 \times 2)}$ , состоящие из всех матриц вида

$$F_{\pm}(\lambda) = c_{\pm}I + \int_0^{\infty} \Omega_{\pm}(s) e^{\pm i\lambda s} ds \quad (1.33)$$

соответственно, где матрицы  $\Omega_{\pm}(s)$  принадлежат  $L_1^{(2 \times 2)}(0, \infty)$ . Элементы колец  $\mathfrak{R}_{+}^{(2 \times 2)}$  и  $\mathfrak{R}_{-}^{(2 \times 2)}$  являются аналитическими матрицами-функциями в верхней и нижней полуплоскостях переменной  $\lambda$  соответственно и при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  превращаются в  $c_{\pm}I$  в силу леммы Римана — Лебега.

Перейдем теперь к свойствам матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$ .

1) *Свойство инволюции*

$$\tau G_{+}^{*}(x, \lambda) \tau = G_{-}(x, \bar{\lambda}), \quad (1.34)$$

которое следует из формул (I.5.30) и (I.5.31) и из (1.5), (1.6), (1.17). В частности, при  $x < 0$  имеем

$$G_{+}^{*}(x, \lambda) = G_{-}(x, \bar{\lambda}). \quad (1.35)$$

2) *Интегральные представления*

$$G_{\pm}(x, \lambda) = I + \int_0^{\infty} \Phi_{\pm}(x, s) e^{\pm i\lambda s} ds, \quad (1.36)$$

которые получаются из формул (1.5.10), (1.5.16) и (1.6.10) после тривиальных преобразований. При этом матрицы-функции  $\Phi_{\pm}(x, s)$  принадлежат  $L_1^{(2 \times 2)}(0, \infty)$ , так что  $G_{\pm}(x, \lambda)$  принадлежат кольцам  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$ .

3) *Формула связи*

$$U_0(x) = \frac{1}{2} [\sigma_3 \cdot \Phi_{\pm}(x, s)]|_{s=0}, \quad (1.37)$$

где

$$U_0(x) = U(x, \lambda) - \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}(x) \\ \psi(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

(см. § 1.2), которая немедленно вытекает из (1.5.32) и (1.5.33).

4) *Асимптотики при  $|x| \rightarrow \infty$  и вещественных  $\lambda$*

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda x} & \frac{1}{a(\lambda)} \end{pmatrix} + o(1), \quad (1.39)$$

$$G_-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x} \\ 0 & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix} + o(1), \quad (1.40)$$

где  $x \rightarrow +\infty$ , и

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(\lambda)} & -\varepsilon \frac{\bar{b}(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-i\lambda x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + o(1), \quad (1.41)$$

$$G_-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda) & 0 \\ -b(\lambda) e^{i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} + o(1), \quad (1.42)$$

где  $x \rightarrow -\infty$ , которые следуют из формул (1.8), (1.9) и (1.18), (1.19).

5) *Свойства вырождения при комплексных  $\lambda$*

Из формул (1.8), (1.9) и (1.18), (1.19) получаем, что  $\det G_+(x, \lambda) = a(\lambda)$ ,  $\det G_-(x, \lambda) = a^*(\lambda)$ , где  $a^*(\lambda)$  — аналитическое продолжение функции  $\bar{a}(\lambda)$  в нижнюю полуплоскость (см. § 1.6). Отсюда следует, что при  $\kappa > 0$  матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  невырождены в своих областях аналитичности. При  $\kappa < 0$  и выполнении условия (A) получаем, что матрицы  $G_+(x, \lambda)$  и  $G_-(x, \lambda)$  вырождаются при  $\lambda = \lambda_j$  и  $\lambda = \bar{\lambda}_j$  соответственно, где  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — нули коэффициента  $a(\lambda)$ . Более точно, они имеют простые нули, т. е. матрицы  $G_+(x, \lambda_j)$  и  $G_-(x, \bar{\lambda}_j)$  суть матрицы ранга 1. Из сравнения формул (1.5), (1.19) с (1.6.20) следует, что матрица  $G_+(x, \lambda_j)$  может быть представлена в виде

$$G_+(x, \lambda_j) = e^{-\frac{i\lambda_j x}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_j(x) \end{pmatrix} T_+^{(2)\kappa}(x, \lambda_j) \cdot \frac{1}{i} \sigma_2, \quad (1.43)$$

где

$$\gamma_j(x) = e^{i\lambda_j x} \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.44)$$

и матрица-столбец  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_j(x) \end{pmatrix}$  умножается на матрицу-строку  $-iT_+^{(2)\tau}(x, \lambda_j)\sigma_2$ . В силу инволюций (1.35) и (1.5.30) для матрицы  $G_-(x, \bar{\lambda}_j)$  имеем представление

$$G_-(x, \bar{\lambda}_j) = e^{\frac{i\bar{\lambda}_j x}{2}} T_+^{(1)}(x, \bar{\lambda}_j) (1, -\bar{\gamma}_j(x)), \quad (1.45)$$

где матрица-столбец  $T_+^{(1)}(x, \bar{\lambda}_j)$  умножается на матрицу-строку  $(1, -\bar{\gamma}_j(x))$ .

Для геометрической интерпретации этих представлений введем одномерное подпространство  $N_j^{(+)}(x)$  в  $\mathbb{C}^2$ , натянутое на вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_j(x) \end{pmatrix}$ , и ортогональное к нему подпространство  $N_j^{(-)}(x)$ , натянутое на вектор  $\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j(x) \\ 1 \end{pmatrix}$ . Тогда условия (1.43) и (1.45) означают, что

$$N_j^{(+)}(x) = \text{Im } G_+(x, \lambda_j), \quad N_j^{(-)}(x) = \text{Ker } G_-(x, \bar{\lambda}_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.46)$$

Зависимость подпространств  $N_j^{(\pm)}(x)$  от  $x$  имеет вид

$$N_j^{(+)}(x) = E(x, \lambda_j) N_j^{+}, \quad N_j^{(-)}(x) = E(x, \bar{\lambda}_j) N_j^{-}, \quad (1.47)$$

где подпространства  $N_j^{(+)}$  и  $N_j^{(-)}$  натянуты на векторы  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_j \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j \\ 1 \end{pmatrix}$  соответственно.

Перечисленные свойства матриц  $G(\lambda)$ ,  $G(x, \lambda)$  и  $G_{\pm}(x, \lambda)$  следуют из исследования вспомогательной линейной задачи (1.2) для функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  из пространства  $L_1(-\infty, \infty)$ , проведенного в гл. I. Теперь мы положим их в основу формулировки задачи Римана — задачи о восстановлении матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  (а вместе с ними и функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ ; см. (1.37)) по заданной матрице  $G(\lambda)$ .

Точнее, пусть заданы:

1) Матрица  $G(\lambda)$  из кольца  $\mathfrak{R}^{(2 \times 2)}$ , удовлетворяющая условиям 1) — 3).

2) В случае  $\kappa < 0$  набор несовпадающих чисел  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \text{Im } \lambda_j > 0, j = 1, \dots, n$ , и набор ненулевых чисел  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j, j = 1, \dots, n$ .

Построим по ним матрицу  $G(x, \lambda)$  по формуле (1.21) и при  $\kappa < 0$  набор подпространств  $N_j^{(\pm)}(x)$  по формулам (1.47).

Задача Римана состоит в определении при каждом  $x$  матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  из колец  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$  с  $c_{\pm} = 1$ , удовлетворяющих уравнению

$$G(x, \lambda) = G_+(x, \lambda)G_-(x, \lambda). \quad (1.48)$$

При  $\kappa > 0$  матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  предполагаются невырожденными в своих областях аналитичности. При  $\kappa < 0$  они предполагаются невырожденными всюду, кроме точек  $\lambda_j$  и  $\bar{\lambda}_j$  соответственно, где  $\text{Im } G_+(x, \lambda_j) = N_j^{(+)}(x)$ ,  $\text{Ker } G_-(x, \bar{\lambda}_j) = N_j^{(-)}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . (1.49)

В следующем параграфе мы докажем однозначную разрешимость этой задачи и исследуем свойства решений  $G_{\pm}(x, \lambda)$ . При этом мы покажем, что матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  обладают свойствами 1)–5), так что в рассматриваемом нами классе эти свойства являются характеристическими.

## § 2. Быстроубывающий случай. Исследование задачи Римана

Рассмотрим задачу Римана

$$G(x, \lambda) = G_+(x, \lambda)G_-(x, \lambda), \quad (2.1)$$

сформулированную в конце предыдущего параграфа. Здесь мы исследуем ее в указанных классах для заданной матрицы  $G(x, \lambda)$  и искомых матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$ . Мы докажем следующие утверждения.

1. Задача Римана (2.1) однозначно разрешима.

2. Матрицы

$$F_+(x, \lambda) = G_+^{-1}(x, \lambda)E(x, \lambda) \quad (2.2)$$

и

$$F_-(x, \lambda) = G_-(x, \lambda)E(x, \lambda) \quad (2.3)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению вспомогательной линейной задачи

$$\frac{d}{dx}F_{\pm}(x, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + U_0(x) \right) F_{\pm}(x, \lambda). \quad (2.4)$$

При этом матрица  $U_0(x)$  имеет вид

$$U_0(x) = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}(x) \\ \psi(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  принадлежат пространству  $L_1(-\infty, \infty)$ .

3. При  $|x| \rightarrow \infty$  и вещественных  $\lambda$  матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  имеют асимптотики (1.39)–(1.42), где  $b(\lambda)$  участвует в определении (1.22) матрицы  $G(\lambda)$ , а  $a(\lambda)$  дается формулой

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + \varepsilon |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda - i0} d\mu \right\}, \quad (2.6)$$

причем в случае  $\varepsilon=1$  произведение элементарных множителей Бляшке отсутствует.

4. Приведенная матрица монодромии вспомогательной линейной задачи (2.4) имеет вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

При  $\varepsilon=-1$  ее дискретный спектр совпадает с набором  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, j=1, \dots, n$ , а коэффициентами перехода дискретного спектра являются  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ .

Перейдем теперь к доказательству этих утверждений.

1. Однозначная разрешимость задачи Римана.

Здесь проще всего воспользоваться общей теорией Гохберга — Крейна, в которой рассматривается задача Римана

$$G(\lambda) = G_+(\lambda) G_-(\lambda) \quad (2.8)$$

для заданной на всей оси невырожденной матрицы  $G(\lambda)$  из кольца  $\mathfrak{R}^{(n \times n)}$ , нормированной на  $I$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  (в общем случае матриц  $n \times n$ ). Нужная нам теорема утверждает, что если матрица  $\frac{G(\lambda) + G^*(\lambda)}{2}$  положительно определена, то задача (2.8) имеет

единственное решение в классе невырожденных в своих областях аналитичности матриц  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  из колец  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(n \times n)}$  соответственно, нормированных на  $I$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Основным средством исследования является сведение задачи Римана к уравнению Винера — Хопфа, которое осуществляется следующим образом. Перепишем соотношение (2.8) в виде

$$G_-(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda) G(\lambda). \quad (2.9)$$

По теореме Винера из невырожденности матрицы  $G_+(\lambda)$  следует, что для матрицы  $G_+^{-1}(\lambda)$  имеет место представление

$$G_+^{-1}(\lambda) = I + \int_0^{\infty} \Omega_+(s) e^{i\lambda s} ds, \quad (2.10)$$

где  $\Omega_+(s)$  принадлежит пространству  $L_1^{(n \times n)}(0, \infty)$ ; беря от (2.9) преобразование Фурье, убеждаемся, что задача Римана (2.8) эквивалентна уравнению Винера — Хопфа

$$\Omega_+(s) + \Phi(s) + \int_0^{\infty} \Omega_+(s') \Phi(s - s') ds' = 0, \quad s \geq 0, \quad (2.11)$$

где

$$G(\lambda) = I + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s) e^{i\lambda s} ds. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.11) и служит основным предметом исследования в теории Гохберга — Крейна.

Приведенная теорема доказывает однозначную разрешимость задачи (2.1) в *регулярном случае*, т. е. когда матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  невырождены в своих областях аналитичности (что эквивалентно отсутствию дискретных собственных значений). Действительно, матрица  $G(x, \lambda)$  имеет вид

$$G(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x} \\ -b(\lambda) e^{i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

и при  $\varepsilon = 1$

$$\frac{G(x, \lambda) + G^*(x, \lambda)}{2} = I; \quad (2.14)$$

при  $\varepsilon = -1$  матрица  $G(x, \lambda)$  эрмитова и положительно определена в силу условия  $(A_1)$  из § I.6

$$|b(\lambda)| < 1. \quad (2.15)$$

В силу единственности решения задачи Римана (2.1) инволюция (1.24) для матрицы  $G(x, \lambda)$  переносится и на решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$ :

$$G_{\pm}^*(x, \lambda) = \tau G_{\mp}(x, \bar{\lambda}) \tau, \quad (2.16)$$

где  $\tau = \sigma_3$  при  $\varepsilon = 1$  и  $\tau = I$  при  $\varepsilon = -1$ . В частности, при  $\varepsilon = -1$  матрицы  $G_+(x, \lambda)$  и  $G_-(x, \lambda)$  являются взаимно эрмитово сопряженными:

$$G_+^*(x, \lambda) = G_-(x, \bar{\lambda}). \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь *задачу Римана с нулями*, т. е. общую задачу (2.1) с заданными наборами чисел  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \text{Im } \lambda_j > 0; \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ , и условиями (1.49). Сразу будем считать, что при этом  $\kappa < 0$ .

Пусть сначала для простоты мы имеем дело только с одной парой нулей  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0, \text{Im } \lambda_0 > 0$ , и чисел  $\gamma_0, \bar{\gamma}_0$ , которым соответствует пара ортогональных подпространств  $N_0^{(\pm)}(x)$  (см. (1.47)). Для сокращения записи также временно опустим зависимость от параметра  $x$ . Будем искать решения  $G_{\pm}(\lambda)$  в виде

$$G_+(\lambda) = \tilde{G}_+(\lambda) B(\lambda), \quad G_-(\lambda) = B^{-1}(\lambda) \tilde{G}_-(\lambda), \quad (2.18)$$

где  $\tilde{G}_{\pm}(\lambda)$  — решения регулярной задачи Римана. *Подберем матричный множитель  $B(\lambda)$ , исходя из требований:*

а)  $B(\lambda)$  аналитичен в верхней полуплоскости  $\lambda$ , а  $B^{-1}(\lambda)$  — в нижней;

б)  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} B(\lambda) = I;$  (2.19)

с)  $\det B(\lambda) \neq 0$  при  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и  $\det B^{-1}(\lambda) \neq 0$  при  $\text{Im } \lambda \leq 0$ , кроме точек  $\lambda = \lambda_0$  и  $\bar{\lambda}_0$  соответственно, где

$$\text{Im } B(\lambda_0) = \tilde{G}_+^{-1}(\lambda_0) N_0^{(+)} = \tilde{N}_0^{(+)}, \tag{2.20}$$

$$\text{Ker } B^{-1}(\bar{\lambda}_0) = \tilde{G}_-^{-1}(\bar{\lambda}_0) N_0^{(-)} = \tilde{N}_0^{(-)}. \tag{2.21}$$

При этом в силу инволюции (2.17) подпространства  $N_0^{(\pm)}$  ортогональны.

Перечисленными условиями матрица  $B(\lambda)$  определяется однозначно как *матричный множитель Бляшке — Потапова*

$$B(\lambda) = I + \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} P, \quad B^{-1}(\lambda) = I + \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}{\lambda - \lambda_0} P, \tag{2.22}$$

где ортогональный проектор  $P$  определяется из условий

$$\text{Im } (I - P) = \tilde{N}_0^{(+)}, \quad \text{Ker } (I - P) = \tilde{N}_0^{(-)} \tag{2.23}$$

и имеет вид

$$P = \frac{1}{1 + |\beta|^2} \begin{pmatrix} |\beta|^2 & \bar{\beta} \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Здесь

$$\beta = \frac{\tilde{G}_+^{(11)}(\lambda_0) \gamma_0 + \tilde{G}_+^{(21)}(\lambda_0)}{\tilde{G}_+^{(12)}(\lambda_0) \gamma_0 + \tilde{G}_+^{(22)}(\lambda_0)}, \tag{2.25}$$

где мы использовали очевидные обозначения для матричных элементов матрицы  $\tilde{G}_+(\lambda_0)$ .

Введенный множитель Бляшке — Потапова удовлетворяет обобщенному условию унитарности

$$B^*(\lambda) = B^{-1}(\bar{\lambda}). \tag{2.26}$$

Восстанавливая зависимость от  $x$ , получаем, что проектор  $P(x)$  имеет вид (2.24), где

$$\beta(x) = \frac{\tilde{G}_+^{(11)}(x, \lambda_0) \gamma_0(x) + \tilde{G}_+^{(21)}(x, \lambda_0)}{\tilde{G}_+^{(12)}(x, \lambda_0) \gamma_0(x) + \tilde{G}_+^{(22)}(x, \lambda_0)}, \tag{2.27}$$

а  $\gamma_0(x) = \gamma_0 e^{i\lambda_0 x}$ . Если при некотором  $x$  знаменатель в выражении для  $\beta(x)$  исчезает, то формула (2.24) продолжает иметь смысл и проектор  $P$  превращается в матрицу  $\frac{1}{2}(I + \sigma_3)$ .

В общем случае, когда заданы нули  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  и подпространства  $N_j^{(\pm)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , задача Римана решается аналогично. Вместо множителя  $B(\lambda)$  теперь следует взять *упорядоченное произве-*



дение множителей Бляшке — Поганова

$$\Pi(\lambda) = B_1(\lambda) \dots B_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left( I + \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} P_j \right) \quad (2.28)$$

и подобрать ортогональные проекторы  $P_j$  по заданным подпространствам  $N_j^{(\pm)}$ . Проще всего это делать последовательно: предположим, что унитарные множители  $B_1(\lambda), \dots, B_{k-1}(\lambda)$  уже построены. Тогда ортогональный проектор  $P_k$  определяется из условий

$$\text{Im}(I - P_k) = B_{k-1}^{-1}(\lambda_k) \dots B_1^{-1}(\lambda_k) \tilde{G}_+^{-1}(\lambda_k) N_k^{(+)} = \tilde{N}_k^{(+)} \quad (2.29)$$

$$\text{и} \quad \text{Ker}(I - P_k) = B_{k-1}^{-1}(\bar{\lambda}_k) \dots B_1^{-1}(\bar{\lambda}_k) \tilde{G}_-(\bar{\lambda}_k) N_k^{(-)} = \tilde{N}_k^{(-)}. \quad (2.30)$$

Покажем теперь, что *приведенное решение задачи Римана (2.1) единственно*. Предположим, что эта задача имеет два решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$  и  $G'_{\pm}(x, \lambda)$ , и опять временно опустим зависимость от  $x$ . При вещественных  $\lambda$  мы имеем соотношение

$$G_+^{-1}(\lambda) G_+(\lambda) = G'_-(\lambda) G'_-(\lambda), \quad (2.31)$$

вытекающее из (2.1). Левая часть этого равенства аналитична в верхней полуплоскости, кроме точек  $\lambda = \lambda_j$ , а правая аналитична в нижней полуплоскости, кроме  $\lambda = \bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . При больших  $|\lambda|$  левая и правая части равенства (2.31) нормированы на  $I$ . Если сингулярности при указанных значениях  $\lambda$  отсутствуют, то по теореме Лиувилля мы получаем, что левая и правая части (2.31) тождественно равны  $I$ , откуда следует теорема единственности.

Для доказательства регулярности рассмотрим, для определенности, левую часть (2.31). В окрестности точки  $\lambda = \lambda_j$  матрицы  $G_+(\lambda)$  и  $G_+^{-1}(\lambda)$  имеют разложения

$$G_+(\lambda) = A + O(|\lambda - \lambda_j|), \quad G_+^{-1}(\lambda) = \frac{B}{\lambda - \lambda_j} + O(1), \quad (2.32)$$

причем

$$AB = BA = 0. \quad (2.33)$$

Далее,

$$\text{Im} A = \text{Im} G_+(\lambda_j) = N_j^{(+)}, \quad (2.34)$$

и из (2.33) следует, что подпространство  $N_j^{(+)}$  содержится в  $\text{Ker} B$  и вследствие одномерности совпадает с ним:

$$N_j^{(+)} = \text{Ker} B. \quad (2.35)$$

Аналогичное разложение имеет место и для матриц  $G'_+(\lambda)$  и  $G_+^{-1}(\lambda)$ ; при этом по-прежнему

$$\text{Im} A' = N_j^{(+)} = \text{Ker} B'. \quad (2.36)$$

Теперь видно, что вычет при  $\lambda = \lambda_j$  матрицы-функции  $G_+^{-1}(\lambda) G_+(\lambda)$  имеет вид  $B'A$  и очевидно исчезает.

Аналогичным образом рассматривается и правая часть в (2.31), что доказывает регулярность обеих частей этого равенства на всей плоскости.

В силу доказанной теоремы единственности, в частности, получаем, что инволюция (2.17) переносится и на случай задачи Римана с нулями.

### 2. Вывод дифференциального уравнения.

Рассмотрим введенные выше матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  (см. (2.2) — (2.3)), которые, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$F_-(x, \lambda) = F_+(x, \lambda) G(\lambda). \quad (2.37)$$

Матрица  $F_+(x, \lambda)$  аналитична и невырождена в верхней полуплоскости, за исключением простых полюсов в точках  $\lambda = \lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а  $F_-(x, \lambda)$  аналитична в нижней полуплоскости и имеет простые нули при  $\lambda = \bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  удовлетворяют условиям

$$\text{Im } F_+^{-1}(x, \lambda_j) = N_j^{(+)}, \quad \text{Ker } F_-(x, \bar{\lambda}_j) = N_j^{(-)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.38)$$

где подпространства  $N_j^{(\pm)}$  строятся по  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$  (см. § 1) и не зависят от  $x$ .

Ниже мы докажем, что матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  абсолютно непрерывны. Поэтому дифференцируя (2.37) по  $x$ , получаем, что

$$\frac{dF_-}{dx}(x, \lambda) = \frac{dF_+}{dx}(x, \lambda) G(\lambda) = \frac{dF_+}{dx}(x, \lambda) F_+^{-1}(x, \lambda) F_-(x, \lambda), \quad (2.39)$$

или

$$\frac{dF_+}{dx}(x, \lambda) F_+^{-1}(x, \lambda) = \frac{dF_-}{dx}(x, \lambda) F_-^{-1}(x, \lambda). \quad (2.40)$$

Левая и правая части этого равенства допускают аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно, несмотря на то, что матрица  $F_+(x, \lambda)$  сингулярна при  $\lambda = \lambda_j$ , а  $F_-^{-1}(x, \bar{\lambda})$  — при  $\lambda = \bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Доказательство аналогично приведенному выше для теоремы единственности. Вводя представления

$$F_+(x, \lambda) = \frac{A(x)}{\lambda - \lambda_j} + O(1) \quad (2.41)$$

и

$$F_+^{-1}(x, \lambda) = B(x) + O(|\lambda - \lambda_j|), \quad (2.42)$$

имеем

$$\text{Im } B(x) = N_j^{(+)} \quad (2.43)$$

и очевидные равенства

$$A(x)B(x) = B(x)A(x) = 0. \quad (2.44)$$

В силу независимости  $N_j^{(+)}$  от  $x$  получаем, что  $\text{Ker} \frac{dA}{dx}(x)$  содержит  $N_j^{(+)}$ , так что, в силу (2.43) и (2.44), вычет функции  $\frac{dF_+}{dx}(x, \lambda)F_+^{-1}(x, \lambda)$  при  $\lambda = \lambda_j$  равен  $\frac{dA}{dx}(x)B(x)$  и исчезает. Тем самым левая часть в (2.40) несингулярна. Аналогичным образом доказывается регулярность правой части в (2.40).

Таким образом, функция  $\frac{dF_+}{dx}(x, \lambda)F_+^{-1}(x, \lambda)$  при каждом  $x$  является целой функцией  $\lambda$ . Рассмотрим ее асимптотику при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

В нижней полуплоскости  $\lambda$  для этого воспользуемся интегральным представлением

$$F_-(x, \lambda) = \left( I + \int_0^\infty \Phi_-(x, s) e^{-i\lambda s} ds \right) E(x, \lambda), \quad (2.45)$$

следующим из принадлежности  $G_-(x, \lambda)$  кольцу  $\mathfrak{R}_-^{(2 \times 2)}$ . Предположим на время, что функция  $\Phi_-(x, s)$  абсолютно непрерывна по  $x$  и  $s$  и  $\frac{\partial \Phi_-}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi_-}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x \partial s}$  — как функции  $s$  — принадлежат  $L_1^{(2 \times 2)}(0, \infty)$ . Тогда при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im} \lambda \leq 0$ , функция  $F_-(x, \lambda)$  имеет асимптотику

$$F_-(x, \lambda) = \left( I + \frac{\Phi_-(x, 0)}{i\lambda} + o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) E(x, \lambda), \quad (2.46)$$

допускающую дифференцирование по  $x$ . Отсюда получаем, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  в нижней полуплоскости

$$\frac{dF_-}{dx}(x, \lambda)F_-^{-1}(x, \lambda) = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + \frac{1}{2} [\sigma_3, \Phi_-(x, 0)] + o(1). \quad (2.47)$$

Аналогично из представления

$$F_+^{-1}(x, \lambda) = E^{-1}(x, \lambda) \left( I + \int_0^\infty \Phi_+(x, s) e^{i\lambda s} ds \right) \quad (2.48)$$

имеем при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im} \lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dF_+}{dx}(x, \lambda)F_+^{-1}(x, \lambda) &= -F_+(x, \lambda) \frac{dF_+^{-1}}{dx}(x, \lambda) = \\ &= \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + \frac{1}{2} [\sigma_3, \Phi_+(x, 0)] + o(1). \end{aligned} \quad (2.49)$$

По теореме Лиувилля получаем отсюда, что

$$\frac{dF_+}{dx}(x, \lambda) F_+^{-1}(x, \lambda) = \frac{dF_-}{dx}(x, \lambda) F_-^{-1}(x, \lambda) = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0(x), \quad (2.50)$$

где

$$U_0(x) = \frac{1}{2} [\sigma_3, \Phi_+(x, 0)] = \frac{1}{2} [\sigma_3, \Phi_-(x, 0)]. \quad (2.51)$$

Таким образом, заключаем, что уравнение вспомогательной линейной задачи (2.4) выполняется. Матрица  $U_0(x)$  антидиагональна и удовлетворяет условию инволюции

$$U_0^*(x) = \tau U_0(x) \tau, \quad (2.52)$$

которое следует из свойства (2.16), переписанного в терминах решений  $F_{\pm}(x, \lambda)$ . Поэтому она представляется в виде  $U_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \bar{\varphi}(x) \\ \varphi(x) & 0 \end{pmatrix}$  и совпадает с матрицей (2.5), если ввести параметр  $\varkappa$ :  $\varphi(x) = \varkappa \bar{\psi}(x)$ . Введение  $\varkappa$  в этом месте выглядит несколько условно; оно нужно для буквального совпадения формул (1.2.4) и (2.5).

Вернемся к предположению о дифференцируемости ядер  $\Phi_{\pm}(x, s)$ . В общем случае при наших предположениях о функции  $b(\lambda)$  это свойство не имеет места, и справедливость дифференциального уравнения (2.4) будет доказана в следующем пункте при помощи процедуры замыкания.

Обратим внимание, что приведенный вывод дифференциального уравнения (2.4) не использовал пока никаких специальных свойств матрицы  $G(x, \lambda)$ , кроме условия однозначной разрешимости задачи Римана, инволюции и явной зависимости от  $x$ . Таким образом, установленная связь задачи Римана с дифференциальным уравнением (2.4) является весьма общей. При этом она является локальной по  $x$ . Все сформулированные условия на  $G(x, \lambda)$  будут использованы при исследовании свойств матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  и  $U_0(x)$  как функций переменной  $x$ .

3. Асимптотики матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим сначала регулярный случай задачи Римана. Мы будем использовать уравнение Винера — Хопфа (2.11)

$$\Omega_+(x, s) + \Phi(x, s) + \int_0^{\infty} \Omega_+(x, s') \Phi(x, s - s') ds' = 0, \quad (2.53)$$

$s \geq 0$ , где явно введена зависимость от  $x$ . Здесь матрица-ядро  $\Phi(x, s)$  дается формулой (1.30)

$$\Phi(x, s) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \bar{\varphi}(-s-x) \\ -\beta(s-x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

где

$$\beta(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda, \quad (2.55)$$

а  $\Omega_+(x, s)$  определяется из представления

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = I + \int_0^{\infty} \Omega_+(x, s) e^{i\lambda s} ds. \quad (2.56)$$

Матрица  $\Phi_-(x, s)$ , участвующая в представлении

$$G_-(x, \lambda) = I + \int_0^{\infty} \Phi_-(x, s) e^{-i\lambda s} ds, \quad (2.57)$$

следующим образом выражается через решение  $\Omega_+(x, s)$  уравнения Винера — Хопфа:

$$\Phi_-(x, s) = \Phi(x, -s) + \int_0^{\infty} \Omega_+(x, s') \Phi(x, -s - s') ds'. \quad (2.58)$$

Введем запись матричных элементов матрицы  $\Omega_+(x, s)$ :

$$\Omega_+(x, s) = \begin{pmatrix} A_x(s) & B_x(s) \\ C_x(s) & D_x(s) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

подчеркивающую, что переменная  $x$  — параметр в уравнении Винера — Хопфа. Учитывая (2.54), запишем матричное уравнение (2.53) следующим образом:

$$A_x(s) = \int_0^{\infty} \beta(s - x - s') B_x(s') ds', \quad (2.60)$$

$$B_x(s) = -\varepsilon \bar{\beta}(-s - x) - \varepsilon \int_0^{\infty} k_x(s, s') B_x(s') ds' \quad (2.61)$$

и

$$D_x(s) = -\varepsilon \int_0^{\infty} \bar{\beta}(-s - x + s') C_x(s') ds', \quad (2.62)$$

$$C_x(s) = \beta(s - x) - \varepsilon \int_0^{\infty} l_x(s, s') C_x(s') ds', \quad (2.63)$$

где

$$k_x(s, s') = \int_{-x}^{\infty} \bar{\beta}(u-s) \beta(u-s') du, \quad (2.64)$$

$$l_x(s, s') = \int_x^{\infty} \beta(s-u) \bar{\beta}(s'-u) du. \quad (2.65)$$

Очевидно, что скалярные уравнения (2.61) и (2.63) вместе с (2.60) и (2.62) эквивалентны исходному уравнению Винера — Хопфа (2.53). Их разрешимость непосредственно следует из упомянутой выше теоремы Гохберга — Крейна. Однако нам необходимо исследовать зависимость решения  $\Omega_+(x, s)$  от переменной  $x$ , играющей роль параметра, поскольку этим, в силу первой формулы в (2.51), определяется зависимость функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  от  $x$ :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} C_x(s) \Big|_{s=x}, \quad \bar{\psi}(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} B_x(s) \Big|_{s=0}. \quad (2.66)$$

Приведем схему исследования поведения решений уравнений (2.61) и (2.63) как функций от  $x$ . В этих уравнениях участвуют интегральные операторы  $K_x$  и  $L_x$  с ядрами  $k_x(s, s')$  и  $l_x(s, s')$  соответственно, ограниченные в пространстве  $L_1(0, \infty)$  и непрерывные по параметру  $x$  в смысле сходимости по норме. Для оценок норм встречающихся нам интегральных операторов достаточно использовать очевидную оценку

$$\|A\| \leq \max_{0 \leq s' < \infty} \int_0^{\infty} |A(s, s')| ds. \quad (2.67)$$

Из теории Гохберга — Крейна следует, что операторы  $I + \varepsilon K_x$  и  $I + \varepsilon L_x$  при каждом  $x$  обратимы в  $L_1(0, \infty)$ . Отсюда получаем, что матрица  $\Omega_+(x, s)$  как элемент  $L_1^{(2 \times 2)}(0, \infty)$  непрерывно зависит от  $x$ , так что при каждом  $\lambda$  матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  непрерывны по  $x$ .

Покажем, что нормы операторов  $(I + \varepsilon K_x)^{-1}$ ,  $(I + \varepsilon L_x)^{-1}$  в  $L_1(0, \infty)$  равномерно ограничены по  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Для этого мы докажем, что при  $x \rightarrow \pm \infty$  операторы  $K_x$  и  $L_x$  соответственно имеют пределы  $K_{\pm}$  и  $L_{\pm}$  в смысле сходимости по норме и что операторы  $(I + \varepsilon K_{\pm})^{-1}$  и  $(I + \varepsilon L_{\pm})^{-1}$  существуют и ограничены.

Рассмотрим для определенности оператор  $K_x$ . Представим его в виде

$$K_x = K + R_x, \quad (2.68)$$

где  $K$  — интегральный оператор с ядром  $k(s-s')$ :

$$k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(u+s) \bar{\beta}(u) du, \quad (2.69)$$

а ядро  $r_x(s, s')$  оператора  $R_x$  имеет вид

$$r_x(s, s') = - \int_{-\infty}^{-x} \bar{\beta}(u-s) \beta(u-s') du. \quad (2.70)$$

Для нормы оператора  $R_x$  имеем оценку

$$\begin{aligned} \|R_x\| &\leq \max_{0 \leq s' < \infty} \int_0^{-x} \int_{-\infty}^{-x} |\beta(u-s) \beta(u-s')| du ds = \\ &= \max_{0 \leq s' < \infty} \int_{-\infty}^{-x} \int_{-\infty}^u |\beta(s) \beta(u-s')| ds du \leq \left( \int_{-\infty}^{-x} |\beta(u)| du \right)^2, \end{aligned} \quad (2.71)$$

которая показывает, что эта норма исчезает при  $x \rightarrow +\infty$ .

Оператор  $I + \varepsilon K$  обратим, так как задача об его обращении представляет собой скалярное уравнение Винера — Хопфа, которое сводится к задаче Римана для функции

$$1 + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} k(s) e^{i\lambda s} ds = 1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2 = a_+(\lambda) a_-(\lambda). \quad (2.72)$$

Эта задача очевидно однозначно разрешима при  $\varepsilon = 1$ , а при  $\varepsilon = -1$  ее однозначная разрешимость следует из условия  $(A_1)$  — формулы (2.15). Решение  $a_+(\lambda)$  дается формулой (2.6), где следует опустить произведение множителей Бляшке, а  $a_-(\lambda) = \bar{a}_+(\bar{\lambda})$ .

Таким образом, мы показали, что норма оператора  $(I + \varepsilon K_x)^{-1}$  равномерно ограничена по  $x$  в окрестности  $+\infty$ .

Рассмотрим теперь окрестность  $-\infty$ . Не следует думать, исходя из (2.64), что оператор  $K_x$  исчезает при  $x \rightarrow -\infty$ . Это становится очевидным, если ввести новую неизвестную функцию

$$f_x(s) = B_x(s-x), \quad s \geq x, \quad (2.73)$$

для которой уравнение (2.61) принимает вид

$$f_x(s) = -\varepsilon \bar{\beta}(-s) - \varepsilon \int_x^{\infty} q(s, s') f_x(s') ds'. \quad (2.74)$$

Ядро  $q(s, s')$  не зависит от  $x$  и имеет вид

$$q(s, s') = \int_0^{\infty} \bar{\beta}(u-s) \beta(u-s') du. \quad (2.75)$$

Сделанный сдвиг переводит пространство  $L_1(0, \infty)$  в  $L_1(x, \infty)$ . При этом оператор  $K_x$  переходит в оператор  $Q_x$  в пространстве  $L_1(x, \infty)$  с ядром  $q(s, s')$ , где  $s, s' \geq x$ . Вложим теперь пространство  $L_1(x, \infty)$  в  $L_1(-\infty, \infty)$  и через  $Q_x$  будем также обо-

значать и оператор в  $L_1(-\infty, \infty)$  с ядром

$$q_x(s, s') = \theta(s-x)\theta(s'-x)q(s, s'), \quad (2.76)$$

где  $\theta(s) = 1$  при  $s > 0$  и  $\theta(s) = 0$  при  $s < 0$ . Последовательность операторов  $\mathbf{Q}_x$  при  $x \rightarrow -\infty$  сходится по норме  $L_1(-\infty, \infty)$  к оператору  $\mathbf{Q}$  с ядром  $q(s, s')$ .

Докажем, что оператор  $\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{Q}$  обратим — покажем, что уравнение

$$f(s) = g(s) - \varepsilon \int_0^{\infty} q(s, s') f(s') ds' \quad (2.77)$$

однозначно разрешимо в  $L_1(-\infty, \infty)$ . Положим

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\lambda s} ds, \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{i\lambda s} ds \quad (2.78)$$

и совершим в уравнении (2.77) преобразование Фурье; в результате получим уравнение

$$F(\lambda) = G(\lambda) - \varepsilon \bar{b}(\lambda) \Pi_+(b(\lambda) F(\lambda)), \quad (2.79)$$

где проектор  $\Pi_+$  вводится следующим образом: если

$$\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(s) e^{i\lambda s} ds, \quad (2.80)$$

то

$$(\Pi_+ \xi)(\lambda) = \int_0^{\infty} \xi(s) e^{i\lambda s} ds. \quad (2.81)$$

Уравнение (2.79) имеет единственное решение, которое можно явно выписать в виде

$$F(\lambda) = G(\lambda) - \varepsilon \frac{\bar{b}(\lambda)}{a_+(\lambda)} \Pi_+ \left( \frac{b(\lambda)}{a_-(\lambda)} G(\lambda) \right), \quad (2.82)$$

где функции  $a_{\pm}(\lambda)$  введены в (2.72).

Действительно, вводя функцию  $\Phi(\lambda)$  формулой

$$F(\lambda) - G(\lambda) = -\varepsilon \bar{b}(\lambda) \Phi(\lambda), \quad (2.83)$$

из (2.79) получаем для нее уравнение

$$\Phi(\lambda) = \Pi_+(b(\lambda) G(\lambda) - \varepsilon |b(\lambda)|^2 \Phi(\lambda)), \quad (2.84)$$

которое, в частности, показывает, что  $\Phi(\lambda)$  принадлежит кольцу  $\mathfrak{H}_+$ . Используя факторизацию (2.72), перепишем (2.84) в



виде

$$\Pi_+(b(\lambda)G(\lambda) - a_+(\lambda)a_-(\lambda)\Phi(\lambda)) = 0, \quad (2.85)$$

откуда уже легко получаем выражение для  $\Phi(\lambda)$ :

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{a_+(\lambda)} \Pi_+ \left( \frac{b(\lambda)}{a_-(\lambda)} G(\lambda) \right) \quad (2.86)$$

и тем самым формулу (2.82).

Таким образом, мы показали, что оператор  $I + \varepsilon K_x$  ограниченно обратим и в окрестности  $-\infty$ . Доказательство равномерной разрешимости по  $x$  интегрального уравнения (2.61) на этом заканчивается.

Уравнение (2.63) исследуется аналогично. При этом для доказательства равномерной ограниченности оператора  $(I + \varepsilon L_x)^{-1}$  в окрестности  $-\infty$  следует использовать представление типа (2.68), а в окрестности  $+\infty$  — только что приведенный выше способ.

Используем полученные результаты для исследования асимптотик решения задачи Римана при  $|x| \rightarrow \infty$ . Для половины матричных элементов матрицы  $G_+^{-1}(x, \lambda)$  эти асимптотики тривиальны.

Действительно, свободные члены в уравнениях (2.61) и (2.63) имеют в пространстве  $L_1(0, \infty)$  нормы

$$\int_0^{\infty} |\beta(-s-x)| ds = \int_{-\infty}^{-x} |\beta(s)| ds \quad (2.87)$$

и

$$\int_0^{\infty} |\beta(s-x)| ds = \int_{-x}^{\infty} |\beta(s)| ds, \quad (2.88)$$

которые исчезают при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  соответственно. Поэтому

$$\|B_x\| \rightarrow 0, \quad \|A_x\| \rightarrow 0 \quad (2.89)$$

при  $x \rightarrow +\infty$  и

$$\|C_x\| \rightarrow 0, \quad \|D_x\| \rightarrow 0 \quad (2.90)$$

при  $x \rightarrow -\infty$ . Таким образом, при всех  $\lambda$ ,  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , асимптотики первой строки матрицы  $G_+^{-1}(x, \lambda)$  при  $x \rightarrow +\infty$  и второй строки при  $x \rightarrow -\infty$  совпадают с приведенными в формулах (1.39) и (1.41).

Рассмотрим теперь поведение первой строки матрицы  $G_+^{-1}(x, \lambda)$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Положим  $B_x(s) = f_x(s+x)$ ; при  $x \rightarrow -\infty$  получаем, что  $f_x(s) \rightarrow f(s)$  в смысле сходимости в  $L_1(-\infty, \infty)$ .

Функция  $f(s)$  удовлетворяет уравнению (2.77), где  $g(s) = -\varepsilon \bar{\beta}(-s)$ . Поэтому при вещественных  $\lambda$  и  $x \rightarrow -\infty$  получаем

$$\begin{aligned} (G_+^{-1}(x, \lambda))_{12} &= \int_0^{\infty} B_x(s) e^{i\lambda s} ds = e^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\lambda s} ds + o(1) = \\ &= -\frac{\varepsilon \bar{b}(\lambda)}{a_+(\lambda)} e^{-i\lambda x} \left( a_+(\lambda) - \Pi_+ \left( \frac{\varepsilon |b(\lambda)|^2}{a_-(\lambda)} \right) \right) + o(1) = \\ &= -\frac{\varepsilon \bar{b}(\lambda)}{a_+(\lambda)} e^{-i\lambda x} \left( a_+(\lambda) + \Pi_+ \left( (1 - a_+(\lambda)) + \left( \frac{1}{a_-(\lambda)} - 1 \right) \right) \right) + \\ &\quad + o(1) = -\frac{\varepsilon \bar{b}(\lambda)}{a_+(\lambda)} e^{-i\lambda x} + o(1). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Далее, из уравнения (2.60) получаем, что при  $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} (G_+^{-1}(x, \lambda))_{11} &= 1 + \int_0^{\infty} A_x(s) e^{i\lambda s} ds = \\ &= 1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \beta(s - s' - x) f_x(x + s') e^{i\lambda s} ds' ds = \\ &= 1 + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s - s') f(s') e^{i\lambda s} ds' ds + o(1) = \\ &= 1 - \Pi_+ \left( \frac{\varepsilon |b(\lambda)|^2}{a_+(\lambda)} \right) + o(1) = 1 + \Pi_+ \left( \left( \frac{1}{a_+(\lambda)} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - a_-(\lambda)) \right) + o(1) = \frac{1}{a_+(\lambda)} + o(1). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Аналогичным образом получаем, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$(G_+^{-1}(x, \lambda))_{21} = \frac{b(\lambda)}{a_+(\lambda)} e^{i\lambda x} + o(1) \quad (2.93)$$

и

$$(G_+^{-1}(x, \lambda))_{22} = \frac{1}{a_+(\lambda)} + o(1). \quad (2.94)$$

Таким образом, мы воспроизвели асимптотики (1.39) и (1.41), если отождествить  $a(\lambda)$  в этих формулах с  $a_+(\lambda)$ .

Асимптотики для матрицы  $G_-(x, \lambda)$  следуют из полученных асимптотик для матрицы  $G_+^{-1}(x, \lambda)$  и формул (2.1), (2.13). Они совпадают с формулами (1.40) и (1.42), если отождествить  $\bar{a}(\lambda)$  и  $a_-(\lambda)$ .

Таким образом, отсюда заключаем, что матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  составлены из решений Юста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  вспомогательной линейной задачи (2.4) по формулам (1.5), (1.6) и (1.18), (1.19), а

матрица

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & e\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

играет для них роль приведенной матрицы монодромии.

Рассмотрим теперь при  $\kappa < 0$  общий случай задачи Римана с нулями. Для простоты опять предположим, что мы имеем дело только с одной парой нулей  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0, \text{Im } \lambda_0 > 0$ , и одной парой подпространств  $N_0^{(\pm)}(x)$  вида (1.47). В формулы (2.18), (2.22), (2.24) и (2.27), дающие решение задачи Римана с нулями, входит решение регулярной задачи  $\tilde{G}_+(x, \lambda)$  для комплексного  $\lambda = \lambda_0$ . Поэтому нам нужна асимптотика при  $|x| \rightarrow \infty$  решения  $\tilde{G}_+(x, \lambda)$  и для комплексных  $\lambda$  из верхней полуплоскости. Взгляд на приведенные выше рассуждения показывает, что все формулы остаются справедливыми и для таких  $\lambda$ , кроме (2.91) и (2.93), где следует заменить  $\frac{\bar{b}(\lambda)}{a_+(\lambda)}$  и  $\frac{b(\lambda)}{a_+(\lambda)}$  на 0. Действительно, рассмотрим, например, предел матричного элемента  $(G_+^{-1}(x, \lambda))_{12}$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Имеем при этом

$$\int_x^\infty f(s) e^{i\lambda(s-x)} dx = \int_x^\infty f(s) e^{i\lambda(s-x)} dx + o(1). \quad (2.96)$$

Положим

$$g(x) = \int_x^\infty f(s) e^{i\lambda(s-x)} dx = \int_0^\infty f(s+x) e^{i\lambda s} ds \quad (2.97)$$

и покажем, что при  $\text{Im } \lambda > 0$   $g(x)$  исчезает при  $x \rightarrow -\infty$ . Из второго равенства в (2.97) следует, что для таких  $\lambda$  функция  $g(x)$  является сверткой двух функций из  $L_1(-\infty, \infty)$  и поэтому сама принадлежит  $L_1(-\infty, \infty)$ . С другой стороны, первое равенство в (2.97) показывает, что  $g(x)$  абсолютно непрерывна и

$$\frac{dg(x)}{dx} = -i\lambda g(x) - f(x), \quad (2.98)$$

так что ее производная снова принадлежит  $L_1(-\infty, \infty)$ . Поскольку функция  $g(x)$  очевидно исчезает при  $x \rightarrow +\infty$ , то отсюда следует, что она исчезает и при  $x \rightarrow -\infty$ .

Таким образом, при  $\text{Im } \lambda > 0$  имеют место асимптотики

$$\tilde{G}_+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_+(\lambda) \end{pmatrix} + o(1) \quad (2.99)$$

при  $x \rightarrow +\infty$  и

$$\tilde{G}_+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} a_+(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + o(1) \quad (2.100)$$

при  $x \rightarrow -\infty$ .

Рассмотрим теперь проектор  $P(x)$ , участвующий в определении (2.22) множителя Бляшке — Потапова. Из формулы (2.27) и асимптотик (2.99), (2.100) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(x, \lambda_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \beta(x, \lambda_0) = \infty. \quad (2.101)$$

Поэтому для проектора  $P(x)$  имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} B(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

Тем самым решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$  задачи Римана с нулями имеют асимптотики при  $|x| \rightarrow \infty$ , совпадающие с формулами (1.39) —

$$(1.42) \text{ после замены } a(\lambda) \text{ на } \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} a_+(\lambda) \text{ и } \bar{a}(\lambda) \text{ на } \frac{\lambda - \bar{\lambda}_0}{\lambda - \lambda_0} a_-(\lambda).$$

Более того, нетрудно убедиться, что матрица  $G_+(x, \lambda_0)$  составлена по формулам (1.5) и (1.19) из столбцов решений Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$ , которые пропорциональны и экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Это означает, что  $\lambda_0$  является собственным значением вспомогательной линейной задачи (2.4), а  $\gamma_0$  играет роль соответствующего коэффициента перехода дискретного спектра.

Случай нескольких пар нулей  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \text{Im } \lambda_j > 0$ , и подпространств  $N_j^{(\pm)}(x)$ ,  $j=1, \dots, n$ , рассматривается аналогично. При  $|x| \rightarrow \infty$  множители Бляшке — Потапова, входящие в матрицу  $\Pi(\lambda)$  (см. (2.28)), становятся диагональными и решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$  задачи Римана имеют асимптотики (1.39) — (1.42), где  $a(\lambda)$  дается формулой (2.6). Это завершает доказательство утверждений п. 4.

При доказательстве п. 2 мы показали, что как регулярной задаче Римана, так и задаче Римана с нулями соответствует уравнение (2.4), в котором участвуют, соответственно, матрицы  $\bar{U}_0(x)$  и  $U_0(x)$  вида (2.5). Сравнение формул (2.18), (2.28), (2.46) и (2.51) приводит к следующей связи матриц  $U_0(x)$  и  $\bar{U}_0(x)$ :

$$U_0(x) = \bar{U}_0(x) + \Delta_0(x), \quad (2.104)$$

$$\text{где} \quad \Delta_0(x) = \frac{1}{2} [\sigma_3, \pi(x)], \quad (2.105)$$

а матрица  $\pi(x)$  определяется из асимптотики множителя  $\Pi(x, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\Pi(x, \lambda) = I + \frac{1}{\lambda} i\pi(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \quad (2.106)$$

и имеет вид

$$\pi(x) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_j - \lambda_j) P_j(x). \quad (2.107)$$

Здесь  $P_j(x)$  — ортогональные проекторы, участвующие в формуле (2.28).

Приведенные выше результаты об асимптотике  $\bar{G}_\pm(x, \lambda)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  и формулы типа (2.27) показывают, что матрица  $\Delta_0(x)$  абсолютно интегрируема в окрестности  $\pm\infty$ . Кроме того, матрица  $\pi(x)$ , а вместе с ней и  $\Delta_0(x)$ , непрерывны по  $x$ . Отсюда следует, что  $\Delta_0(x)$  принадлежит пространству  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ . Это утверждение нам понадобится ниже.

Докажем теперь, что функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  принадлежат пространству  $L_1(-\infty, \infty)$ . Рассмотрим сначала регулярный случай задачи Римана и покажем, что функции  $B_x(s)$  и  $C_x(s)$  при каждом  $s \geq 0$  как функции  $x$  являются элементами пространства  $L_1(-\infty, \infty)$ , непрерывно зависящими от  $s$ .

Докажем это, например, для функции  $B_x(s)$ . Для этого покажем, что уравнение (2.61) можно рассматривать и в пространстве функций двух переменных  $f(x, s)$ , абсолютно интегрируемых по  $x$  на всей оси и непрерывных по  $s$  на полуоси  $s \geq 0$  в указанном выше смысле.

Другими словами, это пространство представляет собой тензорное произведение  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$ , где  $C[0, \infty)$  — пространство непрерывных ограниченных функций на интервале  $[0, \infty)$ . Норма в пространстве  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$  задается выражением

$$\|f\| = \max_{0 \leq s < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, s)| dx. \quad (2.108)$$

Очевидно, что свободный член в (2.61) принадлежит этому пространству. Также легко убедиться, что оператор  $K_x$  с ядром  $k_x(s, s')$  является ограниченным оператором в  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$ . Действительно, из принадлежности  $\beta(x)$  пространству  $L_1(-\infty, \infty)$  выводим оценку

$$|k_x(s, s')| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\beta(u-s)\beta(u-s')| du = \tilde{k}(s-s'), \quad (2.109)$$

где

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{k}(s)| ds < \infty. \quad (2.110)$$

Отсюда следует, что

$$\|K_x f\| \leq K \cdot \|f\|, \quad (2.111)$$

где  $f(x, s)$  — произвольный элемент  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$ . Далее, используя представление (2.64) для ядра  $k_x(s, s')$ , легко показать, что  $\int_{-\infty}^{\infty} (K_x f)(x, s) dx$  является непрерывной функцией  $s$ .

Отсюда уже нетрудно получить, что оператор  $I + \varepsilon K_x$  однозначно обратим в пространстве  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$ . Действительно, приведенные ранее результаты можно трактовать как существование оператора  $(I + \varepsilon K_x)^{-1}$  в пространстве функций  $C(-\infty, \infty) \otimes L_1(0, \infty)$  с естественным определением нормы

$$\|g\| = \max_{-\infty < x < \infty} \int_0^{\infty} |g(x, s)| ds. \quad (2.112)$$

Пространство  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$  «почти» сопряжено этому пространству, а оператор  $K_x$ , как это видно из (2.64), является формально самосопряженным. Это позволяет утверждать, что оператор  $(I + \varepsilon K_x)^{-1}$  существует и ограничен и в  $L_1(-\infty, \infty) \otimes C[0, \infty)$ . Более строго мы можем повторить доказательство обратимости оператора  $I + \varepsilon K_x$ , отправляясь от теории Гохберга — Крейна в пространстве  $C[0, \infty)$  вместо  $L_1(0, \infty)$ .

На основании формул (2.66) отсюда заключаем, что в регулярном случае задачи Римана функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  принадлежат  $L_1(-\infty, \infty)$ . Для рассмотрения случая задачи Римана с нулями следует использовать представление (2.104) и сделанное выше замечание об абсолютной интегрируемости матрицы  $\Delta_0(x)$ .

*Докажем теперь, что функции  $F_{\pm}(x, \lambda)$  абсолютно непрерывны по  $x$ , и оправдаем вывод дифференциального уравнения (2.4) в п. 2.* Предположим сначала, что функция  $\beta(x)$  имеет две производные из  $L_1(-\infty, \infty)$ . Тогда нетрудно убедиться, что матрица  $\Omega_+(x, s)$  — решение уравнения (2.53) — дифференцируема по  $x$  и  $s$  и  $\frac{\partial \Omega_+}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Omega_+}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial^2 \Omega_+}{\partial x \partial s}$  как функции  $s$  принадлежат по  $s$  пространству  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ . Отсюда, как показано в п. 2, следует, что матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  абсолютно непрерывны по  $x$  и удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.4). Для рассмотрения общего случая достаточно приблизить функцию  $\beta(x)$  в  $L_1(-\infty, \infty)$  функциями  $\beta_n(x)$  с указанными выше свойствами. Тогда построенные по ним матрицы  $U_0^{(n)}(x)$  будут сходиться при  $n \rightarrow \infty$  в норме  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$  к матрице  $U_0(x)$ , а матрицы  $F_{\pm}^{(n)}(x, \lambda)$  будут удовлетворять дифференциальному уравнению типа (2.4)

$$\frac{dF_{\pm}^{(n)}}{dx}(x, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + U_0^{(n)}(x) \right) F_{\pm}^{(n)}(x, \lambda) \quad (2.113)$$

и при фиксированном  $\lambda$  сходиться в норме  $C^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$  к матрицам  $F_{\pm}(x, \lambda)$ . В силу замкнутости оператора дифференцирования отсюда следует, что матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнению (2.4) вспомогательной линейной задачи.

Итак, мы доказали все утверждения, сформулированные в начале этого параграфа в п. 1—4. Здесь мы сделаем два замечания.

1) Все рассуждения были проведены в наиболее общем случае, когда функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  были из пространства  $L_1(-\infty, \infty)$ , а коэффициент  $b(\lambda)$  представлялся как преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции. Исследование задачи Римана и связи  $b(\lambda)$  с  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  можно провести и в других функциональных классах. В частности, особенно просто исследуется случай, когда  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца. При этом функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  также являются функциями типа Шварца.

2) Функции  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  и набор чисел  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ , входят в исходные данные задачи Римана независимым образом. Поэтому можно рассмотреть случай, когда  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  тождественно исчезают, т. е.  $G(\lambda)=I$ . При этом задача нахождения параметров матричных множителей Бляшке — Потапова в (2.28) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, которая будет явно приведена и решена в § 5. Соответствующая вспомогательная линейная задача (2.4) называется *безотражательной*, так как при этом один из коэффициентов перехода —  $b(\lambda)$  — исчезает, а второй —  $a(\lambda)$  — представляет собой произведение элементарных множителей Бляшке. Именно такие функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  отвечают чисто солитонным решениям уравнения НШ и будут подробно рассмотрены в § 5.

На этом исследование задачи Римана в быстроубывающем случае заканчивается. В следующем параграфе мы рассмотрим следствия этого исследования применительно к модели НШ.

### § 3. Приложение решения обратной задачи к модели НШ

Проведенное в предыдущем параграфе исследование задачи Римана позволяет дать решение обратной задачи — явно описать процедуру обращения отображения

$$\mathcal{F}: (\psi(x), \bar{\psi}(x)) \rightarrow (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n) \quad (3.1)$$

от функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  к коэффициентам перехода и дискретному спектру вспомогательной линейной задачи

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F \quad (3.2)$$

в быстроубывающем случае.

Именно, результаты § 1.5—1.6 показывают, что отображение  $\mathcal{F}$  переводит функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  из пространства  $L_1(-\infty, \infty)$  в функции  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  из кольца  $\mathfrak{R}_0$ , образованного преобразованиями Фурье функций из  $L_1(-\infty, \infty)$  (см. § 1.6). Дискретный спектр и его характеристики появляются только в случае  $\kappa < 0$ ; при этом предполагается выполнение условия (А) из § 1.6. Оно означает, что  $b(\lambda)$  удовлетворяет дополнительно ограничению

$$|b(\lambda)| < 1 \quad (3.3)$$

при всех  $\lambda$ , а среди чисел  $\lambda_j$  нет совпадающих и  $\text{Im } \lambda_j > 0$ . При этом ни один из коэффициентов  $\gamma_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , не исчезает. В указанных классах отображение  $\mathcal{F}$  является взаимно однозначным.

Действительно, исходные данные задачи Римана, сформулированной в конце § 1, однозначно параметризуются данными в правой части (3.1). Приведенное в § 2 исследование задачи Римана показывает, что функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , определенные формулами (2.66), порождают эти данные как коэффициенты перехода и дискретный спектр вспомогательной линейной задачи. Техническую основу обращения отображения  $\mathcal{F}$  составляет формализм матричного уравнения Винера—Хопфа со специальной зависимостью от параметра  $x$ , описанный в § 2.

Отображение  $\mathcal{F}$  является обратимым и в других функциональных классах. Так, например, его можно рассматривать на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$  модели НШ, образованном функциями  $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$  из пространства Шварца. При этом функции  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  также являются шварцевскими и  $\mathcal{F}$  взаимно однозначно. В гл. III мы убедимся, что в этих классах отображение  $\mathcal{F}$ , а также и  $\mathcal{F}^{-1}$ , дифференцируемо.

Применим теперь полученные результаты для полного описания динамики модели НШ в быстроубывающем случае. В § 1.7 мы показали, что если комплексная функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет начальной задаче

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa |\psi|^2 \psi, \quad (3.4)$$

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad (3.5)$$

то динамика коэффициентов перехода и дискретного спектра вспомогательной линейной задачи (3.2) с матрицей

$$U(x, t, \lambda) = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + \sqrt{\kappa} (\bar{\psi}(x, t) \sigma_+ + \psi(x, t) \sigma_-) \quad (3.6)$$



задается формулами

$$b(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t} b(\lambda), \quad \lambda_j(t) = \lambda_j, \quad (3.7)$$

$$\gamma_j(t) = e^{-i\lambda_j^2 t} \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь  $b(\lambda)$ ,  $\lambda_j$  и  $\gamma_j$  получаются из начальных данных  $\psi(x)$  задачи (3.4) — (3.5) с помощью отображения  $\mathcal{F}$ .

Теперь мы докажем обратное утверждение — покажем, что если выполняются формулы (3.7), то функция  $\psi(x, t)$ , определяемая по участвующим в (3.7) данным с помощью отображения  $\mathcal{F}^{-1}$ , удовлетворяет уравнению НШ. При этом будем предполагать, что коэффициент  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца, так как динамика (3.7) не выводит из пространства Шварца.

Для доказательства рассмотрим задачу Римана (2.1)

$$G(x, t, \lambda) = G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda), \quad (3.8)$$

где мы учли зависимость от дополнительного параметра  $t$ . В силу (3.7) имеем

$$G(x, t, \lambda) = E^{-1}(t, \lambda^2) G(x, \lambda) E(t, \lambda^2), \quad (3.9)$$

где  $E(t, \lambda^2) = \exp\left\{\frac{\lambda^2 t}{2i} \sigma_3\right\}$  — уже неоднократно использовавшаяся матрица. При  $x < 0$  в случае задачи с нулями также имеем условия

$$\text{Im } G_+(x, t, \lambda_j) = N_j^{(+)}(x, t), \quad \text{Ker } G_-(x, t, \bar{\lambda}_j) = N_j^{(-)}(x, t), \quad (3.10)$$

где

$$N_j^{(+)}(x, t) = E^{-1}(t, \lambda_j^2) N_j^{(+)}(x), \quad N_j^{(-)}(x, t) = E^{-1}(t, \bar{\lambda}_j^2) N_j^{(-)}(x), \quad (3.11)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Из результатов § 2 очевидно, что задача Римана (3.9) — (3.10) однозначно разрешима в указанном классе при каждом  $x$  и  $t$ .

Введем матрицы-функции

$$F_+(x, t, \lambda) = G_+^{-1}(x, t, \lambda) E(x, \lambda) E^{-1}(t, \lambda^2), \quad (3.12)$$

$$F_-(x, t, \lambda) = G_-(x, t, \lambda) E(x, \lambda) E^{-1}(t, \lambda^2). \quad (3.13)$$

В § 2 мы доказали, что при фиксированном  $t$  они удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.2) вспомогательной линейной задачи. Покажем, что при фиксированном  $x$  они удовлетворяют и дифференциальному уравнению по  $t$ . Дифференцируемость по  $t$  этих функций непосредственно вытекает из рассмотрения уравнения Винера — Хопфа (2.53), дополненного зависимостью от  $t$ .

Для вывода искомого уравнения по  $t$  (как и в § 2 для уравнения по  $x$ ) перепишем (3.9) в виде

$$F_-(x, t, \lambda) = F_+(x, t, \lambda) G(\lambda), \quad (3.14)$$

откуда получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} F_-(x, t, \lambda) F_-^{-1}(x, t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial t} F_+(x, t, \lambda) F_+^{-1}(x, t, \lambda). \quad (3.15)$$

В силу условий (3.11) не зависящие от  $x$  подпространства  $\text{Im } F_+^{-1}(x, t, \lambda_j)$  и  $\text{Ker } F_-(x, t, \bar{\lambda}_j)$  также не зависят и от  $t$ . Повторяя рассуждения, использованные в п. 2 предыдущего параграфа, получаем отсюда, что матрицы-функции  $\frac{\partial F_{\pm}}{\partial t}(x, t, \lambda) \times \times F_{\pm}^{\pm 1}(x, t, \lambda)$  совпадают и представляют собой целую функцию переменной  $\lambda$ . Для ее определения рассмотрим, следуя § 2, интегральное представление

$$F_-(x, t, \lambda) = \left( I + \int_0^{\infty} \Phi_-(x, t, s) e^{-t\lambda s} ds \right) E(x, \lambda) E^{-1}(t, \lambda^2) \quad (3.16)$$

и вытекающую из него асимптотику при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda \leq 0$

$$F_-(x, t, \lambda) = \left( I + \frac{\Phi_-(x, t, 0)}{i\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \Phi_-}{\partial s}(x, t, 0) + O\left(\frac{1}{|\lambda|^3}\right) \right) E(x, \lambda) E^{-1}(t, \lambda^2). \quad (3.17)$$

Дифференцируя эту асимптотику по  $t$ , получаем, что при таких  $\lambda$

$$\frac{\partial F_-}{\partial t}(x, t, \lambda) F_-^{-1}(x, t, \lambda) = V_-(x, t, \lambda) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (3.18)$$

где

$$V_-(x, t, \lambda) = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_0, \quad (3.19)$$

а

$$V_2 = \frac{i\sigma_3}{2}, \quad V_1(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi_-(x, t, 0), \sigma_3] = -U_0(x, t) \quad (3.20)$$

(см. (2.51)) и

$$V_0(x, t) = \frac{i}{2} \left[ \sigma_3, \frac{\partial \Phi_-}{\partial s}(x, t, 0) \right] + \frac{i}{2} [\Phi_-(x, t, 0), \sigma_3] \Phi_-(x, t, 0). \quad (3.21)$$

Выразим теперь матрицу  $V_0(x, t)$  через  $U_0(x, t)$ . Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением (3.2), из которого, в частности, следует бесконечная серия тождеств на матрицу  $\Phi_-(x, t, s)$  и ее производные по  $x$  и  $s$  при  $s=0$ . Действительно, многократно интегрируя в представлении (3.16) по частям и дифференцируя его по  $x$ , получаем при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda \leq 0$  следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{\partial F_-}{\partial x}(x, t, \lambda) F_-^{-1}(x, t, \lambda) = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(x, t)}{(i\lambda)^n} + O(|\lambda|^{-\infty}) \quad (3.22)$$

(сравни с § 2). В частности, мы имеем

$$F_1(x, t) = \frac{1}{2} \left( \left[ \sigma_3, \frac{\partial \Phi_-}{\partial s}(x, t, 0) \right] + \right. \\ \left. + [\Phi_-(x, t, 0), \sigma_3] \Phi_-(x, t, 0) + 2 \frac{\partial \Phi_-}{\partial x}(x, t, 0) \right). \quad (3.23)$$

С другой стороны, из дифференциального уравнения (3.2) следует, что коэффициенты  $F_n(x, t)$  исчезают:

$$F_n(x, t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Первое из этих тождеств означает, что матрицу  $V_0(x, t)$  можно представить в виде

$$V_0(x, t) = -i \frac{\partial \Phi_-}{\partial x}(x, t, 0). \quad (3.25)$$

Далее, антидиагональная часть матрицы  $\frac{\partial \Phi_-}{\partial x}(x, t, 0)$  в силу

(3.20) совпадает с матрицей  $-\frac{\partial U_0(x, t)}{\partial x} \sigma_3$ . Для определения ее

диагональной части рассмотрим снова равенство (3.24) для  $n=1$  и отделим в нем диагональную часть. Мы получим, используя (3.20) и (3.23), что она представляет собой матрицу  $-\sigma_3 U_0^2(x, t)$ . Таким образом, получаем окончательное выражение

$$V_0(x, t) = i \sigma_3 U_0^2(x, t) + i \frac{\partial U_0(x, t)}{\partial x} \sigma_3. \quad (3.26)$$

Сравнивая формулы (3.20) и (3.26) с (I.2.7), убеждаемся, что матрица  $V_-(x, t, \lambda)$  совпадает с матрицей  $V(x, t, \lambda)$  из § I.2:

$$V_-(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda). \quad (3.27)$$

Аналогичным образом для матрицы  $F_+(x, t, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im} \lambda \geq 0$  получаем асимптотику

$$\frac{\partial F_+}{\partial t}(x, t, \lambda) F_+^{-1}(x, t, \lambda) = V_+(x, t, \lambda) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (3.28)$$

где матрица  $V_+(x, t, \lambda)$  имеет вид (3.19). Отсюда на основании теоремы Лиувилля заключаем, что матрицы  $V_\pm(x, t, \lambda)$  совпадают:

$$V_+(x, t, \lambda) = V_-(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda), \quad (3.29)$$

а матрицы  $F_\pm(x, t, \lambda)$  удовлетворяют искомому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F_\pm}{\partial t}(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda) F_\pm(x, t, \lambda). \quad (3.30)$$

Вместе с дифференциальным уравнением (3.2) это означает, что связность  $(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda))$  удовлетворяет условию нулевой кривизны (1.2.10)

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0. \quad (3.31)$$

Итак, исходя из задачи Римана (3.9)—(3.10), мы построили связность  $(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda))$  вида (1.2.3)—(1.2.8), удовлетворяющую условию нулевой кривизны. Отсюда следует, что функция  $\psi(x, t)$  действительно является решением уравнения НШ. Приведенные выше рассуждения также доказывают глобальную однозначную разрешимость начальной задачи (3.4)—(3.5) для модели НШ в классе шварцевских функций (при  $\kappa < 0$  дополнительно предполагается выполнение условия (A)).

Итак, мы показали, что изученное отображение  $\mathcal{F}$  представляет собой нелинейную замену переменных, линеаризующую уравнение НШ.

Изложенный способ решения начальной задачи для уравнения НШ можно изобразить в виде следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (\Psi(x), \bar{\Psi}(x)) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j) \\ \tau_1 \downarrow & & \downarrow \tau_2 \\ (\Psi(x, t), \bar{\Psi}(x, t)) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & (b(\lambda, t), \bar{b}(\lambda, t); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j(t), \bar{\gamma}_j(t)). \end{array} \quad (3.32)$$

Здесь  $\tau_1$ —сдвиг по  $t$  согласно исходному уравнению (3.4), а  $\tau_2$ —сдвиг по  $t$ , задаваемый явными формулами (3.7).

Поучительно рассмотреть отображение  $\mathcal{F}$  в линейном пределе  $\kappa \rightarrow 0$ , при котором уравнение НШ переходит в обычное линейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (3.33)$$

С этой целью рассмотрим асимптотику коэффициентов перехода  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  при  $\kappa \rightarrow 0$ .

Из интегрального уравнения (1.5.36) для решения Юста  $T_-(x, \lambda)$  имеем при  $\kappa \rightarrow 0$

$$T_-(x, \lambda) = E(x; \lambda) + \int_{-\infty}^x E(x-y) U_0(y) E(y, \lambda) dy + O(|\kappa|). \quad (3.34)$$

Переходя в этой формуле к пределу при  $x \rightarrow +\infty$ , получаем, что

$$a(\lambda) = 1 + O(|\kappa|), \quad b(\lambda) = \sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\lambda x} dx + O(|\kappa|). \quad (3.35)$$

Последние формулы показывают, что дискретный спектр пропадает, а отображение  $\mathcal{F}$  сводится к преобразованию Фурье.

Временная динамика коэффициента  $b(\lambda)$ , задаваемая формулой (3.7), очевидным образом совпадает с динамикой преобразования Фурье функции  $\psi(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению (3.33).

Приведенные рассуждения позволяют в общем случае  $\kappa \neq 0$  интерпретировать отображение  $\mathcal{F}$  как *нелинейный аналог преобразования Фурье*. При этом схема интегрирования уравнения НШ методом обратной задачи — диаграмма (3.32) — представляет собой *нелинейный аналог метода Фурье*.

#### § 4. Связь метода задачи Римана с формализмом интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко

Этот параграф носит технический характер. Здесь мы приведем альтернативный и более традиционный подход к решению обратной задачи, основанный на интегральных уравнениях Гельфанда — Левитана — Марченко, и установим его связь с методом задачи Римана.

В отличие от последнего метода, основанного на стандартной задаче (2.1) об аналитической факторизации матриц-функций, метод Гельфанда — Левитана — Марченко использует *специальную задачу сопряжения аналитических вектор-функций*, следующую из формулы связи (1.3) для решений Йоста

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda); \quad (4.1)$$

напомним, что  $T(\lambda)$  задается в виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

и  $\varepsilon = \text{sign } \kappa$ .

Для формулировки этой задачи воспользуемся соотношением (4.1) для первого столбца  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  матрицы  $T_-(x, \lambda)$ , которое сразу запишем в виде

$$\frac{1}{a(\lambda)} T_-^{(1)}(x, \lambda) = T_+^{(1)}(x, \lambda) + r(\lambda) T_+^{(2)}(x, \lambda), \quad (4.3)$$

где

$$r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda). \quad (4.4)$$

Левая часть равенства (4.3) аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость  $\lambda$ , за исключением точек  $\lambda = \lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где она имеет простые полюсы. В силу соотношения (I.6.20)

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j) \quad (4.5)$$

получаем, что

$$\text{res}_{\lambda=\lambda_j} \frac{1}{a(\lambda)} T_-^{(1)}(x, \lambda) = c_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j), \quad (4.6)$$

где

$$c_j = \frac{\gamma_j}{\dot{a}(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

а точка означает производную по  $\lambda$ . При  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеем асимптотику

$$\frac{1}{a(\lambda)} T_-^{(1)}(x, \lambda) e^{i\lambda x/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1). \quad (4.8)$$

Первое слагаемое  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  в правой части (4.3) аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость и при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеет там асимптотику

$$T_+^{(1)}(x, \lambda) e^{i\lambda x/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1). \quad (4.9)$$

Столбец  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$ , участвующий во втором слагаемом, аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и имеет при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  асимптотику

$$T_+^{(2)}(x, \lambda) e^{-i\lambda x/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1). \quad (4.10)$$

Столбцы  $T_+^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  связаны соотношением инволюции (1.5.30)

$$\bar{T}_+^{(1)}(x, \bar{\lambda}) = \tilde{\sigma} T_+^{(2)}(x, \lambda), \quad (4.11)$$

где  $\tilde{\sigma} = \sigma_1$  при  $x > 0$  и  $\tilde{\sigma} = i\sigma_2$  при  $x < 0$ .

Соотношение (4.3) вместе с условиями (4.6) и (4.8) — (4.11) представляет собой упомянутую специальную задачу сопряжения. Она позволяет найти столбцы  $T_+^{(1)}(x, \lambda)$ ,  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  и  $\frac{1}{a(\lambda)} T_-^{(1)}(x, \lambda)$  с указанными свойствами аналитичности по заданной на вещественной оси функции  $r(\lambda)$  и параметрам  $\lambda_j$ ,  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Как и задача Римана, она сводится к системе интегральных уравнений. Для вывода этой системы воспользуемся представлениями

$$T_+^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x/2} + \int_x^\infty \Gamma_+(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda y/2} dy, \quad (4.12)$$

$$T_+^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x/2} + \int_x^\infty \Gamma_+(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda y/2} dy \quad (4.13)$$

и подставим их в (4.3). Вычитая из обеих частей получившегося равенства столбец  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x/2}$  и переходя к преобразованию

Фурье по переменной  $\lambda$ , получаем при  $y \geq x$  следующее соотношение:

$$\Gamma_+(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega(x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_x^\infty \Gamma_+(x, s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega(s+y) ds = 0, \quad (4.14)$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty r(\lambda) e^{i\lambda x/2} d\lambda + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n c_j e^{i\lambda_j x/2}. \quad (4.15)$$

Используя инволюцию (I.5.18)

$$\bar{\Gamma}_+(x, y) = \sigma \Gamma_+(x, y) \sigma, \quad (4.16)$$

уравнение (4.14) можно переписать в матричном виде

$$\Gamma_+(x, y) + \Omega(x, y) + \int_x^\infty \Gamma_+(x, s) \Omega(s+y) ds = 0, \quad (4.17)$$

где  $y \geq x$  и

$$\Omega(x) = \omega(x) \sigma_- + \bar{\varepsilon} \bar{\omega}(x) \sigma_+. \quad (4.18)$$

Соотношение (4.17) представляет собой интегральное уравнение для искомой матрицы  $\Gamma_+(x, y)$  и называется *уравнением Гельфанда — Левитана — Марченко для правого конца*.

Аналогичным образом соотношение (4.1) для столбца  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$ , записанное в виде

$$\frac{1}{a(\lambda)} T_+^{(2)}(x, \lambda) = \tilde{r}(\lambda) T_-^{(1)}(x, \lambda) + T_-^{(2)}(x, \lambda), \quad (4.19)$$

где

$$\tilde{r}(\lambda) = -\varepsilon \frac{\bar{b}(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad (4.20)$$

приводит к *уравнению Гельфанда — Левитана — Марченко для левого конца*

$$\Gamma_-(x, y) + \tilde{\Omega}(x+y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, s) \tilde{\Omega}(s+y) ds = 0 \quad (4.21)$$

при  $x \geq y$ . Здесь

$$\tilde{\Omega}(x) = \bar{\varepsilon} \bar{\omega}(x) \sigma_- + \tilde{\omega}(x) \sigma_+, \quad (4.22)$$

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{r}(\lambda) e^{-i\lambda x/2} d\lambda + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j e^{-i\lambda_j x/2}, \quad (4.23)$$

а

$$\tilde{c}_j^i = \frac{1}{\gamma_j \tilde{a}(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.24)$$

Ядро  $\Gamma_-(x, y)$  участвует в интегральном представлении (1.5.10)

$$T_-(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, y) E(y, \lambda) dy. \quad (4.25)$$

Интегральные уравнения (4.17) и (4.21) исследуются при помощи тех же аналитических средств, что и уравнение Винера — Хопфа. Характерным отличием является то, что здесь мы имеем дело с компактными интегральными операторами.

Рассмотрим общий случай абсолютно суммируемых на всей оси функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . В силу условия  $a(\lambda) \neq 0$  при вещественных  $\lambda$  из теоремы Винера следует, что функция

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{i\lambda x/2} d\lambda \quad (4.26)$$

абсолютно суммируема на всей осн. Вклад от дискретного спектра в функцию  $\omega(x)$  быстро убывает при  $x \rightarrow +\infty$  (см. (4.15)). Таким образом, по известной теореме функционального анализа получаем, что интегральный оператор  $\Omega_x$  в пространстве  $L_1^{(2 \times 2)}(x, \infty)$

$$\Omega_x f(s) = \int_x^{\infty} f(s') \Omega(s + s') ds' \quad (4.27)$$

является компактным и исчезает по норме при  $x \rightarrow +\infty$ . Аналогичным образом оператор  $\tilde{\Omega}_x$

$$\tilde{\Omega}_x f(s) = \int_{-\infty}^x f(s') \tilde{\Omega}(s + s') ds' \quad (4.28)$$

компактен в  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  и исчезает по норме при  $x \rightarrow -\infty$ .

Метод решения обратной задачи при помощи интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко (4.17) и (4.21) основан на следующем утверждении.

*Предположим, что заданы функции  $r(\lambda)$ ,  $\tilde{r}(\lambda)$  из кольца  $\mathfrak{R}_0$  и при  $\varepsilon = -1$  набор несовпадающих чисел  $\lambda_j$ ,  $\text{Im } \lambda_j > 0$ , и величины  $c_j$ ,  $\tilde{c}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , со следующими свойствами:*

1) при всех вещественных  $\lambda$

$$|r(\lambda)| = |\tilde{r}(\lambda)| < 1 \quad (4.29)$$

для  $\varepsilon = 1$  и

$$|r(\lambda)| = |\tilde{r}(\lambda)| < \infty \quad (4.30)$$

для  $\varepsilon = -1$ ;



2) имеют место формулы согласования

$$\frac{\bar{r}(\lambda)}{\tilde{r}(\lambda)} = -\varepsilon \frac{a(\lambda)}{\bar{a}(\lambda)}, \quad c_j \tilde{c}_j = \frac{1}{a^2(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.31)$$

где функция  $a(\lambda)$  определяется из соотношения (сравни с (1.6.22) и (1.6.23))

$$a(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - \varepsilon |r(\mu)|^2)}{\lambda - \mu + i0} d\mu \right\}. \quad (4.32)$$

Построим по этим данным ядра  $\Omega(x)$  и  $\tilde{\Omega}(x)$  по формулам (4.15), (4.18) и (4.22), (4.23), (4.24) соответственно.

Тогда утверждается, что:

1) интегральные уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (4.17) и (4.21) однозначно разрешимы при каждом  $x$  в пространствах  $L_1^{(2 \times 2)}(x, \infty)$  и  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  соответственно;

2) построенные по их решениям  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  по формулам (4.12), (4.13) и (4.25) матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)$  удовлетворяют инволюции

$$\bar{T}_{\pm}(x, \lambda) = \sigma T_{\pm}(x, \lambda) \sigma \quad (4.33)$$

(сравни с (1.5.19)) и дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dx} T_{\pm}(x, \lambda) = \left( \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0^{(\pm)}(x) \right) T_{\pm}(x, \lambda). \quad (4.34)$$

Матрицы  $U_0^{(\pm)}(x)$  даются выражениями

$$U_0^{(\pm)}(x) = \pm (\sigma_3 \Gamma_{\pm}(x, x) \sigma_3 - \Gamma_{\pm}(x, x)) \quad (4.35)$$

(сравни с формулами (1.5.32) и (1.5.33)) и абсолютно суммируемы в окрестности  $\pm \infty$  соответственно;

3) имеет место формула согласования

$$U_0^{(+)}(x) = U_0^{(-)}(x) = U_0(x), \quad (4.36)$$

так что матрица  $U_0(x)$  принадлежит пространству  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$  и имеет специальный вид (2.5);

4) коэффициенты перехода непрерывного спектра вспомогательной линейной задачи (3.2) с матрицей  $U_0(x)$  совпадают с функциями  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda) = a(\lambda)r(\lambda)$ , а дискретный спектр состоит из точек  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  с коэффициентами перехода  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ , где  $\gamma_j = a(\lambda_j)c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Отметим, что при решении обратной задачи по схеме Гельфанда — Левитана — Марченко следует использовать оба интегральных уравнения (4.17) и (4.21) для правого и левого концов. Первое из них позволяет исследовать свойства матрицы  $U_0^{(+)}(x)$  в окрестности  $+\infty$ , а второе — свойства матрицы  $U_0^{(-)}(x)$

в окрестности  $-\infty$ . При этом утверждение о совпадении матриц  $U_0^{(+)}(x)$  и  $U_0^{(-)}(x)$  требует особого доказательства.

Мы не будем приводить здесь доказательство утверждений пунктов 1)–4). Вместо этого мы покажем, как уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко получаются из уравнения Винера — Хопфа, исследованного в § 2. Отсюда, в частности, будет следовать справедливость сформулированных выше утверждений. При этом для простоты мы ограничимся рассмотрением регулярного случая задачи Римана, когда дискретный спектр отсутствует.

Напомним (см. § 2), что упомянутое уравнение Винера — Хопфа имеет вид

$$\Omega_+(x, s) + \Phi(x, s) + \int_0^{\infty} \Omega_+(x, s') \Phi(x, s' - s) ds' = 0, \quad (4.37)$$

где  $s \geq 0$ , а

$$\Phi(x, s) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\beta(-s-x)} \\ -\beta(s-x) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

и

$$\beta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (4.39)$$

Построенная по решению  $\Omega_+(x, s)$  матрица

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = I + \int_0^{\infty} \Omega_+(x, s) e^{i\lambda s} ds \quad (4.40)$$

оказывается составленной из столбцов решений Йоста:

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} (T_+^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) E^{-1}(x, \lambda) \quad (4.41)$$

вспомогательной линейной задачи (3.2) с матрицей

$$U_0(x) = \frac{1}{2} [\sigma_3, \Omega_+(x, 0)]. \quad (4.42)$$

При этом матрица  $G_-(x, \lambda)$ , составленная из оставшихся столбцов решений Йоста:

$$G_-(x, \lambda) = (T_+^{(1)}(x, \lambda), T_-^{(2)}(x, \lambda)) E^{-1}(x, \lambda), \quad (4.43)$$

допускает представление

$$G_-(x, \lambda) = I + \int_0^{\infty} \Phi_-(x, s) e^{-i\lambda s} ds, \quad (4.44)$$

где

$$\Phi_{-}(x, s) = \Phi(x, -s) + \int_0^{\infty} \Omega_{+}(x, s') \Phi(x, -s - s') ds'. \quad (4.45)$$

Напомним, что в силу общей теории Гохберга — Крейна система уравнений Винера — Хопфа (4.37) является фредгольмовой, т. е. оператор  $I + \Phi$  в пространстве  $L_1^{(2 \times 2)}(0, \infty)$ , участвующий в (4.37), представляется в виде

$$I + \Phi = A + K, \quad (4.46)$$

где оператор  $A$  ограниченно обратим, а  $K$  — компактен. Уравнение

$$f + \Phi f = g \quad (4.47)$$

переписывается в виде

$$f + A^{-1}Kf = A^{-1}g, \quad (4.48)$$

где участвует компактный оператор  $A^{-1}K$ . Переход от уравнения (4.47) к (4.48) иногда называют *регуляризацией*.

Здесь мы покажем, что *уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко получаются из уравнения Винера — Хопфа при специальной регуляризации*.

Введем матричные элементы матрицы-решения  $\Omega_{+}(x, s)$

$$\Omega_{+}(x, s) = \begin{pmatrix} A_x(s) & B_x(s) \\ C_x(s) & D_x(s) \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Благодаря специальному антидиагональному виду матрицы-ядра  $\Phi(x, s)$  уравнение (4.37) сводится к двум независимым интегральным уравнениям для функций  $B_x(s)$  и  $C_x(s)$  (см. § 2)

$$B_x(s) + \varepsilon \beta(-s-x) + \varepsilon \int_0^{\infty} k_x(s, s') B_x(s') ds' = 0 \quad (4.50)$$

и

$$C_x(s) - \beta(s-x) + \varepsilon \int_0^{\infty} l_x(s, s') C_x(s') ds' = 0, \quad (4.51)$$

где

$$k_x(s, s') = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\beta}(u-s) \beta(u-s') du, \quad (4.52)$$

$$l_x(s, s') = \int_x^{\infty} \beta(s-u) \bar{\beta}(s'-u) du. \quad (4.53)$$

Рассмотрим для определенности уравнение (4.50). Вводя обозначение  $\beta_x(s) = \beta(-x-s)$  и рассматривая решение  $B_x(s)$  и

свободный член  $\bar{\varepsilon}\bar{\beta}_x(s)$  как элементы  $L_1(0, \infty)$ , перепишем его в виде

$$(I + \varepsilon K_x)B_x + \varepsilon\bar{\beta}_x = 0, \quad (4.54)$$

где  $K_x$  — интегральный оператор с ядром  $k_x(s, s')$ . Мы имеем разложение (см. § 2)

$$I + \varepsilon K_x = I + \varepsilon K + R_x, \quad (4.55)$$

где  $K$  — интегральный оператор с ядром  $k(s-s')$ ,

$$k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(u+s)\bar{\beta}(u)du, \quad (4.56)$$

а ядро  $r_x(s, s')$  оператора  $R_x$  имеет вид

$$r_x(s, s') = -\varepsilon \int_{-\infty}^{-x} \beta(u-s')\bar{\beta}(u-s)du. \quad (4.57)$$

Оператор  $I + \varepsilon K$  однозначно обратим, так как задача о его обращении сводится к скалярной задаче Римана для функции

$$1 + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} k(s)e^{i\lambda s}ds = 1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2 = a_+(\lambda)a_-(\lambda). \quad (4.58)$$

При этом  $a_+(\lambda) = a(\lambda)$  и  $a_-(\lambda) = \bar{a}(\bar{\lambda})$ , где  $a(\lambda)$  дается формулой (2.6) без произведения множителей Бляшке (см. § 2). Оператор  $R_x$  уже является компактным в  $L_1(0, \infty)$ . Для доказательства этого достаточно проверить равномерную непрерывность функций вида  $h(s) = R_x f(s)$  в среднем и равномерную малость интеграла  $\int_A^{\infty} |h(s)|ds$  при больших  $A$  для всех  $f(s)$  из ограниченного множества в  $L_1(0, \infty)$ . Мы имеем элементарные оценки

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} |h(s+\delta) - h(s)|ds = \\ & = \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-x} (\bar{\beta}(u-s-\delta) - \bar{\beta}(u-s))\beta(u-s')f(s')du ds' \right| ds \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\beta(u)|du \int_0^{\infty} |f(s')|ds' \int_{-\infty}^{\infty} |\beta(s+\delta) - \beta(s)|ds \quad (4.59) \end{aligned}$$

и

$$\int_A^\infty |h(s)| ds = \int_A^\infty \left| \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-x} \bar{\beta}(u-s) \beta(u-s') f(s') du ds' \right| ds \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^\infty |\beta(u)| du \int_0^\infty |f(s')| ds' \int_{-\infty}^{-x-A} |\beta(s)| ds, \quad (4.60)$$

из которых следует требуемая компактность.

Регуляризацией уравнения (4.54) является уравнение

$$B_x + (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{K})^{-1} (\mathbf{R}_x B_x + \varepsilon \bar{\beta}_x) = 0. \quad (4.61)$$

Мы покажем, что оно фактически совпадает с уравнением Гельфанда — Левитана — Марченко.

Для явного представления оператора  $(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{K})^{-1}$  используем стандартный метод решения скалярного уравнения Винера — Хопфа

$$(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{K})f(s) = g(s), \quad s \geqslant 0. \quad (4.62)$$

Для этого продолжим свободный член  $g(s)$  нулем при  $s \leqslant 0$  и перейдем к преобразованию Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(s) e^{i\lambda s} ds, \quad \hat{g}(\lambda) = \int_0^\infty g(s) e^{i\lambda s} ds. \quad (4.63)$$

Уравнение (4.62) примет вид

$$\hat{f}(\lambda) + \varepsilon |b(\lambda)|^2 \hat{f}_+(\lambda) = \hat{g}(\lambda) \quad (4.64)$$

или

$$(1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2) \hat{f}_+(\lambda) = \hat{g}(\lambda) - \hat{f}_-(\lambda), \quad (4.65)$$

где

$$\hat{f}_\pm(\lambda) = \int_0^\infty f(\pm s) e^{\pm i\lambda s} ds, \quad \hat{f}(\lambda) = \hat{f}_+(\lambda) + \hat{f}_-(\lambda). \quad (4.66)$$

Отсюда благодаря (4.58) получаем, что

$$\hat{f}_+(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} \Pi_+ \left( \frac{\hat{g}(\lambda)}{\bar{a}(\lambda)} \right), \quad (4.67)$$

где проектор  $\Pi_+$  введен в § 2 и однозначно определяется свойствами

$$\Pi_+ \hat{f}_+ = \hat{f}_+, \quad \Pi_+ \hat{f}_- = 0. \quad (4.68)$$

Заметим, что в силу этого свойства проектора  $\Pi_+$  функцию  $g(s)$  можно продолжить на полуось  $s \leqslant 0$  произвольно (с сохранением абсолютной суммируемости), а не обязательно нулем.

Окончательно решение уравнения (4.62) имеет вид

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_+(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda, \quad s \geq 0, \quad (4.69)$$

где  $\hat{f}_+(\lambda)$  дается выражением (4.67). Тем самым задача описания оператора  $(I + \varepsilon K)^{-1}$  решена.

На основании полученных формул преобразуем уравнение (4.61). Вводя преобразование Фурье решения  $B_x(s)$

$$B_x(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_+(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda, \quad (4.70)$$

перепишем его в виде

$$a(\lambda) B_+(\lambda) + \Pi_+ \left( \varepsilon \frac{\bar{b}(\lambda)}{\bar{a}(\lambda)} e^{-i\lambda x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{a}(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r_x(s, s') B_x(s') e^{i\lambda s} ds' ds \right) = 0, \quad (4.71)$$

где мы воспользовались сделанным выше замечанием и продолжили свободный член  $\beta_x(s)$  и ядро  $r_x(s, s')$  на отрицательные  $s$  естественным образом. Последнее слагаемое в (4.71) с помощью (4.57) легко преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r_x(s, s') B_x(s') e^{i\lambda s} ds' ds = \\ = -\varepsilon \bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 \beta(u - x - s) B_x(s) e^{i\lambda u} du ds = \\ = -\varepsilon \bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x} \Pi_-(b(\lambda) B_+(\lambda) e^{i\lambda x}), \quad (4.72)$$

где  $\Pi_-$  — дополнительный к  $\Pi_+$  проектор:

$$\Pi_- = I - \Pi_+. \quad (4.73)$$

В результате уравнение (4.71) принимает вид

$$a(\lambda) B_+(\lambda) + \varepsilon \Pi_+(\bar{r}(\lambda) e^{-i\lambda x} - \bar{r}(\lambda) e^{-i\lambda x} \Pi_-(a(\lambda) B_+(\lambda) r(\lambda) e^{i\lambda x})) = 0, \quad (4.74)$$

где мы использовали обозначение (4.4) для  $r(\lambda)$ . Полагая

$$\varphi_x(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) B_+(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda \quad (4.75)$$

и переходя к обратному преобразованию Фурье, из (4.74) получаем уравнение

$$\varphi_x(s) + \varepsilon \bar{\omega}(-x-s) - \varepsilon \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-x} \bar{\omega}(u-s) \omega(u-s') \varphi_x(s') du ds' = 0, \quad s \geq 0, \quad (4.76)$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (4.77)$$

Полагая теперь

$$\varphi_x(s) = 2\varphi(x, x+2s) \quad (4.78)$$

и учитывая, что  $\omega(x) = 2\bar{\omega}(-2x)$ , из (4.76) окончательно получаем уравнение

$$\varphi(x, y) + \varepsilon \bar{\omega}(x+y) - \varepsilon \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} \varphi(x, z) \omega(z+z') \bar{\omega}(z'+y) dz' dz = 0, \quad y \geq x. \quad (4.79)$$

Оно совпадает с уравнением, получающимся из системы уравнений Гельфанда—Левитана—Марченко (4.17) для первой строки матрицы  $\Gamma_+(x, y)$  после исключения из нее функции  $(\Gamma_+(x, y))_{11}$ .

Отметим также, что отождествление функции  $\varphi(x, y)$  и матричного элемента  $\varepsilon \bar{\beta}_+(x, y) = (\Gamma_+(x, y))_{12}$  видно и непосредственно из сравнения формул (4.13), (4.40), (4.41), (4.49), (4.70) и (4.75).

Для вывода уравнения, связывающего матричный элемент  $(\Gamma_+(x, y))_{11} = \alpha_+(x, y)$  с  $\bar{\beta}_+(x, y)$  (см. формулу (1.5.20)), рассмотрим формулу (4.45), выражающую матрицу  $\Phi_-(x, s)$  через  $\Omega_+(x, s)$ . Обозначая  $\alpha_x(s) = (\Phi_-(x, s))_{11}$ , из (4.45) имеем

$$\alpha_x(s) = - \int_0^{\infty} \beta(-s-s'-x) B_x(s') ds', \quad s \geq 0, \quad (4.80)$$

откуда сразу получаем, что

$$\alpha_x(s) = - \int_0^{\infty} \varphi_x(s') \omega(-s-s'-x) ds'. \quad (4.81)$$

Полагая

$$\alpha_x(s) = 2\alpha_+(x, x+2s), \quad (4.82)$$

из (4.81) получаем уравнение

$$\alpha_+(x, y) + \varepsilon \int_x^{\infty} \bar{\beta}_+(x, z) \omega(z + y) dz = 0, \quad y \geq x. \quad (4.83)$$

Оно совпадает с уравнением, связывающим матричные элементы первой строки матрицы  $\Gamma_+(x, y)$ . Отметим, что совпадение функции  $\frac{1}{2} \alpha_x \left( \frac{y-x}{2} \right)$  с матричным элементом  $(\Gamma_+(x, y))_{11}$  также следует и непосредственно из формул (4.12), (4.43) и (4.44).

Итак, мы показали, что уравнения (4.79) и (4.83) вместе с инволюцией (4.16) эквивалентны уравнению (4.17) — уравнению Гельфанда — Левитана — Марченко для правого конца.

Аналогичным образом рассмотрение уравнения (4.51) приводит к уравнению (4.21) — уравнению Гельфанда — Левитана — Марченко для левого конца.

Итак, мы показали, как в результате специальной регуляризации уравнение Виера — Хопфа превращается в уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко для правого и левого концов. В заключение сделаем ряд замечаний о сравнении двух подходов к обратной задаче.

1) В методе задачи Римана мы исходим из одной независимой функции  $b(\lambda)$ , преобразование Фурье которой при всех  $x$  ведет себя как функция  $\psi(x)$ . В то же время в подходе Гельфанда — Левитана — Марченко приходится рассматривать две зависимые функции  $\omega(x)$  и  $\tilde{\omega}(x)$ , которые ведут себя как  $\psi(x)$  в окрестности  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно.

2) Исходные данные  $b(\lambda)$ ,  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , задачи Римана взаимно независимы, в то время как в подходе Гельфанда — Левитана — Марченко нельзя менять собственные значения дискретного спектра  $\lambda_j$ , не меняя хотя бы одной из функций  $r(\lambda)$  или  $\tilde{r}(\lambda)$ .

3) Уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко, в отличие от уравнения Виера — Хопфа, являются интегральными уравнениями с компактными операторами.

4) В схеме задачи Римана вывод дифференциального уравнения вспомогательной линейной задачи происходит особенно просто и является локальным по  $x$ . В подходе Гельфанда — Левитана — Марченко эта локальность теряется, и возникает дополнительная задача о совпадении матриц  $U_0^{(+)}(x)$  и  $U_0^{(-)}(x)$ .

На этом заканчивается сравнение двух подходов к решению обратной задачи. В следующем параграфе мы предьявим явное решение обратной задачи в важном частном случае, когда функция  $b(\lambda)$  исчезает. Этот случай отвечает солитонам модели НШ.



### § 5. Быстроубывающий случай. Солитонные решения

Здесь мы рассмотрим важный частный случай, в котором *обратная задача решается явно*. Именно, мы разберем случай, когда

$$b(\lambda) = 0 \quad (5.1)$$

при всех  $\lambda$ , так что задача Римана о факторизации тривиализуется и сводится к определению матричных множителей Бляшке — Потапова. Последняя задача имеет смысл только при  $\kappa < 0$ , что мы и будем предполагать.

Как уже отмечалось в § 1, отношение коэффициентов перехода  $b(\lambda)/a(\lambda)$  играет роль коэффициента отражения в теории рассеяния для вспомогательной линейной задачи. Поэтому эту задачу и все ее характеристики в случае (5.1) принято называть *безотражательными*.

Перейдем теперь к решению обратной задачи. Начнем со случая одной пары нулей  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ ,  $\text{Im } \lambda_0 > 0$ , и чисел  $\gamma_0, \bar{\gamma}_0$ , где  $\gamma_0 \neq 0$ . Решения задачи Римана имеют вид

$$G_+(x, \lambda) = B(x, \lambda), \quad G_-(x, \lambda) = B^{-1}(x, \lambda), \quad (5.2)$$

(см. (2.18)), где  $B(x, \lambda)$  — матричный множитель Бляшке — Потапова

$$B(x, \lambda) = I + \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} P(x), \quad (5.3)$$

а  $P(x)$  — ортогональный проектор

$$P(x) = \frac{1}{1 + |\gamma_0(x)|^2} \begin{pmatrix} |\gamma_0(x)|^2 & \bar{\gamma}_0(x) \\ \gamma_0(x) & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

и  $\gamma_0(x) = \gamma_0 e^{i\lambda_0 x}$  (см. формулы (2.22), (2.24) и (2.27)). Матрица  $U_0(x)$  вида (2.5)

$$U_0(x) = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}(x) \\ \psi(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

участвующая в вспомогательной линейной задаче (2.4), дается формулой (2.105):

$$U_0(x) = \frac{1}{2} [\sigma_3, \pi(x)], \quad (5.6)$$

где матрица  $\pi(x)$  определяется из разложения

$$B(x, \lambda) = I + \frac{i\pi(x)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \quad (5.7)$$

и имеет вид

$$\pi(x) = \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda_0}{i} P(x) \quad (5.8)$$

(см. (2.106), (2.107)). В результате для комплексной функции  $\psi(x)$  получаем следующее простое выражение:

$$\psi(x) = \frac{2 \operatorname{Im} \lambda_0}{\sqrt{x}} \frac{\gamma_0(x)}{1 + |\gamma_0(x)|^2}. \tag{5.9}$$

Формула (5.9) дает простейший пример *безотражательных функций*  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . Они зависят от двух произвольных комплексных чисел  $\lambda_0$ ,  $\gamma_0$  с условиями  $\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$ ,  $\gamma_0 \neq 0$ , являются бесконечно дифференцируемыми и экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь эволюцию этих начальных данных по уравнению НШ. Из формул (3.7), описывающих динамику коэффициентов перехода, следует, что условие (5.1) сохраняется со временем, а

$$\gamma_0(x, t) = e^{-i\lambda_0^2 t} \gamma_0(x). \tag{5.10}$$

Отсюда получаем, что решение уравнения НШ — комплексная функция  $\psi(x, t)$  — остается безотражательной и по-прежнему дается формулой вида (5.9):

$$\psi(x, t) = \frac{2 \operatorname{Im} \lambda_0}{\sqrt{x}} \frac{\gamma_0(x, t)}{1 + |\gamma_0(x, t)|^2}. \tag{5.11}$$

Вводя обозначения

$$A = \frac{\operatorname{Im} \lambda_0}{\sqrt{|\lambda_0|}}, \quad u = 2 \operatorname{Im} \lambda_0, \quad v = 2 \operatorname{Re} \lambda_0, \tag{5.12}$$

$$x_0 = \frac{1}{\operatorname{Im} \lambda_0} \ln |\gamma_0|, \quad \varphi_0 = \arg \gamma_0,$$

перепишем формулу (5.11) следующим образом:

$$\psi(x, t) = A \frac{\exp \left\{ i \left( \varphi_0 + \frac{vx}{2} + \frac{(u^2 - v^2)}{4} t - \frac{\pi}{2} \right) \right\}}{\operatorname{ch} \left\{ \frac{u}{2} (x - vt - x_0) \right\}}. \tag{5.13}$$

Представление (5.13) показывает, что *решение  $\psi(x, t)$  является гладкой функцией, локализованной вдоль направления*

$$x(t) = x_0 + vt, \tag{5.14}$$

*и его центр движется с постоянной скоростью  $v$ . Кроме того, это решение осциллирует как в пространстве, так и во времени с частотами  $v/2$  и  $(u^2 - v^2)/4$  соответственно. Параметр  $A$  играет роль амплитуды, а  $x_0$  и  $\varphi_0$  — соответственно начального центра и начальной фазы.*

Итак, мы убедились, что построенное решение  $\psi(x, t)$  уравнения НШ представляет собой изолированную волну, обладающую следующими свойствами:

- 1) при распространении она сохраняет свой профиль;
- 2) она имеет конечную энергию и, более того, значения всех интегралов движения на решении  $\psi(x, t)$  конечны.

Следуя установившейся традиции, решения с указанными свойствами мы будем называть *солитонами в широком значении этого термина*. В физической литературе под солитоном иногда вообще понимают частицеподобное решение — т. е. локализованное решение с конечной энергией.

Поэтому функцию  $\psi(x, t)$ , определенную формулой (5.13), будем называть *солитонным решением уравнения НШ для быструбывающего случая*. Оно описывает свободное движение солитона.

Отметим, что существование солитонов стало возможным лишь благодаря нелинейному члену в уравнении НШ, а в линейном пределе  $\kappa \rightarrow 0$  солитоны отсутствуют. Действительно, рассмотрим решение  $\psi(x, t)$  при  $\kappa \rightarrow 0$ . Для конечности предела необходимо, чтобы  $\gamma_0 = \sqrt{\kappa} \tilde{\gamma}_0$ , и тогда

$$\psi_0(x, t) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \psi(x, t) = c_0 e^{i\tilde{\gamma}_0 x - i\tilde{\gamma}_0^2 t}, \quad (5.15)$$

где  $c_0 = 2\tilde{\gamma}_0 \operatorname{Im} \lambda_0$ . Функция  $\psi_0(x, t)$  очевидно удовлетворяет линейному уравнению Шредингера и обладает свойством 1), однако имеет бесконечные энергию и импульс. Более того, общее решение  $\tilde{\psi}(x, t)$  линейного уравнения Шредингера дается интегралом Фурье

$$\tilde{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - i\lambda^2 t} \varphi(\lambda) d\lambda, \quad (5.16)$$

причем для конечности его энергии и импульса необходимы определенная гладкость и быстрое убывание функции  $\varphi(\lambda)$ . Однако для таких  $\varphi(\lambda)$  из принципа стационарной фазы следует, что решение  $\tilde{\psi}(x, t)$  убывает при  $|t| \rightarrow \infty$  как  $1/\sqrt{|t|}$  вдоль любого направления  $x - vt = \text{const}$ . Таким образом, в этом случае не выполняется свойство 1). Тем самым мы можем утверждать, что *солитон представляет собой существенно нелинейное явление*.

Рассмотрим теперь общий безотражательный случай, когда заданы  $n$  пар нулей  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ , и чисел  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ ,  $j=1, \dots, n$ . Решения соответствующей задачи Римана имеют вид

$$G_+(x, \lambda) = \Pi(x, \lambda), \quad G_-(x, \lambda) = \Pi^{-1}(x, \lambda), \quad (5.17)$$

где  $\Pi(x, \lambda)$  задается как упорядоченное произведение матричных множителей Бляшке — Потапова:

$$\Pi(x, \lambda) = \prod_{j=1}^n B_j(x, \lambda), \quad (5.18)$$

$$B_j(x, \lambda) = I + \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} P_j(x) \quad (5.19)$$

(см. формулы (2.28)), а  $P_j(x)$  — ортогональные проекторы. Они однозначно определяются по заданным числам  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$  посредством условий (1.49) на подпространства  $\text{Im } \Pi(x, \lambda_j)$  и  $\text{Ker } \Pi^{-1}(x, \bar{\lambda}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Используя обобщенное свойство унитарности

$$\Pi^*(x, \lambda) = \Pi^{-1}(x, \bar{\lambda}), \quad (5.20)$$

мы перепишем здесь эти условия в виде

$$\Pi^{-1}(x, \bar{\lambda}_j) \xi_j = \Pi^*(x, \lambda_j) \xi_j = 0, \quad (5.21)$$

где

$$\xi_j(x) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

— вектор-столбец, а  $\gamma_j(x) = e^{i\lambda_j x} \gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Как было объяснено в § 2, условия (5.21) позволяют последовательно определить проекторы  $P_1(x), \dots, P_n(x)$ . Матрица  $U_0(x)$  по-прежнему дается формулой (5.6), где теперь матрица  $\pi(x)$  участвует в асимптотике

$$\Pi(x, \lambda) = I + \frac{i\pi(x)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \quad (5.23)$$

и имеет вид

$$\pi(x) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_j - \lambda_j) P_j(x). \quad (5.24)$$

Приведем теперь альтернативный способ определения матрицы  $\Pi(x, \lambda)$ . Он состоит в разложении матрицы  $\Pi^{-1}(x, \lambda)$  на простые дроби

$$\Pi^{-1}(x, \lambda) = I + \sum_{j=1}^n \frac{A_j(x)}{\lambda - \lambda_j} \quad (5.25)$$

и нахождении матричных коэффициентов  $A_j(x)$ . Условия (5.20) и (5.21) показывают, что матрицы  $A_j(x)$  представляются в виде

$$A_j(x) = z_j(x) \xi_j^*(x), \quad (5.26)$$

где  $z_j(x) = \begin{pmatrix} p_j(x) \\ q_j(x) \end{pmatrix}$ ,  $\xi_j^*(x) = (\gamma_j(x), 1)$  — вектор-строка, сопряженная к вектору-столбцу  $\xi_j(x)$ ,  $j=1, \dots, n$ . В частности, отсюда следует, что  $A_j(x)$  — матрицы ранга 1.

Для доказательства рассмотрим следующие разложения в окрестности точки  $\lambda = \lambda_j$  (сравни с § 2):

$$\Pi^{-1}(x, \lambda) = \frac{A_j(x)}{\lambda - \lambda_j} + O(1) \quad (5.27)$$

и

$$\Pi(x, \lambda) = B_j(x) + O(|\lambda - \lambda_j|), \quad (5.28)$$

так что

$$A_j(x) B_j(x) = B_j(x) A_j(x) = 0. \quad (5.29)$$

Вместе с условием (1.49)

$$\text{Im } B_j(x) = \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ -\bar{\gamma}_j(x) \end{array} \right) \right\} \quad (5.30)$$

это показывает, что матрица  $A_j(x)$  имеет единичный ранг и представляется в виде (5.26).

Условия (5.21) позволяют однозначно определить неизвестные векторы  $z_j(x)$ , участвующие в (5.26). В самом деле, подставляя (5.26) в (5.25) и используя (5.21), получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\xi_j(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^*(x) \xi_j(x)}{\bar{\lambda}_j - \lambda_k} z_k(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.31)$$

Скалярные произведения  $\xi_k^* \xi_j$  имеют вид

$$\xi_k^*(x) \xi_j(x) = 1 + \gamma_k(x) \bar{\gamma}_j(x), \quad (5.32)$$

и система (5.31) распадается на две отдельные системы уравнений для первых и вторых компонент векторов  $z_j(x)$ . В частности, для первых компонент  $p_j(x)$  имеем

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}(x) p_k(x) = -\bar{\gamma}_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.33)$$

где

$$M_{jk}(x) = \frac{1 + \bar{\gamma}_j(x) \gamma_k(x)}{\bar{\lambda}_j - \lambda_k}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (5.34)$$

Матрица  $\pi(x)$  определяется через  $A_j(x)$  посредством формулы

$$\pi(x) = i \sum_{j=1}^n A_j(x), \quad (5.35)$$

откуда на основании (5.6), (5.26) и (5.35) для функции  $\psi(x)$  получаем

$$\psi(x) = \frac{i}{\sqrt{x}} \sum_{j=1}^n \bar{p}_j(x). \quad (5.36)$$

Вводя  $n \times n$  матрицу  $M(x)$  с матричными элементами  $\bar{M}_{jk}(x)$  и матрицу  $M_1(x)$  вида

$$M_1(x) = \begin{pmatrix} M(x) & \vdots & \gamma_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \gamma_n(x) \\ 1 \dots 1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

из формул Крамера имеем окончательное выражение для функции  $\psi(x)$ :

$$\psi(x) = \frac{i}{\sqrt{x}} \frac{\det M_1(x)}{\det M(x)}. \quad (5.38)$$

Итак, мы получили явные формулы для безотражательных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в общем случае. Они зависят от  $2n$  комплексных чисел  $\lambda_j, \gamma_j$  с условиями  $\text{Im } \lambda_j > 0, \gamma_j \neq 0$ , и среди чисел  $\lambda_j$  нет совпадающих; функции  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$  являются шварцевскими и, более того, экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Действительно, гладкость функций  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$  (и, в частности, невырожденность матрицы  $M(x)$ ) следует из несингулярности при любом  $x$  проекторов  $P_j(x)$ , что легко проверяется последовательно. Для доказательства экспоненциального убывания заметим, что при  $x \rightarrow +\infty$   $\gamma_j(x) = O(e^{-\text{Im } \lambda_j x})$ , так что с такой точностью векторы  $\xi_j(x)$  превращаются в постоянный вектор  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Отсюда получаем

$$B_j(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \end{pmatrix} + O(e^{-ax}), \quad (5.39)$$

где  $a = \min \{\text{Im } \lambda_j\}$ , так что  $\psi(x) = O(e^{-ax})$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Оценка  $\psi(x) = O(e^{ax})$  при  $x \rightarrow -\infty$  получается из равенства, аналогичного предыдущему:

$$B_j(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(e^{ax}). \quad (5.40)$$

Оно следует из того, что при  $x \rightarrow -\infty$   $\gamma_j(x) = O(e^{-\text{Im } \lambda_j x})$ , поэтому векторы  $\frac{1}{\gamma_j(x)} \xi_j(x)$  с экспоненциальной точностью превращаются в постоянный вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим теперь безотражательную функцию  $\psi(x)$  вида (5.38) в качестве начальных данных для уравнения НШ. Решение  $\psi(x, t)$  получается из формулы (5.38) при замене параметров  $\gamma_j(x)$  на  $\gamma_j(x, t)$  согласно (3.7):

$$\gamma_j(x, t) = e^{-i\lambda_j^2 t} \gamma_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.41)$$

и остается безотражательным. Убедимся, что это решение описывает взаимодействие  $n$  солитонов. Для этого покажем, что при  $t \rightarrow \pm \infty$  решение  $\psi(x, t)$  в ситуации общего положения представляется в виде суммы односолитонных решений:

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j^{(\pm)}(x, t) + O(e^{-ac|t|}). \quad (5.42)$$

Здесь  $\psi_j^{(\pm)}(x, t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — солитоны с параметрами  $A_j$ ,  $v_j$ ,  $x_{0j}^{(\pm)}$  и  $\varphi_{0j}^{(\pm)}$ , определяемыми формулами (5.12) по данным  $\lambda_j$  и  $\gamma_j^{(\pm)}$ , где

$$\gamma_j^{(+)} = \gamma_j \prod_{v_k < v_j} \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{v_k > v_j} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \bar{\lambda}_k} \quad (5.43)$$

и

$$\gamma_j^{(-)} = \gamma_j \prod_{v_k < v_j} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \bar{\lambda}_k} \prod_{v_k > v_j} \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad (5.44)$$

$a \bar{c} = \min_{j \neq k} |v_j - v_k|$ . Ситуация общего положения означает, что все скорости  $v_j$  различны.

Для доказательства формул (5.42) — (5.44) достаточно показать, что на траекториях  $C_j$  отдельного солитона

$$x - v_j t = \text{const} \quad (5.45)$$

решение  $\psi(x, t)$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  стремится к односолитонному решению  $\psi_j^{(\pm)}(x, t)$  и экспоненциально убывает во всех других направлениях.

Эти результаты можно извлечь из анализа явной формулы (5.38). Мы дадим здесь, однако, более простой и изящный способ, основанный на непосредственном изучении матрицы  $\Pi(x, t, \lambda)$ .

Для этого заметим, что при  $t \rightarrow \pm \infty$  все параметры  $\gamma_j(x, t)$  либо экспоненциально убывают, либо экспоненциально растут на всех направлениях, кроме своей траектории  $C_j$ . Действительно, из (5.41) следует, что

$$\gamma_j^{\pm}(x, t) \Big|_{x-vt=c_0} = e^{-\frac{a_j}{2}(c_0+(v-v_j)t)} e^{\frac{i}{4}(2v_j c_0 + (u_j^2 + 2vv_j - v_j^2)t)} \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.46)$$

Вдоль траектории  $C_j$  для соответствующих векторов  $\xi_k(x, t)$  отсюда получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_k(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\xi_k(x, t)}{\gamma_k(x, t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

если  $v_k < v_j$ , и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi_k(x, t)}{\gamma_k(x, t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_k(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

если  $v_k > v_j$ .

Для определения асимптотики матрицы  $\Pi(x, t, \lambda)$  вдоль траектории  $C_j$  удобно, в отличие от (5.18), использовать упорядоченное произведение

$$\Pi(x, t, \lambda) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \tilde{B}_k(x, t, \lambda) \tilde{B}_j(x, t, \lambda), \quad (5.49)$$

в котором множитель Бляшке — Потапова  $\tilde{B}_j(x, t, \lambda)$ , отвечающий паре нулей  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ , расположен крайним справа. В этом случае все множители  $\tilde{B}_k(x, t, \lambda)$  с  $k \neq j$  асимптотически имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для асимптотики вектора  $\xi_k(x, t)$ , пропорциональной векторам  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  соответственно. Действительно, при последовательном определении асимптотических множителей  $\tilde{B}_k^{(\pm)}(\lambda)$ ,  $k \neq j$ ,  $k = 1, \dots, n$ , мы получаем диагональные проекторы и, тем самым, диагональные матрицы  $\tilde{B}_k^{(\pm)}(\lambda)$ , которые оставляют инвариантными подпространства, натянутые на векторы  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Таким образом, получаем, что асимптотически условия (5.21) сводятся к одному равенству для матрицы  $\tilde{B}_j^{(\pm)}(\lambda)$  — асимптотики множителя  $\tilde{B}_j(x, t, \lambda)$  вдоль направления  $C_j$  при  $t \rightarrow \pm \infty$ :

$$\tilde{B}_j^{(\pm)*}(\lambda_j) \xi_j^{(\pm)} = 0, \quad (5.50)$$

где

$$\xi_j^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j^{(\pm)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

а  $\gamma_j^{(\pm)}$  даются формулами (5.43), (5.44). Для завершения доказательства равенства (5.42) осталось заметить, что приведен-



ные рассуждения также показывают, что вдоль всех направлений, отличных от траекторий  $C_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , решение  $\psi(x, t)$  экспоненциально убывает при  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Доказанное утверждение имеет естественную интерпретацию: решение  $\psi(x, t)$  в (5.42) описывает процесс взаимодействия  $n$  солитонов, которые при больших отрицательных и положительных временах являются свободными и расходятся друг от друга. Поэтому решение  $\psi(x, t)$  принято называть  $n$ -солитонным.

Полученные формулы также допускают наглядное толкование в терминах общей теории рассеяния. При этом, в отличие от линейной теории, односолитонному решению (5.13) сопоставляется частица-солитон, а не волновой пакет. Солитон характеризуется скоростью  $v$ , координатой центра инерции  $x(t)$  и параметрами внутреннего движения  $A$  и  $\varphi_0$ . При  $t \rightarrow \pm \infty$   $n$ -солитонное решение  $\psi(x, t)$  описывает свободное движение  $n$  солитонов с параметрами  $(v_j, x_{0j}^{(\pm)}, A_j, \varphi_{0j}^{(\pm)})$ , которые определяются по формулам (5.43), (5.44) и (5.12). Удобно перенумеровать солитоны в порядке возрастания их скоростей, считая, что  $\infty > v_1 > \dots > v_n > -\infty$ . Тогда при  $t \rightarrow -\infty$  их центры инерции разделены большими интервалами порядка  $ac|t|$ , где  $c = \min_{j \neq k} |v_j - v_k|$ , и самый быстрый солитон находится левее всех остальных.

Таким образом, асимптотическое состояние, описываемое  $n$ -солитонным решением при  $t \rightarrow -\infty$ , изображает движение  $n$  пространственно разделенных солитонов, которые с ростом времени сближаются. При конечных временах картина пространственно разделенных солитонов теряется, и  $n$ -солитонное решение описывает взаимодействие солитонов. Однако при  $t \rightarrow +\infty$  снова возникают пространственно разделенные солитоны, и при этом самый быстрый из них находится правее всех остальных. Таким образом, при конечных временах он провзаимодействовал со всеми оставшимися солитонами. Аналогичное заключение имеет место и для всех других солитонов. В частности, с ростом времени расстояние между солитонами увеличивается.

Описанная картина типична для теории рассеяния, в которой мы имеем дело с асимптотическими состояниями, характеризуемыми в терминах свободных частиц. В процессе рассеяния меняются лишь характеристики этих частиц и, в общем случае, их число.

В нашем случае мы имеем дело с процессом рассеяния очень специального вида. Именно, число частиц, их скорости и половина параметров внутреннего движения — амплитуды — при рассеянии не меняются. Процесс рассеяния состоит лишь в изменении параметров центра инерции и фаз внутреннего движения. Формулы (5.43), (5.44) и (5.12) позволяют дать связь между этими параметрами асимптотического движения:

$$x_{0j}^{(+)} = x_{0j}^{(-)} + \Delta x_{0j}, \quad \varphi_{0j}^{(+)} = \varphi_{0j}^{(-)} + \Delta \varphi_{0j}, \quad (5.52)$$

где

$$\Delta x_{0j} = \frac{2}{\text{Im} \lambda_j} \left( \sum_{k=j+1}^n \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right| - \sum_{k=1}^{j-1} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right| \right) \quad (5.53)$$

и

$$\Delta \varphi_{0j} = 2 \left( \sum_{k=j+1}^n \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} - \sum_{k=1}^{j-1} \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) \pmod{2\pi}. \quad (5.54)$$

Характерно, что приращения координат  $x_{0j}$  и фаз  $\varphi_{0j}$  при рассеянии представляются аддитивным образом через двухчастичные сдвиги

$$\Delta x_{01} = \frac{2}{\text{Im} \lambda_1} \ln \left| \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|, \quad \Delta x_{02} = -\frac{2}{\text{Im} \lambda_2} \ln \left| \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|, \quad (5.55)$$

$$\Delta \varphi_{01} = 2 \arg \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \Delta \varphi_{02} = -2 \arg \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

для случая  $v_1 > v_2$ , с соответствующей заменой  $1 \leftrightarrow 2$  для  $v_2 > v_1$ . При этом сумма берется по всем двухчастичным взаимодействиям данного солитона с остальными. Это специфическое свойство рассеяния, сводящее  $n$ -частичное рассеяние к двухчастичному, принято называть *факторизацией*.

Иногда факторизацию рассеяния включают в определение понятия солитона наряду со свойствами 1)–2). В этом случае принято говорить о солитоне в узком смысле этого термина. В данной книге мы будем иметь дело только с солитонами в узком смысле и будем называть их просто солитонами. В следующей главе мы дадим интерпретацию процесса рассеяния солитонов с гамильтоновой точки зрения.

В заключение этого параграфа подчеркнем, что ситуация общего положения, при которой все скорости  $v_j$  различны, была существенной для интерпретации  $n$ -солитонного решения с точки зрения теории рассеяния. Однако само решение, очевидно, не теряет смысл и при совпадении двух или более скоростей. При этом солитоны с одинаковыми скоростями не расходятся, а образуют связанное состояние. В частности, двухсолитонное решение при условии  $v_1 = v_2 = 0$  представляет собой периодическое по времени решение уравнения НШ с частотой  $(\text{Im} \lambda_1)^2 - (\text{Im} \lambda_2)^2$ .

Сделанное замечание относится и к ограничениям на исходные параметры  $\lambda_j, \gamma_j$  для  $n$ -солитонного решения. Мы можем в алгебраической формуле (5.38) считать некоторые из  $\lambda_j$  совпадающими и даже выходящими на вещественную ось, а числа  $\gamma_j$  — исчезающими. Полученная при таком вырождении функция  $\psi(x, t)$  может исчезнуть или выйти из шварцевского класса (в частности, стать сингулярной), но тем не менее, в силу алгеб-

раического характера формулы (5.38), будет удовлетворять уравнению НШ. Как мы увидим в следующей главе, описанные частные решения не будут играть существенной роли при гамильтоновой интерпретации модели НШ.

### § 6. Решение обратной задачи для случая конечной плотности. Метод задачи Римана

Начиная с этого параграфа, мы перейдем к решению обратной задачи для случая граничных условий конечной плотности. Эта задача состоит в восстановлении функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  по коэффициентам перехода  $a_p(\lambda)$ ,  $b_p(\lambda)$  и характеристикам дискретного спектра  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$ . Мы ограничимся случаем, когда граничные значения функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  при  $x \rightarrow \pm \infty$  принимаются в смысле Шварца.

Как и в быстроубывающем случае, существуют два подхода к решению обратной задачи, основанные на матричной задаче Римана и на формализме Гельфанда — Левитана — Марченко соответственно.

В этом параграфе мы опишем первый подход, основанный на матричной задаче Римана. Она естественно формулируется на римановой поверхности  $\Gamma$  функций  $k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$  с заданным на ней контуром  $\mathcal{R}_\omega$ , состоящим из точек  $(\lambda, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon = \pm 1$  и  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ , т. е.  $\lambda$  вещественно и удовлетворяет условию  $|\lambda| \geq \omega$ ; см. § 1.8. Контур  $\mathcal{R}_\omega$  разбивает поверхность  $\Gamma$  на две части — листы  $\Gamma_\pm$ .

Как и в быстроубывающем случае, мы начинаем с формулы связи решений Йоста

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T_p(\lambda) \quad (6.1)$$

(см. (I.8.43)), где  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ , а  $T_p(\lambda)$  — приведенная матрица монодромии

$$T_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_p(\lambda) & \bar{b}_p(\lambda) \\ b_p(\lambda) & \bar{a}_p(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Инволюции (I.8.41) — (I.8.42) означают, что для  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$

$$T_\pm(x, \lambda - i0) = \frac{i(\lambda + k)}{\omega} \sigma_1 \bar{T}_\pm(x, \lambda + i0) \sigma_3 \quad (6.3)$$

и

$$\bar{T}_p(\lambda - i0) = \sigma_3 \bar{T}_p(\lambda + i0) \sigma_3. \quad (6.4)$$

По аналогии с § 1 введем матрицы

$$S_+(x, \lambda) = (T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)) \quad (6.5)$$

и

$$S_-(x, \lambda) = (T_+^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)), \quad (6.6)$$

которые аналитически продолжаютя на листы  $\Gamma_{\pm}$  соответственно (см. § 1.8) и при  $\lambda$  из  $\mathcal{R}_{\omega}$  удовлетворяют соотношению

$$S_-(x, \lambda) = S_+(x, \lambda) S_{\rho}(\lambda), \quad (6.7)$$

где

$$S_{\rho}(\lambda) = \frac{1}{a_{\rho}(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}_{\rho}(\lambda) \\ -b_{\rho}(\lambda) & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

В теории рассеяния для вспомогательной линейной задачи матрица  $S_{\rho}(\lambda)$  играет роль *матрицы рассеяния*, а функции  $\frac{1}{a_{\rho}(\lambda)}$  и  $\frac{b_{\rho}(\lambda)}{a_{\rho}(\lambda)}$  имеют смысл *коэффициентов прохождения и отражения* соответственно.

В терминах матриц  $S_{\pm}(x, \lambda)$  асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  — формулы (I.8.28) — (I.8.31) принимают вид:

$$S_+(x, \lambda) E^{-1}(x, k(\lambda)) = S(\theta) \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad (6.9)$$

где  $\lambda$  из  $\Gamma_+$  и  $\text{Im } \lambda > 0$ ,

$$S_+(x, \lambda) E^{-1}(x, k(\lambda)) = \frac{2\lambda}{\omega} \sigma_2 S^{-1}(\theta) \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad (6.10)$$

где  $\lambda$  из  $\Gamma_+$  и  $\text{Im } \lambda < 0$ , а также

$$S_-(x, \lambda) E^{-1}(x, k(\lambda)) = e^{-i\theta/2} S(\theta) \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad (6.11)$$

где  $\lambda$  из  $\Gamma_-$  и  $\text{Im } \lambda < 0$ ,

$$S_-(x, \lambda) E^{-1}(x, k(\lambda)) = \frac{2\lambda}{\omega} \sigma_2 e^{i\theta/2} S^{-1}(\theta) \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad (6.12)$$

где  $\lambda$  из  $\Gamma_-$  и  $\text{Im } \lambda > 0$ . Напомним, что  $E(x, k) = \exp\left\{\frac{kx\sigma_3}{2i}\right\}$  и мы ввели обозначение

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Рассмотрим теперь матрицы

$$G_+(x, \lambda) = a_{\rho}(\lambda) G(\theta) E(x, k(\lambda)) S_+^{-1}(x, \lambda) \quad (6.14)$$

и

$$G_-(x, \lambda) = S_-(x, \lambda) E^{-1}(x, k(\lambda)) G^{-1}(\theta), \quad (6.15)$$

где  $G(\theta) = e^{-i\theta/2} S(\theta)$ . Они аналитически продолжаютя в соответствующие листы  $\Gamma_{\pm}$ , за возможным исключением точек вет-

вления  $\lambda = \pm \omega$  (см. ниже), и дают решение матричной задачи Римана

$$G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda) = G_\rho(x, \lambda), \quad (6.16)$$

где

$$\begin{aligned} G_\rho(x, \lambda) &= G(\theta) E(x, k(\lambda)) G_\rho(\lambda) E^{-1}(x, k(\lambda)) G^{-1}(\theta) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta/2 - ikx} \bar{b}_\rho(\lambda) \\ -e^{i\theta/2 + ikx} b_\rho(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

а

$$G_\rho(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}_\rho(\lambda) \\ -b_\rho(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

(сравни с § 1).

Матрицы  $G_\pm(x, \lambda)$  невырождены на листах  $\Gamma_\pm$ , за исключением точек  $\lambda_j^{(\pm)} = (\lambda_j, \pm)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Более точно, имеют место формулы

$$\det G_+(x, \lambda) = \frac{e^{-i\theta/2} \omega^2}{2k(\lambda - k)} a_\rho(\lambda) \quad (6.19)$$

для  $\lambda$  из  $\Gamma_+$  и

$$\det G_-(x, \lambda) = \frac{2e^{i\theta/2} k(\lambda - k)}{\omega^2} a_\rho^*(\lambda) \quad (6.20)$$

для  $\lambda$  из  $\Gamma_-$ , где  $a_\rho^*(\lambda)$  — аналитическое продолжение функции  $\bar{a}_\rho(\lambda)$  на лист  $\Gamma_-$ ; функции  $a_\rho(\lambda)$  и  $a_\rho^*(\lambda)$  как раз и имеют нули в точках  $\lambda = \lambda_j^{(\pm)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . При этом (см. формулы (1.8.36), (1.9.22) и (6.14) — (6.15))

$$\text{Im } G_+(x, \lambda_j^{(+)}) = \tilde{N}_j^{(+)}(x) \quad (6.21)$$

и

$$\text{Ker } G_-(x, \lambda_j^{(-)}) = \tilde{N}_j^{(-)}(x), \quad (6.22)$$

где  $\tilde{N}_j^{(+)}(x)$  и  $\tilde{N}_j^{(-)}(x)$  — одномерные подпространства в  $\mathbb{C}^2$ , натянутые соответственно на векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\theta/2 + ik_j x} \gamma_j \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2 + ik_j x} \gamma_j \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\gamma_j = -\bar{\gamma}_j$  — коэффициенты перехода дискретного спектра, а  $k_j = i\sqrt{\omega^2 - \lambda_j^2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Таким образом, равенство (6.16) представляет собой задачу Римана с нулями на поверхности  $\Gamma$ . Продолжим перечисление свойств матриц  $G_\rho(x, \lambda)$  и  $G_\pm(x, \lambda)$ , участвующих в этой задаче.

Начнем с матрицы  $G_\rho(x, \lambda)$  и чисел  $\lambda_j, \gamma_j, j = 1, \dots, n$ .

1) Матрица  $G_p(x, \lambda)$  имеет вид (6.17), где функция  $b_p(\lambda)$  допускает интегральное представление

$$b_p(\lambda) = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_p^{(1)}(x) e^{ikx} dx + \frac{\lambda}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_p^{(2)}(x) e^{ikx} dx, \quad (6.23)$$

где  $\lambda$  из  $\mathcal{P}_\omega$ , а  $\beta_p^{(1,2)}(x)$  — вещественнозначные шварцевские функции. (Это представление получается из (1.9.15) в результате интегрирования по частям.)

Отсюда, в частности, получаем, что матрица  $G_p(x, \lambda)$  имеет асимптотику при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$G_p(x, \lambda) = I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (6.24)$$

и удовлетворяет инволюции

$$G_p(x, \lambda - i0) = \sigma_3 Q^{-1}(\theta) \overline{G_p(x, \lambda + i0)} Q(\theta) \sigma_3. \quad (6.25)$$

2) Парно несовпадающие вещественные числа  $\lambda_j$  лежат в лакуне  $-\omega < \lambda_j < \omega$ , а числа  $\gamma_j \neq 0$  — чисто мнимые,  $j=1, \dots, n$ .

Следующие три свойства характеризуют связь функции  $b_p(\lambda)$  и параметров  $\lambda_j, \gamma_j$  (см. § 1.9). Именно, имеют место:

- 3) условие  $(\theta)$ ;
- 4) условие выбора знаков;
- 5) соотношение связи

$$\text{sign } i\gamma_j = \text{sign } \frac{da_p}{d\lambda}(\lambda_j), \quad (6.26)$$

где функция  $a_p(\lambda)$  строится по  $b_p(\lambda)$ ,  $\theta$  и числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  по формуле

$$a_p(\lambda) = e^{\frac{i\theta}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{\lambda + k - \lambda_j - k_j}{\lambda + k - \lambda_j + k_j} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_p(\mu)|^2)}{k(\mu)} \left( 1 + \frac{k}{\mu - \lambda} \right) d\mu \right\}. \quad (6.27)$$

Матрицы  $G_\pm(x, \lambda)$ , помимо сформулированного выше свойства вырождения, обладают следующими свойствами.

1) Асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$G_\pm(x, \lambda) = I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (6.28)$$

где, соответственно,  $\lambda$  из  $\Gamma_\pm$  и  $\pm \text{Im } \lambda > 0$ ; в случае  $\pm \text{Im } \lambda < 0$  имеем

$$G_+(x, \lambda) = \frac{\omega}{2\lambda} G^2(\theta) \sigma_2 \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \quad (6.29)$$

и

$$G_-(x, \lambda) = \frac{2\lambda}{\omega} \sigma_2 G^{-2}(\theta) \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right). \quad (6.30)$$

2) Свойства инволюции при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ 

$$G_+(x, \lambda - i0) = \frac{\omega}{i(\lambda + k)} \sigma_3 G^2(\theta) \overline{G}_+(x, \lambda + i0) \sigma_1, \quad (6.31)$$

$$G_-(x, \lambda - i0) = \frac{i(\lambda + k)}{\omega} \sigma_1 \overline{G}_-(x, \lambda + i0) G^{-2}(\theta) \sigma_3, \quad (6.32)$$

согласованные с асимптотиками (6.28) — (6.30).

3) Асимптотики при  $|x| \rightarrow \infty$  и  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$ 

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = Q^{-1}(\theta) E_\rho(\lambda) \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ \frac{b_\rho(\lambda)}{a_\rho(\lambda)} e^{i\theta/2 + ikx} & \frac{1}{a_\rho(\lambda)} \end{pmatrix} + o(1), \quad (6.33)$$

$$G_-(x, \lambda) = Q^{-1}(\theta) E_\rho(\lambda) \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & \overline{b}_\rho(\lambda) e^{-ikx} \\ 0 & \overline{a}_\rho(\lambda) \end{pmatrix} + o(1) \quad (6.34)$$

при  $x \rightarrow +\infty$  и

$$G_+^{-1}(x, \lambda) = E_\rho(\lambda) \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta/2}}{a_\rho(\lambda)} & -\frac{\overline{b}_\rho(\lambda)}{a_\rho(\lambda)} e^{-ikx} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + o(1), \quad (6.35)$$

$$G_-(x, \lambda) = E_\rho(\lambda) \begin{pmatrix} \overline{a}_\rho(\lambda) e^{i\theta/2} & 0 \\ -b_\rho(\lambda) e^{i\theta/2 + ikx} & 1 \end{pmatrix} + o(1) \quad (6.36)$$

при  $x \rightarrow -\infty$ . Здесь  $E_\rho(\lambda) = E_\rho(x, \lambda)|_{x=0}$  и  $Q(\theta) = \exp \frac{i\theta\sigma_3}{2}$ .4) Поведение в точках ветвления  $\lambda = \pm\omega$ .

Формулировка этого свойства зависит от поведения функции  $b_\rho(\lambda)$  при  $\lambda = \pm\omega$ . Рассмотрим сначала случай  $\lambda = \omega$ . Мы имеем две возможности.

а) Виртуальный уровень

$$|b_\rho(\omega)| < \infty. \quad (6.37)$$

В этом случае матрицы  $G_-(x, \omega)$  и  $G_+^{-1}(x, \omega)$  вырождаются и при этом

$$\text{Ker } G_+^{-1}(x, \omega) = N_\omega^{(+)}, \quad \text{Ker } G_-(x, \omega) = N_\omega^{(-)}, \quad (6.38)$$

где  $N_\omega^{(+)}$  и  $N_\omega^{(-)}$  — одномерные подпространства в  $\mathbb{C}^2$ , натянутые соответственно на векторы  $\begin{pmatrix} 1 \\ -c_+ e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} c_+ e^{-\frac{i\theta}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$ , а

$$c_+ = b_\rho(\omega) + ia_\rho(\omega) \quad (6.39)$$

(см. формулу (I.9.9)). При этом в силу (I.9.13)  $c_+ = -\overline{c}_+$ .

б) *Случай общего положения*

$$b_p(\lambda) = \frac{b_+}{k} + O(1), \quad b_+ \neq 0, \quad (6.40)$$

в окрестности  $\lambda = \omega$ . Здесь матрица  $G_-(x, \omega)$  невырожденна, а матрица  $G_+(x, \lambda)$  в окрестности  $\lambda = \omega$  представляется в виде

$$G_+(x, \lambda) = \frac{G_+(x)}{k} + O(1) \quad (6.41)$$

с некоторой невырожденной матрицей  $G_+(x)$  (см. формулы (I.9.11) и (6.19)—(6.20)).

Случай  $\lambda = -\omega$  описывается аналогично. Если  $\lambda = -\omega$  — виртуальный уровень, то константа  $c_+$  вида (6.39) заменяется на

$$c_- = b_p(-\omega) - ia_p(-\omega). \quad (6.42)$$

Приведенная формулировка задачи Римана и свойства матриц  $G_p(x, \lambda)$  и  $G_{\pm}(x, \lambda)$  выглядят сложнее, чем аналогичные свойства для задачи Римана в быстроубывающем случае. Это связано в первую очередь с характером непрерывного спектра вспомогательной линейной задачи и, в особенности, с тем, что этот спектр имеет лауну — интервал  $-\omega < \lambda < \omega$ .

Перечисленные свойства матриц  $G_p(x, \lambda)$  и  $G_{\pm}(x, \lambda)$  были фактически получены в § I.8—I.9 при исследовании вспомогательной линейной задачи. Перейдем теперь к решению обратной задачи. Оно основано на матричной задаче Римана с нулями:

$$G_p(x, \lambda) = G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda), \quad (6.43)$$

причем матрица  $G_p(x, \lambda)$ , нули  $\lambda_j$ , константы  $\gamma_j$  и параметр  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , играют роль данных задачи Римана, а матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  дают ее решение. Переменная  $x$  является параметром в этой задаче.

*Именно, будем считать, что данные  $G_p(x, \lambda)$ ,  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$  и  $\theta$  удовлетворяют условиям 1)—5). Решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$  ищутся в классах матриц, аналитических на листах  $\Gamma_{\pm}$  (за возможным исключением точек ветвления), удовлетворяющих условиям вырождения (6.21)—(6.22) и обладающих свойствами 1)—2) и 4).*

*Тогда утверждается следующее.*

I. *Задача Римана однозначно разрешима.*

II. *Матрицы  $S_{\pm}(x, \lambda)$ , построенные по решениям  $G_{\pm}(x, \lambda)$  по формулам (6.14)—(6.15), удовлетворяют дифференциальному уравнению вспомогательной линейной задачи*

$$\frac{dS_{\pm}(x, \lambda)}{dx} = \left( \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0(x) \right) S_{\pm}(x, \lambda), \quad (6.44)$$

где

$$U_0(x) = \sqrt{x} (\bar{\Psi}(x) \sigma_+ + \Psi(x) \sigma_-). \quad (6.45)$$



III. Решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$  имеют асимптотики при  $x \rightarrow \pm \infty$ , предписанные свойством 3).

IV. Функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  удовлетворяют граничным условиям конечной плотности

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \rho, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \rho e^{i\theta}, \quad (6.46)$$

где  $\rho = \frac{\omega}{2\sqrt{\lambda}}$  и граничные значения принимаются в смысле Шварца.

V. Функции  $a_p(\lambda)$  и  $b_p(\lambda)$ , где  $a_p(\lambda)$  дается формулой (6.27), являются коэффициентами перехода непрерывного спектра вспомогательной линейной задачи (6.44), а матрицы  $S_{\pm}(x, \lambda)$  составлены из соответствующих решений Йоста по формулам (6.5)–(6.6). Дискретный спектр вспомогательной линейной задачи состоит из набора чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , а величины  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  играют роль соответствующих коэффициентов перехода.

Доказательство сформулированных утверждений может быть проведено по схеме § 2. При этом, поскольку риманова поверхность  $\Gamma$  имеет род 0, удобно перейти к униформизирующей переменной  $z$  из § 1.9

$$\lambda(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{\omega^2}{z} \right), \quad k(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{\omega^2}{z} \right), \quad (6.47)$$

так что контур  $\mathcal{R}_0$  переходит в вещественную ось на комплексной  $z$ -плоскости. Листы  $\Gamma_{\pm}$  переходят в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно; окрестность точки  $\lambda = \infty$  на  $\Gamma_{\pm}$  с условием  $\pm \operatorname{Im} \lambda > 0$  переходит в окрестность точки  $z = \infty$ , а окрестность точки  $\lambda = \infty$  на  $\Gamma_{\pm}$  с условием  $\pm \operatorname{Im} \lambda < 0$  — в окрестность точки  $z = 0$ . Инволюции  $\lambda - i0 \rightarrow \lambda + i0$  на  $\mathcal{R}_0$  при таком отображении отвечает инволюция  $z \rightarrow \omega^2/z$  вещественной прямой.

Из формул (I.8.13) (I.8.14) и (I.9.14) для функций  $G_{\pm}(x, z) = G_{\pm}(x, \lambda(z))$  имеем интегральные представления

$$G_+(x, z) = \frac{z^2}{z^2 - \omega^2} \left( I - \frac{\omega}{z} G^2(\theta) \sigma_2 + \int_0^{\infty} \Phi_+^{(1)}(x, s) e(s, z) ds + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \Phi_+^{(2)}(x, s) e(s, z) ds \right) \quad (6.48)$$

и

$$G_-(x, z) = I + \frac{\omega}{z} \sigma_2 G^{-2}(\theta) + \int_0^{\infty} \Phi_-^{(1)}(x, s) e(s, z) ds + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \Phi_-^{(2)}(x, s) e(s, z) ds, \quad (6.49)$$

где

$$e(s, z) = e^{2iskz} = e^{is \left( z - \frac{\omega^2}{z} \right)}. \quad (6.50)$$

Эти интегральные представления обобщают соответствующие формулы (1.36) для быстроубывающего случая. В них явно учтены как асимптотики (6.28)—(6.30), так и особенности матрицы  $G_+(x, z)$  при  $z = \pm \omega$  (см. условие 4)).

Интегральные представления (6.48)—(6.49) и являются основой для доказательства утверждений I—V. Используя их, можно получить систему интегральных уравнений, заменяющую исходную задачу Римана и являющуюся аналогом уравнения Винера—Хопфа в быстроубывающем случае (см. § 2). В нашем случае, однако, возникают дополнительные технические осложнения. Во-первых, следует отдельно рассматривать случаи различного поведения  $b_p(\lambda)$  в точках ветвления  $\lambda = \pm \omega$ ; всего имеется четыре возможности. Во-вторых, в силу свойств 3)—5) данные дискретного спектра  $\lambda_j, \gamma_j$  не независимы от данных непрерывного спектра  $b_p(\lambda)$ ; в частности, в случае виртуального уровня они участвуют в характеристике поведения матрицы  $G_+^{-1}(x, \lambda)$  при  $\lambda = \pm \omega$  (см. условие 4)). Тем самым решение задачи Римана с нулями нельзя представить в виде произведения множителей Бляшке—Потапова и решения регулярной задачи Римана с теми же данными непрерывного спектра (сравни с § 2).

Поэтому подробное исследование задачи Римана (6.43) по схеме из § 2 выглядит весьма громоздко и не является столь показательным, чтобы его приводить здесь со всеми деталями. Вместо этого в следующем параграфе мы более подробно рассмотрим другой подход к решению обратной задачи, основанный на формализме Гельфанда—Левитана—Марченко и также приводящий к доказательству утверждений I—V.

В заключение этого параграфа укажем, что, аналогично § 3, метод задачи Римана позволяет доказать, что *если данные  $b_p(\lambda), \lambda_j, \gamma_j$  зависят от  $t$  согласно формулам (1.10.7)*

$$b_p(\lambda, t) = e^{-i\lambda k t} b_p(\lambda, 0), \quad \gamma_j(t) = e^{-i\lambda_j k j t} \gamma_j(0), \quad (6.51)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad j = 1, \dots, n,$$

то построенная по ним функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению НШ для граничных условий конечной плотности.

Для этого следует включить в задачу Римана (6.43) зависимость от  $t$ :

$$G_p(x, t, \lambda) = G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda), \quad (6.52)$$

где

$$G_p(x, t, \lambda) = E^{-1}(t, \lambda k(\lambda)) G_p(x, \lambda) E(t, \lambda k(\lambda)). \quad (6.53)$$

Рассматривая вытекающее из (6.52)—(6.53) равенство

$$\frac{\partial F_+}{\partial t}(x, t, \lambda) F_+^{-1}(x, t, \lambda) = \frac{\partial F_-}{\partial t}(x, t, \lambda) F_-^{-1}(x, t, \lambda), \quad (6.54)$$

где

$$F_{\pm}(x, t, \lambda) = S_{\pm}(x, t, \lambda) E^{-1}(t, \lambda k(\lambda)), \quad (6.55)$$

и действуя по аналогии с § 3, получаем, что эти матрицы, наряду с уравнением по  $x$

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F_{\pm}, \quad (6.56)$$

удовлетворяют также и уравнению по  $t$

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial t} = V_{\rho}(x, t, \lambda) F_{\pm}, \quad (6.57)$$

где матрица  $V_{\rho}(x, t, \lambda)$  совпадает с введенной в § 1.2.

*Таким образом, и в случае конечной плотности метод задачи Римана приводит к условию нулевой кривизны, так что построенная в результате решения обратной задачи функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению НШ.*

### § 7. Решение обратной задачи для случая конечной плотности. Формализм Гельфанда — Левитана — Марченко

Здесь мы изложим второй способ решения обратной задачи. В отличие от первого подхода, основанного на задаче Римана об аналитической факторизации матриц-функций, он использует специальную задачу сопряжения аналитических вектор-функций, вытекающую из формулы связи (6.1) решений Юста.

В терминах переменной  $z$  эта формула записывается в виде

$$T_{-}(x, z) = T_{+}(x, z) T_{\rho}(z), \quad (7.1)$$

где  $\text{Im} z = 0$  и

$$T_{\pm}(x, z) = T_{\pm}(x, \lambda(z)), \quad T_{\rho}(z) = T_{\rho}(\lambda(z)). \quad (7.2)$$

Инволюции (6.3) — (6.4) выглядят следующим образом:

$$T_{\pm}\left(x, \frac{\omega^2}{z}\right) = \frac{iz}{\omega} \sigma_1 \bar{T}_{\pm}(x, z) \sigma_3, \quad (7.3)$$

$$T_{\rho}\left(\frac{\omega^2}{z}\right) = \sigma_3 \bar{T}_{\rho}(z) \sigma_3. \quad (7.4)$$

Для формулировки нужной нам задачи сопряжения рассмотрим соотношение (7.1) для первого столбца  $T_{-}^{(1)}(x, z)$  матрицы  $T_{-}(x, z)$ , которое перепишем в виде

$$\frac{1}{a_{\rho}(z)} T_{-}^{(1)}(x, z) = T_{+}^{(1)}(x, z) + r_{\rho}(z) T_{+}^{(2)}(x, z), \quad (7.5)$$

где введено обозначение

$$r_p(z) = \frac{b_p(z)}{a_p(z)} \quad (7.6)$$

(сравни с § 4).

Вектор-функция  $F_1(x, z) = \frac{1}{a_p(z)} T_-^{(1)}(x, z)$ , участвующая в левой части равенства (7.5), аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной  $z$ , за исключением точек  $z = z_j = \lambda_j + i\sqrt{\omega^2 - \lambda_j^2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где она имеет простые полюса, и точки  $z = 0$ , в которой имеется существенная особенность. В силу соотношения (I.9.22)

$$T_-^{(1)}(x, z_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, z_j) \quad (7.7)$$

получаем, что

$$\text{res } F_1(x, z) |_{z=z_j} = c_j T_+^{(2)}(x, z_j), \quad (7.8)$$

где

$$c_j = \frac{\gamma_j}{a_p(z_j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.9)$$

а точка означает производную по  $z$ .

В окрестности точки  $z = 0$  для  $\text{Im } z \geq 0$  из формул (I.8.28), (I.8.33) и (I.9.5) для функции  $F_1(x, z)$  получаем асимптотику

$$F_1(x, z) e\left(\frac{x}{4}, z\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\omega}{z} e^{i\theta/2} \end{pmatrix} + O(1), \quad (7.10)$$

где мы использовали обозначение  $e(x, z)$ , введенное в § 6. Из формул (I.8.28), (I.8.32) и (I.9.4) получаем асимптотику при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } z \geq 0$

$$F_1(x, z) e\left(\frac{x}{4}, z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \quad (7.11)$$

Рассмотрим теперь правую часть равенства (7.5). Первое слагаемое в ней — вектор-функция  $T_+^{(1)}(x, z)$  — аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость переменной  $z$ , за исключением точки  $z = 0$ , в которой имеется существенная особенность. Из формул (I.8.30), (I.8.32) — (I.8.33) и (I.9.4) — (I.9.5) получаем для  $\text{Im } z \leq 0$  асимптотики при  $z \rightarrow 0$

$$T_+^{(1)}(x, z) e\left(\frac{x}{4}, z\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\omega}{z} e^{i\theta/2} \end{pmatrix} + O(1) \quad (7.12)$$

и при  $|z| \rightarrow \infty$

$$T_+^{(1)}(x, z) e\left(\frac{x}{4}, z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \quad (7.13)$$

Столбец  $T_+^{(2)}(x, z)$ , участвующий во втором слагаемом, аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной  $z$  и связан со столбцом  $T_+^{(1)}(x, z)$  с помощью инволюции (I.8.36)

$$T_+^{(2)}(x, z) = \sigma_1 \bar{T}_+^{(1)}(x, \bar{z}). \quad (7.14)$$

Соотношение (7.5) вместе со сформулированными условиями аналитичности, свойствами (7.8), (7.14) и асимптотиками (7.10)—(7.13) и представляет собой искомую специальную задачу сопряжения. При этом заданными считаются функция  $r_\rho(z)$ , определенная на вещественной оси, и параметры  $z_j, c_j, j=1, \dots, n$ . Данные  $r_\rho(z)$  и  $z_j, c_j$  не являются независимыми. Они удовлетворяют следующим условиям, вытекающим из результатов § I.9.

1) Функция  $r_\rho(z)$  принадлежит пространству Шварца и вместе со всеми производными исчезает при  $z=0$ .

Это следует из аналогичного свойства функции  $b_\rho(z)$  (см. интегральное представление (6.23)).

2) Свойство инволюции

$$r\left(\frac{\omega^2}{z}\right) = -\bar{r}_\rho(z) \quad (7.15)$$

(см. (7.4)).

3) Имеет место неравенство

$$|r_\rho(z)| \leq 1, \quad (7.16)$$

причем знак равенства может достигаться лишь в точках  $z = \pm \omega$ , и тогда

$$r_\rho(\pm \omega) = \mp i \quad (7.17)$$

— случай общего положения.

Оно следует из соотношения нормировки

$$|r_\rho(z)|^2 = 1 - \frac{1}{|a_\rho(z)|^2} = \frac{|b_\rho(z)|^2}{1 + |b_\rho(z)|^2} \quad (7.18)$$

и свойства (I.9.11), имеющего место в случае  $|a_\rho(\pm \omega)| = \infty$ .

4) Условие ( $\theta$ )

$$e^{t\theta} = \prod_{j=1}^n \frac{\bar{z}_j}{z_j} \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r_\rho(z)|^2)}{z} dz \right\}. \quad (7.19)$$

Оно представляет собой вариант записи формулы (I.9.44) с использованием равенства

$$1 + |b_\rho(z)|^2 = \frac{1}{1 - |r_\rho(z)|^2}. \quad (7.20)$$

Здесь  $|z_j| = \omega$  в силу того, что вещественные числа  $\lambda_j$  лежат в лакуне  $(-\omega, \omega)$ .

5) Условие положительности — величины  $m_j = -c_j/z_j, j=1, \dots, \dots, n$ , являются вещественными положительными числами. Оно следует из равенств

$$c_j = \frac{\gamma_j}{\left. \frac{da_p(z)}{dz} \right|_{z=z_j}} = \frac{\gamma_j}{\left. \frac{da_p(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j}}, \quad (7.21)$$

$$\frac{d\lambda(z)}{dz} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{z^2} \right) \quad (7.22)$$

и соотношения связи (6.26)

$$\text{sign } i\gamma_j = \text{sign } \frac{da_p}{d\lambda}(\lambda_j), \quad j=1, \dots, n \quad (7.23)$$

(см. § I.9).

Формулировка задачи сопряжения для случая конечной плотности (так же как и задачи Римана в § 6) выглядит более громоздко, чем соответствующая задача для быстроубывающего случая в § 4. Однако, в отличие от задачи Римана, ее исследование вполне аналогично быстроубывающему случаю и проводится при помощи сведения ее к системе интегральных уравнений.

Для вывода этой системы воспользуемся интегральными представлениями (I.8.13)—(I.8.14) для решений Юста

$$T_+(x, z) = Q^{-1}(0) E_p(x, z) + \int_x^\infty \Gamma_+(x, y) Q^{-1}(0) E_p(y, z) dy \quad (7.24)$$

и

$$T_-(x, z) = E_p(x, z) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, y) E_p(y, z) dy, \quad (7.25)$$

где

$$E_p(x, z) = E_p(x, \lambda(z)) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\omega}{z} \\ \frac{i\omega}{z} & 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{ix}{4} \left( z - \frac{\omega^2}{z} \right) \sigma_3} \quad (7.26)$$

(см. формулу (I.8.9)). Подставим теперь эти представления в (7.5), вычтем из обеих частей этого равенства первый столбец  $\mathcal{E}_p(x, z)$  матрицы  $Q^{-1}(0) E_p(x, z)$

$$\mathcal{E}_p(x, z) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ \frac{i\omega}{z} e^{i\theta/2} \end{pmatrix} e \left( -\frac{x}{4}, z \right), \quad (7.27)$$

умножим обе части получившегося соотношения на функцию  $e(y/4, z)$ ,  $y \geq x$ , и проинтегрируем его по  $z$  от  $-\infty$  до  $\infty$  (сравни с действиями в § 4). Вычислим возникающие при этом интегралы.

Рассмотрим сначала левую часть, обозначив ее через  $L$ . Из асимптотик (7.10)–(7.11) следует, что вектор-функция  $(F_+(x, z) - \mathcal{E}_\rho(x, z))e(x/4, z)$  регулярна при  $z=0$  и при  $|z| \rightarrow \infty$  имеет порядок  $O(1/|z|)$ . Поэтому, используя (7.8) и лемму Жордана, заключаем, что

$$L = 2\pi i \sum_{j=1}^n c_j T_+^{(z)}(x, z_j) e\left(\frac{y}{4}, z_j\right). \quad (7.28)$$

Рассмотрим правую часть, обозначив ее через  $R$ . Здесь мы встречаемся с интегралами  $\int_{-\infty}^{\infty} e(x, z) dz$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} e(x, z) \frac{dz}{z}$ , понимаемыми в смысле обобщенных функций. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e(x, z) dz &= \int_0^{\infty} e^{i\left(z - \frac{\omega^2}{z}\right)x} dz + \int_{-\infty}^0 e^{i\left(z - \frac{\omega^2}{z}\right)x} dz = \\ &= \int_0^{\infty} e^{i\left(z - \frac{\omega^2}{z}\right)x} \left(1 + \frac{\omega^2}{z^2}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi \delta(x), \end{aligned} \quad (7.29)$$

где во втором интеграле в первом равенстве мы совершили замену переменной  $z \mapsto -\omega^2/z$ . Аналогичным образом доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(x, z) \frac{dz}{z} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e(x, z) \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi}{\omega^2} \delta(x). \quad (7.30)$$

С помощью этих формул получаем

$$R = 8\pi e^{-i\theta y} \left( \Gamma_+(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(x+y) \\ \tilde{\eta}(x+y) \end{pmatrix} + \int_x^{\infty} \Gamma_+(x, s) \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s+y) \\ \tilde{\eta}(s+y) \end{pmatrix} ds \right), \quad (7.31)$$

где

$$\tilde{\xi}(x) = \frac{\omega}{8\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} r_\rho(z) e\left(\frac{x}{4}, z\right) \frac{dz}{z}, \quad (7.32)$$

$$\tilde{\eta}(x) = \frac{e^{i\theta}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_\rho(z) e\left(\frac{x}{4}, z\right) dz. \quad (7.33)$$

Используя теперь равенство  $L=R$  и представление (7.24), получаем уравнение

$$\Gamma_+(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(x+y) \\ \eta(x+y) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \Gamma_+(x, s) \begin{pmatrix} \xi(s+y) \\ \eta(s+y) \end{pmatrix} ds = 0, \quad (7.34)$$

где  $y \geq x$  и

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(x) \\ \tilde{\eta}(x) \end{pmatrix} + \frac{1}{4i} \sum_{j=1}^n c_j \begin{pmatrix} \omega \\ iz_j \\ e^{t^j} \end{pmatrix} e\left(\frac{x}{4}, z_j\right). \quad (7.35)$$

Вспоминая инволюции (I.8.26) — (I.8.27)

$$\bar{\Gamma}_\pm(x, y) = \sigma_1 \Gamma_\pm(x, y) \sigma_1, \quad (7.36)$$

мы можем записать уравнение (7.34) в матричном виде

$$\Gamma_+(x, y) + \Omega(x+y) + \int_x^\infty \Gamma_+(x, s) \Omega(s+y) ds = 0, \quad (7.37)$$

где  $y \geq x$  и

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) & \bar{\eta}(x) \\ \eta(x) & \xi(x) \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

Здесь мы учли, что в силу инволюции (7.15) и условия положительности функция  $\xi(x)$  вещественнозначна

Соотношение (7.37) представляет собой интегральное уравнение для матрицы  $\Gamma_+(x, y)$  и называется *уравнением Гельфанда — Левитана — Марченко для правого конца*. Отметим, что по форме оно вполне аналогично уравнению Гельфанда — Левитана — Марченко для быстроубывающего случая из § 4. Однако матрица  $\Omega(x)$  здесь не антидиагональна, а имеет диагональную часть, пропорциональную единичной матрице.

Матрица  $U_0(x)$ , участвующая во вспомогательной линейной задаче

$$\frac{dT_\pm}{dx}(x, \lambda) = \left( \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0(x) \right) T_\pm(x, \lambda), \quad (7.39)$$

выражается через решение  $\Gamma_\pm(x, y)$  по формуле (I.8.17)

$$U_0(x) = U_+ + \sigma_3 \Gamma_+(x, x) \sigma_3 - \Gamma_+(x, x), \quad (7.40)$$

где

$$U_+ = Q^{-1}(\theta) U_- Q(\theta), \quad U_- = \frac{\omega}{2} \sigma_1. \quad (7.41)$$

Аналогичным образом, рассматривая вытекающее из (7.1) соотношение

$$\frac{1}{a_\rho(z)} T_+^{(2)}(x, z) = \tilde{r}_\rho(z) T_-^{(1)}(x, z) + T_-^{(2)}(x, z), \quad (7.42)$$



где

$$\tilde{r}_\rho(z) = -\frac{\bar{b}_\rho(z)}{a_\rho(z)}, \quad (7.43)$$

и интерпретируя его как соответствующую задачу сопряжения, приходим к уравнению Гельфанда — Левитана — Марченко для левого конца

$$\Gamma_-(x, y) + \tilde{\Omega}(x+y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, s) \tilde{\Omega}(s+y) ds = 0, \quad y \leq x. \quad (7.44)$$

Здесь ядро  $\tilde{\Omega}(x)$  имеет вид

$$\tilde{\Omega}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(x) & \tilde{\eta}(x) \\ \tilde{\eta}(x) & \tilde{\xi}(x) \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

где

$$\tilde{\xi}(x) = \frac{i\omega}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_\rho(z) e\left(-\frac{x}{4}, z\right) \frac{dz}{z} + \frac{\omega}{4} \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{c}_j}{z_j} e\left(-\frac{x}{4}, z_j\right) \quad (7.46)$$

и

$$\tilde{\eta}(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_\rho(z) e\left(-\frac{x}{4}, z\right) dz + \frac{1}{4i} \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j e\left(-\frac{x}{4}, z_j\right), \quad (7.47)$$

а

$$\tilde{c}_j = \frac{1}{\gamma_j a_\rho(z_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.48)$$

В формуле (7.45) уже учтено, что в силу инволюции (7.15) и условия положительности функция  $\tilde{\xi}(x)$  вещественнозначна.

Матрица  $U_\rho(x)$  выражается через решение  $\Gamma_-(x, y)$  по формуле (I.8.17):

$$U_\rho(x) = U_- + \Gamma_-(x, x) - \sigma_3 \Gamma_-(x, x) \sigma_3. \quad (7.49)$$

Интегральные уравнения (7.37) и (7.44) составляют основу решения обратной задачи для случая конечной плотности по методу Гельфанда — Левитана — Марченко. Будем считать, что заданы функции  $r_\rho(z)$ ,  $\tilde{r}_\rho(z)$  и набор чисел  $z_j$ ,  $c_j$ ,  $\tilde{c}_j$  и  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , удовлетворяющие следующим свойствам.

1. Набор  $\{r_\rho(z), z_j, c_j, j = 1, \dots, n\}$  удовлетворяет условиям 1) — 5).

2. Функции  $r_\rho(z)$  и  $\tilde{r}_\rho(z)$  связаны соотношением

$$\frac{\tilde{r}_\rho(z)}{r_\rho(z)} = -\frac{\bar{a}_\rho(z)}{a_\rho(z)}, \quad (7.50)$$

где

$$a_p(z) = e^{\frac{i0}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r_p(s)|^2)}{z - s + i0} ds \right\}. \quad (7.51)$$

3. Коэффициенты  $c_j$  и  $\tilde{c}_j$  удовлетворяют равенству

$$c_j \tilde{c}_j = \frac{1}{\tilde{a}_p^2(z_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.52)$$

Тогда утверждается следующее.

I. Уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (7.37) и (7.44) однозначно разрешимы в пространствах  $L_1^{(2 \times 2)}(x, \infty)$  и  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ . При этом их решения — матрицы  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  являются, соответственно, функциями типа Шварца при  $x, y \rightarrow \pm\infty$ .

II. Построенные по  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  по формулам (7.24) — (7.25) матрицы  $T_{\pm}(x, z)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dT_{\pm}(x, z)}{dx} = \left( \frac{\lambda(z) \sigma_3}{2i} + U_0^{(\pm)}(x) \right) T_{\pm}(x, z), \quad (7.53)$$

где матрицы  $U_0^{(+)}(x)$  и  $U_0^{(-)}(x)$  даются, соответственно, правыми частями формул (7.40) и (7.49).

III. Матрицы  $U_0^{(\pm)}(x)$  представляются в виде

$$U_0^{(\pm)}(x) = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}_{\pm}(x) \\ \psi_{\pm}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.54)$$

где функции  $\psi_{\pm}(x)$  имеют асимптотики

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_{-}(x) = \rho, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_{+}(x) = e^{i0} \rho, \quad \rho = \frac{\omega}{2\sqrt{\kappa}}, \quad (7.55)$$

причем граничные значения принимаются в смысле Шварца.

IV. Имеет место равенство

$$U_0^{(+)}(x) = U_0^{(-)}(x) = U_0(x), \quad (7.56)$$

так что матрица  $U_0(x)$  удовлетворяет граничным условиям конечной плотности.

V. Коэффициенты перехода непрерывного спектра вспомогательной линейной задачи с матрицей  $U_0(x)$  даются функциями  $a_p(\lambda) = a_p(z(\lambda))$  и  $b_p(\lambda) = a_p(\lambda) r_p(z(\lambda))$ , а дискретный спектр состоит из набора собственных значений  $\lambda_j$ ,  $-\omega < \lambda_j < \omega$ , с коэффициентами перехода  $\gamma_j = c_j \tilde{a}_p(z_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Докажем эти утверждения.

I. Однозначная разрешимость уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко.

Рассмотрим, для определенности, уравнение (7.44) и запишем его в операторном виде

$$(I + \Omega_x) \Gamma_x = -\Omega_x, \quad (7.57)$$

где  $\Gamma_x(y) = \Gamma_-(x, y)$  и  $\Omega_x(y) = \tilde{\Omega}(x+y)$  — элементы из пространства  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ ,  $\Omega_x$  — интегральный оператор с ядром  $\tilde{\Omega}(s+y)$ :

$$(\Omega_x f)(y) = \int_{-\infty}^x f(s) \tilde{\Omega}(s+y) ds, \quad (7.58)$$

а переменная  $x$  играет роль параметра. Чтобы не загромождать обозначения, мы опустили индексы — и  $\sim$  у объектов, входящих в уравнение (7.57).

Ядро  $\tilde{\Omega}(s)$  представляет собой функцию типа Шварца при  $s \rightarrow -\infty$ , поэтому оператор  $\Omega_x$  является компактным в  $L^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  и исчезает по норме при  $x \rightarrow -\infty$  (сравни с § 4). Тем самым для однозначной разрешимости уравнения (7.57) достаточно показать, что однородное уравнение

$$\tilde{f} + \Omega_x \tilde{f} = 0 \quad (7.59)$$

имеет только тривиальное решение в пространстве  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ .

Для доказательства рассмотрим сначала это уравнение в гильбертовом пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  квадратично-интегрируемых  $2 \times 2$  матриц-функций со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^x \text{tr} f(s) g^*(s) ds, \quad (7.60)$$

где  $*$  означает эрмитово сопряжение. Оператор  $\Omega_x$  задается в этом пространстве той же формулой (7.58) и является компактным. Используя свойства ядра  $\tilde{\Omega}(s)$ , легко убедиться, что решение уравнения (7.59) из пространства  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  принадлежит также и  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ . Поэтому достаточно показать, что уравнение (7.59) не имеет нетривиальных решений в пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ . На самом деле мы докажем более сильное утверждение — покажем, что оператор  $I + \Omega_x$  положительно определен в пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ .

Предположим сначала, что дискретный спектр отсутствует. Тогда оператор  $\Omega_x$  можно рассматривать как сужение оператора  $\Omega$  в пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ , задаваемого формулой

$$(\Omega f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s') \tilde{\Omega}(s+s') ds'. \quad (7.61)$$

Именно, следует вложить пространство  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  в  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$ , продолжая элементы  $f(s)$  из  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  нулем при  $s \geq x$ . Мы покажем, что положительно определенным является оператор  $I + \Omega$  и, следовательно, оператор  $I + \Omega_x$ .

Представление (7.45) — (7.47) для ядра  $\tilde{\Omega}(x)$  в нашем случае записывается в виде

$$\tilde{\Omega}(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho(x, z) R(z) dz, \quad (7.62)$$

где

$$R(z) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{r}_\rho(z) \\ \tilde{r}_\rho(z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.63)$$

Участвующая здесь матрица  $E_\rho(x, z)$  удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}_\omega} E_\rho(x, z) E_\rho^*(y, z) dz = \delta(x - y) I, \quad (7.64)$$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho^*(x, z) E_\rho(x, z') dx = \delta(z - z') I, \quad (7.65)$$

где  $z$  и  $z'$  из  $\mathbb{R}_\omega$  (т. е.  $|z|, |z'| \geq \omega$ ). Они имеют смысл соотношений полноты и ортогональности для собственных функций дифференциального оператора  $\mathcal{L}_- = i\sigma_3 \frac{d}{dx} + \frac{\omega}{2} \sigma_2$ , который определяет асимптотику дифференциального оператора  $\mathcal{L}$  вспомогательной линейной задачей (см. § 1.9) при  $x \rightarrow -\infty$ .

Доказательство равенства (7.64) использует формулы (7.29) — (7.30) и инволюцию  $z \rightarrow \omega^2/z$ , переводящую  $\mathbb{R}_\omega$  в лакуну  $-\omega \leq z \leq \omega$ . Равенство (7.65) следует из обычного представления  $\delta$ -функции в виде интеграла от экспонент и формулы замены переменной

$$\delta(\varphi(z)) = \sum_l \frac{1}{\left| \frac{d\varphi}{dz}(z_l) \right|} \delta(z - z_l), \quad (7.66)$$

где  $\varphi(z_l) = 0$ . При этом существенно условие, что  $z$  и  $z'$  лежат в  $\mathbb{R}_\omega$ . Если же  $z$  лежит в  $\mathbb{R}_\omega$ , а  $z'$  — в лакуне  $(-\omega, \omega)$ , то вместо (7.65) имеем соотношение

$$\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho^*(x, z) E_\rho(x, z') dx = \frac{\omega}{z} \delta\left(z' - \frac{\omega^2}{z}\right) \sigma_2. \quad (7.67)$$

Формулу (7.64) можно интерпретировать как *условие изометричности оператора*  $E_\rho$ , действующего из пространства  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, \infty)$  в  $L_2^{(2 \times 2)}(\mathbb{R}_\omega)$  по формуле

$$(E_\rho f)(z) = \hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) E_\rho(x, z) dx. \quad (7.68)$$

Сопряженный оператор  $E_\rho^*$  задается формулой

$$(E_\rho^* \hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}_\omega} \hat{f}(z) E_\rho^*(x, z) dz \quad (7.69)$$

и вследствие (7.65) также изометричен, так что мы имеем

$$E_\rho^* E_\rho = I, \quad E_\rho E_\rho^* = I. \quad (7.70)$$

Покажем теперь, что оператор

$$\hat{\Omega} = E_\rho \Omega E_\rho^*, \quad (7.71)$$

подобный оператору  $\Omega$  и действующий в пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(\mathbb{R}_\omega)$ , является оператором умножения на матрицу-функцию:

$$(\hat{\Omega} \hat{f})(z) = \hat{f}(z) R(z). \quad (7.72)$$

Для этого рассмотрим ядро  $\hat{\Omega}(z, z')$  оператора  $\hat{\Omega}$  как обобщенную функцию

$$\hat{\Omega}(z, z') = \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho^*(y, z') E_\rho(x + y, z'') R(z'') E_\rho(x, z) dx dy dz'', \quad (7.73)$$

где использовано представление (7.62) для ядра  $\tilde{\Omega}(x)$ . Переменные  $x$  и  $y$  в  $E_\rho(x + y, z')$  разделяются:

$$E_\rho(x + y, z'') = E_\rho(y, z'') E \left( x, \frac{1}{2} \left( z'' - \frac{\omega^2}{z''} \right) \right), \quad (7.74)$$

после чего интеграл по  $y$  берется с помощью формул (7.65) и (7.67). В результате возникает  $\delta$ -функция, снимающая интегрирование по  $z''$ , и мы получаем

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(z, z') = & \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ E \left( x, \frac{1}{2} \left( z' - \frac{\omega^2}{z'} \right) \right) R(z') + \right. \\ & \left. + \frac{\omega}{z'} \sigma_2 E \left( x, -\frac{1}{2} \left( z' - \frac{\omega^2}{z'} \right) \right) R \left( \frac{\omega^2}{z'} \right) \right] E_\rho(x, z) dx. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Теперь воспользуемся инволюцией

$$R\left(\frac{\omega^2}{z}\right) = \sigma_2 R(z) \sigma_2 \quad (7.76)$$

(см. (7.15)) и пронесем диагональную матрицу  $E(x, \cdot)$  направо через антидиагональные матрицы  $\tilde{R}(\cdot)$  и  $\sigma_2$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(z, z') &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(z') \left[ E\left(x, -\frac{1}{2}\left(z' - \frac{\omega^2}{z'}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{z'} \sigma_2 E\left(x, \frac{1}{2}\left(z' - \frac{\omega^2}{z'}\right)\right) \right] E_\rho(x, z) dx = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(z') E_\rho^*(x, z') E_\rho(x, z) dx = \delta(z - z') R(z), \quad (7.77) \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (7.72).

Положительная определенность оператора  $\mathbf{I} + \Omega$  (и тем самым  $\mathbf{I} + \Omega_x$ ) следует из положительной определенности матрицы

$$I + R(z) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{r}_\rho(z) \\ \overline{\tilde{r}_\rho} & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.78)$$

которая обеспечивается условием

$$|\tilde{r}_\rho(z)| < 1 \quad (7.79)$$

для  $|z| > \omega$  (см. свойство 3) и формулу (7.50)).

Рассмотрим теперь общий случай, когда присутствует и дискретный спектр. Для доказательства положительной определенности оператора  $\mathbf{I} + \Omega_x$  представим его в виде суммы слагаемых, отвечающих непрерывному и дискретному спектру:

$$\mathbf{I} + \Omega_x = \mathbf{I} + \Omega_x^{(c)} + \Omega_x^{(d)}. \quad (7.80)$$

Здесь  $\Omega_x^{(c)}$  и  $\Omega_x^{(d)}$  — интегральные операторы в пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  с ядрами  $\tilde{\Omega}^{(c)}(s+s')$  и  $\tilde{\Omega}^{(d)}(s+s')$  соответственно, где

$$\tilde{\Omega}^{(c)}(s) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho(s, z) R(z) dz, \quad (7.81)$$

$$\tilde{\Omega}^{(d)}(s) = \sum_{j=1}^n C_j e\left(-\frac{s}{4}, z_j\right), \quad (7.82)$$

а эрмитовы  $2 \times 2$  матрицы  $C_j$  имеют вид

$$C_j = \frac{\tilde{m}_j}{4} \begin{pmatrix} \omega & -iz_j \\ i\bar{z}_j & \omega \end{pmatrix} \quad (7.83)$$

и

$$\tilde{m}_j = \frac{\tilde{c}_j}{z_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.84)$$

Представление (7.80) следует из формул (7.45) — (7.47) и соотношения

$$e(s, z_j) = \bar{e}(s, z_j), \quad (7.85)$$

очевидного в силу условия  $|z_j| = \omega$ .

Мы доказали выше, что оператор  $\mathbf{I} + \Omega_x^{(c)}$  является положительно определенным в пространстве  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$ . Поэтому нам достаточно показать, что оператор  $\Omega_x^{(d)}$  неотрицателен. Это, в свою очередь, вытекает из неотрицательности матриц  $C_j$ .

Действительно, в этом случае для произвольного элемента  $f(s)$  из  $L_2^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  имеет место неравенство

$$\langle \Omega_x^{(d)} f, f \rangle = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \operatorname{tr} f(s) C_j f^*(s') e\left(-\frac{s}{4}, z_j\right) \bar{e}\left(-\frac{s'}{4}, z_j\right) ds ds' \geq 0. \quad (7.86)$$

В его справедливости проще всего убедиться, приводя каждую матрицу  $C_j$  к диагональному виду; при этом каждое слагаемое в (7.86) будет, очевидным образом, неотрицательно.

Докажем теперь, что матрицы  $C_j$  неотрицательно определены. В силу условий  $|z_j| = \omega$  эти матрицы вырожденны, поэтому нам достаточно показать, что

$$\tilde{m}_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.87)$$

В справедливости этих неравенств нас убеждают формулы

$$m_j \tilde{m}_j = -\frac{1}{z_j^2 \dot{a}_\rho^2(z_j)} \quad (7.88)$$

и неравенства

$$\frac{1}{z_j^2 \dot{a}_\rho^2(z_j)} < 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.89)$$

которые следуют из условия положительности, условия (θ) и формул (7.15), (7.51).

На этом доказательство положительной определенности оператора  $\mathbf{I} + \Omega_x$ , а вместе с тем и однозначной разрешимости уравнения (7.44) заканчивается.

В заключение отметим, что в силу доказанной теоремы единственности и свойства инволюции для ядра  $\tilde{\Omega}(x)$

$$\bar{\tilde{\Omega}}(x) = \sigma_1 \tilde{\Omega}(x) \sigma_1, \quad (7.90)$$

такому же свойству удовлетворяет и решение  $\Gamma(x, y)$ :

$$\bar{\Gamma}(x, y) = \sigma_1 \Gamma(x, y) \sigma_1. \quad (7.91)$$

Уравнение (7.37) рассматривается аналогичным образом.

II. *Вывод дифференциальных уравнений для матриц  $T_{\pm}(x, z)$ .*

Нам достаточно показать, что матрицы  $\Gamma_{\pm}(x, z)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{\pm}(x, y) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{\pm}(x, y) \sigma_3 - U_0^{(\pm)}(x) \Gamma_{\pm}(x, y) + \sigma_3 \Gamma_{\pm}(x, y) \sigma_3 U_{\pm} = 0, \quad (7.92)$$

где

$$U_0^{(\pm)}(x) = U_{\pm} \mp (\Gamma_{\pm}(x, x) - \sigma_3 \Gamma_{\pm}(x, x) \sigma_3) \quad (7.93)$$

(см. формулы (I.8.15) — (I.8.17)).

Действительно, эти уравнения в рамках исследования вспомогательной линейной задачи были получены в § I.8. Там была указана их эквивалентность дифференциальным уравнениям (7.53) для матриц  $T_{\pm}(x, z)$ , построенных по  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  по формулам (7.24) — (7.26).

Рассмотрим, для определенности, матрицу  $\Gamma_{-}(x, y)$ . Продифференцируем уравнение (7.44) по  $x$  и  $y$  и сложим получившиеся равенства, умножив предварительно последнее из них с двух сторон на матрицу  $\sigma_3$ . Мы получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, y) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(x, y) \sigma_3 + \Omega'(x+y) + \sigma_3 \Omega'(x+y) \sigma_3 + \Gamma(x, x) \Omega(x+y) + \\ & + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, s) \Omega(s+y) + \sigma_3 \Gamma(x, s) \Omega'(s+y) \sigma_3 \right) ds = 0, \quad (7.94) \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по аргументу и для сокращения записи мы опустили индексы — и  $\sim$  у встречающихся объектов.

В этом равенстве участвует матрица  $\sigma_3 \Omega'(x) \sigma_3 + \Omega'(x)$ , пропорциональная единичной матрице. Из представления (7.46) с помощью инволюции (7.15) и условия положительности получаем, что

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \frac{\omega}{4} (\eta(x) + \bar{\eta}(x)), \quad (7.95)$$



откуда с помощью (7.45) имеем

$$\Omega'(x) + \sigma_3 \Omega'(x) \sigma_3 = \frac{\omega}{2} (\sigma_1 \Omega(x) - \sigma_3 \Omega(x) \sigma_3 \sigma_1) = U_- \Omega(x) - \sigma_3 \Omega(x) \sigma_3 U_-, \quad (7.96)$$

где мы учли, что  $U_- = \frac{\omega}{2} \sigma_1$ . Используя это равенство, преобразуем последнее слагаемое в подынтегральном выражении в (7.94):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x \sigma_3 \Gamma(x, s) \Omega'(s+y) \sigma_3 ds = \\ & = - \int_{-\infty}^x \sigma_3 \Gamma(x, s) \sigma_3 \Omega'(s+y) ds + \int_{-\infty}^x \sigma_3 \Gamma(x, s) \sigma_3 (\Omega'(s+y) + \sigma_3 \Omega'(s+y) \sigma_3) ds = \\ & = - \sigma_3 \Gamma(x, x) \sigma_3 \Omega(x+y) + \int_{-\infty}^x \left[ \sigma_3 \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(x, s) \sigma_3 \Omega(s+y) + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_3 \Gamma(x, s) \sigma_3 (U_- \Omega(s+y) - \sigma_3 \Omega(s+y) \sigma_3 U_-) \right] ds, \quad (7.97) \end{aligned}$$

где мы воспользовались интегрированием по частям. С помощью формул (7.93) и (7.96) — (7.97) соотношение (7.94) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, y) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(x, y) \sigma_3 + U_0^{(-)}(x) \Omega(x+y) - \\ & - \sigma_3 \Omega(x+y) \sigma_3 U_- + \int_{-\infty}^x \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, s) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(x, s) \sigma_3 \right) \Omega(s+y) + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_3 \Gamma(x, s) \sigma_3 (U_- \Omega(s+y) - \sigma_3 \Omega(s+y) \sigma_3 U_-) \right] ds = 0. \quad (7.98) \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые  $U_0^{(-)}(x) \Omega(x+y)$  и  $\sigma_3 \Omega(x+y) \sigma_3 U_-$  в левой части этого равенства, заменив матрицу  $\Omega(x+y)$  на правую часть уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко, записанного в виде

$$\Omega(x+y) = - \Gamma(x, y) - \int_{-\infty}^x \Gamma(x, s) \Omega(s+y) ds. \quad (7.99)$$

Вводя обозначение

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, y) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(x, y) \sigma_3 - U_0^{(-)}(x) \Gamma(x, y) + \sigma_3 \Gamma(x, y) \sigma_3 U_-, \quad (7.100)$$

перепишем формулу (7.98) в виде соотношения

$$\Phi(x, y) + \int_{-\infty}^x \Phi(x, s) \Omega(s+y) ds = 0. \quad (7.101)$$

которое означает, что  $\Phi(x, y)$  как функция  $y$  удовлетворяет однородному уравнению (7.59). Вследствие доказанной теоремы единственности получаем, что

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (7.102)$$

при всех  $x, y, y \leq x$ ; это и доказывает справедливость уравнения (7.92).

Уравнение для матрицы  $\Gamma_+(x, y)$  доказывается аналогично.

III. *Поведение матриц  $U_0^{(\pm)}(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .*

Представления (7.40) и (7.49) показывают, что матрицы  $U_0^{(\pm)}(x)$  антидиагональны, а инволюция (7.91) обеспечивает их специальный вид (7.54).

Исследование асимптотик ненулевых матричных элементов матриц  $U_0^\pm(x)$  основано на следующем соображении. Нормы операторов  $\Omega_x$  и  $\tilde{\Omega}_x$  исчезают соответственно при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ , поэтому при таких  $x$  к интегральным уравнениям (7.37) и (7.44) применим метод последовательных приближений. Каждая итерация является функцией типа Шварца при  $x, y \rightarrow \pm\infty$ , и этим свойством обладают и решения  $\Gamma_\pm(x, y)$ . В частности, матрицы  $\Gamma_\pm(x, x)$  являются функциями типа Шварца при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Отсюда следует требуемое поведение функций  $\psi_\pm(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Заметим также, что указанные свойства ядер  $\Gamma_\pm(x, y)$  приводят к следующим асимптотикам для решений  $T_\pm(x, z)$  при вещественных  $z$ :

$$T_-(x, z) = E_\rho(x, z) + o(1) \quad (7.103)$$

при  $x \rightarrow -\infty$  и

$$T_+(x, z) = Q^{-1}(\theta) E_\rho(x, z) + o(1) \quad (7.104)$$

при  $x \rightarrow +\infty$ .

IV. *Формула согласования  $U_0^{(+)}(x) = U_0^{(-)}(x)$ .*

Для ее доказательства достаточно показать, что матрицы  $T_+(x, z)$  и  $T_-(x, z)$  линейно зависимы, т. е. отличаются правым матричным множителем, не зависящим от  $x$ . Действительно, если это свойство имеет место, то матрицы  $T_\pm(x, z)$  удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и, тем самым, матрицы  $U_0^{(+)}(x)$  и  $U_0^{(-)}(x)$  совпадают как коэффициенты в уравнениях (7.53).

Мы покажем, что при вещественных  $z$  имеет место формула (7.1) с матрицей  $T_\rho(z)$  вида

$$T_\rho(z) = \begin{pmatrix} a_\rho(z) & \bar{b}_\rho(z) \\ b_\rho(z) & \bar{a}_\rho(z) \end{pmatrix}, \quad (7.105)$$

где функция  $a_\rho(z)$  дается формулой (7.51), а

$$b_\rho(z) = a_\rho(z) r_\rho(z). \quad (7.106)$$

Для вывода заметим, что доказанная однозначная разрешимость интегральных уравнений (7.37) и (7.44) эквивалентна теореме существования и единственности для двух специальных задач сопряжения

$$F_1(x, z) = T_+^{(1)}(x, z) + r_\rho(z) T_+^{(2)}(x, z) \quad (7.107)$$

и

$$F_2(x, z) = \tilde{r}_\rho(z) T_-^{(1)}(x, z) + T_-^{(2)}(x, z), \quad (7.108)$$

точная формулировка которых была дана выше. При этом данные двух задач  $\{r_\rho(z), z_j, c_j\}$  и  $\{\tilde{r}_\rho(z), z_j, \tilde{c}_j\}$  связаны условиями 1—3. Отправляясь от этих соотношений, мы покажем, что

$$F_1(x, z) = \frac{1}{a_\rho(z)} T_-^{(1)}(x, z), \quad F_2(x, z) = \frac{1}{a_\rho(z)} T_+^{(2)}(x, z), \quad (7.109)$$

что и эквивалентно искомой формуле (7.1).

Для доказательства умножим равенство (7.107) на  $\bar{r}_\rho(z)$ :

$$\bar{r}_\rho(z) F_1(x, z) = \bar{r}_\rho(z) T_+^{(1)}(x, z) + |r_\rho(z)|^2 T_+^{(2)}(x, z), \quad (7.110)$$

а также перепишем его с помощью инволюции (7.14),

$$\sigma_1 \bar{F}_1(x, z) = \bar{r}_\rho(z) T_+^{(1)}(x, z) + T_+^{(2)}(x, z). \quad (7.111)$$

Вычитая равенства (7.110) и (7.111) и используя (7.18), получаем, что

$$\bar{r}_\rho(z) F_1(x, z) - \sigma_1 \bar{F}_1(x, z) = - \frac{1}{|a_\rho(z)|^2} T_+^{(2)}(x, z). \quad (7.112)$$

Воспользуемся теперь условием 2 — формулой (7.50) — и перепишем полученное равенство в виде

$$\frac{1}{a_\rho(z)} T_+^{(2)}(x, z) = \tilde{r}_\rho(z) a_\rho(z) F_1(x, z) + \sigma_1 \bar{a}_\rho(z) \bar{F}_1(x, z). \quad (7.113)$$

Таким образом, мы преобразовали задачу сопряжения (7.107) к задаче сопряжения типа (7.108) и намерены воспользоваться теперь теоремой единственности. Для этого достаточно показать, что вектор-функции  $a_\rho(z) F_1(x, z)$  и  $\frac{1}{a_\rho(z)} T_+^{(2)}(x, z)$  удовлетворяют условиям постановки задачи сопряжения (7.108).

Рассмотрим сначала столбец  $a_\rho(z) F_1(x, z)$ . Он аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной  $z$  и имеет те же асимптотики при  $z \rightarrow 0$  и  $|z| \rightarrow \infty$ , что и столбец  $T_-^{(1)}(x, z)$ . При этом в случае общего положения

$$a_\rho(z) = \frac{a_\pm}{z \mp \omega} + O(1), \quad a_\pm \neq 0, \quad (7.114)$$

столбец  $a_p(z)F_1(x, z)$  регулярен при  $z = \pm\omega$ . Действительно, в силу свойства  $r_p(\pm\omega) = \mp i$  (см. условие 3)) и соотношения

$$T_+^{(1)}(x, \pm\omega) = \pm iT_+^{(2)}(x, \pm\omega) \quad (7.115)$$

мы имеем

$$F_1(x, z) = O(|z \mp \omega|) \quad (7.116)$$

в окрестности  $z = \pm\omega$ . В свою очередь формула (7.115) получается, в силу дифференциального уравнения (7.53) и асимптотики (7.104), из аналогичного свойства столбцов матрицы  $Q^{-1}(\theta)E_p(x, \pm\omega)$ .

Далее, столбец  $\frac{1}{a_p(z)}T_+^{(2)}(x, z)$ , как и столбец  $F_2(x, z)$ , аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, за исключением точек  $z = z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где он имеет простые полюса. При этом благодаря условию 3 — формулам (7.52) и (7.8) — мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \frac{1}{a_p(z)} T_+^{(2)}(x, z) \Big|_{z=z_j} &= \frac{1}{a_p(z_j)} T_+^{(2)}(x, z_j) = \frac{1}{c_j a_p(z_j)} \operatorname{res} F_1(x, z) \Big|_{z=z_j} = \\ &= \tilde{c}_j(a_p(z) F_1(x, z)) \Big|_{z=z_j}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Итак, условия, которым удовлетворяют столбцы  $\frac{1}{a_p(z)}T_+^{(2)}(x, z)$  и  $a_p(z)F_1(x, z)$ , совпадают с условиями на столбцы  $F_2(x, z)$  и  $T_-^{(1)}(x, z)$  из задачи сопряжения (7.108). Поэтому эти столбцы совпадают, т. е. имеют место равенства (7.109).

#### V. Коэффициенты перехода и дискретный спектр.

Из результатов, доказанных в пунктах I — IV, уже следует, что матрицы  $T_{\pm}(x, z)$  являются решениями Йоста для вспомогательной линейной задачи, построенной по найденной матрице  $U_0(x) = U_0^{(+)}(x) = U_0^{(-)}(x)$ . При этом функции  $a_p(\lambda)$  и  $b_p(\lambda)$  играют роль коэффициентов перехода непрерывного спектра, а числа  $\lambda_j$  являются собственными значениями дискретного спектра с коэффициентами перехода  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

На этом мы заканчиваем общее исследование обратной задачи для случая конечной плотности по методу Гельфанда — Левитана — Марченко. Полученные результаты могут служить доказательством утверждений I — V в методе задачи Римана из предыдущего параграфа. Именно, по исходным данным  $\{b_p(\lambda), \bar{b}_p(\lambda); \lambda_j, \gamma_j\}$  задачи Римана, удовлетворяющим условиям 1) — 5) из § 6, построим набор данных  $\{r_p(z), \bar{r}_p(z); z_j, c_j, \bar{c}_j\}$  в методе Гельфанда — Левитана — Марченко. Они удовлетворяют условиям 1—3 этого параграфа, и поэтому результаты по поводу двух специальных задач сопряжения обеспечивают справедливость утверждений I — V в § 6.

В следующем параграфе мы рассмотрим важный частный случай обратной задачи, когда коэффициент  $b_p(z)$  (а вместе с ним и  $r_p(z)$ ,  $\tilde{r}_p(z)$ ) тождественно исчезает и соответствующие уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и решаются явно. Этот случай отвечает солитонам модели НШ для граничных условий конечной плотности.

### § 8. Солитонные решения для случая конечной плотности

Как и в быстроубывающем случае, солитонные решения связаны с *безотражательной линейной задачей*, т. е. с функциями  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , для которых коэффициент  $b_p(\lambda)$  тождественно исчезает.

Условия на исходные данные в этом случае значительно упрощаются. Именно, набор чисел  $\{\lambda_j, c_j, \tilde{c}_j, j=1, \dots, n\}$  обладает следующими свойствами.

1. Числа  $\lambda_j$  лежат в лакуне  $-\omega < \lambda_j < \omega$  и среди них нет совпадающих.

2. Величины  $m_j = c_j/z_j$ , где

$$z_j = \lambda_j + i \sqrt{\omega^2 - \lambda_j^2}, \quad |z_j| = \omega, \quad (8.1)$$

вещественны и удовлетворяют неравенству

$$m_j < 0, \quad j=1, \dots, n. \quad (8.2)$$

3. Выполняется условие ( $\theta$ )

$$e^{i\theta} = \prod_{j=1}^n \frac{\bar{z}_j}{z_j}. \quad (8.3)$$

4. Имеет место формула связи

$$c_j \tilde{c}_j = \frac{1}{\tilde{a}_p^2(z_j)}, \quad j=1, \dots, n, \quad (8.4)$$

где

$$a_p(z) = e^{i\theta/2} \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}, \quad (8.5)$$

а точка означает производную по  $z$ .

В терминах величин  $\tilde{m}_j = \tilde{c}_j/z_j$  неравенство (8.2) принимает вид  $\tilde{m}_j > 0, j=1, \dots, n$ .

Отметим, что в безотражательном случае функция  $a_p(z)$  регулярна при  $z = \pm\omega$ , так что эти значения являются виртуальными уровнями.

Связь набора чисел  $\{\lambda_j, c_j, \tilde{c}_j\}$  с исходными данными задачи Римана  $\{\lambda_j, \gamma_j\}$  осуществляется на основании соотношения

$$\gamma_j = c_j \dot{a}_p(z_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.6)$$

Благодаря свойствам (8.2) — (8.3) и формуле (8.5) числа  $\gamma_j$  — чисто мнимые и

$$\text{sign } i\gamma_j = \text{sign } \frac{z_j \dot{a}_p(z_j)}{i} = \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.7)$$

Приступим к решению обратной задачи и рассмотрим сначала случай  $n=1$ . В силу условия (8.3) собственное значение  $\lambda_1$  явно выражается через параметр  $\theta$  и имеет вид

$$\lambda_1 = -\omega \cos \frac{\theta}{2}. \quad (8.8)$$

Действительно, условие  $(\theta)$  дает выражение

$$z_1 = -\omega e^{-i\theta/2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (8.9)$$

откуда (8.8) следует из (8.1).

Уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко для левого конца имеет вид

$$\Gamma_-(x, y) + \tilde{\Omega}(x+y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, s) \tilde{\Omega}(s+y) ds = 0, \quad (8.10)$$

где  $y \leq x$ , а ядро  $\tilde{\Omega}(x)$  дается формулами (7.45) — (7.47) и в нашем случае записывается в виде

$$\tilde{\Omega}(x) = M_1 N_1^T e^{v_1 x/2}. \quad (8.11)$$

Здесь

$$v_1 = \frac{1}{i} k_1 = \sqrt{\omega^2 - \lambda_1^2} > 0, \quad (8.12)$$

а столбцы  $M_1$  и  $N_1$  выглядят следующим образом:

$$M_1 = \frac{\sqrt{\tilde{m}_1}}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ i\tilde{z}_1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \frac{\sqrt{\tilde{m}_1}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{z_1}{i\omega} \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

где берется арифметическое значение квадратного корня. Здесь для единообразия с последующими формулами для случая  $n > 1$  мы использовали переменную  $z_1$ , а не  $\theta$ .

Таким образом, ядро  $\tilde{\Omega}(x+y)$  интегрального уравнения (8.10) является одномерным и это уравнение решается явно.

Представляя матрицу  $\Gamma_-(x, y)$  в виде

$$\Gamma_-(x, y) = f_1(x) N_1^T e^{v_1 y/2}, \quad (8.14)$$

для столбца  $f_1(x)$  получаем линейное алгебраическое уравнение

$$f_1(x) + M_1 e^{v_1 x/2} + A(x) f_1(x) = 0, \quad (8.15)$$

где функция  $A(x)$  имеет вид

$$A(x) = N_1^T M_1 \int_{-\infty}^x e^{v_1 s} ds = \frac{\tilde{m}_1 \omega}{2v_1} e^{v_1 x}. \quad (8.16)$$

Отсюда для  $f_1(x)$  имеем выражение

$$f_1(x) = - \frac{e^{v_1 x/2}}{1 + A(x)} M_1. \quad (8.17)$$

Вычисляя функцию  $\psi(x)$  по общим формулам (7.49) и (7.54), получаем

$$\psi(x) = \rho \frac{i\gamma_1 + e^{i\theta} e^{v_1 x}}{i\gamma_1 + e^{v_1 x}}, \quad (8.18)$$

где мы использовали (8.6) и связь (8.9) между  $z_1$  и  $\theta$ . Напомним также, что в силу (8.7)  $i\gamma_1 > 0$ , так что знаменатель в формуле (8.18) не исчезает и функция  $\psi(x)$  регулярна на всей вещественной оси. Она удовлетворяет граничным условиям конечной плотности

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \rho, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \rho e^{i\theta} \quad (8.19)$$

с экспоненциальной точностью  $O(e^{-v_1 |x|})$ .

Решение  $\psi(x, t)$  уравнения НШ, для которого функция  $\psi(x)$  играет роль начальных данных, получается по общим формулам (6.51) заменой в (8.18) коэффициента  $\gamma_1$  на  $\gamma_1(t)$ :

$$\gamma_1(t) = e^{\lambda_1 v_1 t} \gamma_1 \quad (8.20)$$

и может быть записано в виде

$$\psi(x, t) = \psi_0(x - vt, x_0) = \rho \frac{1 + e^{i\theta} \exp\{v_1(x - vt - x_0)\}}{1 + \exp\{v_1(x - vt - x_0)\}}, \quad (8.21)$$

где

$$v = \lambda_1 = -\omega \cos \frac{\theta}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{v_1} \ln i\gamma_1. \quad (8.22)$$

Формула (8.21) показывает, что решение  $\psi(x, t)$  представляет собой волну, распространяющуюся со скоростью  $v$ . Из представления

$$|\psi(x, t)|^2 = \rho^2 \frac{v_1^2}{\omega^2 \operatorname{ch}^2 \left\{ \frac{v_1}{2} (x - vt - x_0) \right\}} \quad (8.23)$$

следует, что эта волна локализована в окрестности  $x = x_0 + vt$ .

По построению это решение имеет конечную энергию и конечные значения всех остальных интегралов движения. Согласно определению, данному в § 5, решение  $\psi(x, t)$  является солитоном в широком смысле для модели НШ в случае конечной плотности. Ниже мы убедимся, что рассеяние этих солитонов удовлетворяет условию факторизации, так что  $\psi(x, t)$  определяет солитон в обычном смысле.

В отличие от солитона для быстроубывающего случая, который параметризуется четырьмя вещественными параметрами, наш солитон  $\psi(x, t)$  зависит от двух параметров: скорости  $v$  и координаты центра инерции  $x_0$  в момент  $t=0$ . При этом скорость солитона не произвольна, а удовлетворяет ограничению  $|v| < \omega$ . Параметр  $v_1 = \sqrt{\omega^2 - v^2}$ , характеризующий амплитуду солитона, исчезает при  $|v| \rightarrow \omega$  ( $\theta \rightarrow 0$ ). С физической точки зрения решение  $\psi(x, t)$  представляет собой уединенную волну, распространяющуюся над конденсатом постоянной плотности; при этом возникает естественное ограничение на ее скорость.

Рассмотрим теперь общий случай, когда  $n$  произвольно. Ядро  $\tilde{\Omega}(x+y)$  интегрального уравнения (8.10) по-прежнему является вырожденным и представляется в виде

$$\tilde{\Omega}(x+y) = \sum_{j=1}^n M_j N_j^\tau e^{v_j(x+y)}, \quad (8.24)$$

где

$$v_j = \text{Im } z_j = \sqrt{\omega^2 - \lambda_j^2}, \quad (8.25)$$

а

$$M_j = \frac{\sqrt{\tilde{m}_j}}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ i\tilde{z}_j \end{pmatrix}, \quad N_j = \frac{\sqrt{\tilde{m}_j}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ z_j/i\omega \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

и  $\sqrt{\tilde{m}_j} > 0, j=1, \dots, n$ .

Решение уравнения (8.10) ищем в виде

$$\Gamma_-(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) N_i^\tau e^{v_i y/2}. \quad (8.27)$$

Для столбцов  $f_j(x)$  получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$f_j(x) + M_j e^{v_j x/2} + \sum_{l=1}^n A_{jl}(x) f_l(x) = 0, \quad (8.28)$$

где функции  $A_{jl}(x)$  даются формулой

$$A_{jl}(x) = 2 N_l^\tau M_j \frac{e^{\frac{1}{2}(v_j+v_l)x}}{v_j+v_l} = \omega \frac{\sqrt{\tilde{m}_j \tilde{m}_l} (z_j + z_l)}{2z_j (v_j + v_l)} e^{\frac{1}{2}(v_j+v_l)x}. \quad (8.29)$$



Последнее выражение можно упростить, используя соотношения  $v_j = \frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}$  и  $|z_j| = \omega$ . В результате для  $A_{jl}(x)$  получаем

$$A_{jl}(x) = \frac{i\omega \sqrt{\widetilde{m}_j \widetilde{m}_l}}{z_j - \bar{z}_l} e^{\frac{1}{2}(v_j + v_l)x}. \quad (8.30)$$

Подчеркнем, что система уравнений (8.28) распадается на две системы для первых и вторых компонент столбцов  $f_j(x)$ . Для вторых компонент  $p_j(x)$  получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$p_l(x) + \frac{i\bar{z}_j \sqrt{\widetilde{m}_j}}{2} e^{\frac{v_j x}{2}} + \sum_{l=1}^n A_{jl}(x) p_l(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.31)$$

Функция  $\psi(x)$  выражается через  $p_j(x)$  по формуле

$$\psi(x) = \frac{2\rho}{\omega} \sum_{j=1}^n \sqrt{\widetilde{m}_j} p_j(x) e^{v_j x/2} + \rho, \quad (8.32)$$

которую на основании формул Крамера можно переписать в виде

$$\psi(x) = \rho \frac{\det(I + A_1(x))}{\det(I + A(x))} + \rho. \quad (8.33)$$

Здесь  $A(x)$  —  $n \times n$  матрица с матричными элементами  $A_{jl}(x)$ , а матрица  $A_1(x)$  имеет вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} & & & e_1(x) \\ & A(x) & & \dots \\ & \dots & & e_n(x) \\ d_1(x) & \dots & d_n(x) & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.34)$$

где

$$d_j(x) = \sqrt{\widetilde{m}_j} e^{v_j x/2}, \quad e_j(x) = \frac{i\omega}{z_j} d_j(x), \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.35)$$

Формулы (8.33) — (8.35) дают окончательное выражение для безотражательных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в случае граничных условий конечной плотности.

Отметим, что гладкость функции  $\psi(x)$ , т. е. невырожденность матрицы  $I + A(x)$ , равно как и справедливость граничных условий конечной плотности (8.19), вытекают из доказанных в предыдущем параграфе общих утверждений I — V. Однако их можно проверить и непосредственно, отправляясь от формул (8.33) — (8.35). При этом предельные значения (8.19) принимаются не просто в смысле Шварца, а с экспоненциальной точ-

ностью  $O(e^{-v|x|})$ , где  $v = \min_{j=1, \dots, n} \{v_j\}$ ; это будет простым следствием приведенных ниже рассуждений.

Решение  $\psi(x, t)$  уравнения НШ с начальным условием  $\psi(x)$  вида (8.33) — (8.35) получается после замены в этих формулах  $\tilde{m}_j$  на  $\tilde{m}_j(t)$ :

$$\tilde{m}_j(t) = e^{-\lambda_j v_j t} \tilde{m}_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.36)$$

Убедимся, что это решение описывает процесс рассеяния  $n$  солитонов.

Не умаляя общности, будем считать, что параметры  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  решения  $\psi(x, t)$  упорядочены:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . В этом случае решение  $\psi(x, t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  представляется в виде следующей суммы односолитонных решений:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \psi_1^{(-)}(x, t) + e^{i\theta_1}(\psi_2^{(-)}(x, t) - \rho) + \dots \\ & \dots + e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})}(\psi_n^{(-)}(x, t) - \rho) + O(e^{-vc|t|}) \end{aligned} \quad (8.37)$$

при  $t \rightarrow -\infty$  и

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \psi_n^{(+)}(x, t) + e^{i\theta_n}(\psi_{n-1}^{(+)}(x, t) - \rho) + \dots \\ & \dots + e^{i(\theta_n + \dots + \theta_2)}(\psi_1^{(+)}(x, t) - \rho) + O(e^{-vc|t|}) \end{aligned} \quad (8.38)$$

при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $c = \min_{j \neq l} \{|v_j - v_l|\}$ .

Здесь  $\psi_j^{(\pm)}(x, t)$  — солитоны с параметрами  $\theta_j, v_j, x_{0j}^{(\pm)}$ :

$$\psi_j^{(\pm)}(x, t) = \Psi_{\theta_j}(x - v_j t + x_{0j}^{(\pm)}), \quad (8.39)$$

где

$$e^{i\theta_j} = \frac{\bar{z}_j}{z_j}, \quad 0 \leq \theta_j < 2\pi, \quad v_j = \lambda_j = -\omega \cos \frac{\theta_j}{2} \quad (8.40)$$

и

$$\begin{aligned} x_{0j}^{(-)} = & x_{0j} - \frac{1}{2v_j} \sum_{l=j+1}^n \ln \frac{(v_l - v_j)^2 + (v_l + v_j)^2}{(v_l - v_j)^2 + (v_l - v_j)^2} + \\ & + \frac{1}{2v_j} \sum_{l=1}^{j-1} \ln \frac{(v_l - v_j)^2 + (v_l + v_j)^2}{(v_l - v_j)^2 + (v_l - v_j)^2}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned} x_{0j}^{(+)} = & x_{0j} + \frac{1}{2v_j} \sum_{l=j+1}^n \ln \frac{(v_l - v_j)^2 + (v_l + v_j)^2}{(v_l - v_j)^2 + (v_l - v_j)^2} - \\ & - \frac{1}{2v_j} \sum_{l=1}^{j-1} \ln \frac{(v_l - v_j)^2 + (v_l + v_j)^2}{(v_l - v_j)^2 + (v_l - v_j)^2}, \end{aligned} \quad (8.42)$$

а

$$x_{0j} = \frac{1}{v_j} \ln i \varepsilon_j \gamma_j = \frac{1}{v_j} \ln |\gamma_j|, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.43)$$

Здесь  $\varepsilon_j$  — знак вещественного параметра  $i\gamma_j$ , который однозначно определяется по формуле (8.7).

Доказательство сформулированных утверждений будет основано на явных формулах (8.33) — (8.35).

Рассмотрим, для определенности, случай  $t \rightarrow -\infty$ . Нам достаточно показать, что на траекториях  $C_j$  отдельного солитона

$$x - v_j t = \text{const} \quad (8.44)$$

решение  $\psi(x, t)$  при  $t \rightarrow -\infty$  стремится к односолитонному решению  $e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_{j-1})} \psi_j^{(-)}(x, t)$ , а на траекториях общего вида  $x - vt = \text{const}$  асимптотически принимает значения  $\rho$ ,  $\rho e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_j)}$  и  $\rho e^{i\theta}$ ,  $\theta \equiv \theta_1 + \dots + \theta_n \pmod{2\pi}$ , если  $v > v_1$ ,  $v_i > v > v_{i+1}$  и  $v_n > v$  соответственно. Эти предельные значения принимаются с экспоненциальной точностью  $O(e^{-v|t|})$ .

Приступим к доказательству этих утверждений. Запишем матричные элементы матрицы  $A(x, t)$  в виде

$$A_{jl}(x, t) = \frac{i\omega}{z_j - \bar{z}_l} e^{\xi_j(x, t) + \bar{\xi}_l(x, t)}, \quad (8.45)$$

где

$$\xi_j(x, t) = \frac{v_j}{2} (x - v_j t) + \frac{1}{2} \ln \tilde{m}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.46)$$

и преобразуем по очереди числитель и знаменатель формулы (8.33).

Начнем со знаменателя. Имеем очевидную формулу

$$\det(I + A(x, t)) = 1 + \sum_{i=1}^n (i\omega)^i \times \\ \times \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \Delta(j_1, \dots, j_l) \exp 2(\xi_{j_1}(x, t) + \dots + \xi_{j_l}(x, t)), \quad (8.47)$$

где  $\Delta(j_1, \dots, j_l)$  — главный минор  $l$ -го порядка  $n \times n$  матрицы

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1 - \bar{z}_1} & \dots & \frac{1}{z_1 - \bar{z}_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{1}{z_n - \bar{z}_1} & \dots & \frac{1}{z_n - \bar{z}_n} \end{pmatrix}, \quad (8.48)$$

образованный ее строками и столбцами с номерами  $j_1, \dots, j_l$ . Для вычисления коэффициентов  $\Delta(j_1, \dots, j_l)$  воспользуемся извест-

ной формулой

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \prod_{l,j=1}^n (a_l + b_j)^{-1}, \quad (8.49)$$

откуда получаем, что

$$\Delta(j_1, \dots, j_l) = \prod_{p=1}^n (z_{j_p} - \bar{z}_{j_p})^{-1} \prod_{1 \leq p < q \leq l} \left| \frac{z_{j_p} - z_{j_q}}{z_{j_p} - \bar{z}_{j_q}} \right|^2. \quad (8.50)$$

При  $x - v_j t = \text{const}$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_l(x, t) = -\infty, \quad l > j, \quad (8.51)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_l(x, t) = +\infty, \quad l < j, \quad (8.52)$$

поэтому, используя (8.47), на траектории  $C_j$  при  $t \rightarrow -\infty$  получаем асимптотику

$$\det(I + A(x)) = (i\omega)^{j-1} \exp 2(\xi_1(x, t) + \dots + \xi_{j-1}(x, t)) \times \\ \times (i\omega \Delta(1, \dots, j) \exp 2\xi_j(x, t) + \Delta(1, \dots, j-1) + O(e^{-\nu c|t|})). \quad (8.53)$$

Рассмотрим теперь числитель в формуле (8.33). Аналогично (8.47) имеем представление

$$\det(I + A_1(x, t)) = \sum_{l=2}^{n+1} (i\omega)^{l-1} \times \\ \times \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{l-1} \leq n} \Delta_l(j_1, \dots, j_{l-1}) \exp 2(\xi_{j_{i_1}}(x, t) + \dots + \xi_{j_{i_{l-1}}}(x, t)), \quad (8.54)$$

где  $\Delta_l(j_1, \dots, j_{l-1})$  — главный минор порядка  $l$  матрицы

$$D_1 = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{z_1} \\ & & & \vdots \\ & D & & \frac{1}{z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.55)$$

образованный строками и столбцами с номерами  $j_1, \dots, j_{l-1}$  и  $n+1$ .

Для вычисления коэффициентов  $\Delta_1(j_1, \dots, j_{l-1})$  используем искусственный прием и рассмотрим матрицу

$$D_1(z) = \begin{pmatrix} & & & & \frac{1}{z_1} \\ & & & & \dots \\ & & & & \frac{1}{z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{z - \bar{z}_1} & \dots & \frac{1}{z - \bar{z}_n} & \frac{1}{z} & \dots \end{pmatrix}. \quad (8.56)$$

По общей формуле (8.49) имеем

$$\det D_1(z) = \frac{\det D}{z} \prod_{j=1}^n \frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z - z_l}{z - \bar{z}_j}. \quad (8.57)$$

С другой стороны, разложив определитель матрицы  $D_1(z)$  по последней строке и переходя к пределу при  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \det D_1(z) = \det D + \det D_1. \quad (8.58)$$

Сравнивая эти формулы, приходим к выражению

$$\det D_1 = \left( \prod_{j=1}^n \frac{\bar{z}_j}{z_j} - 1 \right) \det D. \quad (8.59)$$

Главные миноры матрицы  $D_1$  рассматриваются аналогично. В результате получаем окончательное выражение

$$\Delta_1(j_1, \dots, j_{l-1}) = (e^{i(\theta_{j_1} + \dots + \theta_{j_{l-1}})} - 1) \Delta(j_1, \dots, j_{l-1}), \quad (8.60)$$

где

$$e^{i\theta_j} = \bar{z}_j / z_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.61)$$

Аналогично (8.53) на траектории  $C_j$  при  $t \rightarrow -\infty$  имеем асимптотику

$$\det(I + A_1(x, t)) = (i\omega)^{l-1} \exp 2(\zeta_1(x, t) + \dots + \zeta_{j-1}(x, t)) \times \\ \times (i\omega \Delta_1(1, \dots, j) \exp 2\zeta_j(x, t) + \Delta_1(1, \dots, j-1) + O(e^{-\nu c|t|})). \quad (8.62)$$

Подставим полученные асимптотики (8.53) и (8.62) в выражение (8.33) для  $\psi(x, t)$ . Используя формулы (8.46), (8.50) и (8.61), на траектории  $C_j$  получаем следующую асимптотику:

$$\psi(x, t) = \rho e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_{j-1})} \frac{1 + e^{i\theta_j} a_j^{(-)} e^{\nu_j(x - \nu_j t)}}{1 + a_j^{(-)} e^{\nu_j(x - \nu_j t)}} + O(e^{-\nu c|t|}), \quad (8.63)$$

где

$$a_j^{(-)} = i\omega \tilde{m}_j \frac{\Delta(1, \dots, j)}{\Delta(1, \dots, j-1)} = \frac{\tilde{\omega} c_j}{2v_j z_j} \prod_{l=1}^{j-1} \left| \frac{z_l - z_j}{z_l - \bar{z}_j} \right|^2. \quad (8.64)$$

Преобразуем последнее выражение. Используя формулы (8.5) — (8.6), имеем

$$\frac{\tilde{\omega} c_j}{2v_j z_j} = \frac{Z_j}{i\gamma_j}, \quad (8.65)$$

где

$$Z_j = \frac{i\omega}{2v_j z_j \dot{a}_p(z_j)} = -\frac{\omega}{z_j} e^{-\frac{i\theta}{2}} \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^n \frac{z_l - \bar{z}_j}{z_l - z_j}. \quad (8.66)$$

Заметим, что в силу (8.7) величина  $Z_j$  вещественна и  $\text{sign } Z_j = \varepsilon_j$ . (8.67)

Поэтому

$$Z_j = \varepsilon_j |Z_j| = \varepsilon_j \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^n \left| \frac{z_l - \bar{z}_j}{z_l - z_j} \right|, \quad (8.68)$$

так что выражение (8.64) принимает вид

$$a_j^{(-)} = \frac{1}{i\varepsilon_j \gamma_j^{(-)}}, \quad (8.69)$$

где

$$\gamma_j^{(-)} = \gamma_j \prod_{l=j+1}^n \left| \frac{z_l - z_j}{z_l - \bar{z}_j} \right| \cdot \prod_{l=1}^{j-1} \left| \frac{z_l - \bar{z}_j}{z_l - z_j} \right|. \quad (8.70)$$

Поставим выражение для  $a_j^{(-)}$  в формулу (8.63) и воспользуемся равенством  $z_l = v_l + iv_l$ . Мы получим окончательно, что на траектории  $C_j$  при  $t \rightarrow -\infty$  справедлива асимптотика

$$\psi(x, t) = e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_{j-1})} \psi_{\theta_j}(x - v_j t + x_{j_j}^{(-)}) + O(e^{-v|t|}). \quad (8.71)$$

Поведение решения  $\psi(x, t)$  на траекториях общего вида исследуется аналогично и описывается при  $t \rightarrow -\infty$  асимптотикой

$$\psi(x, t) = e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_j)} \rho + O(e^{-v|t|}) \quad (8.72)$$

в области  $v_j > \tilde{v} > v_{j+1}$ . Доказательство формулы (8.37) на этом заканчивается.

Случай  $t \rightarrow +\infty$  исследуется аналогично.

Отметим, что приведенные рассуждения доказывают и упомянутое выше утверждение о том, что функция  $\psi(x, t)$  принимает свои граничные значения при  $x \rightarrow \pm\infty$  с точностью  $O(e^{-v|x|})$ .

Итак, мы показали, что исследованное решение  $\psi(x, t)$  описывает взаимодействие  $n$  солитонов. При  $t \rightarrow \pm\infty$  солитоны ста-

новятся свободными и далеко расходятся друг от друга. Поэтому, как и в быстроубывающем случае, решение  $\psi(x, t)$  будем называть  $n$ -солитонным.

Специфика нашего случая состоит в том, что решение  $\psi(x, t)$  «распадается» на солитоны  $\psi_j^{(\pm)}(x, t)$  с разными значениями фаз  $\theta_j$ . Эти фазы связаны со скоростями  $v_j$  асимптотических солитонов и поэтому различны. Можно сказать, что взаимодействуют солитоны только с разными значениями фаз. Поэтому динамику солитонов естественно рассматривать в расширенном фазовом пространстве  $\mathcal{M}_p = \bigcup_{c \leq \theta < c+\pi} \mathcal{M}_{p, \theta}$ , которое уже упоминалось в § 1.1. На соотношение

$$\theta \equiv \sum_{j=1}^n \theta_j \pmod{2\pi} \quad (8.73)$$

в этом случае можно смотреть как на закон сохранения.

Как и в быстроубывающем случае, формулы (8.37) — (8.42) допускают наглядную интерпретацию в терминах теории рассеяния. Именно,  $n$ -солитонное решение описывает процесс рассеяния  $n$  солитонов. При  $t \rightarrow \pm\infty$  мы имеем дело со свободным движением  $n$  пространственно разделенных солитонов с параметрами  $(v_j, x_{0j}^{(\pm)})$ . При этом при  $t \rightarrow -\infty$  центры инерции солитонов  $x_{0j}^{(-)} + v_j t$  упорядочены слева направо в порядке убывания скоростей; при  $t \rightarrow +\infty$  порядок пространственного расположения солитонов заменяется на обратный.

В процессе рассеяния меняются только параметры  $x_{0j}^{(\pm)}$  — координаты центров инерции при  $t=0$ . Формулы (8.41) — (8.42) дают их связь

$$x_{0j}^{(+)} = x_{0j}^{(-)} + \Delta x_{0j}, \quad (8.74)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x_{0j} = & -\frac{1}{v_j} \sum_{l=1}^{j-1} \ln \frac{(v_l - v_j)^2 + (v_l + v_j)^2}{(v_l - v_j)^2 + (v_l - v_j)^2} + \\ & + \frac{1}{v_j} \sum_{l=j+1}^n \ln \frac{(v_l - v_j)^2 + (v_l + v_j)^2}{(v_l - v_j)^2 + (v_l - v_j)^2}. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Эти формулы показывают, что приращения координат  $x_{0j}$  при рассеянии представляются в виде суммы по двухчастичным сдвигам

$$\begin{aligned} \Delta x_{01} &= \frac{1}{v_1} \ln \frac{(v_1 - v_2)^2 + (v_1 + v_2)^2}{(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}, \\ \Delta x_{02} &= -\frac{1}{v_2} \ln \frac{(v_1 - v_2)^2 + (v_1 + v_2)^2}{(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \end{aligned} \quad (8.76)$$

для  $v_1 > v_2$  с очевидной заменой  $1 \leftrightarrow 2$  для  $v_1 < v_2$ . Таким образом, как и в быстроубывающем случае, мы имеем дело с *факторизованным рассеянием*.

Процесс рассеяния солитонов с гамильтоновой точки зрения мы обсудим в следующей главе.

## § 9. Комментарии и литературные указания

1) Регулярная задача Римана об аналитической факторизации подробно изучена в математической литературе; см. монографии Н. И. Мусхелишвили [2.22] и Н. П. Векуа [2.1]. Основной аппарат состоит в сведении ее к сингулярным интегральным уравнениям. Последние исследуются в различных функциональных классах, главным образом в гельдеровских. Для наших целей более удобно работать с нормированными кольцами  $\mathfrak{R}^{n \times n}$  и  $\mathfrak{R}^{\underline{(n \times n)}}$ , в которых задача Римана естественно сводится к интегральному уравнению Винера — Хопфа. Такой подход был разработан в работе И. П. Гохберга и М. Г. Крейна [2.5]; там же содержится используемая нами теорема о разрешимости задачи Римана. Переход от матрицы рассеяния  $S(\lambda)$  к матрице  $G(\lambda) = a(\lambda)S(\lambda)$ , осуществленный в § 1, является важным шагом для применимости этой теоремы.

2) В теории солитонов метод задачи Римана был предложен в работе [2.10], в которой также была дана удобная формулировка для задачи с нулями. После этой работы метод задачи Римана приобрел большую популярность и стал активно использоваться (см., например, [2.49]). В работах [2.8], [2.32—2.33] задача Римана впервые была положена в основу решения обратной задачи для линейного матричного дифференциального оператора первого порядка.

3) Матрица  $B(\lambda)$ , обобщающая скалярный множитель Бляшке, была, в общей ситуации, введена в работе [2.24]. Для сведения задачи Римана с нулями к регулярному случаю мы в § 2, как и в работе [2.10], умножаем матрицу  $B(\lambda)$  на матрицу  $G_+(\lambda)$  справа. При этом факторизуемая матрица  $G(\lambda)$  не меняется. В других работах (например, в монографии [2.11] и в [2.49]) принято умножать  $B(\lambda)$  на  $G_+(\lambda)$  слева. При этом факторизуемая матрица преобразуется подобным образом.

4) Простой вывод дифференциального уравнения по  $x$  в § 2 и дифференциального уравнения по  $t$  в § 3 является основным идейным достижением метода задачи Римана и основан практически только на теореме Лиувилля. Идея получения условия нулевой кривизны из задачи Римана с заданной явной зависимостью матрицы  $G(x, t, \lambda)$  от параметров  $x$  и  $t$  была сформулирована В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом и подробно изложена в работе [2.10]. Сходные идеи содержались также в работе [2.17], где, по существу, рассматривалась специальная задача Римана на алгебраической кривой. После этого стало ясно, что вид матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  из условия нулевой кривизны определяется только главными частями в существенно особых точках факторизующих матриц  $F_{\pm}(x, t, \lambda)$  (сравни с § 2—3). При этом опять существенно используется теорема Лиувилля (см. [2.13], [2.43—2.45]).

5) При условии, что функция  $\beta(s)$  принадлежит пространству  $L_2(-\infty, \infty)$ , операторы  $K_x$  и  $L_x$ , введенные в § 2, определены и ограничены в пространстве  $L_2(0, \infty)$ . При этом в силу (2.64) для функции  $f(s)$  из  $L_2(0, \infty)$  имеем

$$\langle K_x f, f \rangle = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_x(s, s') \overline{f(s')} f(s) ds ds' = \int_{-x}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \beta(u-s) f(s) ds \right|^2 du \geq 0, \quad (9.1)$$

так что оператор  $K_x$  (а также и  $L_x$ ) является положительным оператором, монотонно зависящим от  $x$ . Более того, операторы  $1 + \varepsilon K_{\pm}$  и  $1 + \varepsilon L_{\pm}$  ограничены обратимы как при  $\varepsilon = 1$  (по очевидной причине), так и при  $\varepsilon = -1$  (в силу



условия (A)). Так просто доказывается равномерная по  $x$  обратимость операторов  $I + \epsilon K_x$  и  $I + \epsilon L_x$  в пространстве  $L_2(0, \infty)$ .

Однако при нашем общем условии на функцию  $\beta(s)$  эти операторы определены лишь в пространстве  $L_1(0, \infty)$ ; поэтому нам приходится обращаться к теории Гохберга — Крейна и более подробно проводить исследование в п. 3 § 2.

6) При доказательстве асимптотик матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  мы естественно использовали явную зависимость матрицы  $G(x, \lambda)$  от параметра  $x$  (см. (2.13)), которая приводила к явному виду (2.64)—(2.65) ядер  $k_x(s, s')$  и  $l_x(s, s')$ . С другой стороны, для уравнения НШ матрица  $G(x, t, \lambda)$  явным образом зависит и от переменной  $t$  (см. формулу (3.9)). Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли таким образом исследовать поведение матриц  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  и вывести асимптотики решения уравнения НШ  $\psi(x, t)$  при  $t \rightarrow \pm \infty$ ? Впервые такие асимптотические формулы были получены в работе [2.9] и строго доказаны в работе [2.23].

Эта задача сложнее, чем разобранная в п. 3 § 2, и была решена в работе [2.12]. В этой работе было показано, что на прямых  $x - vt = \text{const}$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  задача Римана упрощается и сводится к задаче, где факторизуемая матрица не зависит от  $\lambda$ . Такая задача уже решается явно в терминах специальных функций. При этом возникают интересные связи с так называемыми изомондромными решениями, автомодельными решениями и уравнениями типа Пенлеве. Эта обширная тематика не разбирается в нашей книге, и мы можем лишь отослать читателя к оригинальной литературе [2.35—2.37], [2.41], [2.43—2.45], [2.51—2.52]. Роль изомондромных решений задачи Римана в теории солитонов обсуждается в работе [2.14].

7) Формализм интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко был развит в работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [2.3] и В. А. Марченко [2.19], в которых было дано полное решение обратной задачи для радиального уравнения Шредингера (оператора Шредингера на полуоси). Простое изложение этих методов и их связь с подходом М. Г. Крейна [2.15—2.16] дано в обзоре [2.28]. Уравнение Шредингера на всей оси (одномерный оператор Шредингера) было рассмотрено в работах И. Кэя и Г. Мозеса [2.46—2.48]. Полное математическое исследование задачи для потенциалов  $u(x)$ , удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty, \quad (9.2)$$

было дано в работах [2.27, 2.29]. Там впервые было показано, что следует использовать оба уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко, и установлена связь их решений.

Для модели НШ в быстроубывающем случае решение обратной задачи на основе этого метода было дано в работе [2.6] для  $\epsilon = -1$  и в работе [2.25] для  $\epsilon = 1$ . Отметим также, что обратная задача для радиального оператора Дирака с ненулевой массой была решена в работе [2.2].

8) Солитонные решения для модели НШ в быстроубывающем случае впервые были описаны и исследованы в работе [2.6].

9) В § 6 мы уже отмечали технические трудности исследования задачи Римана для случая конечной плотности, связанные с наличием края у непрерывного спектра.

В идейном плане похожие осложнения возникают и при исследовании задачи Римана для одномерного оператора Шредингера. Роль поверхности  $\Gamma$  здесь играет риманова поверхность функции  $k = \sqrt{\lambda}$ ; в точке ветвления  $\lambda = 0$  при этом может возникнуть виртуальный уровень. В этой связи представляет интерес общая задача о построении аналога теории Гохберга — Крейна для задачи Римана на произвольной римановой поверхности.

10) Уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко для случая конечной плотности, полученные в § 7, были выведены в работе [2.7] (см. также ра-

боты [2.4], [2.31], [2.39]). Здесь мы исследуем эти уравнения по схеме, впервые проведенной для одномерного оператора Шредингера в работах [2.27, 2.29] (см. также обзор [2.30]). Доказательство однозначной разрешимости интегральных уравнений (7.37) и (7.44), основанное на положительности соответствующих операторов, аналогично подходу из комментария 5).

Исследование уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко в быстроубывающем случае может быть проведено по изложенной в § 7 схеме, которая в этом случае технически упрощается.

11) Мы предполагали в § 7, для простоты изложения, что граничные значения в случае конечной плотности принимаются в смысле Шварца. В § 1.11 отмечалось, в какой степени эти требования можно ослабить. При этом условия на коэффициенты  $a_\rho(\lambda)$  и  $b_\rho(\lambda)$  в точках  $\lambda = \pm\omega$  следует записывать в виде

$$kb_\rho(\lambda) = b_\pm + o(1), \quad ka_\rho(\lambda) = a_\pm + o(1) \quad (9.3)$$

при  $k \rightarrow 0$ . Тогда изложенный формализм решения обратной задачи проходит и для этого случая.

Для одномерного оператора Шредингера в прямой и обратной задачах рассеяния естественным является условие (9.2) на потенциал  $u(x)$ . Именно это условие и было использовано в работах [2.27, 2.29]. Однако поведение коэффициентов перехода на краю непрерывного спектра там было записано неаккуратно. Это послужило поводом для критики в работе [2.40], после которой сложилось впечатление, что на функцию  $u(x)$  следует накладывать более сильное условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) |u(x)| dx < \infty. \quad (9.4)$$

Однако, как было показано в монографии [2.20] и в работе [2.18], после необходимого уточнения поведения коэффициентов перехода при  $k=0$  схема из работ [2.27, 2.29] для потенциалов, удовлетворяющих только условию (9.2), остается в силе.

12) Солитонные решения для случая конечной плотности были изучены в работе [2.7]. Отметим предложенный там метод исследования взаимодействия солитонов. Он основан на предположении, что при  $t \rightarrow \pm\infty$  многосолитонное решение  $\Psi(x, t)$  представляется в виде суммы пространственно разделенных солитонов. Для таких функций  $\Psi(x, t)$ ,  $\bar{\Psi}(x, t)$  вспомогательная линейная задача решается явно и коэффициенты перехода дискретного спектра, а вместе с ними и параметры  $x_{0i}^{(\pm)}$ , явно вычисляются.

Применительно к быстроубывающему случаю такой способ вычисления изложен в монографии [2.11].

Способ, избранный нами в § 8, основан на непосредственном исследовании явных формул (8.33) — (8.36) для многосолитонного решения. Выражение для определителя матрицы вида (8.49), играющее важную роль при вычислении, можно найти в задачке [2.26].

13) В тексте книги мы педантично употребляли обозначения  $\Psi(x)$ ,  $\bar{\Psi}(x)$  (а также  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$ ), хотя эти пары функций и являются комплексно-сопряженными. Мы делаем это по аналогии с комплексными координатами  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  вещественного пространства  $\mathbb{R}^2$ , что особенно удобно в гамильтоновом формализме. Однако эта запись позволяет также легко перейти к более общему случаю, когда функции  $\Psi(x)$  и  $\bar{\Psi}(x)$  полностью независимы, так что черта уже не означает комплексное сопряжение. Вместо уравнения НШ при этом следует рассматривать систему уравнений

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2x \Psi^2 \bar{\Psi}, \\ i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} - 2x \bar{\Psi}^2 \Psi. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Все результаты гл. I, включая представление нулевой кривизны и исследование отображения  $\mathcal{F}$ , в принципе остаются в силе и для такой системы. При этом, разумеется, различные инволюции для решений Иоста уже не имеют места, так что, например, приведенная матрица монодромии  $T(\lambda)$  для быстроубывающего случая имеет вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \bar{e}\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Здесь функции  $\bar{a}(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$  уже не являются комплексно-сопряженными к  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  соответственно. То же верно и для дискретного спектра  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$  и его коэффициентов перехода  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$ . В случае конечной плотности соответствующие граничные условия теперь имеют вид

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = \rho_1^{(\pm)}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{\psi}(x) = \rho_2^{(\pm)}, \quad (9.7)$$

где уже, вообще говоря,  $|\rho_1^{(\pm)}| \neq |\rho_2^{(\pm)}|$  и лишь требуется, чтобы  $\rho_1^{(-)}\rho_2^{(-)} = \rho_1^{(+)} \times \rho_2^{(+)}$ .

Что же касается пуассоновых структур, введенных в § I.1, то формулы (I.1.18) и связанные с ними следует понимать в формально-комплексном смысле. Так, например, гамильтониан  $H$  (см. (I.1.24)) принимает вид

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \kappa \bar{\psi}^2 \psi^2 \right) dx \quad (9.8)$$

и является уже комплекснозначным функционалом.

Все результаты гл. II также допускают обобщение, за исключением одного важного обстоятельства. Матрица

$$G(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{e}\bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x} \\ -b(\lambda) e^{i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

из задачи Римана (2.1) уже не подпадает под действие использованной нами теоремы Гохберга — Крейна, поскольку теперь  $b(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$  полностью независимы. Поэтому для разрешимости задачи Римана приходится требовать, чтобы частные индексы матрицы  $G(x, \lambda)$  исчезали при всех  $x$ . Таким образом, возникают сильные дополнительные ограничения на данные обратной задачи, сформулированные весьма неявно. Более того, класс таких данных уже не является, очевидным образом, инвариантным при динамике по  $t$ .

Аналогичным образом в формализме Гельфанда — Левитана — Марченко в качестве условий на исходные данные приходится включать требование разрешимости соответствующих интегральных уравнений.

Общий случай для быстроубывающих граничных условий был подробно рассмотрен в работе [2.34]. С общим случаем граничных условий типа конечной плотности (9.7) можно ознакомиться по работам [2.4] и [2.38, 2.39].

Учитывая, что в физических приложениях в первую очередь возникает обычное уравнение НШ, мы ограничились в книге рассмотрением только этой модели, которая допускает инволюцию комплексного сопряжения.

14) Помимо задачи Римана и уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко, существуют и другие схемы построения решений для широкого класса нелинейных уравнений. Мы имеем в виду, например, схемы, изложенные в работах [2.21], [2.42], [2.50]. Однако нам представляется, что они не так естественны с математической точки зрения. Вопрос о выделении решений, принадлежащих заданным функциональным классам, в рамках этих схем исследован менее подробно, чем в методе задачи Римана или в формализме Гельфанда — Левитана — Марченко.

## ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА

В этой главе мы вернемся к гамильтоновой формулировке модели НШ и рассмотрим основное преобразование метода обратной задачи

$$\mathcal{F}: (\psi(x), \bar{\psi}(x)) \rightarrow (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \gamma_j)$$

с гамильтоновой точки зрения. Мы опишем пуассонову структуру на многообразии коэффициентов перехода и дискретного спектра вспомогательной линейной задачи, порожденную преобразованием  $\mathcal{F}$  из исходной пуассоновой структуры, введенной в гл. I. При этом окажется, что модель НШ в случае быстроубывающих граничных условий и в случае конечной плотности является вполне интегрируемой системой, а преобразование  $\mathcal{F}$  представляет собой переход к переменным типа действие — угол. В частности, будет показано, что введенные в гл. I интегралы движения находятся в инволюции. Теория рассеяния солитонов в этих терминах сводится к простому каноническому преобразованию.

В этой же главе будет введен важный объект метода обратной задачи — классическая  $r$ -матрица, универсальная роль которой будет полностью выявлена лишь в части II. Здесь мы убедимся, что  $r$ -матрица является удобным средством для вычисления и записи скобок Пуассона коэффициентов перехода. Более того, будет показано, что такая запись скобок Пуассона заменяет представление нулевой кривизны.

§ 1. Фундаментальные скобки Пуассона и  $r$ -матрица

Здесь мы опишем способ вычисления скобок Пуассона матричных элементов матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$ . Полученные формулы будут использованы в § 5 и 6 для описания пуассоновой структуры на коэффициентах перехода в случае быстроубывающих граничных условий и, соответственно, в случае конечной плотности.

В данном параграфе все основные вычисления будут носить чисто локальный характер. Мы будем считать, что функции  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  заданы в интервале  $-L < x < L$ , и будем рассматривать

только «финитные» функционалы, т. е. функционалы, зависящие только от  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  при  $x$  внутри этого интервала. Точное определение финитных функционалов было дано в § 1.1.

Напомним, что скобка Пуассона таких функционалов выглядит следующим образом:

$$\{F, G\} = i \int_{-L}^L \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right) dx, \quad (1.1)$$

причем вследствие свойства финитности интегрирование на самом деле ведется по меньшему интервалу. Граничные условия при этом роли не играют. Здесь и в дальнейшем наряду с вещественнозначными функционалами мы будем рассматривать и функционалы, принимающие комплексные значения. Структура Пуассона по линейности переносится и на такие функционалы, и их скобка Пуассона по-прежнему имеет вид (1.1).

Наша ближайшая цель — вычислить все 16 скобок Пуассона между матричными элементами матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  при разных значениях  $\lambda$ . Из определения  $T(x, y, \lambda)$  и свойства суперпозиции (1.3.7) очевидно, что при  $-L < y < x < L$  эти матричные элементы являются финитными функционалами. Для одновременной записи всех скобок Пуассона удобно использовать следующее обозначение.

Пусть  $A$  и  $B$  — финитные матрицы-функционалы, т. е. матрицы  $2 \times 2$ , матричные элементы которых являются финитными функционалами. Положим

$$\{A \otimes B\} = i \int_{-L}^L \left( \frac{\delta A}{\delta \psi(x)} \otimes \frac{\delta B}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta A}{\delta \bar{\psi}(x)} \otimes \frac{\delta B}{\delta \psi(x)} \right) dx, \quad (1.2)$$

где символ  $\otimes$  в правой части означает тензорное произведение. Таким образом, объект  $\{A \otimes B\}$  представляет собой матрицу

$4 \times 4$ , составленную из всевозможных скобок Пуассона матричных элементов матриц  $A$  и  $B$ . Мы будем использовать естественное соглашение для тензорного произведения

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

или

$$(A \otimes B)_{jk, mn} = A_{jm} B_{kn}, \quad (1.4)$$

где  $jk, mn = 11, 12, 21, 22$ , так что

$$\{A \otimes B\}_{jk, mn} = \{A_{jm}, B_{kn}\}. \quad (1.5)$$

Введенное обозначение окажется достаточно удобным, в чем мы неоднократно убедимся в дальнейшем. В частности, основ-

ные свойства скобки Пуассона принимают вид

$$\{A \otimes B\} = -P \{B \otimes A\} P \quad (1.6)$$

— свойство антисимметрии,

$$\{A \otimes BC\} = \{A \otimes B\} (I \otimes C) + (I \otimes B) \{A \otimes C\} \quad (1.7)$$

— свойство дифференцирования и

$$\begin{aligned} A \otimes \{B \otimes C\} + P_{13} P_{23} \{C \otimes \{A \otimes B\}\} P_{23} P_{13} + \\ + P_{13} P_{12} \{B \otimes \{C \otimes A\}\} P_{12} P_{13} = 0 \quad (1.8) \end{aligned}$$

— тождество Якоби.

Разъясним употребленные в этих формулах обозначения. В (1.6) участвует  $4 \times 4$  матрица  $P$  — матрица перестановки в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , определяемая равенством

$$P(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi \quad (1.9)$$

для любых векторов  $\xi$  и  $\eta$  из  $\mathbb{C}^2$ . Из (1.9) следует, что

$$P^2 = I, \quad P(A \otimes B) = (B \otimes A) P, \quad (1.10)$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы  $2 \times 2$ , а через  $I$ , не опасаясь путаницы, мы обозначаем и единичную матрицу  $4 \times 4$  (из контекста всегда ясно, в каком пространстве действует матрица  $I$ ). Через матрицы Паули  $\sigma_a$  (см. § 1.2) матрица  $P$  выражается следующим образом:

$$P = \frac{1}{2} \left( I + \sum_{a=1}^3 \sigma_a \otimes \sigma_a \right) \quad (1.11)$$

и в базисе 11, 12, 21, 22 имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

В формуле (1.8) мы, пользуясь (1.2), определили операцию  $\{\otimes\}$  и для матриц любой размерности, так что  $\{A \otimes \{B \otimes C\}\}$

представляет собой матрицу в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , и через  $P_{12}$  (соответственно  $P_{13}$  и  $P_{23}$ ) обозначили матрицу в этом пространстве, тривиально действующую в третьем (соответственно во втором и первом) сомножителе тензорного произведения и совпадающую с матрицей  $P$  в произведении двух оставшихся сомножителей.

Очевидно, что в записи основных свойств скобки Пуассона через операцию  $\{\otimes\}$  можно считать матрицы  $A, B, C$  матрицами

$n \times n$ , а не обязательно  $2 \times 2$ ; матрица  $n^2 \times n^2$   $P$  при этом по-прежнему будет определяться формулой (1.9) и обладать свойствами (1.10).

Вернемся теперь к вычислению скобок Пуассона. Рассмотрим матрицу  $U(z, \lambda)$  как финитную матрицу-функционал от  $\psi(x), \bar{\psi}(x), -L < x < L$ . Напомним ее явный вид:

$$U(z, \lambda) = \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + U_0(z) = \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + \sqrt{\kappa} (\bar{\psi}(z) \sigma_+ + \psi(z) \sigma_-), \quad (1.13)$$

в котором участвуют матрицы Паули  $\sigma_3, \sigma_+$  и  $\sigma_-$  (см. § 1.2). Основные скобки Пуассона из § 1.1

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0, \quad (1.14)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = i\delta(x-y)$$

позволяют легко вычислить матрицу скобок Пуассона  $\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$ :

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = i\kappa(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-) \delta(x-y). \quad (1.15)$$

Заметим теперь, что матрицу в правой части можно представить в виде

$$\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_- = \frac{1}{2} [P, \sigma_3 \otimes I] = -\frac{1}{2} [P, I \otimes \sigma_3]. \quad (1.16)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться представлением (1.11) для матрицы  $P$  и коммутационными соотношениями для матриц Паули

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3, \quad [\sigma_3, \sigma_+] = 2\sigma_+, \quad [\sigma_3, \sigma_-] = -2\sigma_-. \quad (1.17)$$

Формула (1.16) позволяет переписать правую часть (1.15) в виде линейного выражения по  $U(x, \lambda)$  и  $U(y, \mu)$ .

Действительно, благодаря (1.16) ее можно представить в виде коммутатора  $-\frac{\kappa}{\lambda-\mu} \left[ P, \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 \otimes I + \frac{\mu}{2i} I \otimes \sigma_3 \right] \delta(x-y)$ . Далее, в силу свойства (1.10) матрица  $P$  коммутирует с матрицей  $U_0(x) \otimes I + I \otimes U_0(x)$ . Поэтому мы можем записать матрицу скобок Пуассона  $\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$  в следующем виде:

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda-\mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x-y), \quad (1.18)$$

где

$$r(\lambda) = -\frac{\alpha}{\lambda} P. \quad (1.19)$$

На первый взгляд эта формула представляет собой лишь более громоздкую запись основных скобок Пуассона (1.14). На самом деле, как мы убедимся в этом ниже, приведенная формула является универсальным свойством матриц  $U(x, \lambda)$ , участвующих в представлении нулевой кривизны для всех моделей, рассматриваемых нами в дальнейшем. Оно же, как мы убедимся, лежит в основе самого свойства интегрируемости и допускает естественную ли-алгебраическую интерпретацию. Поэтому набор соотношений (1.18) будем называть *фундаментальными скобками Пуассона*.

Сейчас мы убедимся, что из (1.18) немедленно следуют соотношения для скобок Пуассона матричных элементов матрицы перехода, имеющие вид

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad (1.20)$$

где  $-L < y < x < L$ .

Мы дадим два вывода этого соотношения. Один использует определение матрицы  $T(x, y, \lambda)$  как мультипликативного интеграла через предельный переход (см. § 1.2), а другой — через дифференциальное уравнение (см. § 1.3).

Начнем с первого подхода. Разобьем интервал  $(y, x)$  на  $N$  интервалов  $\Delta_n$ ,  $n=1, \dots, N$ , и будем считать, что  $\Delta$  — максимум длин  $\Delta_n$  — исчезает при  $N \rightarrow \infty$ . Тогда в соответствие с (1.2.14) — (1.2.16) имеем

$$T(x, y, \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N(\lambda), \quad (1.21)$$

где

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^N L_n(\lambda) \quad (1.22)$$

и

$$L_n(\lambda) = I + \int_{\Delta_n} U(x, \lambda) dx. \quad (1.23)$$

Заметим теперь, что в силу (1.18)

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = 0 \quad (1.24)$$

при  $n \neq m$ .



Действительно, при вычислении  $\{L_n \otimes L_m\}$  возникает исчезающий интеграл  $\int_{\Delta_n} \int_{\Delta_m} \delta(x-y) dx dy$ .

Для данного рассуждения очень существенно, что в фундаментальных скобках Пуассона (1.18) участвует только обобщенная функция  $\delta(x-y)$ , а не ее производные. Это важное свойство матрицы  $U(x, \lambda)$  вспомогательной линейной задачи будем называть *ультралокальностью*.

Из формул (1.22), (1.24) и свойства (1.7) получаем, что

$$\begin{aligned} T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu) &= \\ &= \sum_{n=1}^N (\tilde{T}_n(\lambda) \otimes \tilde{T}_n(\mu)) \{L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)\} (T_{n-1}(\lambda) \otimes T_{n-1}(\mu)), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$T_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n L_k(\lambda), \quad \tilde{T}_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^N L_k(\lambda). \quad (1.26)$$

Далее, из фундаментальных скобок Пуассона получаем, что

$$\begin{aligned} \{L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)\} &= \left\{ \int_{\Delta_n} U(x, \lambda) dx \otimes \int_{\Delta_n} U(x, \mu) dx \right\} = \\ &= \left[ r(\lambda - \mu), \int_{\Delta_n} U(x, \lambda) dx \otimes I + I \otimes \int_{\Delta_n} U(x, \mu) dx \right], \end{aligned} \quad (1.27)$$

откуда имеем

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)] + O(\Delta^2). \quad (1.28)$$

Используя свойство коммутатора как дифференцирования по отношению к произведению, на основании (1.28) заключаем, что

$$\{T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)] + O(N\Delta^2). \quad (1.29)$$

Переходя в этом равенстве к пределу  $N \rightarrow \infty$  и учитывая, что  $N\Delta = O(1)$ , получаем соотношение (1.20).

Для второго вывода заметим, что матрицу  $T(x, y, \lambda)$  можно рассматривать как матрицу-функционал от матричных элементов  $U(z, \lambda)$  при  $-L < y \leq z \leq x < L$ . Используя формулу дифференцирования сложной функции, из (1.1) получаем

соотношение

$$\{T_{ab}(x, y, \lambda), T_{cd}(x, y, \mu)\} = \\ = \int_y^x \int_y^x \frac{\delta T_{ab}(x, y, \lambda)}{\delta U_{jk}(z, \lambda)} \{U_{jk}(z, \lambda), U_{lm}(z', \mu)\} \frac{\delta T_{cd}(x, y, \mu)}{\delta U_{lm}(z', \mu)} dz dz', \quad (1.30)$$

где по повторяющимся индексам  $j, k, l, m$  подразумевается суммирование от 1 до 2. При этом мы имеем в виду, что для определения  $\frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta U(z, \lambda)}$  при вариации матрицы-функционала  $T(x, y, \lambda)$  к матрице специального вида  $U(z, \lambda)$  прибавляется матрица общего вида  $\delta U(z, \lambda)$ .

Далее, варьируя дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, \lambda) = U(x, \lambda) T(x, y, \lambda) \quad (1.31)$$

для матрицы перехода (см. § 1.3) с начальным условием

$$T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I, \quad (1.32)$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta T(x, y, \lambda) = U(x, \lambda) \delta T(x, y, \lambda) + \delta U(x, \lambda) T(x, y, \lambda) \quad (1.33)$$

с начальным условием

$$\delta T(x, y, \lambda)|_{x=y} = 0. \quad (1.34)$$

Непосредственно убеждаемся, что решение задачи (1.33) — (1.34) имеет вид

$$\delta T(x, y, \lambda) = \int_y^x T(x, z, \lambda) \delta U(z, \lambda) T(z, y, \lambda) dz, \quad (1.35)$$

откуда получаем, что

$$\frac{\delta T_{ab}(x, y, \lambda)}{\delta U_{jk}(z, \lambda)} = T_{aj}(x, z, \lambda) T_{kb}(z, y, \lambda). \quad (1.36)$$

Подставим теперь эту формулу в выражение (1.30). Мы получим соотношение, которое снова запишем в инвариантном виде:

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = \\ = \int_y^x \int_y^x (T(x, z, \lambda) \otimes T(x, z', \mu)) \{U(z, \lambda) \otimes U(z', \mu)\} \times \\ \times (T(z, y, \lambda) \otimes T(z', y, \mu)) dz dz'. \quad (1.37)$$

Используя фундаментальные скобки Пуассона, получаем отсюда

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = \int_y^x (T(x, z, \lambda) \otimes T(x, z, \mu)) \times \\ \times [r(\lambda - \mu), U(z, \lambda) \otimes I + I \otimes U(z, \mu)] (T(z, y, \lambda) \otimes T(z, y, \mu)) dz. \quad (1.38)$$

В коммутаторе в правой части равенства (1.38) матрицы  $U(z, \lambda)$  и  $U(z, \mu)$  стоят слева или справа соответственно от матриц  $T(z, y, \lambda)$ ,  $T(z, y, \mu)$  и  $T(x, z, \lambda)$ ,  $T(x, z, \mu)$ . Используя дифференциальные уравнения (1.31) и

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y, \lambda) = -T(x, y, \lambda)U(y, \lambda), \quad (1.39)$$

убеждаемся, что подынтегральное выражение в (1.38) представляет собой полную производную по  $z$  от произведения

$$(T(x, z, \lambda) \otimes T(x, z, \mu)) r(\lambda - \mu) (T(z, y, \lambda) \otimes T(z, y, \mu)).$$

Интегрируя с учетом начального условия (1.32), получаем соотношение (1.20).

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний по поводу полученных формул.

1. Отнюдь не произвольная матрица  $r(\lambda)$  может играть роль классической  $r$ -матрицы. Для совместности фундаментальных скобок Пуассона (1.18) со свойством антисимметрии (1.6) и тождеством Якоби (1.8) достаточно, соответственно, выполнения соотношений

$$r(-\lambda) = -Pr(\lambda)P \quad (1.40)$$

и

$$[r_{12}(\lambda - \mu), r_{13}(\lambda) + r_{23}(\mu)] + [r_{13}(\lambda), r_{23}(\mu)] = 0. \quad (1.41)$$

Матрица  $r(\lambda)$  из (1.19) очевидно удовлетворяет этим равенствам. Обратное, при выполнении условий (1.40) — (1.41) равенство (1.18) задает пуассонову структуру на пространстве функционалов от матричных элементов матрицы  $U(x, \lambda)$ . В части II мы дадим способ построения других решений уравнений (1.40) — (1.41) и покажем, что с каждым из них можно связать интегрируемую гамильтонову систему.

2. Приведенные выше два способа вывода соотношения (1.20) из фундаментальных скобок Пуассона носили совершенно общий характер и не зависели от конкретного вида матриц  $U(x, \lambda)$  и  $r(\lambda)$ . Именно, мы показали, что если матрица  $U(x, \lambda)$  удовлетворяет соотношению (1.18) с некоторой матрицей  $r(\lambda)$ , то для скобок Пуассона матричных элементов матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  выполняется равенство (1.20). При этом локальная формула (1.18) является инфинитезимальным вариантом (1.20).

3. В правых частях формул (1.18) и (2.20) имеется кажущаяся сингулярность при  $\lambda=0$  вследствие того, что знаменатель в (1.19) исчезает при  $\lambda=\mu$ . Однако, благодаря свойству (1.10) матрица  $P$  коммутирует как с матрицей  $U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \lambda)$ , так и с матрицей  $T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \lambda)$ , так что и числитель в формулах (1.18), (1.20) исчезает при  $\lambda=\mu$  и сингулярность не возникает («правило Лопиталя»).

4. При  $-L < x < y < L$  из равенства (1.20) следует, что

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = -[r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad (1.42)$$

так как (см. § 1.3)

$$T(y, x, \lambda) = T^{-1}(x, y, \lambda). \quad (1.43)$$

5. Соотношение (1.20) можно обобщить и на матрицы перехода, отвечающие двум произвольным интервалам  $(y, x)$  и  $(y', x')$ , содержащимся в  $(-L, L)$ . Заметим для этого, что, вследствие ультралокальности, скобки Пуассона матричных элементов матриц  $T(x, y, \lambda)$  и  $T(x', y', \mu)$  исчезают для непересекающихся интервалов  $(y, x)$  и  $(y', x')$ , так же как и для интервалов, имеющих только одну общую точку. Поэтому из свойства суперпозиции (1.3.7), свойства дифференцирования и (1.20) получаем, что

$$\begin{aligned} \{T(x, y, \lambda) \otimes T(x', y', \mu)\} &= (T(x, x'', \lambda) \otimes T(x', x'', \mu)) \times \\ &\times [r(\lambda - \mu), T(x'', y'', \lambda) \otimes T(x'', y'', \mu)] (T(y'', y, \lambda) \otimes T(y'', y', \mu)), \end{aligned} \quad (1.44)$$

где  $(y'', x'')$  — пересечение интервалов  $(y, x)$  и  $(y', x')$ .

## § 2. Инволютивность интегралов движения в квазипериодическом случае

В качестве первого применения полученных в предыдущем параграфе формул докажем, что построенные в § 1.4 локальные интегралы движения  $I_n$  находятся в инволюции:

$$\{I_n, I_m\} = 0. \quad (2.1)$$

Но прежде всего мы должны убедиться, что  $I_n$  являются допустимыми функционалами на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L, \theta}$  (см. § 1.1). Мы покажем, что допустимым является производящий функционал  $F_L(\lambda)$ , введенный в § 1.2:

$$F_L(\lambda) = \text{tr } T_L(\lambda) Q(\theta). \quad (2.2)$$

Будем исходить из квазипериодических граничных условий

$$\psi(x+2L) = e^{i\theta} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x+2L) = e^{-i\theta} \bar{\psi}(x) \quad (2.3)$$

и фиксированной фундаментальной области  $-L \leq x \leq L$ . Рассмотрим матрицу перехода  $T(x, y, \lambda)$  при  $-L < y < x < L$ . Как отмечалось в § 1, ее матричные элементы являются финитными функционалами. Возможность их представления в виде рядов по  $\psi(z)$ ,  $\bar{\psi}(z)$  типа (I.1.7) следует из того, что матрица перехода удовлетворяет вольтерровскому уравнению (I.3.26):

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_y^x T(x, z, \lambda) U_0(z) E(z - y, \lambda) dz, \quad (2.4)$$

где  $E(z, \lambda) = \exp \left\{ \frac{\lambda z \sigma_3}{2i} \right\}$ . Итерации для него абсолютно сходятся и дают искомые ряды для матричных элементов матрицы  $T(x, y, \lambda)$ .

Вычислим теперь вариационные производные  $\frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta \psi(z)}$ ,  $\frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)}$ . Для этого воспользуемся формулой (1.35) и положим в ней

$$\delta U(z, \lambda) = \sqrt{\kappa} (\delta \bar{\psi}(z) \sigma_+ + \delta \psi(z) \sigma_-). \quad (2.5)$$

В результате при  $y < z < x$  мы получим выражения

$$\frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta \psi(z)} = \sqrt{\kappa} T(x, z, \lambda) \sigma_- T(z, y, \lambda) \quad (2.6)$$

и

$$\frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} = \sqrt{\kappa} T(x, z, \lambda) \sigma_+ T(z, y, \lambda). \quad (2.7)$$

При  $z$  из фундаментальной области вне интервала  $(y, x)$  эти вариационные производные исчезают.

Таким образом, вычисленные вариационные производные являются разрывными функциями. Поэтому матричные элементы матрицы  $T(x, y, \lambda)$  нельзя считать допустимыми функционалами в смысле § I.1.

Для доказательства допустимости функционала  $F_L(\lambda)$  перейдем в формулах (2.6) — (2.7) к пределу при  $x \rightarrow L$ ,  $y \rightarrow -L$  и рассмотрим вариационные производные  $\frac{\delta T_L(\lambda)}{\delta \psi(z)}$ ,  $\frac{\delta T_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)}$  матрицы

монодромии  $T_L(\lambda) = T(L, -L, \lambda)$ . Из (2.6) — (2.7) следует, что эти вариационные производные как функции  $z$  являются гладкими в интервале  $-L < z < L$ . Переходя к пределу при  $z \rightarrow L - 0$

и  $z \rightarrow -L + 0$ , получаем формулы

$$\left. \frac{\delta T_L(\lambda)}{\delta \psi(z)} \right|_{z=L} = \sqrt{\kappa} \sigma_- T_L(\lambda), \quad (2.8)$$

$$\left. \frac{\delta T_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} \right|_{z=L} = \sqrt{\kappa} \sigma_+ T_L(\lambda) \quad (2.9)$$

и

$$\left. \frac{\delta T_L(\lambda)}{\delta \psi(z)} \right|_{z=-L} = \sqrt{\kappa} T_L(\lambda) \sigma_-, \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\delta T_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} \right|_{z=-L} = \sqrt{\kappa} T_L(\lambda) \sigma_+. \quad (2.11)$$

Отсюда видно, что матричные элементы матрицы монодромии также не являются допустимыми функционалами.

Продолжая доказательство допустимости  $F_L(\lambda)$ , умножим полученные равенства справа на матрицу  $Q(\theta)$  и возьмем след. Используя элементарные формулы

$$Q(\theta) \sigma_+ Q^{-1}(\theta) = e^{i\theta} \sigma_+, \quad (2.12)$$

$$Q(\theta) \sigma_- Q^{-1}(\theta) = e^{-i\theta} \sigma_-, \quad (2.13)$$

получаем требуемые условия квазипериодичности:

$$\left. \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} \right|_{z=L} = e^{i\theta} \left. \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} \right|_{z=-L}, \quad (2.14)$$

$$\left. \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)} \right|_{z=L} = e^{-i\theta} \left. \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)} \right|_{z=-L}. \quad (2.15)$$

Для производных по  $z$   $\frac{d}{dz} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)}$  и  $\frac{d}{dz} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)}$  справедливы аналогичные формулы:

$$\left. \frac{d}{dz} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} \right|_{z=L} = e^{i\theta} \left. \frac{d}{dz} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} \right|_{z=-L}, \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{d}{dz} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)} \right|_{z=L} = e^{-i\theta} \left. \frac{d}{dz} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)} \right|_{z=-L}. \quad (2.17)$$

Для их вывода следует использовать справедливые при  $y < z < x$  равенства

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta \psi(z)} = \sqrt{\kappa} T(x, z, \lambda) [\sigma_-, U(z, \lambda)] T(z, y, \lambda), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta T(x, y, \lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)} = \sqrt{\kappa} T(x, z, \lambda) [\sigma_+, U(z, \lambda)] T(z, y, \lambda), \quad (2.19)$$

которые вытекают из формул (1.31), (1.39) и (2.6) — (2.7), и повторить предыдущие рассуждения с учетом условия квазипериодичности

$$U(L, \lambda) = Q^{-1}(\theta) U(-L, \lambda) Q(\theta). \quad (2.20)$$

Условия (2.14) — (2.17) вместе с гладкостью функций  $\frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)}$ ,  $\frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)}$  при  $-L < z < L$  позволяют продолжить эти функции на всю вещественную ось  $-\infty < z < \infty$  гладким квазипериодическим образом:

$$\frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z+2L)} = e^{i\theta} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)}, \quad \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z+2L)} = e^{-i\theta} \frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)}. \quad (2.21)$$

При этом для бесконечно дифференцируемых функций  $\psi(z)$ ,  $\bar{\psi}(z)$  вариационные производные  $\frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \psi(z)}$ ,  $\frac{\delta F_L(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(z)}$  также являются бесконечно дифференцируемыми квазипериодическими функциями на всей оси.

И наконец заметим, что функционал  $F_L(\lambda)$  является вещественно-аналитическим. Его разложение в ряд типа (1.1.7) получается из соответствующего разложения для функционала  $\text{tr} T(x, y, \lambda) Q(\theta)$  предельным переходом при  $x \rightarrow L$ ,  $y \rightarrow -L$ . Это завершает доказательство допустимости функционала  $F_L(\lambda)$ .

Покажем теперь, что *интегралы движения, порожденные  $F_L(\lambda)$ , находятся в инволюции:*

$$\{F_L(\lambda), F_L(\mu)\} = 0. \quad (2.22)$$

Для этого воспользуемся соотношением (1.20)

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad (2.23)$$

где  $-L < y < x < L$ , и умножим его справа на матрицу  $Q(\theta) \otimes Q(\theta)$ . Элементарное свойство

$$[r(\lambda), Q \otimes Q] = 0 \quad (2.24)$$

показывает, что соотношение (2.22) остается справедливым и при замене  $T(x, y, \lambda)$  и  $T(x, y, \mu)$  на  $T(x, y, \lambda) Q(\theta)$  и  $T(x, y, \mu) \times Q(\theta)$ . Возьмем теперь от получившегося равенства матричный след в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  и воспользуемся свойством

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr} A \cdot \text{tr} B, \quad (2.25)$$

где  $\text{tr}$  справа означает след в  $\mathbb{C}^2$ . Поскольку след от коммутатора исчезает, получаем соотношение

$$\{\text{tr} T(x, y, \lambda) Q(\theta), \text{tr} T(x, y, \mu) Q(\theta)\} = 0. \quad (2.26)$$

В нем можно перейти к пределу при  $x \rightarrow L$ ,  $y \rightarrow -L$ ; в результате получаем равенство (2.22).

Итак, мы доказали инволютивность интегралов движения рассматриваемой модели. Равенство (2.1) следует из формулы (2.22) с помощью разложения

$$\rho_L(\lambda) = -\lambda L + \frac{\theta}{2} + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (2.27)$$

где

$$\rho_L(\lambda) = \operatorname{arccos} \frac{1}{2} F_L(\lambda) \quad (2.28)$$

(см. § 1.4).

С каждым локальным интегралом  $I_n$  на многообразии  $\mathcal{M}_{L,\theta}$  ассоциируется гамильтонов поток

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \{I_n, \psi\}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \{I_n, \bar{\psi}\}. \quad (2.29)$$

Потоки, получающиеся при  $n=1, 2$ , имеют простую физическую интерпретацию (см. § 1.1); при  $n=3$  получаем уравнение НШ. Соответствующие уравнения движения (особенно при  $n > 3$ ) принято называть *высшими нелинейными уравнениями Шредингера (высшими уравнениями НШ)*.

Замечательным обстоятельством является тот факт, что, помимо тривиальных первых двух потоков, имеется также бесконечный набор коммутирующих потоков. Можно сказать, что в этом проявляется «скрытая симметрия» модели НШ.

Во избежание недоразумения отметим, что инволютивные функционалы из семейства  $\operatorname{tr} T(x, y, \lambda) Q$ , где, очевидно, матрица  $Q$  может быть произвольной, не имеют отношения к рассматриваемой модели. Во-первых, они не имеют гладких вариационных производных и поэтому являются недопустимыми функционалами. Но даже если мы и согласимся расширить класс допустимых наблюдаемых, функционалы  $\operatorname{tr} T(x, y, \lambda) Q$  не находятся в инволюции с интегралами  $I_n$  и не помогают интегрируемости модели НШ.

Существование бесконечного количества инволютивных интегралов движения указывает на возможность полной интегрируемости нашей модели. В случае фазового пространства конечной размерности  $2n$  имеется теорема Лиувилля—Арнольда, утверждающая, что гамильтонова система является вполне интегрируемой, если она обладает набором из  $n$  (половина размерности фазового пространства) интегралов движения в инволюции. При этом само фазовое пространство расслаивается на подмногообразия размерности  $n$ , движение вдоль которых линейно.



В нашем случае фазовое пространство бесконечномерно и ситуация с интегрируемостью не столь проста ввиду отсутствия аналога теоремы Лиувилля — Арнольда. Рассуждая наивно, можно, конечно, утверждать, что «число» интегралов движения  $I_n$ , содержащихся в  $p_L(\lambda)$ , равно «половине размерности» фазового пространства и что эти интегралы являются функционально независимыми.

Однако в квазипериодическом случае реализация этих соображений и, в особенности, построение переменных типа углов (движение вдоль которых линейно) требует привлечения анализа на римановых поверхностях (в общем случае бесконечного рода) — аппарата, выходящего за рамки этой книги. Поэтому мы не будем продвигаться дальше в изучении квазипериодического случая, используя его лишь для отработки основных конструкций, связанных с  $r$ -матрицей (см. § 3—5). Напротив, в быстробывающем случае и для граничных условий конечной плотности мы до конца исследуем вопрос о полной интегрируемости и явно построим соответствующим образом переменные типа действие — угол.

### § 3. Вывод представления нулевой кривизны из фундаментальных скобок Пуассона

Здесь мы покажем, в каком смысле существование фундаментальных скобок Пуассона заменяет условие нулевой кривизны. Более точно, по заданной  $r$ -матрице и матрице  $U(x, \lambda)$  мы построим набор матриц  $V_n(x, \lambda)$ , участвующих в представлении нулевой кривизны для высших уравнений НШ — уравнений движения, порожденных интегралами  $I_n$ . При этом, как и в § 2, мы ограничимся пока случаем квазипериодических граничных условий.

Рассмотрим производящие уравнения движения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{p_L(\mu), \Psi\}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \{p_L(\mu), \bar{\Psi}\} \quad (3.1)$$

для всех высших уравнений НШ. Здесь

$$p_L(\mu) = \arccos \frac{1}{2} F_L(\mu), \quad (3.2)$$

а  $\mu$  играет роль параметра. Покажем, что уравнение (3.1) эквивалентно условию нулевой кривизны

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, \lambda) - \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda, \mu) + [U(x, \lambda), V(x, \lambda, \mu)] = 0, \quad (3.3)$$

выполняющемуся при всех  $\lambda$  (где мы, для сокращения записи, опустили зависимость от  $t$ ), и дадим явное выражение для матрицы  $V(x, \lambda, \mu)$ .

Вычислим матрицу скобок Пуассона  $\{T(x, y, \mu) \otimes U(z, \lambda)\}$ ,

где  $-L < y < z < x < L$ . По аналогии со вторым выводом формулы (1.20), используя (1.18), (1.36) и очевидное равенство

$$\frac{\delta U_{ab}(z, \lambda)}{\delta U_{cd}(z', \lambda)} = \delta_{ac} \delta_{bd} \delta(z - z'), \quad (3.4)$$

где  $\delta_{ab}$  —  $\delta$ -символ Кронекера, имеем выражение

$$\begin{aligned} \{T(x, y, \mu) \otimes U(z, \lambda)\} &= (T(x, z, \mu) \otimes I) \times \\ &\times [r(\mu - \lambda), U(z, \mu) \otimes I + I \otimes U(z, \lambda)] (T(z, y, \mu) \otimes I). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В нем участвует матрица  $4 \times 4$

$$M(z, x, y; \lambda, \mu) = (T(x, z, \mu) \otimes I) r(\mu - \lambda) (T(z, y, \mu) \otimes I), \quad (3.6)$$

входящая в (3.5) посредством коммутатора с матрицей  $I \otimes U(z, \lambda)$ . Для преобразования оставшихся слагаемых с матрицей  $U(z, \mu) \otimes I$  в правой части (3.5) воспользуемся дифференциальными уравнениями (1.39) и (1.31) для  $T(x, z, \mu)$  и  $T(z, y, \mu)$  соответственно. Мы получим, что эти слагаемые дают выражение  $\frac{\partial}{\partial z} M(z, x, y; \lambda, \mu)$ . Таким образом, окончательно имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \{T(x, y, \mu) \otimes U(z, \lambda)\} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z} M(z, x, y; \lambda, \mu) + [M(z, x, y; \lambda, \mu), I \otimes U(z, \lambda)]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В дальнейшем, помимо обычного матричного следа  $\text{tr}$ , мы будем также использовать операцию  $\text{tr}_1$  — матричный след по первому сомножителю в тензорном произведении  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Она переводит матрицы в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  в матрицы в  $\mathbb{C}^2$  и определяется по линейности из соотношения

$$\text{tr}_1(A \otimes B) = \text{tr} A \cdot B, \quad (3.8)$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы в  $\mathbb{C}^2$ . Операция  $\text{tr}_1$  характеризуется свойствами

$$\text{tr}_1(I \otimes A) X = A \cdot \text{tr}_1 X, \quad (3.9)$$

$$\text{tr}_1 X (I \otimes A) = \text{tr}_1 X \cdot A, \quad (3.10)$$

$$\text{tr}_1(A \otimes I) X = \text{tr}_1 X (A \otimes I), \quad (3.11)$$

где  $A$  — матрица в  $\mathbb{C}^2$ , а  $X$  — в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ .

Умножим теперь обе части равенства (3.7) справа на матрицу  $Q(\theta) \otimes I$ , возьмем след  $\text{tr}_1$  и перейдем к пределу при  $x \rightarrow L$ ,

$y \rightarrow -L$ . Используя свойства (3.9)–(3.10), получим соотношение

$$\{F_L(\mu), U(x, \lambda)\} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{V}(x, \lambda, \mu) + [\tilde{V}(x, \lambda, \mu), U(x, \lambda)], \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{V}(x, \lambda, \mu) = \text{tr}_1(M(x, L, -L; \lambda, \mu)(Q(\theta) \otimes I)) \quad (3.13)$$

и мы заменили переменную  $z$  на  $x$ ,  $-L \leq x \leq L$ . При этом левая часть (3.12) представляет собой матрицу  $2 \times 2$ , составленную из скобок Пуассона функционала  $F_L(\mu)$  с матричными элементами матрицы  $U(x, \lambda)$ .

Выражение для матрицы  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$  можно упростить, используя явный вид матрицы  $r(\lambda)$  — формулу (1.19). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, \lambda, \mu) &= \frac{z}{\lambda - \mu} \text{tr}_1((T(L, x, \mu) \otimes I)P(T(x, -L, \mu)Q(\theta) \otimes I)) = \\ &= \frac{z}{\lambda - \mu} \text{tr}_1(P(T(x, -L, \mu)Q(\theta)T(L, x, \mu) \otimes I)) = \\ &= \frac{z}{\lambda - \mu} \text{tr}_1((I \otimes T(x, -L, \mu)Q(\theta)T(L, x, \mu))P) = \\ &= \frac{z}{\lambda - \mu} T(x, -L, \mu)Q(\theta)T(L, x, \mu) \cdot \text{tr}_1 P, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где мы воспользовались свойствами (3.11), (1.10) и (3.9). Далее, из явного вида матрицы  $P$  — формулы (1.11) — следует, что

$$\text{tr}_1 P = I, \quad (3.15)$$

откуда для матрицы  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$  получаем представление

$$\tilde{V}(x, \lambda, \mu) = \frac{z}{\lambda - \mu} T(x, -L, \mu)Q(\theta)T(L, x, \mu). \quad (3.16)$$

Покажем теперь, что матрица  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$  удовлетворяет условию квазипериодичности

$$\tilde{V}(x+2L, \lambda, \mu) = Q^{-1}(\theta)\tilde{V}(x, \lambda, \mu)Q(\theta). \quad (3.17)$$

Следуя рассуждениям предыдущего параграфа, мы сравним матрицы  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$  при  $x=L$  и  $x=-L$ . Имеем

$$\tilde{V}(L, \lambda, \mu) = \frac{z}{\lambda - \mu} T_L(\mu)Q(\theta) \quad (3.18)$$

и

$$\tilde{V}(-L, \lambda, \mu) = \frac{z}{\lambda - \mu} Q(\theta)T_L(\mu), \quad (3.19)$$

так что

$$\tilde{V}(L, \lambda, \mu) = Q^{-1}(\theta)\tilde{V}(-L, \lambda, \mu)Q(\theta). \quad (3.20)$$

Это равенство вместе с гладкостью матричных элементов матрицы  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$  при  $-L < x < L$  и обеспечивает возможность ее

продолжения на всю ось  $-\infty < x < \infty$  с выполнением условия квазипериодичности (3.17).

Итак, мы убедились, что левая и правая части формулы (3.12) корректно определены для рассматриваемых граничных условий. Полученное равенство означает, что все коммутирующие потоки на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L, \theta}$ , порожденные общими уравнениями движения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{F_L(\mu), \Psi\}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \{F_L(\mu), \bar{\Psi}\}, \quad (3.21)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial U(x, \lambda)}{\partial t} = \{F_L(\mu), U(x, \lambda)\}, \quad (3.22)$$

представляются в виде условия нулевой кривизны (3.3) с матрицей  $\Gamma(x, \lambda, \mu)$ , задаваемой формулой (3.16). При этом наш вывод носил общий характер и был основан на фундаментальных скобках Пуассона.

Однако уравнения (3.22) являются нелокальными. *Покажем теперь, как из полученных формул получают представление нулевой кривизны для потоков, порожденных локальными интегралами  $I_n$  — высших уравнений НШ.*

Для этого воспользуемся представлением (I.4.5) для матрицы перехода

$$T(x, y, \mu) = (I + W(x, \mu)) e^{Z(x, y, \mu)} (I + W(y, \mu))^{-1}, \quad (3.23)$$

где  $W(x, \mu)$  и  $Z(x, y, \mu)$  — соответственно антидиагональная и диагональная матрицы. Как отмечалось в § I.4, это разложение носит асимптотический характер при больших вещественных  $\mu$  и справедливо с точностью  $O(|\mu|^{-\infty})$ , а матрицы  $W(x, \mu)$  и  $Z(x, y, \mu) + \frac{i\mu\sigma_3}{2}(x-y)$  представляют собой асимптотические

ряды Тейлора по переменной  $\mu^{-1}$ . Поэтому все дальнейшие преобразования понимаются в асимптотическом смысле и получающиеся формулы справедливы с точностью  $O(|\mu|^{-\infty})$ , что мы ниже не будем оговаривать явно.

Подставим теперь разложение (3.23) в формулу (3.16). Используя условие квазипериодичности

$$W(x+2L, \mu) = Q^{-1}(\theta) W(x, \mu) Q(\theta) \quad (3.24)$$

и диагональность матрицы  $Z(x, y, \mu)$ , для  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$  получаем представление

$$\tilde{V}(x, \lambda, \mu) = \frac{\varkappa (I + W(x, \mu)) e^{Z_L(x, \mu)} Q(\theta) (I + W(x, \mu))^{-1}}{\lambda - \mu}. \quad (3.25)$$

Заметим далее, что из (3.23) — (3.24) следует разложение

$$T_L(\mu) Q(\theta) = (I + W(L, \mu)) e^{ZL(\mu)} Q(\theta) (I + W(L, \mu))^{-1}, \quad (3.26)$$

что вместе с унимодулярностью матрицы  $T_L(\mu) Q(\theta)$  и определением

$$\operatorname{tr} T_L(\mu) Q(\theta) = 2 \cos p_L(\mu) \quad (3.27)$$

приводит к равенству

$$e^{ZL(\mu)} Q(\theta) = \cos p_L(\mu) I + i \sin p_L(\mu) \sigma_3. \quad (3.28)$$

Подставляя это в (3.25), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, \lambda, \mu) &= \frac{\kappa}{\lambda - \mu} \cos p_L(\mu) I + \\ &+ \frac{i\kappa}{\lambda - \mu} \sin p_L(\mu) (I + W(x, \mu)) \sigma_3 (I + W(x, \mu))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Теперь обратим внимание, что первое слагаемое в (3.29) не зависит от  $x$  и пропорционально единичной матрице. Поэтому оно не дает вклада в правую часть (3.12) и его можно опустить. Таким образом, получаем искомое представление для матрицы  $\tilde{V}(x, \lambda, \mu)$ :

$$\tilde{V}(x, \lambda, \mu) = -2 \sin p_L(\mu) V(x, \lambda, \mu), \quad (3.30)$$

где

$$V(x, \lambda, \mu) = \frac{\kappa}{2i(\lambda - \mu)} (I + W(x, \mu)) \sigma_3 (I + W(x, \mu))^{-1}. \quad (3.31)$$

После этих преобразований вернемся к задаче о получении представления нулевой кривизны для уравнений (3.1), или, что эквивалентно, для уравнения

$$\frac{\partial U(x, \lambda)}{\partial t} = \{p_L(\mu), U(x, \lambda)\}. \quad (3.32)$$

Используя элементарную формулу

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccos} f(t) = - \frac{1}{\sqrt{1 - f^2(t)}} \frac{df(t)}{dt} \quad (3.33)$$

и равенства (3.12), (3.30), убеждаемся в справедливости формулы

$$\{p_L(\mu), U(x, \lambda)\} = \frac{\partial V(x, \lambda, \mu)}{\partial x} + [V(x, \lambda, \mu), U(x, \lambda)]. \quad (3.34)$$

Отсюда получаем, что уравнение (3.32) допускает представление нулевой кривизны, понимаемое в асимптотическом смысле с точностью  $O(|\mu|^{-\infty})$ .

Матрица  $V(x, \lambda, \mu)$  представляет собой производящую функцию для матриц  $V_n(x, \lambda)$ , участвующих в представлении нулевой кривизны для высших уравнений НШ. Действительно, в § 1.4

мы показали, что матрица  $W(x, \mu)$  допускает асимптотическое разложение вида

$$W(x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\mu^n} + O(|\mu|^{-\infty}), \quad (3.35)$$

где коэффициенты  $W_n(x)$  являются полиномами от  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и их производных в точке  $x$ . Подставляя это разложение в (3.31) и раскладывая знаменатель  $\frac{1}{\lambda - \mu}$  в геометрическую прогрессию, приходим к разложению

$$V(x, \lambda, \mu) = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x, \lambda)}{\mu^n} + O(|\mu|^{-\infty}), \quad (3.36)$$

где коэффициенты  $V_n(x, \lambda)$  явно вычисляются. Первые из них имеют вид  $V_1 = \frac{i}{2} \sigma_3$ ,  $V_2(x, \lambda) = -U(x, \lambda)$ , а  $V_3(x, \lambda)$  совпадает с матрицей  $V(x, \lambda)$  из § 1.2 (см. (I.2.6) — (I.2.8)).

Сравнивая разложение (3.36) с (2.27), получаем, что *все высшие уравнения НШ*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \{I_n, \psi\}, \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} &= \{I_n, \bar{\psi}\}, \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots; \quad (3.37)$$

*допускают представления нулевой кривизны с матрицами  $U(x, \lambda)$  и  $V_n(x, \lambda)$ .* Матричные элементы матриц  $V_n(x, \lambda)$  являются полиномами от  $\lambda$ ,  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и их производных в точке  $x$ , причем их степень по  $\lambda$  есть  $n-1$ . При этом в соответствующем условии нулевой кривизны будет участвовать полином степени  $n$  по  $\lambda$ ; коэффициенты его при степенях  $\lambda, \dots, \lambda^n$  исчезают тождественно, а исчезновение постоянного члена эквивалентно  $n$ -му уравнению НШ.

Итак, мы показали, что фундаментальные скобки Пуассона заменяют представление нулевой кривизны. Закончим этот параграф следующим общим замечанием.

Условие нулевой кривизны, представляющее собой фундаментальный факт метода обратной задачи, выглядит несколько мистически и появляется в § 1.2 лишь как замечательное вычислительное наблюдение. Гамильтонов подход, основанный на понятии  $r$ -матрицы и фундаментальных скобок Пуассона, дает этому наблюдению естественное объяснение. Однако, в свою очередь, можно сказать, что пока непонятен внутренний смысл метода  $r$ -матрицы. Тем не менее мы надеемся, что к концу книги в части II мы объясним его естественность, исходя из фундаментальных ли-алгебраических соображений.

#### § 4. Интегралы движения в быстроубывающем случае и в случае конечной плотности

В этом параграфе мы вернемся к интегралам движения и рассмотрим их с гамильтоновой точки зрения для быстроубывающих граничных условий и случая конечной плотности.

Начнем с быстроубывающего случая. Как мы показали в § 1.7, локальные интегралы движения  $I_n$  получаются из соответствующих функционалов для квазипериодического случая с  $\theta=0$  предельным переходом  $L \rightarrow \infty$ . По построению функционалы  $I_n$  соответствуют наблюдаемым на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Поэтому их скобки Пуассона также получают предельным переходом  $L \rightarrow \infty$ , так что в силу рассуждений в § 2 интегралы движения  $I_n$  находятся в инволюции:

$$\{I_n, I_m\} = 0. \quad (4.1)$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае потоки на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ , порожденные высшими уравнениями НШ, коммутируют, а для самих уравнений справедливо представление нулевой кривизны, где матрицы  $U(x, \lambda)$  и  $V_n(x, \lambda)$  даются теми же формулами, что и в § 3.

Роль производящей функции интегралов движения  $I_n$  играет  $\frac{1}{i} \ln a(\lambda)$ , где коэффициент перехода  $a(\lambda)$  был введен в § 1.5.

При этом асимптотическое разложение  $\frac{1}{i} \ln a(\lambda)$  по степеням  $\lambda^{-1}$  получается из соответствующего разложения для  $p_L(\lambda) + \lambda L$  при  $L \rightarrow \infty$  (см. § 1.7). Это наводит на предположение, что функционалы  $\frac{1}{i} \ln a(\lambda)$  являются инволютивными, так же как и  $p_L(\lambda)$ . В этом мы убедимся в § 6—7, где покажем, что функционалы  $a(\lambda)$  при  $\text{Im} \lambda > 0$  соответствуют наблюдаемым на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ , а скобки Пуассона  $\{a(\lambda), a(\mu)\}$  и  $\{\bar{a}(\lambda), \bar{a}(\mu)\}$  исчезают.

Рассмотрим теперь граничные условия конечной плотности. Как отмечалось в § 1.10, функционалы  $I_n$  для квазипериодического случая уже не имеют пределов при  $L \rightarrow \infty$ . Для их регуляризации следует использовать асимптотические разложения функции  $p_L(\lambda) + kL$  по степеням  $\lambda^{-1}$  или  $k^{-1}$ , где  $k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$  (см. § 1.8). В этих разложениях уже возможен почленный предельный переход  $L \rightarrow \infty$ , в результате которого получают функционалы на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{0,0}$ . Однако, как отмечалось в § 1.10, при этом могут возникать недопустимые функционалы на  $\mathcal{M}_{0,0}$ , т. е. функционалы, не соответствующие наблюдаемым. Там же указывалось, что допустимые функционалы получаются из асимптотического разложения  $p_L(\lambda) + kL$  по степеням  $k^{-1}$ . Здесь мы докажем это утверждение, используя

полученное в предыдущем параграфе выражение для скобок Пуассона  $\{p_L(\mu), U(x, \lambda)\}$ .

Напомним, что справедливо разложение

$$p_L(\lambda) = -kL + \frac{\theta}{2} + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{k^n} + O(|k|^{-\infty}), \quad (4.2)$$

где  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  (т. е.  $|\lambda| \geq \omega$  и  $\lambda$  вещественно) и  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Функционалы  $J_n$  имеют пределы при  $L \rightarrow \infty$

$$J_{n,\rho} = \lim_{L \rightarrow \infty} J_n, \quad (4.3)$$

в частности,  $J_{1,\rho} = N_\rho$ ,  $J_{2,\rho} = P$ ,  $J_{3,\rho} = H_\rho$ . Производящей функцией интегралов движения  $J_{n,\rho}$  является функция  $\frac{1}{i} \ln a_\rho(\lambda) e^{-i\theta/2}$ , асимптотическое разложение которой при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  получается из (4.2) предельным переходом при  $L \rightarrow \infty$  и имеет вид

$$\frac{1}{i} \ln a_\rho(\lambda) e^{-\frac{i\theta}{2}} = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{n,\rho}}{k^n} + O(|k|^{-\infty}) \quad (4.4)$$

(см. § I.8—I.10). Мы докажем, что при  $n > 1$  вариационные производные  $\frac{\delta J_{n,\rho}}{\delta \psi(x)}$  и  $\frac{\delta J_{n,\rho}}{\delta \bar{\psi}(x)}$  исчезают при  $|x| \rightarrow \infty$ , так что функционалы  $J_{n,\rho}$ ,  $n > 1$ , в отличие от  $J_{1,\rho}$  (см. § I.1), являются допустимыми на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho,\theta}$ .

Для этого обратимся к основным формулам предыдущего параграфа

$$\{p_L(\mu), U(x, \lambda)\} = \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda, \mu) + [V(x, \lambda, \mu), U(x, \lambda)] \quad (4.5)$$

и

$$V(x, \lambda, \mu) = \frac{z}{2i(\lambda - \mu)} (I + W(x, \mu)) \sigma_3 (I + W(x, \mu))^{-1}. \quad (4.6)$$

Эти равенства, как и приводимые ниже, понимаются в асимптотическом смысле с точностью до  $O(|\mu|^{-\infty})$ . В дальнейшем мы, как правило, не будем оговаривать это явно. Участвующая в (4.6) антидиагональная матрица  $W(x, \mu)$  представляет собой асимптотический ряд

$$W(x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\mu^n} + O(|\mu|^{-\infty}) \quad (4.7)$$

и удовлетворяет уравнению Риккати из § I.4

$$\frac{dW}{dx} + i\mu \sigma_3 W - U_0 + W U_0 W = 0, \quad (4.8)$$

а  $U_0(x) = \sqrt{\kappa} (\bar{\psi}(x) \sigma_+ + \psi(x) \sigma_-)$ .



Вспоминая явное выражение для матрицы  $U(x, \lambda)$  из § 1, получаем, что левая часть формулы (4.5) имеет вид

$$\{p_L(\mu), U(x, \lambda)\} = i \sqrt{\kappa} \left( \frac{\delta p_L(\mu)}{\delta \psi(x)} \sigma_+ - \frac{\delta p_L(\mu)}{\delta \bar{\psi}(x)} \sigma_- \right) \quad (4.9)$$

и в пределе при  $L \rightarrow \infty$  содержит интересные нас вариационные производные  $\frac{\delta J_{n,\rho}}{\delta \psi(x)}$ ,  $\frac{\delta J_{n,\rho}}{\delta \bar{\psi}(x)}$ . Сравнение формул (4.5), (4.9) и (4.6) показывает, что поведение этих вариационных производных при  $x \rightarrow \pm \infty$  определяется матрицей  $V(x, \lambda, \mu)$  и, в конечном итоге, матрицей  $W(x, \mu)$ . Таким образом, мы приходим к задаче об определении пределов матрицы  $W(x, \mu)$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $\mu$  из  $\mathbb{R}_0$

$$W_{\pm}(\mu) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} W(x, \mu) \quad (4.10)$$

для граничных условий конечной плотности. В терминах матрицы  $U_0(x)$  эти граничные условия имеют вид

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} U_0(x) = U_{\pm}, \quad U_+ = Q^{-1}(\theta) U_- Q(\theta), \quad (4.11)$$

а  $U_- = \frac{\omega}{2} \sigma_1$  (см. § 1.8).

Существование пределов (4.10) непосредственно следует из выражения для матриц  $W_n(x)$  в § 1.4. Для их вычисления перейдем в уравнении (4.8) к пределу  $x \rightarrow -\infty$ . Обозначая  $W(\mu) = W_-(\mu)$ , получаем уравнение

$$\frac{\omega}{2} W \sigma_1 W + i \mu \sigma_3 W - \frac{\omega}{2} \sigma_1 = 0. \quad (4.12)$$

Вводя диагональную матрицу  $X = W \sigma_1$ , перепишем его в виде

$$\frac{\omega}{2} X^2 + i \mu \sigma_3 X - \frac{\omega}{2} I = 0, \quad (4.13)$$

или

$$\left( X + \frac{i \mu \sigma_3}{\omega} \right)^2 = - \frac{k^2(\mu)}{\omega^2} I. \quad (4.14)$$

Для диагональной матрицы  $X$  уравнение (4.14) имеет четыре решения. Однако только одно из них совместно с асимптотическим разложением (4.7) для  $\mu$  из  $\mathbb{R}_0$  в силу равенства

$$k(\mu) = \mu - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\mu^n} + O(|\mu|^{-\infty}), \quad (4.15)$$

справедливого для таких  $\mu$  (см. § 1.10). Это решение имеет вид

$$X = \frac{i(k - \mu)}{\omega} \sigma_3, \quad (4.16)$$

так что

$$W_-(\mu) = \frac{\mu - k}{\omega} \sigma_2. \quad (4.17)$$

Для матрицы  $W_+(\mu)$  с помощью (4.11) отсюда сразу получаем

$$W_+(\mu) = Q^{-1}(\theta) W_-(\mu) Q(\theta). \quad (4.18)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4.6), убеждаемся, что пределы матрицы  $V(x, \lambda, \mu)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\mu$  из  $\mathbb{R}_0$  имеют вид

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x, \lambda, \mu) = V_{\pm}(\lambda, \mu), \quad (4.19)$$

где

$$V_+(\lambda, \mu) = Q^{-1}(\theta) V_-(\lambda, \mu) Q(\theta), \quad (4.20)$$

а

$$V_-(\lambda, \mu) = \frac{\kappa((1 + \eta^2)\sigma_3 + 2i\eta\sigma_1)}{2i(\lambda - \mu)(1 - \eta^2)} \quad (4.21)$$

и введено обозначение  $\eta = \frac{\mu - k(\mu)}{\omega}$ . Отсюда получаем, что пределы правой части равенства (4.5) при  $x \rightarrow \pm\infty$  имеют вид

$$P_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [V(x, \lambda, \mu), U(x, \lambda)] = \left[ V_{\pm}(\lambda, \mu), \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_{\pm} \right], \quad (4.22)$$

где

$$P_+(\mu) = Q^{-1}(\theta) P_-(\mu) Q(\theta), \quad P_-(\mu) = -\frac{\kappa\omega\sigma_2}{2k(\mu)}. \quad (4.23)$$

Итак, мы показали, что в нашем случае существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \frac{1}{i} \ln a_{\rho}(\mu) e^{-i\theta/2}, U(x, \lambda) \right\} = P_{\pm}(\mu). \quad (4.24)$$

Сравнивая это равенство с асимптотическим разложением (4.4), выражением для вариационных производных

$$\frac{\delta J_{1,\rho}}{\delta \psi(x)} = \bar{\psi}(x), \quad \frac{\delta J_{1,\rho}^{\dagger}}{\delta \bar{\psi}(x)} = \psi(x) \quad (4.25)$$

(см. § I.1) и с формулой (4.23), убеждаемся в справедливости соотношений

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta J_{n,\rho}}{\delta \psi(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta J_{n,\rho}}{\delta \bar{\psi}(x)} = 0. \quad (4.26)$$

Таким образом, мы показали, что функционалы  $J_{n,\rho}$ ,  $n > 1$ , являются допустимыми на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho,0}$ . Соотношение (4.3) означает, что они находятся в инволюции:

$$\{J_{n,\rho}, J_{m,\rho}\} = 0. \quad (4.27)$$

Поэтому в случае конечной плотности именно с этими функционалами естественно связывать *высшие уравнения НШ*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{J_{n,\rho}, \Psi\}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \{J_{n,\rho}, \bar{\Psi}\}. \quad (4.28)$$

Эти уравнения допускают представление нулевой кривизны с матрицами  $U(x, \lambda)$  и  $V_{n,\rho}(x, \lambda)$ ,  $n > 1$ , которые определяются из асимптотического разложения

$$V(x, \lambda, \mu) = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{n,\rho}(x, \lambda)}{k^n(\mu)} + O(|k(\mu)|^{-\infty}) \quad (4.29)$$

для  $\mu$  из  $\mathbb{R}_0$ . Оно получается переразложением асимптотического ряда (3.36) по степеням  $k^{-1}(\mu)$  (сравни с аналогичной операцией в § 1.10). В частности,  $V_{2,\rho}(x, \lambda) = V_2(x, \lambda)$ , а  $V_3(x, \lambda) = V_\rho(x, \lambda)$ , где матрица  $V_\rho(x, \lambda)$  была введена в § 1.2.

В этом параграфе мы еще раз убедились в полезности понятия  $r$ -матрицы. На основании общего представления нулевой кривизны (3.3), доказанного в § 3 исходя из фундаментальных скобок Пуассона, мы смогли исследовать локальные интегралы движения в случае конечной плотности и выделить из них допустимые функционалы. В следующем параграфе будет дано еще одно приложение основных формул из § 3.

### § 5. $\Lambda$ -оператор и иерархия пуассоновых структур

В § 3 мы получили выражение для производящей функции  $V(x, \lambda, \mu)$  представления нулевой кривизны высших уравнений НШ. Здесь мы приведем компактную запись этих уравнений и локальных интегралов движения  $I_n$ . Гамильтонова интерпретация полученных формул естественно приводит к семейству (иерархии) пуассоновых структур. Модель НШ и высшие уравнения НШ оказываются гамильтоновыми по отношению к каждой из них. В качестве соответствующих гамильтонианов при этом выступают все локальные интегралы движения  $I_n$ . Ли-алгебраическую интерпретацию этих результатов мы отложим до части II.

Как уже стало привычным, начнем с квазипериодического случая. Напомним (см. § 3), что производящая функция  $V(x, \lambda, \mu)$  для матриц  $V_n(x, \lambda)$

$$V(x, \lambda, \mu) = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x, \lambda)}{\mu^n} \quad (5.1)$$

имеет представление

$$V(x, \lambda, \mu) = \frac{z}{2i(\lambda - \mu)} M(x, \mu), \quad (5.2)$$

где

$$M(x, \mu) = (I + W(x, \mu)) \sigma_3 (I + W(x, \mu))^{-1} = \sigma_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(x)}{\mu^n}. \quad (5.3)$$

Матрицы  $M_n(x)$  зависят только от функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и их производных в точке  $x$  и имеют нулевой след.

Эти и последующие равенства понимаются в асимптотическом смысле с точностью  $O(|\mu|^{-\infty})$ , и впредь мы не будем это указывать явно.

Сравнивая формулы (5.1) — (5.3), получаем

$$V_n(x, \lambda) = \frac{i}{2} \left( \lambda^{n-1} \sigma_3 + \sum_{k=0}^{n-2} \lambda^k M_{n-k-1}(x) \right), \quad (5.4)$$

так что  $n$ -е уравнение НШ определяется коэффициентами  $M_k(x)$ ,  $k \leq n-1$ . Формула (5.3) дает нам способ вычисления этих коэффициентов по асимптотическому разложению матрицы  $W(x, \mu)$ , полученному в § 1.4 при помощи уравнения Риккати. *Здесь мы приведем более непосредственный способ определения матриц  $M_n(x)$ .*

Для этого заметим, что матрица  $M(x, \lambda)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dM}{dx} = [U(x, \lambda), M], \quad (5.5)$$

где

$$U(x, \lambda) = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0(x), \quad (5.6)$$

и условию квазипериодичности

$$M(x+2L, \lambda) = Q^{-1}(\theta) M(x, \lambda) Q(\theta) \quad (5.7)$$

(см. (3.24)).

Действительно, матрица  $M(x, \lambda)$  имеет представление

$$M(x, \lambda) = i \operatorname{ctg} \rho_L(\lambda) I + \frac{1}{i \sin \rho_L(\lambda)} T(x, -L, \lambda) Q(\theta) T(L, x, \lambda) \quad (5.8)$$

(см. (3.16) и (3.29)), откуда, используя дифференциальные уравнения (1.31) и (1.39) для матрицы перехода по первому и второму аргументам, получаем (5.5).

Представим теперь  $M(x, \lambda)$  в виде

$$M(x, \lambda) = M^{(d)}(x, \lambda) + M^{(nd)}(x, \lambda), \quad (5.9)$$

где  $M^{(d)}$  и  $M^{(nd)}$  означают, соответственно, диагональную и антидиагональную части матрицы  $M$ , и подставим это разложение в (5.5). Отделяя в получившемся равенстве диагональную и антидиагональную части с учетом (5.6), приходим к системе

уравнений

$$\frac{dM^{(d)}}{dx} = [U_0(x), M^{(nd)}], \quad (5.10)$$

$$\frac{dM^{(1,d)}}{dx} = \frac{\lambda}{2i} [\sigma_3, M^{(nd)}] + [U_0(x), M^{(d)}]. \quad (5.11)$$

Выразим матрицу  $M^{(d)}(x, \lambda)$  через  $M^{(nd)}(x, \lambda)$  по уравнению (5.10), записав формально

$$M^{(d)}(x, \lambda) = d^{-1}([U_0(\cdot), M^{(nd)}(\cdot, \lambda)])(x) + \sigma_3, \quad (5.12)$$

и подставим это выражение в (5.11). В результате для матрицы  $M^{(nd)}(x, \lambda)$  получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dM^{(nd)}}{dx} + i\lambda\sigma_3 M^{(nd)} - [U_0(x), d^{-1}([U_0, M^{(nd)}])(x)] = 2U_0(x)\sigma_3. \quad (5.13)$$

При выводе мы учли, что диагональная матрица  $\sigma_3$  антикоммутирует с антидиагональными матрицами  $M^{(nd)}(x, \lambda)$  и  $U_0(x)$ .

Введем оператор  $\Lambda$ , действующий в пространстве антидиагональных матриц  $F(x)$  по формуле

$$\Lambda F(x) = i\sigma_3 \left( \frac{dF}{dx}(x) - [U_0(x), d^{-1}([U_0(\cdot), F(\cdot)])(x)] \right). \quad (5.14)$$

С его помощью мы можем переписать уравнение (5.13) в следующем компактном виде:

$$(\Lambda - \lambda)M^{(nd)}(x, \lambda) = -2iU_0(x). \quad (5.15)$$

Решая его формально, имеем

$$M^{(nd)}(x, \lambda) = -2i(\Lambda - \lambda)^{-1}U_0(x). \quad (5.16)$$

Раскладывая  $(\Lambda - \lambda)^{-1}$  в геометрическую прогрессию, для коэффициентов  $M_n^{(nd)}(x)$  получаем явное выражение

$$M_n^{(nd)}(x) = 2i\Lambda^{n-1}U_0(x), \quad (5.17)$$

так что

$$M_n^{(nd)}(x) = \Lambda M_{n-1}^{(nd)}(x), \quad n > 1, \quad (5.18)$$

и

$$M_1^{(nd)}(x) = 2iU_0(x). \quad (5.19)$$

Матрицы  $M_n^{(d)}(x)$  находятся по  $M_n^{(nd)}(x)$  по формуле (5.12):

$$M_n^{(d)}(x) = d^{-1}([U_0(\cdot), M_n^{(nd)}(\cdot)])(x). \quad (5.20)$$

В силу свойства (5.18) оператор  $\Lambda$  в литературе иногда называют *рекурсионным оператором*. Мы будем использовать более выразительное, хотя и жаргонное, название  *$\Lambda$ -оператор*.

В проведенных выкладках не был однозначно определен оператор взятия первообразной  $d^{-1}$ . Однако мы заранее знаем, в силу соотношения (5.10), что этот оператор применяется к матрицам, являющимися полными производными по  $x$ . Матрицы  $M_n^{(d)}(x)$ , от которых берется эта производная, имеют вид

$$M_n^{(d)}(x) = f_n(x) \sigma_3, \quad (5.21)$$

где  $f_n(x)$  — периодическая функция, являющаяся полиномом по  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и их производным в точке  $x$  без свободного члена. Оператор  $d^{-1}$  по определению и дает последнюю матрицу.

В частности, оператор  $d^{-1}$  согласован со следующими граничными условиями для матриц  $M^{(d)}(x, \lambda)$  и  $M^{(nd)}(x, \lambda)$ , рассматриваемых как функционалы от  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ :

$$M^{(nd)}(x, \lambda)|_{\psi=\bar{\psi}=0} = 0, \quad M^{(d)}(x, \lambda)|_{\psi=\bar{\psi}=0} = \sigma_3. \quad (5.22)$$

Свободный член  $\sigma_3$  в формуле (5.12) определяется этими условиями.

На первый взгляд наше определение является тавтологией. Однако содержательный результат состоит в том, что при вычислении  $M_n^{(nd)}(x)$  по формулам (5.18)–(5.19) выражение  $[U_0(x), M_n^{(nd)}(x)]$  каждый раз оказывается полной производной. Альтернативно можно сказать, что выражение  $\Lambda^n U_0(x)$  корректно определено при всех  $n \geq 0$ .

Используем теперь найденное представление для  $M^{(nd)}(x, \lambda)$  для окончательного вычисления матрицы  $M(x, \lambda)$ . Перепишывая (5.12) в виде

$$M^{(d)}(x, \lambda) = \sigma_3 - 2id^{-1}([U_0, (\Lambda - \lambda)^{-1}U_0])(x), \quad (5.23)$$

получаем явное выражение матрицы  $M(x, \lambda)$  в терминах  $\Lambda$ -оператора:

$$M(x, \lambda) = \sigma_3 - 2i(\Lambda - \lambda)^{-1}U_0(x) - 2id^{-1}([U_0, (\Lambda - \lambda)^{-1}U_0])(x). \quad (5.24)$$

В качестве первого следствия полученных результатов приведем обещанную компактную запись высших уравнений НШ. Из представления нулевой кривизны

$$\frac{\partial U(x, \lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V_n}{\partial x}(x, \lambda) + [U(x, \lambda), V_n(x, \lambda)] = 0 \quad (5.25)$$

и формул (5.4), (5.6) получаем, что  $n$ -е уравнение НШ, представляющее собой постоянный по  $\lambda$  член в (5.25), записывается в виде

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial M_{n-1}^{(nd)}}{\partial x} + \frac{i}{2} [U_0, M_{n-1}^{(d)}] = 0. \quad (5.26)$$

Используя формулы (5.17) и (5.20), перепишем полученное равенство в виде

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda^{n-2} U_0}{\partial x} - [U_0, d^{-1}(\{U_0, \Lambda^{n-2} U_0\})] = 0. \quad (5.27)$$

Отсюда с учетом определения (5.14) получаем искомое выражение для  $n$ -го уравнения НШ:

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial t} = i\sigma_3 \Lambda^{n-1} U_0(x). \quad (5.28)$$

Сравним запись уравнения движения (5.28) с его гамильтоновой записью

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial t} = \{I_n, U_0(x)\}. \quad (5.29)$$

Явный вид матрицы в правой части дается формулой

$$\{I_n, U_0(x)\} = i \sqrt{\varkappa} \left( \frac{\delta I_n}{\delta \psi(x)} \sigma_+ - \frac{\delta I_n}{\delta \bar{\psi}(x)} \sigma_- \right). \quad (5.30)$$

Определим теперь матрицу  $\text{grad } I_n(x)$  следующим образом:

$$\text{grad } I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \left( \frac{\delta I_n}{\delta \psi(x)} \sigma_+ + \frac{\delta I_n}{\delta \bar{\psi}(x)} \sigma_- \right). \quad (5.31)$$

Ниже мы объясним, почему такое обозначение естественно с гамильтоновой точки зрения. Уравнение движения в форме (5.29) переписывается в виде

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = i\kappa\sigma_3 \text{grad } I_n. \quad (5.32)$$

Сравнивая (5.28) и (5.32), получаем компактное выражение для градиентов локальных интегралов движения

$$\text{grad } I_n(x) = \frac{1}{\varkappa} \Lambda^{n-1} U_0(x), \quad (5.33)$$

или рекуррентное соотношение

$$\text{grad } I_n(x) = \Lambda \text{grad } I_{n-1}(x), \quad n > 1, \quad (5.34)$$

где

$$\text{grad } I_1(x) = \frac{1}{\varkappa} U_0(x). \quad (5.35)$$

Покажем, что при помощи  $\Lambda$ -оператора можно дать выражение и для самих локальных интегралов движения  $I_n$ . Для этого вместо их производящей функции  $p_L(\lambda) = \arccos\left(\frac{1}{2} \text{tr} T_L(\lambda) Q(\theta)\right)$  удобно использовать ее производную по  $\lambda$ . Покажем, что имеет

место формула

$$\frac{d\rho_L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{4} \int_{-L}^L \operatorname{tr} M(x, \lambda) \sigma_3 dx. \quad (5.36)$$

Будем исходить из основного представления для матрицы монодромии

$$T_L(\lambda) = \exp \int_{-L}^L U(x, \lambda) dx \quad (5.37)$$

(см. § I.2—I.3). Дифференцируя его по  $\lambda$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT_L(\lambda)}{d\lambda} &= \int_{-L}^L T(L, x, \lambda) \frac{\partial U}{\partial \lambda}(x, \lambda) T(x, -L, \lambda) dx = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-L}^L T(L, x, \lambda) \sigma_3 T(x, -L, \lambda) dx, \end{aligned} \quad (5.38)$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \operatorname{tr} T_L(\lambda) Q(\theta) &= \frac{1}{2i} \int_{-L}^L \operatorname{tr} (T(x, -L, \lambda) Q(\theta) T(L, x, \lambda) \sigma_3) dx = \\ &= \frac{\sin \rho_L(\lambda)}{2} \int_{-L}^L \operatorname{tr} M(x, \lambda) \sigma_3 dx. \end{aligned} \quad (5.39)$$

В последнем равенстве мы использовали формулу (5.8). Соотношение (5.36) следует из (5.39) по формуле дифференцирования сложной функции.

Правая часть в (5.36) явно выражается через  $\Lambda$ -оператор при помощи формулы (5.23):

$$\int_{-L}^L \operatorname{tr} M(x, \lambda) \sigma_3 dx = 4L + 4i \int_{-L}^L d^{-1} \operatorname{tr} (U_0 \sigma_3 (\lambda - \lambda)^{-1} U_0)(x) dx, \quad (5.40)$$

а левая часть, так же как и  $\rho_L(\lambda)$ , может быть использована в качестве производящей функции локальных интегралов движения:

$$\frac{d}{d\lambda} \rho_L(\lambda) = -L - \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n I_n}{\lambda^{n+1}}. \quad (5.41)$$

Сравнивая (5.41) с разложением по обратным степеням  $\lambda$  в (5.40), получаем окончательную формулу

$$I_n = \frac{1}{i\kappa n} \int_{-L}^L d^{-1} (\operatorname{tr} U_0 \sigma_3 \Lambda^n U_0)(x) dx, \quad n \geq 1. \quad (5.42)$$



При этом в разложении правой части (5.40) коэффициент при  $\lambda^{-1}$  исчезает ввиду бесследовости матрицы  $U_0(x)\sigma_3 U_0(x)$ .

Интересно отметить, что формула (5.42) допускает продолжение и на отрицательные целые значения номера  $n$ , определяя серию нелокальных интегралов движения  $I_n$ ,  $n < 0$ .

Исходным пунктом является разложение целой функции  $\rho_L(\lambda)$  в ряд Тейлора

$$\rho_L(\lambda) = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} I_n \lambda^n. \quad (5.43)$$

Формулы (5.12) и (5.15) для матрицы  $M(x, \lambda)$ , задаваемой соотношением (5.8), а также формула (5.36), связывающая  $\frac{d\rho_L}{d\lambda}(\lambda)$  и  $M(x, \lambda)$ , справедливы независимо от использованного выше асимптотического разложения по степеням  $\lambda^{-1}$ . По определению оператор  $d^{-1}$  ставит матрице  $[U_0(x), M^{(\text{nd})}(x, \lambda)]$  матрицу  $M^{(d)}(x, \lambda) = -\sigma_3$  в согласии с граничными условиями (5.22). В результате для коэффициентов разложения матрицы  $M^{(\text{nd})}(x, \lambda)$  в ряд Тейлора

$$M^{(\text{nd})}(x, \lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} M_{-n}^{(\text{nd})}(x) \lambda^n \quad (5.44)$$

получаем из (5.15) соотношения

$$\Lambda M_{-n}^{(\text{nd})}(x) = M_{-n+1}^{(\text{nd})}(x) \quad (5.45)$$

и

$$\Lambda M_0^{(\text{nd})}(x) = 2iU_0(x). \quad (5.46)$$

Эти равенства продолжают соотношения (5.18) — (5.19), так что формула

$$M_n^{(\text{nd})}(x) = 2i\Lambda^{n-1}U_0(x) \quad (5.47)$$

справедлива теперь для всех целых  $n$ .

Повторяя выкладки, сделанные выше для положительных  $n$ , приходим к формуле (5.42) для отрицательных  $n$ .

Интеграл  $I_0 = \frac{1}{\kappa} \rho_L(0)$  формально не попадает в набор соотношений (5.42). Однако можно проверить, что к формуле (5.42) при  $n=0$  применимо правило Лопиталья, так что

$$I_0 = \frac{1}{i\kappa} \int_{-L}^L d^{-1}(\text{tr } U_0 \sigma_3 \ln \Lambda U_0)(x) dx. \quad (5.48)$$

Мы не будем приводить малоинтересные громоздкие детали вычислений.

Формулы типа (5.33) для градиентов интегралов движения также справедливы для всех целых значений  $n$ . Для доказательства следует в общем представлении нулевой кривизны (3.34) разложить матрицу  $V(x, \lambda, \mu)$  в ряд Тейлора по переменной  $\mu$

$$V(x, \lambda, \mu) = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} V_{-n}(x, \lambda) \mu^n \quad (5.49)$$

и определить коэффициенты из формул (5.2) и (5.44).

Конечно, приведенные формулы мало пригодны для вычислений, так как оператор  $\Lambda$  не может быть обращен явно. Однако мы убедимся сейчас, что они достаточно интересны с идейной точки зрения, связанной с гамильтоновой интерпретацией. Именно, эти формулы позволяют нам ввести обещанную выше иерархию пуассоновых структур.

Начнем с того, что объясним естественность обозначения  $\text{grad}$  для матрицы вида (5.31), которое мы введем теперь для произвольной наблюдаемой  $F$ :

$$\text{grad } F(x) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \sigma_+ + \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \sigma_- \right). \quad (5.50)$$

В этих терминах скобка Пуассона наблюдаемых  $F$  и  $G$  на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L,0}$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \frac{\kappa}{i} \int_{-L}^L \text{tr}(\text{grad } F(x) \sigma_3 \text{grad } G(x)) dx = \\ &= \frac{i\kappa}{2} \int_{-L}^L \text{tr}(\sigma_3 [\text{grad } F(x), \text{grad } G(x)]) dx \end{aligned} \quad (5.51)$$

и определяет антисимметричную форму градиентов в соответствии с общими формулами гамильтоновой механики. Уравнения движения для координат  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L,0}$ , параметризованном матрицами  $U_0(x)$ , имеют вид

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial t} = \{F, U_0(x)\} = i\kappa \sigma_3 \text{grad } F(x), \quad (5.52)$$

где в качестве гамильтониана выбрана наблюдаемая  $F$ . Таким образом, матрица  $i\kappa \sigma_3$  играет роль матрицы Якоби для этой параметризации.

Рассмотрим теперь  $n$ -е уравнение ИШ

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial t} = \{I_n, U_0(x)\} = i\kappa \sigma_3 \text{grad } I_n(x). \quad (5.53)$$

В силу соотношений (5.34) оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial t} = i\kappa \sigma_3 \Lambda^m \text{grad } I_{n-m}(x), \quad (5.54)$$

где  $m$  — произвольное целое число. Это наводит на предположение, что оператор  $i\sigma_3\Lambda^m$  также может играть роль матрицы Якоби. Соответствующая гипотетическая пуассонова структура имеет вид

$$\{F, G\}_m = \frac{1}{i} \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } F(x) \sigma_3 \Lambda^m \text{grad } G(x)) dx, \quad (5.55)$$

так что уравнение (5.54) определяется по этой скобке Пуассона гамильтоном  $I_{n-m}$ :

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial \varepsilon} = \{I_{n-m}, U_0(x)\}_m. \quad (5.56)$$

Наша основная пуассонова структура отвечает случаю  $m=0$ .

Чтобы придать строгий смысл этим рассуждениям, следует проверить, что форма (5.55) корректно определена, антисимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Здесь мы проверим первые два свойства. Тождество Якоби будет получено в части II как следствие общих ли-алгебраических соображений.

Начнем со скобки Пуассона  $\{F, G\}_1$ . Для наблюдаемой  $G$  — допустимого функционала на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{L,0}$  — градиент удовлетворяет условию квазипериодичности

$$\text{grad } G(x+2L) = Q^{-1}(\theta) \text{grad } G(x) Q(\theta), \quad (5.57)$$

совпадающему с условием квазипериодичности для матрицы  $U_0(x)$ . В определении действия  $\Lambda$ -оператора на  $\text{grad } G(x)$  участвует диагональная матрица  $[U_0(x), \text{grad } G(x)]$ , периодическая с периодом  $2L$  вследствие (5.57). Если эта матрица имеет нулевое среднее

$$\int_{-L}^L [U_0(x), \text{grad } G(x)] dx = 0, \quad (5.58)$$

то периодической останется и матрица  $d^{-1}([U_0, \text{grad } G])(x)$ , а антидиагональная матрица  $\Lambda \text{grad } G(x)$  будет квазипериодической. Поэтому подынтегральное выражение в (5.55) периодически и интеграл не зависит от выбора фундаментальной области.

Однако в определении действия оператора  $d^{-1}$  на диагональные бесследовые матрицы с нулевым средним имеется произвол — аддитивная добавка вида  $c\sigma_3$ . Покажем, что если наблюдаемая  $F$  также удовлетворяет условию (5.58), то выражение  $\{F, G\}_1$  не зависит от  $c$  и тем самым корректно определено.

Указанный произвол в выражении для  $\Lambda \text{grad } G(x)$  сводится к слагаемому  $c\sigma_3[U_0(x), \sigma_3] = -2cU_0(x)$ ; его вклад в (5.55)

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{c\kappa}{i} \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } F(x) [U_0(x), \sigma_3]) dx = \\ = i c \kappa \int_{-L}^L \text{tr} ([U_0(x), \text{grad } F(x)] \sigma_3) dx = 0, \end{aligned} \quad (5.59)$$

если  $F$  удовлетворяет условию (5.58). Действительно, матрица  $[U_0(x), \text{grad } G(x)]$ , как диагональная бесследовая матрица, пропорциональна  $\sigma_3$ , и соотношения (5.58) и (5.59), после замены  $G$  на  $F$ , эквивалентны.

Таким образом, скобка Пуассона  $\{F, G\}_1$  действительно корректно определена для наблюдаемых  $F$  и  $G$ , удовлетворяющих условию (5.58). Ее антисимметричности следует из формальной антисимметричности оператора  $i\sigma_3\Lambda$ .

Условие допустимости (5.58) имеет наглядную гамильтонову интерпретацию. Действительно, соотношение

$$\int_{-L}^L \text{tr} ([U_0(x), \text{grad } G(x)] \sigma_3) = 0, \quad (5.60)$$

эквивалентное (5.58), можно записать в виде

$$\{G, I_1\}_0 = 0, \quad (5.61)$$

если использовать определение (5.51) скобки Пуассона  $\{, \}_0$  и формулу (5.35). Последнюю формулу в силу (5.55) и (5.34) можно переписать в терминах скобки Пуассона  $\{, \}_1$ :

$$\{G, I_0\}_1 = 0. \quad (5.62)$$

Из обещанного выше тождества Якоби получаем, что если наблюдаемые  $F$  и  $G$  удовлетворяют условию (5.62), то ему удовлетворяет и  $\{F, G\}_1$ . Таким образом, условие (5.61) корректно отбирает алгебру наблюдаемых, на которой определена новая пуассонова структура.

Рассмотрим теперь скобку Пуассона  $\{F, G\}_n$  для произвольного натурального  $n$ . Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что эта пуассонова структура определена на наблюдаемых, удовлетворяющих условиям

$$\{G, I_1\}_0 = \dots = \{G, I_n\}_0 = 0. \quad (5.63)$$

Эти условия можно переписать в виде

$$\{G, I_{-n+1}\}_n = \dots = \{G, I_0\}_n = 0, \quad (5.64)$$

что позволяет выделить алгебру наблюдаемых, ассоциированную со скобкой Пуассона  $\{, \}_n$  (с точностью до непроверенного пока тождества Якоби).

Сходные рассуждения позволяют корректно определить скобки Пуассона  $\{, \}_n$  и для отрицательных  $n$ . Мы разберем подробно лишь случай  $n = -1$ .

Формальное выражение

$$\{F, G\}_{-1} = \frac{\kappa}{i} \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } F(x) \sigma_3 \Lambda^{-1} \text{grad } G(x)) dx \quad (5.65)$$

имеет смысл, если  $\text{grad } G(x)$  принадлежит области значений  $\text{Im } \Lambda$  оператора  $\Lambda$ :

$$\text{grad } G(x) = \Lambda H(x), \quad (5.66)$$

где антидиагональная матрица  $H(x)$  удовлетворяет условию

$$\int_{-L}^L [U_0(x), H(x)] dx = 0, \quad (5.67)$$

т. е. принадлежит области определения оператора  $\Lambda$ . Условие (5.67) переписывается в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-L}^L \text{tr} (H(x) \sigma_3 \text{grad } I_1(x)) dx = \int_{-L}^L \text{tr} (H(x) \sigma_3 \Lambda \text{grad } I_0(x)) dx = \\ &= \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } G(x) \sigma_3 \text{grad } I_0(x)) dx. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Таким образом, получаем необходимое условие корректности формулы (5.65)

$$\{G, I_0\}_0 = 0. \quad (5.69)$$

Если этому условию удовлетворяет также и  $F$ , то формула (5.65) не зависит от произвола в (5.66), который выражается в виде аддитивной добавки вида  $cU_0(x)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} c \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } F(x) \sigma_3 \Lambda^{-1} U_0(x)) dx &= \\ &= c\kappa \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } F(x) \sigma_3 \Lambda^{-1} \text{grad } I_1(x)) dx = \\ &= c\kappa \int_{-L}^L \text{tr} (\text{grad } F(x) \sigma_3 \text{grad } I_0(x)) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Наконец, условие (5.69) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы  $\text{grad } G(x)$  принадлежал  $\text{Im } \Lambda$ . Действительно, его можно интерпретировать как условие ортогональности к пространству  $\text{Ker } \Lambda$  — ядру антисимметричного операто-

ра  $\Lambda$ . При этом ядро Кег  $\Lambda$  понимается по модулю неоднозначности вида  $cU_0(x)$  в определении оператора  $\Lambda$ .

Условие допустимости (5.69) в терминах скобки Пуассона  $\{, \}_{-1}$  может быть записано в виде

$$\{G, I_1\}_{-1} = 0 \quad (5.71)$$

и корректно выделяет алгебру наблюдаемых.

Аналогичным образом со скобками Пуассона  $\{, \}_{-n}$ ,  $n > 1$ , связываются условия допустимости

$$\{G, I_0\}_0 = \dots = \{G, I_{-n+1}\}_0 = 0, \quad (5.72)$$

или

$$\{G, I_n\}_{-n} = \dots = \{G, I_1\}_{-n} = 0. \quad (5.73)$$

*Они выделяют алгебру наблюдаемых, ассоциированную с соответствующей пуассоновой структурой.*

Отметим, что интегралы движения  $I_n$  являются допустимыми для всей иерархии пуассоновых структур  $\{, \}_m$  и находятся в инволюции по отношению к каждой из них:

$$\{I_h, I_n\}_m = 0, \quad (5.74)$$

где  $k$ ,  $n$  и  $m$  — произвольные целые числа.

На этом мы заканчиваем обсуждение иерархии пуассоновых структур для квазипериодического случая. Подводя итог, подчеркнем, что их характеристическим свойством является возможность записать высшие уравнения НШ в виде (5.56).

*В заключение обсудим предельный переход  $L \rightarrow \infty$ .* Чтобы не вдаваться в излишние технические детали, мы ограничимся рассмотрением только быстроубывающего случая.

Здесь оператор  $d^{-1}$ , участвующий в операторе  $\Lambda$ , может быть определен на произвольных быстроубывающих функциях  $f(x)$  с сохранением свойства формальной антисимметричности:

$$d^{-1}f(x) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^x f(y) dy - \int_x^{\infty} f(y) dy \right). \quad (5.75)$$

Образ такого оператора содержит, помимо шварцевских функций, еще и функции с неисчезающими предельными значениями при  $|x| \rightarrow \infty$ . Однако  $\Lambda$ -оператор переводит матрицы типа Шварца (т. е. матрицы со шварцевскими матричными элементами) в матрицы того же типа, поскольку в его определении  $d^{-1}$  сопровождается умножением на быстроубывающую матрицу  $U_0(x)$ .

При таком определении оператора  $\Lambda$  приведенные выше формулы для интегралов движения  $I_n$ , их градиентов и иерархии пуассоновых структур остаются в силе после замены в формулах (5.42), (5.48), (5.51) и (5.55) области интегрирования  $(-L, L)$  на всю вещественную ось. При этом, в отличие от квазипериодического случая, в определении скобок Пуассона  $\{, \}_n$  для  $n > 0$  не требуется сужать алгебру наблюдаемых. Однако эта пуассо-

нова структура оказывается вырожденной: у нее существует аннулятор — центр скобки Пуассона  $\{, \}_n$ . Этот аннулятор порождается наблюдаемыми  $F$ , для которых  $\text{grad } F(x)$  принадлежит  $\text{Ker } \Lambda^n$ .

Для пуассоновых структур  $\{, \}_n$  с  $n < 0$  условие допустимости остается, однако в гораздо более слабом виде, чем в квазипериодическом случае: функции  $\text{grad } F(x)$ , отвечающие допустимым наблюдаемым  $F$ , должны принадлежать  $\text{Im } \Lambda^{-n}$ .

Эти условия особенно просто выглядят в терминах переменных типа действие — угол, которые мы построим в § 7.

### § 6. Скобки Пуассона коэффициентов перехода в быстроубывающем случае

Как отмечалось в конце § 2, в быстроубывающем случае доказательство полной интегрируемости нашей модели проводится явно путем построения канонических переменных типа действие — угол. В следующем параграфе мы убедимся, что эти переменные строятся в терминах коэффициентов перехода непрерывного и дискретного спектра, введенных в § 1.5—1.6. Здесь же мы получим вспомогательные формулы — *вычислим скобки Пуассона этих коэффициентов перехода*.

Напомним, что коэффициенты перехода непрерывного спектра определяются из приведенной матрицы монодромии

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty}} E(-x, \lambda) T(x, y, \lambda) E(y, \lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \varepsilon \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon = \text{sign } \kappa$ ,  $\lambda$  вещественно и  $E(x, \lambda) = \exp\left\{\frac{\lambda x}{2i} \sigma_3\right\}$ . Коэффициенты перехода дискретного спектра появляются лишь в случае  $\varepsilon = -1$  и вводятся посредством соотношения

$$T_{-}^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_{+}^{(2)}(x, \lambda_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

где  $\lambda_j$  — нули функции  $a(\lambda)$  в верхней полуплоскости переменной  $\lambda$ . Здесь  $T_{-}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{+}^{(2)}(x, \lambda)$  обозначают, соответственно, первый и второй столбцы решений Уоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$ , которые при вещественных  $\lambda$  определяются как пределы

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm \infty} T(x, y, \lambda) E(y, \lambda). \quad (6.3)$$

Именно указанные столбцы матриц  $T_{\pm}(x, \lambda)$  допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость (подробнее см. в § 1.5—1.6).

Мы будем исходить из основной формулы, доказанной в § 1:  $\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} =$

$$= [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad y < x, \quad (6.4)$$

и перейдем в ней последовательно к пределам, возникающим в (6.1), (6.3). При этом наши рассуждения будут носить формальный характер. Их интерпретация в терминах алгебры наблюдаемых на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$  будет дана в следующем параграфе.

Начнем с вычисления скобок Пуассона решений Йоста  $T_-(x, \lambda)$  при вещественных  $\lambda$ . Для этого умножим (6.4) справа на матрицу  $E(y, \lambda) \otimes E(y, \mu)$  и перейдем к пределу при  $y \rightarrow -\infty$ . В левой части мы получим искомую матрицу скобок Пуассона  $\{T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)\}$ . Для вычисления предела правой части разобьем коммутатор в (6.4) на два слагаемых. Заметим, что при этом каждое из них будет сингулярно при  $\lambda = \mu$ , и поэтому для определенности зафиксируем выбор обобщенной функции  $\frac{1}{\lambda - \mu}$  в виде в. р.  $\frac{1}{\lambda - \mu}$ . Поскольку выражение (6.4) несингулярно при  $\lambda = \mu$ , то ясно, что этот выбор не влияет на конечный результат.

В слагаемом  $r(\lambda - \mu) (T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu))$  матрицы  $E(y, \lambda)$  и  $E(y, \mu)$  умножатся слева на соответствующие им матрицы перехода, и в пределе при  $y \rightarrow -\infty$  мы получим  $r(\lambda - \mu) (T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu))$ . Однако в слагаемом  $(T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)) r(\lambda - \mu)$  этого не происходит, и мы перепишем его вклад в виде произведения матрицы  $T(x, y, \lambda) E(y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu) E(y, \mu)$ , которая сходится при  $y \rightarrow -\infty$  к  $T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)$ , и матрицы  $(E(-y, \lambda) \otimes E(-y, \mu)) r(\lambda - \mu) (E(y, \lambda) \otimes E(y, \mu))$ . В силу явного вида (1.19) матрицы  $r(\lambda)$  и свойства перестановки (1.10) ее можно переписать в виде  $(E(y, \mu - \lambda) \otimes E(y, \lambda - \mu)) r(\lambda - \mu)$ . При  $y \rightarrow -\infty$  эта матрица имеет предел в смысле обобщенных функций. Для его вычисления воспользуемся известной формулой

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \text{в. р.} \frac{e^{\pm i\lambda y}}{\lambda} = \mp \pi i \delta(\lambda) \quad (6.5)$$

и явным видом матриц  $E(y, \lambda)$  и  $r(\lambda)$ . В результате для предельной матрицы  $r_-(\lambda - \mu)$

$$r_-(\lambda - \mu) = \lim_{y \rightarrow -\infty} E(y, \mu - \lambda) \otimes E(y, \lambda - \mu) r(\lambda - \mu) \quad (6.6)$$

мы получим выражение

$$r_-(\lambda) = -\kappa \begin{pmatrix} \text{в. р.} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi i \delta(\lambda) & 0 \\ 0 & \pi i \delta(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{в. р.} \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$



Таким образом, имеем окончательное соотношение

$$\{T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)\} = r(\lambda - \mu) T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) - \\ - T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) r_-(\lambda - \mu). \quad (6.8)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\{T_+(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu)\} = T_+(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu) r_+(\lambda - \mu) - \\ - r(\lambda - \mu) T_+(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu), \quad (6.9)$$

где

$$r_+(\lambda - \mu) = \lim_{y \rightarrow +\infty} E(y, \mu - \lambda) \otimes E(y, \lambda - \mu) r(\lambda - \mu) \quad (6.10)$$

и матрица  $r_+(\lambda)$  отличается от  $r_-(\lambda)$  заменой  $i$  на  $-i$ . И наконец, на основании свойства ультралокальности (см. § 1) имеем соотношение

$$\{T_-(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu)\} = 0. \quad (6.11)$$

Скобки Пуассона приведенной матрицы монодромии вычисляются на основании полученных формул. Так, умножая (6.8) на матрицу  $E(-x, \lambda) \otimes E(-x, \mu)$  слева, переходя к пределу при  $x \rightarrow +\infty$  и используя (6.10), получаем, что

$$\{T(\lambda) \otimes T(\mu)\} = r_+(\lambda - \mu) T(\lambda) \otimes T(\mu) - T(\lambda) \otimes T(\mu) r_-(\lambda - \mu). \quad (6.12)$$

Это соотношение играет основную роль, и мы его распишем подробнее через матричные элементы. В силу явного вида матрицы  $T(\lambda)$  16 соотношений в (6.12) являются следствиями 6 основных:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad (6.13)$$

$$\{a(\lambda), \bar{a}(\mu)\} = 0, \quad (6.14)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\kappa}{\lambda - \mu + i0} a(\lambda) b(\mu), \quad (6.15)$$

$$\{a(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = -\frac{\kappa}{\lambda - \mu + i0} a(\lambda) \bar{b}(\mu), \quad (6.16)$$

$$\{b(\lambda), b(\mu)\} = 0, \quad (6.17)$$

$$\{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = 2\pi i |\kappa| |a(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \mu). \quad (6.18)$$

Появление обобщенной функции  $\frac{1}{\lambda + i0}$  в этих формулах объясняется комбинированием v. p.  $\frac{1}{\lambda}$  и  $\pi i \delta(\lambda)$  по формулам

Сохоцкого — Племяля

$$\frac{1}{\lambda \pm i0} = v. p. \frac{1}{\lambda} \mp \pi i \delta(\lambda). \quad (6.19)$$

Подчеркнем, что формулы (6.13) — (6.18) согласованы с условием аналитичности  $a(\lambda)$  в верхней полуплоскости, так что первые четыре соотношения допускают аналитическое продолжение по  $\lambda$ .

Перейдем теперь к вычислению скобок Пуассона характеристик дискретного спектра  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j; j=1, \dots, n$ . Из соотношений (6.13) и (6.14) непосредственно следует, что

$$\{a(\lambda), \lambda_j\} = \{a(\lambda), \bar{\lambda}_j\} = 0 \quad (6.20)$$

и

$$\{\lambda_j, \lambda_k\} = \{\lambda_j, \bar{\lambda}_k\} = 0, \quad j, k=1, \dots, n. \quad (6.21)$$

Для вычисления скобки Пуассона  $\{\lambda_j, b(\mu)\}$  поступим следующим образом. Рассмотрим формулу (6.15)

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\kappa}{\lambda - \mu} a(\lambda) b(\mu), \quad (6.22)$$

где считается, что  $\text{Im } \lambda > 0$ , и представление

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \tilde{a}(\lambda). \quad (6.23)$$

Функция  $\tilde{a}(\lambda)$  аналитична в верхней полуплоскости и уже не имеет нулей, так что  $\ln \tilde{a}(\lambda)$  является аналитической функцией при  $\text{Im } \lambda > 0$ . Подставим теперь это представление в формулу (6.22) и перепишем ее в виде

$$\{\ln a(\lambda), b(\mu)\} = \{\ln \tilde{a}(\lambda), b(\mu)\} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\{\bar{\lambda}_j, b(\mu)\}}{\lambda - \bar{\lambda}_j} - \frac{\{\lambda_j, b(\mu)\}}{\lambda - \lambda_j} \right) = \frac{\kappa}{\lambda - \mu} b(\mu). \quad (6.24)$$

Поскольку правая часть этого равенства аналитична при  $\text{Im } \lambda > 0$ , то отсюда получаем, что левая часть не имеет особенностей при  $\lambda = \lambda_j$ , так что

$$\{b(\mu), \lambda_j\} = 0. \quad (6.25)$$

Аналогичным образом, рассматривая скобку Пуассона  $\{\bar{a}(\lambda), b(\mu)\}$ , получаем, что

$$\{b(\mu), \bar{\lambda}_j\} = 0, \quad j=1, \dots, n. \quad (6.26)$$

Для вычисления оставшихся скобок Пуассона, в которых участвуют коэффициенты  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ , приходится использовать и более общие соотношения (6.8), (6.9) и (6.11). Рассмотрим сначала наиболее интересную скобку Пуассона  $\{a(\lambda), \gamma_j\}$ .

Введем обозначения для компонент столбцов  $T_{\pm}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{\pm}^{(2)}(x, \lambda)$  решений Иоста:

$$T_{-}^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_{-}(x, \lambda) \\ g_{-}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad T_{+}^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_{+}(x, \lambda) \\ g_{+}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

которые аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость. Из соотношения

$$T(\lambda) = T_{+}^{-1}(x, \lambda) T_{-}(x, \lambda) \quad (6.28)$$

получаем, что

$$a(\lambda) = f_{-}(x, \lambda) g_{+}(x, \lambda) - f_{+}(x, \lambda) g_{-}(x, \lambda) \quad (6.29)$$

(см. § I.5—I.6). В этих терминах формула (6.2) принимает вид

$$\gamma_j = \frac{f_{-}(x, \mu)}{f_{+}(x, \mu)} \Big|_{\mu=\lambda_j} = \frac{g_{-}(x, \mu)}{g_{+}(x, \mu)} \Big|_{\mu=\lambda_j} \quad (6.30)$$

Подставим эти представления в  $\{a(\lambda), \gamma_j\}$ , взяв для  $\gamma_j$ , например, первую формулу в (6.30). Возникающие при этом скобки Пуассона вычисляются на основании (6.8), (6.9) и (6.11) и имеют вид

$$\{f_{\pm}(x, \lambda), f_{\pm}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.31)$$

$$\{f_{-}(x, \lambda), f_{+}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.32)$$

$$\{g_{\pm}(x, \lambda), f_{\mp}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.33)$$

$$\{g_{\pm}(x, \lambda), f_{\pm}(x, \mu)\} = \mp \frac{\kappa}{\lambda - \mu} (g_{\pm}(x, \lambda) f_{\pm}(x, \mu) - g_{\pm}(x, \mu) f_{\pm}(x, \lambda)), \quad (6.34)$$

откуда ясно, что они допускают аналитическое продолжение по  $\mu$ , так что мы можем положить  $\mu = \lambda_j$ . Собирая ненулевые вклады, получаем, что

$$\begin{aligned} \{a(\lambda), \gamma_j\} &= \\ &= \frac{\kappa}{\lambda - \lambda_j} \left( \frac{f_{-}(x, \lambda) f_{-}(x, \lambda_j)}{f_{+}^2(x, \lambda_j)} (g_{+}(x, \lambda) f_{+}(x, \lambda_j) - g_{+}(x, \lambda_j) f_{+}(x, \lambda)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_{+}(x, \lambda)}{f_{+}(x, \lambda_j)} (g_{-}(x, \lambda) f_{-}(x, \lambda_j) - g_{-}(x, \lambda_j) f_{-}(x, \lambda)) \right) = \\ &= \frac{\kappa a(\lambda) \gamma_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{\kappa}{\lambda - \lambda_j} f_{+}(x, \lambda) f_{-}(x, \lambda) \left( \frac{g_{-}(x, \lambda_j)}{f_{+}(x, \lambda_j)} - \frac{g_{+}(x, \lambda_j) f_{-}(x, \lambda_j)}{f_{+}^2(x, \lambda_j)} \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Второе слагаемое в этой формуле исчезает в силу (6.30) и, таким образом, окончательно имеем

$$\{a(\lambda), \gamma_j\} = \frac{\kappa}{\lambda - \lambda_j} a(\lambda) \gamma_j. \quad (6.36)$$

Аналогичным образом получаем

$$\{a(\lambda), \bar{\gamma}_j\} = - \frac{\kappa}{\lambda - \bar{\lambda}_j} a(\lambda) \bar{\gamma}_j \quad (6.37)$$

и

$$\{b(\lambda), \gamma_j\} = \{b(\lambda), \bar{\gamma}_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.38)$$

Отметим, что формулы (6.15), (6.16) и (6.36), (6.37) согласованы с соотношениями

$$\gamma_j = b(\lambda_j), \quad \bar{\gamma}_j = b^*(\lambda_j), \quad (6.39)$$

имеющими смысл только для финитных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . В этом случае  $b(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение на всю плоскость, а  $b^*(\lambda)$  аналитически продолжает функцию  $\bar{b}(\lambda)$  с вещественной оси по формуле  $b^*(\lambda) = \bar{b}(\bar{\lambda})$  (см. § I.6).

Далее, действуя, как при выводе соотношения (6.25), из формул (6.36) — (6.37) получаем скобки Пуассона

$$\{\gamma_j, \lambda_k\} = \kappa \gamma_j \delta_{jk}, \quad (6.40)$$

$$\{\gamma_j, \bar{\lambda}_k\} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (6.41)$$

Неисчезающая правая часть в (6.40) возникает при сравнении вычетов при  $\lambda = \lambda_j$  в формуле типа (6.24).

Наконец, используя представления (6.30) и соотношения (6.8), (6.9), (6.11), получаем равенства

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = \{\gamma_j, \bar{\gamma}_k\} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (6.42)$$

Вычисление скобок Пуассона коэффициентов перехода непрерывного и дискретного спектра на этом заканчивается.

Вспомним теперь, что исходными данными, участвующими в решении обратной задачи и, тем самым, однозначно параметризующими функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , являются только коэффициенты перехода  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$ ;  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$  и дискретный спектр  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  вспомогательной линейной задачи (см. § II.1—II.2). Коэффициент  $a(\lambda)$  однозначно определяется по ним при помощи дисперсионного соотношения

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + \varepsilon |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu \right\}, \quad (6.43)$$

где  $\text{Im } \lambda > 0$  и при  $\varepsilon = 1$  произведение по нулям отсутствует (см. § 1.6).

Неисчезающие скобки Пуассона переменных  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$ ;  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$  и  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$  имеют вид

$$\{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = 2\pi i |\kappa| (1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2) \delta(\lambda - \mu) \quad (6.44)$$

и

$$\{\gamma_j, \lambda_k\} = \kappa \gamma_j \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (6.45)$$

Нетрудно убедиться, что вычисленные скобки Пуассона, содержащие  $a(\lambda)$ , совместны с (6.44) — (6.45) и дисперсионным соотношением (6.43).

Окончательные формулы (6.44) — (6.45) имеют удивительно простой вид. В следующем параграфе мы дадим их строгую интерпретацию и приведем явные выражения для канонических переменных типа действие — угол.

### § 7. Переменные действие — угол для быстроубывающего случая

Настоящий параграф практически завершает общее описание гамильтонова подхода к модели НШ с быстроубывающими граничными условиями. Мы покажем здесь, что *эта модель является вполне интегрируемой*. Доказательство будет основано на том, что мы явно предъявим канонические переменные типа действие — угол.

Еще в § 1.7 мы показали, что инволютивные интегралы движения  $I_n$  являются функционалами только от «половины» данных обратной задачи  $\{b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n\}$ . Именно, производящая функция  $\ln a(\lambda)$  интегралов движения зависит, в силу представления (6.43), только от  $|b(\lambda)|^2$  и набора  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ . В качестве «второй половины» естественно взять  $\text{arg } b(\lambda)$  и набор  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ ; скобки Пуассона (6.44) — (6.45) подтверждают эту точку зрения.

Рассмотрим это подробнее, действуя все еще формально в духе § 6; необходимые пояснения будут даны в конце параграфа. Введем величину

$$\varphi(\lambda) = -\text{arg } b(\lambda), \quad (7.1)$$

определенную при  $|b(\lambda)| \neq 0$ ; при этом считаем, что  $0 \leq \varphi(\lambda) < 2\pi$ . Покажем, что

$$\{\varphi(\lambda), \varphi(\mu)\} = 0. \quad (7.2)$$

Действительно, из (6.17) и (6.44) имеем

$$\begin{aligned} \{e^{i\varphi(\lambda)}, e^{2i\varphi(\mu)}\} &= \left\{ \frac{\bar{b}(\lambda)}{b(\lambda)}, \frac{\bar{b}(\mu)}{b(\mu)} \right\} = \\ &= -\frac{\bar{b}(\mu)}{b(\lambda) b^2(\mu)} \{\bar{b}(\lambda), b(\mu)\} - \frac{\bar{b}(\lambda)}{b^2(\lambda) b(\mu)} \{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Найдем теперь величину, канонически сопряженную с  $\varphi(\lambda)$ , которая является функцией от  $|b(\lambda)|^2$ . Для произвольной функции  $f(|b(\lambda)|^2)$  имеем

$$\begin{aligned} \{f(|b(\lambda)|^2), \varphi(\mu)\} &= \\ &= \frac{f'(|b(\lambda)|^2)}{2i} \left\{ |b(\lambda)|^2, \ln \frac{\bar{b}(\mu)}{b(\mu)} \right\} = \frac{f'(|b(\lambda)|^2)}{2i} \frac{b(\mu)}{\bar{b}(\mu)} \left\{ |b(\lambda)|^2, \frac{\bar{b}(\mu)}{b(\mu)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{f'(|b(\lambda)|^2) b(\mu)}{\bar{b}(\mu)} \left( \frac{\bar{b}(\lambda)}{b(\mu)} \{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} - \frac{b(\lambda) \bar{b}(\mu)}{b^2(\mu)} \{\bar{b}(\lambda), b(\mu)\} \right) = \\ &= 2\pi \kappa |f'(|b(\lambda)|^2)| (1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2) \delta(\lambda - \mu), \quad (7.4) \end{aligned}$$

где штрих над  $f$  означает производную. Коэффициент при  $\delta(\lambda - \mu)$  в правой части (7.4) превращается в 1, если

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\kappa} \ln(1 + \varepsilon x). \quad (7.5)$$

Отсюда окончательно получаем, что величины

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{2\pi\kappa} \ln(1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2), \\ \varphi(\lambda) &= -\arg b(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty, \end{aligned} \quad (7.6)$$

являются канонически сопряженными переменными, т. е. их единственная неисчезающая скобка Пуассона имеет вид

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\mu)\} = \delta(\lambda - \mu). \quad (7.7)$$

Отметим, что переменная  $\rho(\lambda)$  неотрицательна при всех  $\lambda$ . Действительно, это очевидно при  $\varepsilon = 1$ , а при  $\varepsilon = -1$  это вытекает из неравенства

$$|b(\lambda)| < 1, \quad (7.8)$$

справедливого благодаря условию (A) (см. § 1.6). Неоднозначности в определении величины  $\varphi(\lambda)$  можно избежать, если вместо  $\rho(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$  рассматривать комплекснозначные функции

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\overline{\rho(\lambda)}} e^{-i\varphi(\lambda)}, \quad \bar{\Phi}(\lambda) = \sqrt{\overline{\rho(\lambda)}} e^{i\varphi(\lambda)}, \quad (7.9)$$

которые определены уже при всех  $\lambda$  и исчезают, если  $b(\lambda) = 0$ . Как и  $b(\lambda)$ , функция  $\Phi(\lambda)$  является функцией типа Шварца, при этом ее гладкость в случае  $\kappa < 0$  обеспечивается условием (7.8). Из (7.2) и (7.7) получаем выражения для скобок Пуассона:

$$\{\Phi(\lambda), \Phi(\mu)\} = \{\bar{\Phi}(\lambda), \bar{\Phi}(\mu)\} = 0, \quad (7.10)$$

$$\{\Phi(\lambda), \bar{\Phi}(\mu)\} = i\delta(\lambda - \mu),$$

которые аналогичны исходным скобкам Пуассона (1.14) для  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ .

Далее, как следует из формул в § 6, данные непрерывного спектра  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  находятся в инволюции с данными дискретного спектра  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$ . Среди последних также нетрудно выделить канонические переменные. Именно, перепишем (6.45) в виде

$$\left\{ \ln \gamma_j, \frac{1}{\varkappa} \lambda_k \right\} = \delta_{jk} \quad (7.11)$$

и воспользуемся равенством (6.41)

$$\left\{ \ln \bar{\gamma}_j, \frac{1}{\varkappa} \lambda_k \right\} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (7.12)$$

Отделяя в (7.11) — (7.12) вещественную и мнимую части, мы получим, что для переменных

$$p_j = -\frac{2}{\varkappa} \operatorname{Re} \lambda_j^{\bar{}}, \quad q_j = \ln |\gamma_j|, \quad (7.13)$$

$$r_j = -\frac{2}{\varkappa} \operatorname{Im} \lambda_j, \quad \varphi_j = -\arg \gamma_j$$

неисчезающие скобки Пуассона имеют вид

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{r_j, \varphi_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (7.14)$$

Переменные  $p_j$  и  $q_j$  меняются на всей вещественной оси, а  $r_j > 0$  (напомним, что  $\varkappa < 0$ ) и  $0 \leq \varphi_j < 2\pi$ .

Подведем итог. Полную систему данных обратной задачи составляют вещественнозначные функции  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$  (или комплекснозначные функции  $\Phi(\lambda)$ ,  $\bar{\Phi}(\lambda)$ ) и набор вещественных переменных дискретного спектра  $p_j, q_j; r_j, \varphi_j, j = 1, \dots, n$ , образующие канонически сопряженные пары. Производящая функция интегралов движения зависит лишь от инволютивного набора переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $p_j$  и  $r_j$ . Поэтому, по аналогии с гамильтоновой механикой с конечным числом степеней свободы, их естественно называть переменными типа действие. В частности, гамильтониан нашей модели зависит только от них. Сопряженные переменные  $\varphi(\lambda)$ ,  $q_j$  и  $\varphi_j$  являются переменными типа углов. Конечно, следует помнить, что переменная  $q_j$ , в отличие от  $\varphi(\lambda)$  и  $\varphi_j$ , меняется на всей вещественной оси, а не от 0 до  $2\pi$ . Преобразование к данным обратной задачи  $\mathcal{F}: (\psi(x), \bar{\psi}(x)) \mapsto (\rho(\lambda), \varphi(\lambda); p_j, q_j, r_j, \varphi_j, j = 1, \dots, n)$ , так подробно исследованное в главах I—II, является обратимым каноническим преобразованием.

Эти результаты и представляют собой основное утверждение по поводу модели НШ, доказывая ее полную интегрируемость.

В заключение формальной части этого параграфа приведем еще несколько полезных формул. Во-первых, из обратимости преобразования  $\mathcal{F}$  следует, что симплектическая форма  $\Omega$  в новых

переменных имеет канонический вид

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) \wedge d\varphi(\lambda) d\lambda + \sum_{j=1}^n (dp_j \wedge dq_j + d\rho_j \wedge d\varphi_j). \quad (7.15)$$

Далее, приведем выражения для локальных интегралов движения  $I_n$  через переменные  $\rho(\lambda)$ ,  $p_j$  и  $\rho_j$ . Для этого перепишем тождества следов из § 1.7 в новых обозначениях:

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{k-1} \rho(\lambda) d\lambda + \frac{(-1)^k}{ikz} \left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{j=1}^n ((p_j - i\rho_j)^k - (p_j + i\rho_j)^k). \quad (7.16)$$

В частности, для заряда  $N$ , импульса  $P$  и гамильтониана  $H$  имеем

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) d\lambda + \sum_{j=1}^n \rho_j, \quad (7.17)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \rho(\lambda) d\lambda - \frac{z}{2} \sum_{j=1}^n \rho_j p_j, \quad (7.18)$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda + \frac{z^2}{4} \sum_{j=1}^n \left( \rho_j p_j^2 - \frac{1}{3} \rho_j^3 \right). \quad (7.19)$$

Переход к новым переменным полностью тривиализует динамику модели НШ и воспроизводит ответы из § 1.7. Действительно, из (7.7), (7.14) и (7.19) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\lambda, t) = \frac{dp_j(t)}{dt} = \frac{d\rho_j(t)}{dt} = 0 \quad (7.20)$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda, t) = \{H, \varphi\} = \lambda^2, \quad (7.21)$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \{H, q_j\} = -\frac{z^2}{2} \rho_j p_j, \quad (7.22)$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \{H, \varphi_j\} = \frac{z^2}{4} (p_j^2 - \rho_j^2), \quad (7.23)$$

что эквивалентно уже известным формулам (1.7.11)

$$b(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t} b(\lambda, 0), \quad \gamma_j(t) = e^{-i\lambda_j^2 t} \gamma_j(0), \quad (7.24)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad j = 1, \dots, n.$$



Конечно, все высшие уравнения НШ также являются вполне интегрируемыми, и динамика общего уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \{I, \psi\}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \{I, \bar{\psi}\}, \quad (7.25)$$

где

$$I = \sum_k \alpha_k I_k \quad (7.26)$$

и коэффициенты  $\alpha_k$  вещественны, дается формулами

$$b(\lambda, t) = e^{-iU(\lambda)t} b(\lambda, 0), \quad \gamma_j(t) = e^{-iU(\lambda_j)t} \gamma_j(0), \quad (7.27)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad j = 1, \dots, n,$$

а

$$I(\lambda) = \sum_k \alpha_k \lambda^{k-1}. \quad (7.28)$$

Приведенные выше рассуждения были проведены на формальном уровне, в частности, мы не обсуждали вопрос о допустимости величин  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$ ,  $\lambda_j$  и  $\gamma_j$  как функционалов на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Теперь мы сделаем необходимые уточнения и начнем с данных непрерывного спектра.

Рассмотрим для этого поведение вариационных производных  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  по  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Соответствующие формулы приведены в § 2 — равенства (2.6) — (2.7). Переходя в них к пределу при  $L \rightarrow \infty$  и вспоминая определение (6.1) приведенной матрицы монодромии, получаем

$$\frac{\delta T(\lambda)}{\delta \psi(x)} = \sqrt{\kappa} \bar{\kappa} T_+^{-1}(x, \lambda) \sigma_- T_-(x, \lambda), \quad (7.29)$$

и

$$\frac{\delta T(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} = \sqrt{\kappa} \bar{\kappa} T_+^{-1}(x, \lambda) \sigma_+ T_-(x, \lambda). \quad (7.30)$$

Отсюда имеем, используя обозначения из § 6 и свойство инволюции (I.5.19):

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \psi(x)} = -\sqrt{\kappa} \bar{\kappa} f_+(x, \lambda) f_-(x, \lambda), \quad (7.31)$$

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} = \sqrt{\kappa} \bar{\kappa} g_+(x, \lambda) g_-(x, \lambda) \quad (7.32)$$

и

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta \psi(x)} = \sqrt{\kappa} \bar{\kappa} g_+(x, \lambda) f_-(x, \lambda), \quad (7.33)$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} = -\varepsilon \sqrt{\kappa} \bar{\kappa} f_+(x, \lambda) g_-(x, \lambda). \quad (7.34)$$

При этом формулы (7.31) — (7.32) допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ .

Таким образом, вариационные производные функционалов  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  по  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  являются гладкими функциями  $x$ . Рассмотрим их поведение при  $|x| \rightarrow \infty$ . Начнем с функционала  $a(\lambda)$  при вещественных  $\lambda$ . Мы имеем следующие асимптотики (см. § 1.5):

$$e^{i\lambda x/2} f_-(x, \lambda) = 1 + o(1), \quad (7.35)$$

$$e^{i\lambda x/2} g_-(x, \lambda) = o(1), \quad (7.36)$$

$$e^{i\lambda x/2} f_+(x, \lambda) = -\varepsilon \bar{b}(\lambda) + o(1), \quad (7.37)$$

$$e^{-i\lambda x/2} g_+(x, \lambda) = a(\lambda) + o(1) \quad (7.38)$$

при  $x \rightarrow -\infty$  и

$$e^{-i\lambda x/2} f_+(x, \lambda) = o(1), \quad (7.39)$$

$$e^{-i\lambda x/2} g_+(x, \lambda) = 1 + o(1), \quad (7.40)$$

$$e^{i\lambda x/2} f_-(x, \lambda) = a(\lambda) + o(1), \quad (7.41)$$

$$e^{-i\lambda x/2} g_-(x, \lambda) = b(\lambda) + o(1) \quad (7.42)$$

при  $x \rightarrow +\infty$ , где предельные значения принимаются в смысле Шварца. Отсюда следует, что

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \psi(x)} = \varepsilon \sqrt{\kappa} e^{-i\lambda x} (\bar{b}(\lambda) + o(1)), \quad \frac{\delta a(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} = o(1) \quad (7.43)$$

при  $x \rightarrow -\infty$  и

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \psi(x)} = o(1), \quad \frac{\delta a(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} = \sqrt{\kappa} e^{i\lambda x} (b(\lambda) + o(1)) \quad (7.44)$$

при  $x \rightarrow +\infty$ . Поэтому при вещественных  $\lambda$  функционал  $a(\lambda)$  неопустим.

Однако при  $\text{Im } \lambda > 0$  функционал  $a(\lambda)$  уже является допустимым. Действительно, как мы доказали в § II.2 (см. формулы (II.2.99) — (II.2.100)), при таких  $\lambda$  асимптотики (7.35) — (7.36) и (7.38) — (7.41) остаются в силе, а формулы (7.37) и (7.42) заменяются на

$$e^{-i\lambda x/2} f_+(x, \lambda) = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (7.45)$$

и

$$e^{i\lambda x/2} g_-(x, \lambda) = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (7.46)$$

Поэтому для  $\text{Im } \lambda > 0$  правые части в (7.31) — (7.32) быстро убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ , так что вариационные производные  $\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \psi(x)}$  и  $\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)}$  являются функциями типа Шварца. Вещественная анали-

тичность функционала  $a(\lambda)$  (а также и  $b(\lambda)$ ) — разложение его в ряд по  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  вида (I.1.7) — получается из аналогичного разложения для соответствующего матричного элемента матрицы монодромии  $T_L(\lambda)$  (см. § 2) предельным переходом  $L \rightarrow -\infty$ .

Для функционала  $b(\lambda)$  аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta b(\lambda)}{\delta \psi(x)} &= \begin{cases} \sqrt{\kappa} e^{-i\lambda x} (a(\lambda) + o(1)) & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ \sqrt{\kappa} e^{-i\lambda x} (\bar{a}(\lambda) + o(1)) & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{cases} \\ \frac{\delta \bar{b}(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} &= o(1) \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7.47)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

Таким образом, мы показали, что функционалы  $a(\lambda)$  и  $\bar{a}(\lambda)$  при  $\text{Im} \lambda > 0$  являются допустимыми на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Что же касается  $b(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$ , то в силу (7.47) их следует рассматривать как обобщенные функции по переменной  $\lambda$  со значениями в алгебре допустимых функционалов; другими словами, допустимыми функционалами являются  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda) b(\lambda) d\lambda$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\lambda) \bar{b}(\lambda) d\lambda$  для произвольных функций  $\varphi_1(\lambda)$  и  $\varphi_2(\lambda)$  из пространства Шварца. Более того, допустимыми являются и функционалы, задаваемые абсолютно сходящимися рядами вида

$$\begin{aligned} F = c + \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c_{nm}(\mu_1, \dots, \mu_n | \nu_1, \dots, \nu_m) \times \\ \times b(\mu_1) \dots b(\mu_n) \bar{b}(\nu_1) \dots \bar{b}(\nu_m) d\mu_1 \dots d\mu_n d\nu_1 \dots d\nu_m, \end{aligned} \quad (7.48)$$

где коэффициентные функции  $c_{nm}(\mu_1, \dots, \mu_n | \nu_1, \dots, \nu_m)$  являются, вообще говоря, обобщенными функциями, а вариационные производные  $\frac{\delta F}{\delta b(\lambda)}$  и  $\frac{\delta F}{\delta \bar{b}(\lambda)}$  являются функциями типа Шварца (обратим внимание на аналогию с определением в § I.1). Действительно, для таких  $F$

$$\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta b(\lambda)} \frac{\delta b(\lambda)}{\delta \psi(x)} + \frac{\delta F}{\delta \bar{b}(\lambda)} \frac{\delta \bar{b}(\lambda)}{\delta \psi(x)} \right) d\lambda \quad (7.49)$$

и

$$\frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta b(\lambda)} \frac{\delta b(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} + \frac{\delta F}{\delta \bar{b}(\lambda)} \frac{\delta \bar{b}(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)} \right) d\lambda, \quad (7.50)$$

так что, в силу (7.47), вариационные производные  $\frac{\delta F}{\delta \psi(x)}$ ,  $\frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)}$  являются функциями типа Шварца. Разложение функционала  $F$  в ряд по функциям  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  вида (I.1.7) получается в результате подстановки в (7.48) ряда по  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$  для  $b(\lambda)$ .

Аналогичную интерпретацию в смысле обобщенных функций имеют и  $\Phi(\lambda)$ ,  $\bar{\Phi}(\lambda)$ . При этом допустимые функционалы вида (7.48) задаются аналогичными рядами по  $\Phi(\lambda)$  и  $\bar{\Phi}(\lambda)$ .

При  $\kappa > 0$  функционалами вида (7.48) практически исчерпывается вся алгебра наблюдаемых. Действительно, формализм обратной задачи задает нам  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  при каждом  $x$  как функционалы от  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  в виде рядов (7.48), которые абсолютно сходятся при достаточно малых  $|b(\lambda)|$  равномерно по  $x$ . Это следует из того, что при таких  $b(\lambda)$  для уравнения Винера — Хопфа (II.2.53) абсолютно сходится ряд из итераций. Вопрос о сходимости рядов для  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  при произвольных  $b(\lambda)$  выходит за рамки этой книги.

В указанном смысле  $\Phi(\lambda)$  и  $\bar{\Phi}(\lambda)$  (а также  $b(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$ ) являются координатами на фазовом пространстве, наподобие  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ .

При  $\kappa > 0$  приведенная картина полностью описывает фазовое пространство  $\mathcal{M}_0$ . Мы имеем на  $\mathcal{M}_0$  два набора комплексных канонических координат  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и  $\Phi(\lambda)$ ,  $\bar{\Phi}(\lambda)$ , связанных нелинейным, обратимым и дифференцируемым каноническим преобразованием  $\mathcal{F}$ . Подчеркнем еще раз, что его обратимость была показана при решении обратной задачи в главе II. Что же касается свойства дифференцируемости, то оно следует из приведенных в этом параграфе вычислений.

В координатах  $\Phi(\lambda)$ ,  $\bar{\Phi}(\lambda)$  основные наблюдаемые нашей модели — локальные интегралы движения  $I_n$  — выглядят очень просто:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{n-1} |\Phi(\lambda)|^2 d\lambda, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.51)$$

и представляют собой моменты функции  $|\Phi(\lambda)|^2$ .

Эти формулы имеют естественную волновую интерпретацию. Функция  $|\Phi(\lambda)|^2$  играет роль функции распределения независимых мод в волновом пакете  $\psi(x, t)$  — решении уравнения НШ, а ее первые моменты дают заряд (число частиц), импульс и энергию этого пакета. Отображение  $\mathcal{F}$  осуществляет переход к независимым модам модели НШ. Само существование таких мод для нашей модели является нетривиальным фактом и обусловлено ее полной интегрируемостью. В линейном пределе  $\kappa \rightarrow 0$  отобра-

жение  $\mathcal{F}$  переходит в преобразование Фурье

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad (7.52)$$

приводящее линейное уравнение Шредингера к независимым модам (см. также § II.3).

При  $\kappa < 0$ , помимо  $b(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$ , мы имеем еще и данные дискретного спектра  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$  и  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Из допустимости  $a(\lambda)$  при  $\text{Im} \lambda > 0$  следует допустимость функционалов  $\lambda_j$ ,  $\bar{\lambda}_j$  на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . Действительно, из условия  $a(\lambda_j) = 0$  по правилу дифференцирования сложного функционала получаем, что

$$\delta a(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} + \dot{a}(\lambda_j) \delta \lambda_j = 0, \quad (7.53)$$

где точка означает производную по  $\lambda$ . Отсюда на основании (6.30) и аналитически продолженных для  $\text{Im} \lambda > 0$  формул (7.31) — (7.32) имеем

$$\frac{\delta \lambda_j}{\delta \psi(x)} = \sqrt{\kappa} \frac{\gamma_j}{\dot{a}(\lambda_j)} f_+^i(x, \lambda_j), \quad \frac{\delta \lambda_j}{\delta \bar{\psi}(x)} = -\sqrt{\kappa} \frac{\bar{\gamma}_j}{\dot{a}(\bar{\lambda}_j)} g_+^i(x, \lambda_j),$$

$$j = 1, \dots, n. \quad (7.54)$$

Из формул (6.30), (7.35) — (7.36) и (7.39) — (7.40) заключаем, что вариационные производные  $\frac{\delta \lambda_j}{\delta \psi(x)}$ ,  $\frac{\delta \lambda_j}{\delta \bar{\psi}(x)}$  являются функциями

типа Шварца. Альтернативный вывод формул (7.54) в духе § 6 состоит в использовании представления (6.23) и рассмотрении вычетов вариационных производных  $\frac{\delta \ln a(\lambda)}{\delta \psi(x)}$  и  $\frac{\delta \ln a(\lambda)}{\delta \bar{\psi}(x)}$  при  $\lambda = \lambda_j$ .

Рассмотрим теперь функционалы  $\gamma_j$ ,  $\bar{\gamma}_j$ . Для вычисления их вариационных производных воспользуемся формулами (6.30), взяв в них, например, первое равенство

$$\gamma_j = \frac{f_-(z, \lambda_j)}{f_+(z, \lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.55)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\delta \gamma_j}{\delta \psi(x)} = \frac{1}{f_+(z, \lambda_j)} \frac{\delta f_-(z, \lambda_j)}{\delta \psi(x)} + \frac{\dot{f}_-(z, \lambda_j)}{f_+(z, \lambda_j)} \frac{\delta \lambda_j}{\delta \psi(x)} -$$

$$- \frac{f_-(z, \lambda_j)}{f_+^2(z, \lambda_j)} \frac{\delta f_+(z, \lambda_j)}{\delta \psi(x)} - \frac{f_-(z, \lambda_j) \dot{f}_+(z, \lambda_j)}{f_+^2(z, \lambda_j)} \frac{\delta \lambda_j}{\delta \psi(x)} \quad (7.56)$$

и аналогичное выражение для  $\frac{\delta\gamma_j}{\delta\psi(x)}$ . Участвующие в этих формулах вариационные производные от  $f_{\pm}(z, \lambda_j)$  вычисляются на основании равенств (2.6)—(2.7). Именно, переходя в них к пределу при  $L \rightarrow \infty$  и вспоминая определение (6.3) решений Йоста, получаем, что при  $z > x$

$$\frac{\delta T_-(z, \lambda)}{\delta\psi(x)} = \sqrt{\bar{\kappa}} T(z, x, \lambda) \sigma_{-} T_-(z, \lambda) \quad (7.57)$$

и при  $z < x$

$$\frac{\delta T_+(z, \lambda)}{\delta\psi(x)} = -\sqrt{\bar{\kappa}} T(z, x, \lambda) \sigma_{-} T_+(z, \lambda), \quad (7.58)$$

а при  $z < x$  и  $z > x$  вариационные производные  $\frac{\delta T_-(z, \lambda)}{\delta\psi(x)}$  и соответственно  $\frac{\delta T_+(z, \lambda)}{\delta\psi(x)}$  исчезают. Переход к выражениям для  $\frac{\delta T_-(z, \lambda)}{\delta\bar{\psi}(x)}$  и  $\frac{\delta T_+(z, \lambda)}{\delta\bar{\psi}(x)}$  осуществляется заменой матрицы  $\sigma_{-}$  на  $\sigma_{+}$ .

Воспользуемся теперь тем, что левая часть формулы (7.56) не зависит от  $z$ . Поэтому мы можем в правой части (7.56) перейти к пределу при  $z \rightarrow x \pm 0$ , при котором выражения (7.57)—(7.58) существенно упрощаются. Полагая, например,  $z = x + 0$ , получаем

$$\frac{\delta f_-(x+0, \lambda)}{\delta\psi(x)} = \frac{\delta f_+(x+0, \lambda)}{\delta\psi(x)} = 0, \quad (7.59)$$

откуда с учетом (7.54) имеем

$$\frac{\delta\gamma_j}{\delta\psi(x)} = \sqrt{\bar{\kappa}} \frac{\gamma_j}{\dot{a}(\lambda_j)} (\dot{f}_-(x, \lambda_j) f_+(x, \lambda_j) - f_-(x, \lambda_j) \dot{f}_+(x, \lambda_j)). \quad (7.60)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\delta\gamma_j}{\delta\bar{\psi}(x)} = \sqrt{\bar{\kappa}} \frac{\gamma_j}{\dot{a}(\lambda_j)} (\dot{g}_+(x, \lambda_j) g_-(x, \lambda_j) - g_+(x, \lambda_j) \dot{g}_-(x, \lambda_j)). \quad (7.61)$$

Отметим, что выражения (7.60)—(7.61) согласованы с формулами (7.33)—(7.34) и равенствами

$$\gamma_j = b(\lambda_j), \quad \bar{\gamma}_j = b^*(\bar{\lambda}_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.62)$$

имеющими смысл только для финитных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ .

Выражения (7.60)—(7.61) показывают, что вариационные производные  $\frac{\delta\gamma_j}{\delta\psi(x)}$  и  $\frac{\delta\gamma_j}{\delta\bar{\psi}(x)}$  являются гладкими функциями, а из формул (7.35)—(7.36), (7.38)—(7.41) и (7.45)—(7.46) следует,

что они быстро убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\frac{\delta \gamma_j}{\delta \psi(x)}$  и  $\frac{\delta \bar{\gamma}_j}{\delta \bar{\psi}(x)}$  являются функциями типа Шварца, что означает допустимость функционалов  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$  на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$ . На этом мы заканчиваем оправдание формальных вычислений в § 6 и в начале этого параграфа.

Перейдем теперь к описанию фазового пространства  $\mathcal{M}_0$  в новых координатах в случае  $\kappa < 0$ . Напомним, что при этом отображение  $\mathcal{F}$  было построено и изучено нами лишь на открытом подмножестве  $\tilde{\mathcal{M}}_0$  в  $\mathcal{M}_0$ , образованном парами функций  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ , удовлетворяющих условию (A), состоящему из неравенства (7.8) и требования простоты нулей  $\lambda_j$  (см. § 1.6). Как мы уже отмечали выше, гладкость функций  $\Phi(\lambda)$  и  $\bar{\Phi}(\lambda)$  эквивалентна условию (7.8). Установленные свойства преобразования  $\mathcal{F}$  позволяют утверждать, что  $\tilde{\mathcal{M}}_0$  представляется в виде несвязного объединения

$$\tilde{\mathcal{M}}_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}_n, \quad (7.63)$$

где компоненты  $\mathfrak{M}_n$  представляет собой произведение фазового пространства  $\mathfrak{M}_0$  с комплексными каноническими координатами  $\Phi(\lambda), \bar{\Phi}(\lambda)$  и конечномерного фазового пространства  $\Gamma_n$ , представляющего собой пространство  $\mathbb{R}^{4n}$  с каноническими координатами  $p_j, q_j$  и  $\rho_j, \varphi_j, j=1, \dots, n$ , где  $-\infty < p_j, q_j < \infty$  и  $0 \leq \rho_j < \infty, 0 \leq \varphi_j < 2\pi$ , из которого выкинуты поверхности  $\rho_j = 0$  и  $(\rho_j - \rho_k)^2 + (\varphi_j - \varphi_k)^2 = 0, j, k=1, \dots, n$ . В терминах  $\lambda_j$  эти поверхности задаются уравнениями  $\text{Im } \lambda_j = 0$  и  $\lambda_j = \lambda_k$ . Действительно, структура произведения  $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_0 \times \Gamma_n$  согласована с пуассоновой структурой, поскольку координаты непрерывного и дискретного спектра находятся в инволюции и скобка Пуассона координат  $\Phi(\lambda), \bar{\Phi}(\lambda)$  (а также и координат  $p_j, \rho_j; q_j, \varphi_j$ ) очевидно невырожденна. В частности, конечномерное пространство  $\Gamma_n$  можно рассматривать как фазовое пространство, получаемое из  $\mathfrak{M}_n$  редукцией, задаваемой связью  $\Phi(\lambda) = \bar{\Phi}(\lambda) = 0$ .

Компоненты  $\mathfrak{M}_n$ , а также и фазовые пространства  $\Gamma_n$  в отдельности, инвариантны относительно потоков, порожденных высшими уравнениями НШ. Сужение этих потоков на  $\Gamma_n$  описывает динамику солитонов, которую мы подробно обсудим в следующем параграфе.

Алгебра допустимых функционалов на компоненте  $\mathfrak{M}_n$  порождена произведениями допустимых функционалов вида (7.48), построенных по  $\Phi(\lambda)$  и  $\bar{\Phi}(\lambda)$ , и гладких функций на фазовом пространстве  $\Gamma_n$ . Более точно, допустимые функционалы  $F$  на  $\mathfrak{M}_n$

задаются абсолютно сходящимися рядами по  $\Phi(\lambda)$ ,  $\bar{\Phi}(\lambda)$  вида (7.48), где коэффициентные функции  $c_{nm}$  гладко зависят от дополнительных переменных  $p_j, q_j, r_j, \varphi_j; j=1, \dots, n$ . При этом, помимо убывания  $\frac{\delta F}{\delta \Phi(\lambda)}$  и  $\frac{\delta F}{\delta \bar{\Phi}(\lambda)}$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , требуется еще, чтобы ряды, получающиеся из (7.48) многократным дифференцированием по дополнительным переменным, сходились абсолютно.

Продолжение отображения  $\mathcal{F}$  на все фазовое пространство  $\mathcal{M}_0$  (без условия (A)), введение и исследование на нем соответствующих новых координат представляют собой сложную задачу глобального анализа, связанную со «склеивкой» многообразий  $\mathcal{M}_n$  при появлении кратных нулей  $\lambda_j$  и при выходе их на вещественную ось. Обсуждение ее выходит за рамки этой книги. К счастью, эта задача не слишком интересна для нашей основной темы — исследования динамики солитонов. Так, например, при выходе нуля  $\lambda_j$  на вещественную ось его вклад в интегралы движения исчезает.

На этом закончим исследование канонического преобразования  $\mathcal{F}$ .

*В заключение этого параграфа покажем, как иерархия пуассоновых структур, введенная в § 5, выглядит в новых координатах.* Оказывается, что действие оператора  $\Lambda$  сводится к умножению на переменную  $\lambda$ . Более точно, для  $l$ -й структуры  $\{, \}_l$  исчезающие скобки Пуассона в комплексных координатах на  $\mathcal{M}_n$  имеют вид

$$\{\Phi(\lambda), \bar{\Phi}(\mu)\}_l = \lambda^l \delta(\lambda - \mu), \quad (7.64)$$

$$\{\ln \gamma_j, \lambda_k\}_l = \kappa \lambda_k^l \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (7.65)$$

В частности, при  $l \geq 0$  пуассонова структура  $\{, \}_l$  определена на всей алгебре функционалов вида (7.48). Упомянутый в § 5 аннулятор порождается величинами вида  $\left. \frac{d^k \Phi(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0}$ ,  $k=0, \dots, l-1$ . При  $l < 0$  на допустимые функционалы накладываются дополнительные условия: их вариационные производные по  $\Phi(\lambda)$  и  $\bar{\Phi}(\lambda)$  должны исчезать при  $\lambda=0$  вместе с производными по  $\lambda$  вплоть до порядка  $|l|-1$ . Тожество Якоби для пуассоновых структур  $\{, \}_l$  тривиально следует из формул (7.64) — (7.65).

В справедливости этих формул проще всего убедиться на уравнениях движения. Действительно,  $(l+1)$ -е уравнение НШ с гамильтонианом  $I_{l+1}$  можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi(\lambda)}{\partial t} = \{I_1, \Phi(\lambda)\}_l, \quad (7.66)$$

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = \{I_1, \gamma_j\}_l, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.67)$$



являющемся характеристическим для  $l$ -й пуассоновой структуры (см. § 5).

Конечно, это рассуждение не является строгим. Существует и строгий вывод, основанный на пересчете пуассоновых структур при отображении  $\mathcal{F}$ , который, однако, мы здесь не приводим.

### § 8. Динамика солитонов с гамильтоновой точки зрения

Здесь мы рассмотрим с гамильтоновой точки зрения солитонные решения модели НШ в быстроубывающем случае. Как мы убедились в § 7, фазовым пространством для системы  $n$  солитонов является конечномерное подпространство  $\Gamma_n$  в  $\mathfrak{M}_n$ , выделяемое условием  $b(\lambda) = 0$  при всех  $\lambda$ . Оно параметризуется каноническими координатами  $-\infty < p_j, q_j < \infty, 0 < \rho_j < \infty, 0 \leq \varphi_j < 2\pi, j = 1, \dots, n$ , или комплексными координатами  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, \text{Im } \lambda_j > 0, \lambda_j \neq \bar{\lambda}_j$  и  $\gamma_j \neq 0$ , связанными друг с другом соотношениями

$$\lambda_j = -\frac{\kappa}{2}(p_j + ip_j), \quad \gamma_j = e^{q_j - i\varphi_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (8.1)$$

(сравни с формулами (7.13)).

Ограничение потоков, порожденных высшими уравнениями НШ, индуцирует на фазовом пространстве  $\Gamma_n$  вполне интегрируемые гамильтоновы системы, описывающие динамику солитонов. Набор из  $2n$  инволютивных интегралов движения составляют переменные  $\rho_j$  и  $p_j$  — переменные типа действие; движение вдоль сопряженных им переменных типа углов  $\varphi_j$  и  $q_j$  линейно.

Гамильтонианы — локальные интегралы движения  $I_l$  модели НШ — выражаются через переменные типа действие следующим образом:

$$I_l = \frac{1}{i\kappa l} \sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_j^l - \lambda_j^l), \quad l = 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

В частности, число частиц  $N$ , импульс  $P$  и энергия  $H$  имеют вид

$$N = \sum_{j=1}^n \rho_j, \quad (8.3)$$

$$P = -\frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^n \rho_j p_j, \quad (8.4)$$

$$H = \frac{\kappa^2}{4} \sum_{j=1}^n \left( \rho_j p_j^2 - \frac{1}{3} \rho_j^3 \right). \quad (8.5)$$

Эти выражения представляют собой суммы по независимым модам. Каждая мода описывается координатами  $p, q, \rho, \varphi$ , и отдельной моде в фазовом пространстве  $\Gamma_1$  соответствует частице-

подобное решение  $\psi(x, t)$  уравнения НШ — солитон

$$\psi(x, t) = \frac{A \exp \left\{ -i \left( \varphi + \frac{\kappa \rho x}{2} - \frac{\kappa^2}{4} (\rho^2 - \rho^2) t + \frac{\pi}{2} \right) \right\}}{\operatorname{ch} \left\{ \frac{\kappa \rho}{2} (x + \kappa p t - x_0) \right\}}, \quad (8.6)$$

где

$$A = \frac{V|\kappa|}{2} \rho, \quad x_0 = -\frac{2q}{\kappa \rho} \quad (8.7)$$

(см. § II.5). Его импульс  $P$  и энергия  $E$

$$P = -\frac{\kappa}{2} \rho p, \quad E = \frac{\kappa^2}{4} \left( \rho p^2 - \frac{1}{3} \rho^3 \right) \quad (8.8)$$

связаны законом дисперсии

$$E = \frac{1}{\rho} P^2 - \frac{\kappa^2}{12} \rho^3. \quad (8.9)$$

Последнее соотношение типично для классической нерелятивистской механики и позволяет интерпретировать солитон как частицу с массой  $m = \rho/2$ . Величина  $x_0$  канонически сопряжена с импульсом  $P$  и играет роль координаты центра инерции частицы. Эта интерпретация согласована с положением максимума  $|\psi(x, t)|^2$  в точке  $x = x_0 + vt$ , где скорость  $v = -\kappa p = \frac{1}{m} P$  дается обычной нерелятивистской формулой.

Координаты  $\rho$  и  $\varphi$  описывают внутренние степени свободы и определяют осциллирующее поведение функции  $\psi(x, t)$ . Их вклад в энергию дается выражением  $-\frac{\kappa^2}{12} \rho^3$ , которое может быть интерпретировано как внутренняя энергия (энергия покоя) частицы.

Фазовое пространство  $\Gamma_n$  описывает взаимодействующую систему  $n$  солитонов. Действительно, общее  $n$ -солитонное решение, описанное в § II.5, не представляет собой суперпозицию односолитонных решений. Оно распадается на сумму отдельных солитонов лишь асимптотически при  $|t| \rightarrow \infty$ , когда взаимодействующие солитоны достаточно далеко расходятся друг от друга. Более точно  $n$ -солитонное решение с параметрами  $\{p_j, q_j, \rho_j, \varphi_j, j = 1, \dots, n\}$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  представляется в виде суммы односолитонных решений с параметрами  $\rho_j^{(\pm)}$ ,  $q_j^{(\pm)}$ ,  $\rho_j^{(\pm)}$ ,  $\varphi_j^{(\pm)}$ , где

$$\rho_j^{(+)} = \rho_j^{(-)} = \rho_j, \quad \rho_j^{(+)} = \rho_j^{(-)} = \rho_j, \quad (8.10)$$

$$q_j^{(\pm)} = q_j \pm \Delta q_j, \quad \varphi_j^{(\pm)} = \varphi_j \pm \Delta \varphi_j \quad (8.11)$$

и

$$\Delta q_j = \sum_{k=j+1}^n \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right| - \sum_{k=1}^{j-1} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right|, \quad (8.12)$$

$$\Delta \varphi_j = \sum_{k=1}^{j-1} \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} - \sum_{k=j+1}^n \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.13)$$

При этом предполагается, что  $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_n$ .

Преобразования  $W_{\pm}$

$$W_{\pm}: \{p_j, q_j, \rho_j, \varphi_j, j = 1, \dots, n\} \rightarrow \{p_j^{(\pm)}, q_j^{(\pm)}, \rho_j^{(\pm)}, \varphi_j^{(\pm)}, j = 1, \dots, n\}, \quad (8.14)$$

описанные формулами (8.10) — (8.13), являются каноническими, т. е. сохраняют скобки Пуассона. Поскольку сдвиги  $\Delta q_j$  и  $\Delta \varphi_j$  зависят только от переменных типа действие (обобщенных импульсов), то нам следует убедиться лишь в справедливости соотношений

$$\{q_j^{(\pm)}, q_k^{(\pm)}\} = \{\varphi_j^{(\pm)}, \varphi_k^{(\pm)}\} = 0, \quad (8.15)$$

которые выглядят как условия интегрируемости

$$\frac{\partial \Delta q_j}{\partial p_k} = \frac{\partial \Delta q_k}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial \Delta \varphi_k}{\partial p_j} = \frac{\partial \Delta \varphi_j}{\partial p_k}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (8.16)$$

и проверяются непосредственно. Из последних формул следует существование функции  $K_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n)$  такой, что

$$\Delta q_j = \frac{\partial K_n}{\partial p_j}, \quad \Delta \varphi_j = \frac{\partial K_n}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.17)$$

Функции  $\pm K_n$  являются производящими функциями канонических преобразований  $W_{\pm}$  в смысле гамильтоновой механики.

Отметим, что преобразования  $W_{\pm}$  являются весьма частным случаем канонических преобразований; их производящая функция  $\pm K_n$  зависит лишь от обобщенных импульсов, так что последние не изменяются.

Описанная картина позволяет интерпретировать взаимодействие солитонов в терминах соответствующих им частиц. При  $t = \pm \infty$  (до и после рассеяния) эти частицы являются свободными. Они имеют импульсы

$$P_j^{(+)} = P_j^{(-)} = P_j, \quad P_j = -\frac{\alpha}{2} \rho_j p_j, \quad (8.18)$$

«внутренние импульсы»  $\rho_j^{(+)} = \rho_j^{(-)} = \rho_j$ , а их координаты центров инерции  $x_j^{(\pm)}(t)$  и фазы  $\varphi_j^{(\pm)}(t)$  линейно зависят от времени:

$$x_j^{(\pm)}(t) = x_{0j}^{(\pm)} + \frac{2P_j t}{\rho_j}, \quad \varphi_j^{(\pm)}(t) = \varphi_j^{(\pm)} + \left( \frac{P_j^2}{\rho_j^2} - \frac{\alpha^2}{4} \rho_j^2 \right) t, \quad (8.19)$$

где

$$x_{0j}^{(\pm)} = -\frac{2}{\kappa\rho_j} q_j^{(\pm)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.20)$$

Параметрами асимптотического движения являются  $P_j, \rho_j, x_{0j}^{(\pm)}, \varphi_j^{(\pm)}$ . Они отличаются от переменных  $p_j, \rho_j, q_j^{(\pm)}, \varphi_j^{(\pm)}$  тривиальным каноническим преобразованием  $M$  типа преобразования масштаба, задаваемого формулами (8.18), (8.20).

*Преобразование рассеяния  $S$*

$$S: \{P_j, \rho_j, x_{0j}^{(-)}, \varphi_j^{(-)}, j = 1, \dots, n\} \rightarrow \{P_j, \rho_j, x_{0j}^{(+)}, \varphi_j^{(+)}, j = 1, \dots, n\} \quad (8.21)$$

является каноническим и представляется в виде суперпозиции уже введенных преобразований:

$$S = MW_+ W_-^{-1} M^{-1}. \quad (8.22)$$

Оно задается производящей функцией

$$S_n(P_1, \dots, P_n; \rho_1, \dots, \rho_n) = 2K_n \left( -\frac{2P_1}{\kappa\rho_1}, \dots, \frac{-2P_n}{\kappa\rho_n}, \rho_1, \dots, \rho_n \right) \quad (8.23)$$

следующим образом:

$$x_{0j}^{(+)} = x_{0j}^{(-)} + \frac{\partial S_n}{\partial P_j}, \quad \varphi_j^{(+)} = \varphi_j^{(-)} + \frac{\partial S_n}{\partial \rho_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.24)$$

Вычислим явно эту производящую функцию. Удобнее иметь дело с функцией  $K_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n)$  и уравнениями (8.17). Из явного вида  $\Delta q_j$  и  $\Delta \varphi_j$  — формул (8.12) — (8.13) — следует, что функция  $K_n$  представляется в виде суммы двухчастичных слагаемых:

$$K_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} K_2(p_j, p_k; \rho_j, \rho_k). \quad (8.25)$$

Функция  $K_2$  находится из системы уравнений

$$\frac{\partial K_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial K_2}{\partial p_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{(p_1 - p_2)^2 + (\rho_1 + \rho_2)^2}{(p_1 - p_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2}, \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \rho_1} = \operatorname{arctg} \frac{\rho_1 - \rho_2}{p_1 - p_2} - \operatorname{arctg} \frac{\rho_1 + \rho_2}{p_1 - p_2}, \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \rho_2} = -\operatorname{arctg} \frac{\rho_1 + \rho_2}{p_1 - p_2} - \operatorname{arctg} \frac{\rho_1 - \rho_2}{p_1 - p_2}. \quad (8.28)$$

Эта система тривиально интегрируется и функция  $K_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} K_2(p_1, p_2; \rho_1, \rho_2) &= \operatorname{Re} \{ (p_1 - p_2 + i\rho_1 + i\rho_2) \ln(p_1 - p_2 + i\rho_1 + i\rho_2) - \\ &\quad - (p_1 - p_2 + i\rho_1 - i\rho_2) \ln(p_1 - p_2 + i\rho_1 - i\rho_2) \} = \\ &= -\frac{2}{\kappa} \operatorname{Re} \{ (\lambda_1 - \lambda_2) \ln(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \ln(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \}. \quad (8.29) \end{aligned}$$

Возвращаясь к преобразованию рассеяния  $S$ , мы видим, что его производящая функция  $S_n(P_1, \dots, P_n; \rho_1, \dots, \rho_n)$  представляется в виде суммы по всем парам частиц:

$$S_n(P_1, \dots, P_n; \rho_1, \dots, \rho_n) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} S_2(P_j, P_k; \rho_j, \rho_k), \quad (8.30)$$

где  $S_2$  связана с  $K_2$  по формуле (8.23). Таким образом, процесс рассеяния солитонов сводится к последовательности канонических преобразований. В каждом из них участвует только пара солитонов, у которых изменяются лишь координаты и фазы. Такая картина типична для факторизованного рассеяния. Производящая функция  $S_2$  может быть названа «классической  $S$ -матрицей» для двухчастичного рассеяния.

На этом мы закончим обсуждение рассеяния солитонов с гамильтоновой точки зрения.

На первый взгляд рассмотренная картина динамики солитонов представляет собой весьма частный случай движения в модели НШ. Однако мы сейчас приведем соотношение о том, что с помощью солитонов можно приблизить общее решение нашей модели. При этом число солитонов  $n$  должно неограниченно увеличиваться, а соответствующие им нули  $\lambda_j$  должны выходить на вещественную ось и «сгущаться» там.

Именно, для определенности предположим, что все  $\lambda_j$  имеют в качестве области сгущения интервал  $M_1 \leq \mu \leq M_2$ , на котором они распределены равномерно с некоторой плотностью  $\rho(\mu)$ . Это означает, что

$$\lambda_j = \mu_j - \frac{ix(M_2 - M_1)}{2n} \rho(\mu_j) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (8.31)$$

где  $\rho(\mu)$  — гладкая неотрицательная функция, исчезающая вне интервала  $(M_1, M_2)$ , а

$$\Delta\mu_j = \mu_{j+1} - \mu_j = \frac{M_2 - M_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (8.32)$$

например,  $\mu_j = \frac{j-1}{n} (M_2 - M_1) + M_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Подставим теперь такие  $\lambda_j$  в формулу (8.2) для локальных интегралов движения. Имеем при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I_t &= \sum_{j=1}^n \mu_j^{t-1} \rho(\mu_j) \frac{M_2 - M_1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \mu_j^{t-1} \rho(\mu_j) \Delta\mu_j + O\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{M_1}^{M_2} \mu^{t-1} \rho(\mu) d\mu + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (8.33)$$

В силу произвольности интервала  $(M_1, M_2)$  и функции  $\rho(\mu)$  из (8.33) мы можем получить формулу

$$I_l = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{l-1} \rho(\mu) d\mu, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (8.34)$$

— знакомое выражение для локальных интегралов движения на компоненте  $\mathfrak{M}_0$  (см. § 7).

Итак, мы показали, что «сгущением» солитонов можно получить фазовое пространство данных непрерывного спектра (по крайней мере на уровне интегралов движения). Разумеется, оставая  $m$  из  $n$  нулей  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  «на месте» и сгущая остальные, мы можем также получить выражения для локальных интегралов движения  $I_l$  и на компоненте  $\mathfrak{M}_m$ .

Это рассуждение подчеркивает общий характер динамики солитонов для нашей модели в быстроубывающем случае. Движение большого количества солитонов с малыми амплитудами моделирует движение, соответствующее непрерывному спектру.

В заключение проследим эффект сгущения нулей на коэффициенте  $a(\lambda)$ , который в нашем случае является произведением множителей Бляшке

$$a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j}. \quad (8.35)$$

Имеем

$$\begin{aligned} a_n(\lambda) &= \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \right) = \\ &= \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{i\kappa(M_2 - M_1)}{n} \frac{\rho(\mu_j)}{\mu_j - \lambda} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \end{aligned} \quad (8.36)$$

откуда при  $\text{Im } \lambda > 0$  получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\lambda) = a_+(\lambda) = \exp \left\{ i\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \right\}. \quad (8.37)$$

Аналогичным образом при  $\text{Im } \lambda < 0$  получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n(\bar{\lambda}) = a_-(\lambda) = \exp \left\{ -i\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \right\}. \quad (8.38)$$

Функции  $a_{\pm}(\lambda)$  имеют на вещественной оси предельные значения из своих областей аналитичности и при этом  $a_-(\lambda) = \bar{a}_+(\lambda)$ . По формулам Сохоцкого — Племеля для вещественных  $\lambda$

получаем

$$a_+(\lambda) a_-(\lambda) = g(\lambda), \quad g(\lambda) = e^{2\pi\kappa\varrho(\lambda)}, \quad (8.39)$$

так что, в частности,  $|a_+(\lambda)| \leq 1$  и

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi\kappa} \ln |a_+(\lambda)|. \quad (8.40)$$

Сравнивая формулы (8.40) и (7.6) и учитывая условие нормировки, убеждаемся, что плотность  $\rho(\mu)$  в интегралах движения (8.34) действительно получается как переменная типа действие.

Приведенные рассуждения показывают, что сгущением нулей  $\lambda_j$  из тривиальной скалярной задачи Римана с нулями

$$a(\lambda) \bar{a}(\lambda) = 1 \quad (8.41)$$

получается регулярная скалярная задача Римана (8.39). При этом в силу условия  $\kappa < 0$ , обеспечивающего неравенство  $\text{Im } \lambda_j > 0$  в (8.31), таким образом можно получить только задачу Римана для сжимающих функций  $g(\lambda)$ :

$$|g(\lambda)| \leq 1, \quad (8.42)$$

которая и встречается в модели НШ с  $\varepsilon = -1$ .

На этом мы заканчиваем описание модели НШ в быстроубывающем случае.

## § 9. Полная интегрируемость в случае конечной плотности

В этом параграфе мы завершим описание гамильтонова подхода к модели НШ. Мы обсудим с гамильтоновой точки зрения характеристики вспомогательной линейной задачи  $b_\rho(\lambda)$ ,  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$ , введенные в гл. I, в терминах которых уравнения движения решаются явно (см. § I.10, II.6). В частности, мы подчеркнем интересные отличия от быстроубывающего случая в программе построения переменных типа действие — угол в терминах коэффициентов перехода и характеристик дискретного спектра.

Напомним сначала, следуя § I.8—I.9, определение и необходимые свойства этих данных. Приведенная матрица монодромии

$$T_\rho(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} E_\rho^{-1}(x, \lambda) Q(\theta) T(x, y, \lambda) E_\rho(y, \lambda) = \begin{pmatrix} a_\rho(\lambda) & \bar{b}_\rho(\lambda) \\ b_\rho(\lambda) & \bar{a}_\rho(\lambda) \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

вводит коэффициенты перехода непрерывного спектра  $a_\rho(\lambda)$  и  $b_\rho(\lambda)$ . Здесь  $\lambda$  принадлежит  $\mathbb{R}'_\omega$  (т. е.  $\lambda$  вещественно и  $|\lambda| > \omega$ ),

$$E_\rho(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i(k-\lambda)}{\omega} \\ \frac{i(\lambda-k)}{\omega} & 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{ikx}{2} \sigma_3}, \quad (9.2)$$

а  $k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ ,  $\text{sign } k(\lambda) = \text{sign } \lambda$  для  $\lambda$  из  $\mathbb{R}'_\omega$ . Имеет место условие нормировки

$$|a_\rho(\lambda)|^2 - |b_\rho(\lambda)|^2 = 1. \quad (9.3)$$

Функция  $a_\rho(\lambda)$  аналитически продолжается на лист  $\Gamma_+$  римановой поверхности  $\Gamma$  функции  $k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ , определяемый условием  $\text{Im } k(\lambda) \geq 0$ , за возможным исключением точек ветвления  $\lambda = \pm \omega$ . Имеют место асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$a_\rho(\lambda) = e^{i\theta/2} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (9.4)$$

для  $\text{Im } \lambda > 0$  и

$$a_\rho(\lambda) = e^{-i\theta/2} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (9.5)$$

для  $\text{Im } \lambda < 0$  и соотношение инволюции

$$a_\rho(\lambda, +) = \overline{a_\rho(\bar{\lambda}, +)}. \quad (9.6)$$

Нули  $\lambda_j$  функции  $a_\rho(\lambda)$  на  $\Gamma_+$  могут лежать только в лакуне  $-\omega < \lambda_j < \omega$  и являются однократными. Их число  $n$  конечно и они составляют дискретный спектр вспомогательной линейной задачи.

Коэффициент  $b_\rho(\lambda)$  удовлетворяет инволюции

$$b_\rho(\lambda - i0) = -\overline{b_\rho(\lambda + i0)} \quad (9.7)$$

для  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  и, вообще говоря, не продолжается с разреза  $\mathcal{R}_\omega = (\mathbb{R}_\omega, \pm)$  на поверхности  $\Gamma$ . В точках  $\lambda = \pm \omega$  коэффициенты  $a_\rho(\lambda)$  и  $b_\rho(\lambda)$  регулярны или сингулярны одновременно. При этом если в окрестности точки  $\lambda = \pm \omega$

$$b_\rho(\lambda) = \frac{b_\pm}{k} + O(1), \quad (9.8)$$

где  $b_\pm \neq 0$  — случай общего положения, то

$$a_\rho(\lambda) = \pm \frac{ib_\pm}{k} + O(1) \quad (9.9)$$

и  $b_\pm$  вещественны, причем

$$\text{sign } b_\pm = (-1)^{N_\pm}, \quad (9.10)$$

где целые числа  $N_\pm$  определяются из условия выбора знаков (I.9.58).

И, наконец, имеют место дисперсионное соотношение

$$a_\rho(\lambda) = e^{i\theta/2} \prod_{j=1}^n \frac{\lambda + k(\lambda) - \lambda_j - k_j}{\lambda + k(\lambda) - \lambda_j + k_j} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_\rho(\mu)|^2)}{k(\mu)} \left(1 + \frac{k(\lambda)}{\mu - \lambda}\right) d\mu \right\}, \quad (9.11)$$



где

$$k_j = i\sqrt{\omega^2 - \lambda_j^2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9.12)$$

и условие (θ)

$$\theta \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\ln(1 + |b_\rho(\lambda)|^2)}{k(\lambda)} d\lambda + 2 \sum_{j=1}^n \arg(\lambda_j - k_j) \pmod{2\pi}, \quad (9.13)$$

которые согласованы с асимптотиками (9.4) — (9.5).

Решения Йоста  $T_\pm(x, \lambda)$  при  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  вводятся посредством пределов

$$T_+(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow +\infty} T(x, y, \lambda) Q^{-1}(\theta) E_\rho(y, \lambda), \quad (9.14)$$

$$T_-(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow -\infty} T(x, y, \lambda) E_\rho(y, \lambda).$$

Первый столбец  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  матрицы  $T_-(x, \lambda)$  и второй столбец  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  матрицы  $T_+(x, \lambda)$  аналитически продолжаются на лист  $\Gamma_+$ . Коэффициенты перехода дискретного спектра  $\gamma_j$  определяются из соотношений

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j), \quad (9.15)$$

являются чисто мнимыми и удовлетворяют условиям

$$\text{sign } i\gamma_j = \text{sign} \frac{da_\rho}{d\lambda}(\lambda_j) = \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.16)$$

Для вычисления скобок Пуассона коэффициентов перехода можно практически дословно использовать схему из § 6, отправляясь от основной формулы из § 1:

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad y < x. \quad (9.17)$$

При этом в силу инволюций (9.6) — (9.7) можно ограничиться случаем, когда  $\lambda$  и  $\mu$  из  $\mathbb{R}'_\omega$ . Мы приведем лишь окончательные результаты.

Для решений Йоста  $T_\pm(x, \lambda)$  имеем соотношения

$$\{T_+(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu)\} = -r(\lambda - \mu) T_+(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu) + \\ + T_+(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu) r_+(\lambda, \mu), \quad (9.18)$$

$$\{T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)\} = r(\lambda - \mu) T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) - \\ - T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) r_-(\lambda, \mu), \quad (9.19)$$

и

$$\{T_-(x, \lambda) \otimes T_+(x, \mu)\} = 0. \quad (9.20)$$

Здесь матрицы  $r_{\pm}(\lambda, \mu)$  даются пределами

$$\begin{aligned} r_{-}(\lambda, \mu) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} (E_{\rho}^{-1}(y, \lambda) \otimes E_{\rho}^{-1}(y, \mu)) r(\lambda - \mu) (E_{\rho}(y, \lambda) \otimes E_{\rho}(y, \mu)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} (E_{\rho}^{-1}(y, \lambda) E_{\rho}(y, \mu) \otimes E_{\rho}^{-1}(y, \mu) E_{\rho}(y, \lambda)) r(\lambda - \mu) \quad (9.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{+}(\lambda, \mu) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (E_{\rho}^{-1}(y, \lambda) \otimes E_{\rho}^{-1}(y, \mu)) (Q(\theta) \otimes Q(\theta)) \times \\ &\quad \times r(\lambda - \mu) (Q^{-1}(\theta) \otimes Q^{-1}(\theta)) (E_{\rho}(y, \lambda) \otimes E_{\rho}(y, \mu)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (E_{\rho}^{-1}(y, \lambda) E_{\rho}(y, \mu) \otimes E_{\rho}^{-1}(y, \mu) E_{\rho}(y, \lambda)) r(\lambda - \mu). \quad (9.22) \end{aligned}$$

В последних формулах участвуют пределы выражений типа  $\frac{\exp\{\pm i(k(\lambda) \pm k(\mu))y\}}{\lambda - \mu}$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ , понимаемые в смысле обобщенных функций. При  $\lambda$  из  $\mathbb{R}'_{\omega}$  функция  $k(\lambda)$  монотонно возрастает, поэтому, используя (6.5), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \text{v.p.} \frac{e^{\pm i(k(\lambda) - k(\mu))y}}{\lambda - \mu} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \text{v.p.} \frac{e^{\pm i k(\lambda) - k(\mu) y}}{k(\lambda) - k(\mu)} \times \\ &\quad \times \frac{k(\lambda) - k(\mu)}{\lambda - \mu} = \pm \pi i \frac{dk(\lambda)}{d\lambda} \delta(k(\lambda) - k(\mu)) = \pm \pi i \delta(\lambda - \mu). \quad (9.23) \end{aligned}$$

Остальные пределы  $\lim_{y \rightarrow \infty} \text{v.p.} \frac{e^{\pm i(k(\lambda) + k(\mu))y}}{\lambda - \mu}$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \text{v.p.} \frac{e^{\pm ik(\lambda)y}}{\lambda - \mu}$ ,

$\lim_{y \rightarrow \infty} \text{v.p.} \frac{e^{\pm ik(\mu)y}}{\lambda - \mu}$  исчезают. Подчеркнем, что  $\lambda$  и  $\mu$  из  $\mathbb{R}'_{\omega}$ , так что  $|\lambda|, |\mu| > \omega$ .

В результате для матриц  $r_{\pm}(\lambda, \mu)$  получаем окончательное выражение

$$r_{\pm}(\lambda, \mu) = -\kappa \begin{pmatrix} \text{v.p.} \frac{\alpha(\lambda, \mu)}{\lambda - \mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{v.p.} \frac{\beta(\lambda, \mu)}{\lambda - \mu} & \pm \pi i \delta(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & \mp \pi i \delta(\lambda - \mu) & \text{v.p.} \frac{\beta(\lambda, \mu)}{\lambda - \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{v.p.} \frac{\alpha(\lambda, \mu)}{\lambda - \mu} \end{pmatrix},$$

где (9.24)

$$\alpha(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda\mu - \omega^2}{2k(\lambda)k(\mu)}, \quad \beta(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda\mu - \omega^2}{2k(\lambda)k(\mu)}, \quad (9.25)$$

так что

$$\alpha(\lambda, \mu) + \beta(\lambda, \mu) = 1. \quad (9.26)$$

Для приведенной матрицы монодромии  $T_\rho(\lambda)$  имеем

$$\{T_\rho(\lambda) \otimes T_\rho(\mu)\} = r_+(\lambda, \mu) T_\rho(\lambda) \otimes T_\rho(\mu) - T_\rho(\lambda) \otimes T_\rho(\mu) r_-(\lambda, \mu). \quad (9.27)$$

Приведем теперь выражения для скобок Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра, которые следуют из соотношений (9.18)—(9.21) и (9.24)—(9.27). Начнем с непрерывного спектра. Имеем

$$\{a_\rho(\lambda), a_\rho(\mu)\} = \{a_\rho(\lambda), \bar{a}_\rho(\mu)\} = 0, \quad (9.28)$$

$$\{a_\rho(\lambda), b_\rho(\mu)\} = \frac{\kappa(\lambda\mu - \omega^2)}{k(\lambda)k(\mu)(\lambda - \mu + i0)} a_\rho(\lambda) b_\rho(\mu), \quad (9.29)$$

$$\{a_\rho(\lambda), \bar{b}_\rho(\mu)\} = -\frac{\kappa(\lambda\mu - \omega^2)}{k(\lambda)k(\mu)(\lambda - \mu + i0)} a_\rho(\lambda) \bar{b}_\rho(\mu) \quad (9.30)$$

и

$$\{b_\rho(\lambda), b_\rho(\mu)\} = 0, \quad (9.31)$$

$$\{b_\rho(\lambda), \bar{b}_\rho(\mu)\} = 2\pi i \kappa |a_\rho(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \mu), \quad (9.32)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  из  $\mathbb{R}'_\omega$ . При этом формулы (9.28)—(9.30) допускают аналитическое продолжение по  $\lambda$  на лист  $\Gamma_+$  вне точек ветвления.

Для характеристик дискретного спектра имеем

$$\{b_\rho(\lambda), \lambda_j\} = \{\bar{b}_\rho(\lambda), \lambda_j\} = 0, \quad (9.33)$$

$$\{b_\rho(\lambda), \gamma_j\} = \{\bar{b}_\rho(\lambda), \gamma_j\} = 0, \quad (9.34)$$

$$\{a_\rho(\lambda), \gamma_j\} = \frac{\kappa(\lambda\lambda_j - \omega^2)}{k(\lambda)k_j(\lambda - \lambda_j)} a_\rho(\lambda) \gamma_j \quad (9.35)$$

и

$$\{\lambda_j, \lambda_l\} = \{\gamma_j, \gamma_l\} = 0, \quad (9.36)$$

$$\{\gamma_j, \lambda_l\} = \kappa \delta_{jl} \gamma_j, \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (9.37)$$

Из приведенных формул получаем, что для  $\lambda$  из  $\mathbb{R}'_\omega$  набор переменных

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi\kappa} \ln(1 + |b_\rho(\lambda)|^2), \quad \varphi(\lambda) = -\arg b_\rho(\lambda), \quad (9.38)$$

$$p_j = -\frac{1}{\kappa} \lambda_j, \quad q_j = \ln i \varepsilon_j \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9.39)$$

является каноническим, т. е. их неисчезающие скобки Пуассона имеют вид

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\mu)\} = \delta(\lambda - \mu), \quad \{p_j, q_l\} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (9.40)$$

Переменные  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$  и  $q_j$  имеют ту же область значений  $0 \leq \rho(\lambda) < \infty$ ,  $0 \leq \varphi(\lambda) < 2\pi$  и  $-\infty < q_j < \infty$ , что и в быстроубывающем случае. Однако для переменной  $p_j$  эта область значений становится ограниченной  $-\omega/\kappa < p_j < \omega/\kappa$ .

Для вывода формул (9.40) можно воспользоваться рассуждениями из § 7. Альтернативный способ основан на соотношении (9.29). Запишем его в виде

$$\{\ln a_\rho(\lambda), \ln b_\rho(\mu)\} = \frac{\kappa(\lambda\mu - \omega^2)}{k(\lambda)k(\mu)(\lambda - \mu + i0)} \quad (9.41)$$

и рассмотрим мнимую часть этого равенства. Из условия нормировки (9.3) и (9.28) следует, что

$$\{\arg a_\rho(\lambda), \ln |b_\rho(\mu)|\} = 0, \quad (9.42)$$

так что мнимая часть слева в (9.41) дается скобкой Пуассона  $\{\ln |a_\rho(\lambda)|, \arg b_\rho(\mu)\}$ . Мнимая часть справа тривиально вычисляется по формуле (6.19). В результате получаем соотношение

$$\{\ln |a_\rho(\lambda)|, \arg b_\rho(\mu)\} = -\pi\kappa b(\lambda - \mu), \quad (9.43)$$

которое эквивалентно первой формуле в (9.40).

*Подчеркнем, что формулы (9.40) были получены нами только для  $\lambda$  и  $\mu$ , не совпадающих с краями непрерывного спектра  $\pm\omega$ . Поэтому они нуждаются в доопределении. Следующее рассуждение показывает, что это доопределение нетривиально.*

Условие  $(\theta)$  в новых переменных переписывается в виде

$$2\kappa \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\rho(\lambda)}{k(\lambda)} d\lambda + 2 \sum_{j=1}^n \arccos \frac{\kappa p_j}{\omega} \equiv \theta \pmod{2\pi}, \quad (9.44)$$

и скобка Пуассона левой части этого равенства со всеми наблюдаемыми должна исчезать. Действительно, фаза  $\theta$  не является динамической переменной, а играет роль номера фазового пространства  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$ . С другой стороны, буквально используя формулы (9.40), получаем, что скобки Пуассона

$$\{\theta, \varphi(\lambda)\} = \frac{2\kappa}{k(\lambda)}, \quad \{\theta, q_j\} = -\frac{2i\kappa}{k_j} \quad (9.45)$$

не исчезают тождественно. *Корректное доопределение скобок Пуассона (9.40) должно разрешить этот «парадокс».*

Для этого заметим, что соотношения (9.40) понимаются в смысле обобщенных функций. Так, например, первая формула в (9.40) приводит к соотношению

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_\omega} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \varphi(\mu) \right\} = f(\mu), \quad (9.46)$$

которое, конечно, справедливо, если  $f(\lambda)$  — гладкая функция на  $\mathbb{R}_\omega$ , включая и точки  $\lambda = \pm\omega$ . Однако формула (9.44), а также и выражения для локальных интегралов движения  $J_{2l,p}$ , приведенные ниже, показывают, что нам встречаются и функции  $f(\lambda)$ , имеющие при  $\lambda = \pm\omega$  особенности типа  $\frac{1}{k(\lambda)}$ . Таким образом,

мы должны более внимательно проанализировать вывод соотношений (9.40) в окрестности точек  $\lambda = \pm\omega$ .

Рассмотрим еще раз правую часть формулы (9.41) при  $\lambda$  из  $\Gamma_+$  вне разреза  $\mathbb{R}_\omega$ . Для таких  $\lambda$  имеем  $\text{Im } k(\lambda) > 0$ , так что для  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$

$$\frac{1}{k(\lambda + i0)} = \frac{1}{k(\lambda) + i0} \quad (9.47)$$

и выражение справа имеет мнимую часть  $-\pi i \delta(k(\lambda))$ , не учтенную в формуле (9.43). Таким образом, это соотношение доопределяется при  $\lambda = \pm\omega$  следующим формальным выражением:

$$\{\ln |a_p(\lambda)|, \arg b_p(\mu)\} = -\pi \delta(\lambda - \mu) - \frac{\pi \kappa (\lambda - \omega^2)}{k(\mu)(\lambda - \mu)} \delta(k(\lambda)). \quad (9.48)$$

Конечно, второе слагаемое в правой части этой формулы исчезает при применении к гладким функциям  $f(\lambda)$ , так как по формуле замены переменных

$$\delta(k(\lambda)) = \frac{k(\lambda)}{\omega} (\delta(\lambda - \omega) - \delta(\lambda + \omega)) \quad (9.49)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_\omega} f(\lambda) \delta(k(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\omega} (k(\omega) f(\omega) - k(-\omega) f(-\omega)) = 0, \quad (9.50)$$

поскольку  $k(\pm\omega) = 0$ .

Однако, как мы только что отмечали, нам нужны также и функции  $f(\lambda)$ , имеющие при  $\lambda = \pm\omega$  сингулярности типа  $\frac{1}{k(\lambda)}$ . Они представляются в следующем виде:

$$f(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{k(\lambda)} + f_2(\lambda), \quad (9.51)$$

где  $f_1(\lambda)$  и  $f_2(\lambda)$  — гладкие функции. Для таких функций имеем

$$\int_{\mathbb{R}_\omega} f(\lambda) \delta(k(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\omega} (f_1(\omega) - f_1(-\omega)). \quad (9.52)$$

Действительно, в этот интеграл дает вклад только первое слагаемое в (9.51). Совершая замену переменной  $k = k(\lambda)$ ,

имеем

$$\int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{f_1(\lambda)}{k(\lambda)} \delta(k(\lambda)) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(k) \delta(k) dk, \quad (9.53)$$

где  $\tilde{f}_1(k) = \frac{f_1(\lambda(k))}{\lambda(k)}$  и  $\lambda(k) = \sqrt{k^2 + \omega^2}$ . Эта функция разрывна при  $k=0$ , поскольку  $\lambda(\pm 0) = \pm \omega$ , поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(k) \delta(k) dk = \frac{1}{2} (\tilde{f}_1(+0) + \tilde{f}_1(-0)) = \frac{1}{2\omega} (f_1(\omega) - f_1(-\omega)). \quad (9.54)$$

Итак, формула (9.52) дает строгое определение обобщенной функции  $\delta(k(\lambda))$  на расширенном пространстве основных функций вида (9.51).

В аналогичной модификации нуждается и исчезающая при  $\lambda \neq \pm \omega$  скобка Пуассона  $\{\ln |a_p(\lambda)|, \ln |\gamma_j|\}$ . Отправляясь от формулы (9.35), переписанной в виде

$$\{\ln a_p(\lambda), \ln \gamma_j\} = \frac{\pi(\lambda \lambda_j - \omega^2)}{k(\lambda) k_j (\lambda - \lambda_j)}, \quad (9.55)$$

и вычисляя ее вещественную часть, имеем

$$\{\ln |a_p(\lambda)|, \ln |\gamma_j|\} = -\frac{\pi i \pi (\lambda \lambda_j - \omega^2)}{k_j (\lambda - \lambda_j)} \delta(k(\lambda)), \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.56)$$

Остальные скобки Пуассона переменных (9.38)—(9.39) в модификации не нуждаются.

Таким образом, неисчезающие скобки Пуассона переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$ , справедливые для всех  $|\lambda| \geq \omega$ , имеют вид

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\mu)\} = \delta(\lambda - \mu) - \frac{1}{k(\mu)} \delta^*(k(\lambda)), \quad (9.57)$$

$$\{\rho(\lambda), q_j\} = \frac{i}{k_j} \delta^*(k(\lambda)) \quad (9.58)$$

и

$$\{p_j, q_l\} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (9.59)$$

Здесь обобщенная функция  $\delta^*(k(\lambda))$  дается соотношением

$$\delta^*(k(\lambda)) = \frac{\omega^2 - \lambda \mu}{\lambda - \mu} \delta(k(\lambda)) \quad (9.60)$$

и на самом деле не зависит от  $\mu$ . Действительно, как это вытекает из (9.52), на функциях  $f(\lambda)$  вида (9.51)  $\delta^*(k(\lambda))$  определя-

ется следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}_\omega} f(\lambda) \delta^*(k(\lambda)) d\lambda = \frac{f_1(\omega) + f_1(-\omega)}{2}. \quad (9.61)$$

Отметим здесь еще одно отличие от быстроубывающего случая, связанное с наличием лакуны в непрерывном спектре вспомогательной линейной задачи. В случае общего положения переменная  $\rho(\lambda)$  имеет особенность типа  $\ln \frac{1}{|k(\lambda)|}$  при  $\lambda \rightarrow \pm\omega$ ; в этом

случае значения  $\varphi(\pm\omega)$  фиксированы и равны 0 или  $\pi$  в согласии с формулами (9.10) и (9.38). Если  $\lambda = \omega$  или  $\lambda = -\omega$  или оба эти значения являются виртуальными уровнями, то переменная  $\rho(\lambda)$  в этих точках конечна, а  $\varphi(\lambda)$  в силу инволюции (9.7) принимает значения  $\pm\pi/2$ . Кроме того, выполняется условие (θ). Сформулированные условия полностью характеризуют образ фазового пространства  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$  при отображении  $\mathcal{F}$  из гл. II.

Таким образом, переменные  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$  и  $q_j$  с описанными ограничениями можно рассматривать как новые координаты на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$ .

Убедимся теперь, что корректные скобки Пуассона (9.57) — (9.59) разрешают упомянутый выше парадокс, связанный с условием (θ). Действительно, используя формулу (9.44), соотношения (9.57) — (9.59) и определение (9.61), имеем

$$\{\theta, \varphi(\lambda)\} = \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\delta\theta}{\delta\rho(\mu)} \{\rho(\mu), \varphi(\lambda)\} d\mu = \frac{2\kappa}{k(\lambda)} - \frac{2\kappa}{k(\lambda)} = 0 \quad (9.62)$$

и

$$\{\theta, q_j\} = \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{\delta\theta}{\delta\rho(\lambda)} \{\rho(\lambda), q_j\} d\lambda + \frac{\delta\theta}{\delta p_j} = \frac{2i\kappa}{k_j} - \frac{2i\kappa}{k_j} = 0. \quad (9.63)$$

Можно привести еще целый ряд кажущихся парадоксов, связанных с использованием наивных скобок Пуассона (9.40). Все они снимаются после сделанного нами корректного доопределения этих скобок Пуассона. Один пример такого типа будет разобран ниже в связи с высшими уравнениями НШ. Приведем здесь другой пример. Если вычислить скобку Пуассона  $\{a_\rho(\lambda), b_\rho(\mu)\}$ , используя дисперсионное соотношение (9.11) и наивные скобки Пуассона (9.40), то ответ не будет согласован с формулой (9.29). Однако такое согласование получится после использования корректных скобок Пуассона (9.57) — (9.59).

Итак, окончательную форму скобок Пуассона для переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$  дают формулы (9.57) — (9.59). Не выписанные в этих формулах скобки Пуассона тождественно исчезают.

Явный вид окончательных скобок Пуассона не позволяет назвать величины  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$  переменными типа действие —

угол в буквальном смысле. Так, например, переменная дискретного спектра  $q_j$  (обобщенный угол) не находится в инволюции с переменной непрерывного спектра  $\rho(\lambda)$  (обобщенное действие). Кроме того, скобка Пуассона (9.57) между  $\rho(\lambda)$  и  $\varphi(\mu)$  не имеет явно канонического вида. Эти обстоятельства отличают рассматриваемый нами случай от быстроубывающего.

Однако пуассонова структура, задаваемая скобками Пуассона (9.57) — (9.59), хорошо приспособлена к динамике, порождаемой локальными интегралами движения модели НШ, и практически не менее удобна, чем явные переменные типа действие — угол в быстроубывающем случае. Так, мы скоро убедимся, что все высшие уравнения НШ явно интегрируются в новых переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$ .

Однако полное описание алгебры наблюдаемых на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho, \vartheta}$  в этих координатах гораздо сложнее, чем то, которое было дано в § 7 для быстроубывающего случая. Мы не будем здесь заниматься этой громоздкой и нетривиальной задачей. Скажем только, что условия, накладываемые на допустимые функционалы  $F$ , должны гарантировать, что порожденные ими по скобкам Пуассона (9.57) — (9.59) гамильтоновы уравнения движения для переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$  не выводят из описанного выше класса.

Перейдем теперь к рассмотрению гамильтоновых потоков, порождаемых локальными интегралами движения  $J_{l, \rho}$ . Эти функционалы были введены в § 1.10. Приведенные там формулы — тождества следов — позволяют явно выразить  $J_{l, \rho}$  через переменные  $\rho(\lambda)$  и  $p_j$ . Имеем

$$J_{l, \rho} = \int_{\mathbb{R}_\omega} \lambda k^{l-2}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda + \frac{(-1)^{(l+1)/2}}{\kappa l} \sum_{j=1}^n (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{l/2} \quad (9.64)$$

для нечетных  $l \geq 1$  и

$$J_{l, \rho} = \int_{\mathbb{R}_\omega} \frac{1}{k(\lambda)} \sum_{m=0}^{l/2} \binom{l/2}{m} \omega^{2m} k^{l-2m}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{\sqrt{\omega^2 - \kappa^2 p_j^2}} \sum_{m=0}^{l/2-1} (-1)^{l/2-m} \omega^{2m} \binom{-1/2}{m} (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{l/2-m} \quad (9.65)$$

для четных  $l$ .

Мы показали в § 4, что интегралы движения  $J_{l, \rho}$  являются при  $l > 1$  допустимыми функционалами на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho, \vartheta}$  и находятся в инволюции. Они порождают высшие уравнения НШ для случая конечной плотности:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{J_{l, \rho}, \Psi\}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \{J_{l, \rho}, \bar{\Psi}\}. \quad (9.66)$$



Убедимся, что в новых переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$  эти уравнения явно решаются.

Рассмотрим сначала нечетные  $l > 1$ . В этом случае вариационная производная

$$\frac{\delta J_{l,\rho}}{\delta \rho(\lambda)} = \lambda k^{l-2}(\lambda) \quad (9.67)$$

регулярна при  $\lambda = \pm \omega$ , так что скобки Пуассона (9.57) — (9.59) сводятся к наивным выражениям (9.40). Уравнения (9.66) в новых переменных приобретают вид

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial t} = \{J_{l,\rho}, \rho(\lambda)\} = 0, \quad \frac{dp_j}{dt} = \{J_{l,\rho}, p_j\} = 0, \quad (9.68)$$

$$\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial t} = \{J_{l,\rho}, \varphi(\lambda)\} = \lambda k^{l-2}(\lambda), \quad (9.69)$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \{J_{l,\rho}, q_j\} = -i \lambda_j k_j^{l-2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9.70)$$

и явно решаются. Для их решения получаем формулы, которые удобно записать в терминах коэффициентов перехода:

$$a_\rho(\lambda, t) = a_\rho(\lambda, 0), \quad b_\rho(\lambda, t) = e^{-i \lambda_j k_j^{l-2}(\lambda) t} b_\rho(\lambda, 0), \\ \gamma_j(t) = e^{-i \lambda_j k_j^{l-2} t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.71)$$

В частности, при  $l=3$  получаем знакомые формулы (I.10.7) для уравнения НШ.

В случае  $l=1$  подынтегральная функция в (9.64) имеет при  $\lambda \rightarrow \pm \omega$  сингулярность вида  $\frac{1}{k(\lambda)}$ , и на первый взгляд мы должны использовать скобки Пуассона (9.57) — (9.59). Однако коэффициент при  $\frac{1}{k(\lambda)}$  — функция  $f_l(\lambda) = \lambda$  — нечетен и не дает вклада в (9.61). Таким образом, мы имеем соотношение

$$\{J_{1,\rho}, \varphi(\lambda)\} = \frac{\lambda}{k(\lambda)}, \quad (9.72)$$

и уравнение движения

$$\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial t} = \{J_{1,\rho}, \varphi(\lambda)\} \quad (9.73)$$

имеет формальное решение

$$\varphi(\lambda, t) = \varphi(\lambda, 0) + \frac{\lambda}{k(\lambda)} t. \quad (9.74)$$

Это решение, однако, сингулярно при  $\lambda \rightarrow \pm \omega$  для любого  $t > 0$  и выводит нас из класса допустимых  $\varphi(\lambda)$ . Действительно, в случае виртуального уровня переменная  $\varphi(\lambda)$  регулярна при  $\lambda =$

$= \pm \omega$ , а в случае общего положения принимает в этих точках значения  $0, \pi$ .

Таким образом, мы еще раз убедились, что функционал  $J_{l,p} = = N$  — аналог заряда в быстроубывающем случае (см. § I.1) — является недопустимым функционалом на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{p,0}$ .

Рассмотрим теперь четные  $l$ . Имеем из (9.65)

$$\frac{\delta J_{l,p}}{\delta p(\lambda)} = \frac{\omega^l \binom{l/2}{l/2}}{k(\lambda)} + g_l(\lambda), \quad (9.75)$$

где

$$g_l(\lambda) = \sum_{m=0}^{l/2-1} \binom{l/2}{m} \omega^{2m} k^{l-2m-1}(\lambda). \quad (9.76)$$

Поэтому при написании уравнений движения нам следует использовать скобки Пуассона (9.57) — (9.59). Имеем

$$\{J_{l,p}, \varphi(\lambda)\} = g_l(\lambda) \quad (9.77)$$

и аналогично

$$\{J_{l,p}, q_{jj}\} = -ig_l(\lambda_j), \quad j=1, \dots, n. \quad (9.78)$$

Поэтому в случае четных  $l$  динамика высших уравнений НШ задается формулами

$$a_p(\lambda, t) = a_p(\lambda, 0), \quad b_p(\lambda, t) = e^{-ig_l(\lambda)t} b_p(\lambda, 0), \quad (9.79)$$

$$\gamma_j(t) = e^{-ig_l(\lambda_j)t} \gamma_j(0), \quad j=1, \dots, n.$$

В частности, при  $l=2$  функционал  $J_{2,p}$  совпадает с импульсом  $P$  (см. § I.10). Функция  $g_2(\lambda)$  имеет вид

$$g_2(\lambda) = k(\lambda). \quad (9.80)$$

Это выражение согласовано с интерпретацией импульса как генератора сдвига по пространственной переменной  $x$ .

Отметим, что если бы в случае четных  $l$  при выводе уравнения движения для  $\varphi(\lambda)$  мы использовали наивные скобки Пуассона (9.40), то получили бы выражение, сингулярное при  $\lambda \rightarrow \pm \omega$ . Это означало бы, что функционалы  $J_{l,p}$  являются недопустимыми. Однако мы знаем, что это не так, и именно использование корректных скобок Пуассона (9.57) — (9.59) снимает возможное противоречие.

Так же как и в быстроубывающем случае, формулы (9.64) — (9.65) для интегралов движения интерпретируются в терминах независимых мод, нумеруемых непрерывной переменной  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  и дискретной переменной  $j$ . Однако следует помнить, что переменные  $\rho(\lambda)$  и  $p_j$ , описывающие аддитивный вклад этих мод

в интегралы движения, связаны одним условием — условием ( $\theta$ ). От него можно освободиться, перейдя к объединению фазовых пространств  $\mathcal{M}_{\rho, \theta}$

$$\mathcal{M}_{\rho} = \bigcup_{0 \leq \theta < 2\pi} \mathcal{M}_{\rho, \theta}. \quad (9.81)$$

При этом в фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho}$  пуассонова структура (9.57) — (9.59) становится вырожденной.

Поучительно рассмотреть энергию и импульс отдельных мод. Для этого перепишем выражения функционалов импульса  $P$  и энергии  $H_{\rho} = J_{3, \rho}$ , сделав замену

$$P \rightarrow P_{\rho} = P - \rho^2 \theta, \quad \rho = \frac{\omega}{2\sqrt{\kappa}}, \quad (9.82)$$

не влияющую на уравнения движения, смысл которой станет ясен чуть ниже. Имеем

$$P_{\rho} = \int_{\mathbb{R}_{\omega}} k(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda + 2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_j}{4} \sqrt{\omega^2 - \kappa^2 p_j^2} - \rho^2 \arccos \frac{\kappa p_j}{\omega} \right) \quad (9.83)$$

и

$$H_{\rho} = \int_{\mathbb{R}_{\omega}} \lambda k(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda + \frac{1}{3\kappa} \sum_{j=1}^n (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{3/2}. \quad (9.84)$$

Здесь выбрана главная ветвь функции  $\arccos x$ : для  $-1 \leq x \leq 1$  имеем  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ .

Энергия и импульс отдельной моды непрерывного спектра с номером  $\lambda$ , где  $\lambda$  — из  $\mathbb{R}_{\omega}$ , даются формулами

$$E(\lambda) = \lambda k(\lambda) \quad (9.85)$$

и

$$P(\lambda) = k(\lambda) \quad (9.86)$$

(сравни с (9.80)). При этом импульс  $P(\lambda)$  меняется на всей оси, а энергия  $E(\lambda)$  положительна и исчезает при  $\lambda = \pm \omega$ , т. е. когда  $P(\lambda) = 0$ . Именно с этой целью и был осуществлен сдвиг импульса  $P$  на константу  $-\rho^2 \theta$ . Закон дисперсии мод непрерывного спектра имеет вид

$$E = |P| \sqrt{P^2 + \omega^2}. \quad (9.87)$$

Вторые слагаемые в формулах (9.83) — (9.84) представляют собой вклад мод дискретного спектра, отвечающих солитонам. Энергия и импульс солитона с номером  $j$  имеют вид

$$E_j = \frac{1}{3\kappa} (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{3/2}, \quad (9.88)$$

$$P_j = \frac{p_j}{2} \sqrt{\omega^2 - \kappa^2 p_j^2} - 2\rho^2 \arccos \frac{\kappa p_j}{\omega}. \quad (9.89)$$

При этом, когда  $p_j$  меняется от  $-\omega/\kappa$  до  $\omega/\kappa$ , импульс солитона монотонно возрастает и пробегает зону Бриллюэна  $[-2\pi\rho^2, 0]$ . Таким образом, имеем неравенства

$$-2\pi\rho^2 \leq P_j \leq 0. \quad (9.90)$$

Закон дисперсии для солитонов уже нельзя задать в явном виде при помощи элементарных функций, однако при  $P_j \rightarrow 0$  и  $P_j \rightarrow 2\pi\rho^2$  имеем, соответственно,

$$E_j = \omega |P_j| + O(P_j^2) \quad (9.91)$$

и

$$E_j = \omega |P_j + 2\pi\rho^2| + O((P_j + 2\pi\rho^2)^2). \quad (9.92)$$

Первая из этих формул асимптотически совпадает с (9.87).

Таким образом, в случае конечной плотности существуют две согласованные ветви квазиклассического спектра возбуждений. Закон дисперсии для первой ветви линеен при малых импульсах. Для второй ветви подобная линейность имеет место для импульсов, меняющихся в окрестности концов зоны Бриллюэна. Такая дисперсия типична для так называемых бесщелевых или боголюбовских возбуждений.

В отличие от быстроубывающего случая, законы дисперсии для мод непрерывного спектра и солитонов существенно различаются. Поэтому здесь нельзя думать, что моды непрерывного спектра можно получить сгущением или каким-нибудь другим предельным переходом из солитонов.

*В заключение этого параграфа рассмотрим динамику солитонов с гамильтоновой точки зрения.* Условие  $(\theta)$  приводит к существенному отличию от быстроубывающего случая. Именно, хотя подмногообразии  $\Gamma_{n,\theta}$  в фазовом пространстве  $\mathcal{M}_{\rho,\theta}$ , соответствующее  $n$ -солитонным решениям, инвариантно относительно динамики, на нем не наследуется пуассонова структура из  $\mathcal{M}_{\rho,\theta}$ .

Действительно, естественные координаты  $p_j, q_j, j=1, \dots, n$ , на  $\Gamma_{n,\theta}$ , задаваемые формулами (9.39), связаны условием

$$2 \sum_{j=1}^n \arccos \frac{\kappa p_j}{\omega} \equiv \theta \pmod{2\pi}, \quad (9.93)$$

и таким образом,  $\Gamma_{n,\theta}$  нечетномерно. Поэтому симплектическая форма, определяемая вложением  $\Gamma_{n,\theta}$  в  $\mathcal{M}_{\rho,\theta}$ , вырождена и с ней нельзя связать пуассонову структуру.

Альтернативный подход состоит в отказе от условия  $(\theta)$  и переходе к фазовому пространству  $\mathcal{M}_\rho$ . Однако пуассонова структура на  $\mathcal{M}_\rho$  вырождена, и мы не можем определить по ней симплектическую форму, необходимую для спуска на солитонные подмногообразия.

Указанное обстоятельство проявляется в том, что наивное условие  $\rho(\lambda) = 0$  при всех  $\lambda$  из  $\mathbb{R}_\omega$  не согласовано с корректными

ми скобками Пуассона (9.57) — (9.59). Мы видим еще раз, что в нашем случае переменные дискретного и непрерывного спектра не отделяются друг от друга согласованным с пуассоновой структурой образом.

Однако это препятствие можно преодолеть в случае всех высших уравнений НШ. Поучительно рассмотреть сначала пример односолитонного решения

$$\Psi(x, t) = \rho \frac{1 + e^{i\theta} e^{\nu(x-vt-x_0)}}{1 + e^{\nu(x-vt-x_0)}}, \quad (9.94)$$

где

$$v = \lambda_0 = -\omega \cos \frac{\theta}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{\nu} \ln i \gamma_0, \quad \nu = \omega \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.95)$$

(см. § II.8). При фиксированном  $\theta$  этому решению отвечает одномерное пространство  $\Gamma_{1,\theta}$ , свободной координатой в котором является  $x_0$ . Однако динамику

$$x_0(t) = x_0 + vt, \quad v = \text{const}, \quad (9.96)$$

порожденную уравнением НШ, можно получить гамильтоновым образом, исходя из гамильтониана

$$H_{\text{sol}}^{(1)} = \frac{1}{3\kappa} (\omega^2 - \kappa^2 p^2)^{3/2} \quad (9.97)$$

и скобок Пуассона

$$\{p, q\} = 1, \quad (9.98)$$

где

$$p = -v/\kappa, \quad q = \nu x_0. \quad (9.99)$$

При этом, конечно, мы отказываемся от условия  $(\theta)$ , и сама величина  $\theta$  формально не является аннулятором.

Аналогичные соображения относятся и к  $n$ -солитонному решению и отвечающему ему подмногообразию  $\Gamma_{n,\theta}$ . В координатах  $p_j, q_j$ , введенных в (9.39), динамика по уравнению НШ задается гамильтонианом

$$H_{\text{sol}}^{(n)} = \frac{1}{3\kappa} \sum_{j=1}^n (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{3/2} \quad (9.100)$$

и каноническими скобками Пуассона

$$\{p_j, q_l\} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (9.101)$$

Более того, динамике по высшим уравнениям НШ (см. формулы (9.71) и (9.79)) соответствуют гамильтонианы

$$J_{l,\text{sol}} = \frac{(-1)^{(l+1)/2}}{\kappa l} \sum_{j=1}^n (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{l/2} \quad (9.102)$$

для нечетных  $l$  и

$$J_{l,\text{sol}} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{l/2-1} (-1)^{l/2-m-1} \binom{-1/2}{m} \omega^{2m} p_j (\omega^2 - \kappa^2 p_j^2)^{(l-1)/2-m} - \frac{\omega^l}{\kappa} \binom{1/2}{l/2} \sum_{j=1}^n \arccos \frac{\kappa p_j}{\omega} \quad (9.103)$$

для четных  $l$ .

Для нечетных  $l$  эти гамильтонианы получаются из локальных интегралов движения  $J_{l,\rho}$ , если в (9.64) положить  $\rho(\lambda) = 0$ . В случае четных  $l$  из интегралов  $J_{l,\rho}$  следует сперва вычесть величину  $\frac{\omega^l}{2\kappa} \binom{1/2}{l/2} \theta$  с тем, чтобы подынтегральное выражение в (9.65) было гладким при  $\lambda = \pm \omega$ , и затем положить  $\rho(\lambda) = 0$ .

Скобки Пуассона (9.101) получаются из наивных скобок Пуассона (9.40) после редукции  $\rho(\lambda) = 0$ . Как уже отмечалось выше, наивные скобки Пуассона допустимы для функционалов вида

$$F = \int_{\mathbb{R}_\omega} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda + \Phi(p_1, \dots, p_n), \quad (9.104)$$

где  $f(\lambda)$  — гладкая функция на  $\mathbb{R}_\omega$ , включая и  $\lambda = \pm \omega$ . В этом смысле согласованы выбор скобок Пуассона (9.101) и только что описанная регуляризация интегралов движения. Ясно, что при регуляризации величина  $\theta$  формально исчезает и тривиально находится в инволюции с  $p_j$  и  $q_j$ .

Обсудим теперь рассеяние солитонов с гамильтоновой точки зрения. В § II.8 было показано, что при рассеянии солитонов происходят лишь сдвиги координат  $q_j$ :

$$q_j^{(+)} = q_j^{-1} + \Delta q_j, \quad (9.105)$$

где

$$\Delta q_j = 2 \sum_{l=1}^{j-1} \ln \frac{\omega \left( 1 - \cos \left( \frac{\theta_j + \theta_l}{2} \right) \right)}{\kappa (p_l - p_j)} - 2 \sum_{l=j+1}^n \ln \frac{\omega \left( 1 - \cos \left( \frac{\theta_j + \theta_l}{2} \right) \right)}{\kappa (p_j - p_l)} \quad (9.106)$$

и

$$\theta_j = 2 \arccos \frac{\kappa p_j}{\omega}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.107)$$

При этом предполагается, что  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$  (сравни с аналогичными формулами (8.10)–(8.13) для быстроубывающего случая).

Однако, в отличие от быстрорубывающего случая, преобразование рассеяния солитонов уже не является каноническим по отношению к скобке Пуассона (9.101). В этом проще всего убедиться в случае рассеяния двух солитонов. Имеем

$$\Delta q_2 = -\Delta q_1 = \ln \frac{\omega \left( 1 - \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right)}{\kappa (p_1 - p_2)}, \quad (9.108)$$

и правая часть не является функцией только разности  $p_1 - p_2$ , поэтому представление

$$\Delta q_1 = \frac{\partial K(p_1, p_2)}{\partial p_1}, \quad \Delta q_2 = \frac{\partial K(p_1, p_2)}{\partial p_2} \quad (9.109)$$

не имеет места.

Тот факт, что рассеяние солитонов не является каноническим по отношению к скобке Пуассона (9.101), имеет естественное объяснение. Дело в том, что асимптотические переменные  $p_j^{(\pm)} = p_j$  и  $q_j^{(\pm)}$  не обязаны иметь скобки Пуассона вида (9.101); корректное вычисление их скобок Пуассона должно использовать явные асимптотические формулы при  $|t| \rightarrow \infty$  для решений уравнения НШ в случае конечной плотности. Полученные таким образом скобки Пуассона отличны от (9.101), и по отношению к ним рассеяние солитонов уже канонично. Мы не приводим соответствующих вычислений, так как описание асимптотической динамики всех мод модели НШ представляет собой трудную вычислительную задачу, выходящую за рамки этой книги.

На этом мы заканчиваем первую часть книги, посвященную модели НШ с различными граничными условиями: квазипериодическими, и, главным образом, условиями быстрого убывания и конечной плотности. Мы убедились, что с этой моделью связаны интересные математические объекты.

1) Условие нулевой кривизны, порождающее уравнения движения.

2) Вспомогательная линейная задача, ее характеристики и их интерпретация с точки зрения спектральной теории и теории рассеяния.

3) Формулировка обратной задачи как матричной задачи Римана.

4) Существование  $r$ -матрицы и фундаментальных скобок Пуассона и их роль в построении представления нулевой кривизны.

5) Интерпретация коэффициентов перехода и дискретного спектра вспомогательной линейной задачи как канонических переменных типа действие — угол.

Описание этих объектов для обоих граничных условий было иногда почти что аналогично, а иногда обладало существенными отличиями, в особенности в этом параграфе. Мы построили изложение таким образом, чтобы читателю стало ясно, что указан-

ные структуры имеют достаточно общий характер и должны порождать и другие интересные модели нелинейных уравнений. Во второй части книги мы в этом явно убедимся.

## § 10. Комментарии и литературные указания

1) Интерпретация отображения  $\mathcal{F}$  как канонического преобразования к переменным типа действие — угол впервые была предложена в работе [3.19] на примере уравнения Кортевега — де Фриза. Именно там был вычислен образ симплектической формы  $\Omega$  при отображении  $\mathcal{F}^{-1}$ , задаваемом обратной задачей для одномерного оператора Шредингера, и приведены канонические переменные типа действие — угол. Аналогичное вычисление для модели НШ в быстроубывающем случае при  $\varepsilon=1$  было проведено в работе [3.43].

Альтернативная программа для пересчета скобок Пуассона для моделей КдФ и НШ впервые была проведена в работе [3.20] (см. также монографию [3.21]). В случае модели НШ с граничными условиями конечной плотности изложенные в § 9 тонкости, связанные с корректной формой скобок Пуассона, в этой работе не были отмечены.

В указанных работах при пересчете как симплектической, так и пуассоновой структур важную роль играют тождества для решений вспомогательной линейной задачи, позволяющие явно вычислять встречающиеся интегралы. Эти тождества представляют собой выражение некоторых специальных однородных форм четвертой степени от решений в виде полных производных. Сам факт существования таких формул для разных моделей является своего рода вычислительным «чудом». Классическая  $r$ -матрица дает этому рациональное объяснение (см. комментарий 3)).

2) Впервые понятие  $r$ -матрицы появилось в квантовом варианте метода обратной задачи в работах [3.40—3.41], [3.44], [3.53]. Большое влияние на эти работы оказали результаты Р. Бакстера по точно решаемым моделям статистической физики [3.48] (см. также монографию [3.49]). Понятие  $r$ -матрицы в той форме, в которой оно используется в этой книге, появилось в работе Е. К. Склянина [3.66], посвященной модели Ландау — Лифшица (см. часть II), в результате естественного квазиклассического предельного перехода из квантовой задачи. После этого фундаментальная роль  $r$ -матрицы в классическом методе обратной задачи стала общепризнанной (см. обзоры [3.22], [3.30], [3.60]).

Рассмотрение быстроубывающего случая модели НШ на основании  $r$ -матричного подхода было осуществлено в работе [3.42].

3) Простой вывод в § 1 глобального соотношения (1.20) из инфинитезимального (1.18) является одним из основных формальных достижений метода  $r$ -матрицы. Первый вариант доказательства формулы (1.20) повторяет соответствующие рассуждения в квантовом случае (см., например, [3.44]). Второй способ вывода формулы (1.20) был приведен в работе [3.58]. Утверждение, что подынтегральное выражение в (1.38) является полной производной, представляет собой абстрактную форму упоминавшихся в комментарии 1) тождеств.

4) Роль уравнений (1.40)—(1.41) для задания пуассоновой структуры отмечалась в работах [3.2—3.3] и [3.30]. Уравнение (1.40), по аналогии с квантовым случаем, называем *«классическим условием унитарности»*, а уравнение (1.41) — *«классическим уравнением Янга — Бакстера»* или *«классическим уравнением треугольников»*. В квантовом случае термин *«уравнение Янга — Бакстера»* был введен в работе [3.44]. Подробнее об истории этих названий можно прочесть в обзоре [3.30]. Фундаментальная роль, которую играют решения уравнений (1.40)—(1.41) в построении интегрируемых моделей, будет объяснена в части II.

5) С теоремой Лиувилля — Арнольда и, вообще, с гамильтоновой механикой для систем с конечным числом степеней свободы можно ознакомиться



по учебникам В. И. Арнольда [3.1], Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко [3.16] и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [3.32]. При этом в первой книге используется симплектическая структура, в то время как в двух других за основу взята пуассонова структура.

б) Рассмотрение квазипериодического случая модели НШ требует особого подхода, основанного на изучении поведения решений вспомогательной линейной задачи на римановой поверхности  $\Gamma$  функции

$$y^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{E_n}\right). \quad (10.1)$$

Здесь  $E_n$  — границы разрешенных и запрещенных зон в спектре соответствующего оператора  $\mathcal{L}$ , определяемые из уравнения

$$p_{\mathcal{L}}(E_n) = \pm 2. \quad (10.2)$$

В случае, когда число зон конечно, уравнение (10.1) определяет гиперэллиптическую кривую; функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , участвующие в соответствующей вспомогательной линейной задаче, называются *конечнозонными*. Они допускают явные выражения через  $\theta$ -функции Римана кривой  $\Gamma$ . Альтернативно конечнозонные функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  могут быть определены как стационарные (т. е. не зависящие от  $t$ ) решения высших уравнений НШ

$$\sum_n c_n \frac{\delta I_n}{\delta \psi(x)} = \sum_l c_l \frac{\delta I_l}{\delta \bar{\psi}(x)} = 0. \quad (10.3)$$

Эти уравнения принято называть *уравнениями Новикова*.

Класс конечнозонных начальных инвариантов по отношению к динамике модели НШ, которая становится линейной на многообразии Якоби (якобиане) кривой  $\Gamma$ . Конечнозонные функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  плотны в множестве всех квазипериодических функций. При  $L \rightarrow \infty$  конечнозонные решения уравнения НШ переходят в многосолитонные.

Теория конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений (с одной пространственной переменной) берет свое начало от работы С. П. Новикова [3.37]. Как теория конечнозонного интегрирования она оформилась в работах Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [3.14], А. Р. Итса и В. Б. Матвеева [3.23], П. Лакса [3.61], Г. Маккина и П. ван Мербеке [3.63] и В. А. Марченко [3.35], посвященных уравнению КдФ. Алгебро-геометрический подход к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений с двумя пространственными переменными, основанный на аксиоматике так называемой функции Бейкера — Ахизера, был развит И. М. Кричевером в работе [3.27]. Этот подход оказался весьма плодотворным также и для случая уравнений с одной пространственной переменной. С современным состоянием в теории конечнозонного интегрирования можно ознакомиться по обзорам [3.15], [3.17], [3.27] и монографиям [3.21], [3.34], [3.36].

Явные формулы для конечнозонных решений уравнения НШ впервые были получены в работах [3.24—3.26].

Построению канонических переменных типа действие — угол для уравнения КдФ в периодическом случае посвящены работы [3.6] и [3.55]. Переменными типа действие являются  $A$ -периоды формы  $p_{\mathcal{L}}(\lambda)d(\lambda)$  на кривой  $\Gamma$ , а сопряженными к ним углами являются координаты на якобиане. С последним обстоятельством связана малая эффективность построения этих переменных в общем бесконечнозонном случае, которому посвящены работы [3.33] и [3.64]. Случай модели НШ разбирается в работе [3.18] (по сравнению с уравнением КдФ здесь возникает нетривиальная проблема вещественности; см. работы [3.18] и [3.38]).

На многообразии конечнозонных функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  имеется еще одна естественная пуассонова структура, порожденная вариационным исчислением. На примере уравнения КдФ она впервые была введена в работе С. П. Новикова [3.37]. Построению канонических переменных типа действие — угол для этих скобок Пуассона и их связи с исходными скобками Пуассона для уравнений КдФ и НШ посвящены работы [3.4—3.6], [3.8—3.9], [3.18] и [3.47]. Анализ пуассоновых структур на многообразии конечнозонных решений привел к появлению в теории конечномерных интегрируемых систем общего понятия — алгебро-геометрических (или аналитических) скобок Пуассона [3.7].

Мы намеренно привели в этом комментарии большое количество ссылок на оригинальные работы и обзоры по интегрируемым моделям с периодическими граничными условиями для того, чтобы лучше ориентировать читателя в этой области, которая практически не была затронута в основном тексте.

7) Вывод представления нулевой кривизны из  $r$ -матричной записи скобок Пуассона для быстроубывающего случая модели НШ был приведен в работе [3.42]. Наше изложение следует работе [3.45].

8) Понятие  $\Lambda$ -оператора для одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + u(x)y = \lambda y \quad (10.4)$$

имеет большую историю. Так, дифференциальный оператор третьего порядка

$$\Lambda = -\frac{1}{4} \frac{d^3}{dx^3} + u(x) \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \frac{du(x)}{dx}, \quad (10.5)$$

обладающий свойством

$$\Lambda(y_1 y_2) = \lambda \frac{d}{dx}(y_1 y_2) \quad (10.6)$$

для любых двух решений уравнения (10.4), встречается еще у Эрмита [3.57].

В формализме метода обратной задачи для уравнения КдФ оператор  $\Lambda$  впервые использовался в работах [3.23], [3.56] и [3.63], в которых отмечалась компактная формула записи высших уравнений КдФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = 2 \frac{\partial}{\partial x} (2d^{-1}\Lambda)^{n-1} u_0, \quad (10.7)$$

где  $u_0(x) = 1$  при всех  $x$ . (Сравни формулы (10.7) и (5.28).)

Для модели НШ в быстроубывающем случае оператор  $\Lambda$  был впервые введен в работе [3.46] как оператор, для которого квадраты решений Йоста уравнения вспомогательной линейной задачи являются собственными. Более точно, выполняется равенство

$$\Lambda F(x, \lambda) = \lambda F(x, \lambda), \quad (10.8)$$

где

$$F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & f_1^2(x, \lambda) \\ f_2^1(x, \lambda) & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.9)$$

а  $f_{1,2}(x, \lambda)$  — компоненты столбцов решений Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$ . Теорема разложения по функциям  $F(x, \lambda)$  была доказана в работах [3.12—3.13] и [3.59].

Для общего линейного дифференциального оператора первого порядка с матричными коэффициентами  $\Lambda$ -оператор был введен в работе [3.65]. Оператор  $\Lambda$  возникал и в работах [3.50—3.51] как средство для компактной записи нелинейных эволюционных уравнений. В этих работах также было дано обобщение  $\Lambda$ -оператора для произведения решений двух вспомогательных линейных задач.

9) В работе [3.62] было показано, что уравнения КдФ и НШ являются гамильтоновыми по отношению к двум гамильтоновым структурам. В быстроубывающем случае в [3.62] с помощью  $\Lambda$ -оператора была построена бесконечная последовательность гамильтоновых векторных полей, инволютивных по отношению к этим двум скобкам Пуассона. В работе [3.29] этот результат анализировался с точки зрения метода обратной задачи. На примерах уравнений КдФ и НШ в быстроубывающем случае в этой работе была построена иерархия симплектических структур, связанных с  $\Lambda$ -оператором, и было показано, что в канонических переменных типа действие — угол применение оператора  $\Lambda$  по существу сводится к умножению на спектральный параметр  $\lambda$ .

В обзорной статье [3.31] оператор  $\Lambda$  и его гамильтонова интерпретация приведены для других интегрируемых нелинейных уравнений.

Также следует отметить работы [3.10—3.11], посвященные изложению абстрактного гамильтонова формализма с двумя согласованными скобками Пуассона. В качестве примера в этих работах рассматриваются нелинейные эволюционные уравнения, допускающие представление Лакса. Показано, что если  $\Lambda$ -оператор является отношением операторов Якоби двух согласованных пуассоновых структур, то эти операторы Якоби имеют нулевую скобку Нейенхейса, известную из дифференциальной геометрии.

10) Приведенная в § 6 и 9 процедура вычисления скобок Пуассона коэффициентов перехода является одним из методологических достижений  $r$ -матричного подхода. В ее основе лежит выражение (1.20) для скобок Пуассона матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$ , которое не зависит от граничных условий. Они учитываются лишь в предельных переходах  $x, y \rightarrow \pm\infty$  и их специфика проявляется в виде осциллирующих матричных множителей типа  $E(y, \lambda)$ , на которые следует сократить матрицу  $T(x, y, \lambda)$ .

Впервые такой способ вычисления был проведен для квантовой модели НШ в обзоре [3.53] и применен к классическому случаю в работе [3.42].

Отметим фундаментальную роль скобки Пуассона (6.22) для коэффициентов перехода  $a(\lambda)$  и  $b(\mu)$ . Именно, запишем эту формулу в виде

$$\{\ln a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} b(\mu) \quad (10.10)$$

и разложим обе части ее по обратным степеням  $\lambda$ . Поскольку функция  $\frac{1}{i} \ln a(\lambda)$  является производящей для локальных интегралов движения  $I_n$ , отсюда получаем

$$\{I_n, b(\mu)\} = -i\mu^{n-1} b(\mu). \quad (10.11)$$

Эти формулы определяют временную динамику функции  $b(\mu)$  по высшим уравнениям НШ: для  $n$ -го уравнения НШ

$$\frac{\partial b}{\partial t}(\mu) = \{I_n, b(\mu)\} \quad (10.12)$$

из (10.11) имеем

$$b(\mu, t) = e^{-i\mu^{n-1}t} b(\mu). \quad (10.13)$$

Это наблюдение легло в основу переноса метода обратной задачи на квантовый случай в работе [3.39].

11) Используемые в § 7 формулы (7.45)—(7.46) были доказаны в § 11.2 лишь для случая, когда функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  принадлежат  $L_1(-\infty, \infty)$ . Однако легко убедиться, что для шварцевских функций  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  предельные значения в указанных формулах принимаются в смысле Шварца.

12) Для быстроубывающего случая модели НШ канонические переменные типа действие — угол были введены в работе [3.43] для  $\varepsilon=1$  и в работе [3.20] для  $\varepsilon=\pm 1$ .

13) Как указывалось в § 7, описание образа алгебры наблюдаемых на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$  при отображении  $\mathcal{F}$  даже в простейшем случае  $\varepsilon=1$  представляет собой трудную задачу. Возможно, что рассмотрение в качестве наблюдаемых только вещественно-аналитических функционалов (с вариационными производными из пространства Шварца) является слишком ограничительным. Одним из альтернативных вариантов условий на допустимые функционалы является подходящее обобщение понятия шварцевских функций на функционалы  $F(\psi, \bar{\psi})$ . Строгое исследование этой проблемы представляет интересную задачу глобального анализа.

14) Фазовое пространство  $\mathcal{M}_0$  очевидным образом является связным. С другой стороны, в случае  $\varepsilon=-1$  часть  $\mathcal{M}_0$ , выделяемая условием (A), — подмножеством  $\tilde{\mathcal{M}}_0$  — распадается на компоненты

$$\tilde{\mathcal{M}}_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \tag{10.14}$$

и поэтому несвязно. Дело в том, что условие (A) запрещает выход нулей  $\lambda_j$  на вещественную ось и появление кратных нулей. Разумным образом пополненные  $\mathcal{M}_n$  должны пересекаться в  $\mathcal{M}_0$  именно по этим (вещественным или кратным) нулям. Задача введения глобальной топологии в  $\mathcal{M}_0$  и, в частности, корректное определение «листов»  $\mathcal{M}_n$  не решена и представляется нам весьма интересной.

В то же время подчеркнем еще раз, что  $\tilde{\mathcal{M}}_0$  открыто и плотно в  $\mathcal{M}_0$  и его вполне хватает для описания динамики модели НШ. В частности, для солитонных решений кратные и вещественные нули можно получить надлежащим предельным переходом в явных формулах.

15) Перенос иерархии пуассоновых структур на алгебру наблюдаемых в координатах  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ;  $\rho_j$ ,  $\varphi_j$ ,  $p_j$ ,  $q_j$ , обсуждавшийся в конце § 7, можно осуществить и непосредственно, используя свойство (10.8) оператора  $\Lambda$ . Для моделей КдФ и НШ соответствующие вычисления (в терминах симплектических, а не пуассоновых структур) были проведены в работе [3.29].

16) Гамильтонова интерпретация рассеяния солитонов в быстроубывающем случае, изложенная в § 8, впервые была дана в работе [3.28] и использовалась там для квазиклассического квантования. В частности, выражение

$e^{iK(\rho_1, \dots, \rho_n; \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)}$  является квазиклассическим приближением матрицы рассеяния  $n$  квантовых солитонов.

17) В высшей степени желательным является построение матричного аналога процедуры сгущения нулей, приведенной в § 8 для скалярной задачи Римана. Более точно, речь идет о получении решений регулярной задачи Римана из § 11.1—11.2 с матрицей  $G(\lambda)$  вида

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.15}$$

как соответствующих пределов при  $n \rightarrow \infty$  решений тривиальной задачи Римана с  $n$  нулями. Сложной является задача описания сгущения проекторов  $P_j$ , участвующих в построении соответствующих матричных множителей Бляшке — Потапова.

Решение этой задачи позволило бы получить асимптотику общего решения  $\psi(x, t)$  уравнения НШ при  $t \rightarrow \pm \infty$  сгущением явных формул для  $n$ -солитонного случая из § 11.5.

18) Наивные скобки Пуассона (9.40) для модели НШ в случае конечной плотности были предъявлены в работах [3.20] и [3.28]. Процедура построения корректных скобок Пуассона актуальна также и для уравнения КдФ (см. работу [3.54]), и для модели Тода (см. часть 11). Вообще, подобная модификация скобок Пуассона возникает каждый раз, когда непрерывный спектр вспомогательной линейной задачи не заполняет всю ось (т. е. имеет лакуны).

19) Корректные скобки Пуассона (9.57) — (9.59) можно интерпретировать как *скобки Пуассона — Дирака*, порожденные наивными скобками Пуассона (9.40) и связями

$$0 = c_1, \quad \varphi(\omega) + \varphi(-\omega) = c_2, \quad (10.16)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные константы.

Напомним определение этих скобок для системы с конечным числом степеней свободы, описываемой каноническими координатами  $p_j, q_j$ :

$$\{p_j, q_l\} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n, \quad (10.17)$$

и связями

$$\Phi_k(p, q) = c_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (10.18)$$

В случае, когда матрица  $M$  скобок Пуассона

$$M_{ij} = \{\Phi_i, \Phi_j\}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (10.19)$$

невырождена, скобки Пуассона — Дирака имеют вид

$$\{f, g\}_* = \{f, g\} + \sum_{i,j=1}^m \{f, \Phi_i\} M^{ij} \{g, \Phi_j\}, \quad (10.20)$$

где  $M^{ij}$  — матричные элементы матрицы, обратной к  $M$  (см. [3.52]).

Скобки Пуассона (9.57) — (9.59) получаются формальным распространением формулы (10.20) на наш бесконечномерный случай.

20) Задача описания алгебры наблюдаемых и топологии фазового пространства  $\mathcal{M}_{p, \theta}$  в координатах  $p(\lambda), \varphi(\lambda), p_j, q_j$  еще сложнее, чем в быстр убывающем случае, и в литературе не рассматривалась.

21) Интерпретация ветвей спектра возбуждений для случая конечной плотности впервые была предложена в работе [3.28]. Используемый нами сдвиг импульса  $P \mapsto P_\theta = P - \rho^2 0$  также был введен в этой работе.

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

---

Метод обратной задачи, сформулированный в части I на примере модели НШ, не заслуживал бы особого внимания, если бы он не имел других приложений. Однако, как хорошо известно, модель НШ отнюдь не исключительна и приложения метода обратной задачи многочисленны и все еще не исчерпаны до конца.

В этой части мы опишем еще несколько характерных примеров, что позволит к концу книги дать общий взгляд на область применимости метода. Естественно, что разбор этих моделей будет значительно менее детальным, так как основные понятия и приемы метода обратной задачи уже были введены и отработаны на примере модели НШ.

### Глава I

#### ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ И ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

В настоящей главе мы приведем список характерных примеров и их общие свойства: представление нулевой кривизны и гамильтонову формулировку. Абстрагируясь от этих примеров, мы сформулируем общую схему построения интегрируемых уравнений и их решений, основанную на матричной задаче Римана. Подробному исследованию наиболее важных моделей и гамильтоновой интерпретации общей схемы будут посвящены следующие главы. Рассматриваемые примеры можно разбить на два класса: динамические системы, порожденные эволюционными уравнениями в частных производных (непрерывные модели), и эволюционные системы разностного типа (модели на решетке).

#### § 1. Формулировка основных непрерывных моделей

Приступим непосредственно к описанию примеров, приводя соответствующие фазовые пространства (набор динамических переменных), уравнения движения и их запись в виде условий нулевой кривизны.

**1. Модель непрерывного изотропного магнетика Гейзенберга (модель МГ).** Фазовое пространство модели образовано вектор-функциями  $\vec{S}(x) = (S_1(x), S_2(x), S_3(x))$ , принимающими значе-

ния на единичной сфере  $S^2$  в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{S}^2(x) = \sum_{a=1}^3 S_a^2(x) = 1 \quad (1.1)$$

и удовлетворяющими определенным граничным условиям (см. ниже). Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^a \partial x^a}, \quad (1.2)$$

где  $\wedge$  означает внешнее (векторное) произведение в  $\mathbb{R}^3$ . Очевидно, что это уравнение сохраняет ограничение (1.1). Модель является  $O(3)$ -инвариантной: если  $\vec{S}(x, t)$  — решение уравнений движения, а  $R$  — произвольная, не зависящая от  $x$  и  $t$  ортогональная матрица в  $\mathbb{R}^3$ , то  $R\vec{S}(x, t)$  — тоже решение.

Типичными граничными условиями являются:

а) Периодические граничные условия:

$$\vec{S}(x + 2L) = \vec{S}(x). \quad (1.3)$$

б) Быстроубывающие граничные условия:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{S}(x) = \vec{S}_0, \quad (1.4)$$

где в силу  $O(3)$ -инвариантности постоянный вектор  $\vec{S}_0$  без ограничения общности можно выбрать в виде

$$\vec{S}_0 = (0, 0, 1). \quad (1.5)$$

При этом считается, что предельные значения принимаются достаточно быстро, например, в смысле Шварца.

Более общими граничными условиями являются условия квазипериодичности:

$$\vec{S}(x + 2L) = R\vec{S}(x), \quad (1.6)$$

где фиксированная матрица  $R$  принадлежит группе  $O(3)$ , и их предел при  $L \rightarrow \infty$  (аналог условий конечной плотности). Однако ниже мы не будем их рассматривать.

Введенная модель встречается в физике твердого тела и описывает классический спин  $\vec{S}$ , распределенный на линии, — одномерный непрерывный магнетик.

Пуассонова структура на фазовом пространстве задается скобками Пуассона

$$\{S_a(x), S_b(y)\} = -\varepsilon_{abc} S_c(x) \delta(x-y), \quad (1.7)$$

где  $S_a$ ,  $a=1, 2, 3$ , — компоненты вектора  $\vec{S}$ , а  $\varepsilon_{abc}$  — полностью антисимметричный тензор ранга 3,  $\varepsilon_{123}=1$ . С точки зрения теории групп Ли, скобки Пуассона (1.7) представляют собой реализацию общей скобки Ли — Пуассона, ассоциированной с группой токов — группой матриц-функций  $g(x)$  со значениями в  $O(3)$ , суженную на симплектическую орбиту, задаваемую условием (1.1). Впрочем, используя ограничение (1.1), невырожденность этой пуассоновой структуры можно проверить и непосредственно, без ссылок на общую теорию.

Уравнение МГ записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \{H, \vec{S}\}, \quad (1.8)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (1.9)$$

а интегрирование ведется по фундаментальной области для граничных условий а) или по всей вещественной оси для случая б).

Другими интересными с физической точки зрения интегралами движения являются импульс — генератор сдвига по  $x$

$$P = \int \frac{S_1 \frac{\partial S_2}{\partial x} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial x}}{1 + S_3} dx \quad (1.10)$$

и полный спин для периодических граничных условий

$$\vec{M} = \int_{-L}^L \vec{S}(x) dx. \quad (1.11)$$

Компоненты  $M_a$  полного спина задают гамильтоново действие алгебры Ли группы  $O(3)$ , и их скобки Пуассона имеют вид

$$\{M_a, M_b\} = -\varepsilon_{abc} M_c \quad (1.12)$$

(сравни с (1.7)).

В быстроубывающем случае в качестве наблюдаемой остается только регуляризованная третья компонента спина

$$M_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (S_3(x) - 1) dx. \quad (1.13)$$

Формально существующие величины  $M_1$  и  $M_2$  являются недопустимыми функционалами, так как порождаемые ими гамильтоновы потоки нарушают граничные условия (1.4) — (1.5).

Выражение для импульса (1.10) имеет интересный геометрический смысл, который мы обсудим в конце параграфа. При этом



станет ясной  $O(3)$ -инвариантность импульса в периодическом случае, хотя это и не очевидно из формулы (1.10).

Уравнение (1.2) представляется как условие нулевой кривизны для связности  $(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda))$  вида

$$U(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} S, \quad V(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} S + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial S}{\partial x} S. \quad (1.14)$$

Здесь

$$S = \vec{S} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{a=1}^3 S_a \sigma_a \quad (1.15)$$

— бесследовая эрмитова матрица, удовлетворяющая соотношению

$$S^2 = I \quad (1.16)$$

(см. (1.1)), а  $\sigma_a$  — матрицы Паули. Действительно, условие нулевой кривизны

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \quad (1.17)$$

с учетом (1.16) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2i} \left[ S, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right], \quad (1.18)$$

которое, в свою очередь, эквивалентно исходному уравнению МГ.

Отметим, что эквивалентность соотношений (1.14), (1.17) и (1.18) использует только условие (1.16) и остается справедливой и для матриц  $S(x, t)$  произвольной размерности.

**2. Модель Sine-Gordon (модель SG).** Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \varphi = 0, \quad (1.19)$$

где  $\varphi(x, t)$  — вещественнозначная функция, а  $\beta$  и  $m$  — положительные параметры. При этом функции  $\varphi(x, t)$  и  $\varphi(x, t) + 2\pi/\beta$  считаются эквивалентными.

Типичные граничные условия для начальных данных

$$\varphi(x) = \varphi(x, t)|_{t=0}, \quad \pi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)|_{t=0} \quad (1.20)$$

имеют вид:

а) Периодические граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2L) &\equiv \varphi(x) \pmod{2\pi/\beta}, \\ \pi(x + 2L) &= \pi(x). \end{aligned} \quad (1.21)$$

б) Быстроубывающие граничные условия:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) &\equiv 0 \pmod{2\pi/\beta}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

При этом граничные значения принимаются достаточно быстро, например, в смысле Шварца.

С физической точки зрения уравнение (1.19) описывает модель релятивистской теории поля в двумерном пространстве-времени. Параметры  $m$  и  $\beta$  играют роль массы и константы взаимодействия соответственно. Поле  $\varphi(x, t)$  — массивное вещественное скалярное поле — имеет важную характеристику — *топологический заряд*

$$Q = \frac{\beta}{2\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx, \quad (1.23)$$

где интегрирование ведется по фундаментальной области в случае а) и по всей оси в случае б). Эта величина сохраняется в силу граничных условий и является целочисленной. С математической точки зрения  $Q$  представляет собой число вращения (степень отображения) функции  $\chi(x) = \exp\{i\beta\varphi(x)\}$ .

Фазовое пространство модели образовано начальными данными — парами функций  $(\pi(x), \varphi(x))$ , где  $\varphi(x)$  принимает значения по  $\text{mod } \frac{2\pi}{\beta}$ , удовлетворяющими граничным условиям а) или б). Пуассонова структура на нем задается скобками Пуассона

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{\pi(x), \pi(y)\} = 0, \quad \{\pi(x), \varphi(y)\} = \delta(x-y) \quad (1.24)$$

и очевидно является невырожденной. Уравнение (1.19) записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \{H, \varphi\}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial t} = \{H, \pi\} \quad (1.25)$$

с гамильтонианом

$$H = \int \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \varphi) \right) dx, \quad (1.26)$$

где интегрирование ведется в соответствии с граничными условиями. Гамильтониан  $H$ , импульс  $P$

$$P = - \int \pi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \quad (1.27)$$

и генератор лоренцевых вращений  $K$

$$K = \int x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \varphi) \right) dx \quad (1.28)$$

задают гамильтоново действие алгебры Ли группы Пуанкаре двумерного пространства-времени. Их скобки Пуассона имеют вид

$$\{H, P\} = 0, \{H, K\} = P, \{K, P\} = -H. \quad (1.29)$$

Уравнение (1.19) представляется в виде условия нулевой кривизны для связности  $(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda))$  следующего вида:

$$U(\lambda) = \frac{\beta}{4i} \pi \sigma_3 + \frac{k_0}{i} \sin \frac{\beta\varphi}{2} \sigma_1 + \frac{k_1}{i} \cos \frac{\beta\varphi}{2} \sigma_2, \quad (1.30)$$

$$V(\lambda) = \frac{\beta}{4i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \sigma_3 + \frac{k_1}{i} \sin \frac{\beta\varphi}{2} \sigma_1 + \frac{k_0}{i} \cos \frac{\beta\varphi}{2} \sigma_2, \quad (1.31)$$

где  $\sigma_a$ , как обычно, — матрицы Паули и

$$k_0 = \frac{m}{4} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad k_1 = \frac{m}{4} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (1.32)$$

Ковариантные производные  $X_\mu$ ,  $\mu=0, 1$ , где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} - V, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - U; \quad x_0 = t, \quad x_1 = x, \quad (1.33)$$

имеют явно лоренц-инвариантный вид. Для этого заметим, что  $\pi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ , и объединим  $k_0, k_1$  в лоренцев вектор длины  $m/2$ :  $k^2 = k_\mu k_\mu = k_0^2 - k_1^2 = m^2/4$ , а также используем дуальный вектор  $k_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} k_\nu$  с компонентами  $k_1, k_0$ .

**3. Модель Ландау — Лифшица непрерывного анизотропного магнетика (модель Л — Л).** На введенном в примере 1 фазовом пространстве изотропного магнетика рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \int \left( \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 - J(\vec{S}) \right) dx, \quad (1.34)$$

где  $J(\vec{S})$  — квадратичная форма постоянной матрицы  $J$ , которую без ограничения общности можно считать диагональной, так что

$$J(\vec{S}) = J_1 S_1^2 + J_2 S_2^2 + J_3 S_3^2, \quad J_1 \leq J_2 \leq J_3. \quad (1.35)$$

(В быстроубывающем случае из подынтегрального выражения в (1.34) следует вычесть величину  $-J(\vec{S}_0)$ .)

Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} + \vec{S} \wedge J \vec{S} \quad (1.36)$$

и описывают анизотропный магнетик. В физике твердого тела уравнение (1.36) называется уравнением Ландау — Лифшица.

Представление нулевой кривизны для модели Л—Л в общем случае  $J_1 < J_2 < J_3$  задается матрицами

$$U(x, t, \lambda) = \frac{1}{i} \sum_{a=1}^3 u_a(\lambda) S_a \sigma_a, \tag{1.37}$$

$$V(x, t, \lambda) = 2i \sum_{a=1}^3 \frac{u_1(\lambda) u_2(\lambda) u_3(\lambda)}{u_a(\lambda)} S_a \sigma_a + \frac{1}{i} \sum_{a,b,c=1}^3 u_a(\lambda) \varepsilon_{abc} S_b \frac{\partial S_c}{\partial x} \sigma_a, \tag{1.38}$$

где

$$u_1(\lambda) = \rho \frac{1}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad u_2(\lambda) = \rho \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad u_3(\lambda) = \rho \frac{\operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)} \tag{1.39}$$

и

$$k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}}, \quad 0 < k < 1, \tag{1.40}$$

а

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{J_3 - J_1}, \quad \rho > 0. \tag{1.41}$$

Здесь  $\operatorname{sn}(\lambda, k)$ ,  $\operatorname{cn}(\lambda, k)$  и  $\operatorname{dn}(\lambda, k)$  — эллиптические функции Якоби модуля  $k$ .

Функции  $u_a(\lambda)$  удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$u_a^2(\lambda) - u_b^2(\lambda) = \frac{1}{4} (J_b - J_a); \quad a, b = 1, 2, 3, \tag{1.42}$$

задающим эллиптическую кривую; спектральный параметр  $\lambda$  играет роль униформизирующей переменной. Отметим, что формулы (1.39) — (1.40) дают одну из возможных параметризаций соотношений (1.42); для вывода уравнения (1.36) из условия нулевой кривизны достаточно использовать лишь формулы (1.41) — (1.42).

В дальнейшем мы убедимся, что модель Л — Л является в определенном смысле универсальной и приведенные выше модели получаются из нее различными предельными переходами.

Все рассмотренные до сих пор модели допускали представление нулевой кривизны с  $2 \times 2$  матрицами  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ ; другими словами, соответствующее расслоение (см. § 1.2 части I) имело в качестве слоя пространство  $\mathbb{C}^2$ . Это пространство принято называть *вспомогательным*, поскольку оно определяет матричный характер вспомогательной линейной задачи.

Двумерность вспомогательного пространства отнюдь не является непременной принадлежностью метода обратной задачи. Многие интересные для физических приложений модели требуют введения вспомогательного пространства большей размерности. Приведем характерный пример.

**4. Векторная модель нелинейного уравнения Шредингера (векторная модель НШ).** Динамическими переменными являются комплекснозначные вектор-функции  $\psi_a(x)$ ,  $\bar{\psi}_a(x)$ ,  $a=1, \dots, n$ , описывающие заряженное поле с  $n$  цветами. Уравнения движения являются непосредственным обобщением обычного уравнения НШ

$$i \frac{\partial \psi_a}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x^2} + 2\kappa \sum_{b=1}^n |\psi_b|^2 \psi_a. \quad (1.43)$$

Пуассонова структура на фазовом пространстве задается скобками Пуассона

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = \{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (1.44)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = i\delta_{ab}\delta(x-y), \quad a, b = 1, \dots, n,$$

а гамильтониан модели имеет вид

$$H = \int \left( \sum_{a=1}^n \left| \frac{\partial \psi_a}{\partial x} \right|^2 + \kappa \left( \sum_{a=1}^n |\psi_a|^2 \right)^2 \right) dx, \quad (1.45)$$

где интегрирование ведется в соответствии с граничными условиями, обобщающими таковые для обычной модели НШ.

Система уравнений (1.43) обладает естественной  $U(n)$ -инвариантностью, так что квазипериодические граничные условия выглядят следующим образом:

$$\psi(x+2L) = \psi(x)U, \quad (1.46)$$

где  $\psi(x)$  — вектор-строка с компонентами  $\psi_a(x)$ ,  $a=1, \dots, n$ , а  $U$  — постоянная унитарная матрица в  $\mathbb{C}^n$ .

Матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ , участвующие в условии нулевой кривизны для векторной модели НШ, имеют вид

$$U(\lambda) = U_0 + \lambda U_1, \quad V(\lambda) = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 \quad (1.47)$$

(сравни с обычной моделью НШ в § 1.2 части I), где в блочной записи

$$U_0 = V\bar{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \psi^* \\ \psi & 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \frac{1}{2i} \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_n, -1) \quad (1.48)$$

и

$$V_0 = i V\bar{\kappa} \begin{pmatrix} V\bar{\kappa} \psi^* \psi & -\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & -V\bar{\kappa} \psi \psi^* \end{pmatrix}, \quad V_1 = -U_0, \quad V_2 = -U_1. \quad (1.49)$$

Здесь  $\psi^*(x)$  — вектор-столбец, эрмитово сопряженный к вектору-строке  $\psi(x)$ , а  $\mathbf{0}$  обозначает нулевой блок размерности  $n \times n$ .

Эти формулы допускают обобщение и на другие случаи, например когда  $\psi(x)$  является матрицей размерности  $n_1 \times n_2$ . Наиболее общая ситуация описывается в терминах однородных пространств компактных групп Ли.

Этот пример мы привели лишь для иллюстрации важности многомерных вспомогательных пространств. Исследование вспомогательной линейной задачи для систем общего вида размерности, большей 2, существенно сложнее, чем в двумерном случае, и в этой книге не будет обсуждаться.

На этом мы заканчиваем перечисление основных непрерывных моделей.

Завершим этот параграф общим замечанием по поводу наблюдаемой типа импульса  $P$ , являющейся генератором сдвига по пространственной переменной  $x$ , т. е.

$$\{P, \varphi(x)\} = -\frac{d\varphi}{dx}(x) \quad (1.50)$$

для произвольной локальной наблюдаемой  $\varphi(x)$ . Покажем, что импульс  $P$  допускает явное выражение через 2-форму  $\Omega$ , задающую симплектическую структуру.

Именно, пусть  $M$  — многообразие размерности  $n$  с симплектической формой  $\omega$ . Рассмотрим фазовое пространство  $\mathcal{M}$ , образованное функциями  $u(x)$  со значениями в многообразии  $M$ , удовлетворяющими периодическим или быстроубывающим граничным условиям. Многообразие  $\mathcal{M}$  имеет естественную пуассонову структуру, которая в локальных координатах  $u_a(x)$ ,  $a = 1, \dots, n$ , задается скобками Пуассона

$$\{u_a(x), u_b(y)\} = \eta_{ab}(u(x)) \delta(x-y), \quad a, b = 1, \dots, n, \quad (1.51)$$

где  $\eta_{ab}$  образуют матрицу Якоби  $\eta$  пуассоновой структуры на  $M$ . Соответствующая симплектическая форма  $\Omega$  имеет вид

$$\Omega(u) = \int \omega(u(x)) dx, \quad (1.52)$$

где

$$\omega(u(x)) = - \sum_{1 \leq a < b \leq n} \eta^{ab}(u(x)) du_a(x) \wedge du_b(x). \quad (1.53)$$

Здесь интегрирование ведется в соответствии с граничными условиями, а  $\eta^{ab}$  — матричные элементы матрицы  $\eta^{-1}$ , обратной к  $\eta$ :

$$\sum_{c=1}^n \eta^{ac} \eta_{cb} = \delta_{ab}. \quad (1.54)$$

Форма  $\omega$  замкнута, поэтому имеем (по крайней мере локально в фиксированной карте на многообразии  $M$ )

$$\omega = d\theta. \quad (1.55)$$

Принято говорить, что 1-форма  $\theta$  является (локальной) первообразной 2-формы  $\omega$ ,  $\theta = d^{-1}\omega$ . Отсюда получаем, что и форма  $\Omega$  (в тех же координатах на  $\mathcal{M}$ ) имеет первообразную  $\Theta$ , где

$$\Theta(u) = \int \theta(u(x)) dx, \quad \theta(u(x)) = \sum_{a=1}^n \theta^a(u(x)) du_a(x) \quad (1.56)$$

и

$$\frac{\partial \theta^a}{\partial u_b} - \frac{\partial \theta^b}{\partial u_a} = \eta^{ab}, \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (1.57)$$

Форма  $\Theta$  инвариантна относительно сдвига по переменной  $x$ . Согласно общим правилам гамильтоновой механики импульс  $P$  — генератор сдвига по  $x$  — получается в результате применения формы  $\Theta$  к касательному вектору  $\frac{du}{dx}$  и в локальных координатах задается формулой

$$P(u) = - \sum_{a=1}^n \int \theta^a(u(x)) \frac{du_a(x)}{dx} dx. \quad (1.58)$$

В справедливости формулы (1.50) для так определенного функционала  $P$  в случае  $\varphi(x) = u_a(x)$  легко убедиться и непосредственно, используя равенства (1.51), (1.54) и (1.57).

Функции  $u_a(x)$ ,  $a = 1, \dots, n$ , определяют, в силу граничных условий, замкнутый контур на многообразии  $M$  — 1-цикл  $\gamma$ , так что формула (1.58) может быть переписана в виде

$$P = - \int_{\gamma} \theta. \quad (1.59)$$

Это соотношение можно записать только через симплектическую форму  $\omega$ , если воспользоваться формулой Стокса. Именно, натянем на контур  $\gamma$  пленку  $B_{\gamma}$ , лежащую в выбранной карте на  $M$ . Тогда имеем

$$P = - \int_{B_{\gamma}} \omega. \quad (1.60)$$

Проверим, что описанная конструкция действительно дает выражения для импульсов в рассмотренных выше примерах. Для моделей НШ и SG это элементарно, поскольку форма  $\omega$  точна,  $\omega = d\theta$ , где

$$\theta_{\text{НШ}} = \frac{1}{2i} (\psi d\bar{\psi} - \bar{\psi} d\psi), \quad \theta_{\text{SG}} = \pi d\varphi, \quad (1.61)$$

после чего остается сравнить общую формулу (1.58) с формулами (1.1.26) части I и (1.27).

Для моделей МГ и Л—Л эта проверка более интересна. Именно, в этом случае форма  $\omega$  совпадает со стандартной формой площади на сфере  $S^2$ , нормированной условием

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi. \quad (1.62)$$

В отличие от предыдущих примеров, форма  $\omega$  не точна и поэтому имеет лишь локальную первообразную  $\theta = d^{-1}\omega$ . Нетрудно убедиться, что общее выражение (1.59) совпадает с формулой (1.10), если в качестве карты на сфере  $S^2$  взять область  $S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$  и использовать переменные  $S_1$  и  $S_2$  в качестве локальных координат. Действительно, в этих координатах имеем

$$\omega = -\frac{dS_1 \wedge dS_2}{S_3}, \quad \theta = \frac{S_2 dS_1 - S_1 dS_2}{1 + S_3}, \quad (1.63)$$

где  $S_3 = \sqrt{1 - S_1^2 - S_2^2}$ .

В локальных координатах другой карты на  $S^2$  мы получим для импульса  $P$  другое явное выражение. Однако численно (в односвязных картах) эти выражения отличаются лишь на целое кратное площади сферы  $S^2$ —величины  $4\pi$ . Действительно, из формулы (1.60) следует, что упомянутая многозначность функционала импульса связана с неоднозначностью выбора пленки  $B_\gamma$ . Однако для различных выборов пленки выражения для  $P$

отличаются лишь на целое кратное периода  $\int_{S^2} \omega$  формы  $\omega$ , равного  $4\pi$ . Поэтому формулу (1.60) для нашего случая можно окончательно записать в виде

$$P \equiv - \int_{B_\gamma} \omega \pmod{4\pi}. \quad (1.64)$$

Из этой формулы очевидна упоминавшаяся выше  $O(3)$ -инвариантность импульса (по  $\text{mod } 4\pi$ ) для периодических граничных условий.

С еще одним важным примером многозначного функционала мы познакомимся в § 5 при обсуждении других моделей.

## § 2. Примеры моделей на решетке

В предыдущем параграфе мы имели дело с моделями, описываемыми эволюционными уравнениями в частных производных, причем пространственная переменная  $x$  являлась одномерной и непрерывно менялась на окружности (конечный интервал с отождествленными концами) или на всей вещественной оси.



Однако в приложениях важную роль играют и модели на решетке, когда пространственная переменная принимает дискретные, скажем целочисленные, значения. Такая ситуация может возникнуть искусственно, при разностном приближении к дифференциальным уравнениям, а также появиться естественно, скажем, при описании колебаний кристаллической решетки в физике твердого тела. Ясно, что если решетка конечна (аналог окружности в непрерывном случае), то эволюционная система имеет конечное число степеней свободы и фактически является объектом классической механики.

Итак, будем считать, что «дискретизованная» пространственная переменная  $n$  принимает целые значения и пробегает множество всех целых чисел  $\mathbb{Z}$  (аналог вещественной оси) или его конечное подмножество; чаще всего мы будем иметь дело с аналогом окружности —  $n=1, \dots, N; N+1 \equiv 1$ , т. е. с периодической решеткой  $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Временная переменная  $t$  по-прежнему считается непрерывной и пробегает вещественную ось.

Условие нулевой кривизны естественным образом обобщается на случай решеточных моделей. Базой расслоения является дискретизованное пространство-время  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1$  или  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}^1$ , а слоем — вспомогательное пространство  $\mathbb{C}^M$ . Роль ковариантной производной  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} U(x, t, \lambda)$  (или, точнее, бесконечно малого параллельного переноса вдоль пространственного направления  $\Omega_n = \exp \int_{\Delta_n} U(x, t, \lambda) dx$ ; см. формулу (I.2.14) части I) играет матрица  $L_n(t, \lambda)$ , осуществляющая перенос из точки решетки с номером  $n$  в точку с номером  $n+1$ . Параллельный перенос по временному направлению по-прежнему задается ковариантной производной  $\frac{\partial}{\partial t} V_n(t, \lambda)$ . Уравнения ковариантного постоянства вектора  $F_n(t, \lambda)$  — формулы (I.2.1)–(I.2.2) части I — принимают вид

$$F_{n+1} = L_n(t, \lambda) F_n, \quad (2.1)$$

$$\frac{dF_n}{dt} = V_n(t, \lambda) F_n. \quad (2.2)$$

Условие совместности этой системы выглядит следующим образом:

$$\frac{dL_n(t, \lambda)}{dt} + L_n(t, \lambda) V_n(t, \lambda) - V_{n+1}(t, \lambda) L_n(t, \lambda) = 0 \quad (2.3)$$

и представляет собой условие нулевой кривизны для обхода вдоль элементарного контура на базе с вершинами в точках  $(n, t)$ ,  $(n+1, t)$ ,  $(n+1, t+dt)$  и  $(n, t+dt)$ . Конечно, из (2.3) следует исчезновение кривизны и вдоль произвольного контура.

Поэтому формулы (2.3) и (2.1) — (2.2) будем называть, соответственно, *условием нулевой кривизны и представлением нулевой кривизны для решеточных моделей*. Уравнение (2.1) будет играть роль вспомогательной линейной задачи.

После этого общего введения перейдем к перечислению основных примеров.

Наиболее популярным примером, имеющим многочисленные приложения, является

**1. Модель Тога.** Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}, \quad (2.4)$$

где  $q_n$  — набор вещественных переменных, имеющих смысл координат классических частиц с одной степенью свободы. Типичные граничные условия выглядят следующим образом.

а) Условия свободных концов:  $1 \leq n \leq N$ ,

$$q_0 = -q_{N+1} = +\infty. \quad (2.5)$$

б) Квазипериодические граничные условия

$$q_{n+N} = q_n + c, \quad (2.6)$$

где  $c$  — произвольная вещественная константа, не зависящая от  $t$ .

в) Быстроубывающие граничные условия

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = c, \quad (2.7)$$

где предельные значения принимаются достаточно быстро.

На самом деле условия в) являются скорее аналогами условий конечной плотности для модели НШ (см. § I.1 части I). Однако мы их называем быстроубывающими, так как разности  $q_n - q_{n-1}$ , входящие в уравнения движения, быстро убывают при  $|n| \rightarrow \infty$ .

Наибольший интерес для нас будут представлять граничные условия б) и в).

Уравнения движения модели Тога являются уравнениями Ньютона

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial q_n} \quad (2.8)$$

для системы  $N$  одномерных частиц с потенциалом

$$V(q) = \sum_n (e^{q_n - q_{n-1}} - 1), \quad (2.9)$$

где суммирование ведется в соответствии с граничными условиями (т. е. возможен и случай  $N = \infty$ ). Тем самым они являются

гамильтоновыми уравнениями с гамильтонианом

$$H = \sum_n \frac{1}{2} p_n^2 + V(q) \quad (2.10)$$

на обычном фазовом пространстве с координатами  $p_n$ ,  $q_n$  и пуассоновой структурой

$$\{p_n, p_m\} = \{q_n, q_m\} = 0, \quad \{p_n, q_m\} = \delta_{nm}. \quad (2.11)$$

Уравнения движения модели Тода допускают представление нулевой кривизны (2.1)–(2.2) с матрицами  $L_n(t, \lambda)$  и  $V_n(t, \lambda)$  следующего вида:

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_n + \lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_n} \\ e^{-q_{n-1}} & \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Подробному обсуждению этого важного примера мы посвятим главу III.

**2. Модель Вольтерра.** Фазовое пространство модели образовано положительными переменными  $u_n$ . Уравнения движения имеют вид

$$\frac{du_n}{dt} = (u_{n+1} - u_{n-1}) u_n \quad (2.13)$$

и впервые появились при описании эволюции популяций в иерархической системе конкурирующих особей. Они имеют и другие приложения. Типичными граничными условиями являются периодические

$$u_{n+N} = u_n \quad (2.14)$$

или быстроубывающие

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} u_n = 1. \quad (2.15)$$

Уравнения движения (2.13) представляются в гамильтоновом виде

$$\frac{du_n}{dt} = \{H, u_n\} \quad (2.16)$$

с гамильтонианом

$$H = \sum_n \ln u_n, \quad (2.17)$$

где суммирование ведется в соответствии с граничными условиями, и пуассоновой структурой, задаваемой скобками Пуассона

$$\begin{aligned} \{u_n, u_m\} = & u_n u_m \left( (\delta_{n,m+1} - \delta_{n,m-1}) \left( \frac{u_n + u_m}{2} - 2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \delta_{n,m+2} u_{n-1} - \frac{1}{2} \delta_{n,m-2} u_{m-1} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отметим, что формула (2.18) имеет гораздо менее привычный вид, чем, скажем, (2.11). Однако она действительно задает скобку Пуассона; проверка тождества Якоби для нее элементарна, хотя и громоздка.

Уравнения движения (2.13) представляются в виде условия нулевой кривизны с матрицами  $L_n(t, \lambda)$  и  $V_n(t, \lambda)$ :

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_n(\lambda) = \begin{pmatrix} u_n & \lambda u_n \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Эта модель в дальнейшем рассматриваться не будет, и мы привели ее лишь как поучительный пример с интересной пуассоновой структурой.

**3. Модель изотропного магнетика Гейзенберга на решетке (модель РМГ).** В этом примере спиновые переменные  $\vec{S}_n = (S_n^1, S_n^2, S_n^3)$ ,  $\vec{S}_n^2 = s^2$ , заданы на одномерной решетке (цепочке). Такая модель более естественна с физической точки зрения, чем непрерывная модель из § 1. Переменные  $\vec{S}_n$  с периодическими

$$\vec{S}_{n+N} = \vec{S}_n \quad (2.20)$$

или быстроубывающими

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \vec{S}_n = s \vec{S}_0 \quad (2.21)$$

граничными условиями образуют фазовое пространство модели с пуассоновой структурой, задаваемой скобками Пуассона

$$\{S_n^a, S_m^b\} = -\epsilon^{abc} \delta_{nm} S_n^c, \quad (2.22)$$

$a, b, c = 1, 2, 3$  (сравни с (1.7)). Интегрируемой модели соответствует гамильтониан

$$H = -2 \sum_n \ln \left( \frac{s^2 + \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}}{2s^2} \right), \quad (2.23)$$

приводящий к уравнениям движения

$$\frac{d\vec{S}_n}{dt} = 2\vec{S}_n \wedge \left( \frac{\vec{S}_{n+1}}{s^2 + \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}} + \frac{\vec{S}_{n-1}}{s^2 + \vec{S}_{n-1} \cdot \vec{S}_n} \right). \quad (2.24)$$

Последние допускают представление нулевой кривизны с матрицами  $L_n(t, \lambda)$  и  $V_n(t, \lambda)$  вида

$$L_n(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2i} S_n, \quad (2.25)$$

$$V_n(\lambda) = \frac{\lambda v_n^{(+)}}{2i + s\lambda} + \frac{\lambda v_n^{(-)}}{2i - s\lambda}, \quad (2.26)$$

где

$$v_n^{(\pm)} = \alpha_n \left( 1 \pm \frac{S_n}{s} \right) \left( 1 \pm \frac{S_{n-1}}{s} \right), \quad (2.27)$$

а

$$\alpha_n = \frac{is^2}{s^2 + \vec{S}_{n-1} \cdot \vec{S}_n}, \quad S_n = \vec{S}_n \cdot \vec{\sigma} = \sum_{a=1}^3 S_n^a \sigma_a. \quad (2.28)$$

Действительно, правая часть условия нулевой кривизны

$$\frac{dL_n(\lambda)}{dt} = V_{n+1}(\lambda) L_n(\lambda) - L_n(\lambda) V_n(\lambda) \quad (2.29)$$

после деления на множитель  $\lambda/(2i)$  представляет собой рациональную функцию с простыми полюсами в точках  $\lambda = \pm 2i/s$ . Вычеты в этих полюсах исчезают в силу специального выбора матриц  $v_n^{(\pm)}$ . Постоянный член (значение при  $\lambda = \infty$ ) после использования явного выражения для коэффициента  $\alpha_n$  и элементарного соотношения

$$S_n S_{n+1} = \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} + i(\vec{S}_n \wedge \vec{S}_{n+1}) \cdot \vec{\sigma} \quad (2.30)$$

превращается в правую часть уравнения (2.24).

Отметим, что вспомогательная линейная задача

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n = F_n + \frac{\lambda}{2i} S_n F_n \quad (2.31)$$

является наивной разностной аппроксимацией вспомогательной линейной задачи для непрерывной модели МГ. Этого, однако, нельзя сказать о гамильтониане и уравнении по  $t$  в представлении нулевой кривизны. Тем не менее такое усложнение оправдано. Действительно, во-первых, наивный гамильтониан

$$\vec{H} = - \sum_n \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} \quad (2.32)$$

приводит к уравнениям движения

$$\frac{d\vec{S}_n}{dt} = \vec{S}_n \wedge (\vec{S}_{n+1} + \vec{S}_{n-1}), \quad (2.33)$$

для которых не существует представления нулевой кривизны. Во-вторых, наша модель на решетке также является разностным аналогом модели МГ и имеет ее как непрерывный предел.

Этот предел, как обычно, осуществляется сжатием решетки. Введем шаг решетки  $\Delta$  и положим  $x = n\Delta$ . Будем считать, что длина вектора  $\vec{S}_n$  совпадает с  $\Delta$ :

$$\vec{S}_n^2 = s^2 = \Delta^2, \quad (2.34)$$

и при  $\Delta \rightarrow 0$  положим

$$\vec{S}_n = \Delta \vec{S}(x), \quad (2.35)$$

где  $\vec{S}(x)$  — гладкая вектор-функция с длиной 1. Тогда

$$\vec{S}_{n+1} = \Delta \vec{S}(x) + \Delta^2 \frac{d\vec{S}}{dx}(x) + \frac{\Delta^3}{2} \frac{d^2\vec{S}}{dx^2}(x) + \dots, \quad (2.36)$$

так что

$$\frac{s^2 + \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}}{2s^2} = 1 + \frac{\Delta^2}{4} \vec{S}(x) \cdot \frac{d^2\vec{S}}{dx^2}(x) + \dots = 1 - \frac{\Delta^2}{4} \left( \frac{d\vec{S}}{dx}(x) \right)^2 + \dots, \quad (2.37)$$

где использовано условие  $\vec{S}^2(x) = 1$ , приводящее к соотношениям

$$\vec{S} \cdot \frac{d\vec{S}}{dx} = 0, \quad \vec{S} \cdot \frac{d^2\vec{S}}{dx^2} = - \left( \frac{d\vec{S}}{dx} \right)^2. \quad (2.38)$$

Из формулы (2.37) видно, что

$$H = \Delta \int \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{S}}{dx} \right)^2 dx + O(\Delta^2), \quad (2.39)$$

и после изменения масштаба времени  $t \rightarrow \Delta \cdot t$  отсюда получаем гамильтониан и уравнения движения модели МГ.

Предельный переход в представлении нулевой кривизны проводится аналогично; непрерывный предел скобок Пуассона получается из (2.22) по правилу

$$\frac{\delta_{nm}}{\Delta} \cong \delta(x - y), \quad x = n\Delta, \quad y = m\Delta. \quad (2.40)$$

Модель анизотропного магнетика — модель Л—Л — также является непрерывным пределом соответствующей модели на решетке, которую мы опишем ниже в гл. III. Там мы убедимся, что эта последняя модель является весьма универсальной.

**4. Модель РНШ.** Мы покажем, что рассмотренная только что модель магнетика на решетке РМГ после небольшой модификации может быть интерпретирована как разностное приближение к модели НШ.

Начнем с фазового пространства. Естественные переменные для модели НШ на решетке  $\psi_n, \bar{\psi}_n$  имеют скобки Пуассона

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \{\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_m\} = 0, \quad \{\psi_n, \bar{\psi}_m\} = i\delta_{nm}. \quad (2.41)$$

Положим

$$\begin{aligned}
 S_n^+ &= S_n^1 + iS_n^2 = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{g}} \psi_n \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}, \\
 S_n^- &= S_n^1 - iS_n^2 = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\bar{g}}} \bar{\psi}_n \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}, \\
 S_n^3 &= \frac{2}{|g|} \left( 1 + \frac{g}{2} |\psi_n|^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

и при  $g < 0$  будем считать, что переменные  $\psi_n, \bar{\psi}_n$  меняются внутри круга  $|\psi_n|^2 \leq -4/g$ . Тогда в этом случае переменные  $\vec{S}_n$  пробегают сферу радиуса  $s$ ,

$$s^2 = 4/g^2, \tag{2.43}$$

в  $\mathbb{R}^3$ . При  $g > 0$  эти переменные меняются на верхней поле двуполостного гиперболоида

$$(S_n^3)^2 - (S_n^1)^2 - (S_n^2)^2 = 4/g^2. \tag{2.44}$$

Скобки Пуассона (2.41) приводят к соотношениям

$$\{S_n^a, S_m^b\} = -f^{abc} \delta_{nm} S_n^c, \tag{2.45}$$

где  $f^{abc}$  — структурные константы алгебр Ли группы  $SU(2)$  ( $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$ ) или  $SU(1, 1)$  для случая  $g < 0$  или  $g > 0$  соответственно. Ниже мы ограничимся рассмотрением компактного случая  $g < 0$ .

Формулы (2.42) имеют элементарное геометрическое происхождение. При отображении  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  на сферу  $S^2$

$$S_+ = S_1 + iS_2 = \frac{2z}{1 + |z|^2}, \quad S_- = S_1 - iS_2 = \frac{2\bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad S_3 = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \tag{2.46}$$

(обратная стереографическая проекция) стандартная симплектическая форма на  $S^2$  — форма площади  $\omega$  (см. § 1) — переходит в форму

$$\omega_* = \frac{2}{i} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}. \tag{2.47}$$

Эта форма приводится к каноническому виду

$$\omega_* = \frac{1}{i} d\psi \wedge d\bar{\psi} \tag{2.48}$$

преобразованием растяжения

$$z = f(|\psi|^2) \psi, \quad \bar{z} = f(|\psi|^2) \bar{\psi}, \tag{2.49}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}. \quad (2.50)$$

Формулы (2.42) получаются в результате композиции этих преобразований (где вместо сферы  $\vec{S}^2$  взята сфера радиуса  $s = -2/g$ ) и операции альтернирования знака

$$\psi_n \mapsto (-1)^n \psi_n, \quad \bar{\psi}_n \mapsto (-1)^n \bar{\psi}_n, \quad (2.51)$$

которая, очевидно, сохраняет скобки Пуассона (2.41). Смысл последнего преобразования станет ясен чуть ниже.

Подставим теперь выражения (2.42) для  $\vec{S}_n$  в уравнения движения модели РМГ; при этом вместо уравнений (2.24) удобнее использовать уравнения движения, порожденные гамильтонианом

$$H_{\text{reg}} = -sH - 4 \sum_n (S_n^3 - s), \quad (2.52)$$

где  $H$  дается формулой (2.23). Правая часть соответствующих гамильтоновых уравнений движения отличается от (2.24) множителем  $-s$  и слагаемым  $4\vec{S}_n \wedge \vec{S}_0$ . В переменных  $\psi_n, \bar{\psi}_n$  эти уравнения эквивалентны уравнению

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = 4\psi_n + \frac{P_{n,n+1}}{Q_{n,n+1}} + \frac{P_{n,n-1}}{Q_{n,n-1}}, \quad (2.53)$$

где

$$P_{n,n+1} = - \left( \psi_n + \psi_{n+1} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_{n+1}|^2} + \frac{g}{2} \psi_n |\psi_{n+1}|^2 + \frac{g}{8} (|\psi_n|^2 \psi_{n+1} + \psi_n^2 \bar{\psi}_{n+1}) \frac{\sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_{n+1}|^2}}{\sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}} \right), \quad (2.54)$$

$$Q_{n,n+1} = 1 + \frac{g}{4} (|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + (\psi_n \bar{\psi}_{n+1} + \bar{\psi}_n \psi_{n+1})) \times \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_{n+1}|^2} + \frac{g}{2} |\psi_n|^2 |\psi_{n+1}|^2. \quad (2.55)$$

Полученное уравнение для  $\psi_n$  имеет весьма громоздкий вид. Однако в непрерывном пределе

$$x = n\Delta, \quad g = \kappa\Delta, \quad \psi_n = \sqrt{\Delta} \psi(x), \quad (2.56)$$

где  $\psi(x)$  — гладкая функция, оно переходит в уравнение НШ.



Действительно, используя элементарные формулы

$$\sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} = 1 + \frac{g}{8} |\psi_n|^2 + O(\Delta^3), \quad Q_{n,n+1} = 1 + g |\psi_n|^2 + O(\Delta^3), \quad (2.57)$$

уравнение (2.53) легко преобразуется к виду

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = -(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) + 2g |\psi_n|^2 \psi_n + O(\Delta^{3+1/2}) \quad (2.58)$$

и после замены  $t \rightarrow \Delta^2 t$  в пределе  $\Delta \rightarrow 0$  переходит в уравнение НШ.

Таким образом, модель РМГ, записанная в новых переменных, может действительно быть интерпретирована как разностная аппроксимация для модели НШ; в этом качестве будем называть ее моделью РНШ<sub>1</sub>.

Подчеркнем, что непрерывные пределы от модели РМГ к моделям МГ и НШ существенно различны. Отметим также, что альтернирование знака в (2.42) играет существенную роль; без него в непрерывном пределе нелинейное слагаемое  $2\chi |\psi|^2 \psi$  не возникает.

Очевидно, что модель РНШ<sub>1</sub> допускает представление нулевой кривизны с матрицами  $L_n(t, \lambda)$  и  $\tilde{V}_n(t, \lambda)$ :

$$\tilde{V}_n(t, \lambda) = -sV_n(t, \lambda) + 2iS_0, \quad S_0 = \vec{S}_0 \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.59)$$

в которых переменные  $\vec{S}_n$  заменены на  $\psi_n, \bar{\psi}_n$  согласно формулам (2.42). Поучительно посмотреть на связь этих матриц с таковыми для модели НШ.

Рассмотрим вспомогательную линейную задачу для модели РМГ

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n, \quad (2.60)$$

подставим в матрицу  $L_n(\lambda)$  выражения (2.42) для  $\vec{S}_n$ , заменим  $\lambda$  на  $2g/\lambda$  и положим

$$G_n(\lambda) = \sigma_3^n \left( \frac{\lambda}{2i} \right)^n F_n \left( \frac{2g}{\lambda} \right). \quad (2.61)$$

Для вектора  $G_n(\lambda)$  из (2.60) получаем уравнение

$$G_{n+1} = \tilde{L}_n(\lambda) G_n, \quad (2.62)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n(\lambda) &= \frac{\lambda}{2i} \sigma_3^{n+1} L_n \left( \frac{2g}{\lambda} \right) \sigma_3^n = \\ &= I + \begin{pmatrix} \frac{g}{2} |\psi_n|^2 & -V \bar{g} \bar{\psi}_n \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} \\ -V \bar{g} \psi_n \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} & \frac{g}{2} |\psi_n|^2 \end{pmatrix} + \frac{\lambda \sigma_3}{2i}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Из последней формулы ясно, что матрица  $\tilde{L}_n(\lambda)$  получается из  $L_n(\lambda)$  посредством замены спектрального параметра и решеточного аналога калибровочного преобразования. Это преобразование, в частности, компенсирует альтернирование знака в (2.51). Вспомогательная линейная задача (2.62) после замены (2.56) и  $\lambda \rightarrow \Delta \cdot \lambda$  очевидно переходит во вспомогательную линейную задачу для модели НШ

$$\frac{dG}{dx} = \left( \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + V \bar{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Psi}(x) \\ \Psi(x) & 0 \end{pmatrix} \right) G \quad (2.64)$$

в непрерывном пределе  $\Delta \rightarrow 0$ .

Аналогичным образом рассматривается непрерывный предел как в уравнении по  $t$  с матрицей  $\tilde{V}_n(t, \lambda)$ , так и для скобок Пуассона; в гамильтониане  $H_{\text{рег}}$  следует ограничиться двумя первыми членами разложения Тейлора функции  $\ln(1+x)$  при  $x=0$ . В результате получим, что

$$H_{\text{рег}} = \Delta^2 \int \left( \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 + \kappa |\psi|^4 \right) dx + O(\Delta^3). \quad (2.65)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и модель РНШ, при  $g > 0$ . Она связана с моделью магнетика для группы  $SU(1, 1)$ , в которой аналогом сферы  $S^2$  является половина (например, верхняя пола) двуполостного гиперboloида — модель плоскости Лобачевского.

Другой пример разностной аппроксимации к модели НШ дает

**5. Модель РНШ<sub>2</sub>.** Уравнения движения модели имеют вид

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = 2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1} + \kappa |\psi_n|^2 (\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) \quad (2.66)$$

и в непрерывном пределе

$$x = n\Delta, \quad \psi_n \cong \Delta \psi(x) \quad (2.67)$$

очевидно переходят в уравнения движения модели НШ после замены  $t \rightarrow \Delta^2 \cdot t$ . Фазовое пространство модели образовано функциями  $\psi_n, \bar{\psi}_n$  с определенными граничными условиями (например, периодическими или быстроубывающими). Пуассонова структура задается скобками Пуассона

$$\begin{aligned} \{\psi_n, \psi_m\} &= \{\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_m\} = 0, \\ \{\psi_n, \bar{\psi}_m\} &= i(1 - \kappa |\psi_n|^2) \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

и гамильтониан модели имеет вид

$$H = \sum_n \left( -\psi_n (\bar{\psi}_{n+1} + \bar{\psi}_{n-1}) - \frac{2}{\kappa} \ln(1 - \kappa |\psi_n|^2) \right), \quad (2.69)$$

где суммирование ведется в соответствии с граничными условиями. При  $\kappa > 0$  предполагается, что  $\psi_n, \bar{\psi}_n$  меняются внутри круга

$$|\psi_n|^2 \leq 1/\kappa.$$

Скобки Пуассона  $\frac{1}{\Delta} \{, \}$  и гамильтониан  $\frac{1}{\Delta^3} H$  при  $\Delta \rightarrow 0$  переходят в соответствующие выражения для модели НШ.

Симплектическая форма на  $\mathbb{C}$ , порожденная скобками Пуассона (2.68), имеет вид

$$\omega = \frac{1}{i} \frac{dz \wedge \bar{d}\bar{z}}{1 - \kappa |z|^2} \quad (2.70)$$

и отличается как от канонической формы (2.48), так и от формы (2.47), порожденной формой площади на  $S^2$ . Однако в теории представлений групп  $SU(2)$  и  $SU(1, 1)$  встречаются формы

$$\omega_l = \frac{dz \wedge \bar{d}\bar{z}}{i (1 - \kappa |z|^2)^{2+2l}}, \quad l = 0, 1/2, 1, \dots, \quad (2.71)$$

заданные на сфере  $S^2$  при  $\kappa < 0$  или на плоскости Лобачевского при  $\kappa > 0$ . Форма  $\omega$  получается из  $\omega_l$ , если положить формально  $l = -1/2$ .

Модель РНШ<sub>2</sub> допускает представление нулевой кривизны с матрицами  $L_n(t, \lambda)$  и  $V_n(t, \lambda)$  вида

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \sqrt{\kappa} \bar{\psi}_n \\ \sqrt{\kappa} \psi_n & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

$$V_n(\lambda) = i \begin{pmatrix} 1 + \kappa \bar{\psi}_n \psi_{n-1} - \lambda^2 & \sqrt{\kappa} \left( \frac{1}{\lambda} \bar{\psi}_{n-1} - \lambda \bar{\psi}_n \right) \\ \sqrt{\kappa} \left( \frac{1}{\lambda} \psi_n - \lambda \psi_{n-1} \right) & -1 - \kappa \psi_n \bar{\psi}_{n-1} + \lambda^{-2} \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Заменяя  $t$  на  $\Delta^2 \cdot t$  и  $\lambda$  на  $e^{-i\lambda\Delta/2}$ , в непрерывном пределе отсюда получаем представление нулевой кривизны модели НШ.

Сравнивая уравнения движения (2.53)—(2.55) и (2.66) моделей РНШ<sub>1</sub> и РНШ<sub>2</sub>, мы должны в отношении внешней простоты отдать преимущество второй модели. Однако неочевидная симметрия модели РНШ<sub>1</sub>, связанная с действием группы  $O(3)$  в ее фазовом пространстве, которое получается переносом естественного действия группы  $O(3)$  в фазовом пространстве модели РМГ, показывает, что эта модель также естественна и интересна. В гл. III мы убедимся, что с гамильтоновой точки зрения она ближе к непрерывной модели НШ.

### § 3. Представление нулевой кривизны как способ построения интегрируемых уравнений

В предыдущих параграфах мы привели обширный список примеров интегрируемых уравнений. После этого естественно возникает вопрос: как по заданному нелинейному эволюционному уравнению узнать, существует ли для него представление нулевой кривизны. К сожалению, ответа на этот вопрос нет и вряд ли он когда-нибудь появится в общем виде. Более реалистичский подход состоит в разработке принципов классификации интегрируемых уравнений. Представление нулевой кривизны, которое является общим свойством всех рассмотренных до сих пор примеров, можно положить в основу общей классификационной схемы. Здесь мы дадим ее описание для случая непрерывных моделей. В гл. IV мы приведем более элегантную гамильтонову интерпретацию этой схемы, основанную на ли-алгебраических соображениях.

Характерным свойством рассмотренных в § 1 примеров непрерывных моделей (исключая модель  $\mathbb{L} - \mathbb{L}$ ) являются рациональная зависимость матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  от спектрального параметра  $\lambda$ . Такие матрицы представляются в виде разложения на простые дроби:

$$U(x, t, \lambda) = \sum_k \sum_{s=1}^{n_k} \frac{U_{k,s}(x, t)}{(\lambda - \lambda_k)^s} + \sum_{s=0}^{n_\infty} U_s(x, t) \lambda^s \quad (3.1)$$

и

$$V(x, t, \lambda) = \sum_l \sum_{s=1}^{m_l} \frac{V_{l,s}(x, t)}{(\lambda - \mu_l)^s} + \sum_{s=0}^{m_\infty} V_s(x, t) \lambda^s, \quad (3.2)$$

где коэффициенты  $U_{k,s}(x, t)$ ,  $U_s(x, t)$  и  $V_{l,s}(x, t)$ ,  $V_s(x, t)$  суть матрицы во вспомогательном пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

Рассмотрим теперь условие нулевой кривизны

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0, \quad (3.3)$$

произведем в нем разложение на простые дроби и приравняем нулю коэффициенты при всех полюсах. В результате для матриц  $U_{k,s}$ ,  $U_s$  и  $V_{l,s}$ ,  $V_s$  мы получим систему нелинейных дифференциальных уравнений (и, вообще говоря, алгебраических уравнений). По построению эта система допускает представление нулевой кривизны

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda) F, \quad (3.5)$$

где уравнение (3.4) играет роль вспомогательной линейной задачи. Этим заканчивается общее описание общих систем нелинейных уравнений, ассоциированных с условием нулевой кривизны.

Подсчитаем количество неизвестных функций в системе (3.3). Пусть число полюсов матриц-функций  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  с учетом их кратностей равно  $N_1$  и  $N_2$  соответственно; тогда мы имеем  $N_1 + N_2 + 2$  матричных параметров  $U_{k,s}$ ,  $U_s$  и  $V_{l,s}$ ,  $V_s$ . Система (3.3) содержит  $N_1 + N_2 + 1$  уравнение, так как на постоянные члены  $U_0$  и  $V_0$  в разложениях (3.1) — (3.2) возникает всего лишь одно уравнение

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial x} + [U_0, V_0] = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, число матричных неизвестных на 1 больше числа уравнений. Эта недоопределенность системы (3.3) связана с калибровочным произволом в выборе матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ :

$$U \rightarrow U^\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1} + \Omega U \Omega^{-1}, \quad (3.7)$$

$$V \rightarrow V^\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1} + \Omega V \Omega^{-1}, \quad (3.8)$$

где матрица  $\Omega(x, t)$  не зависит от  $\lambda$ . Это преобразование не меняет систему (3.3) и структуру полюсов (дивизор) функций  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  по переменной  $\lambda$ . Используя калибровочное преобразование, можно фиксировать один из матричных параметров, например, матрицу  $U_0(x, t)$ ; тогда число неизвестных в системе (3.3) совпадет с числом уравнений.

Конкретный выбор калибровочного преобразования, фиксирующего вид матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ , и последующая параметризация их матричных элементов может привести к различным по записи уравнениям, которые, по существу, являются эквивалентными. Такие уравнения называются *калибровочно эквивалентными*. В следующем параграфе мы приведем интересный пример — покажем, что уравнения НШ в случае  $\kappa = -1$  и МГ являются калибровочно эквивалентными.

Описанные только что уравнения, порождаемые системой (3.3), часто называют интегрируемыми, и мы, следуя этой традиции, ввели этот термин в заглавие параграфа. Однако следует подчеркнуть, что доказательство полной интегрируемости в смысле гамильтоновой механики каждого конкретного уравнения является нетривиальной задачей динамики. Часть I, посвященная модели НШ, является примером такого исследования. Тем не менее представление нулевой кривизны является важным начальным этапом в рассмотрении каждого конкретного уравнения. Поэтому уравнения, допускающие такое представление, будем называть интегрируемыми в кинематическом смысле.

Интегрируемые в кинематическом смысле уравнения, порожденные описанной выше схемой, имеют весьма общий вид. Как правило, для содержательных приложений необходимо уменьшить число неизвестных функций. Так конкретные уравнения из § 1 получаются из общей системы вида (3.3) в результате *редукций* — наложения связей на матричные элементы матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ , совместных с этой системой. Другими словами, вопрос о редукциях сводится к описанию инвариантных подмногообразий системы (3.3).

Уравнения (3.3) содержат коммутаторы, и поэтому очевидной является редукция, задаваемая условием, согласно которому матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  принадлежат произвольному представлению заданной алгебры Ли. Существуют и более нетривиальные редукции, и полное их описание представляет важную задачу классификации интегрируемых уравнений. Гамильтонова интерпретация представления нулевой кривизны в гл. IV приведет нас к весьма содержательным примерам редукций.

Для иллюстрации возможных редуцированных форм матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  опишем еще ряд примеров эволюционных уравнений, допускающих представление нулевой кривизны и имеющих интересные приложения. Заодно мы приведем их гамильтонову формулировку. Исторически первой моделью, на которой был отработан метод обратной задачи, является

### 1. Уравнение Кортевега — де Фриза (модель КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.9)$$

где  $u(x, t)$  — вещественнозначная функция. Матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  из представления нулевой кривизны для этого уравнения имеют вид

$$U(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

и

$$V(\lambda) = \frac{\lambda^3}{2i} \sigma_3 + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{i} \begin{pmatrix} u & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} & 2u \\ 2u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Более традиционно записывать вспомогательную линейную задачу

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F \quad (3.12)$$

для уравнения КдФ как одномерное уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + u(x) y = E y, \quad E = \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.13)$$

Связь уравнений (3.12) и (3.13) осуществляется посредством формулы

$$F = \left( \frac{dy}{dx} + \frac{i\lambda}{2} y \right). \quad (3.14)$$

Здесь уместно сравнить вспомогательные линейные задачи (3.12) и (1.2.22) из части I для моделей КдФ и НШ.

Из этого сравнения ясно, что модель НШ является примером «общего положения» в своем классе (вспомогательное пространство  $\mathbb{C}^2$  и алгебра Ли группы  $SU(2)$  или  $SU(1, 1)$ ), в то время как модель КдФ представляет собой более далекую редукцию. Именно поэтому мы выбрали уравнение НШ в качестве основной модели нашей книги.

Для различного типа граничных условий модель КдФ является гамильтоновой системой. Так, в быстроубывающем случае фазовое пространство состоит из вещественнозначных шварцевских функций  $u(x)$ ; пуассонова структура задается скобками Пуассона

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x - y). \quad (3.15)$$

Уравнение КдФ записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{H, u\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (3.16)$$

где

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^3 \right) dx. \quad (3.17)$$

Отметим, что пуассонова структура (3.15) является вырожденной и имеет одномерный аннулятор, порожденный наблюдаемой

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx. \quad (3.18)$$

Поэтому симплектическая структура определена только на множествах уровня  $Q = \text{const}$ . Соответствующая 2-форма  $\Omega$  имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du(x) \wedge (\partial^{-1} du)(x) dx, \quad (3.19)$$

где  $\partial^{-1}$  обозначает первообразную. Функционал импульса

$$P = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx \quad (3.20)$$

получается из симплектической формы  $\Omega$  с помощью конструкции из § 1.

**2. Модель  $N$ -волн.** Эта модель возникает как условие нулевой кривизны для связности  $(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda))$ , коэффициенты которой имеют по одному общему полюсу, например, в точке  $\lambda = \infty$ :

$$U(x, t, \lambda) = U_0 + \lambda U_1, \quad V(x, t, \lambda) = V_0 + \lambda V_1. \quad (3.21)$$

В ситуации общего положения устраним калибровочный произвол следующим условием: матрицы  $U_1$  и  $V_1$  диагональны и имеют несовпадающие собственные значения, а матрицы  $U_0$  и  $V_0$  имеют нулевые диагональные части. В уравнениях (3.3) диагональные и антидиагональные части расщепляются и поэтому допустима редукция: матрицы  $U_1$  и  $V_1$  не зависят от  $x$  и  $t$ . Таким образом, система (3.3) приобретает вид

$$[U_1, V_0] = [V_1, U_0], \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial_0 U}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial x} + [U_0, V_0] = 0. \quad (3.23)$$

Алгебраическое уравнение (3.22) тривиально решается:

$$U_0 = [U_1, W], \quad V_0 = [V_1, W], \quad (3.24)$$

где  $W$  — матрица с нулевой диагональной частью, а уравнение (3.23) переписывается в виде эволюционной системы с квадратичной нелинейностью

$$\left[ U_1, \frac{\partial W}{\partial t} \right] - \left[ V_1, \frac{\partial W}{\partial x} \right] + [[U_1, W], [V_1, W]] = 0. \quad (3.25)$$

Получившаяся система имеет интересные приложения в случае дополнительной редукции

$$U_1^* = -U_1, \quad V_1^* = -V_1, \quad W^* = -JWJ, \quad (3.26)$$

где  $J$  — диагональная матрица,  $J^2 = I$ . Эта редукция уменьшает вдвое число неизвестных функций в системе (3.25). Первые нетривиальный пример отвечает вспомогательному пространству  $\mathbb{C}^3$  и описывает простейшее нелинейное взаимодействие трех волновых пакетов. В общем случае число элементарных волн  $N$  равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , где  $n$  — размерность вспомогательного пространства  $\mathbb{C}^n$ .

Выпишем более явно уравнения (3.25) в случае энтиэрмитовой редукции  $J = I$ . Положим

$$U_1 = i \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad V_1 = i \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n), \quad (3.27)$$

$$\omega_{jk} = \frac{\psi_{ik}}{\sqrt{a_j - a_k}}, \quad (3.28)$$



где  $j < k$  и предполагается, что  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ . Для функций  $\Psi_{jk}(x, t)$  получаем систему гиперболического типа

$$\frac{\partial \Psi_{jk}}{\partial t} = v_{jk} \frac{\partial \Psi_{jk}}{\partial x} + \frac{1}{i} \sum_{l=k+1}^n v_{jkl} \Psi_{jl} \bar{\Psi}_{kl} + \\ + \frac{1}{i} \sum_{l=j+1}^{k-1} v_{jlk} \Psi_{jl} \Psi_{lk} + \frac{1}{i} \sum_{l=1}^{j-1} v_{ljk} \bar{\Psi}_{lj} \bar{\Psi}_{lk}, \quad (3.29)$$

где  $j < k$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ , и

$$v_{jk} = \frac{b_j - b_k}{a_j - a_k}, \\ v_{jkl} = \frac{a_j b_l - a_l b_j + a_l b_k - a_k b_l + a_k b_j - a_j b_k}{V(a_j - a_k)(a_j - a_l)(a_k - a_l)}. \quad (3.30)$$

Эта система является гамильтоновой. Фазовое пространство для случая быстроубывающих граничных условий параметризуется набором  $n(n-1)$  шварцевских функций  $(\Psi_{jk}(x), \bar{\Psi}_{jk}(x), 1 \leq j < k \leq n)$ . Пуассонова структура задается скобками Пуассона

$$\{\Psi_{jk}(x), \Psi_{lm}(y)\} = \{\bar{\Psi}_{jk}(x), \bar{\Psi}_{lm}(y)\} = 0, \quad (3.31)$$

$$\{\Psi_{jk}(x), \bar{\Psi}_{lm}(y)\} = i \delta_{jl} \delta_{km} \delta(x - y); \quad 1 \leq j < k \leq n, \quad 1 \leq l < m \leq n,$$

и система уравнений (3.29) записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial \Psi_{jk}}{\partial t} = \{H, \Psi_{jk}\}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}_{jk}}{\partial t} = \{H, \bar{\Psi}_{jk}\} \quad (3.32)$$

с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} v_{jk} \left( \frac{\partial \Psi_{jk}}{\partial x} \bar{\Psi}_{jk} - \Psi_{jk} \frac{\partial \bar{\Psi}_{jk}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} v_{jkl} (\Psi_{jk} \Psi_{kl} \bar{\Psi}_{jl} + \bar{\Psi}_{jk} \bar{\Psi}_{kl} \Psi_{jl}) \right\} dx. \quad (3.33)$$

**3. Уравнения кирального поля.** Термин киральное поле используется в современной литературе для функции на пространстве-времени со значениями в нелинейном многообразии  $M$ . Фактически такие поля появляются в случае, когда  $M$  является однородным пространством группы Ли  $G$ , которую мы будем считать компактной. Если  $M = G$ , то принято употреблять термин *главное киральное поле*.

Уравнения движения для главного кирального поля  $g(x, t)$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (3.34)$$

Их удобно переписать, используя в качестве независимых функций матрицы

$$l_0(x, t) = \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1}, \quad l_1(x, t) = \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1}. \quad (3.35)$$

Эти матрицы принадлежат алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$  и называются *левыми токами* поля  $g(x, t)$ . В терминах токов уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial l_1}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial x} + [l_1, l_0] = 0, \quad \frac{\partial l_0}{\partial t} - \frac{\partial l_1}{\partial x} = 0. \quad (3.36)$$

Первое из этих уравнений представляет собой условие нулевой кривизны и следует из определения (3.35), а второе — из уравнения (3.34).

Представление нулевой кривизны задается матрицами  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  с двумя простыми полюсами, которые, без ограничения общности, выберем лежащими в точках  $\lambda = \pm 1$ . Калибровочный произвол фиксируется требованием исчезновения постоянных членов этих матриц. Тогда матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  имеют вид

$$U(\lambda) = \frac{U_+}{1-\lambda} - \frac{U_-}{1+\lambda}, \quad (3.37)$$

$$V(\lambda) = \frac{V_+}{1-\lambda} - \frac{V_-}{1+\lambda}, \quad (3.38)$$

и релятивистски-инвариантная редукция приводит к условиям

$$U_+ = V_+, \quad U_- = -V_-. \quad (3.39)$$

После этой редукции условие нулевой кривизны сводится к системе (3.36), если положить

$$U_+ = \frac{l_0 + l_1}{2}, \quad U_- = \frac{l_0 - l_1}{2}. \quad (3.40)$$

Уравнения (3.36) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для функционала действия

$$S(g) = \iint \text{tr} (l_1^2 - l_0^2) dx dt, \quad (3.41)$$

где интегрирование по  $x$  ведется в соответствии с граничными условиями, а по  $t$  — в интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Действие  $S(g)$  имеет простое геометрическое происхождение. При отображении  $g(x, t)$  форма Маурера — Каргана  $\theta = dg \cdot g^{-1}$  имеет прообразом матричнозначную 1-форму  $\Theta = l_0 dt + l_1 dx$ . Локальное скалярное произведение таких форм задается формой Киллинга  $\text{tr}$ , а интеграл представляет собой скалярное произведение 1-форм по отношению к метрике Минковского на  $\mathbb{R}^2$ .

Уравнения движения киральных полей со значениями в однородных пространствах  $M$  группы  $G$  выглядят более сложно. Однако, как правило, они могут быть получены редукцией уравнений движения главных киральных полей.

Например, связь

$$g = I - 2P, \quad (3.42)$$

где  $P$  — проектор,  $P^2 = P$ , или, что эквивалентно,

$$g^2 = I, \quad (3.43)$$

совместна с уравнением (3.34). Параметризации проекторов  $P$  дают различные примеры однородных пространств. Простейший пример соответствует матричной группе  $G = SO(N)$  и одномерному проектору  $P$  на единичный вектор  $\vec{n}(x, t)$  в  $\mathbb{R}^N$ . Для этого вектора получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{n} + \left( \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right)^2 \right) \vec{n} = 0. \quad (3.44)$$

Оно называется уравнением  $\vec{n}$ -поля (или нелинейной  $\sigma$ -модели) для единичной сферы  $S^{N-1}$  в  $\mathbb{R}^N$ , являющейся простейшим однородным пространством группы  $G$ ,  $S^{N-1} = SO(N)/SO(N-1)$ . (Более точно, при указанной редукции мы получаем модель  $\vec{n}$ -поля на проективном пространстве  $\mathbb{R}P^{N-1} = S^{N-1}/\mathbb{Z}_2$ .)

Гамильтонова формулировка уравнений киральных полей и ее геометрическая интерпретация будут даны в § 5.

**4. Двумеризованная модель Тода.** Уравнения движения имеют вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_a = e^{\varphi_{a+1} - \varphi_a} - e^{\varphi_a - \varphi_{a-1}}, \quad (3.45)$$

$$a = 1, \dots, n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_1,$$

где  $\varphi_a(x, t)$  — вещественнозначные функции. В случае, когда поля  $\varphi_a$  не зависят от переменной  $x$ , система (3.45) переходит в уравнения движения периодической модели Тода (см. § 2); этим объясняется название рассматриваемой модели.

В быстроубывающем случае фазовое пространство модели образовано вещественнозначными шварцевскими функциями  $\{\varphi_a(x), \pi_a(x); a = 1, \dots, n\}$  с обычной пуассоновой структурой, задаваемой скобками Пуассона

$$\{\varphi_a(x), \varphi_b(y)\} = \{\pi_a(x), \pi_b(y)\} = 0, \quad (3.46)$$

$$\{\pi_a(x), \varphi_b(y)\} = \delta_{ab} \delta(x - y), \quad a, b = 1, \dots, n.$$

Уравнения (3.45) записываются в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{a=1}^n \left( \frac{1}{2} \pi_a^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right)^2 + e^{\varphi_a - \varphi_{a-1}} - 1 \right) dx. \quad (3.47)$$

Модель допускает представление нулевой кривизны с матрицами  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  вида

$$U(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \left( \pi_a h_a + e^{\frac{1}{2}(\varphi_{a+1} - \varphi_a)} \left( \lambda e_a + \frac{1}{\lambda} e_{-a} \right) \right), \quad (3.48)$$

$$V(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} h_a + e^{\frac{1}{2}(\varphi_{a+1} - \varphi_a)} \left( \lambda e_a - \frac{1}{\lambda} e_{-a} \right) \right), \quad (3.49)$$

где  $e_{\pm a}$  — корневые векторы, отвечающие допустимым корням алгебры Ли  $A_{n-1}$  (простые корни и минимальный), а  $h_a$  — базисные диагональные матрицы в векторном представлении:

$$\begin{aligned} (e_a)_{ij} &= \delta_{ai} \delta_{a+1, j}, & (e_{-a})_{ij} &= \delta_{a+1, i} \delta_{aj}, \\ (h_a)_{ij} &= \delta_{ai} \delta_{aj}; & \delta_{a+n, j} &= \delta_{a, j}, & \delta_{i, a+n} &= \delta_{i, a}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  вида (3.48) — (3.49) получают из общих матриц с простыми полюсами при  $\lambda=0$  и  $\lambda=\infty$  в результате редукции

$$U(\xi\lambda) = Z^{-1} U(\lambda) Z, \quad V(\xi\lambda) = Z^{-1} V(\lambda) Z, \quad (3.51)$$

где  $\xi = e^{2\pi i/n}$  — корень  $n$ -й степени из 1, а  $Z$  — диагональная матрица:

$$Z_{ij} = \xi^i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.52)$$

— так называемая  $Z_n$ -редукция, и фиксации релятивистской калибровки.

Двумеризованная модель Тода, в свою очередь, допускает интересные гамильтоновы редукции. Так, в случае  $n=2$  редукция  $\pi_1 = -\pi_2 = \pi$ ,  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$  приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \operatorname{sh} 2\varphi = 0, \quad (3.53)$$

которое получается из уравнения Sine-Gordon (см. § 1), если в последнем положить  $m=2$ ,  $\beta=2i$ . Для случая  $n=3$ , полагая  $\varphi_1 = -\varphi_3 = \varphi$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\pi_1 = -\pi_3 = \pi$ ,  $\pi_2 = 0$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = e^{-\varphi} - e^{\varphi} \quad (3.54)$$

для одного вещественного поля  $\varphi(x, t)$ .

Перечисление примеров интегрируемых уравнений на этом заканчивается.

#### § 4. Калибровочная эквивалентность моделей НШ при $\kappa = -1$ и МГ

Здесь мы проиллюстрируем понятие калибровочной эквивалентности на примере моделей НШ при  $\kappa = -1$  и МГ. Матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  из представлений нулевой кривизны для этих моделей имеют вид

$$U_{\text{НШ}}(\lambda) = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0, \quad U_0 = i(\bar{\psi} \sigma_+ + \psi \sigma_-), \quad (4.1)$$

где 
$$U_{\text{МГ}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} S, \quad (4.2)$$

$$S = \sum_{a=1}^3 S_a \sigma_a, \quad S^* = S, \quad S^2 = I \quad (4.3)$$

и 
$$V_{\text{НШ}}(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \sigma_3 - \lambda U_0 + V_0, \quad (4.4)$$

$$V_0 = i|\psi|^2 \sigma_3 + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \sigma_+ - \frac{\partial \psi}{\partial x} \sigma_-, \quad (4.5)$$

$$V_{\text{МГ}} = \frac{i\lambda^2}{2} S + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial S}{\partial x} S \quad (4.6)$$

(см. § 1.2 части I и § 1). Мы ввели в обозначения этих матриц символы НШ и МГ, чтобы различать модели.

Из этих формул видно, что дивизоры полюсов матриц  $U_{\text{НШ}}(\lambda)$ ,  $V_{\text{НШ}}(\lambda)$  и  $U_{\text{МГ}}(\lambda)$ ,  $V_{\text{МГ}}(\lambda)$  совпадают; однако, в отличие от модели НШ, у матриц модели МГ отсутствуют постоянные члены. Мы подберем матрицу  $\Omega(x, t)$  калибровочного преобразования от модели НШ к модели МГ так, чтобы эти постоянные члены исчезли.

Пусть  $\psi(x, t)$  — решение уравнения НШ. Тогда антиэрмитовы матрицы  $U_0(x, t)$  и  $V_0(x, t)$  из (4.1) и (4.5) удовлетворяют условию нулевой кривизны. Выберем унитарную матрицу  $\Omega(x, t)$ , удовлетворяющую совместной системе уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = U_0(x, t) \Omega, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = V_0(x, t) \Omega. \quad (4.8)$$

Рассмотрим калибровочное преобразование, задаваемое матрицей  $\Omega^{-1}(x, t)$ :

$$U_{\text{НШ}}^{\Omega^{-1}}(\lambda) = -\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \Omega^{-1} U_{\text{НШ}}(\lambda) \Omega, \quad (4.9)$$

$$V_{\text{НШ}}^{\Omega^{-1}}(\lambda) = -\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega^{-1} V_{\text{НШ}}(\lambda) \Omega. \quad (4.10)$$

Из формул (4.1) и (4.7) получаем

$$U_{\text{НШ}}^{\Omega^{-1}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} S = U_{\text{МГ}}(\lambda), \quad (4.11)$$

где матрица  $S(x, t)$  дается выражением

$$S(x, t) = \Omega^{-1}(x, t) \sigma_3 \Omega(x, t) \quad (4.12)$$

и, очевидно, удовлетворяет условиям (4.3).

Аналогичным образом получаем, что

$$V_{\text{НШ}}^{\Omega^{-1}}(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} S - \lambda \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \quad (4.13)$$

Преобразуем это выражение. Из (4.12) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left[ S, \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right], \quad (4.14)$$

а из дифференциального уравнения (4.7) следует, что

$$\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega^{-1} U_0 \Omega. \quad (4.15)$$

В силу антикоммутируемости матриц  $\sigma_3$  и  $U_0(x, t)$  отсюда получаем, что матрицы  $S$  и  $\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x}$  также антикоммутируют. Поэтому окончательно имеем

$$\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{2} S \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x} S \quad (4.16)$$

и

$$V_{\text{НШ}}^{\Omega^{-1}}(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} S + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial S}{\partial x} S = V_{\text{МГ}}(\lambda). \quad (4.17)$$

Таким образом, построенная по решению уравнения НШ  $\psi(x, t)$  матрица  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению МГ.

Приведенные формулы позволяют выразить плотности локальных интегралов движения модели НШ в терминах  $S(x, t)$ , получив тем самым плотности интегралов движения модели МГ. Так, например, переписывая (4.14) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\Omega^{-1} \sigma_3 U_0 \Omega, \quad (4.18)$$

получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{tr} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = -\text{tr} U_0^2 = 2|\psi|^2, \quad (4.19)$$

так что плотность гамильтониана модели МГ совпадает с удвоенной плотностью заряда (числа частиц) модели НШ.

Аналогичным образом легко получить выражение для плотности импульса модели НШ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) &= \frac{i}{2} \text{tr} \sigma_3 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = \\ &= \frac{i}{8} \text{tr} \frac{\partial S}{\partial x} S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \cdot \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Сравнивая формулы (4.19) и (4.20), получаем, что

$$-\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arg} \psi = \frac{1}{\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2} \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \cdot \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} \right). \quad (4.21)$$

Ниже мы приведем простое дифференциально-геометрическое соображение, из которого следует, что правая часть в (4.21) (с точностью до полной производной) представляет собой плотность импульса модели МГ.

Приведенные выше преобразования от модели НШ к модели МГ по существу носили обратимый характер. Однако явное построение калибровочного преобразования от модели МГ к модели НШ, т. е. определение матрицы  $\Omega(x, t)$  по заданной матрице  $S(x, t)$ , требует пояснений.

Именно, рассмотрим матрицу  $S(x)$ , удовлетворяющую условиям (4.3), и приведем ее к диагональному виду

$$S(x) = \Omega^{-1}(x) \sigma_3 \Omega(x) \quad (4.22)$$

унитарным преобразованием  $\Omega(x)$ . Это уравнение определяет матрицу  $\Omega(x)$  с точностью до умножения слева на диагональную унитарную матрицу. Выбором последней можно обеспечить условие антикоммутирования

$$\sigma_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1} \sigma_3 = 0, \quad (4.23)$$

из которого следует, что антиэрмитова матрица  $\frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1}$  имеет нулевую диагональную часть. Поэтому положим

$$U_0(x) = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}(x) \\ \psi(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

вводя функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  по заданной матрице  $S(x)$ . Отсюда получаем

$$U_{\text{МГ}}^{\Omega}(\lambda) = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1} + \Omega U_{\text{МГ}}(\lambda) \Omega^{-1} = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0(x) = U_{\text{НШ}}(\lambda). \quad (4.25)$$

До сих пор мы не предполагали, что матрица  $S$  является решением уравнений движения, и определили отображение  $F: \vec{S}(x) \mapsto (\psi(x), \bar{\psi}(x))$  при фиксированном  $t$ .

Предположим теперь, что  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению МГ. Тогда связность  $(U_{\text{МГ}}^{\Omega}(x, t, \lambda), V_{\text{МГ}}^{\Omega}(x, t, \lambda))$  имеет нулевую

кривизну

$$\frac{\partial U_{\text{МГ}}^{\Omega}}{\partial t} - \frac{\partial V_{\text{МГ}}^{\Omega}}{\partial x} + [U_{\text{МГ}}^{\Omega}, V_{\text{МГ}}^{\Omega}] = 0, \quad (4.26)$$

где благодаря уже известным свойствам матрицы  $\Omega(x, t)$  матрицу

$$V_{\text{МГ}}^{\Omega}(\lambda) = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1} + \Omega V_{\text{МГ}}(\lambda) \Omega^{-1} \quad (4.27)$$

можно привести к виду

$$V_{\text{МГ}}^{\Omega}(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \sigma_3 - \lambda U_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1}. \quad (4.28)$$

Выразим матрицу  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1}$  через функции  $\psi(x, t)$ ,  $\bar{\psi}(x, t)$ , используя условие нулевой кривизны (4.26). Последнее представляет собой полином по  $\lambda$  третьей степени. Коэффициенты при  $\lambda^3$  и  $\lambda^2$  исчезают тождественно; исчезновение коэффициента при  $\lambda$  приводит к соотношению

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1} = \frac{1}{i} \sigma_3 \frac{\partial U_0}{\partial x} + ic(x, t) \sigma_3, \quad (4.29)$$

где  $c(x, t)$  — вещественнозначная функция. Диагональная часть постоянного члена в (4.26) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} (c - |\psi|^2) = 0. \quad (4.30)$$

В результате матрица  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1}$  представляется в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Omega^{-1} = V_0(x, t) + i\alpha(t) \sigma_3, \quad (4.31)$$

где  $V_0(x, t)$  дается формулой (4.5), а  $\alpha(t)$  — вещественнозначная функция.

Заметим теперь, что условие (4.23) все еще допускает произвол в выборе матрицы  $\Omega(x, t)$  вида  $\Omega \rightarrow \exp\{i\beta(t)\sigma_3\}\Omega$ , где  $\beta(t)$  — вещественнозначная функция. Выбирая ее из условия

$$\frac{d\beta}{dt}(t) = \alpha(t), \quad (4.32)$$

мы можем исправить матрицу  $\Omega$  так, что для новой матрицы  $\Omega$  второе слагаемое в правой части (4.31) исчезает. В результате получаем соотношение

$$V_{\text{МГ}}^{\Omega}(\lambda) = V_{\text{НШ}}(\lambda), \quad (4.33)$$

так что функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению НШ.



Описание калибровочной эквивалентности моделей НШ и МГ на этом заканчивается. В гл. II мы рассмотрим это калибровочное преобразование с гамильтоновой точки зрения.

В заключение этого параграфа обсудим построенное выше отображение  $F: \vec{S}(x) \rightarrow (\psi(x), \bar{\psi}(x))$  с геометрической точки зрения. Для определенности ограничимся случаем периодических граничных условий

$$\vec{S}(x + 2L) = \vec{S}(x), \quad (4.34)$$

так что вектор-функция  $\vec{S}(x)$  определяет замкнутый контур на сфере  $S^2$  — 1-цикл  $\gamma$ . При отображении  $F$  цикл  $\gamma$  переходит в, вообще говоря, незамкнутый контур на комплексной плоскости  $\mathbb{C}^1$ . Более точно, мы покажем, что выполняется соотношение

$$U_0(L) = e^{\frac{ip}{2}\sigma_3} U_0(-L) e^{-\frac{ip}{2}\sigma_3}, \quad (4.35)$$

где  $p$  — значение импульса модели МГ на поле  $\vec{S}(x)$  (см. § 1), или

$$\psi(L) = e^{-ip}\psi(-L). \quad (4.36)$$

Это позволяет написать

$$p = - \int_{-L}^L \frac{d}{dx} \arg \psi(x) dx, \quad (4.37)$$

что по формуле (4.21) дает новое выражение для плотности импульса модели МГ.

Мы дадим геометрическое доказательство формулы (4.35). Рассмотрим реализацию расслоения Хопфа  $S^3 \cong SU(2) \rightarrow S^2$ , задаваемую отображением

$$\Omega \rightarrow \vec{S}, \quad S = \vec{S} \cdot \vec{\sigma} = \Omega^{-1} \sigma_3 \Omega, \quad (4.38)$$

где  $\Omega$  — матрица из  $SU(2)$ , а  $\vec{S}$  — вектор на  $S^2$ . Правинвариантная 1-форма на  $SU(2)$

$$A = \frac{1}{4\pi} \text{tr}(d\Omega \cdot \Omega^{-1} \sigma_3) \quad (4.39)$$

задает в этом расслоении  $U(1)$ -связность, кривизна которой  $dA$  представляет собой горизонтальную 2-форму, проекция которой на базу расслоения — сферу  $S^2$  — совпадает с формой площади  $\frac{1}{4\pi} \omega$ . Условие (4.23) выбора матрицы  $\Omega(x)$ , определяющее отображение  $F$ , интерпретируется как условие горизонтального подъема контура  $\gamma$  в пространство расслоения. При этом конечная и начальная точки поднятого контура связаны преобразова-

нием голономии

$$\Omega(L) = e^{2\pi i \alpha \sigma_3} \Omega(-L). \quad (4.40)$$

По теореме о голономии для  $U(1)$ -связностей для величины  $\alpha$  имеем выражение

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{B_\gamma} \omega, \quad (4.41)$$

где  $B_\gamma$  — пленка на  $S^2$ , натянутая на 1-цикл  $\gamma$ . Таким образом (см. § 1),  $4\pi\alpha$  совпадает с импульсом поля  $\vec{S}(x)$ . Выбирая теперь  $x$  в качестве начальной точки на контуре  $\gamma$ , перепишем (4.40) в виде

$$\Omega(x + 2L) = e^{\frac{i\rho}{2} \sigma_3} \Omega(x). \quad (4.42)$$

Формула (4.35) немедленно следует из этого соотношения.

### § 5. Гамильтонова формулировка уравнений главных киральных полей и связанных с ними моделей

В § 3 мы ввели уравнения киральных полей и привели для них представление нулевой кривизны. Здесь мы рассмотрим соответствующие модели с гамильтоновой точки зрения. Начнем с модели главного кирального поля.

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (5.1)$$

где  $g(x, t)$  — функция со значениями в компактной группе Ли  $G$ . В качестве динамических переменных удобно использовать левые токи поля  $g$

$$l_0 = \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1}, \quad l_1 = \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1}, \quad (5.2)$$

в терминах которых уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial l_1}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial x} + [l_1, l_0] = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial l_0}{\partial t} - \frac{\partial l_1}{\partial x} = 0. \quad (5.4)$$

Введем в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$  базис  $t^a$ ,  $a=1, \dots, n$ ;  $n = \dim \mathfrak{g}$ , нормированный относительно формы Киллинга — матричного следа в присоединенном представлении

$$\text{tr } t^a t^b = -\frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (5.5)$$

В этом случае структурные константы  $f^{abc}$ , участвующие в основных коммутационных соотношениях

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c, \quad (5.6)$$

образуют полностью антисимметрический тензор. Здесь и ниже мы используем обычное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Введем компоненты  $l_\mu^a$  матриц  $l_\mu$

$$l_\mu = f_\mu^a t^a, \quad \mu = 0, 1. \quad (5.7)$$

В этих обозначениях функционал действия  $S(g)$  имеет вид

$$S(g) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^n ((l_0^a)^2 - (l_1^a)^2) dx dt. \quad (5.8)$$

Рассмотрим функции  $q^a(x) = l_1^a(x)$  как набор обобщенных координат кирального поля и используем уравнение (5.3) для определения их производных по времени

$$\dot{q}^a = \frac{\partial q^a}{\partial t} = (\nabla_1 l_0)^a = \frac{\partial l_0^a}{\partial x} - f^{abc} q^b l_0^c, \quad (5.9)$$

где мы ввели ковариантную производную  $\nabla_1$  относительно связности  $l_1 = q^a t^a$ . Для канонически сопряженного импульса  $\pi^a(x)$  получаем выражение

$$\pi^a(x) = \frac{\delta S}{\delta \dot{q}^a(x)} = -(\nabla_1^{-1} l_0)^a(x), \quad (5.10)$$

где выбрано антисимметричное определение оператора  $\nabla_1^{-1}$ , обратного к оператору  $\nabla_1$ . Переменные  $\pi^a(x)$ ,  $q^a(x)$  имеют канонические скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \{q^a(x), q^b(y)\} &= \{\pi^a(x), \pi^b(y)\} = 0, \\ \{\pi^a(x), q^b(y)\} &= \delta^{ab} \delta(x-y), \quad a, b = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.11)$$

а гамильтониан  $H$  получается из лагранжиана  $\mathcal{L}$  для действия  $S$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (5.12)$$

при помощи обычного преобразования Лежандра

$$H = \int \pi^a \dot{q}^a dx - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \sum_{a=1}^n ((l_0^a)^2 + (l_1^a)^2) dx. \quad (5.13)$$

Скобки Пуассона (5.11) легко переписываются в терминах токов. Действительно, используя соотношение

$$l_0 = -\nabla_1 \pi \quad (5.14)$$

и тождество Якоби для структурных констант  $f^{abc}$ , из (5.11) получаем, что

$$\{l_0^a(x), l_0^b(y)\} = -f^{abc} l_0^c(x) \delta(x-y), \quad (5.15)$$

$$\{l_0^a(x), l_1^b(y)\} = -f^{abc} l_1^c(x) \delta(x-y) - \delta^{ab} \delta'(x-y), \quad (5.16)$$

$$\{l_1^a(x), l_1^b(y)\} = 0, \quad (5.17)$$

где  $\delta'(x-y)$  означает производную функции  $\delta(x-y)$  по аргументу.

Скобки Пуассона (5.15)–(5.17) являются скобками Ли — Пуассона для бесконечномерной алгебры Ли, которая представляет собой полупрямую сумму абелевой алгебры  $\mathcal{A}(g)$  с образующими  $l_1^a(x)$  и алгебры токов  $C(g)$  алгебры Ли  $g$  с образующими  $l_0^a(x)$ . Действие алгебры токов  $C(g)$  на  $\mathcal{A}(g)$  получается расширением естественного действия (локальных вращений) при помощи 2-коцикла Маурера — Картана  $\delta^{ab} \delta'(x-y)$ .

Скобки Пуассона (5.16)–(5.17) можно получить из скобок Пуассона для  $g(x)$  и  $l_0^a(x)$

$$\{g(x), l_0^a(y)\} = -l^a g(x) \delta(x-y), \quad (5.18)$$

$$\{g(x), g(y)\} = 0 \quad (5.19)$$

дифференцированием по  $x$  и переходом к  $l_1(x)$  по формуле (5.2). Здесь левая часть формулы (5.18) представляет собой матрицу, составленную из скобок Пуассона матричных элементов матрицы  $g(x)$  с  $l_0^a(y)$ . Формула (5.19) означает, что скобки Пуассона всех матричных элементов матрицы  $g(x)$  исчезают.

Вместо левых токов  $l_\mu$  с равным основанием можно было бы использовать *правые токи* поля  $g$

$$r_0 = -g^{-1} \frac{\partial g}{\partial t}, \quad r_1 = -g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (5.20)$$

Очевидно, что

$$r_\mu = -g^{-1} l_\mu g, \quad \mu = 0, 1, \quad (5.21)$$

и из формулы (5.18) получаем

$$\{g(x), r_0^a(y)\} = g(x) l^a \delta(x-y), \quad (5.22)$$

где мы ввели разложение

$$r_\mu = r_\mu^a l^a, \quad \mu = 0, 1. \quad (5.23)$$

Отсюда заключаем, что скобки Пуассона правых токов имеют вид

$$\{r_0^a(x), r_0^b(y)\} = -f^{abc} r_0^c(x) \delta(x-y), \quad (5.24)$$

$$\{r_0^a(x), r_1^b(y)\} = -f^{abc} r_1^c(x) \delta(x-y) - \delta^{ab} \delta'(x-y), \quad (5.25)$$

$$\{r_1^a(x), r_1^b(y)\} = 0. \quad (5.26)$$

Наконец, из (5.15)—(5.19) и (5.21) получаем скобки Пуассона левых и правых токов:

$$\{r_0^a(x), l_0^b(y)\} = \{r_1^a(x), l_1^b(y)\} = 0, \quad (5.27)$$

$$\{l_0^a(x), r_1^b(y)\} = \tilde{t}^a(y) \delta'(x-y), \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \{l_1^a(x), r_0^b(y)\} &= [\tilde{t}^a(x), r_1^b(x)] \delta(x-y) + \tilde{t}^a(y) \delta'(x-y) = \\ &= \tilde{t}^a(x) \delta'(x-y), \end{aligned} \quad (5.29)$$

где мы положили  $\tilde{t}^a(x) = g^{-1}(x) t^a g(x)$ .

До сих пор мы не обсуждали граничных условий, так что приведенные выкладки носили формальный характер. Существует несколько способов введения граничных условий: их можно накладывать как на переменные  $g(x)$ ,  $l_0(x)$ , так и на токи  $l_0(x)$ ,  $l_1(x)$  или  $r_0(x)$ ,  $r_1(x)$ . Для определенности мы будем параметризовать фазовое пространство в терминах левых токов и наложим на них периодические граничные условия

$$l_\mu(x+2L) = l_\mu(x), \quad \mu=0, 1. \quad (5.30)$$

Интегрирование в выражениях (5.8) для действия и (5.13) для гамильтониана ведется по фундаментальной области  $-L \leq x \leq L$ .

Пуассонова структура (5.15)—(5.17) на фазовом пространстве является вырожденной. Действительно, матрица монодромии  $U$  связности  $l_1(x)$

$$U = \tilde{g}(L, -L) = \widehat{\exp} \int_{-L}^L l_1(x) dx \quad (5.31)$$

находится в инволюции со всеми образующими  $l_\mu^a(x)$ . Чтобы убедиться в этом, вычислим формально скобку Пуассона между функциями  $l_0^a(y)$  и матрицей  $\tilde{g}(x, -L)$ , где использовано обозначение

$$\tilde{g}(x, y) = \widehat{\exp} \int_y^x l_1(x') dx' \quad (5.32)$$

(сравни с определением матрицы перехода в части I). Эта матрица удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = l_1(x) \tilde{g}, \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} = -\tilde{g} l_1(y). \quad (5.33)$$

Имеем теперь, считая, что  $-L < y < L$ , и используя (5.16) и (5.33):

$$\begin{aligned} \{\tilde{g}(x, -L), l_0^a(y)\} &= \int_{-L}^x \tilde{g}(x, z) \{l_1(z), l_0^a(y)\} \tilde{g}(z, -L) dz = \\ &= \int_{-L}^x \tilde{g}(x, z) (\{l_1(z), l^a\} \delta(y-z) + l^a \delta'(y-z)) \tilde{g}(z, -L) dz = \\ &= -l^a \tilde{g}(x, -L) \delta(x-y), \end{aligned} \quad (5.34)$$

где при выводе последнего соотношения мы воспользовались интегрированием по частям. Подчеркнем, что полученная формула совпадает со скобкой Пуассона (5.18) после замены  $g(x)$  на  $\tilde{g}(x, -L)$ .

Полагая в (5.34)  $x=L$ , получаем, что функции  $l_0^a(y)$  находятся в инволюции с матрицей монодромии  $U$ . Для функций  $l_1^a(y)$  это очевидно из (5.17).

Используем теперь матрицу  $\tilde{g}(x, -L)$  для построения аналогов правых токов

$$\tilde{r}_\mu = -\tilde{g}^{-1} l_\mu \tilde{g}, \quad \mu = 0, 1. \quad (5.35)$$

Их скобки Пуассона с левыми токами  $l_\mu$  имеют тот же вид, что и формулы (5.27) — (5.29) с заменой  $r_\mu$  на  $\tilde{r}_\mu$ . Поэтому величины

$$\tilde{R}^a = \int_{-L}^L \tilde{r}_0^a(x) dx, \quad (5.36)$$

так же как и матричные элементы матрицы  $U$ , находятся в инволюции со всеми функциями  $l_\mu^a(x)$ .

Однако приведенные вычисления были формальными и для описания функционалов, порождающих аннулятор пуассоновой структуры, необходимо выделить допустимые функционалы, совместные с граничными условиями (5.30). Для функционалов от матрицы монодромии  $U$  таковыми являются лишь инварианты присоединенного действия группы  $G$ , т. е. инварианты преобразований  $U \mapsto a U a^{-1}$ , для всех  $a$  из  $G$ . (Сравни с выделением допустимых функционалов в § III.2 части I.) Для функционалов от  $r_0(x)$  условия допустимости выглядят более сложно и состоят в том, что их плотности должны быть периодическими функциями переменной  $x$ , а сами они не должны меняться при замене  $\tilde{g}(x, -L) \mapsto \tilde{g}(x, -L)C$ , где  $C$  — произвольная постоянная матрица. Можно показать в ситуации общего положения (когда все собственные значения матрицы  $U$  различны), что число функционалов, порождающих аннулятор нашей пуассоновой структуры, совпадает с удвоенной размерностью картановской подалгебры в  $\mathfrak{g}$ . Этим заканчивается описание фазового пространства в терминах левых токов  $l_\mu(x)$ .

Рассмотрим теперь параметризацию переменными  $g(x)$  и  $l_0(x)$ . В случае периодических граничных условий

$$g(x+2L) = g(x) \quad (5.37)$$

пуассонова структура, задаваемая скобками Пуассона (5.15) и (5.18) — (5.19), является невырожденной. В терминах  $l_1(x)$  условие (5.37) приобретает вид

$$U = I, \quad (5.38)$$

так что, в частности, все величины  $\tilde{R}^a$  являются допустимыми функционалами на фазовом пространстве переменных  $g(x)$  и  $l_0(x)$ . Это и не удивительно, так как в рассматриваемом фазовом пространстве модель главного кирального поля является  $G \times G$ -инвариантной. Действие группы  $G \times G$  в фазовом пространстве является гамильтоновым и задается генераторами

$$L^a = \int_{-L}^L l_0^a(x) dx, \quad R^a = \int_{-L}^L r_0^a(x) dx \quad (5.39)$$

со скобками Пуассона

$$\{L^a, L^b\} = -f^{abc} L^c, \quad (5.40)$$

$$\{R^a, R^b\} = -f^{abc} R^c, \quad (5.41)$$

$$\{L^a, R^b\} = 0. \quad (5.42)$$

В этом случае существует инволюция  $g \rightarrow g^{-1}$ , переводящая левые токи в правые.

Переход от первой параметризации фазового пространства ко второй можно осуществить, при выполнении условия (5.38), с помощью интегрирования

$$g(x) = \bar{g}(x, -L) g(-L). \quad (5.43)$$

При этом возникает новая динамическая переменная — матрица  $g(-L)$  («постоянная интегрирования»), находящаяся в инволюции со всеми  $l_\mu(x)$ , но не с бывшими аннуляторами  $R^a$ . Преобразование подобия

$$g^{-1}(-L) \tilde{R} g(-L) = R = R^a t^a \quad (5.44)$$

переводит их в правые токи.

Мы подробно привели здесь все эти рассуждения с тем, чтобы обратить внимание на неочевидные свойства стандартной пуассоновой структуры модели главного кирального поля.

Эта модель допускает интересную редукцию, приводящую к гамильтоновой системе с отличной от (5.15) — (5.17) пуассоновой структурой. Ограничившись для простоты случаем  $G = SU(2)$  и периодическими граничными условиями на токи  $l_\mu(x)$ , введем

переменные

$$S = \frac{l_0 + l_1}{2}, \quad T = \frac{l_0 - l_1}{2}, \quad (5.45)$$

в терминах которых уравнения (5.3)—(5.4) принимают вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} - [S, T], \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial x} + [S, T]. \quad (5.47)$$

(В обозначениях из § 3 имеем  $S = U_+$ ,  $T = U_-$ .)

Редукция

$$S^2 = T^2 = I \quad (5.48)$$

задает инвариантное подмногообразие системы уравнений (5.46)—(5.47). Рассмотрим его в качестве фазового пространства с пуассоновой структурой, задаваемой следующими скобками Пуассона:

$$\{S^a(x), S^b(y)\} = -\varepsilon^{abc} S^c(x) \delta(x-y), \quad (5.49)$$

$$\{T^a(x), T^b(y)\} = -\varepsilon^{abc} T^c(x) \delta(x-y), \quad (5.50)$$

$$\{S^a(x), T^b(y)\} = 0. \quad (5.51)$$

Введенное фазовое пространство является прямым произведением  $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ , где  $\mathcal{O}$  — симплектическая орбита алгебры токов группы  $SU(2)$ , задаваемая условием  $S^2 = I$ , так что пуассонова структура (5.49)—(5.51) невырождена. Уравнения (5.46)—(5.47) записываются в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \{H, S\}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \{H, T\} \quad (5.52)$$

с гамильтонианом

$$H(S, T) = P(T) - P(S) - 2 \int_{-L}^L \text{tr} ST dx, \quad (5.53)$$

где  $P$  — функционал импульса на фазовом пространстве  $\mathcal{O}$ , введенный в § 1. Отметим, что гамильтониан  $H$  дает пример многозначного функционала, определенного с точностью до целого кратного  $8\pi$  (см. § 1). Однако его вариационные производные очевидно являются однозначными периодическими функциями.

Перейдем теперь к гамильтоновой формулировке модели  $\vec{n}$ -поля, ограничившись для простоты случаем сферы  $\vec{S}^2$ . Фазовое пространство модели образовано вектор-функциями  $\vec{\pi}(x)$ ,  $\vec{n}(x)$  со значениями в  $\mathbb{R}^3$ , удовлетворяющими периодическим граничным



УСЛОВИЯМ

$$\vec{\pi}(x + 2L) = \vec{\pi}(x), \quad \vec{n}(x + 2L) = \vec{n}(x) \quad (5.54)$$

И СВЯЗЯМ

$$\vec{n}^2 = 1, \quad \vec{\pi} \cdot \vec{n} = 0. \quad (5.55)$$

Уравнения движения

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \vec{\pi}, \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial x^2} + \left( \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right)^2 - \vec{\pi}^2 \right) \vec{n} \quad (5.57)$$

порождаются гамильтонианом

$$H = \int_{-L}^L \left( \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (5.58)$$

и скобками Пуассона

$$\{n^a(x), n^b(y)\} = 0, \quad (5.59)$$

$$\{\pi^a(x), \pi^b(y)\} = -(\pi^a(x)n^b(x) - \pi^b(x)n^a(x))\delta(x-y), \quad (5.60)$$

$$\{\pi^a(x), n^b(y)\} = (\delta^{ab} - n^a(x)n^b(x))\delta(x-y), \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (5.61)$$

Пуассонова структура, порождаемая этими скобками Пуассона, совместна со связями (5.55).

Скобки Пуассона (5.59)–(5.61) можно упростить, если использовать вместо  $\vec{\pi}(x)$  переменную  $\vec{l}(x)$ :

$$\vec{l} = \vec{n} \wedge \vec{\pi}, \quad \vec{l}^2 = \vec{\pi}^2. \quad (5.62)$$

В результате получаем скобки Пуассона

$$\{l^a(x), l^b(y)\} = -\varepsilon^{abc} l^c(x)\delta(x-y), \quad (5.63)$$

$$\{l^a(x), n^b(y)\} = -\varepsilon^{abc} n^c(x)\delta(x-y), \quad (5.64)$$

$$\{n^a(x), n^b(y)\} = 0, \quad (5.65)$$

характеризующие алгебру токов группы  $E(3)$ . Фазовым пространством модели является симплектическая орбита

$$\vec{n}^2 = 1, \quad \vec{l} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.66)$$

алгебры  $S(e(3))$ , так что пуассонова структура на нем невырожденна.

В рассматриваемом случае модель  $n$ -поля является  $O(3)$ -инвариантной. Роль генераторов гамильтонова действия группы

$O(3)$  на фазовом пространстве играют величины

$$L^a = \int_{-L}^L l^a(x) dx \quad (5.67)$$

со скобками Пуассона

$$\{L^a, L^b\} = -\varepsilon^{abc} L^c. \quad (5.68)$$

Закончим этот параграф обсуждением еще одной модели кирального поля, имеющей интересное топологическое происхождение. Ее можно ввести благодаря тому, что на компактных группах Ли помимо обычного действия  $S(g)$  для главного кирального поля имеется еще один двусторонне инвариантный функционал  $W(g)$ , не зависящий от метрики на  $\mathbb{R}^2$ .

Для его определения рассмотрим на компактной группе Ли  $G$  правоинвариантную 3-форму  $\Omega$ , определив ее при  $g=I$  равенством

$$\Omega(x, y, z) = \text{tr}([x, y]z), \quad (5.69)$$

так что

$$\Omega = \text{tr} \theta \wedge \theta \wedge \theta, \quad (5.70)$$

где  $\theta$  — форма Маурера — Картана на  $G$ :

$$\theta = dg \cdot g^{-1}. \quad (5.71)$$

Форма  $\Omega$  двусторонне инвариантна и замкнута

$$d\Omega = 0, \quad (5.72)$$

но не точна (существование такой формы  $\Omega$  означает, что для компактных групп Ли  $G$  группа когомологий  $H^3(G, \mathbb{R})$  нетривиальна).

Пусть  $g(x, t)$  — главное киральное поле, т. е. отображение  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow G$ . Будем считать, что его можно компактифицировать — продолжить до отображения сферы  $S^2$  в  $G$ , задав тем самым на  $G$  2-цикл  $\gamma$ . Покроем этот цикл односвязной картой на  $G$ , рассмотрим в ней локальную первообразную  $\omega$  формы  $\Omega$

$$\omega = d^{-1}\Omega \quad (5.73)$$

и положим

$$W(g) = \int_{\gamma} \omega. \quad (5.74)$$

По своему построению функционал  $W(g)$  является многозначным, поскольку  $\omega$  не продолжается до 2-формы на  $G$ . Выясним характер его неоднозначности.

Натянем на 2-цикл  $\gamma$  пленку  $B_1$  (известно, что гомотопическая группа  $\pi_2(G)$  тривиальна). По формуле Стокса имеем

$$W(g) = \int_{B_1} \Omega. \quad (5.75)$$

Неоднозначность в выборе пленки приводит к дополнительному слагаемому  $\int_B \Omega$ , где  $B = B_\gamma - B'_\gamma$  — 3-цикл на  $G$ . Предположим, что группа гомологий  $H_3(G)$  порождена одной образующей  $B_0$  (т. е.  $H_3(G) = \mathbb{Z}$ ). Тогда весь произвол в определении  $W(g)$  состоит в добавлении к нему целого кратного периода формы  $\Omega$  — величины  $\int_{B_0} \Omega$  (сравни с определением функционала импульса модели МГ в § 1). В этом случае функционал  $W(g)$  имеет такое же право на существование, что и элементарная многозначная функция  $\ln z$ .

Сделанное выше предположение  $H_3(G) = \mathbb{Z}$  справедливо для всех простых групп Ли. В простейшем случае  $G = SU(2)$  форма  $\Omega$  совпадает с формой объема на группе.

Важным свойством функционала  $W(g)$  является однозначность его вариации  $\delta W(g)$ . Для доказательства воспользуемся формулой для вариации интеграла при варьировании замкнутой поверхности интегрирования  $\gamma(s)$

$$\frac{d}{ds} \int_{\gamma(s)} \omega \Big|_{s=0} = \int_{\gamma} i_{\xi} d\omega, \quad (5.76)$$

где  $\gamma = \gamma(0)$ ,  $\xi$  — векторное поле вариации на  $\gamma$ , а  $i_{\xi} d\omega$  — свертка поля  $\xi$  с формой  $d\omega$ . В нашем случае  $\xi = \delta g$ , и из формулы (5.74) получаем

$$\delta W(g) = \int_{g(S^2)} i_{\xi} d\omega = \int_{S^2} \text{tr}([l_1, l_0] \delta g \cdot g^{-1}) dx dt, \quad (5.77)$$

где  $l_i$ , как обычно, означают левые токи поля  $g$ .

Введем теперь модифицированный функционал действия для кирального поля  $g$ , положив

$$S_\alpha(g) = S(g) + \alpha W(g), \quad (5.78)$$

где функционал  $S(g)$  дается формулой (5.8), а  $\alpha$  — вещественная константа. Уравнения Эйлера — Лагранжа для  $S_\alpha(g)$ , записанные в терминах левых токов, имеют вид

$$\frac{\partial l_1}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial x} + [l_1, l_0] = 0, \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial l_0}{\partial t} - \frac{\partial l_1}{\partial x} + \alpha [l_1, l_0] = 0 \quad (5.80)$$

и называются модифицированными уравнениями главного кирального поля.

Между локальными решениями обычных и модифицированных уравнений главных киральных полей имеется простое взаимно однозначное соответствие. Именно, пусть  $l_0$  и  $l_1$  — решение

уравнений (5.79) — (5.80). Тогда матрицы

$$\tilde{l}_0 = l_0 - \alpha l_1, \quad (5.81)$$

$$\tilde{l}_1 = l_1 - \alpha l_0 \quad (5.82)$$

удовлетворяют системе (5.3) — (5.4). Обратное преобразование дается формулами

$$l_0 = \frac{1}{1 - \alpha^2} (\tilde{l}_0 + \alpha \tilde{l}_1), \quad (5.83)$$

$$l_1 = \frac{1}{1 - \alpha^2} (\tilde{l}_1 + \alpha \tilde{l}_0). \quad (5.84)$$

Далее, пусть  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  — матрицы из представления нулевой кривизны для модели главного кирального поля (см. § 3). Рассмотрим совместную систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda) F, \quad (5.86)$$

где  $F(x, t, \lambda)$  — матрица-функция со значениями в группе  $G$ , и положим

$$\tilde{g}(x, t) = F(x, t, \lambda)|_{\lambda=0}, \quad (5.87)$$

$$g(x, t) = F(x, t, \lambda)|_{\lambda=\alpha}. \quad (5.88)$$

Тогда матрицы  $\tilde{g}$  и  $g$  удовлетворяют, соответственно, обычным и модифицированным уравнениям главного кирального поля. Таким образом, представление нулевой кривизны (3.37) — (3.40) обслуживает и модифицированные уравнения главных киральных полей.

Однако между обычной и модифицированной моделями имеются и отличия. Во-первых, поскольку

$$W(g) = -W(g^{-1}), \quad (5.89)$$

в модифицированной модели нарушена инвариантность при замене  $g \rightarrow g^{-1}$ , имевшая место в обычной модели. Во-вторых, эти модели имеют разные пуассоновы структуры.

Именно, уравнения (5.79) — (5.80) являются гамильтоновыми по отношению к гамильтониану  $H$ , совпадающему с гамильтонианом главного кирального поля (5.13), и к следующим скобкам Пуассона:

$$\{l_0^a(x), l_0^b(y)\} = -f^{abc} (l_0^c(x) + \alpha l_1^c(x)) \delta(x - y), \quad (5.90)$$

$$\{l_0^a(x), l_1^b(y)\} = -f^{abc} l_1^c(x) \delta(x - y) - \delta^{ab} \delta'(x - y), \quad (5.91)$$

$$\{l_1^a(x), l_1^b(y)\} = 0. \quad (5.92)$$

Последние отличаются от скобок Пуассона (5.15) — (5.17) лишь добавлением слагаемого  $-\alpha f^{abc} l_1^c(x) \delta(x-y)$  в правой части формулы (5.90). Аналогичная модификация скобок Пуассона правых токов выглядит следующим образом:

$$\{r_0^a(x), r_0^b(y)\} = -f^{abc} (r_0^c(x) - \alpha r_1^c(x)) \delta(x-y), \quad (5.93)$$

$$\{r_0^a(x), r_1^b(y)\} = -f^{abc} r_1^c(x) \delta(x-y) - \delta^{ab} \delta'(x-y), \quad (5.94)$$

$$\{r_1^a(x), r_1^b(y)\} = 0. \quad (5.95)$$

Отметим, что скобки Пуассона между величинами  $g(x)$  и  $l_0(x)$ , а также  $g(x)$  и  $r_0(x)$  по-прежнему даются формулами (5.18) и (5.22).

Повторяя выкладки, приводящие к формулам (5.27) — (5.29), убеждаемся, что величины

$$L^a(x) = l_0^a(x) - \alpha l_1^a(x), \quad (5.96)$$

$$R^a(x) = r_0^a(x) + \alpha r_1^a(x) \quad (5.97)$$

имеют следующие скобки Пуассона:

$$\{L^a(x), L^b(y)\} = -f^{abc} L^c(x) \delta(x-y) + 2\alpha \delta^{ab} \delta'(x-y), \quad (5.98)$$

$$\{R^a(x), R^b(y)\} = -f^{abc} R^c(x) \delta(x-y) - 2\alpha \delta^{ab} \delta'(x-y), \quad (5.99)$$

$$\{L^a(x), R^b(y)\} = 0. \quad (5.100)$$

Соображения теории возмущений показывают, что при  $\alpha \neq 0$  переменные  $L^a(x)$  и  $R^a(x)$  можно использовать для параметризации фазового пространства. Таким образом, фазовое пространство модели ассоциируется с прямой суммой двух центрально расширенных алгебр токов  $C_{\pm}(\mathfrak{g})$  алгебры  $\mathfrak{g}$  с 2-коциклами  $\pm 2\alpha \delta^{ab} \delta'(x-y)$ . Ради этой неожиданной и красивой интерпретации мы и ввели здесь в рассмотрение модифицированную модель главного кирального поля. На ее примере мы еще раз убедились в полезности использования многозначных функционалов и оператора  $d^{-1}$ .

## § 6. Задача Римана как способ построения решений интегрируемых уравнений

Здесь мы продолжим начатое в § 3 обсуждение общих свойств уравнений, представимых в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0, \quad (6.1)$$

где  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  являются рациональными матрицами-функциями спектрального параметра  $\lambda$ :

$$U(x, t, \lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{n_i} \frac{U_{i,r}(x, t)}{(\lambda - \lambda_i)^r} + \sum_{k=0}^{n_\infty} \lambda^k U_k(x, t), \quad (6.2)$$

$$V(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \sum_{s=1}^{\tilde{n}_j} \frac{V_{j,s}(x, t)}{(\lambda - \mu_j)^s} + \sum_{l=0}^{\tilde{n}_\infty} \lambda^l V_l(x, t). \quad (6.3)$$

В § 3 мы убедились, что уравнение (6.1) представляет собой нелинейную систему уравнений на матричные коэффициенты  $U_{i,r}(x, t)$ ,  $U_k(x, t)$  и  $V_{j,s}(x, t)$ ,  $V_l(x, t)$ . В общем положении вид этой системы зависит лишь от *дивизоров полюсов*  $\mathfrak{U} = \{(\lambda_i, n_i), i=1, \dots, m; (\infty, n_\infty)\}$  и  $\mathfrak{B} = \{(\mu_j, \tilde{n}_j), j=1, \dots, \tilde{m}; (\infty, \tilde{n}_\infty)\}$  матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ . Более специальные системы получаются при редукциях — априорных предположениях о структуре матричных коэффициентов матриц  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ , совместных с уравнением (6.1). В этом параграфе мы рассмотрим задачу о построении по возможности наиболее широкого класса частных решений общего уравнения (6.1) с данными дивизорами  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{B}$ . Мы убедимся, что кинематическая интегрируемость нелинейных уравнений позволяет строить богатый класс точных решений этих уравнений.

Предположим, что нам задано какое-то решение уравнения (6.1) — матрицы  $U_0(x, t, \lambda)$  и  $V_0(x, t, \lambda)$  с дивизорами полюсов  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{B}$  соответственно. Например, можно иметь в виду «тривиальное» решение, задаваемое матрицами

$$U_0(x, t, \lambda) = U_0(x, \lambda), \quad V_0(x, t, \lambda) = V_0(t, \lambda), \quad (6.4)$$

где

$$[U_0(x, \lambda), V_0(t, \lambda)] = 0. \quad (6.5)$$

Через  $F_0(x, t, \lambda)$  обозначим невырожденное матричное решение совместной системы уравнений

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = U_0(x, t, \lambda) F_0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = V_0(x, t, \lambda) F_0. \quad (6.7)$$

Покажем, что по заданным матрицам  $U_0(x, t, \lambda)$  и  $V_0(x, t, \lambda)$  можно построить целое семейство локальных решений уравнения (6.1), заданных в некоторой области  $\mathcal{D}$  переменных  $x$  и  $t$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Оно параметризуется замкнутым ориентированным контуром  $\Gamma$  на расширенной комплексной плоскости  $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  и заданной на нем гладкой, ограниченной и невырожденной матрицей  $G(\lambda)$ . Если дивизор  $\mathfrak{U}$  или  $\mathfrak{B}$  пересекает контур

$\Gamma$ , то потребуем, чтобы

$$G(\lambda) = I + O(|\lambda - \lambda_0|^{n_0}), \quad (6.8)$$

где  $\lambda$  лежит в окрестности точки  $(\lambda_0, n_0)$  из  $\mathbb{C}$  или  $\mathfrak{B}$ . Для построения по этим данным решения уравнения (6.1) рассмотрим регулярную задачу Римана на  $\Gamma$

$$G(x, t, \lambda) = G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda), \quad (6.9)$$

где

$$G(x, t, \lambda) = F_0(x, t, \lambda) G(\lambda) F_0^{-1}(x, t, \lambda), \quad (6.10)$$

а матрицы-функции  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  допускают аналитическое продолжение на внутренность и внешность контура  $\Gamma$  и невырождены там. Переменные  $x$  и  $t$  играют роль параметров этой задачи. Предположим, что эта задача Римана разрешима для значений параметров из некоторой области  $\mathcal{D}$ .

Продифференцируем уравнение (6.9) по  $x$ . Используя (6.6) и (6.10) получим, что для  $\lambda$  из  $\Gamma$

$$\frac{\partial G_+}{\partial x} G_- + G_+ \frac{\partial G_-}{\partial x} = U_0 G_+ G_- - G_+ G_- U_0, \quad (6.11)$$

или

$$U(x, t, \lambda) = -G_+^{-1} \left( \frac{\partial G_+}{\partial x} - U_0 G_+ \right) = \left( \frac{\partial G_-}{\partial x} + G_- U_0 \right) G_-^{-1}. \quad (6.12)$$

Здесь и ниже для сокращения записи мы иногда опускаем зависимость от  $x$  и  $t$ . Из (6.12) следует, что определенная этой формулой матрица  $U(x, t, \lambda)$  допускает аналитическое продолжение на  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}$ . Убедимся, что на самом деле  $U(x, t, \lambda)$  для  $x, t$  из области  $\mathcal{D}$  является рациональной функцией  $\lambda$  с дивизором полюсов  $\mathbb{C}$ .

Действительно, если точка  $(\lambda_0, n_0)$  из  $\mathbb{C}$  не лежит на контуре  $\Gamma$ , то, очевидно,  $U(x, t, \lambda)$  имеет в точке  $\lambda = \lambda_0$  полюс того же порядка  $n_0$ , что и  $U_0(x, t, \lambda)$ . Если же  $\lambda_0$  принадлежит контуру  $\Gamma$ , то функция  $F_0(x, t, \lambda)$  имеет существенную особенность на  $\Gamma$ . Однако условие (6.8) гарантирует регулярность как функций  $G(x, t, \lambda)$ ,  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$ , так и функций  $\frac{\partial G_{\pm}}{\partial x}(x, t, \lambda)$  при  $\lambda = \lambda_0$ . Таким образом, и в этом случае  $U(x, t, \lambda)$  имеет при  $\lambda = \lambda_0$  полюс порядка  $n_0$ . Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой Лиувилля.

Аналогичным образом, дифференцируя уравнение (6.9) по  $t$ , получаем, что матрица

$$V(x, t, \lambda) = -G_+^{-1} \left( \frac{\partial G_+}{\partial t} - V_0 G_+ \right) = \left( \frac{\partial G_-}{\partial t} + G_- V_0 \right) G_-^{-1} \quad (6.13)$$

для  $x, t$  из области  $\mathcal{D}$  является рациональной функцией  $\lambda$  с дивизором полюсов  $\mathfrak{B}$ .

Из (6.12) — (6.13) следует, что матрицы-функции  $F_{\pm}(x, t, \lambda)$

$$F_{+} = G_{+}^{-1} F_0, \quad F_{-} = G_{-} F_0 \quad (6.14)$$

для указанных значений  $x$  и  $t$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F_{\pm}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial t} = V(x, t, \lambda) F_{\pm}, \quad (6.16)$$

которая, таким образом, является совместной. Отсюда заключаем, что матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ , определяемые формулами (6.12) — (6.13), дают для  $x, t$  из области  $\mathcal{D}$  решение уравнения (6.1) с заданными дивизорами полюсов  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{B}$ .

Описанная конструкция построения решений уравнения нулевой кривизны носит жаргонное название процедуры «одевания затравочного решения»  $U_0(x, t, \lambda)$  и  $V_0(x, t, \lambda)$ . В ее основе лежит способ построения представления нулевой кривизны при помощи матричной задачи Римана, уже введенной в части I на примере модели НШ. Задача о принадлежности решений уравнения нулевой кривизны, построенных при помощи процедуры одевания, к заданным функциональным классам (т. е. вопрос о выборе затравочных матриц  $U_0(x, t, \lambda)$ ,  $V_0(x, t, \lambda)$ , контура  $\Gamma$  и матрицы  $G(\lambda)$ ) является нетривиальной и в каждом случае требует специального исследования. Результаты гл. II первой части можно интерпретировать как решение этой задачи для модели НШ в случае граничных условий быстрого убывания и конечной плотности.

Решение задачи Римана (6.9) не единственно — вместе с матрицами  $G_{+}(x, t, \lambda)$ ,  $G_{-}(x, t, \lambda)$  уравнению (6.9) удовлетворяют также и матрицы  $G_{+}(x, t, \lambda)\Omega^{-1}(x, t)$ ,  $\Omega(x, t)G_{-}(x, t, \lambda)$ , где  $\Omega(x, t)$  — произвольная невырожденная матрица, не зависящая от  $\lambda$ . При этом решение уравнения нулевой кривизны подвергается калибровочному преобразованию с матрицей  $\Omega(x, t)$  — вместо решений  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  мы получим  $U^{\Omega}(x, t, \lambda)$  и  $V^{\Omega}(x, t, \lambda)$ . Этот произвол устраняется нормировкой задачи Римана, т. е. заданием значения одной из матриц  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$  в какой-нибудь точке, например, при  $\lambda = \infty$ . При этом сама задача Римана решается однозначно. В частности, полагая  $G_{\pm}(\infty) = G(\infty) = I$ , мы имеем, как принято говорить, единичную нормировку, которая уже встречалась при исследовании модели НШ. В общем случае в качестве точки нормировки обычно удобно выбирать одну из точек дивизоров  $\mathcal{U}$  или  $\mathcal{B}$ . С конкретными примерами различных нормировок задачи Римана мы познакомимся в двух последующих главах.

Помимо регулярной задачи Римана, в процедуре одевания можно использовать и задачу Римана с нулями, когда матрицы



$G_{\pm}(x, t, \lambda)$  могут иметь в своих областях аналитичности конечное число нулей — точек вырождения  $\lambda = \lambda_j^{(\pm)}$ ,  $j = 1, \dots, N_{\pm}$ , которые не зависят от  $x$  и  $t$  и не принадлежат дивизорам  $\mathcal{U}$  и  $\mathfrak{B}$ . В случае простых нулей (т. е. когда матрицы  $G_{\pm}^{-1}(x, t, \lambda)$  имеют при  $\lambda = \lambda_j^{(\pm)}$  простые полюса), которым мы здесь и ограничимся, к данным задаче Римана следует добавить набор подпространств

$$N_j^{(+)}(x, t) = \text{Im } G_+(x, t, \lambda_j^{(+)}), \quad N_j^{(-)}(x, t) = \text{Ker } G_-(x, t, \lambda_j^{(-)}), \quad (6.17)$$

$$j = 1, \dots, N_{\pm},$$

которые вместе с нормировкой обеспечивают единственность задачи Римана с нулями. При условии, что зависимость подпространств  $N_j^{(\pm)}(x, t)$  от  $x$  и  $t$  согласована с уравнениями (6.6) — (6.7)

$$N_j^{(\pm)}(x, t) = F_0(x, t, \lambda_j^{(\pm)}) N_j^{(\pm)}, \quad j = 1, \dots, N_{\pm}, \quad (6.18)$$

где  $N_j^{(\pm)}$  не зависят от  $x$  и  $t$ , матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  из (6.12) — (6.13) не приобретут лишних полюсов в точках  $\lambda = \lambda_j^{(\pm)}$  и по-прежнему в качестве дивизоров полюсов будут иметь  $\mathcal{U}$  и  $\mathfrak{B}$ . В случае, когда  $G(\lambda) = I$ , задача Римана с нулями сводится к системе линейных алгебраических уравнений и решается явно. Таким образом получается богатый набор решений уравнения (6.1), в который входят солитонные решения.

С частным случаем этой конструкции мы уже встречались при обсуждении модели НШ. Приведенные там доказательства по существу не использовали специфику модели и пригодны для рассматриваемого здесь общего уравнения нулевой кривизны.

Описанная конструкция процедуры одевания приспособлена для общего уравнения нулевой кривизны (6.1). Если же мы имеем дело с редуцированной системой (6.1) (например, считаем, что  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  принадлежат некоторой комплексной алгебре Ли), то контур  $\Gamma$ , матрицу  $G(\lambda)$  и другие характеристики следует выбирать согласованными с данной редукцией. В случае модели НШ такие редуциционные ограничения осуществлялись при помощи условий инволюции. С другими примерами мы познакомимся в следующих главах.

Заканчивая обсуждение процедуры одевания, укажем, что изложенная схема дословно переносится на случай решеточного уравнения нулевой кривизны

$$\frac{dL_n(\lambda)}{dt} = V_{n+1}(\lambda) L_n(\lambda) - L'_n(\lambda) V_n(\lambda), \quad (6.19)$$

введенного в § 2. Именно, в основе схемы по-прежнему лежит задача Римана

$$G(n, t, \lambda) = G_+(n, t, \lambda) G_-(n, t, \lambda) \quad (6.20)$$

с параметрами  $n$  и  $t$ , где

$$G(n, t, \lambda) = F_0(n, t, \lambda) G(\lambda) F_0^{-1}(n, t, \lambda), \quad (6.21)$$

а матрица  $F_0(n, t, \lambda)$  определяется по затравочному решению  $L_n^0(t, \lambda)$ ,  $V_n^0(t, \lambda)$  уравнения (6.19):

$$F_0(n+1, t, \lambda) = L_n^0(t, \lambda) F_0(n, t, \lambda), \quad (6.22)$$

$$\frac{dF_0}{dt}(n, t, \lambda) = V_n^0(t, \lambda) F_0(n, t, \lambda). \quad (6.23)$$

При этом матрицы  $F_{\pm}(n, t, \lambda)$

$$F_+ = G_+^{-1} F_0, \quad F_- = G_- F_0 \quad (6.24)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$F_{\pm}(n+1, t, \lambda) = L_n(t, \lambda) F_{\pm}(n, t, \lambda), \quad (6.25)$$

$$\frac{dF_{\pm}}{dt}(n, t, \lambda) = V_n(t, \lambda) F_{\pm}(n, t, \lambda), \quad (6.26)$$

где

$$L_n(t, \lambda) = G_+^{-1}(n+1) L_n^0 G_+(n) = G_-(n+1) L_n^0 G_-^{-1}(n), \quad (6.27)$$

$$V_n(t, \lambda) = -G_+(n) \left( \frac{dG_+(n)}{dt} - V_n^0 G_+(n) \right) = \left( \frac{dG_-(n)}{dt} + G_-(n) V_n^0 \right) G_-^{-1}(n) \quad (6.28)$$

(сравни с формулами (6.12) — (6.13)).

Вывод дифференциального уравнения по  $t$  идентичен выводу соответствующего уравнения (6.16) для непрерывного случая. Для вывода же разностного уравнения следует сравнить задачи Римана (6.20) для значений  $n$  и  $n+1$  и исключить из них матрицу  $G(\lambda)$  (аналог дифференцирования по  $x$  в непрерывном случае).

Таким образом, построенные матрицы  $L_n(t, \lambda)$  и  $V_n(t, \lambda)$  удовлетворяют уравнению (6.19) и имеют те же дивизоры полюсов, что и  $L_n^0(t, \lambda)$  и  $V_n^0(t, \lambda)$ .

### § 7. Схема построения общего решения уравнения нулевой кривизны. Заключительные замечания по поводу интегрируемых уравнений

Здесь мы опишем общее локальное решение уравнения нулевой кривизны

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (7.1)$$

с заданными дивизорами полюсов  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{V}$ . Для удобства мы будем считать, что дивизоры  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{V}$  не содержат точку  $\lambda = \infty$  и

матрицы  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  исчезают при  $\lambda = \infty$  (этого можно добиться, используя дробно-линейную замену параметра  $\lambda$  и калибровочное преобразование).

Пусть матрицы  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$  удовлетворяют уравнению (7.1) и дивизоры их полюсов совпадают с  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  соответственно. Определим матрицу  $F(x, t, \lambda)$  как решение совместной системы уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda) F \quad (7.3)$$

с начальным условием

$$F(x, t, \lambda) \Big|_{x=t=0} = I. \quad (7.4)$$

Матрица  $F(x, t, \lambda)$  является аналитической функцией в области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{U} \cup \mathbb{V}$ , имеющей в точках из  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  существенные особенности. Опишем удобную конструкцию выделения главных частей этой матрицы в окрестностях особенностей.

Рассмотрим семейство регулярных задач Римана, занумерованных точками  $v$  из  $\overline{\mathbb{C}}$  с контурами  $\Gamma_v$  — окружностями малого радиуса  $\varepsilon_v$  вокруг точек  $v$ . Задача Римана, отвечающая точке  $v$ , состоит в разложении матрицы  $F(x, t, \lambda)$  в произведение

$$F(x, t, \lambda) = P_v(x, t, \lambda) Q_v(x, t, \lambda), \quad (7.5)$$

где сомножители  $P_v$  и  $Q_v$  допускают аналитическое продолжение соответственно во внутренность и внешность контура  $\Gamma_v$  — окружности  $|\lambda - v| = \varepsilon_v$ , и нормирована условием

$$Q_v(x, t, \lambda) \Big|_{\lambda=\infty} = I. \quad (7.6)$$

При достаточно малых  $x$  и  $t$  эта задача Римана однозначно разрешима, поскольку в силу (7.4) матрица  $F(x, t, \lambda)$  мало отличается от  $I$ . Функция  $Q_v(x, t, \lambda)$  является главной (сингулярной) частью функции  $F(x, t, \lambda)$  при  $\lambda = v$ .

Если точка  $v$  не принадлежит дивизорам  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$ , то функция  $F(x, t, \lambda)$  регулярна при  $\lambda = v$ , и поэтому для таких  $v$  имеем тождественно

$$Q_v(x, t, \lambda) = I. \quad (7.7)$$

Таким образом, из бесконечного семейства задач Римана (7.5) — (7.6) нетривиальными являются только задачи, отвечающие точкам  $v$ , входящим в  $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ .

*Построим теперь отображение*

$$(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda)) \mapsto (U_v(x, t, \lambda), V_v(x, t, \lambda)), \quad (7.8)$$

*сопоставляющее матрицам  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  семейство матриц  $U_v(\lambda)$  и  $V_v(\lambda)$ , занумерованное точками  $v$  из  $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ . Матрицы  $U_v(\lambda)$  и*

$V_\nu(\lambda)$  являются рациональными функциями  $\lambda$  с полюсами только при  $\lambda = \nu$  и с кратностями, совпадающими с таковыми для матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  соответственно; постоянные члены у этих матриц отсутствуют. При этом если точка  $\nu$  принадлежит дивизору  $\mathfrak{U}$ , но не принадлежит дивизору  $\mathfrak{B}$  (или наоборот), то матрица  $V_\nu(\lambda)$  (соответственно  $U_\nu(\lambda)$ ) исчезает по теореме Лиувилля. Это семейство матриц соответствует разложению дивизоров  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{B}$  в сумму элементарных дивизоров

$$\mathfrak{U} = \sum_i \mathfrak{U}_i, \quad \mathfrak{B} = \sum_j \mathfrak{B}_j, \quad (7.9)$$

где  $\mathfrak{U}_i = \{\lambda_i, n_i\}$ ,  $\mathfrak{B}_j = \{\mu_j, \tilde{n}_j\}$ . Явные формулы имеют вид

$$U_\nu = \frac{\partial Q_\nu}{\partial x} Q_\nu^{-1}, \quad (7.10)$$

$$V_\nu = \frac{\partial Q_\nu}{\partial t} Q_\nu^{-1}. \quad (7.11)$$

Из уравнений (7.5) получаем, что на контурах  $\Gamma_\nu$  также справедливы представления

$$U_\nu = U^{P_\nu^{-1}} = P_\nu^{-1} U P_\nu - P_\nu^{-1} \frac{\partial P_\nu}{\partial x}, \quad (7.12)$$

$$V_\nu = V^{P_\nu^{-1}} = P_\nu^{-1} V P_\nu - P_\nu^{-1} \frac{\partial P_\nu}{\partial t}, \quad (7.13)$$

обеспечивающие сформулированные выше свойства матриц  $U_\nu(x, t, \lambda)$  и  $V_\nu(x, t, \lambda)$ .

Из формул (7.10) — (7.11) следует, что при каждом  $\nu$  матрицы  $U_\nu(\lambda)$  и  $V_\nu(\lambda)$  удовлетворяют уравнению нулевой кривизны. При этом, если дивизоры  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{B}$  не пересекаются, то имеет место разделение переменных: матрицы  $U_\nu(\lambda)$  зависят лишь от  $x$ , а  $V_\nu(\lambda)$  — от  $t$ . Действительно, пусть, например, точка  $\nu$  принадлежит дивизору  $\mathfrak{U}$  (но не принадлежит дивизору  $\mathfrak{B}$ ). Тогда матрица  $V_\nu(\lambda)$  исчезает и уравнение нулевой кривизны сводится к условию

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} = 0. \quad (7.14)$$

Матрицы  $V_\nu(\lambda)$  рассматриваются аналогично. Случай пересекающихся дивизоров  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{B}$  мы обсудим ниже.

Таким образом, отображение (7.8) осуществляет разделение переменных в уравнении нулевой кривизны. Метод его построения может быть назван «процедурой раздевания», в противоположность процедуре одевания из предыдущего параграфа.

Покажем теперь, что отображение (7.8) обратимо. Пусть заданы матрицы  $U_\nu(x, \lambda)$  и  $V_\nu(t, \lambda)$  с исчезающими постоянными

членами и элементарными дивизорами полюсов  $\mathbb{U}_v$  и  $\mathbb{B}_v$ , где для  $v = \lambda_i$   $\mathbb{U}_v = \{\lambda_i, n_i\}$ ,  $\mathbb{B}_v = 0$ , а для  $v = \mu_j$   $\mathbb{U}_v = 0$ ,  $\mathbb{B}_v = \{\mu_j, \tilde{n}_j\}$ . Построим по ним матрицы  $F_v(x, t, \lambda)$  как решения совместных систем уравнений

$$\frac{\partial F_v}{\partial x} = U_v(x, \lambda) F_v, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial t} = V_v(t, \lambda) F_v, \quad (7.16)$$

нормированные условием

$$F_v(x, t, \lambda) \Big|_{x=t=0} = I, \quad (7.17)$$

и свяжем с ними следующую задачу Римана. Роль контура  $\Gamma$  в ней играет набор окружностей  $\Gamma_v$  малого радиуса  $\varepsilon_v$  с центрами в точках  $v$  из  $\mathbb{U} + \mathbb{B}$ , где дивизоры  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{B}$  даются формулами (7.9), а факторизуемая матрица на компоненте контура  $\Gamma_v$  совпадает с  $F_v(x, t, \lambda)$ . Другими словами, мы ищем матрицу  $F(x, t, \lambda)$ , аналитичную во внешности контура  $\Gamma$  и участвующую в разложении

$$F_v(x, t, \lambda) = G_v(x, t, \lambda) F(x, t, \lambda), \quad (7.18)$$

где функция  $G_v(x, t, \lambda)$  допускает аналитическое продолжение во внутренность контура  $\Gamma_v$ . При этом

$$F(x, t, \lambda) \Big|_{\lambda=\infty} = I. \quad (7.19)$$

Эта задача однозначно разрешима при малых  $x$  и  $t$ .

Введем матрицы

$$U(x, t, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}, \quad V(x, t, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial t} F^{-1}, \quad (7.20)$$

очевидно удовлетворяющие уравнению (7.1), и покажем, что их дивизоры полюсов совпадают с  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{B}$  соответственно. Это очевидным образом следует из соотношений на контурах  $\Gamma_v$

$$U(\lambda) = G_v^{-1} U_v G_v - G_v^{-1} \frac{\partial G_v}{\partial x}, \quad (7.21)$$

$$V(\lambda) = G_v^{-1} V_v G_v - G_v^{-1} \frac{\partial G_v}{\partial t}, \quad (7.22)$$

которые получаются из формул (7.15)–(7.16) и (7.18) при помощи уже хорошо знакомого нам приема — дифференцирования уравнения задачи Римана по параметрам  $x$  и  $t$ .

*Эта конструкция очевидным образом дает общее локальное по  $x$  и  $t$  решение уравнения нулевой кривизны.*

Если дивизоры  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{B}$  пересекаются, то в их общих точках полного упрощения не происходит. В этом случае аналогичная кон-

струкция дает частичное разделение переменных и понижение порядка в уравнении (7.1).

В качестве примера рассмотрим представление нулевой кривизны для модели главного кирального поля из § 3. На первый взгляд (см. формулы (3.37) — (3.40)), в ней нет разделения дивизоров  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{B}$ , так как они просто совпадают. Однако это разделение происходит в координатах светового конуса

$$\xi = \frac{t+x}{2}, \quad \eta = \frac{t-x}{2}, \quad (7.23)$$

в которых уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial \xi} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial \eta} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right). \quad (7.24)$$

Действительно, операторы ковариантного дифференцирования в этом случае принимают вид  $\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A(\xi, \eta)}{1-\lambda}$  и  $\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{B(\xi, \eta)}{1+\lambda}$ , где

$$A = l_0 + l_1 = \frac{\partial g}{\partial \xi} g^{-1}, \quad B = l_0 - l_1 = \frac{\partial g}{\partial \eta} g^{-1}. \quad (7.25)$$

Матрицы  $U(\xi, \eta, \lambda)$  и  $V(\xi, \eta, \lambda)$ , где

$$U(\lambda) = \frac{A}{1-\lambda}, \quad V(\lambda) = \frac{B}{1+\lambda}, \quad (7.26)$$

удовлетворяют уравнению нулевой кривизны

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial \eta} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \xi} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0, \quad (7.27)$$

к которому уже может быть применена процедура раздевания, состоящая в построении матриц  $U_1(\xi, \lambda)$  и  $V_{-1}(\eta, \lambda)$ .

Оказывается, что имеют место соотношения

$$U_1(\xi, \lambda) = \frac{A(\xi, 0)}{1-\lambda}, \quad V_{-1}(\eta, \lambda) = \frac{B(0, \eta)}{1+\lambda}, \quad (7.28)$$

т. е. матрицы  $U_1$  и  $V_{-1}$  строятся по начальным данным на характеристиках  $\eta=0$  и  $\xi=0$  соответственно.

Для доказательства рассмотрим, например, уравнение (7.5) при  $v=1$

$$F(\xi, \eta, \lambda) = P_1(\xi, \eta, \lambda) Q_1(\xi, \eta, \lambda) \quad (7.29)$$

и покажем, что

$$F(\xi, 0, \lambda) = Q_1(\xi, 0, \lambda). \quad (7.30)$$

Первая формула в (7.28) непосредственно следует из этого равенства и уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = U(\xi, \eta, \lambda) F. \quad (7.31)$$

Для доказательства формулы (7.30) достаточно убедиться, что функция  $F(\xi, 0, \lambda)$  не имеет особенности при  $\lambda = -1$ . Но это очевидно следует из дифференциального уравнения (7.31) при  $\eta = 0$  и начального условия

$$F(\xi, 0, \lambda)|_{\xi=0} = I. \quad (7.32)$$

Аналогично доказывается вторая формула в (7.28).

Для построения общего локального решения модели главного кирального поля мы должны проделать следующие операции.

1. Построить матрицы

$$F_1(\xi, \lambda) = \exp \int_0^\xi U_1(\xi', \lambda) d\xi' \quad (7.33)$$

и

$$F_{-1}(\eta, \lambda) = \exp \int_0^\eta V_{-1}(\eta', \lambda) d\eta', \quad (7.34)$$

т. е. решить две системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Определить матрицу  $F(\xi, \eta, \lambda)$  по ее главным частям  $F_1(\xi, \lambda)$  при  $\lambda = 1$  и  $F_{-1}(\eta, \lambda)$  при  $\lambda = -1$ . Это можно сделать с помощью задачи Римана

$$F_1(\xi, \lambda) = G_1(\xi, \eta, \lambda) F(\xi, \eta, \lambda) \quad (7.35)$$

при  $|\lambda - 1| = \varepsilon$  и

$$F_{-1}(\eta, \lambda) = G_{-1}(\xi, \eta, \lambda) F(\xi, \eta, \lambda) \quad (7.36)$$

при  $|\lambda + 1| = \varepsilon$ , где функция  $F(\xi, \eta, \lambda)$  аналитична во внешности к указанным окружностям и нормирована на  $I$  при  $\lambda = \infty$ . Тогда решение уравнения (7.24) с начальными данными для токов  $A(\xi)$  и  $B(\eta)$  на характеристиках дается формулой

$$g(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, \lambda)|_{\lambda=\infty}. \quad (7.37)$$

Таким образом, мы получили для общего решения уравнения главного кирального поля аналог представления Д'Аламбера в виде нелинейной суперпозиции волн, распространяющихся вдоль характеристик. Задача Римана (7.35) — (7.36) играет роль нелинейного аналога принципа суперпозиции.

Итак, мы убедились, что условие кинематической интегрируемости нелинейных систем, т. е. возможность их представления в виде уравнения нулевой кривизны, позволяет описать богатый класс решений этих уравнений: явные решения типа солитонов в процедуре одевания, локальные решения общего вида в процедуре раздвигания и т. д. Можно продолжить эксплуатировать уравнение нулевой кривизны для дальнейшего исследования порождаемых им нелинейных систем. Например, с его по-

мощью можно строить набор интегралов движения, понимаемых в обычном (не обязательно гамильтоновом) смысле как сохраняющиеся на уравнениях движения функционалы.

Действительно, в силу периодических граничных условий

$$U(x + 2L, \lambda) = U(x, \lambda), \quad (7.38)$$

$$V(x + 2L, \lambda) = V(x, \lambda) \quad (7.39)$$

матрица монодромии

$$T_L(t, \lambda) = \widehat{\exp} \int_{-L}^L U(x, t, \lambda) dx \quad (7.40)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T_L(t, \lambda)}{\partial t} = [V(L, t, \lambda), T_L(t, \lambda)] \quad (7.41)$$

(сравни с § 1.2 части I), поэтому ее инварианты — функционалы  $\text{tr } T_L^k(\lambda)$ , где  $k=1, \dots, n$  ( $n$  — размерность вспомогательного пространства), являются производящими функциями для интегралов движения. Локальные интегралы движения получаются из асимптотических разложений этих функционалов в окрестности полюсов по переменной  $\lambda$  матрицы  $U(x, t, \lambda)$ . Пример такого разложения уже был разобран в части I; с другими примерами мы познакомимся в следующей главе. Подробное рассмотрение процедуры построения локальных интегралов движения в общем случае слишком громоздко и не очень поучительно, чтобы его приводить здесь.

В случае моделей на решетке аналогичную матрицу  $T_L(t, \lambda)$  роль играет матрица

$$T_N(t, \lambda) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(t, \lambda), \quad (7.42)$$

с которой мы познакомимся ближе в гл. III.

В части I на примере модели НШ мы убедились, что условие нулевой кривизны с гамильтоновой точки зрения является вторичным — оно вытекает из фундаментальных скобок Пуассона, в которых участвует матрица  $U(x, \lambda)$  из вспомогательной линейной задачи и  $r$ -матрица. Рассматриваемые в дальнейшем модели опять будут гамильтоновыми, и мы опять будем использовать  $r$ -матричный формализм. Кульминацией этого подхода будет приведенная в гл. IV ли-алгебраическая классификация фундаментальных скобок Пуассона. Мы решили, однако, включить в книгу общее обсуждение уравнения нулевой кривизны с тем, чтобы показать непосредственные возможности этого представления для интегрируемых нелинейных уравнений.



## § 8. Комментарии и литературные указания

Существует обширная литература, посвященная исследованию приведенных в этой главе моделей. Здесь мы дадим ссылки только на те работы, в которых к этим моделям был применен метод обратной задачи, т. е. получено представление нулевой кривизны и, как правило, рассмотрен случай быстроубывающих граничных условий. Дальнейшие ссылки см. в соответствующих параграфах глав II—III. Там же мы укажем работы, в которых эти модели были рассмотрены с гамильтоновой точки зрения.

1) Модель МГ была погружена в метод обратной задачи в работе [1.86].

2) Модель SG активно исследовалась в 1973—1975 годах. Представление нулевой кривизны для уравнения SG в координатах светового конуса

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \varphi = 0 \quad (8.1)$$

было получено в работах [1.46], [1.55], а в форме (1.19) — в [1.19], [1.47]. Конечно, эти представления нулевой кривизны формально эквивалентны; различие приведенных работ состоит в том, что исследуются разные вспомогательные линейные задачи. Более подробные ссылки см. в гл. II.

3) Метод обратной задачи к модели Л—Л был применен в работах [1.4], [1.85].

4) Векторная модель НШ с двумя цветами была погружена в метод обратной задачи в работе [1.32], результаты которой непосредственно переносятся на случай произвольного числа цветов. Ее обобщение на однородные пространства групп Ли было дано в работе [1.69].

5) Общее замечание в конце § 1 о связи функционала импульса с симплектической формой на фазовом пространстве возникло при обсуждении этого вопроса с А. Г. Рейманом.

6) Первой интегрируемой моделью на решетке явилась модель Тода, описывающая ангармонические колебания одномерной кристаллической решетки (см. [1.87]). Метод обратной задачи для ее точного решения был применен С. В. Манаковым [1.33] и Г. Флашкой [1.66]—[1.67]. Дальнейшие ссылки см. в гл. III.

7) Переформулировка условия нулевой кривизны для решеточных моделей была осуществлена М. Абловитцем и Дж. Ладиком в работе [1.57].

8) Вторая модель в § 2 была введена Вольтерра в работе [1.88], что и объясняет ее название. Помимо экологических приложений, она возникает и в физике плазмы при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний. Метод обратной задачи для нее был развит в работе [1.33]. По поводу пуассоновой структуры модели Вольтерра см. гл. III.

9) Модель РМГ и вспомогательная линейная задача для нее были введены в работе [1.44].

10) Модель РНШ<sub>1</sub> и вспомогательная линейная задача (2.62)—(2.63) появились в работе [1.27].

11) Модель РНШ<sub>2</sub> была введена в работе [1.57], где к ней был применен метод обратной задачи. Гамильтонова формулировка модели была дана в [1.72]—[1.73].

12) Связь моделей РНШ<sub>1</sub> и РМГ, в частности операция альтернирования знака (2.51), обсуждалась в работе [1.45].

13) По поводу теории представлений групп  $SU(2)$  и  $SU(1,1)$  см., например, монографию [1.11].

14) Предложение использовать общее представление нулевой кривизны для изучения нелинейных уравнений принадлежит В. Е. Захарову и А. Б. Шабату [1.23] и носит сейчас название схемы Захарова — Шабата. Для случая двумерного вспомогательного пространства общее представление нулевой кривизны изучалось ранее в работе [1.56]. Роль калибровочного преобразования в этом подходе обсуждалась в работе [1.24] на примере моделей МГ и НШ.

15) Систематическое исследование различных редукций в представлении нулевой кривизны было проведено А. В. Михайловым [1.78].

16) Как мы отмечали во введении, знаменитое уравнение КдФ появляется только в основном тексте гл. I части II. Традиционно это уравнение рассматривается при помощи представления Лакса [1.75]. Представление нулевой кривизны для уравнения КдФ появилось в работе [1.37]. Другие ссылки по поводу этого уравнения уже указывались в гл. III части I.

17) Переход от уравнения (3.13) к (3.12) является частным случаем преобразования Фробениуса, приводящего обыкновенное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка к системе  $n$  линейных уравнений 1-го порядка. Очевидна унифицирующая роль таких систем в представлении нулевой кривизны. Дифференциальные уравнения высшего порядка, изученные в работах [1.12]—[1.13], таким образом, могут быть рассмотрены как редукции схемы Захарова — Шабата [1.14], [1.15].

18) Пуассонова структура (3.15) была введена в работах [1.18] и [1.71]. В работах [1.60], [1.64] отмечались важные тонкости, связанные с гамилтоновой интерпретацией уравнения КдФ.

19) Модель  $N$ -волн, исследованная В. Е. Захаровым и С. В. Манаковым в работе [1.21], явилась первым примером, в котором проявились все преимущества представления нулевой кривизны. На ее основе также был разработан метод матричной задачи Римана [1.53]—[1.54], заменяющий формализм интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко.

20) В стационарном случае (т. е. когда нет зависимости от  $t$ ) уравнения  $N$ -волн совпадают с уравнениями Эйлера, обобщающими уравнения вращения твердого тела. Этот важный факт был отмечен С. В. Манаковым в работе [1.34]. В дальнейшем были найдены другие примеры подобного типа [1.3], [1.8], [1.36], [1.39]. Эти примеры естественным образом погружаются в общую схему, использующую аффинные алгебры Ли [1.40], [1.42], [1.59], [1.83].

21) Киральное поле является популярной моделью теории поля, имеющей геометрическое происхождение (см., например, [1.17]). Представление нулевой кривизны для  $n$ -поля было получено в работе [1.81], а для главных киральных полей — в работе [1.22]. Мы называем матрицы  $I_n$  левыми токами, поскольку гамилтонианы  $\int I_n^a(x) A^a(x) dx$  относительно пуассоновой структуры (5.15), (5.18)—(5.19) порождают действительные группы  $G$  на себе левыми сдвигами. По аналогичной причине матрицы  $r_0 = -g^{-1} \frac{\partial g}{\partial t}$ ,  $r_1 = -g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}$  называются правыми токами.

22) Двумеризованная модель Toda была введена в работе [1.35], где для нее было получено представление нулевой кривизны. В другой форме она рассматривалась в работе [1.76]; ее обобщение на другие системы корней дано в работе [1.79]. Уравнение (3.54) появилось независимо от двумеризованной модели Toda в работах [1.26], [1.63]. В работе [1.35] для него было найдено представление нулевой кривизны.

23) Изложение в § 4 следует работе [1.24]. Формулы типа (4.19)—(4.21) также были приведены в работе [1.74], посвященной установлению связи между моделями МГ и НШ без использования метода обратной задачи. Отметим, что в то время как в решеточном случае модели РМГ и РНШ<sub>1</sub>, по существу, совпадают, в непрерывном случае их связь осуществляется уже калибровочным преобразованием. Это объясняется тем, что в последнем случае модели МГ и НШ получаются в результате различных непрерывных пределов из одной решеточной модели.

24) С расслоением Хопфа и теоремой о голономии можно познакомиться, например, по монографии [1.17]. Предложение использовать эту теорему для доказательства формулы (4.21) принадлежит А. Г. Рейману.

25) Со скобками Ли — Пуассона, задающими пуассонову структуру на двойственном пространстве к алгебре Ли, мы более подробно познакомимся в гл. IV.

26) Расширенная алгебра токов, которая появилась у нас в § 5, в настоящее время очень популярна в современной математической физике (см. [1.41], [1.61], [1.62], [1.70], [1.84]). Некоторые ее приложения к интегрируемым уравнениям мы обсудим в гл. IV. Термин «коцикл Маурера — Картана» был введен в работе [1.7] в связи с теорией представлений групп токов.

27) Скобки Пуассона (5.15) и (5.18)—(5.19) задают обычную пуассонову структуру на касательном расслоении  $T^*C(G)$  группы токов  $C(G)$ . Взаимотношение этих скобок Пуассона со скобками (5.15)—(5.17) представляет собой пример гамильтоновой редукции пространства  $T^*C(G)$  по действию группы  $G$ . По поводу понятия гамильтоновой редукции см., например, [1.2].

28) Вторая гамильтонова формулировка модели главного кирального поля в § 5 была введена и использовалась в работе [1.65].

29) Скобки Пуассона (5.59)—(5.61) для модели  $n$ -поля получаются как скобки Пуассона — Дирака из канонических скобок

$$\{\pi^a(x), \pi^b(y)\} = \{n^a(x), n^b(y)\} = 0, \quad \{\pi^a(x), n^b(y)\} = \delta_{ab}\delta(x-y) \quad (8.2)$$

и связей

$$\vec{n}^2 = 1, \quad \vec{\pi} \cdot \vec{n} = 0. \quad (8.3)$$

30) Роль неоднозначных функционалов типа (5.74) в качестве функционалов действия для моделей механики и теории поля была в общем виде выявлена С. П. Новиковым [1.38]. Функционал  $W(g)$  является характерным примером общей конструкции в [1.38], где была поставлена задача об исследовании модели с функционалом действия  $S(g) + cW(g)$ . Функционал импульса модели МГ из § 1 представляет собой другой интересный пример и играет роль не действия, а наблюдаемой.

31) С используемыми в § 5 простыми топологическими свойствами групп Ли можно, например, ознакомиться по монографии [1.1]. Формула (5.76) выводится из формулы Стокса дифференцированием по параметру  $s$ .

32) Многозначные функционалы действия в неявном виде появлялись в физической литературе в работе Дж. Весса, Б. Зумино [1.89] на конкретном примере модели главного кирального поля в четырехмерном пространстве-времени; геометрическое происхождение неоднозначности действия было выявлено Э. Виттеном в работе [1.92]. Отметим также, что в модели, рассмотренной в работах [1.5]—[1.6], фактически использовалось многозначное действие (5.78) в качестве кинетического члена. Эта модель представляет собой матричное обобщение модели SG и также интегрируется методом обратной задачи. Она описывает поле  $g(x, t)$  со значениями в группе  $SO(n)$ ; уравнения движения модели имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1} \right) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1}, \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1} \right] + [A, gBg^{-1}] = 0, \quad (8.4)$$

где  $A$  и  $B$  — вещественные диагональные матрицы, не зависящие от  $x$  и  $t$ . Матричная модель SG калибровочно эквивалентна модели главного кирального поля на группе  $SO(n)$  (см. [1.6]).

33) Связь модифицированных и обычных уравнений главного кирального поля была установлена в работе [1.9].

34) Геометрическая интерпретация симплектической структуры, связанной с модифицированными скобками Пуассона (5.90)—(5.92), дана в работе [1.82].

35) Появление двух независимых расширенных алгебр токов в модифицированной модели главного кирального поля с  $\alpha = \pm 1$  было впервые обнаружено в работе [1.93].

36) Метод задачи Римана для построения решений общего уравнения нулевой кривизны из § 6 и термин «процедура одевания» принадлежат В. Е. Захарову и А. Б. Шабату [1.23]. Обсуждение редукций в задаче Римана содержится в работе [1.78]. По поводу использования процедуры одева-

ния для построения солитонных решений различных уравнений см. [1.22], [1.25].

37) Схема построения общего локального решения уравнения нулевой кривизны, изложенная в § 7, принадлежит И. М. Кричеверу (см. [1.30]) и была первоначально применена им в работе [1.29] к решению модели главного кирального поля и модели SG в координатах светового конуса.

38) В схеме разделения, по существу использовалась группа  $GL(n)$  над кольцом аделей поля рациональных функций на  $\mathbb{C}$ . Полезность этого языка при изложении общих вопросов метода обратной задачи была проиллюстрирована в работе [1.52].

39) Задача Римана (7.5) обобщает на матричный случай процедуру Вейерштрасса выделения главных частей функции  $F(x, t, \lambda)$ , а задача Римана (7.18) представляет собой матричный аналог мультипликативной проблемы Кузена об определении функции по ее главным частям.

40) Построению интегралов движения для интегрируемых уравнений посвящена обширная литература: [1.10], [1.12]—[1.15], [1.21], [1.31], [1.43], [1.48]—[1.51], [1.80], [1.90]—[1.91].

41) В настоящей книге мы рассматриваем только интегрируемые уравнения с одной пространственной переменной. Метод обратной задачи применим также и к уравнениям с двумя пространственными переменными, наиболее известным из которых является уравнение Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = 3\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (8.5)$$

имеющее многочисленные физические приложения. Вспомогательная линейная задача для него выглядит следующим образом:

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - u(x, y) F = \lambda F \quad (8.6)$$

(см. [1.16], [1.20]). По поводу уравнения Кадомцева — Петвиашвили имеется обширная литература, из которой, помимо монографии [1.25], мы укажем работы [1.28], [1.58], [1.62], [1.68], [1.77].

## Г л а в а II

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

Здесь мы приведем полный список результатов по поводу фундаментальных непрерывных моделей — моделей МГ и SG. Для быстроубывающих граничных условий мы изучим отображение  $\mathcal{F}$  от начальных данных вспомогательной линейной задачи к коэффициентам перехода и дискретному спектру и дадим процедуру решения обратной задачи — построения отображения  $\mathcal{F}^{-1}$ . Мы покажем, что к этим моделям применим  $r$ -матричный подход, и на его основании убедимся, что отображение  $\mathcal{F}$  представляет собой каноническое преобразование к переменным типа действие — угол. Тем самым будет показано, что модели МГ и SG являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. Мы также дадим гамильтонову интерпретацию перехода к координатам светового конуса в модели SG. В заключение этой главы мы объясним, что в определенном смысле модель Л — Л является наиболее общей интегрируемой системой с двумерным вспомогательным пространством.

#### § 1. Вспомогательная линейная задача для модели МГ

Задача, упомянутая в заглавии, имеет вид (см. § I.1)

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\lambda}{2i} S(x) F, \quad (1.1)$$

где  $S(x)$  — эрмитова бесследовая матрица  $2 \times 2$ , удовлетворяющая условию

$$S^2(x) = I. \quad (1.2)$$

Мы будем рассматривать только быстроубывающий случай

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} S(x) = \sigma_3, \quad (1.3)$$

где граничные значения принимаются в смысле Шварца.

В § I.4 было показано, что модели МГ и НШ являются калибровочно эквивалентными. Именно, вспомогательная линейная задача (1.1) с помощью калибровочного преобразования

$$\tilde{F}(x, \lambda) = \Omega(x) F(x, \lambda) \quad (1.4)$$

приводится к виду, характерному для модели НШ:

$$\frac{d\tilde{F}}{dx} = \left( \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + U_0(x) \right) F, \quad (1.5)$$

где

$$U_0(x) = \frac{d\Omega}{dx}(x) \Omega^{-1}(x). \quad (1.6)$$

Унитарная матрица  $\Omega(x)$  определяется из представления

$$S(x) = \Omega^{-1}(x) \sigma_3 \Omega(x) \quad (1.7)$$

и условия антидиагональности матрицы  $U_0(x)$  в (1.6):

$$U_0(x) = i \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}(x) \\ \psi(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

что соответствует модели НШ в быстроубывающем случае при  $x = -1$  (см. § 1.4).

Таким образом, результаты по поводу вспомогательной линейной задачи (1.1) можно получить из исследования задачи (1.5), данного в гл. I части I. Однако, ввиду важности самой модели МГ, мы проведем независимое исследование задачи (1.1). При этом, разумеется, мы будем сравнивать соответствующие результаты.

В этом случае рассматриваемые объекты будем снабжать индексами НШ и МГ соответственно.

**1. Матрица перехода и решения Йоста.** Матрица перехода  $T(x, y, \lambda)$  определяется как решение дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием

$$T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I \quad (1.9)$$

и представляется в виде

$$T(x, y, \lambda) = \overleftarrow{\exp} \frac{\lambda}{2i} \int_y^x S(z) dz, \quad (1.10)$$

так что

$$T(x, y, \lambda)|_{\lambda=0} = I. \quad (1.11)$$

Матрица  $T(x, y, \lambda)$  унимодулярна и является *целой матрицей-функцией* переменной  $\lambda$ . Из соотношения

$$\bar{S}(x) = -\sigma_2 S(x) \sigma_2 \quad (1.12)$$

вытекает свойство инволюции

$$T(x, y, \lambda) = \sigma_2 \bar{T}(x, y, \bar{\lambda}) \sigma_2. \quad (1.13)$$

Имеет место формула связи

$$T^{МГ}(x, y, \lambda) = \Omega^{-1}(x) T^{НШ}(x, y, \lambda) \Omega(y). \quad (1.14)$$

При  $|x| \rightarrow \infty$  вспомогательная линейная задача (1.1) превращается в дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 E, \quad (1.15)$$

которое решается явно:

$$E(x, \lambda) = e^{\frac{\lambda x}{2i} \sigma_3}. \quad (1.16)$$

Решения Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  при вещественных  $\lambda$  определяются как пределы

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} T(x, y, \lambda) E(y, \lambda). \quad (1.17)$$

Матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)$  унимодулярны, удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1), соотношению инволюции

$$\bar{T}_{\pm}(x, \lambda) = \sigma_2 T_{\pm}(x, \lambda) \sigma_2, \quad (1.18)$$

обладают свойством

$$T_{\pm}(x, \lambda)|_{\lambda=0} = I \quad (1.19)$$

и при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответственно имеют асимптотики

$$T_{\pm}(x, \lambda) = E(x, \lambda) + o(1). \quad (1.20)$$

Альтернативно решения Йоста можно задать при помощи интегральных уравнений

$$T_{-}(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x E(x-y, \lambda) (S(y) - \sigma_3) T_{-}(y, \lambda) dy \quad (1.21)$$

и

$$T_{+}(x, \lambda) = E(x, \lambda) - \frac{\lambda}{2i} \int_x^{\infty} E(x-y, \lambda) (S(y) - \sigma_3) T_{+}(y, \lambda) dy. \quad (1.22)$$

При вещественных  $\lambda$  эти уравнения являются вольтерровскими и итерации для них абсолютно сходятся. Анализируя эти итерации, убеждаемся, что матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)$  допускают представления

$$T_{-}(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x \Gamma_{-}(x, y) E(y, \lambda) dy \quad (1.23)$$

и

$$T_{+}(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} \int_x^{\infty} \Gamma_{+}(x, y) E(y, \lambda) dy. \quad (1.24)$$

Подставляя эти интегральные представления в уравнение (1.1), получаем, что матрицы  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  удовлетворяют задачам Гурса — дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \Gamma_{\pm}}{\partial x}(x, y) + S(x) \frac{\partial \Gamma_{\pm}}{\partial y} \sigma_3 = 0 \quad (1.25)$$

при  $\pm(y-x) > 0$  и граничным условиям

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Gamma_{\pm}(x, y) = 0, \quad (1.26)$$

$$\mp (\Gamma_{\pm}(x, x) - S(x) \Gamma_{\pm}(x, x) \sigma_3) = S(x) - \sigma_3. \quad (1.27)$$

Имеют место формулы связи

$$T_{-}^{MG}(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) T_{+}^{HSH}(x, \lambda), \quad (1.28)$$

$$T_{+}^{MG}(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) T_{-}^{HSH}(x, \lambda) \Omega_0 \quad (1.29)$$

и

$$\Gamma_{-}^{HSH}(x, y) = -\Omega(x) \frac{\partial \Gamma_{-}^{MG}}{\partial y}(x, y) \sigma_3, \quad (1.30)$$

$$\Gamma_{+}^{HSH}(x, y) = -\Omega(x) \frac{\partial \Gamma_{+}^{MG}}{\partial y}(x, y) \Omega_0^{-1} \sigma_3. \quad (1.31)$$

Здесь матрица  $\Omega(x)$  считается нормированной следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Omega(x) = I. \quad (1.32)$$

Последнее условие вместе с уравнением (1.7) и условием антидиагональности матрицы  $U_0(x)$  определяет  $\Omega(x)$  однозначно. При этом имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Omega(x) = \Omega_0, \quad (1.33)$$

где  $\Omega_0$  — унитарная диагональная матрица. Соотношения (1.30) — (1.31) получаются из сопоставления интегральных представлений (1.23) — (1.24) и (1.5.10), (1.5.16) части I с использованием формул

$$\Gamma_{-}(x, x) = (\Omega^{-1}(x) - I) \sigma_3, \quad (1.34)$$

$$\Gamma_{+}(x, x) = (I - \Omega^{-1}(x) \Omega_0) \sigma_3, \quad (1.35)$$

которые вытекают из сравнения пределов обеих частей равенств (1.28) — (1.29) при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Отметим, что формулы (1.34) — (1.35) согласованы с граничными условиями (1.26) — (1.27), а соотношения (1.30) — (1.31) и дифференциальное уравнение (1.25) — с дифференциальным



уравнением (I.8.15) из части I для ядер  $\Gamma_{\pm}^{\text{HШ}}(x, y)$  (где следует положить  $U_{\pm} = 0$ ).

Сопоставляя формулы (1.19) и (1.28), получаем представление для матрицы  $\Omega(x)$ :

$$\Omega(x) = T_{-}^{\text{HШ}}(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0}. \quad (1.36)$$

Из интегральных представлений (1.23)—(1.24) и формул (1.34)—(1.35) следуют аналитические свойства столбцов  $T_{\pm}^{(l)}(x, \lambda)$ ,  $l=1, 2$ , решений Юста  $T_{\pm}(x, \lambda)$ . Столбцы  $T_{-}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{+}^{(2)}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ , а столбцы  $T_{+}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{-}^{(2)}(x, \lambda)$  — в нижнюю полуплоскость со следующими асимптотиками при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ :

$$e^{i\lambda x/2} T_{-}^{(1)}(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (1.37)$$

$$e^{-i\lambda x/2} T_{+}^{(2)}(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) \Omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (1.38)$$

при  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и

$$e^{i\lambda x/2} T_{+}^{(1)}(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) \Omega_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (1.39)$$

$$e^{-i\lambda x/2} T_{-}^{(2)}(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (1.40)$$

при  $\text{Im } \lambda \leq 0$ .

**2. Приведенная матрица монодромии и коэффициенты перехода.** Приведенная матрица монодромии  $T(\lambda)$  при вещественных  $\lambda$  определяется как отношение решений Юста

$$T(\lambda) = T_{+}^{-1}(x, \lambda) T_{-}(x, \lambda) \quad (1.41)$$

и может быть представлена в виде предела

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} E(-x, \lambda) T(x, y, \lambda) E(y, \lambda). \quad (1.42)$$

Матрица  $T(\lambda)$  унимодулярна, удовлетворяет соотношению инволюции

$$\bar{T}(\lambda) = \sigma_2 T(\lambda) \sigma_2 \quad (1.43)$$

и обладает свойством

$$T(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = I. \quad (1.44)$$

Она представляется в виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

где коэффициенты  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  (коэффициенты перехода непрерывного спектра) удовлетворяют соотношению нормировки

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1 \quad (1.46)$$

и условиям

$$a(0) = 1, \quad b(0) = 0. \quad (1.47)$$

Из (1.28) — (1.29) получаем формулу связи

$$T^{\text{МГ}}(\lambda) = \Omega_0^{-1} T^{\text{НШ}}(\lambda), \quad (1.48)$$

откуда имеем

$$\Omega_0^{-1} = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} T^{\text{МГ}}(\lambda). \quad (1.49)$$

Отсюда и из (1.44) получаем, в соответствии с (1.36):

$$T^{\text{НШ}}(\lambda)|_{\lambda=0} = \Omega_0, \quad (1.50)$$

так что

$$b^{\text{НШ}}(0) = 0, \quad (1.51)$$

а матрица  $\Omega_0$  имеет вид

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} a^{\text{НШ}}(0) & 0 \\ 0 & a^{-\text{НШ}}(0) \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

и унимодулярна. Расписывая соотношение (1.48), имеем

$$a^{\text{МГ}}(\lambda) = \frac{a^{\text{НШ}}(\lambda)}{a^{\text{НШ}}(0)}, \quad b^{\text{МГ}}(\lambda) = \frac{b^{\text{НШ}}(\lambda)}{a^{-\text{НШ}}(0)}. \quad (1.53)$$

Таким образом, при калибровочном преобразовании в рамках быстроубывающих граничных условий модель МГ порождает модель НШ, коэффициенты перехода которой удовлетворяют дополнительному условию (1.51).

Аналитические свойства коэффициентов перехода  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  аналогичны случаю модели НШ. Функция  $a(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $\lambda$  и при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеет асимптотику

$$a(\lambda) = \omega_0 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (1.54)$$

где  $\omega_0$  — верхний диагональный элемент матрицы  $\Omega_0^{-1}$ ,  $|\omega_0| = 1$ . Как и в случае модели НШ, на возможные нули функции  $a(\lambda)$  мы будем накладывать условие (А), означающее, что все нули  $\lambda_j$  простые и  $\text{Im } \lambda_j > 0$ . Отсюда следует, что их число  $n$  конечно и при вещественных  $\lambda$  выполняется строгое неравенство

$$|b(\lambda)| < 1. \quad (1.55)$$

Числа  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, j=1, \dots, n$ , образуют дискретный спектр вспомогательной линейной задачи (1.1). Соответствующие коэффици-

циенты перехода  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$  вводятся посредством соотношений

$$T_{-}^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_{+}^{(2)}(x, \lambda_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.56)$$

Имеют место формулы связи

$$\lambda_j^{\text{МГ}} = \lambda_j^{\text{НШ}}, \quad \gamma_j^{\text{МГ}} = \frac{1}{a^{\text{НШ}}(0)} \gamma_j^{\text{НШ}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.57)$$

Коэффициент  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца и, вообще говоря, не допускает аналитического продолжения с вещественной оси. В случае, когда для некоторого  $q > 0$  при  $|x| \geq q$  матрица  $S(x)$  совпадает со своей асимптотикой — матрицей  $\sigma_3$ , коэффициент  $b(\lambda)$  (а вместе с ним и  $a(\lambda)$ ) аналитически продолжается на всю комплексную плоскость. При этом

$$\gamma_j = b(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.58)$$

Функция  $a(\lambda)$  однозначно определяется по коэффициенту  $b(\lambda)$  и нулям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$a(\lambda) = \omega_0 \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda - i0} d\mu \right\}, \quad (1.59)$$

где

$$\omega_0 = \prod_{j=1}^n \frac{\bar{\lambda}_j}{\lambda_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu} d\mu \right\}. \quad (1.60)$$

Интеграл в правой части последней формулы сходится абсолютно в силу условия (1.47).

Приведенные выше результаты можно интерпретировать как описание отображения

$$\mathcal{F}: (S(x)) \mapsto (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, \quad j = 1, \dots, n). \quad (1.61)$$

В следующем параграфе мы убедимся, что отображение  $\mathcal{F}$  является обратимым, а в § 3 покажем, что оно определяет каноническое преобразование к переменным типа действие — угол.

**3. Временная динамика коэффициентов перехода.** Рассмотрим эволюцию коэффициентов перехода, когда матрица  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению МГ. Используя условие нулевой кривизны из § 1.1 и повторяя рассуждения из § 1.7 части I, убеждаемся, что имеют место эволюционные уравнения

$$\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t}(x, \lambda) = V(x, \lambda) T_{\pm}(x, \lambda) - \frac{i\lambda^2}{2} T_{\pm}(x, \lambda) \sigma_3 \quad (1.62)$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\lambda, t) = \frac{i\lambda^2}{2} [\sigma_3, T(\lambda, t)], \quad (1.63)$$

которые приводят к следующей зависимости коэффициентов перехода от времени  $t$ :

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = e^{-i\lambda t} b(\lambda, 0) \quad (1.64)$$

и

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad \gamma_j(t) = e^{-i\lambda_j^2 t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.65)$$

Эти формулы совпадают с временной динамикой для модели НШ и очевидным образом согласованы с соотношениями (1.53) и (1.57).

Как и в случае модели НШ, коэффициент  $a(\lambda)$  является производящей функцией интегралов движения. Закончим этот параграф описанием процедуры выделения семейства локальных интегралов движения. Под последними, как и раньше, мы понимаем функционалы вида

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (1.66)$$

где плотность  $f(x)$  является полиномом от матричных элементов матрицы  $S(x)$  и их производных в точке  $x$ .

**4. Локальные интегралы движения.** Мы начнем с описания асимптотического разложения матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Представим ее в виде

$$T(x, y, \lambda) = (I + W(x, \lambda)) \exp Z(x, y, \lambda) (I + W(y, \lambda))^{-1}, \quad (1.67)$$

где матрица  $W(x, \lambda)$  антидиагональна, а матрица  $Z(x, y, \lambda)$  диагональна и удовлетворяет условию

$$Z(x, y, \lambda)|_{x=y} = 0. \quad (1.68)$$

Здесь и ниже в асимптотических разложениях мы зачастую будем опускать члены вида  $O(|\lambda|^{-\infty})$ , определенные в § 1.3 части I. Подставляя разложение (1.67) в (1.1) и отделяя диагональную и антидиагональную части, приходим к дифференциальному уравнению типа Риккати для матрицы  $W(x, \lambda)$

$$\frac{dW}{dx} + i\lambda S_3 \sigma_3 W + \frac{i\lambda}{2} (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) - \frac{i\lambda}{2} W (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) W = 0. \quad (1.69)$$

Матрица  $Z(x, y, \lambda)$  дается формулой

$$Z(x, y, \lambda) = -\frac{i\lambda}{2} \int_y^x (S_3(x') \sigma_3 + (S_1(x') \sigma_1 + S_2(x') \sigma_2) W(x', \lambda)) dx'. \quad (1.70)$$

Отличие нашего случая от модели НШ состоит в том, что в асимптотическом разложении для матрицы  $W(x, \lambda)$  по степе-

ням  $\lambda^{-1}$  присутствует и постоянный член. Действительно, формула связи (1.14) показывает, что он образуется из антидиагональной части матрицы  $\Omega(x)$ . Разложение матрицы  $Z(x, y, \lambda)$  начинается со слагаемого  $\frac{\lambda}{2i}(x-y)\sigma_3$ , и в нем также присутствует постоянный член, связанный с диагональными частями матриц  $\Omega(x)$  и  $\Omega(y)$ .

Таким образом, асимптотическое разложение матрицы  $W(x, \lambda)$  имеет вид

$$W(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n}. \quad (1.71)$$

Подставляя (1.71) в (1.69), для коэффициентов  $W_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} iS_3\sigma_3 W_{n+1} - \frac{i}{2} W_0(S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) W_{n+1} - \frac{i}{2} W_{n+1}(S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) W_0 = \\ = -\frac{dW_n}{dx} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n W_k(S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) W_{n+1-k}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

начальное условие  $W_0(x)$  для которого определяется из уравнения

$$2S_3\sigma_3 W_0 - W_0(S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) W_0 + S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 = 0. \quad (1.73)$$

Вводя диагональную матрицу

$$Q = (S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) W_0, \quad (1.74)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\text{или} \quad Q^2 + 2S_3\sigma_3 Q + (S_3^2 - 1)I = 0, \quad (1.75)$$

$$(Q + S_3\sigma_3)^2 = I. \quad (1.76)$$

Уравнение (1.76) имеет четыре решения. Нужное нам решение однозначно определяется из условия

$$Q + S_3\sigma_3 = \sigma_3, \quad (1.77)$$

которое и приводит к появлению слагаемого  $\frac{\lambda}{2i}(x-y)\sigma_3$  в асимптотическом разложении для  $Z(x, y, \lambda)$ .

Матрица  $W_0(x)$  имеет вид

$$W_0(x) = i \frac{S_2(x)\sigma_1 - S_1(x)\sigma_2}{1 + S_3(x)}, \quad (1.78)$$

а рекуррентное соотношение (1.72) переписывается следующим образом:

$$W_{n+1} = i\sigma_3 \frac{dW_n}{dx} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n W_k(S_1\sigma_2 - S_2\sigma_1) W_{n+1-k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.79)$$

Коэффициенты  $W_n(x)$  являются антиэрмитовыми матрицами

$$W_n(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{w}_n(x) \\ w_n(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

В терминах функций  $w_n(x)$  рекуррентное соотношение (1.79) и начальное условие (1.80) принимают вид

$$w_{n+1}(x) = -i \frac{dw_n}{dx}(x) - \frac{S_1(x) - iS_2(x)}{2} \sum_{k=1}^n w_k(x) w_{n+1-k}(x), \quad (1.81)$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

и

$$w_0(x) = \frac{S_1(x) + iS_2(x)}{1 + S_3(x)}. \quad (1.82)$$

Из формул (1.70)–(1.72) и (1.80) получаем асимптотическое разложение для матрицы  $Z(x, y, \lambda)$ :

$$Z(x, y, \lambda) = \frac{\lambda}{2i}(x - y)\sigma_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(x, y)}{\lambda^n}, \quad (1.83)$$

где матрицы  $Z_n(x, y)$  имеют вид

$$Z_n(x, y) = \begin{pmatrix} z_n(x, y) & 0 \\ 0 & -\bar{z}_n(x, y) \end{pmatrix}, \quad (1.84)$$

а

$$z_n(x, y) = -\frac{i}{2} \int_y^x (S_1(x') - iS_2(x')) w_{n+1}(x') dx'. \quad (1.85)$$

Асимптотическое разложение приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  получается предельным переходом в соответствии с формулой (1.42). Учитывая, что матрица  $W(x, \lambda)$  исчезает при  $|x| \rightarrow \infty$ , мы получаем представление

$$T(\lambda) = e^{P(\lambda)} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (1.86)$$

где диагональная матрица  $P(\lambda)$  имеет вид

$$P(\lambda) = i \begin{pmatrix} p(\lambda) & 0 \\ 0 & -\bar{p}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.87)$$

а

$$p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} \quad (1.88)$$

и

$$I_n = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \frac{1}{i} z_n(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (S_1(x) - iS_2(x)) w_{n+1}(x) dx. \quad (1.89)$$

Подчеркнем, что свойство диагональности матрицы  $P(\lambda)$  в асимптотическом разложении (1.86) согласовано с тем, что коэффициент  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца и дает вклад  $O(|\lambda|^{-\infty})$ . Из унимодулярности матрицы  $T(\lambda)$  имеем

$$\operatorname{tr} P(\lambda) = 0, \quad (1.90)$$

так что коэффициенты  $I_n$  вещественны.

Итак, мы показали, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  справедливо разложение

$$\frac{1}{i} \ln a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}, \quad (1.91)$$

где вещественнозначные функционалы  $I_n$  даются формулами (1.89) и (1.81)—(1.82) и являются интегралами движения модели МГ. Импульс  $P$  и гамильтониан  $H$ , введенные в § 1.1, совпадают с первыми из них:

$$P = -2I_0, \quad H = -2I_1. \quad (1.92)$$

Функционалы  $I_n$  представляются в виде (1.66) и их плотности являются рациональными функциями от  $S_a(x)$ ,  $a=1, 2, 3$ , и их производных в точке  $x$ . Можно убедиться, что на самом деле плотности функционалов  $I_n$  при  $n \geq 1$  являются полиномами с точностью до полных производных от шварцевских функций. Таким образом  $\frac{1}{i} \ln a(\lambda)$  действительно является производящей функцией локальных интегралов движения.

Функционалы  $I_n$  выражаются через коэффициенты перехода и дискретный спектр вспомогательной линейной задачи (1.1). Для этого следует сравнить разложение (1.91) с дисперсионным соотношением (1.59)—(1.60). Раскладывая в (1.59) знаменатель  $\frac{1}{\mu - \lambda}$  в геометрическую прогрессию, приходим к формулам

$$I_0 = \arg \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |b(\lambda)|^2)}{\lambda} d\lambda - 2 \sum_{j=1}^n \arg \lambda_j \quad (1.93)$$

и

$$I_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{l-1} \ln(1 - |b(\lambda)|^2) d\lambda + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\lambda}_j^l - \lambda_j^l}{il}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (1.94)$$

— тождествам следов для модели МГ.

Последние равенства согласованы с формулами связи

$$I_l^{\text{МГ}} = -I_l^{\text{III}}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (1.95)$$

В § 1.1 мы отмечали, что модель МГ в случае периодических граничных условий имеет интегралы движения  $M_a$ ,  $a=1, 2, 3$ ,

играющие роль компонент полного спина — генераторов действия группы вращений. Эти интегралы движения не содержатся в семействе  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Более того, функционалы

$$M_a = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(x) dx, \quad a = 1, 2, \quad (1.96)$$

не являются допустимыми, так как соответствующие им гамильтоновы потоки нарушают быстроубывающие граничные условия (1.3) (сравни с регуляризованным функционалом заряда для модели НШ в случае конечной плотности в § 1.1 части I). Допустимым является регуляризованный функционал

$$M_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (S_3(x) - 1) dx. \quad (1.97)$$

Дадим для него выражение через коэффициенты перехода и дискретный спектр.

Для этого продифференцируем уравнение (1.1) по  $\lambda$ , обозначая соответствующую производную точкой:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial x} = \frac{\lambda}{2i} S \dot{T} + \frac{1}{2i} S T. \quad (1.98)$$

Для матрицы

$$\dot{T}(x, y) = \dot{T}(x, y, \lambda)|_{\lambda=0} \quad (1.99)$$

получаем

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2i} S(x), \quad \dot{T}(x, y)|_{x=y} = 0, \quad (1.100)$$

так что

$$\dot{T}(x, y) = \frac{1}{2i} \int_y^x S(x') dx', \quad (1.101)$$

откуда предельным переходом в согласии с формулой (1.42) получаем

$$\dot{T}(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (S(x) - \sigma_3) dx. \quad (1.102)$$

Отсюда имеем искомые выражения

$$M_3 = 2i \dot{a}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |b(\lambda)|^2)}{\lambda^2} d\lambda + 2i \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_j}{|\lambda_j|^2} \quad (1.103)$$



и

$$M_+ = \frac{M_1 + iM_2}{2} = 2ib(0), \quad M_- = \frac{M_1 - iM_2}{2} = -2i\bar{b}(0). \quad (1.104)$$

Сходимость интеграла в формуле (1.103) в окрестности точки  $\lambda=0$  обеспечивается условием (1.47).

В § 3, отправляясь от выражений (1.104), мы еще раз убедимся в недопустимости функционалов  $M_{\pm}$ .

Исследование вспомогательной линейной задачи и отображения  $\mathcal{F}$  для модели МГ на этом заканчивается.

## § 2. Обратная задача для модели МГ

Здесь мы опишем отображение  $\mathcal{F}^{-1}$ , т. е. дадим решение обратной задачи о восстановлении матрицы  $S(x)$  по коэффициентам перехода и дискретному спектру. Мы приведем два подхода, основанные на матричной задаче Римана и на формализме Гельфанда — Левитана — Марченко. В конце этого параграфа мы опишем динамику солитонов модели МГ.

**1. Задача Римана.** В ее основе лежит формула связи решений Йоста

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda)T(\lambda), \quad (2.1)$$

которая переписывается в виде

$$F_-(x, \lambda) = F_+(x, \lambda)G(\lambda), \quad (2.2)$$

где матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  составлены из столбцов решений  $T_{\pm}(x, \lambda)$  по формулам

$$F_+(x, \lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} (T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)), \quad (2.3)$$

$$F_-(x, \lambda) = (T_+^{(1)}(x, \lambda), T_-^{(2)}(x, \lambda)), \quad (2.4)$$

а матрица  $G(\lambda)$  выглядит следующим образом:

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Вводя матрицы

$$G_-(x, \lambda) = F_-(x, \lambda)E^{-1}(x, \lambda) \quad (2.6)$$

и

$$G_+(x, \lambda) = E(x, \lambda)F_+^{-1}(x, \lambda), \quad (2.7)$$

которые аналитически продолжаются в нижнюю и верхнюю полуплоскости переменной  $\lambda$  соответственно, из (2.2) получаем соотношение, лежащее в основе задачи Римана:

$$G_+(x, \lambda)G_-(x, \lambda) = G(x, \lambda), \quad (2.8)$$

где

$$G(x, \lambda) = E(x, \lambda)G(\lambda)E^{-1}(x, \lambda). \quad (2.9)$$

Перечислим свойства матриц  $G(x, \lambda)$  и  $G_{\pm}(x, \lambda)$ , которые вытекают из результатов § 1.

I. Матрица  $G(x, \lambda)$  эрмитова:

$$G^*(x, \lambda) = G(x, \lambda) \quad (2.10)$$

и удовлетворяет условиям

$$G(x, \lambda)|_{\lambda=0} = I, \quad (2.11)$$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} G(x, \lambda) = I, \quad (2.12)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

II. Матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  при каждом  $x$  принадлежат кольцам  $\mathbb{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$ , эрмитово сопряжены друг с другом:

$$G_+(x, \lambda) = G_-^*(x, \bar{\lambda}) \quad (2.13)$$

и имеют следующие пределы при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} G_{\pm}(x, \lambda) = \Omega_{\pm}(x). \quad (2.14)$$

Матрицы  $\Omega_{\pm}(x)$  унитарны и связаны соотношением

$$\Omega_+(x) = \Omega_-^*(x) = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega(x), \quad (2.15)$$

так что

$$S(x) = \Omega_+^{-1}(x) \sigma_3 \Omega_+(x) = \Omega_-(x) \sigma_3 \Omega_-^{-1}(x). \quad (2.16)$$

III. Матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  удовлетворяют условию

$$G_{\pm}(x, \lambda)|_{\lambda=0} = I. \quad (2.17)$$

IV. Матрицы  $G_+(x, \lambda)$  и  $G_-(x, \lambda)$  невырождены в своих областях аналитичности, за исключением точек  $\lambda = \lambda_j$  и  $\lambda = \bar{\lambda}_j$  соответственно, где

$$\text{Im } G_+(x, \lambda_j) = N_j^{(+)}(x) \quad (2.18)$$

и

$$\text{Ker } G_-(x, \bar{\lambda}_j) = N_j^{(-)}(x), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Здесь  $N_j^{(+)}(x)$  и  $N_j^{(-)}(x)$  — одномерные подпространства в  $\mathbb{C}^2$ , натянутые соответственно на векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_j e^{i\lambda_j x} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j e^{-i\bar{\lambda}_j x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что свойства матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  для моделей МГ и НШ отличаются лишь в условиях нормировки: они нормированы на  $I$  при  $\lambda = 0$  и при  $\lambda = \infty$  соответственно.

Перейдем теперь к решению обратной задачи. *Предположим, что заданы функции  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  и набор чисел  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ , со следующими свойствами.*

I'. *Функция  $b(\lambda)$  принадлежит пространству Шварца и удовлетворяет условиям*

$$b(0) = 0, \quad |b(\lambda)| < 1. \quad (2.20)$$

II'. *Среди чисел  $\lambda_j, \text{Im } \lambda_j > 0$ , нет совпадающих и  $\gamma_j \neq 0, j=1, \dots, n$ .*

Построим по ним матрицу  $G(x, \lambda)$ , набор подпространств  $N_j^{(\pm)}(x)$  и рассмотрим задачу Римана

$$G(x, \lambda) = G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda), \quad (2.21)$$

где матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  принадлежат кольцам  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$ , нормированы на  $I$  при  $\lambda=0$  и удовлетворяют условиям (2.18) — (2.19).

*Тогда утверждается следующее.*

III'. *Сформулированная задача Римана однозначно разрешима.*

IV'. *Матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$ , построенные по решениям  $G_{\pm}(x, \lambda)$  с помощью формул (2.6) — (2.7), удовлетворяют вспомогательной линейной задаче*

$$\frac{dF_{\pm}(x, \lambda)}{dx} = \frac{\lambda}{2i} S(x) F_{\pm}(x, \lambda), \quad (2.22)$$

где матрица  $S(x)$  дается формулами (2.14), (2.16).

V'. *Матрица  $S(x)$  эрмитова, бесследова, удовлетворяет условию  $S^2(x) = I$  и*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} S(x) = \sigma_3, \quad (2.23)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

VI'. *Функции  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ , где  $a(\lambda)$  дается формулами (1.59) — (1.60), играют роль коэффициентов перехода вспомогательной линейной задачи (2.22); ее дискретный спектр состоит из собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$  с коэффициентами перехода  $\gamma_1, \dots, \gamma_n; \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n$ . Решения  $G_{\pm}(x, \lambda)$  составлены из решений Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  вспомогательной линейной задачи по формулам (2.3) — (2.4) и (2.6) — (2.7).*

Прокомментируем доказательство этих утверждений.

Теорема единственности для задачи Римана стандартным образом получается из теоремы Лиувилля и условия нормировки (2.17) (см. соответствующие рассуждения в § II.2 части I). Отсюда, благодаря эрмитовости матрицы  $G(x, \lambda)$ , вытекает равенство (2.13).

Для доказательства теоремы существования достаточно воспользоваться преобразованием

$$\tilde{G}_+(x, \lambda) = G_+(x, \lambda) \Omega_+^{-1}(x), \quad (2.24)$$

$$\tilde{G}_-(x, \lambda) = \Omega_-^{-1}(x) G_-(x, \lambda), \quad (2.25)$$

где  $\Omega_{\pm}(x)$  — предельные значения матриц  $G_{\pm}(x, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Матрицы  $\Omega_{\pm}(x)$  в силу (2.13) удовлетворяют условию

$$\Omega_+(x) = \Omega_-^*(x) \quad (2.26)$$

и унитарны; поэтому матрицы  $\tilde{G}_{\pm}(x, \lambda)$  по-прежнему удовлетворяют уравнению (2.21) и условиям (2.18)—(2.19). Таким образом, это преобразование сводит задачу Римана с единичной нормировкой при  $\lambda=0$  к задаче Римана с единичной нормировкой при  $\lambda=\infty$ . Разрешимость последней задачи была доказана в § II.2 части I. Обратное преобразование дается формулами

$$G_+(x, \lambda) = \tilde{G}_+(x, \lambda) \tilde{G}_+^{-1}(x, 0), \quad (2.27)$$

$$G_-(x, \lambda) = \tilde{G}_-^{-1}(x, 0) \tilde{G}_-(x, \lambda). \quad (2.28)$$

Для вывода дифференциального уравнения в пункте II'' перепишем задачу Римана (2.21)

$$F_-(x, \lambda) = F_+(x, \lambda) G(\lambda) \quad (2.29)$$

и продифференцируем это равенство по  $x$ , записав результат в виде

$$U(x, \lambda) = \frac{\partial F_+(x, \lambda)}{\partial x} F_+^{-1}(x, \lambda) = \frac{\partial F_-(x, \lambda)}{\partial x} F_-^{-1}(x, \lambda). \quad (2.30)$$

Как и в § II.2 части I, убеждаемся, что  $U(x, \lambda)$  является целой функцией  $\lambda$ . Используя принадлежность функций  $E(x, \lambda) F_+^{-1}(x, \lambda)$  и  $F_-(x, \lambda) E^{-1}(x, \lambda)$  кольцам  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$ , асимптотики (2.14) и теорему Лиувилля, получаем, что

$$U(x, \lambda) = \frac{\lambda}{2i} S(x) + C(x), \quad (2.31)$$

где матрица  $S(x)$  дается формулами (2.16). Из условия (2.17) следует, что

$$C(x) = 0, \quad (2.32)$$

и мы получаем уравнение (2.22). Эрмитовость матрицы  $S(x)$  вытекает из унитарности матриц  $\Omega_{\pm}(x)$ .

Для доказательства оставшихся утверждений в пунктах III''—IV'' достаточно воспользоваться формулами связи для задач Римана моделей МГ и НШ:

$$G^{\text{НШ}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G^{\text{МГ}}(\lambda) \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

и

$$G_+^{\text{НШ}}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_+^{\text{МГ}}(x, \lambda) \Omega_+^{-1}(x) \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

$$G_-^{\text{НШ}}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega_-^{-1}(x) G_-^{\text{МГ}}(x, \lambda) \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где

$$\omega_0 = \bar{a}^{\text{НШ}}(0), \quad |\omega_0| = 1. \quad (2.36)$$

В заключение рассмотрения общих свойств задачи Римана укажем, что, как и в случае модели НШ, временная динамика коэффициентов перехода приводит к представлению нулевой кривизны модели МГ. Это дает доказательство того, что если коэффициенты перехода зависят от времени согласно формулам (1.64) — (1.65), то построенная по ним матрица  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению МГ.

**2. Формализм Гельфанда — Левитана — Марченко.** Он также основан на формуле (2.1), которая теперь переписывается в виде равенств

$$\frac{1}{\lambda a(\lambda)} T_-^{(1)}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} T_+^{(1)}(x, \lambda) + \frac{r(\lambda)}{\lambda} T_+^{(2)}(x, \lambda) \quad (2.37)$$

и

$$\frac{1}{\lambda a(\lambda)} T_+^{(2)}(x, \lambda) = \frac{\tilde{r}(\lambda)}{\lambda} T_-^{(1)}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} T_-^{(2)}(x, \lambda), \quad (2.38)$$

где

$$r(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad \tilde{r}(\lambda) = \frac{\bar{b}(\lambda)}{a(\lambda)}. \quad (2.39)$$

Переходя в этих соотношениях к преобразованию Фурье и используя интегральные представления (1.23) — (1.24), свойства аналитичности решений Юста и инволюции для ядер  $\Gamma_{\pm}(x, y)$

$$\bar{\Gamma}_{\pm}(x, y) = -\sigma_2 \Gamma_{\pm}(x, y) \sigma_2, \quad (2.40)$$

получаем интегральные уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко для правого и левого концов:

$$\Gamma_+(x, y) + \sigma_3 K(x+y) + \int_x^{\infty} \Gamma_+(x, z) K'(z+y) dz = 0 \quad (2.41)$$

и

$$\Gamma_-(x, y) + \sigma_3 \tilde{K}(x+y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, z) \tilde{K}'(z+y) dz = 0. \quad (2.42)$$

Здесь штрих обозначает производную по аргументу, а матрицы  $K(x)$  и  $\tilde{K}(x)$  антидиагональны и имеют вид

$$K(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{k}(x) \\ k(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{k}(x) \\ -\tilde{\bar{k}}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

где

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda x/2} d\lambda - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\lambda_j} e^{i\lambda_j x/2}, \quad (2.44)$$

$$\tilde{k}(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{r}(\lambda)}{\lambda} e^{-i\lambda x/2} d\lambda + \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{m}_j}{\lambda_j} e^{-i\lambda_j x/2}, \quad (2.45)$$

а

$$m_j = \frac{\gamma_j}{a(\lambda_j)}, \quad \tilde{m}_j = \frac{1}{\gamma_j \tilde{a}(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

и точка означает производную по  $\lambda$ . Сходимость интегралов в окрестности  $\lambda=0$  в этих формулах обеспечивается условием (2.20).

Отметим, поскольку функции  $\Omega_{\pm}(x)$  уже использовались нами в п. 1, то мы обозначаем ядра уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко буквами  $K(x)$ ,  $\tilde{K}(x)$ .

Имеют место формулы связи

$$\frac{dK^{\text{МГ}}(x)}{dx} = \Omega_0^{-1} K^{\text{НШ}}(x) \Omega_0^{\wedge} \quad (2.47)$$

и

$$\frac{d\tilde{K}^{\text{МГ}}(x)}{dx} = \tilde{K}^{\text{НШ}}(x), \quad (2.48)$$

где, конечно, матрицы  $K^{\text{НШ}}(x)$  и  $\tilde{K}^{\text{НШ}}(x)$  совпадают соответственно с матрицами  $\Omega(x)$  и  $\tilde{\Omega}(x)$  из формул (II.4.18) и (II.4.22) части I.

Матрица  $S(x)$  выражается через ядра  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  по формуле

$$S(x) = B_{\pm}(x) \sigma_3 B_{\pm}^{-1}(x), \quad (2.49)$$

где

$$B_{\pm}(x) = I \mp \Gamma_{\pm}(x, x) \sigma_3. \quad (2.50)$$

Опишем теперь процедуру решения обратной задачи.

Исходными данными являются функции  $r(\lambda)$ ,  $\tilde{r}(\lambda)$  и набор чисел  $\{\lambda_j; m_j, \tilde{m}_j, j=1, \dots, n\}$ , удовлетворяющие следующим условиям.

I. Функции  $r(\lambda)$ ,  $\tilde{r}(\lambda)$  являются функциями типа Шварца, удовлетворяют условию

$$r(0) = \tilde{r}(0) = 0 \quad (2.51)$$

и соотношению

$$|r(\lambda)| = |\tilde{r}(\lambda)|. \quad (2.52)$$

II. Имеет место формула связи

$$\frac{\tilde{r}(\lambda)}{r(\lambda)} = \frac{\bar{a}(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad (2.53)$$

где функция  $a(\lambda)$  дается выражением

$$a(\lambda) = \omega_0 \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + |r(\mu)|^2)}{\lambda - \mu + i0} d\mu \right\} \quad (2.54)$$

и

$$\omega_0 = \prod_{j=1}^n \frac{\bar{\lambda}_j}{\lambda_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + |r(\lambda)|^2)}{\lambda} d\lambda \right\}. \quad (2.55)$$

III. Парно неравные числа  $\lambda_j$  удовлетворяют условию  $\text{Im} \lambda_j > 0$ , а величины  $m_j$  и  $\tilde{m}_j$  удовлетворяют соотношениям

$$m_j \tilde{m}_j = \frac{1}{a^2(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.56)$$

Построим по этим данным ядра  $K(x)$ ,  $\tilde{K}(x)$  и рассмотрим интегральные уравнения (2.41) — (2.42). Справедливы следующие утверждения.

I'. Уравнения (2.41) и (2.42) однозначно разрешимы в пространствах  $L_1^{(2 \times 2)}(x, \infty)$  и  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  соответственно. Их решения — матрицы  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  — удовлетворяют инволюции (2.40) и являются функциями типа Шварца при  $x, y \rightarrow \pm \infty$ .

II'. Построенные по  $\Gamma_{\pm}(x, y)$  с помощью формул (1.23) — (1.24) матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dx} T_{\pm}(x, \lambda) = \frac{\lambda}{2i} S_{\pm}(x) T_{\pm}(x, \lambda), \quad (2.57)$$

где матрицы  $S_{\pm}(x)$  даются формулами (2.49) — (2.50).

III'. Матрицы  $S_{\pm}(x)$  эрмитовы, удовлетворяют условиям

$$\text{tr} S_{\pm}(x) = 0, \quad S_{\pm}^2(x) = I \quad (2.58)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} S_{\pm}(x) = \sigma_3, \quad (2.59)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

IV'. Имеет место формула согласования

$$S_+(x) = S_-(x) = S(x). \quad (2.60)$$

*V'*. Функции  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda) = a(\lambda)r(\lambda)$  являются коэффициентами перехода вспомогательной линейной задачи (2.57). Дискретный спектр этой задачи состоит из собственных значений  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  с коэффициентами перехода  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ , где  $\gamma_j = m_j a(\lambda_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Доказательство этих утверждений проводится по схеме из § II.7 части I. Поэтому мы ограничимся доказательством утверждения пункта II' и свойства унитарности матриц  $B_{\pm}(x)$ , которые являются специфическими для модели МГ.

Рассмотрим, для определенности, уравнения (2.42) и продифференцируем его по  $x$ . Используя формулы (2.47) и (2.50), получаем

$$\frac{\partial \Gamma_-^{\text{MG}}(x, y)}{\partial x} + B_-(x) \sigma_3 \tilde{K}^{\text{HШ}}(x + y) + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma_-^{\text{MG}}(x, z)}{\partial x} \tilde{K}^{\text{HШ}}(z + y) dz = 0. \quad (2.61)$$

Сравнивая (2.61) с уравнением для ядра  $\Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)$

$$\Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y) + \tilde{K}^{\text{HШ}}(x + y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, z) \tilde{K}^{\text{HШ}}(z + y) dz = 0 \quad (2.62)$$

(см. § II.4 части I), убеждаемся, что

$$\frac{\partial \Gamma_-^{\text{MG}}(x, y)}{\partial x} = B_-(x) \sigma_3 \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y). \quad (2.63)$$

Дифференцируя (2.42) по  $y$  и интегрируя в получившемся равенстве по частям, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_-^{\text{MG}}(x, y)}{\partial y} \sigma_3 - B_-(x) \tilde{K}^{\text{HШ}}(x + y) + \\ + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma_-^{\text{MG}}(x, z)}{\partial z} \sigma_3 \tilde{K}^{\text{HШ}}(z + y) dz = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Сравнивая его с (2.62), получаем

$$\frac{\partial \Gamma_-^{\text{MG}}(x, y)}{\partial y} \sigma_3 = -B_-(x) \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y). \quad (2.65)$$

Таким образом, матрица  $\Gamma_-^{\text{MG}}(x, y)$  удовлетворяет переопределенной системе уравнений (2.63) и (2.65). Условие совместности для нее имеет вид

$$B_-(x) \sigma_3 \frac{\partial \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)}{\partial y} = -\frac{dB_-(x)}{dx} \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y) \sigma_3 - B_-(x) \frac{\partial \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)}{\partial x} \sigma_3. \quad (2.66)$$



Сравним его с уравнением для матрицы  $\Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)$

$$\frac{\partial \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)}{\partial x} + \sigma_3 \frac{\partial \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)}{\partial y} \sigma_3 - U_0(x) \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y) = 0, \quad (2.67)$$

где

$$U_0(x) = \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, x) - \sigma_3 \Gamma_-^{\text{HШ}}(x, x) \sigma_3 \quad (2.68)$$

и имеет вид (1.8) (см. § II.8 части I, где следует положить  $U_- = 0$ ). Поскольку матрица  $\Gamma_-^{\text{HШ}}(x, y)$  не может быть вырожденной при всех  $y \leq x$  (иначе в силу инволюции  $\bar{\Gamma}_- = \sigma_2 \Gamma_- \sigma_2$  она исчезала бы тождественно), то в результате сравнения формул (2.66) и (2.67) приходим к дифференциальному уравнению для матрицы  $B_-(x)$ :

$$\frac{dB_-(x)}{dx} = -B_-(x)U_0(x). \quad (2.69)$$

Свойство унитарности матрицы  $B_-(x)$  следует теперь из антиэрмитовости матрицы  $U_0(x)$  и условия нормировки

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} B_-(x) = I, \quad (2.70)$$

вытекающего из (2.50).

Для вывода уравнения (2.57) достаточно заметить, что из уравнений (2.63) и (2.65) следует дифференциальное уравнение (1.25) для матрицы  $\Gamma_-^{\text{MГ}}(x, y)$ , которое и обеспечивает справедливость (2.57).

Случай матрицы  $\Gamma_+^{\text{MГ}}(x, y)$  рассматривается аналогично. На этом описание двух вариантов построения отображения  $\mathcal{F}^{-1}$  заканчивается.

**3. Солитонные решения.** Солитонные решения модели МГ отвечают случаю

$$b(\lambda) = 0. \quad (2.71)$$

Для таких данных как задача Римана, так и уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям и решаются явно. Приведем соответствующие результаты, основываясь на задаче Римана (2.21), в которой теперь

$$G(x, \lambda) = I. \quad (2.72)$$

Рассмотрим сначала случай  $n=1$ , когда имеется одна пара нулей  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ ,  $\text{Im } \lambda_0 > 0$ , и чисел  $\gamma_0, \bar{\gamma}_0, \gamma_0 \neq 0$ . Решение задачи Римана дается формулами

$$G_+(x, \lambda) = B(x, \lambda)B^{-1}(x, 0), \quad (2.73)$$

$$G_-(x, \lambda) = B(x, 0)B^{-1}(x, \lambda), \quad (2.74)$$

где  $B(x, \lambda)$  — матричный множитель Бляшке — Потапова, введенный в § II.2 части I:

$$B(x, \lambda) = I + \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} P(x), \quad (2.75)$$

а  $P(x)$  — проектор

$$P(x) = \frac{1}{1 + |\gamma_0(x)|^2} \begin{pmatrix} |\gamma_0(x)|^2 & \bar{\gamma}_0(x) \\ \gamma_0(x) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

и  $\gamma_0(x) = e^{i\lambda_0 x} \gamma_0$ . Соответствующая матрица  $S(x)$  выглядит следующим образом:

$$S(x) = B(x, 0) \sigma_3 B^{-1}(x, 0). \quad (2.77)$$

Таким образом, для компонент вектора  $\vec{S}(x) = (S_1(x), S_2(x), S_3(x))$  имеем выражение

$$S_3(x) = 1 - \frac{8 (\text{Im } \lambda_0)^2 |\gamma_0(x)|^2}{|\lambda_0|^2 (1 + |\gamma_0(x)|^2)^2}, \quad (2.78)$$

$$S_+(x) = \frac{S_1(x) + iS_2(x)}{2} = \frac{\gamma_0(x)}{|\lambda_0|^2} \frac{(|\lambda_0|^2 |\gamma_0(x)|^2 - |\lambda_0|^2 + \lambda_0^2 - \bar{\lambda}_0^2) \gamma_0(x) |\gamma_0(x)|^2}{(1 + |\gamma_0(x)|^2)^2}, \quad (2.79)$$

$$S_-(x) = \frac{S_1(x) - iS_2(x)}{2} = \bar{S}_+(x).$$

Рассмотрим эволюцию полученной матрицы  $S(x)$  по уравнению МГ. Для этого, в соответствии с формулами (1.65),  $\gamma_0(x)$  следует заменить на  $\gamma_0(x, t)$ :

$$\gamma_0(x, t) = e^{-i\lambda_0^2 t} \gamma_0(x). \quad (2.80)$$

Вводя обозначения

$$u = 2\text{Im } \lambda_0, \quad v = 2\text{Re } \lambda_0,$$

$$x_0 = \frac{1}{\text{Im } \lambda_0} \ln |\gamma_0|, \quad \varphi_0 = \arg \gamma_0, \quad (2.81)$$

перепишем (2.78) — (2.79) следующим образом:

$$S_3(x, t) = 1 - \frac{2u^2}{(u^2 + v^2) \text{ch}^2 \left\{ \frac{u}{2} (x - vt - x_0) \right\}}, \quad (2.82)$$

$$S_+(x, t) = \frac{ue^{i\left(\varphi_0 + \frac{vx}{2} + \frac{(u^2 - v^2)t}{4}\right)}}{(u^2 + v^2) \text{ch}^2 \left\{ \frac{u}{2} (x - vt - x_0) \right\}} \times \\ \times \left( -u \text{sh} \left\{ \frac{u}{2} (x - vt - x_0) \right\} + iv \text{ch} \left\{ \frac{u}{2} (x - vt - x_0) \right\} \right), \quad (2.83)$$

$$S_-(x, t) = \bar{S}_+(x, t).$$

Эти формулы показывают, что решение  $\vec{S}(x, t)$  представляет собой уединенную волну, локализованную вдоль направления

$$x(t) = x_0 + vt, \quad (2.84)$$

центр которой движется с постоянной скоростью  $v$ . Согласно определению, данному в § II.5 части I, такое решение следует называть *солитоном модели* МГ. Солитон  $\vec{S}(x, t)$  характеризуется четырьмя вещественными параметрами: скоростью  $v$ , координатой начального центра инерции  $x_0$ , начальной фазой  $\varphi_0$  и амплитудой  $A$  компоненты  $S_3(x, t)$

$$A = \frac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}. \quad (2.85)$$

Помимо поступательного движения, решение  $\vec{S}(x, t)$  осциллирует по  $x$  и  $t$  с частотами  $v/2$  и  $(u^2 - v^2)/4$  соответственно.

Перейдем теперь к общему случаю  $n$  пар нулей  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \text{Im } \lambda_j > 0$ , и чисел  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j, \gamma_j \neq 0, j = 1, \dots, n$ . Решение задачи Римана имеет вид

$$G_+(x, \lambda) = \Pi(x, \lambda) \Pi^{-1}(x, 0), \quad (2.86)$$

$$G_-(x, \lambda) = \Pi(x, 0) \Pi^{-1}(x, \lambda), \quad (2.87)$$

где  $\Pi(x, \lambda)$  — упорядоченное произведение множителей Бляшке — Потапова:

$$\Pi(x, \lambda) = \prod_{j=1}^n B_j(x, \lambda), \quad (2.88)$$

$$B_j(x, \lambda) = I + \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} P_j(x), \quad (2.89)$$

а проекторы  $P_j(x)$  однозначно определяются по набору чисел  $\gamma_l(x) = e^{i\lambda_l x} \gamma_l, l = 1, \dots, n$ . Процедура их вычисления была приведена в § II.2 и II.5 части I.

Матрица  $S(x)$  дается формулой

$$S(x) = \Pi(x, 0) \sigma_3 \Pi^{-1}(x, 0), \quad (2.90)$$

где матрица  $\Pi(x, 0)$  унитарна и удовлетворяет условию

$$\det \Pi(x, 0) = \bar{\omega}_0 = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\bar{\lambda}_j} \quad (2.91)$$

(см. § II.5 части I). Вводя обозначение

$$\Pi(x, 0) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

для компонент вектора  $\vec{S}(x)$  имеем

$$S_3 = \omega_0 (AD + BC), \quad S_+ = \omega_0 CD, \quad S_- = \bar{S}_+ = -\omega_0 AB. \quad (2.93)$$

В отличие от модели НШ, мы не будем приводить здесь более явные формулы для матрицы  $S(x)$ . Вместо этого сразу перейдем к описанию ее временной динамики. С этой целью, в соответствии с формулами (1.65), заменим  $\gamma_j(x)$  на  $\gamma_j(x, t)$ :

$$\gamma_j(x, t) = e^{-v_j t} \gamma_j(x), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.94)$$

Получающееся выражение  $S(x, t)$  называется *n-солитонным решением*. При  $t \rightarrow \pm \infty$  в ситуации общего положения оно распадается в сумму пространственно разделенных солитонов:

$$\vec{S}(x, t) = \sum_{j=1}^n \vec{S}_j^{(\pm)}(x, t) - (n-1) \vec{S}_0 + O(e^{-c|t|}). \quad (2.95)$$

Здесь  $\vec{S}_j^{(\pm)}(x, t)$  — солитоны с параметрами  $u_j, v_j, x_{0j}^{(\pm)}, \varphi_{0j}^{(\pm)}$ , определяемыми формулами (2.81) по данным  $\lambda_j, \gamma_j^{(\pm)}$ , где

$$\gamma_j^{(+)} = \gamma_j \prod_{v_k < v_j} \frac{\lambda_k}{\bar{\lambda}_k} \cdot \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{v_k > v_j} \frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \bar{\lambda}_k} \quad (2.96)$$

и

$$\gamma_j^{(-)} = \gamma_j \prod_{v_k < v_j} \frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \bar{\lambda}_k} \prod_{v_k > v_j} \frac{\lambda_k}{\bar{\lambda}_k} \cdot \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad (2.97)$$

а  $c = \frac{1}{2} \min_{j \neq k} u_j \min |v_j - v_k|$  и  $\vec{S}_0 = (0, 0, 1)$ . Ситуация общего положения означает, что все скорости  $v_j$  различны. Для доказательства этих формул достаточно воспользоваться результатами § II.5 части I. Действительно, там было показано, что при  $t \rightarrow \pm \infty$  на траектории  $C_j$

$$x - v_j t = \text{const} \quad (2.98)$$

матрица  $\Pi(x, t, \lambda)$  имеет асимптотику

$$\Pi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \prod_{\pm(v_k - v_j) > 0} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} & 0 \\ 0 & \prod_{\pm(v_k - v_j) < 0} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} \end{pmatrix} \tilde{B}_j^{(\pm)}(x, t, \lambda) + O(e^{-c|t|}), \quad (2.99)$$

где множитель Бляшке — Потапова  $\tilde{B}_j^{(\pm)}(x, t, \lambda)$  определяется по параметрам  $\lambda_j, \tilde{\gamma}_j^{(\pm)}$ :

$$\tilde{\gamma}_j^{(\pm)} = \gamma_j \prod_{\pm(v_j - v_k) > 0} \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{\pm(v_j - v_k) < 0} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}, \quad (2.100)$$

а на траекториях, отличных от  $C_j, j = 1, \dots, n$ , матрица  $\Pi(x, t, \lambda)$  диагональна с точностью до  $O(e^{-c|t|})$ . Полагая в (2.99)  $\lambda = 0$ , получаем искомые формулы (2.95) — (2.97).

Полученные формулы описывают теорию рассеяния солитонов модели МГ.

В процессе рассеяния меняются только координаты центров и фаз солитонов

$$x_{vj}^{(+)} = x_{vj}^{(-)} + \Delta x_{vj}, \quad \varphi_{vj}^{(+)} = \varphi_{vj}^{(-)} + \Delta \varphi_{vj}, \quad (2.101)$$

где

$$\Delta x_{vj} = \frac{2}{\text{Im} \lambda_j} \left( \sum_{v_k < v_j} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right| - \sum_{v_k > v_j} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right| \right) \quad (2.102)$$

и

$$\Delta \varphi_{vj} = 2 \left( \sum_{v_k < v_j} \left( \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} + 2 \arg \lambda_k \right) - \sum_{v_k > v_j} \left( \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} + 2 \arg \lambda_k \right) \right) \pmod{2\pi}. \quad (2.103)$$

Эти формулы отличаются от соответствующих выражений для модели НШ в § II.5 части I наличием дополнительных слагаемых  $\pm 2 \arg \lambda_k$ . Их интерпретация совершенно аналогична таковой для модели НШ в быстроубывающем случае.

### § 3. Гамильтонова формулировка модели МГ

Здесь мы покажем, что наша модель является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Доказательство будет проведено явно путем построения канонических переменных типа действие — угол. Для этого мы покажем, что скобки Пуассона модели МГ допускают  $r$ -матричную запись, и с ее помощью вычислим все скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра. Мы приведем явное выражение локальных интегралов движения в терминах переменных типа действие — угол, дадим интерпретацию возникающих независимых мод и выясним гамильтонов смысл калибровочного преобразования от модели МГ к модели НШ. В заключение этого параграфа мы рассмотрим процесс рассеяния солитонов с гамильтоновой точки зрения.

**1. Фундаментальные скобки Пуассона и  $r$ -матрица.** Рассмотрим основные скобки Пуассона модели МГ

$$\{S_a(x), S_b(y)\} = -\varepsilon_{abc} S_c(x) \delta(x - y) \quad (3.1)$$

(см. § I.1) и запишем их в терминах матрицы  $S(x) = \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha(x) \sigma_\alpha$ :

$$\{S(x) \otimes S(y)\} = - \sum_{a,b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} S_c(x) (\sigma_a \otimes \sigma_b) \delta(x - y). \quad (3.2)$$

Используя формулу умножения для матриц Паули

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \varepsilon_{abc} \sigma_c \quad (3.3)$$

и определение матрицы перестановки  $P$  из § III.1 части I

$$P = \frac{1}{2} \left( I \otimes I + \sum_{a=1}^3 \sigma_a \otimes \sigma_a \right), \quad (3.4)$$

матрицы  $\sigma_a \otimes \sigma_b - \sigma_b \otimes \sigma_a$ , участвующие в правой части (3.2), можно представить в виде

$$\sigma_a \otimes \sigma_b - \sigma_b \otimes \sigma_a = i \varepsilon_{abc} P (I \otimes \sigma_c - \sigma_c \otimes I). \quad (3.5)$$

Поэтому скобка Пуассона  $\{S(x) \otimes S(y)\}$  может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} \{S(x) \otimes S(y)\} &= iP(S(x) \otimes I - I \otimes S(x)) \delta(x-y) = \\ &= i[P, S(x) \otimes I] \delta(x-y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Получим теперь выражение для скобок Пуассона коэффициентов вспомогательной линейной задачи  $U(x, \lambda) = \frac{\lambda}{2i} S(x)$ . Для этого умножим обе части (3.6) на  $-\lambda\mu/4$  и преобразуем правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\mu}{4i} [P, S(x) \otimes I] &= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda-\mu)} [P, U(x, \lambda) \otimes I - U(x, \mu) \otimes I] = \\ &= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda-\mu)} [P, U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Окончательно отсюда получаем *фундаментальные скобки Пуассона для модели МГ*:

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x-y), \quad (3.8)$$

где

$$r(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda-\mu)} P. \quad (3.9)$$

Имеют место формулы связи

$$r^{MG}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\mu}{2} r^{PH}(\lambda - \mu) \quad (3.10)$$

или

$$r^{MG}(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2} r^{PH} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.11)$$

так что в переменных  $1/\lambda$  и  $1/\mu$   $r$ -матрица модели МГ зависит от разности аргументов.

В силу общего рассуждения в § III.1 части I из фундаментальных скобок Пуассона (3.8) получаем выражение для скобок Пуассона матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$ :

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad (3.12)$$

где  $y < x$ .

**2. Скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра.** Из соотношения (3.12) по аналогии с рассуждениями из § III.6 части I получаем выражения для скобок Пуассона решений Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  и приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$ :

$$\{T_{\pm}(x, \lambda) \otimes T_{\pm}(x, \mu)\} = \mp r(\lambda, \mu) T_{\pm}(x, \lambda) \otimes T_{\pm}(x, \mu) \pm \pm T_{\pm}(x, \lambda) \otimes T_{\pm}(x, \mu) r_{\pm}(\lambda, \mu), \quad (3.13)$$

$$\{T_{+}(x, \lambda) \otimes T_{-}(x, \mu)\} = 0, \quad (3.14)$$

$$\{T(\lambda) \otimes T(\mu)\} = r_{+}(\lambda, \mu) T(\lambda) \otimes T(\mu) - T(\lambda) \otimes T(\mu) r_{-}(\lambda, \mu). \quad (3.15)$$

Здесь

$$r_{\pm}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\mu}{2} \begin{pmatrix} \text{v. p. } \frac{1}{\lambda - \mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm \pi i \delta(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & \mp \pi i \delta(\lambda - \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{v. p. } \frac{1}{\lambda - \mu} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

так что имеют место формулы связи

$$r_{\pm}^{\text{MГ}}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\mu}{2} r_{\pm}^{\text{НШ}}(\lambda - \mu). \quad (3.17)$$

Отсюда получаем следующие выражения для скобок Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = \{a(\lambda), \bar{a}(\mu)\} = 0, \quad (3.18)$$

$$\{b(\lambda), b(\mu)\} = 0, \quad (3.19)$$

$$\{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = \pi i \lambda^2 |a(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \mu), \quad (3.20)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = -\frac{\lambda\mu}{2(\lambda - \mu + i0)} a(\lambda) b(\mu), \quad (3.21)$$

$$\{a(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda - \mu + i0)} a(\lambda) \bar{b}(\mu) \quad (3.22)$$

И

$$\{b(\lambda), \gamma_j\} = \{b(\lambda), \bar{\gamma}_j\} = 0, \quad (3.23)$$

$$\{b(\lambda), \lambda_j\} = \{b(\lambda), \bar{\lambda}_j\} = 0, \quad (3.24)$$

$$\{a(\lambda), \gamma_j\} = -\frac{\lambda \lambda_j}{2(\lambda - \lambda_j)} a(\lambda) \gamma_j, \quad (3.25)$$

$$\{a(\lambda), \bar{\gamma}_j\} = \frac{\lambda \bar{\lambda}_j}{2(\lambda - \bar{\lambda}_j)} a(\lambda) \bar{\gamma}_j, \quad (3.26)$$

а также

$$\{\lambda_j, \lambda_k\} = \{\lambda_j, \bar{\lambda}_k\} = 0, \quad (3.27)$$

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = \{\gamma_j, \bar{\gamma}_k\} = 0, \quad (3.28)$$

$$\{\lambda_j, \gamma_k\} = \frac{\lambda_j^2 \gamma_k}{2} \delta_{jk}, \quad (3.29)$$

$$\{\lambda_j, \bar{\gamma}_k\} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (3.30)$$

Таким образом, данные непрерывного и дискретного спектра находятся в инволюции, а неисчезающие скобки Пуассона данных обратной задачи  $(b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n)$  даются формулами (3.20) и (3.29).

Скобки Пуассона (3.18) показывают, что  $\ln a(\lambda)$  является производящей функцией инволютивных интегралов движения. В частности,

$$\{I_k, I_l\} = 0, \quad (3.31)$$

где  $I_l, l=0, 1, \dots$ , — локальные интегралы движения модели МГ, построенные в § 1. Кроме того, из (1.103) следует, что

$$\{M_3, I_l\} = 0, \quad (3.32)$$

где  $M_3$  — третья компонента полного спина.

**3. Канонические переменные типа действие — угол.** Как и в § III.7 части I, из приведенных выше формул получаем, что *переменные*

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi \lambda^2} \ln(1 - |b(\lambda)|^2), \quad \varphi(\lambda) = -\arg b(\lambda) \quad (3.33)$$

и

$$\bar{\rho}_j = -\frac{4 \operatorname{Re} \lambda_j}{|\lambda_j|^2}, \quad q_j = \ln |\gamma_j|, \quad (3.34)$$

$$\rho_j = \frac{4 \operatorname{Im} \lambda_j}{|\lambda_j|^2}, \quad \varphi_j = -\arg \gamma_j \quad (3.35)$$



являются каноническими, т. е. их неисчезающие скобки Пуассона имеют вид

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\mu)\} = \delta(\lambda - \mu) \quad (3.36)$$

и

$$\{\rho_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{\rho_j, \varphi_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (3.37)$$

Переменная  $\rho(\lambda)$  неотрицательна и несингулярна в силу условия (A) и равенства  $b(0) = 0$ .

Таким образом, отображение

$$\mathcal{F}: (\vec{S}(x)) \mapsto (b(\lambda), \bar{b}(\lambda), \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j) \quad (3.38)$$

является каноническим преобразованием, тривиализующим динамику модели МГ. Локальные интегралы движения  $I_l$  зависят только от переменных типа действие:

$$I_l = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{l+1} \rho(\lambda) d\lambda + \frac{(-1)^l}{il} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\rho_j^2 + \bar{\rho}_j^2}{4} \right)^{-l} ((\rho_j + i\rho_j)^l - (\rho_j - i\rho_j)^l), \quad (3.39)$$

где  $l=0, 1, \dots$  и при  $l=0$  сумму по дискретному спектру следует понимать в смысле правила Лопиталья.

Формулы (3.36)–(3.37) и (3.49) показывают, что все высшие уравнения МГ

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \{-2I_l, \vec{S}\} \quad (3.40)$$

являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами и их временная динамика задается следующими простыми формулами:

$$b(\lambda, t) = e^{-i\lambda^{l+1}t} b(\lambda, 0), \quad \lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad (3.41)$$

$$\gamma_j(t) = e^{-i\lambda_j^{l+1}t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n.$$

В частности, при  $l=1$  мы узнаем в них формулы (1.64)–(1.65) для уравнения МГ.

Формальные гамильтонианы  $M_1$  и  $M_2$  (см. (1.96)) зависят не только от переменных типа действие. Порождаемые ими уравнения движения, как нетрудно убедиться из (3.36) и (1.104), имеют вид

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial t} = \{M_{\pm}, \rho(\lambda)\} = \pm i\delta(\lambda) M_{\pm}, \quad (3.42)$$

где  $M_{\pm} = M_1 \pm iM_2$ . Очевидно, это уравнение выводит из класса функций  $\rho(\lambda)$ , гладких вплоть до  $\lambda=0$ , и, таким образом, функционалы  $M_{\pm}$  являются недопустимыми.

Рассмотрим теперь более подробно основные интегралы движения: импульс  $P$ , гамильтониан  $H$  и проекцию полного спина на  $M_3$ . Выражения для них получаются из формул (1.103) и (3.33) — (3.35), (3.39). Имеем

$$-M_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) d\lambda + \sum_{j=1}^n \rho_j, \quad (3.43)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \rho(\lambda) d\lambda - 4 \sum_{j=1}^n \arctg \frac{\rho_j}{p_j} \quad (3.44)$$

и

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda + 16 \sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{p_j^2 + \rho_j^2}. \quad (3.45)$$

Эти формулы представляют собой суммы по независимым модам. Первые слагаемые соответствуют волновому пакету мод непрерывного спектра с плотностью  $\rho(\lambda)$ . Мода с параметром  $\lambda$  описывает частицу с импульсом и энергией

$$p(\lambda) = \lambda, \quad h(\lambda) = \lambda^2, \quad (3.46)$$

связанными нерелятивистским законом дисперсии

$$h(p) = p^2. \quad (3.47)$$

Она имеет массу 1/2 и единичную проекцию спина на третью ось.

Моды дискретного спектра отвечают солитонам модели МГ. Импульс отдельной моды имеет вид

$$P = -4 \arctg \frac{\rho}{p} \quad (3.48)$$

и меняется в зоне Бриллюэна

$$|P| \leq 2\pi. \quad (3.49)$$

Ее энергии дается формулой

$$h = \frac{16\rho}{p^2 + \rho^2} \quad (3.50)$$

и связана с импульсом  $P$  и проекцией спина  $-M_3 = \rho$  законом дисперсии

$$h(P) = -\frac{16}{M_3} \sin^2 \frac{P}{4}. \quad (3.51)$$

Отметим, что импульс дискретной моды определен по  $\text{mod } 4\pi$  в соответствии с обсуждением в § 1.1.

Как и в случае модели НШ, дискретные моды модели МГ при сгущении  $\lambda_j$  к вещественной оси переходят в непрерывные моды. При этом закон дисперсии (3.51) переходит в (3.47) при естественной линеаризации.

В заключение этого пункта рассмотрим калибровочное преобразование от модели МГ к модели НШ с гамильтоновой точки зрения. Используя формулы связи (1.53), (1.57), имеем

$$\rho^{\text{МГ}}(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} \rho^{\text{НШ}}(\lambda), \quad \Phi^{\text{МГ}}(\lambda) = \Phi^{\text{НШ}}(\lambda) + \arg \omega_0, \quad (3.52)$$

$$\rho_j^{\text{МГ}} = \frac{2}{|\lambda_j|^2} \rho_j^{\text{НШ}}, \quad q_j^{\text{МГ}} = q_j^{\text{НШ}}, \quad (3.53)$$

$$\rho_j^{\text{МГ}} = \frac{2}{|\lambda_j|^2} \rho_j^{\text{НШ}}, \quad \Phi_j^{\text{МГ}} = \Phi_j^{\text{НШ}} + \arg \omega_0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.54)$$

где

$$\arg \omega_0 = -\arg a^{\text{НШ}}(0) = -\frac{1}{2} P^{\text{МГ}}. \quad (3.55)$$

Это сравнение показывает, что при калибровочном преобразовании  $\vec{S}(x) \mapsto (\psi(x), \bar{\psi}(x))$  стандартная пуассонова структура модели МГ переходит во вторую пуассонову структуру модели НШ из иерархии, описанной в § III.5 части I:

$$\{, \}^{\text{МГ}} = \frac{1}{2} \{, \}_2^{\text{НШ}}. \quad (3.56)$$

При этом, конечно, в гамильтониане также происходит сдвиг по иерархии, так что

$$H^{\text{МГ}} = 2N^{\text{НШ}}, \quad (3.57)$$

где  $N^{\text{НШ}}$  — заряд (число частиц) модели НШ. Последняя формула согласована с локальным результатом

$$\left( \frac{d\vec{S}(x)}{dx} \right)^2 = 4 |\psi(x)|^2, \quad (3.58)$$

доказанным в § I.4.

Таким образом, модель МГ можно рассматривать как модель НШ, реализованную при помощи отличных от стандартной пуассоновой структуры и гамильтониана.

**4. Рассеяние солитонов с гамильтоновой точки зрения.** Общее  $n$ -солитонное решение модели МГ параметризуется набором параметров  $\{p_j, q_j, \rho_j, \Phi_j, j=1, \dots, n\}$ . В ситуации общего положения (см. п. 3 § 2) при  $t \rightarrow \pm \infty$  оно распадается в сумму пространственно разделенных солитонов с параметрами  $p_j^{(\pm)}, q_j^{(\pm)}, \rho_j^{(\pm)}, \Phi_j^{(\pm)}$ , где

$$p_j^{(+)} = p_j^{(-)} = p_j, \quad \rho_j^{(+)} = \rho_j^{(-)} = \rho_j, \quad (3.59)$$

$$q_j^{(\pm)} = q_j \pm \Delta q_j, \quad \Phi_j^{(\pm)} = \Phi_j \pm \Delta \Phi_j \quad (3.60)$$

и

$$\Delta q_j = \sum_{k=j+1}^n \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right| - \sum_{k=1}^{j-1} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right|, \quad (3.61)$$

$$\Delta \varphi_j = \sum_{k=1}^{j-1} \left( \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} + 2 \arg \lambda_k \right) - \sum_{k=j+1}^n \left( \arg \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_k}{\lambda_j - \lambda_k} + 2 \arg \lambda_k \right). \quad (3.62)$$

При этом предполагается, что  $\operatorname{Re} \lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_2 > \dots > \operatorname{Re} \lambda_n$ .

*Преобразования*

$$W_{\pm} = \{p_j, q_j, \rho_j, \varphi_j; j = 1, \dots, n\} \rightarrow \{p_j^{(\pm)}, q_j^{(\pm)}, \rho_j^{(\pm)}, \varphi_j^{(\pm)}, j = 1, \dots, n\}, \quad (3.63)$$

описанные формулами (3.59) — (3.62), являются каноническими с производящими функциями  $\pm K_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n)$ :

$$q_j^{(\pm)} = q_j \pm \frac{\partial K_n}{\partial p_j}, \quad \varphi_j^{(\pm)} = \varphi_j \pm \frac{\partial K_n}{\partial \rho_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$K_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} K_2(p_j, \rho_k; \rho_j, \rho_k), \quad (3.64)$$

где

$$K_2(p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = \operatorname{Re} \{ (p_1 - p_2 + i\rho_1 + i\rho_2) \ln (p_1 - p_2 + i\rho_1 + i\rho_2) - (p_1 - p_2 + i\rho_1 - i\rho_2) \ln (p_1 - p_2 + i\rho_1 - i\rho_2) \} =$$

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \ln \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) - \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) \ln \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \right\}. \quad (3.65)$$

Это выражение для производящей функции  $K_2$  согласовано с формулой (III.8.29) из части I для модели НШ и отмечавшейся в п. 3 связью пуассоновых структур.

Как и в случае модели НШ, рассеяние солитонов в модели МГ описывается каноническим преобразованием. В координатах  $p_j, q_j^{(\pm)}, \rho_j, \varphi_j^{(\pm)}, j = 1, \dots, n$ , задающих асимптотическое движение при  $t \rightarrow \pm \infty$ , преобразование рассеяния  $S$

$$S: \{p_j, \rho_j, q_j^{(-)}, \varphi_j^{(-)}, j = 1, \dots, n\} \mapsto \{p_j, \rho_j, q_j^{(+)}, \varphi_j^{(+)}, j = 1, \dots, n\} \quad (3.66)$$

представляется в виде

$$S = W_+ W_-^{-1} \quad (3.67)$$

и очевидно является каноническим. Его производящая функция  $S_n$  — «классическая  $S$ -матрица»  $n$ -частичного рассеяния — имеет вид

$$S_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n) = 2K_n(p_1, \dots, p_n; \rho_1, \dots, \rho_n). \quad (3.68)$$

Таким образом, рассеяние солитонов в модели МГ дает еще один пример факторизованной теории рассеяния. Изложение модели МГ в быстроубывающем случае на этом заканчивается.

#### § 4. Вспомогательная линейная задача для модели SG

Здесь мы введем основные характеристики для вспомогательной линейной задачи модели SG (см. § I.1)

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F = \frac{1}{4i} \left( \beta \pi(x) \sigma_3 + m \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sin \frac{\beta \varphi(x)}{2} \sigma_1 + m \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \cos \frac{\beta \varphi(x)}{2} \sigma_2 \right) F, \quad (4.1)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$  — вещественнозначные функции,  $m$  и  $\beta$  — положительные константы. Мы будем рассматривать только быстроубывающий случай, когда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{2\pi}{\beta} Q, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi(x) = 0, \quad (4.2)$$

где  $Q$  — целое число (топологический заряд; см. § I.1) и граничные значения принимаются в смысле Шварца.

Отличие рассматриваемой вспомогательной линейной задачи состоит в том, что дивизор полюсов  $\mathfrak{A}$  матрицы  $U(x, \lambda)$  содержит две точки  $\lambda=0, \infty$ , а не одну  $\lambda=\infty$ , как это было ранее в моделях НШ и МГ. На это обстоятельство ниже мы будем обращать особое внимание.

**1. Матрица перехода и решения Йоста.** Матрица перехода  $T(x, y, \lambda)$  определяется как решение дифференциального уравнения (4.1) с начальным условием

$$T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I \quad (4.3)$$

и представляется в виде

$$T(x, y, \lambda) = \overleftarrow{\exp} \int_y^x U(z, \lambda) dz. \quad (4.4)$$

Матрица  $T(x, y, \lambda)$  унимодулярна, аналитична в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  и имеет существенные особенности в точках  $\lambda=\infty$  и  $\lambda=0$ . Из соотношений

$$\bar{U}(x, \bar{\lambda}) = \sigma_2 U(x, \lambda) \sigma_2 \quad (4.5)$$

и

$$U(x, -\lambda) = \sigma_3 U(x, \lambda) \sigma_3 \quad (4.6)$$

вытекают свойства инволюции для матрицы перехода

$$\bar{T}(x, y, \bar{\lambda}) = \sigma_2 T(x, y, \lambda) \sigma_2 \quad (4.7)$$

и

$$T(x, y, -\lambda) = \sigma_3 T(x, y, \lambda) \sigma_3. \quad (4.8)$$

Кроме того, матрица  $U(x, \lambda)$  инвариантна при замене  $\pi(x) \mapsto \pi(x)$ ,  $\varphi(x) \mapsto -\varphi(x)$ ,  $\lambda \mapsto -1/\lambda$ . Поэтому имеем соотношение

$$\hat{T}(x, y, -1/\lambda) = T(x, y, \lambda), \quad (4.9)$$

где через  $\hat{T}(x, y, \lambda)$  мы обозначили матрицу перехода для данных  $\hat{\pi}(x) = \pi(x)$  и  $\hat{\varphi}(x) = -\varphi(x)$ .

При  $x \rightarrow \pm\infty$  вспомогательная линейная задача (4.1) превращается в дифференциальные уравнения

$$\frac{dE}{dx} = U_{\pm}(\lambda)E, \quad (4.10)$$

где

$$U_{-}(\lambda) = \frac{1}{i} k_1(\lambda) \sigma_2, \quad U_{+}(\lambda) = (-1)^Q U_{-}(\lambda), \quad (4.11)$$

а  $k_1(\lambda) = \frac{m}{4} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right)$ . Эти уравнения решаются явно:

$$E_{-}(x, \lambda) = E(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} e^{i \frac{1}{2} k_1(\lambda) x \sigma_2}, \quad (4.12)$$

$$E_{+}(x, \lambda) = (-1)^{Q/2} E(x, \lambda) \quad (4.13)$$

при четном  $Q$  и

$$E_{+}(x, \lambda) = (-1)^{(Q-1)/2} i \sigma_3 E(x, \lambda) \quad (4.14)$$

при нечетном  $Q$ ; смысл такого выбора матрицы  $E_{+}(x, \lambda)$ , зависящей от значений  $Q \pmod{4}$ , будет ясен чуть ниже (сравни формулы (4.2), (4.21) и (4.23) — (4.24), (4.28)).

Матрицы  $E_{\pm}(x, \lambda)$  унимодулярны и обладают инволюциями

$$\bar{E}_{\pm}(x, \bar{\lambda}) = \sigma_2 E_{\pm}(x, \lambda) \sigma_2, \quad (4.15)$$

$$E_{\pm}(x, -\lambda) = -\sigma_3 E_{\pm}(x, \lambda) \sigma_2, \quad (4.16)$$

$$\bar{E}_{\pm}(x, -\bar{\lambda}) = -i \sigma_1 E_{\pm}(x, \lambda). \quad (4.17)$$

При вещественных  $\lambda \neq 0$  решения Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  определяются как пределы

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} T(x, y, \lambda) E_{\pm}(y, \lambda). \quad (4.18)$$

Матрицы  $T_{\pm}(x, \lambda)$  унимодулярны, удовлетворяют дифференциальному уравнению (4.1) и соотношениям инволюции

$$\bar{T}_{\pm}(x, \lambda) = \sigma_2 T_{\pm}(x, \lambda) \sigma_2, \quad (4.19)$$

$$\bar{T}_{\pm}(x, -\lambda) = -i \sigma_1 T_{\pm}(x, \lambda). \quad (4.20)$$

При  $x \rightarrow \pm\infty$  они соответственно имеют асимптотики

$$T_{\pm}(x, \lambda) = E_{\pm}(x, \lambda) + o(1). \quad (4.21)$$

Для описания аналитических свойств решений Йоста в окрестности  $\lambda = \infty$  удобно совершить калибровочное преобразование с тем, чтобы коэффициент при  $\lambda$  во вспомогательной линейной задаче стал независимым от  $x$ . Для этого запишем уравнение (4.1) в виде

$$\frac{dT_{\pm}}{dx} = \left( \frac{\beta\pi}{4i} \sigma_3 + \frac{m\lambda}{4i} \Omega \sigma_2 \Omega^{-1} - \frac{m}{4i\lambda} \Omega^{-1} \sigma_2 \Omega \right) T_{\pm}, \quad (4.22)$$

где

$$\Omega(x) = e^{\frac{i(\Phi(x))}{4} \sigma_3} \quad (4.23)$$

и положим

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \Omega(x) \tilde{T}_{\pm}(x, \lambda). \quad (4.24)$$

Матрицы  $\tilde{T}_{\pm}(x, \lambda)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{T}_{\pm}}{dx} = \tilde{U}(x, \lambda) \tilde{T}_{\pm}, \quad (4.25)$$

где

$$\tilde{U}(x, \lambda) = U^{\Omega^{-1}}(x, \lambda) = \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 + \frac{m\lambda}{4i} \sigma_2 - \frac{m}{4i\lambda} \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x) \quad (4.26)$$

и

$$\theta(x) = \pi(x) + \frac{d\varphi}{dx}(x). \quad (4.27)$$

Решения  $\tilde{T}_{\pm}(x, \lambda)$  имеют интегральные представления, аналогичные таковым для моделей НШ и МГ:

$$\tilde{T}_{+}(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_x^{\infty} \Gamma_{+}^{(1)}(x, y) E(y, \lambda) dy + \frac{1}{\lambda} \int_x^{\infty} \Gamma_{+}^{(2)}(x, y) E(y, \lambda) dy \quad (4.28)$$

и

$$\tilde{T}_{-}(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x \Gamma_{-}^{(1)}(x, y) E(y, \lambda) dy + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^x \Gamma_{-}^{(2)}(x, y) E(y, \lambda) dy. \quad (4.29)$$

Для ядер  $\Gamma_{\pm}^{(l)}(x, y)$ ,  $l=1, 2$ , справедливы инволюции

$$\bar{\Gamma}_{\pm}^{(1,2)} = \sigma_2 \Gamma_{\pm}^{(1,2)} \sigma_2 \quad (4.30)$$

и

$$\bar{\Gamma}_{\pm}^{(1)} = \sigma_1 \Gamma_{\pm}^{(1)} \sigma_1, \quad \bar{\Gamma}_{\pm}^{(2)} = -\sigma_1 \Gamma_{\pm}^{(2)} \sigma_1, \quad (4.31)$$

так что матрицы  $\Gamma_{\pm}^{(1)}$  диагональны, а  $\Gamma_{\pm}^{(2)}$  — антидиагональны. Они удовлетворяют следующим системам дифференциальных

уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \Gamma_{\pm}^{(1)}}{\partial x}(x, y) + \sigma_2 \frac{\partial \Gamma_{\pm}^{(1)}}{\partial y}(x, y) \sigma_2 - \frac{\beta \theta(x)}{4i} \sigma_3 \Gamma_{\pm}^{(1)}(x, y) - \\ - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x)) \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, y) = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, y)}{\partial x} + \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x) \frac{\partial \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, y)}{\partial y} \sigma_2 - \frac{\beta \theta(x)}{4i} \sigma_3 \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, y) - \\ - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x)) \Gamma_{\pm}^{(1)}(x, y) = 0 \quad (4.33)$$

при  $\pm(y-x) > 0$  и граничным условиям

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Gamma_{\pm}^{(l)}(x, y) = 0, \quad l=1, 2, \quad (4.34)$$

$$\Gamma_{\pm}^{(1)}(x, x) - \sigma_2 \Gamma_{\pm}^{(1)}(x, x) \sigma_2 = \mp \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3, \quad (4.35)$$

$$\Gamma_{\pm}^{(2)}(x, x) - \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x) \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, x) \sigma_2 = \pm \frac{m}{4i} (\Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x) - \sigma_2) \quad (4.36)$$

Формулы (4.32)–(4.36) получаются в результате подстановки интегральных представлений (4.28)–(4.29) в дифференциальное уравнение (4.25).

Связь между интегральными представлениями (4.28)–(4.29) и дифференциальными уравнениями (4.32)–(4.36) взаимно однозначна. Эти дифференциальные уравнения легко связать с вольтерровскими интегральными уравнениями и, тем самым, доказать существование решений Йоста и их интегральных представлений.

Для столбцов  $T_{\pm}^{(l)}(x, \lambda)$ ,  $l=1, 2$ , матриц  $T_{\pm}(x, \lambda)$  имеем следующие свойства: столбцы  $T_{-}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{+}^{(2)}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ , а столбцы  $T_{+}^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_{-}^{(2)}(x, \lambda)$  – в нижнюю полуплоскость и имеют асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$e^{-\frac{\lambda m x}{4i}} T_{-}^{(1)}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (4.37)$$

$$e^{\frac{\lambda m x}{4i}} T_{+}^{(2)}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega(x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (4.38)$$



при  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и

$$e^{-\frac{\lambda mx}{4i}} T_+^{(1)}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (4.39)$$

$$e^{\frac{\lambda mx}{4i}} T_-^{(2)}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega(x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (4.40)$$

при  $\text{Im } \lambda \leq 0$ .

Аналогично исследуется окрестность точки  $\lambda=0$ . Как видно из (4.22), для этого следовало бы совершить калибровочное преобразование с матрицей  $\Omega(x)$ . Однако вместо этого можно воспользоваться соотношением (4.9). В результате при  $\lambda \rightarrow 0$  имеем следующие асимптотики:

$$e^{\frac{mx}{4i\lambda}} T_-^{(1)}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + O(|\lambda|), \quad (4.41)$$

$$e^{-\frac{mx}{4i\lambda}} T_+^{(2)}(x, \lambda) = \frac{(-1)^Q}{\sqrt{2}} \Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + O(|\lambda|) \quad (4.42)$$

при  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и

$$e^{\frac{mx}{4i\lambda}} T_+^{(1)}(x, \lambda) = \frac{(-1)^Q}{\sqrt{2}} \Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + O(|\lambda|), \quad (4.43)$$

$$e^{-\frac{mx}{4i\lambda}} T_-^{(2)}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + O(|\lambda|) \quad (4.44)$$

при  $\text{Im } \lambda \leq 0$ .

Формулы (4.37)–(4.44) согласованы с асимптотиками (4.21) и граничными условиями (4.2). Инволюции (4.19)–(4.20) для комплексных значений  $\lambda$  принимают вид

$$\bar{T}_\pm^{(1)}(x, \lambda) = i\sigma_2 T_\pm^{(2)}(x, \bar{\lambda}), \quad (4.45)$$

$$\bar{T}_\pm^{(2)}(x, \lambda) = -i\sigma_2 T_\pm^{(1)}(x, \bar{\lambda}), \quad (4.46)$$

$$\bar{T}_\pm^{(1,2)}(x, -\bar{\lambda}) = -i\sigma_1 T_\pm^{(1,2)}(x, \lambda), \quad (4.47)$$

где  $\lambda$  лежит в соответствующих областях аналитичности.

**2. Приведенная матрица монодромии и коэффициенты перехода.** Приведенная матрица монодромии при вещественных  $\lambda \neq 0$  определяется как отношение решений Йоста

$$T(\lambda) = T_+^{-1}(x, \lambda) T_-(x, \lambda) \quad (4.48)$$

и может быть представлена в виде предела

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} E_+^{-1}(x, \lambda) T(x, y, \lambda) E_-(y, \lambda). \quad (4.49)$$

Матрица  $T(\lambda)$  унимодулярна и удовлетворяет соотношениям инволюции

$$\bar{T}(\lambda) = \sigma_2 T(\lambda) \sigma_2 \quad (4.50)$$

и

$$\bar{T}(-\lambda) = T(\lambda). \quad (4.51)$$

Она представляется в привычном виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

где коэффициенты перехода непрерывного спектра  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  удовлетворяют соотношению нормировки

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1 \quad (4.53)$$

и условиям

$$a(-\lambda) = \bar{a}(\lambda), \quad b(-\lambda) = \bar{b}(\lambda). \quad (4.54)$$

Обратим внимание на дополнительное свойство (4.54) коэффициентов перехода, которое появилось благодаря инволюции (4.8).

Для функции  $a(\lambda)$  имеем представление

$$a(\lambda) = \det(T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)), \quad (4.55)$$

из которого следует, что она аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и имеет асимптотики

$$a(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (4.56)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и

$$a(\lambda) = (-1)^2 + O(|\lambda|) \quad (4.57)$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ . Соотношение инволюции (4.54) для комплексных  $\lambda$  принимает вид

$$a(-\bar{\lambda}) = \bar{a}(\lambda). \quad (4.58)$$

Аналогичное представление для  $b(\lambda)$

$$b(\lambda) = \det(T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(1)}(x, \lambda)) \quad (4.59)$$

показывает, что функция  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца и при  $\lambda=0$  исчезает вместе со всеми своими производными. В общем случае  $b(\lambda)$  не допускает аналитического продолжения с вещественной оси. Такое продолжение возможно, если функции  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$  совпадают со своими асимптотиками при  $|x| > q$  для некоторого  $q > 0$ . При этом коэффициенты перехода  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  регулярны в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  и имеют существенные особенности в точках  $\lambda=0$  и  $\lambda=\infty$ .

Как и в случае моделей МГ и НШ, при  $\kappa < 0$  мы наложим условие (A), означающее, что

$$|b(\lambda)| < 1 \quad (4.60)$$

и нули  $\lambda_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , функции  $a(\lambda)$  (их конечное число) — простые. В силу (4.58) они расположены симметрично относительно мнимой оси и поэтому состоят из чисто мнимых нулей  $\lambda_j = i\kappa_j$ ,  $\kappa_j > 0$ ,  $j=1, \dots, n_1$ , и симметричных пар  $\lambda_k, \lambda_{k+n_2} = -\bar{\lambda}_k$ ,  $\text{Im } \lambda_k, \text{Re } \lambda_k > 0$ ,  $k=n_1+1, \dots, n_1+n_2$ , где  $n=n_1+2n_2$ .

Числа  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  образуют дискретный спектр вспомогательной линейной задачи (4.1). Соответствующие им коэффициенты перехода вводятся соотношениями

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j), \quad j=1, \dots, n. \quad (4.61)$$

При этом

$$\bar{\gamma}_j = \gamma_j, \quad j=1, \dots, n_1; \quad \bar{\gamma}_k = \gamma_{k+n_2}, \quad k=n_1+1, \dots, n_1+n_2. \quad (4.62)$$

В случае, когда  $b(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , имеем

$$\gamma_j = b(\lambda_j), \quad j=1, \dots, n. \quad (4.63)$$

Функция  $a(\lambda)$  однозначно определяется по коэффициенту  $b(\lambda)$  и нулям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Соответствующее дисперсионное соотношение имеет привычный вид

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_1} \frac{\lambda - i\kappa_j}{\lambda + i\kappa_j} \prod_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} \frac{\lambda + \bar{\lambda}_k}{\lambda + \lambda_k} \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda - i0} d\mu \right\}. \quad (4.64)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$a(0) = (-1)^{n_1}, \quad (4.65)$$

или

$$Q \equiv n_1 \pmod{2}. \quad (4.66)$$

Итак, мы описали отображение

$$\mathcal{F}: (\pi(x), \varphi(x)) \mapsto (b(\lambda), \bar{b}(\lambda); \kappa_j, \lambda_k, \bar{\lambda}_k, \gamma_j, \gamma_k, \bar{\gamma}_k, j=1, \dots, n_1; k=n_1+1, \dots, n_1+n_2) \quad (4.67)$$

от функций  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$  к коэффициентам перехода и дискретному спектру вспомогательной линейной задачи (4.1). В следующем параграфе мы убедимся, что отображение  $\mathcal{F}$  является обратимым, а в § 6 с его помощью построим каноническое преобразование к переменным типа действие — угол модели SG.

**3. Временная динамика коэффициентов перехода.** Здесь мы определим эволюцию коэффициентов перехода, когда участвующие во вспомогательной линейной задаче функции  $\varphi(x, t)$  и  $\pi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$  удовлетворяют уравнению SG. Для этого воспользуемся вытекающим из представления нулевой кривизны эволюционным уравнением для матрицы перехода

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, \lambda) = V(x, \lambda)T(x, y, \lambda) - T(x, y, \lambda)V(y, \lambda), \quad (4.68)$$

где

$$V(x, t, \lambda) = \frac{1}{4i} \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3 + \frac{m}{4i} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sin \frac{\beta \varphi}{2} \sigma_1 + \frac{m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \cos \frac{\beta \varphi}{2} \sigma_2 \quad (4.69)$$

(см. § 1.1). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} E_{\pm}^{-1}(x, \lambda) V(x, t, \lambda) E_{\pm}(x, \lambda) = \\ = \frac{(-1)^Q m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} E_{\pm}^{-1}(x, \lambda) \sigma_2 E_{\pm}(x, \lambda) = \frac{m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sigma_3, \end{aligned} \quad (4.70)$$

откуда, переходя в (4.68) к пределам при  $y \rightarrow \pm \infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , получаем эволюционные уравнения для решений Йоста

$$\frac{\partial T_{\pm}(x, \lambda)}{\partial t} = V(x, \lambda) T_{\pm}(x, \lambda) - \frac{m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) T_{\pm}(x, \lambda) \sigma_3 \quad (4.71)$$

и приведенной матрицы монодромии

$$\frac{\partial T(\lambda)}{\partial t} = \frac{m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) [\sigma_3, T(\lambda)]. \quad (4.72)$$

Таким образом, зависимость от  $t$  коэффициентов перехода дается следующими формулами:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = e^{\frac{mt}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) t} b(\lambda, 0), \quad (4.73)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad \gamma_j(t) = e^{\frac{mt}{2} \left( \lambda_j + \frac{1}{\lambda_j} \right) t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что условие исчезновения со всеми производными коэффициента  $b(\lambda)$  при  $\lambda=0$  согласовано с динамикой уравнения SG.

Как уже стало привычным, в быстроубывающем случае роль производящей функции интегралов движения играет коэффициент  $a(\lambda)$ . Закончим этот параграф описанием процедуры построения локальных интегралов движения.

4. **Локальные интегралы движения.** Особенность модели SG проявляется в том, что она имеет две серии локальных интегралов движения, получающиеся в результате асимптотического разложения приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$  в полюсах  $\lambda = \infty$  и  $\lambda = 0$ .

Начнем с асимптотического разложения матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Совершим калибровочное преобразование с матрицей  $\Omega^{-1}(x)$ :

$$T(x, y, \lambda) = \Omega(x) \tilde{T}(x, y, \lambda) \quad (4.74)$$

и представим матрицу  $\tilde{T}(x, y, \lambda)$  в виде

$$\tilde{T}(x, y, \lambda) = (I + W(x, \lambda)) \exp Z(x, y, \lambda) (I + W(y, \lambda))^{-1} \quad (4.75)$$

(mod  $O(|\lambda|^{-\infty})$ ), где матрица  $W(x, \lambda)$  антидиагональна, а  $Z(x, y, \lambda)$  — диагональна и удовлетворяет условию

$$Z(x, y, \lambda)|_{x=y} = 0. \quad (4.76)$$

Из уравнения (4.25) следует, что

$$Z(x, y, \lambda) = \frac{1}{4i} \int_y^x \left( \beta \theta(x') \sigma_3 + m \left( \lambda \sigma_2 - \frac{1}{\lambda} \sigma_2 e^{i\beta \Phi(x') \sigma_3} \right) W(x', \lambda) \right) dx', \quad (4.77)$$

а матрица  $W(x, \lambda)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\beta}{2i} \theta \sigma_3 W + \frac{m}{4i} \lambda (\sigma_2 - W \sigma_2 W) - \frac{m}{4i\lambda} (\sigma_2 e^{i\beta \Phi \sigma_3} - W \sigma_2 e^{i\beta \Phi \sigma_3} W). \quad (4.78)$$

Матрица  $W(x, \lambda)$  допускает асимптотическое разложение вида

$$W(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n}, \quad (4.79)$$

где

$$W_0(x) = i\sigma_1 \quad (4.80)$$

и

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x) = & \frac{2i\sigma_3}{m} \frac{dW_n(x)}{dx} - \frac{\beta \theta(x)}{m} W_n(x) + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n W_k(x) \sigma_1 W_{n+1-k}(x) - \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{n-1} W_k(x) \sigma_1 e^{i\beta \Phi(x) \sigma_3} W_{n-1-k}(x) - \\ & - \frac{i}{2} \sigma_1 e^{i\beta \Phi(x) \sigma_3} \delta_{n,1}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.81)$$

Соответствующее разложение для  $Z(x, y, \lambda)$  имеет вид

$$Z(x, y, \lambda) = \frac{m\lambda(x-y)}{4i} \sigma_3 + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(x, y)}{\lambda^n}, \quad (4.82)$$

где

$$Z_n(x, y) = \frac{m}{4} \int_y^x \sigma_2 (e^{i\beta\Phi(x', \sigma_3)} W_{n-1}(x') - W_{n+1}(x')) dx'. \quad (4.83)$$

Отметим, что выбор (4.80) матрицы  $W_0(x)$  согласован со слагаемым  $\frac{m\lambda(x-y)}{4i} \sigma_3$  в формуле (4.82).

В силу инволюции (4.7) матрицы  $W_n(x)$  и  $Z_n(x, y)$  имеют вид

$$W_n(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{w}_n(x) \\ w_n(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

и

$$Z_n(x, y) = \begin{pmatrix} z_n(x, y) & 0 \\ 0 & -\bar{z}_n(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

а соотношения (4.80)–(4.83) переписываются следующим образом:

$$w_0(x) = i, \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} w_{n+1}(x) = & \frac{2}{im} \frac{dw_n(x)}{dx} - \frac{\beta\theta(x)}{m} w_n(x) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k(x) \omega_{n+1-k}(x) - \\ & - \frac{i}{2} e^{-i\beta\Phi(x)} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(x) \omega_{n-k-1}(x) - \frac{i}{2} e^{i\beta\Phi(x)} \delta_{n,1}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$z_n(x, y) = \frac{im\lambda}{4} \int_y^x (w_{n+1}(x') - e^{-i\beta\Phi(x')} w_{n-1}(x')) dx'. \quad (4.88)$$

Для получения асимптотического разложения приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$  перейдем к пределам при  $y \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$  в соответствии с определением (4.49). Учитывая, что матрицы  $W_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , исчезают при  $|x| \rightarrow \infty$ , мы получаем представление

$$T(\lambda) = e^{P(\lambda)} + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (4.89)$$

где

$$P(\lambda) = i \begin{pmatrix} p(\lambda) & 0 \\ 0 & -\bar{p}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

а

$$p(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(x, y)}{\lambda^n} - \frac{m}{4\lambda} (x-y) \right). \quad (4.91)$$

Подчеркнем, что диагональность матрицы  $P(\lambda)$  согласована с тем, что  $b(\lambda)$  является функцией типа Шварца.

Из формул (4.86)–(4.88) получаем, что  $p(\lambda)$  допускает асимптотическое разложение

$$p(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}, \quad (4.92)$$

где

$$I_1 = -\frac{\beta^2}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \pi(x) + \frac{d\varphi}{dx}(x) \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta\varphi(x)) \right) dx \quad (4.93)$$

и для произвольного  $n > 1$

$$I_n = i \frac{m}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_{n+1}(x) - e^{-i\beta\varphi(x)} \omega_{n-1}(x)) dx. \quad (4.94)$$

В силу условия  $\text{tr} P(\lambda) = 0$ , вытекающего из унимодулярности матрицы  $T(\lambda)$ , величины  $I_n$  являются вещественными.

Сравнивая формулы (4.52) и (4.89)–(4.90), (4.92), получаем искомое разложение при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ :

$$\ln a(\lambda) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}, \quad (4.95)$$

определяющее первую серию локальных интегралов движения модели SG.

Для получения асимптотического разложения при  $\lambda \rightarrow 0$  достаточно воспользоваться свойством (4.9) (сравни с п. 1). В результате получаем

$$\ln a(\lambda) = i \sum_{n=0}^{\infty} I_{-n} \lambda^n, \quad (4.96)$$

где

$$I_0 \equiv \pi Q \pmod{2\pi}, \quad (4.97)$$

и

$$I_{-n}(\pi, \varphi) = (-1)^n I_n(\pi, -\varphi), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.98)$$

В частности, для импульса  $P$  и гамильтониана  $H$  модели SG имеем выражения

$$P = \frac{2m}{\beta^2} (I_{-1} + I_1) \quad (4.99)$$

и

$$H = \frac{2m}{\beta^2} (I_{-1} - I_1). \quad (4.100)$$

И, наконец, сравнивая асимптотические разложения (4.95) — (4.96) с дисперсионным соотношением (4.64), получаем тождества следов модели SG:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} l I_l = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - |b(\lambda)|^2) \lambda^{l-1} d\lambda + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\lambda}_j^l - \lambda_j^l}{il}, \quad l = -\infty, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Из условий (4.54) следует, что при четных  $l$  выражения  $I_l$  исчезают, так что соответствующие плотности в (4.94) являются полными производными от шварцевских функций. Поэтому окончательно тождества следов принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(2m+1) I_{;m+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln(1 - |b(\lambda)|^2) \lambda^{2m} d\lambda - \\ - \frac{(-1)^{m2}}{2m+1} \sum_{j=1}^{n_1} \kappa_j^{2m+1} + \frac{2}{2m+1} \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{\bar{\lambda}_k^{2m+1} - \lambda_k^{2m+1}}{i}, \quad m = -\infty, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Исследование вспомогательной линейной задачи модели SG и описание отображения  $\mathcal{F}$  на этом заканчивается.

## § 5. Обратная задача для модели SG

Здесь мы опишем отображение  $\mathcal{F}^{-1}$ , т. е. дадим решение обратной задачи: укажем процедуру восстановления функций  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$  по коэффициентам перехода и дискретному спектру. Мы приведем два подхода, основанные на матричной задаче Римана и формализме Гельфанда — Левитана — Марченко. В конце параграфа мы опишем динамику солитонов.

**1. Задача Римана.** В ее основе лежит формула связи решений Йоста при вещественных  $\lambda \neq 0$

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda), \quad (5.1)$$

которая переписывается в виде

$$F_-(x, \lambda) = F_+(x, \lambda) G(\lambda), \quad (5.2)$$

где матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  составлены из столбцов решений  $T_{\pm}(x, \lambda)$  по формулам

$$F_+(x, \lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} (T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)), \quad (5.3)$$

$$F_-(x, \lambda) = (T_+^{(1)}(x, \lambda), T_-^{(2)}(x, \lambda)), \quad (5.4)$$



а

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Матрицы  $F_+^{-1}(x, \lambda)$  и  $F_-(x, \lambda)$  допускают аналитическое продолжение в полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$  и  $\text{Im } \lambda < 0$  соответственно, однако в точках  $\lambda=0$  и  $\lambda=\infty$  они имеют существенные особенности (см. п. 1 § 4).

Вводя матрицы

$$G_+(x, \lambda) = e^{\frac{k_1(\lambda)x}{t} \sigma_3} F_+^{-1}(x, \lambda) \quad (5.6)$$

и

$$G_-(x, \lambda) = F_-(x, \lambda) e^{-\frac{k_1(\lambda)x}{t} \sigma_3}, \quad (5.7)$$

которые уже имеют конечные пределы при  $\lambda \rightarrow 0$  и  $|\lambda| \rightarrow \infty$  в соответствующих полуплоскостях, запишем соотношение (5.2) в виде

$$G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda) = G(x, \lambda), \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, \lambda) &= e^{\frac{k_1(\lambda)x}{t} \sigma_3} G(\lambda) e^{-\frac{k_1(\lambda)x}{t} \sigma_3} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -e^{-\frac{tm}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) x \frac{1}{b(\lambda)}} \\ -e^{\frac{tm}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) x} b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Соотношение (5.8) лежит в основе задачи Римана для модели SG. Прежде чем перейти к ее формулировке, перечислим свойства матриц  $G(x, \lambda)$  и  $G_{\pm}(x, \lambda)$ , вытекающие из результатов § 4.

I. Матрица  $G(x, \lambda)$  эрмитова

$$G^*(x, \lambda) = G(x, \lambda), \quad (5.10)$$

удовлетворяет инволюции

$$\bar{G}(x, -\lambda) = G(x, \lambda) \quad (5.11)$$

и условиям

$$G(x, \lambda)|_{\lambda=0} = I, \quad \left. \frac{\partial^k G(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.12)$$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} G(x, \lambda) = I, \quad (5.13)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

II. Матрицы  $G_+(x, \lambda)$  и  $G_-(x, \lambda)$  допускают аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответствен-

но и удовлетворяют инволюциям

$$G_+^*(x, \lambda) = G_-(x, \bar{\lambda}), \quad (5.14)$$

$$\bar{G}_+(x, -\bar{\lambda}) = iG_+(x, \lambda)\sigma_1, \quad (5.15)$$

$$\bar{G}_-(x, -\bar{\lambda}) = -i\sigma_1 G_-(x, \lambda). \quad (5.16)$$

III. В своих областях аналитичности матрицы  $G_{\pm}(x, \lambda)$  имеют асимптотики

$$G_+(x, \lambda) = \mathcal{E}^{-1}\Omega^{-1}(x) \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad (5.17)$$

$$G_-(x, \lambda) = \Omega(x) \mathcal{E} \left( I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \quad (5.18)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и

$$G_+(x, \lambda) = (-\sigma_3)^Q \mathcal{E}^{-1}\Omega(x) (I + O(|\lambda|)), \quad (5.19)$$

$$G_-(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) \mathcal{E} (-\sigma_3)^Q (I + O(|\lambda|)) \quad (5.20)$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ , где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

IV. Матрицы  $G_+(x, \lambda)$  и  $G_-(x, \lambda)$  невырождены в своих областях аналитичности, за исключением точек  $\lambda = \lambda_j$  и  $\lambda = \bar{\lambda}_j$  соответственно, где

$$\text{Im } G_+(x, \lambda_j) = N_j^{(+)}(x), \quad (5.22)$$

$$\text{Ker } G_-(x, \bar{\lambda}_j) = N_j^{(-)}(x), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.23)$$

Здесь  $N_j^{(+)}(x)$  и  $N_j^{(-)}(x)$  — одномерные подпространства в  $\mathbb{C}^2$ , натянутые соответственно на векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{\frac{im}{2} \left( \lambda_j - \frac{1}{\lambda_j} \right) x} \\ \gamma_j \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} e^{-\frac{im}{2} \left( \bar{\lambda}_j - \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \right) x} \\ \bar{\gamma}_j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подпространства  $N_j^{(\pm)}(x)$  удовлетворяют инволюциям

$$\bar{N}_j^{(\pm)}(x) = N_j^{(\pm)}(x) \quad (5.24)$$

для  $j = 1, \dots, n_1$  и

$$\bar{N}_{k+n_2}^{(\pm)}(x) = N_k^{(\pm)}(x) \quad (5.25)$$

для  $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ . Здесь черта означает операцию комплексного сопряжения в  $\mathbb{C}^2$ .

Отличие приведенных свойств I–IV от таковых для моделей НШ и МГ состоит в наличии двух точек нормировки:  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  (см. (5.17)–(5.20)) и дополнительной инволюции  $\lambda \rightarrow -\lambda$  (см. (5.11), (5.15)–(5.16), (5.24)–(5.25)).

Перейдем теперь к решению обратной задачи. *Предположим, что нам заданы положительные параметры  $m, \beta$ , функции  $b(\lambda)$ ,  $\bar{b}(\lambda)$  и набор чисел  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ , со следующими свойствами:*

I'. *Функция  $b(\lambda)$  принадлежит пространству Шварца, исчезает при  $\lambda=0$  вместе со всеми производными, удовлетворяет неравенству*

$$|b(\lambda)| < 1 \quad (5.26)$$

*и инволюции*

$$b(-\lambda) = \bar{b}(\lambda). \quad (5.27)$$

II'. *Среди чисел  $\lambda_j$  нет совпадающих, причем  $\lambda_j = i\kappa_j, \kappa_j > 0$  для  $j=1, \dots, n_1$  и  $\lambda_{k+n_2} = -\bar{\lambda}_k, \text{Im } \lambda_k, \text{Re } \lambda_k > 0, k=n_1+1, \dots, n_1+n_2$ , где  $n=n_1+2n_2$ . При этом  $\gamma_j = \bar{\gamma}_j \neq 0, j=1, \dots, n_1$ , и  $\gamma_{k+n_2} = \bar{\gamma}_k \neq 0, k=n_1+1, \dots, n_1+n_2$ .*

Построим по этим данным матрицу  $G(x, \lambda)$ , удовлетворяющую условиям I, и набор подпространств  $N_j^{(\pm)}(x)$ , удовлетворяющих (5.24)–(5.25). Задача Римана параметризуется переменной  $x$  и выглядит следующим образом:

$$G(x, \lambda) = G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda). \quad (5.28)$$

Здесь матрицы-функции  $G_{\pm}(x, \lambda)$  допускают аналитическое продолжение в области  $\pm \text{Im } \lambda \geq 0$ , удовлетворяют там условиям (5.22)–(5.23) и в точках  $\lambda=0$  и  $\lambda=\infty$  нормированы согласно (5.17)–(5.20), где  $Q$  заменено на  $n_i$ , а  $\Omega(x)$  — подлежащая определению непрерывная диагональная матрица-функция, причем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Omega(x) = I. \quad (5.29)$$

Таким образом, условия нормировки задачи Римана для модели SG нетривиальны: фиксируются не значения матриц-функций  $G_{\pm}(x, \lambda)$  в особых точках, а лишь оговаривается их матричная структура.

*Утверждается следующее.*

I''. *Сформулированная задача Римана однозначно разрешима.*

II''. *Матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$ , построенные по решениям  $G_{\pm}(x, \lambda)$  по формулам (5.6)–(5.7), удовлетворяют уравнению вспомогательной линейной задачи*

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\pm}(x, \lambda)}{dx} = & \frac{1}{4i} \left( \beta \pi(x) \sigma_3 + m \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sin \frac{\beta \varphi(x)}{2} \sigma_1 + \right. \\ & \left. + m \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \cos \frac{\beta \varphi(x)}{2} \sigma_2 \right) F_{\pm}(x, \lambda), \quad (5.30) \end{aligned}$$

где  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$  — вещественнозначные функции, причем

$$\Omega(x) = e^{\frac{i\varphi(x)}{\sigma_3}}. \quad (5.31)$$

III". Функции  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$  удовлетворяют быстроубывающим граничным условиям

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{2\pi}{\beta} Q, \quad (5.32)$$

где  $Q$  — целое число,  $Q \equiv n_1 \pmod{2}$ .

IV". Функции  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ , где  $a(\lambda)$  задается формулой (4.64), являются коэффициентами перехода вспомогательной линейной задачи (5.30); ее дискретный спектр состоит из значений  $\underline{\lambda}_1, \dots, \dots, \underline{\lambda}_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$  с коэффициентами перехода  $\gamma_1, \dots, \gamma_n; \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n$ . Матрицы  $F_{\pm}(x, \lambda)$  составлены из решений Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  вспомогательной линейной задачи по формулам (5.3)–(5.4).

Прокомментируем доказательства этих утверждений.

Теорема единственности задачи Римана доказывается при помощи теоремы Лиувилля. Именно, пусть  $G_{\pm}(x, \lambda)$  и  $\tilde{G}_{\pm}(x, \lambda)$  — два решения (5.28). При вещественных  $\lambda$  имеем

$$\Phi(x, \lambda) = G_+^{-1}(x, \lambda) \tilde{G}_+(x, \lambda) = G_-(x, \lambda) \tilde{G}_-^{-1}(x, \lambda). \quad (5.33)$$

Стандартным образом убеждаемся, что функция  $\Phi(x, \lambda)$  не имеет особенностей при  $\lambda = \lambda_j, \bar{\lambda}_j$  и поэтому является целой. Из (5.17)–(5.20) следует, что

$$\Phi(x, \lambda)|_{\lambda=0} = \Omega^{-1}(x) \tilde{\Omega}(x) \quad (5.34)$$

и

$$\Phi(x, \lambda)|_{\lambda=\infty} = \Omega(x) \tilde{\Omega}^{-1}(x), \quad (5.35)$$

откуда (теорема Лиувилля)

$$\Phi(x, \lambda) = \Omega^{-1}(x) \tilde{\Omega}(x) = \Omega(x) \tilde{\Omega}^{-1}(x), \quad (5.36)$$

т. е.

$$\Omega^2(x) = \tilde{\Omega}^2(x). \quad (5.37)$$

Используя (5.29) и диагональность, непрерывность и невырожденность матриц  $\Omega(x)$ ,  $\tilde{\Omega}(x)$ , заключаем, что

$$\Omega(x) = \tilde{\Omega}(x), \quad (5.38)$$

откуда

$$G_{\pm}(x, \lambda) = \tilde{G}_{\pm}(x, \lambda). \quad (5.39)$$

Отметим, что при доказательстве мы использовали условие (5.29), т. е. рассматривали сразу все семейство задач Римана (5.28), параметризованное переменной  $x$ . При фиксированном

$x$  задача Римана типа (5.28) очевидно имеет, наряду с  $G_{\pm}(x, \lambda)$ , и решение  $-G_{\pm}(x, \lambda)$ .

Для доказательства теоремы существования мы покажем, как наша задача Римана сводится к задаче Римана с единичной нормировкой при  $\lambda = \infty$ , изученной в § II.2 части I.

Пусть матрицы  $\hat{G}_{\pm}(x, \lambda)$  дают решение следующей задачи Римана:

$$G(x, \lambda) = \hat{G}_{+}(x, \lambda) \hat{G}_{-}(x, \lambda), \quad (5.40)$$

где  $G(x, \lambda)$  — матрица из задачи Римана (5.28) и

а) матрицы  $\hat{G}_{\pm}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются в полуплоскости  $\pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0$  и нормированы на  $I$  при  $\lambda = \infty$

$$\hat{G}_{\pm}(x, \lambda) = I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right); \quad (5.41)$$

б) матрицы  $\hat{G}_{\pm}(x, \lambda)$  невырождены всюду, за исключением точек  $\lambda = \lambda_j$  и  $\lambda = \bar{\lambda}_j$  соответственно, где

$$\operatorname{Im} \hat{G}_{+}(x, \lambda_j) = N_j^{(+)}(x), \quad (5.42)$$

$$\operatorname{Ker} \hat{G}_{-}(x, \bar{\lambda}_j) = N_j^{(-)}(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.43)$$

а числа  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  и подпространства  $N_j^{(\pm)}(x)$  взяты из задачи Римана (5.28).

В § II.2 части I мы показали, что сформулированная задача Римана однозначно разрешима.

Введем матрицу  $\Omega^2(x)$

$$\Omega^2(x) = \mathcal{G}(-\sigma_3)^n \hat{G}_{+}(x, 0) \mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}(-\sigma_3)^n \hat{G}_{-}^{-1}(x, 0) \mathcal{G}^{-1} \quad (5.44)$$

и убедимся, что она диагональна. Действительно, инволюции

$$\hat{G}_{+}^{*}(x, \bar{\lambda}) = \hat{G}_{-}(x, \lambda) \quad (5.45)$$

и

$$\bar{\hat{G}}_{\pm}(x, -\bar{\lambda}) = \hat{G}_{\pm}(x, \lambda) \quad (5.46)$$

вместе с условием

$$\hat{G}_{+}(x, 0) \hat{G}_{-}(x, 0) = I \quad (5.47)$$

означают, что матрица  $\hat{G}_{+}(x, 0)$  унитарна и вещественна, т. е. ортогональна. Ее определитель дается формулой

$$\det \hat{G}_{+}(x, 0) = a(0) = (-1)^n, \quad (5.48)$$

так что матрица  $(-\sigma_3)^n \hat{G}_{+}(x, 0)$  унимодулярна, т. е.

$$(-\sigma_3)^n \hat{G}_{+}(x, 0) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(x) & -\sin \alpha(x) \\ \sin \alpha(x) & \cos \alpha(x) \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

и специальный вид матрицы  $\mathcal{E}$  приводит к тому, что

$$\Omega^2(x) = e^{i\alpha(x)\sigma_3}. \quad (5.50)$$

Рассмотрим теперь асимптотику матрицы  $\Omega^2(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Аналогично рассуждениям в § II.2 части I можно показать, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{G}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\frac{\bar{b}(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-\frac{im}{2}(\lambda - \frac{1}{\lambda})x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

откуда, в частности, получаем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{G}(x, 0) = (-\sigma_3)^{n_1}, \quad (5.52)$$

так что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Omega^2(x) = I. \quad (5.53)$$

Поэтому матрица  $\Omega(x)$  однозначно определяется как непрерывный, диагональный квадратный корень из матрицы  $\Omega^2(x)$ , удовлетворяющий условию (5.29).

Теперь очевидно, что матрицы

$$G_+(x, \lambda) = \hat{G}_+(x, \lambda) \mathcal{E}^{-1} \Omega^{-1}(x), \quad (5.54)$$

$$G_-(x, \lambda) = \Omega(x) \mathcal{E} \hat{G}_-(x, \lambda) \quad (5.55)$$

дают решение задачи Римана для модели SG в терминах задачи Римана со стандартной нормировкой.

Для вывода дифференциального уравнения вспомогательной линейной задачи из п. II'' перепишем задачу Римана (5.28) в виде (5.2) и продифференцируем его по  $x$ . Мы получим, что

$$U(x, \lambda) = \frac{\partial F_+(x, \lambda)}{\partial x} F_+^{-1}(x, \lambda) = \frac{\partial F_-(x, \lambda)}{\partial x} F_-^{-1}(x, \lambda). \quad (5.56)$$

Стандартным образом заключаем отсюда, что  $U(x, \lambda)$  является целой матрицей-функцией. Из (5.17)–(5.20) следует, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$U(x, \lambda) = \frac{m\lambda}{4i} \Omega(x) \sigma_2 \Omega^{-1}(x) + C_0(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad (5.57)$$

и при  $\lambda \rightarrow 0$

$$U(x, \lambda) = -\frac{m}{4i\lambda} \Omega^{-1}(x) \sigma_2 \Omega(x) + \tilde{C}_0(x) + O(|\lambda|). \quad (5.58)$$

Отсюда на основании теоремы Лиувилля заключаем, что

$$U(x, \lambda) = C(x) + \frac{m\lambda}{4i} \Omega(x) \sigma_2 \Omega^{-1}(x) - \frac{m}{4i\lambda} \Omega^{-1}(x) \sigma_2 \Omega(x), \quad (5.59)$$

где

$$C(x) = C_0(x) = \bar{C}_0(x). \quad (5.60)$$

Определим теперь матричную структуру матрицы  $C(x)$ . Из (5.10)–(5.11) и теоремы единственности получаем, что для решений  $G_{\pm}(x, \lambda)$  справедливы инволюции (5.14)–(5.15), откуда

$$U^*(x, \lambda) = -U(x, \bar{\lambda}), \quad (5.61)$$

$$\bar{U}(x, -\bar{\lambda}) = \sigma_1 U(x, \lambda) \sigma_1, \quad (5.62)$$

так что

$$C^*(x) = -C(x). \quad (5.63)$$

и

$$\bar{C}(x) = \sigma_1 C(x) \sigma_1. \quad (5.64)$$

Это позволяет ввести вещественнозначную функцию  $\pi(x)$  по формуле

$$C(x) = \frac{\beta}{4i} \pi(x) \sigma_3. \quad (5.65)$$

Полагая  $\varphi(x) = \frac{2}{\beta} \alpha(x)$ , убеждаемся, что матрица  $U(x, \lambda)$  принимает вид (5.30).

Доказательство утверждений п. III''–IV'' проводится аналогично § II.2 части I.

Как и в случае моделей НШ и МГ, временная динамика (4.73) коэффициентов перехода приводит к представлению нулевой кривизны модели SG. Это доказывает, что построенные по таким коэффициентам перехода функции  $\varphi(x, t)$  и  $\pi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$  удовлетворяют уравнению SG.

**2. Формализм Гельфанда – Левитана – Марченко.** Этот подход к решению обратной задачи также основан на формуле (5.1), которая теперь переписывается в виде равенств

$$\frac{1}{a(\lambda)} T_{-}^{(1)}(x, \lambda) = T_{+}^{(1)}(x, \lambda) + r(\lambda) T_{+}^{(2)}(x, \lambda) \quad (5.66)$$

и

$$\frac{1}{a(\lambda)} T_{+}^{(2)}(x, \lambda) = \tilde{r}(\lambda) T_{-}^{(1)}(x, \lambda) + T_{-}^{(2)}(x, \lambda), \quad (5.67)$$

где

$$r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda), \quad \tilde{r}(\lambda) = \bar{b}(\lambda)/a(\lambda). \quad (5.68)$$

Вместо преобразования Фурье, использовавшегося для моделей НШ и МГ в быстроубывающем случае, мы воспользуемся интегральными преобразованиями, порождаемыми ядром

$\exp\left\{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x\right\}$ , которые уже встречались нам при исследовании случая конечной плотности для модели НШ (см. § II.7 части I). Соответствующие соотношения полноты имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x} d\lambda = \frac{8\pi}{m} \delta(x), \quad (5.69)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x} \frac{d\lambda}{\lambda} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{8\pi}{m} \delta(x). \quad (5.70)$$

Для вывода системы интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко для правого конца рассмотрим соотношение (5.66), записанное в терминах матриц  $\bar{T}_{\pm}(x, \lambda)$ , и совершим следующие преобразования. Подставим в него представления (4.28) — (4.29), умножим обе части получившегося равенства последовательно на  $\exp\left\{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)y\right\}$ ,  $\frac{1}{\lambda} \exp\left\{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)y\right\}$  и проинтегрируем по  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Используя формулы (5.69) — (5.70), свойства аналитичности решений Йоста и инволюции (4.30) — (4.31), окончательно получаем:

$$\Gamma_{+}^{(1)}(x, y) + K_{+}^{(0)}(x + y) + \int_x^{\infty} \Gamma_{+}^{(1)}(x, z) K_{+}^{(0)}(z + y) dz + \\ + \int_x^{\infty} \Gamma_{+}^{(2)}(x, z) K_{+}^{(1)}(z + y) dz = 0, \quad (5.71)$$

$$\Gamma_{+}^{(2)}(x, y) + K_{+}^{(1)}(x + y) + \int_x^{\infty} \Gamma_{+}^{(1)}(x, z) K_{+}^{(1)}(z + y) dz + \\ + \int_x^{\infty} \Gamma_{+}^{(2)}(x, z) K_{+}^{(2)}(z + y) dz = 0, \quad y \geq x, \quad (5.72)$$

где

$$K_{+}^{(0,2)}(x) = ik_{+}^{(0,2)}(x) \sigma_3, \quad K_{+}^{(1)}(x) = k_{+}^{(1)}(x) \sigma_1, \quad (5.73)$$

а

$$k_{+}^{(l)}(x) = \frac{m}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{\frac{mi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x} \frac{d\lambda}{\lambda^l} + \\ + \frac{m}{4i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\lambda_j^l} e^{\frac{mi}{4}\left(\lambda_j - \frac{1}{\lambda_j}\right)x}, \quad l = 0, 1, 2, \quad (5.74)$$



и

$$m_j = \frac{\gamma_j}{a(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.75)$$

Точка в (5.75) означает производную по  $\lambda$ .

Аналогичным образом из (5.67) получаем систему интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко для левого конца:

$$\Gamma_-^{(1)}(x, y) + K_-^{(0)}(x + y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-^{(1)}(x, z) K_-^{(0)}(z + y) dz + \\ + \int_{-\infty}^x \Gamma_-^{(2)}(x, z) K_-^{(1)}(z + y) dz = 0, \quad (5.76)$$

$$\Gamma_-^{(2)}(x, y) + K_-^{(1)}(x + y) + \int_{-\infty}^x \Gamma_-^{(1)}(x, z) K_-^{(1)}(z + y) dz + \\ + \int_{-\infty}^x \Gamma_-^{(2)}(x, z) K_-^{(2)}(z + y) dz = 0, \quad y \leq x, \quad (5.77)$$

где

$$K_-^{(0,2)}(x) = -ik_-^{(0,2)}(x)\sigma_3, \quad K_-^{(1)}(x) = k_-^{(1)}(x)\sigma_1, \quad (5.78)$$

а

$$k_-^{(l)}(x) = \frac{m}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(\lambda) e^{-\frac{m\lambda}{4} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) x} \frac{d\lambda}{\lambda^l} + \\ + \frac{m}{4i} \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{m}_j}{\lambda_j^l} e^{-\frac{m\lambda_j}{4} \left(\lambda_j - \frac{1}{\lambda_j}\right) x}, \quad l = 0, 1, 2, \quad (5.79)$$

и

$$\tilde{m}_j = \frac{1}{\gamma_j a(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.80)$$

Отметим, что в силу инволюций (4.54), (4.62) функции  $k_{\pm}^{(0,2)}(x)$  и  $\frac{1}{i} k_{\pm}^{(1)}(x)$  вещественнозначны.

Опишем теперь процедуру решения обратной задачи.

Исходными данными являются функции  $r(\lambda)$ ,  $\tilde{r}(\lambda)$  и набор чисел  $\{\lambda_j, m_j, \tilde{m}_j, j=1, \dots, n\}$ , удовлетворяющие следующим свойствам.

I. Функции  $r(\lambda)$ ,  $\tilde{r}(\lambda)$  являются функциями типа Шварца, исчезают при  $\lambda=0$  вместе со всеми производными, удовлетворяют инволюции

$$r(-\lambda) = \bar{r}(\lambda), \quad \tilde{r}(-\lambda) = \overline{\tilde{r}}(\lambda) \quad (5.81)$$

и соотношению

$$|r(\lambda)| = |\tilde{r}(\lambda)|. \quad (5.82)$$

II. Имеет место формула связи

$$\frac{\tilde{r}(\lambda)}{r(\lambda)} = \frac{\bar{a}(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad (5.83)$$

где

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + |r(\mu)|^2)}{\lambda - \mu + i0} d\mu \right\}, \quad (5.84)$$

$a$  попарно несовпадающие числа  $\lambda_j$  расположены в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси:  $\lambda_j = i\kappa_j$ ,  $\kappa_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ ;  $\lambda_{k+n_2} = -\bar{\lambda}_k$ ,  $\text{Im } \lambda_k, \text{Re } \lambda_k > 0$ ,  $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ ,  $n = n_1 + 2n_2$ .

III. Величины  $m_j, \tilde{m}_j$  удовлетворяют соотношению

$$m_j \tilde{m}_j = \frac{1}{a^2(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.85)$$

и условиям  $m_j = -\bar{m}_j$ ,  $\tilde{m}_j = -\bar{\tilde{m}}_j$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ ;  $m_{k+n_2} = -\bar{m}_k$ ,  $\tilde{m}_{k+n_2} = -\bar{\tilde{m}}_k$ ,  $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ .

Построим по этим данным ядра  $K_{\pm}^{(l)}(x)$ ,  $l = 0, 1, 2$ , и рассмотрим системы интегральных уравнений (5.71)–(5.72) и (5.76)–(5.77). Справедливы следующие утверждения.

I'. Системы (5.71)–(5.72) и (5.76)–(5.77) однозначно разрешимы в пространствах  $L_1^{(2 \times 2)}(x, \infty)$  и  $L_1^{(2 \times 2)}(-\infty, x)$  соответственно. Их решения – ядра  $\Gamma_{\pm}^{(1,2)}(x, y)$  – удовлетворяют инволюциям (4.30)–(4.31) и являются функциями типа Шварца при  $x, y \rightarrow \pm\infty$ .

II'. Построенные по  $\Gamma_{\pm}^{(1,2)}(x, y)$  с помощью формул (4.28)–(4.29) матрицы  $\tilde{T}_{\pm}(x, \lambda)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\tilde{T}_{\pm}(x, \lambda)}{dx} = \frac{1}{4i} \left( \beta \theta_{\pm}(x) \sigma_3 + \frac{m\lambda}{4i} \sigma_2 - \frac{m}{4i\lambda} \Omega_{\pm}^{-2}(x) \sigma_2 \Omega_{\pm}^2(x) \right) \tilde{T}_{\pm}(x, \lambda), \quad (5.86)$$

где

$$\frac{\beta}{4i} \theta_{\pm}(x) \sigma_3 = \pm (\sigma_2 \Gamma_{\pm}^{(1)}(x, x) \sigma_2 - \Gamma_{\pm}^{(1)}(x, x)) \quad (5.87)$$

и

$$\Omega_{\pm}^{-2}(x) \sigma_2 \Omega_{\pm}^2(x) = \left( \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, x) \sigma_2 \pm \frac{m}{4i} I \right) \sigma_2 \left( \Gamma_{\pm}^{(2)}(x, x) \sigma_2 \pm \frac{m}{4i} I \right)^{-1} \quad (5.88)$$

(сравни с формулами (4.35) – (4.36)).

III'. Функции  $\theta_{\pm}(x)$  вещественнозначны, матрицы  $\Omega_{\pm}^2(x)$  диагональны, унитарны и унимодулярны и

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \theta_{\pm}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Omega_{\pm}^4(x) = I, \quad (5.89)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

IV'. Имеют место формулы связи

$$\theta_+(x) = \theta_-(x) = \theta(x), \quad \Omega_+^4(x) = \Omega_-^4(x) = \Omega^4(x). \quad (5.90)$$

Нормируя матрицу  $\Omega(x)$  условием

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Omega(x) = I \quad (5.91)$$

и полагая

$$\Omega(x) = e^{\frac{i\varphi(x)}{4}\sigma_3}, \quad \pi(x) = \theta(x) - \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad (5.92)$$

для матриц-функций

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \Omega(x) \bar{T}_{\pm}(x, \lambda) \quad (5.93)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_{\pm}(x, \lambda)}{dx} = U(x, \lambda) T_{\pm}(x, \lambda) \quad (5.94)$$

с матрицей  $U(x, \lambda)$  вида (4.1). Функции  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют граничным условиям (4.2), где  $Q \equiv n_1 \pmod{2}$ .

V'. Функции  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda) = a(\lambda)r(\lambda)$  являются коэффициентами перехода вспомогательной линейной задачи (5.94). Дискретный спектр этой задачи состоит из собственных значений  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  с коэффициентами перехода  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ , где  $\gamma_j = m_j a(\lambda_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Прокомментируем доказательства этих утверждений.

Пункт I', свойства (5.89) и формула связи (5.90) доказываются по схеме из § II.7 части I. Поэтому мы ограничимся доказательством пункта II' и свойств матриц  $\Omega_{\pm}(x)$ , специфических для модели SG.

Рассмотрим, для определенности, систему (5.76)–(5.77), где для сокращения записи мы не будем писать значок  $-$  у  $\Gamma_{-}^{(1,2)}(x, y)$ ,  $K_{-}^{(l)}(x, y)$ ,  $\theta_{-}(x)$  и  $\Omega_{-}(x)$ . Покажем, что матрицы  $\Gamma_{-}^{(1,2)}(x, y)$  удовлетворяют системе (4.32)–(4.33), где функция  $\theta(x)$  и матрица  $\Omega(x)$  даются, соответственно, формулами (5.87) и (5.88), причем участвующая в (5.88) матрица  $\Gamma^{(2)}(x, x)\sigma_2 - \frac{m}{4i}I$  невырожденна. Отсюда будет следовать справедливость дифференциального уравнения (5.86).

Для доказательства продифференцируем уравнения (5.76)–(5.77) по  $x$  и  $y$ . Используя интегрирование по частям и вытека-

ющие из (5.78) – (5.79) формулы

$$\frac{dK^{(1)}}{dx}(x) = \frac{m}{4i} \sigma_2 (K^{(0)}(x) - K^{(2)}(x)) \quad (5.95)$$

и

$$\frac{dK^{(0)}}{dx}(x) = \frac{m}{4i} \sigma_2 (K^{(-1)}(x) - K^{(1)}(x)), \quad (5.96)$$

где

$$K^{(-1)}(x) = k^{(-1)}(x) \sigma_1, \quad (5.97)$$

а  $k^{(-1)}(x)$  дается формулой (5.79) с  $l=-1$ , мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{(1)}(x, y)}{\partial x} + \frac{m}{4i} \sigma_2 K^{(-1)}(x+y) + \Gamma^{(1)}(x, x) K^{(1)}(x+y) + \\ + B(x) \sigma_2 K^{(1)}(x+y) + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, z) K^{(0)}(z+y) dz + \\ + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, z) K^{(1)}(z+y) dz = 0, \quad (5.98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, y) + \frac{m}{4i} \sigma_2 K^{(0)}(x+y) + \Gamma^{(1)}(x, x) K^{(1)}(x+y) + \\ + B(x) \sigma_2 K^{(2)}(x+y) + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, z) K^{(1)}(z+y) dz + \\ + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, z) K^{(2)}(z+y) dz = 0, \quad (5.99) \end{aligned}$$

где

$$B(x) = \Gamma^{(2)}(x, x) \sigma_2 - \frac{m}{4i} I \quad (5.100)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial y}(x, y) + \frac{m}{4i} \sigma_2 K^{(-1)}(x+y) + \Gamma^{(1)}(x, x) K^{(0)}(x+y) + \\ + B(x) \sigma_2 K^{(1)}(x+y) - \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z}(x, z) K^{(0)}(z+y) dz - \\ - \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z}(x, z) K^{(1)}(z+y) dz = 0, \quad (5.101) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y}(x, y) + \frac{m}{4i} \sigma_2 K^{(0)}(x+y) + \Gamma^{(1)}(x, x) K^{(1)}(x+y) + \\ & + B(x) \sigma_2 K^{(2)}(x+y) - \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z}(x, z) K^{(1)}(z+y) dz - \\ & - \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z}(x, z) K^{(2)}(z+y) dz = 0. \quad (5.102) \end{aligned}$$

Умножим уравнение (5.101) слева и справа на матрицу  $\sigma_2$  и сложим с (5.98). Используя антикоммутиативность матриц  $K^{(1)}(x)$  и  $\sigma_2$  и определение (5.87), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, y) + \sigma_2 \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial y}(x, y) \sigma_2 - \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 \Gamma^{(1)}(x, y) + \\ & + (B(x) \sigma_2 - \sigma_2 B(x)) K^{(1)}(x+y) + \\ & + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, z) + \sigma_2 \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 - \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 \Gamma^{(1)}(x, z) \right) K^{(0)}(z+y) dz + \\ & + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, z) + \sigma_2 \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 - \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 \Gamma^{(2)}(x, z) \right) \times \\ & \times K^{(1)}(z+y) dz = 0, \quad (5.103) \end{aligned}$$

где матрицу  $\frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 K^{(0)}(x+y)$  мы исключили при помощи уравнения (5.76). Чтобы исключить и матрицу  $(B(x) \sigma_2 - \sigma_2 B(x)) K^{(1)}(x+y)$ , воспользуемся уравнением (5.77), которое с учетом (5.95) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(2)}(x, y) + K^{(1)}(x+y) + \int_{-\infty}^x \Gamma^{(1)}(x, z) K^{(1)}(z+y) dz + \\ & + \int_{-\infty}^x \Gamma^{(2)}(x, z) \left( K^{(0)}(z+y) - \frac{4i\sigma_2}{m} \frac{\partial}{\partial z} K^{(1)}(z+y) \right) dz = 0. \quad (5.104) \end{aligned}$$

Интегрируя в нем по частям, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{4i}{m} B(x) K^{(1)}(x+y) = \Gamma^{(2)}(x, y) + \int_{-\infty}^x \Gamma^{(1)}(x, z) K^{(1)}(z+y) dz + \\ & + \int_{-\infty}^x \Gamma^{(2)}(x, z) K^{(0)}(z+y) dz + \frac{4i}{m} \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 K^{(1)}(z+y) dz. \quad (5.105) \end{aligned}$$

Умножим уравнение (5.105) слева на матрицу  $\frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x)\sigma_2 B^{-1}(x))$  (ниже мы покажем, что матрица  $B(x)$  невырождена) и сложим его с (5.103). Мы получим, с учетом (5.88) и (5.100), следующее соотношение:

$$\Phi^{(1)}(x, y) + \int_{-\infty}^x \Phi^{(1)}(x, z) K^{(0)}(z + y) dz + \int_{-\infty}^x \Phi^{(2)}(x, z) K^{(1)}(z + y) dz = 0, \quad (5.106)$$

где

$$\Phi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, y) + \sigma_2 \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y}(x, y) \sigma_2 - \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 \Gamma^{(1)}(x, y) - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x)) \Gamma^{(2)}(x, y), \quad (5.107)$$

$$\Phi^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, y) + \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y}(x, y) \sigma_2 - \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 \Gamma^{(2)}(x, y) - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - \Omega^{-2}(x) \sigma_2 \Omega^2(x)) \Gamma^{(1)}(x, y). \quad (5.108)$$

Рассмотрим теперь уравнения (5.99) и (5.102). Умножим последнее слева на матрицу  $B(x)\sigma_2 B^{-1}(x)$ , справа на матрицу  $\sigma_2$  и сложим с первым. Исключая из получившегося равенства матрицу  $\frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x)\sigma_2 B^{-1}(x)) K^{(0)}(x + y)$  при помощи уравнения (5.76), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, y) + B(x) \sigma_2 B^{-1}(x) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y}(x, y) \sigma_2 - \\ & \quad - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x)) \Gamma^{(1)}(x, y) + \\ & \quad + (\Gamma^{(1)}(x, x) - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x) \Gamma^{(1)}(x, x) \sigma_2) K^{(1)}(x + y) + \\ & \quad + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, z) + B(x) \sigma_2 B^{-1}(x) \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x)) \Gamma^{(2)}(x, z) \right) K^{(1)}(z + y) dz + \\ & \quad + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, z) + B(x) \sigma_2 B^{-1}(x) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 \right) K^{(2)}(z + y) dz - \\ & \quad - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x)) \int_{-\infty}^x \Gamma^{(1)}(x, z) K^{(0)}(z + y) dz = 0. \quad (5.109) \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся снова соотношением (5.95), в силу которого имеем

$$\begin{aligned} \frac{m}{4i} \int_{-\infty}^x \Gamma^{(1)}(x, z) K^{(0)}(z + y) dz &= \\ &= \frac{m}{4i} \int_{-\infty}^x \Gamma^{(1)}(x, z) K^{(1)}(z + y) dz + \Gamma^{(1)}(x, x) \sigma_2 K^{(1)}(x + y) - \\ &\quad - \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 K^{(1)}(z + y) dz. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Подставляя его в (5.109), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, y) + B(x) \sigma_2 B^{-1}(x) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y}(x, y) \sigma_2 + \frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 K^{(1)}(x + y) - \\ - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x)) \Gamma^{(1)}(x, y) + \\ + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x}(x, z) + \sigma_2 \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x)) \times \right. \\ \times \Gamma^{(2)}(x, z) \left. \right) K^{(1)}(z + y) dz + \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x}(x, z) + B(x) \sigma_2 B^{-1}(x) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z}(x, z) \sigma_2 - \right. \\ \left. - \frac{m}{4i} (\sigma_2 - B(x) \sigma_2 B^{-1}(x)) \Gamma^{(1)}(x, z) \right) K^{(2)}(z + y) dz = 0. \end{aligned} \quad (5.111)$$

И, наконец, исключая матрицу  $\frac{\beta}{4i} \theta(x) \sigma_3 K^{(1)}(x + y)$  при помощи уравнения (5.77), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(x, y) + \int_{-\infty}^x \Phi^{(1)}(x, z) K^{(1)}(z + y) dz + \\ + \int_{-\infty}^x \Phi^{(2)}(x, z) K^{(2)}(z + y) dz = 0. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Итак, мы показали, что матрицы  $\Phi^{(1)}(x, y)$  и  $\Phi^{(2)}(x, y)$  удовлетворяют уравнениям (5.106) и (5.112) — однородной системе уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко. Но эта система имеет только тривиальное решение (основное утверждение в доказательстве теоремы об однозначной разрешимости системы (5.76) — (5.77)), поэтому при всех  $y \leq x$

$$\Phi^{(1)}(x, y) = \Phi^{(2)}(x, y) = 0. \quad (5.113)$$

Таким образом, уравнения (4.32) — (4.33) справедливы.

Для завершения доказательства п. II' нам осталось убедиться в невырожденности матрицы  $B(x)$ . Мы покажем, что выполняются соотношения

$$\det B(x) = -\frac{m^2}{16} \quad (5.114)$$

и

$$\Omega^2(x) = -\frac{m}{4i} B^{-1}(x). \quad (5.115)$$

Для доказательства (5.114) покажем сначала, что оно следует из предположения  $\det B \neq 0$ . Действительно, если при некотором  $x_0$  мы имеем  $\det B(x_0) \neq 0$ , то в окрестности  $x_0$  выполняется уравнение (4.32) и поэтому матрица

$$\begin{aligned} \tilde{T}_-(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x \Gamma^{(1)}(x, y) E(y, \lambda) dy + \\ + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^x \Gamma^{(2)}(x, y) E(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (5.116)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.86) и, следовательно, унитарна. Используя соотношение

$$\frac{1}{\lambda} E(y, \lambda) = \lambda E(y, \lambda) - \frac{4i}{m} \sigma_2 \frac{dE(y, \lambda)}{dy} \quad (5.117)$$

и интегрируя во втором интеграле в формуле (5.116) по частям, при  $\lambda \rightarrow 0$  получаем следующую асимптотику:

$$\tilde{T}_-(x, \lambda) E^{-1}(x, \lambda) = -\frac{4i}{m} B(x) + O(|\lambda|). \quad (5.118)$$

Отсюда следует, что при  $x = x_0$  равенство (5.114) справедливо. Оно выполняется также и при  $x \rightarrow -\infty$  в силу асимптотики

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} B(x) = -\frac{m}{4i} I. \quad (5.119)$$

По непрерывности отсюда следует, что оно справедливо при всех  $x$ . Соотношение (5.115) вытекает из (5.114) и нормировки матрицы  $\Omega(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Случай матриц  $\Gamma_+^{1,2}(x, y)$  рассматривается аналогично.

Обсуждение формализма Гельфанда — Левитана — Марченко на этом заканчивается.

**3. Солитонные решения.** Солитонные решения модели SG, как и для моделей НШ и МГ, отвечают случаю

$$b(\lambda) = 0 \quad (5.120)$$

при всех  $\lambda$ . Для таких данных как задача Римана, так и уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко сводятся к линейным



алгебраическим уравнениям и решаются явно. Для описания солитонных решений здесь мы используем задачу Римана, в которой следует положить

$$G(x, \lambda) = I. \quad (5.121)$$

Рассмотрим сначала простейший случай  $n_1=1$ ,  $n_2=0$ . Данными являются чисто мнимое  $\lambda_0 = i\kappa_0$ ,  $\kappa_0 > 0$ , и вещественное  $\gamma_0 \neq 0$ . Решение задачи Римана дается формулами

$$G_+(x, \lambda) = B(x, \lambda) \mathcal{E}^{-1} \Omega^{-1}(x), \quad (5.122)$$

$$G_-(x, \lambda) = \Omega(x) \mathcal{E} B^{-1}(x, \lambda), \quad (5.123)$$

где  $B(x, \lambda)$  — множитель Бляшке — Потопова:

$$B(x, \lambda) = I + \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} P(x), \quad (5.124)$$

$P(x)$  — ортогональный проектор:

$$P(x) = \frac{1}{1 + \gamma_0^2(x)} \begin{pmatrix} \gamma_0^2(x) & \gamma_0(x) \\ \gamma_0(x) & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.125)$$

$$\gamma_0(x) = e^{-\frac{m}{2} \left( \kappa_0 + \frac{1}{\kappa_0} \right) x} \gamma_0, \quad (5.126)$$

а матрица  $\Omega(x)$  однозначно определяется из уравнения

$$\Omega^2(x) = -\mathcal{E} \sigma_3 B(x, 0) \mathcal{E}^{-1} \quad (5.127)$$

и условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Omega(x) = I. \quad (5.128)$$

Функции  $\varphi(x)$ ,  $\pi(x)$  вычисляются по формулам (4.23) и (5.65) и имеют вид

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\gamma_0(x)}, \quad (5.129)$$

$$\pi(x) = -\frac{2m \left( \kappa_0 - \frac{1}{\kappa_0} \right) \gamma_0(x)}{\beta (1 + \gamma_0^2(x))}, \quad (5.130)$$

где выбрана главная ветвь функции  $\operatorname{arctg} x: \operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\pi/2$ . Для топологического заряда  $Q$  отсюда получаем

$$Q = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \operatorname{sign} \gamma_0. \quad (5.131)$$

Вводя зависимость коэффициента  $\gamma_0(x)$  от времени по формуле  $\gamma_0(x, t) = e^{-\frac{m}{2} \left( \kappa_0 - \frac{1}{\kappa_0} \right) t} \gamma_0(x)$  (см. (4.73)), получаем, что  $\varphi(x, t) =$

$= -\frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\gamma_0(x, t)}$  удовлетворяет уравнению SG. При этом

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t). \quad (5.132)$$

Перепишем выражение для  $\varphi(x, t)$  в виде:

$$\varphi(x, t) = -\frac{4e_0}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \left\{ \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \right\}, \quad (5.133)$$

где

$$v = \frac{1 - \kappa_0^2}{1 + \kappa_0^2}, \quad |v| < 1, \quad (5.134)$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{m} \ln |\gamma_0|. \quad (5.135)$$

Формула (5.133) дает наглядную интерпретацию полученного решения в терминах релятивистской частицы со скоростью  $v$  и координатой центра инерции  $x_0$  при  $t=0$ . Это решение соответствует *солитону модели SG*. Помимо непрерывных параметров  $v$  и  $x_0$ , солитон модели SG имеет важную дискретную характеристику — топологический заряд  $Q = -e_0$ . Иногда решения с зарядом  $Q=1$  называют (собственно) *солитонами*, а с зарядом  $Q=-1$  — *антисолитонами*.

Следующий по простоте случай получаем при  $n_1=0$  и  $n_2=1$ ; данными являются параметры  $\lambda_1 = -\bar{\lambda}_2$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$  и  $\gamma_1 = \bar{\gamma}_2 \neq 0$ . Решение задачи Римана имеет вид

$$G_+(x, \lambda) = \Pi(x, \lambda) \mathcal{E}^{-1} \Omega^{-1}(x), \quad (5.136)$$

$$G_-(x, \lambda) = \Omega(x) \mathcal{E} \Pi^{-1}(x, \lambda). \quad (5.137)$$

Здесь  $\Pi(x, \lambda)$  — произведение множителей Бляшке — Потапова:

$$\Pi(x, \lambda) = B_1(x, \lambda) B_2(x, \lambda) \quad (5.138)$$

с проекторами  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$ , определяемыми из уравнений

$$\Pi^*(x, \lambda_j) \xi_j = 0, \quad (5.139)$$

$$\xi_j^*(x) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j(x) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (5.140)$$

а матрица  $\Omega(x)$  находится из равенства

$$\Omega^2(x) = \mathcal{E} \Pi(x, 0) \mathcal{E}^{-1} \quad (5.141)$$

и условия (5.128).

Решение уравнений (5.139) в общем случае было дано в § II.5 первой части. После элементарных преобразований из

приведенных там формул и (4.23) получаем

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} \frac{\gamma_1(x) - \bar{\gamma}_1(x)}{1 + |\gamma_1(x)|^2}. \quad (5.142)$$

Вводя зависимость от времени заменой

$$\gamma_1(x) \mapsto \exp \left\{ \frac{mi}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) t \right\} \gamma_1(x),$$

получаем решение  $\varphi(x, t)$  уравнения SG:

$$\varphi(x, t) = \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{v}{\zeta} \frac{\sin \left( \frac{m\omega_1(t-vx)}{\sqrt{1-v^2}} + \varphi_0 \right)}{\operatorname{ch} \left( \frac{m\omega_2(x-vt-x_0)}{\sqrt{1-v^2}} \right)}, \quad (5.143)$$

где

$$\zeta = \operatorname{Re} \lambda_1, \quad v = \operatorname{Im} \lambda_1, \quad v = \frac{1 - |\lambda_1|^2}{1 + |\lambda_1|^2}, \quad \varphi_0 = \arg \gamma_1, \quad (5.144)$$

$$\omega_1 = \frac{\zeta}{|\lambda_1|}, \quad \omega_2 = \frac{v}{|\lambda_1|}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{1-v^2}}{m\omega_2} \ln |\gamma_1|.$$

Как всегда,  $\pi(x, t)$  вычисляется по формуле (5.132).

Функция  $\varphi(x, t)$  параметризуется четырьмя вещественными параметрами и описывает частицеподобное решение уравнения SG с внутренними степенями свободы. Оно называется *двойным солитоном* или *бризером*. Помимо движения, отвечающего релятивистской частице со скоростью  $v$  и координатой центра инерции  $x_0$  при  $t=0$ , двойной солитон осциллирует как в пространстве, так и во времени с частотами  $\frac{mv\omega_1}{\sqrt{1-v^2}}$  и  $\frac{m\omega_2}{\sqrt{1-v^2}}$  со-

ответственно. Параметр  $\varphi_0$  играет роль начальной фазы. В частности, при  $v=0$  двойной солитон является периодическим по  $t$  решением уравнения SG. *Двойной солитон имеет нулевой топологический заряд и его можно интерпретировать как релятивистское связанное состояние солитона и антисолитона.*

Сравнивая модель SG с уже рассмотренными выше, можно отметить, что солитон модели SG, как и солитон модели НШ в случае конечной плотности, не имеет внутренних степеней свободы. В то же время двойной солитон модели SG ближе по своей природе к солитону модели НШ в быстроубывающем случае и модели МГ.

Опишем теперь *общее  $n$ -солитонное решение уравнения SG*. Оно параметризуется  $n_1 + n_2$  несовпадающими числами  $\lambda_j = -\bar{\lambda}_j = i\kappa_j$ ,  $\kappa_j > 0$ ,  $j=1, \dots, n_1$ ;  $\lambda_k + n_2 = -\bar{\lambda}_k$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_k, \operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ,  $k=n_1+1, \dots, n_1+n_2$ , где  $n=n_1+2n_2$ , и неравными нулю величинами  $\gamma_j =$

$=\bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n_1; \gamma_{k+n_2}=\bar{\gamma}_k, k=n_1+1, \dots, n_1+n_2$ . Решение  $\varphi(x, t)$  определяется из уравнения

$$e^{\frac{i\beta\varphi(x,t)}{2}}\sigma_3 = \mathcal{G}(-\sigma_3)^{n_1}\Pi(x, t, 0)\mathcal{G}^{-1} \quad (5.145)$$

и условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = 0, \quad (5.146)$$

где матрица  $\Pi(x, t, \lambda)$  представляет собой упорядоченное произведение множителей Бляшке – Потапова:

$$\Pi(x, t, \lambda) = \prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} B_j(x, t, \lambda). \quad (5.147)$$

Участвующие в  $B_j(x, t, \lambda)$  проекторы  $P_j(x, t)$  определяются из системы уравнений

$$\Pi^*(x, t, \lambda_j)\xi_j=0, \quad (5.148)$$

где

$$\xi_j(x, t) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_j(x, t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.149)$$

и

$$\gamma_j(x, t) = e^{\frac{mt}{2}} \left( \left( \lambda_j - \frac{1}{\lambda_j} \right)^{x+} \left( \lambda_j + \frac{1}{\lambda_j} \right)^t \right) \gamma_j, \quad j=1, \dots, n. \quad (5.150)$$

*В ситуации общего положения  $n$ -солитонное решение при  $t \rightarrow \pm\infty$  распадается в сумму пространственно разделенных солитонов и двойных солитонов:*

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^{n_1} \varphi_{sj}^{(\pm)}(x, t) + \sum_{k=n+1}^{n_1+n_2} \varphi_{bk}^{(\pm)}(x, t) + O(e^{-c|t|}), \quad (5.151)$$

где  $c = \min \left\{ \min_i \frac{m}{\sqrt{1-v_i^2}} \min_{i \neq j} |v_i - v_j|, \min_k \frac{m\omega_k}{\sqrt{1-v_k^2}} \min_{k \neq l} |v_k - v_l| \right\}$ .

Здесь  $\varphi_{sj}^{(\pm)}(x, t)$  – солитоны с параметрами

$$v_j = \frac{1 - \kappa_j^2}{1 + \kappa_j^2}, \quad x_{sj}^{(\pm)} = x_{0j} \pm \Delta x_{0j}, \quad \varepsilon_j = -\text{sign } \gamma_j, \quad (5.152)$$

где

$$x_{0j} = \frac{\sqrt{1-v_j^2}}{m} \ln |\gamma_j| \quad (5.153)$$

и

$$\Delta x_{0j} = \frac{\sqrt{1-v_j^2}}{m} \left( \sum_{\substack{1 \leq l \leq n, \\ |\lambda_l| > |\lambda_j|}} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_l}{\lambda_j - \lambda_l} \right| - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n, \\ |\lambda_l| < |\lambda_j|}} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_l}{\lambda_j - \lambda_l} \right| \right),$$

$$j = 1, \dots, n_1, \quad (5.154)$$

а  $\Phi_{0k}^{(\pm)}(x, t)$  — двойные солитоны с параметрами

$$v_k = \frac{1 - |\lambda_k|^2}{1 + |\lambda_k|^2}, \quad \omega_{1k} = \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{|\lambda_k|}, \quad \omega_{2k} = \frac{\operatorname{Im} \lambda_k}{|\lambda_k|}, \quad (5.155)$$

$$x_{0k}^{(\pm)} = x_{0k} \pm \Delta x_{0k}, \quad \Phi_{0k}^{(\pm)} = \Phi_{0k} \pm \Delta \Phi_{0k}, \quad (5.156)$$

где

$$x_{0k} = \frac{\sqrt{1-v_k^2}}{m\omega_{2k}} \ln |\gamma_k|, \quad \Phi_{0k} = \arg \gamma_k \quad (5.157)$$

и

$$\Delta x_{0k} = \frac{\sqrt{1-v_k^2}}{m\omega_{2k}} \left( \sum_{\substack{1 \leq l \leq n, \\ |\lambda_l| > |\lambda_k|}} \ln \left| \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l} \right| - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n, \\ |\lambda_l| < |\lambda_k|}} \ln \left| \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l} \right| \right), \quad (5.158)$$

$$\Delta \Phi_{0k} = \sum_{\substack{1 \leq l \leq n, \\ |\lambda_l| > |\lambda_k|}} \arg \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l} - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n, \\ |\lambda_l| < |\lambda_k|}} \arg \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l}, \quad (5.159)$$

$$k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2.$$

Ситуация общего положения означает, что все скорости солитонов и двойных солитонов различны.

Для доказательства формул (5.151)–(5.159) достаточно воспользоваться результатами § II.5 части I об асимптотическом поведении матрицы  $\Pi(x, t, \lambda)$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  на прямых  $x - vt = \text{const}$ .

Приведенные формулы показывают, что теория рассеяния солитонов в модели SG является факторизованной. В следующем параграфе мы опишем ее с гамильтоновой точки зрения.

В заключение укажем, что, как следует из (5.151), топологический заряд  $Q$   $n$ -солитонного решения равен сумме зарядов входящих в него солитонов:

$$Q = - \sum_{j=1}^{n_1} \varepsilon_j. \quad (5.160)$$

На самом деле это соотношение верно и в случае, когда  $b(\lambda) \neq 0$ . Действительно, можно показать, что при фиксированных  $\lambda_j, \gamma_j, j=1, \dots, n$ , решения обратной задачи — функции  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$  — непрерывно зависят от  $b(\lambda)$ . В силу целочисленности

топологического заряда  $Q$  отсюда следует справедливость формулы (5.160) и в общем случае.

Описание динамики солитонов и результатов по обратной задаче для модели SG на этом заканчивается.

## § 6. Гамильтонова формулировка модели SG

Здесь мы покажем, что модель SG в быстроубывающем случае является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Доказательство будет проведено явно путем построения канонических переменных типа действие — угол. С этой целью мы приведем  $r$ -матричную запись скобок Пуассона модели и с ее помощью вычислим скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра. Мы дадим явное выражение для локальных интегралов движения модели в терминах переменных типа действие — угол, реализацию генераторов группы Пуанкаре и интерпретацию этих результатов в терминах релятивистской теории поля. В заключение этого параграфа мы рассмотрим рассеяние солитонов модели SG с гамильтоновой точки зрения.

1. **Фундаментальные скобки Пуассона и  $r$ -матрица.** Рассмотрим основные не исчезающие скобки Пуассона модели SG

$$\{\pi(x), \varphi(y)\} = \delta(x-y) \quad (6.1)$$

и перепишем их в виде

$$\left\{ \pi(x), \sin \frac{\beta\varphi(y)}{2} \right\} = \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta\varphi(x)}{2} \delta(x-y), \quad (6.2)$$

$$\left\{ \pi(x), \cos \frac{\beta\varphi(y)}{2} \right\} = -\frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta\varphi(x)}{2} \delta(x-y). \quad (6.3)$$

Для скобок Пуассона матричных элементов матрицы  $U(x, \lambda)$  вспомогательной линейной задачи получаем отсюда

$$\begin{aligned} \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = & \frac{m\beta^2}{32} \left( \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \cos \frac{\beta\varphi(x)}{2} \sigma_1 \otimes \sigma_3 - \right. \\ & - \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sin \frac{\beta\varphi(x)}{2} \cdot \sigma_2 \otimes \sigma_3 - \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) \cos \frac{\beta\varphi(x)}{2} \sigma_3 \otimes \sigma_1 + \\ & \left. + \left( \mu - \frac{1}{\mu} \right) \sin \frac{\beta\varphi(x)}{2} \sigma_3 \otimes \sigma_2 \right) \delta(x-y). \quad (6.4) \end{aligned}$$

Наша цель состоит в том, чтобы представить правую часть (6.4) в виде следующего коммутатора:

$$[r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x-y). \quad (6.5)$$

Правая часть (6.4) не содержит функций  $\pi(x)$  и  $\pi(y)$ , и поэтому из явного вида матрицы  $U(x, \lambda)$  получаем следующее условие на матрицу  $r(\lambda, \mu)$ , гарантирующее исчезновение зависи-

мости от  $\lambda$  в (6.5):

$$[r(\lambda, \mu), \sigma_3 \otimes I + I \otimes \sigma_3] = 0. \quad (6.6)$$

В соответствии с (6.6) будем искать  $r$ -матрицу в виде

$$r(\lambda, \mu) = f(\lambda, \mu) (I \otimes I - \sigma_3 \otimes \sigma_3) + g(\lambda, \mu) (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2). \quad (6.7)$$

Используя формулы коммутации матриц Паули, отсюда для двух неизвестных функций  $f(\lambda, \mu)$  и  $g(\lambda, \mu)$  получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) f(\lambda, \mu) + \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) g(\lambda, \mu) &= \frac{\beta^2}{16} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right), \\ \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) f(\lambda, \mu) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) g(\lambda, \mu) &= -\frac{\beta^2}{16} \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right), \\ \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) f(\lambda, \mu) + \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) g(\lambda, \mu) &= \frac{\beta^2}{16} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \\ \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) f(\lambda, \mu) + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) g(\lambda, \mu) &= -\frac{\beta^2}{16} \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Система (6.8) однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\gamma}{2} \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad g(\lambda, \mu) = -\frac{\gamma \lambda \mu}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (6.9)$$

где

$$\gamma = \beta^2/8. \quad (6.10)$$

В терминах переменных

$$\alpha = \ln \lambda, \quad \beta = \ln \mu \quad (6.11)$$

имеем

$$f = \frac{\gamma}{2} \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sh}(\alpha - \beta)}, \quad g = -\frac{\gamma}{2 \operatorname{sh}(\alpha - \beta)}, \quad (6.12)$$

так что

$$r(\lambda, \mu) = r(\alpha - \beta). \quad (6.13)$$

В матричной записи (6.7), с учетом (6.11), (6.13), переписывается в виде

$$r(\alpha) = \frac{\gamma}{\operatorname{sh} \alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \operatorname{ch} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

Итак, мы вывели фундаментальные скобки Пуассона для модели SG:

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x - y). \quad (6.15)$$

Отсюда получаем выражение для скобок Пуассона матрицы перехода:

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad (6.16)$$

где  $y < x$ .

2. Скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра. Переходя в (6.16) к пределам при  $y \rightarrow \pm\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$  в соответствии с определениями (4.18) и (4.49), получаем следующие выражения для скобок Пуассона решений Йоста  $T_{\pm}(x, \lambda)$  и приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \{T_{\pm}(x, \lambda) \otimes T_{\pm}(x, \mu)\} &= \mp r(\lambda, \mu) T_{\pm}(x, \lambda) \otimes T_{\pm}(x, \mu) \pm \\ &\pm T_{\pm}(x, \lambda) \otimes T_{\pm}(x, \mu) r_{\pm}(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\{T_{+}(x, \lambda) \otimes T_{-}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.18)$$

$$\{T(\lambda) \otimes T(\mu)\} = r_{+}(\lambda, \mu) T(\lambda) \otimes T(\mu) - T(\lambda) \otimes T(\mu) r_{-}(\lambda, \mu), \quad (6.19)$$

где

$$r_{\pm}(\lambda, \mu) =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{v.p.} \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} & \mp \pi i (\lambda + \mu) \delta(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & \pm \pi i (\lambda + \mu) \delta(\lambda - \mu) & \text{v.p.} \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Здесь в силу инволюций (4.20) и (4.51) мы считаем, что  $\lambda, \mu > 0$ ; при выводе мы использовали формулу

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \text{v.p.} \frac{e^{\frac{mi}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} - \mu + \frac{1}{\mu} \right) y}}{\lambda - \mu} = \pm \pi i \delta(\lambda - \mu), \quad (6.21)$$

справедливую для таких  $\lambda$  и  $\mu$ .

Из формул (6.17)–(6.20) получаем следующие выражения для скобок Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра при  $\lambda, \mu > 0$ :

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = \{a(\lambda), \bar{a}(\mu)\} = 0, \quad (6.22)$$

$$\{b(\lambda), b(\mu)\} = 0, \quad (6.23)$$



$$\{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = -2\pi i \gamma \lambda |a(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \mu), \quad (6.24)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{2\gamma\lambda\mu}{(\lambda - \mu + i0)(\lambda + \mu)} a(\lambda) b(\mu), \quad (6.25)$$

$$\{a(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = -\frac{2\gamma\lambda\mu}{(\lambda - \mu + i0)(\lambda + \mu)} a(\lambda) \bar{b}(\mu) \quad (6.26)$$

и

$$\{b(\lambda), \lambda_j\} = \{\bar{b}(\lambda), \lambda_j\} = 0, \quad (6.27)$$

$$\{b(\lambda), \gamma_j\} = \{\bar{b}(\lambda), \gamma_j\} = 0, \quad (6.28)$$

$$\{a(\lambda), \gamma_j\} = \frac{2\gamma\lambda\lambda_j}{\lambda^2 - \lambda_j^2} a(\lambda) \gamma_j, \quad (6.29)$$

$$\{a(\lambda), \bar{\gamma}_j\} = -\frac{2\gamma\lambda\bar{\lambda}_j}{\lambda^2 - \bar{\lambda}_j^2} a(\lambda) \bar{\gamma}_j, \quad (6.30)$$

а также

$$\{\lambda_j, \lambda_l\} = \{\lambda_j, \bar{\lambda}_l\} = 0, \quad (6.31)$$

$$\{\gamma_j, \gamma_l\} = \{\gamma_j, \bar{\gamma}_l\} = 0, \quad (6.32)$$

$$\{\gamma_j, \lambda_l\} = \gamma\gamma_j\lambda_l\delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (6.33)$$

Таким образом, характеристики непрерывного и дискретного спектра находятся в инволюции, а неисчезающие скобки Пуассона данных обратной задачи ( $b(\lambda), \bar{b}(\lambda), \lambda > 0; \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j, j = 1, \dots, n$ ) даются формулами (6.24) и (6.33).

Из формул (6.22) следует, что  $\ln a(\lambda)$  является производящей функцией инволютивных интегралов движения. В частности, имеем

$$\{I_{2l+1}, I_{2m+1}\} = 0, \quad (6.34)$$

где  $I_{2k+1}, k = -\infty, \dots, \infty$  — локальные интегралы движения модели SG, построенные в § 4.

**3. Канонические переменные типа действие — угол.** Из приведенных в предыдущем пункте формул следует, что набор переменных

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{2\pi\gamma\lambda} \ln(1 - |b(\lambda)|^2), \quad \varphi(\lambda) = -\arg b(\lambda), \quad (6.35)$$

где  $\lambda \geq 0$  и

$$p_j = -\frac{1}{\gamma} \ln \kappa_j, \quad q_j = \ln |\gamma_j|, \quad j = 1, \dots, n_1; \quad (6.36)$$

$$\xi_k = -\frac{2}{\gamma} \ln |\lambda_k|, \quad \eta_k = \ln |\gamma_k|, \quad (6.37)$$

$$\rho_k = \frac{2}{\gamma} \arg \lambda_k, \quad \varphi_k = \arg \gamma_k, \quad k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2, \quad (6.38)$$

является каноническим. Неисчезающие скобки Пуассона этих переменных имеют вид

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\mu)\} = \delta(\lambda - \mu), \quad \lambda, \mu \geq 0, \quad (6.39)$$

$$\{\rho_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\xi_k, \eta_l\} = \{\rho_k, \varphi_l\} = \delta_{kl}, \quad (6.40)$$

где  $i, j = 1, \dots, n_1$ ;  $k, l = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ .

Области изменения переменных  $\rho(\lambda)$  и  $\rho_k$  имеют вид  $0 \leq \rho(\lambda) < \infty$  и  $0 \leq \rho_k < \pi/\gamma$  соответственно; они играют роль переменных типа действие, сопряженных к угловым переменным  $\varphi(\lambda)$  и  $\varphi_k$ ,  $0 \leq \varphi(\lambda), \varphi_k < 2\pi$ . Отметим, что переменная  $\rho(\lambda)$  неингулярна в силу условия (A) и свойства  $b(0) = 0$ . Переменные  $\rho_j$ ,  $q_j$  и  $\xi_k, \eta_k$  меняются на всей вещественной оси.

Подчеркнем, что, в отличие от рассмотренных ранее примеров, переменные (6.35)–(6.38) не полностью параметризуют  $n$ -солитонное подмногообразие фазового пространства модели. Для его описания следует дополнительно задать величины  $\epsilon_j = \pm 1$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ , — топологические заряды солитонов. Таким образом, подмногообразие фазового пространства, содержащее  $n_1$  солитонов и  $n_2$  двойных солитонов, состоит из  $2^{n_1}$  компонент связности.

Итак, отображение  $\mathcal{F}$ , рассмотренное в § 4–5, является каноническим преобразованием. Оно линеаризует динамику модели SG. Действительно, локальные интегралы движения  $I_{2l+1}$  зависят только от переменных типа действие:

$$\begin{aligned} \text{sign}(2l+1) I_{2l+1} = & -2\gamma \int_0^\infty \rho(\lambda) \lambda^{-(l-1)} d\lambda + \frac{(-1)^{l-1} 2^{n_1}}{2l+1} \sum_{j=1}^{n_1} e^{-(2l+1)\gamma p_j} - \\ & - \frac{4}{2l+1} \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} e^{-\frac{(2l+1)\gamma \xi_k}{2}} \sin \frac{2l+1}{2} \gamma \rho_k, \quad l = -\infty, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Поэтому все высшие уравнения SG

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \{I, \pi\}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \{I, \varphi\}, \quad (6.42)$$

где

$$I = \sum_l \text{sign}(2l+1) c_{2l+1} I_{2l+1}, \quad (6.43)$$

являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами и их временная динамика дается формулами

$$b(\lambda, t) = e^{-2i\gamma I(\lambda)t} b(\lambda, 0), \quad \lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad (6.44)$$

$$\gamma_j(t) = e^{-2i\gamma I(\lambda_j)t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$I(\lambda) = \sum_l \text{sign}(2l+1) c_{2l+1} \lambda^{2l+1}. \quad (6.45)$$

В частности, выбирая  $c_{-1} = -c_1 = m/(4\gamma)$  и полагая остальные  $c_{2l+1} = 0$ , мы получим в качестве  $I$  гамильтониан модели SG, и формулы (6.44) — (6.45) перейдут в знакомые выражения (4.73).

Перейдем теперь к интерпретации независимых мод модели SG в терминах релятивистской теории поля. Для этого удобно вместо переменных (6.35) — (6.38) ввести другой канонический набор, явно отражающий лоренц-ковариантный характер возмущений модели. Именно, положим

$$k(\lambda) = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right), \quad -\infty < k < \infty, \quad (6.46)$$

$$\varphi(k) = \varphi(\lambda(k)), \quad \rho(k) = -\frac{d\lambda(k)}{dk} \rho(\lambda(k)), \quad (6.47)$$

где  $\lambda(k)$  — обратная функция к  $k(\lambda)$ :

$$\lambda(k) = \frac{1}{m} (\sqrt{k^2 + m^2} - k) \quad (6.48)$$

и

$$P_{sj} = \frac{m}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma p_j, \quad Q_{sj} = \frac{q_j}{m \operatorname{ch} \gamma p_j}, \quad j = 1, \dots, n_1; \quad (6.49)$$

$$P_{bk} = \frac{2m}{\gamma} \operatorname{sh} \frac{\gamma \xi_k}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \rho_k, \quad Q_{bk} = \frac{\eta_k}{m \operatorname{ch} \frac{\gamma \xi_k}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \rho_k}, \quad (6.50)$$

где  $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ . Ясно, что переменные  $\rho(k)$ ,  $\varphi(k)$ ,  $P_{sj}$ ,  $Q_{sj}$ ,  $P_{bk}$ ,  $Q_{bk}$  и  $\rho_k$ ,  $\varphi_k$  также являются каноническими. Используя формулы (4.99) — (4.100), (6.41) и (6.46) — (6.50), для импульса  $P$  и гамильтониана  $H$  получаем выражения

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} k \rho(k) dk + \sum_{j=1}^{n_1} P_{sj} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} P_{bk} \quad (6.51)$$

и

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 + m^2} \rho(k) dk + \sum_{j=1}^{n_1} \sqrt{P_{sj}^2 + M_s^2} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \sqrt{P_{bk}^2 + M_{bk}^2}, \quad (6.52)$$

где

$$M_s = \frac{m}{\gamma}, \quad M_{bk} = \frac{2m}{\gamma} \sin \frac{\gamma}{2} \rho_k. \quad (6.53)$$

Приведенные формулы представляют собой суммы по независимым модам и допускают наглядную теоретико-полевую интерпретацию.

Первые слагаемые в формулах (6.51) — (6.52) интерпретируются в терминах волнового пакета мод непрерывного спектра

с плотностью  $\rho(k)$ . Отдельная мода с номером  $k$  описывает частицу с импульсом и энергией

$$p = k, \quad h = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (6.54)$$

связанных релятивистским законом дисперсии

$$h^2 = p^2 + m^2. \quad (6.55)$$

Эта частица имеет нулевой топологический заряд. Другими словами, эти моды описывают нейтральную релятивистскую частицу с массой  $m$ .

Вторые слагаемые представляют собой вклад от солитонов, которые соответствуют заряженной (с топологическим зарядом  $Q = \pm 1$ ) релятивистской частице с массой  $M_s$ .

Третьи слагаемые в этих формулах отвечают двойным солитонам. Последние соответствуют нейтральной релятивистской частице с внутренними степенями свободы. Ее масса  $M_b$  зависит от обобщенного импульса внутреннего движения  $\rho$  по формуле (6.53) и меняется от нуля до удвоенной массы солитона. Такую частицу можно интерпретировать как релятивистское связанное состояние солитона и антисолитона.

Таким образом, спектр возбуждений модели SG является весьма богатым и описывает несколько сортов частиц. Стандартные соображения теории возмущений связывали бы с нашей моделью лишь частицы первого типа, отвечающие линеаризованному уравнению SG в окрестности  $\varphi = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + m^2 \varphi = 0, \quad (6.56)$$

т. е. уравнению Клейна — Гордона.

Появление в спектре возбуждений солитонов, антисолитонов и их связанных состояний произошло исключительно благодаря специальному (в своем роде уникальному) виду нелинейного взаимодействия. В линейном пределе  $\beta \rightarrow 0$  солитоны и двойные солитоны превращаются в решения с бесконечной энергией и уходят из спектра возбуждений.

В заключение этого пункта отметим, что при сгущении нулей  $\lambda_k$  к вещественной оси двойные солитоны переходят в моды непрерывного спектра. Именно, если предположить, что

$$\lambda_k = \mu_k + \frac{i\gamma\mu_k\rho(\mu_k)}{n_2}, \quad k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2, \quad (6.57)$$

где при  $n_2 \rightarrow \infty$  вещественные числа  $\mu_k$  равномерно заполняют положительную полуось, то третьи слагаемые в выражении (6.41) для локальных интегралов движения  $I_{2l+1}$  при  $n_2 \rightarrow \infty$  переходят в первые слагаемые, отвечающие непрерывному спектру.

**4. Реализация алгебры Ли группы Пуанкаре в терминах переменных типа действие — угол.** В предыдущем пункте мы выразили генераторы сдвигов по  $x$  и  $t$  — импульс  $P$  и гамильтониан  $H$  — через канонические переменные типа действие — угол. Здесь мы выразим через них генератор лоренцевых вращений  $K$  (см. § I.1). С этой целью вычислим все вариационные производные генератора  $K$  по отношению к переменным (6.35) — (6.38). Ясно, что для этого достаточно вычислить скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра с функционалом  $K$ .

Для любого функционала  $F$  положим

$$\delta F = \{K, F\}, \quad (6.58)$$

вводя тем самым вариацию вдоль  $K$ . Имеем (см. § I.1)

$$\delta \pi(x) = x \pi(x), \quad (6.59)$$

$$\delta \pi(x) = x \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \varphi \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (6.60)$$

Отсюда и из явного вида матриц  $U$  и  $V$  в представлении нулевой кривизны из § I.1 получаем

$$\delta U(x, \lambda) = x \frac{\partial V}{\partial x} - x[U, V] + \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3. \quad (6.61)$$

Вычислим теперь вариацию  $\delta T(x, y, \lambda)$  матрицы перехода вспомогательной линейной задачи модели SG. Имеем, используя (4.1) и (6.61):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \delta T &= U(x, \lambda) \delta T + \delta U(x, \lambda) T = \\ &= U \delta T + x \frac{\partial V}{\partial x} T - xUVT + xVUT + \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3 T = \\ &= U \delta T + x \frac{\partial V}{\partial x} T + xV \frac{\partial T}{\partial x} - xUVT + \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3 T = \\ &= U \delta T + x \frac{\partial}{\partial x} (VT) - xUVT + \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3 T, \end{aligned} \quad (6.62)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta T - xVT) = U (\delta T - xVT) - \left( V - \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3 \right) T. \quad (6.63)$$

Далее, дифференцируя уравнение (4.1) по  $\lambda$  и опять используя явный вид матриц  $U$  и  $V$ , получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \lambda} T = U \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{\partial U}{\partial \lambda} T = U \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \left( V - \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma_3 \right) T, \quad (6.64)$$

благодаря чему уравнение (6.63) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \delta T - xVT + \lambda \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) = U(x, \lambda) \left( \delta T - xVT + \lambda \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right). \quad (6.65)$$

Это уравнение совпадает с уравнением вспомогательной линейной задачи для нашей модели, и таким образом,

$$\delta T - xV(x, \lambda)T + \lambda \frac{\partial T}{\partial \lambda} = TC(y, \lambda). \quad (6.66)$$

Используя граничное условие  $T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I$ , получаем, что

$$C(y, \lambda) = -yV(y, \lambda), \quad (6.67)$$

и окончательное выражение для  $\delta T$  имеет вид

$$\delta T(x, y, \lambda) = xV(x, \lambda)T(x, y, \lambda) - yT(x, y, \lambda)V(y, \lambda) - \lambda \frac{\partial T}{\partial \lambda}(x, y, \lambda). \quad (6.68)$$

Переходя к соответствующим пределам, получаем выражения для вариаций решений Йоста

$$\delta T_{\pm}(x, \lambda) = xV(x, \lambda)T_{\pm}(x, \lambda) - \lambda \frac{\partial T_{\pm}(x, \lambda)}{\partial \lambda} \quad (6.69)$$

и приведенной матрицы монодромии

$$\delta T(\lambda) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \lambda}(\lambda). \quad (6.70)$$

Отсюда получаем формулы

$$\delta a(\lambda) = -\lambda \frac{da}{d\lambda}(\lambda), \quad \delta b(\lambda) = -\lambda \frac{db}{d\lambda}(\lambda) \quad (6.71)$$

и

$$\delta \lambda_j = \lambda_j, \quad \delta \gamma_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.72)$$

из которых следует, что

$$\delta \varphi(\lambda) = -\lambda \frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda) = -\frac{\delta K}{\delta \rho(\lambda)}, \quad (6.73)$$

$$\delta \rho(\lambda) = -\rho(\lambda) - \lambda \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\delta K}{\delta \varphi(\lambda)}, \quad (6.74)$$

$$\delta p_j = -\frac{1}{\gamma} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (6.75)$$

$$0 = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad (6.76)$$

и

$$\delta \xi_k = -\frac{2}{\gamma} = -\frac{\partial K}{\partial \eta_k}, \quad (6.77)$$

$$\delta \eta_k = 0 = \frac{\partial K}{\partial \xi_k}, \quad (6.78)$$

$$\delta \rho_k = 0 = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_k}, \quad (6.79)$$

$$\delta \varphi_k = 0 = \frac{\partial K}{\partial \rho_k}, \quad k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2. \quad (6.80)$$

Здесь на последнем этапе мы вспомнили, что вариация (6.58) представляет собой скобку Пуассона, и учли канонический характер переменных  $\rho(\lambda)$ ,  $\varphi(\lambda)$ ,  $p_j$ ,  $q_j$ ,  $\rho_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $\xi_k$ ,  $\eta_k$ .

Интегрируя эти формулы, приходим к искомому выражению для функционала  $K$  в терминах канонических переменных типа действие — угол:

$$K = -\int_0^\infty \lambda \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \rho(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{n_1} q_j + \frac{2}{\gamma} \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \eta_k. \quad (6.81)$$

В переменных (6.46) — (6.50) выражение для  $K$  принимает явно релятивистски-ковариантный вид:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d\varphi(k)}{dk} \rho(k) dk + \sum_{j=1}^{n_1} \sqrt{P_{sj}^2 + M_s^2} Q_{sj} + \\ + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \sqrt{P_{bk}^2 + M_{bk}^2} Q_{bk}, \quad (6.82)$$

в котором  $K$  представляется в виде суммы по независимым модам.

**5. Рассеяние солитонов с гамильтоновой точки зрения.** Здесь мы будем параметризовать  $n$ -солитонное решение модели SG набором переменных  $\{p_j, q_j, \varepsilon_j, j=1, \dots, n_1; \rho_k, \xi_k, \varphi_k, \eta_k, k=n_1+1, \dots, n_1+n_2\}$ , просто связанным с  $\{v_j, x_{0j}, \varepsilon_j, j=1, \dots, n_1; v_k, \omega_{1k}, \omega_{2k}, x_{0k}, \varphi_{0k}, k=n_1+1, \dots, n_1+n_2\}$  (сравни формулы (5.152) — (5.153), (5.155), (5.157) с (6.36) — (6.38)). В ситуации общего положения при  $t \rightarrow \pm \infty$  оно распадается в сумму пространственно разделенных солитонов и двойных солитонов с параметрами  $p_j^{(\pm)}$ ,  $q_j^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_j$  и  $\rho_k^{(\pm)}$ ,  $\xi_k^{(\pm)}$ ,  $\varphi_k^{(\pm)}$ ,  $\eta_k^{(\pm)}$  соответственно, где

$$p_j^{(+)} = p_j^{(-)} = p_j, \quad \xi_k^{(+)} = \xi_k^{(-)} = \xi_k, \quad \rho_k^{(+)} = \rho_k^{(-)} = \rho_k, \quad (6.83)$$

$$q_j^{(\pm)} = q_j \pm \Delta q_j, \quad \eta_k^{(\pm)} = \eta_k \pm \Delta \eta_k, \quad \varphi_k^{(\pm)} = \varphi_k \pm \Delta \varphi_k, \quad (6.84)$$

а

$$\Delta q_j = \sum_{|\lambda_l| > |\bar{\lambda}_l|} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_l}{\lambda_j - \lambda_l} \right| - \sum_{|\lambda_l| < |\bar{\lambda}_l|} \ln \left| \frac{\lambda_j - \bar{\lambda}_l}{\lambda_j - \lambda_l} \right|, \quad (6.85)$$

$$\Delta \eta_k = \sum_{|\lambda_l| > |\lambda_{k l}|} \ln \left| \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l} \right| - \sum_{|\lambda_l| < |\lambda_{k l}|} \ln \left| \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l} \right|, \quad (6.86)$$

$$\Delta \varphi_k = \sum_{|\lambda_l| > |\lambda_{k l}|} \arg \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l} - \sum_{|\lambda_l| < |\lambda_{k l}|} \arg \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_l}{\lambda_k - \lambda_l}, \quad (6.87)$$

$j=1, \dots, n_1$ ,  $k=n_1+1, \dots, n_1+n_2$ ; числа  $\lambda_l$  пробегают весь набор  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  с указанными ограничениями. Здесь

$$\lambda_j = e^{-\gamma p_j}, \quad j=1, \dots, n_1, \\ \lambda_k = -\bar{\lambda}_{k+n_2} = e^{-\frac{\gamma}{2} (\xi_k - i \rho_k)}, \quad k=n_1+1, \dots, n_1+n_2 \quad (6.88)$$

(см. п. 3 этого параграфа и § 5).

*Преобразования  $W_{\pm}$*

$$W_{\pm}: \{p_j, q_j, \varepsilon_j, j=1, \dots, n_1; \xi_k, \rho_k, \eta_k, \varphi_k,$$

$$k=n_1+1, \dots, n_1+n_2\} \rightarrow \{p_j^{(\pm)}, q_j^{(\pm)}, \varepsilon_j, j=1, \dots, n_1;$$

$$\xi_k^{(\pm)}, \rho_k^{(\pm)}, \eta_k^{(\pm)}, \varphi_k^{(\pm)}, k=n_1+1, \dots, n_1+n_2\}, \quad (6.89)$$

описанные формулами (6.83)–(6.87), являются каноническими. Действительно, формулы

$$\frac{\partial \Delta q_j}{\partial p_l} = \frac{\partial \Delta q_l}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial \Delta q_j}{\partial \rho_k} = \frac{\partial \Delta \varphi_k}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial \Delta q_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \Delta \eta_k}{\partial p_j}, \\ \frac{\partial \Delta \eta_k}{\partial \xi_m} = \frac{\partial \Delta \eta_m}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial \Delta \eta_k}{\partial \rho_m} = \frac{\partial \Delta \varphi_m}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial \Delta \varphi_k}{\partial \rho_m} = \frac{\partial \Delta \varphi_m}{\partial \rho_k}, \quad (6.90)$$

$$j, l=1, \dots, n_1; \quad k, m=n_1+1, \dots, n_1+n_2,$$

проверяются непосредственно. Тем самым преобразования  $W_{\pm}$  задаются производящими функциями  $\pm K(p_1, \dots, p_{n_1}; \xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}, \rho_{n_1+1}, \dots, \rho_{n_1+n_2})$ :

$$q_j^{(\pm)} = q_j \pm \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \eta_k^{(\pm)} = \eta_k \pm \frac{\partial K}{\partial \xi_k}, \quad \varphi_k^{(\pm)} = \varphi_k \pm \frac{\partial K}{\partial \rho_k}, \quad (6.91)$$

$$j=1, \dots, n_1; \quad k=n_1+1, \dots, n_1+n_2.$$

*Преобразование рассеяния  $S$*

$$S: \{p_j^{(-)}, q_j^{(-)}, \varepsilon_j, \xi_k^{(-)}, \rho_k^{(-)}, \eta_k^{(-)}, \varphi_k^{(-)}\} \rightarrow \{p_j^{(+)}, q_j^{(+)}, \varepsilon_j, \xi_k^{(+)}, \rho_k^{(+)}, \eta_k^{(+)}, \varphi_k^{(+)}\} \quad (6.92)$$



представляется в виде

$$S = W_+ W_-^{-1} \quad (6.93)$$

и, очевидно, является каноническим с производящей функцией (классической  $S$ -матрицей)

$$S(p_1, \dots, p_{n_1}; \xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}, \rho_{n_1+1}, \dots, \rho_{n_1+n_2}) = \\ = 2K(p_1, \dots, p_{n_1}, \xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}, \rho_{n_1+1}, \dots, \rho_{n_1+n_2}). \quad (6.94)$$

В силу факторизованности рассеяния функция  $K$  представляется в виде

$$K(p_1, \dots, p_{n_1}; \xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}, \rho_{n_1+1}, \dots, \rho_{n_1+n_2}) = \\ = \sum_{p_j > p_l} K_{ss}(p_j, p_l) + \sum_{2p_j > \xi_k} K_{sb}(p_j, \xi_k, \rho_k) + \sum_{\xi_k > 2p_l} K_{bs}(\xi_k, \rho_k, p_l) + \\ + \sum_{\xi_k > \xi_m} K_{bb}(\xi_k, \rho_k, \xi_m, \rho_m). \quad (6.95)$$

Здесь  $K_{ss}$ ,  $K_{sb}$ ,  $K_{bs}$  и  $K_{bb}$  — соответственно производящие функции для рассеяния солитона на солитоне, солитона на двойном солитоне, двойного солитона на солитоне и двойного солитона на двойном солитоне.

Вычислим сначала функцию  $K_{ss}$ . Полагая  $n_1=2$ ,  $n_2=0$ , из (6.87) и (6.88) имеем при  $p_1 > p_2$

$$\Delta q_1 = -\Delta q_2 = \ln \operatorname{cth} \frac{\gamma}{2} (p_1 - p_2), \quad (6.96)$$

так что

$$K_{ss}(p_1, p_2) = K_{ss}(p_1 - p_2), \quad (6.97)$$

где

$$\frac{dK_{ss}(p)}{dp} = \ln \operatorname{cth} \frac{\gamma}{2} p \quad (6.98)$$

при  $p > 0$ . Выражение (6.98) не интегрируется в элементарных функциях, однако для  $K_{ss}(p)$  легко получить представление

$$K_{ss}(p) = \frac{i}{2\gamma} \int_0^\pi \ln \frac{e^{\gamma p} e^{-i\theta} + 1}{e^{\gamma p} + e^{-i\theta}} d\theta - \frac{\pi^2}{4\gamma}, \quad (6.99)$$

где константа интегрирования выбрана из естественного условия

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} K_{ss}(p) = 0. \quad (6.100)$$

Аналогичным образом, рассматривая случай  $n_1=n_2=1$ , получаем

$$K_{sb}(p, \xi, \rho) = K_{ss}\left(p - \frac{\pi i}{2\gamma} - \frac{\xi}{2} + \frac{i\rho}{2}\right) + K_{ss}\left(p + \frac{\pi i}{2\gamma} - \frac{\xi}{2} - \frac{i\rho}{2}\right), \quad (6.101)$$

$$K_{bs}(\xi, \rho, p) = K_{ss}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{i\rho}{2} - p - \frac{\pi i}{2\gamma}\right) + K_{ss}\left(\frac{\xi}{2} - \frac{i\rho}{2} - p + \frac{\pi i}{2\gamma}\right). \quad (6.102)$$

И, наконец, полагая  $n_1=0, n_2=2$ , имеем

$$\begin{aligned} K_{bb}(\xi_1, \rho_1, \xi_2, \rho_2) &= K_{sb}\left(\frac{\xi_1 - i\rho_1}{2} + \frac{\pi i}{2\gamma}, \xi_2, \rho_2\right) + \\ &+ K_{sb}\left(\frac{\xi_1 + i\rho_1}{2} - \frac{\pi i}{2\gamma}, \xi_2, \rho_2\right) = K_{ss}\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 - i\rho_1 + i\rho_2}{2}\right) + \\ &+ K_{ss}\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 + i\rho_1 - i\rho_2}{2}\right) + K_{ss}\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 + i\rho_1 + i\rho_2}{2} - \frac{\pi i}{\gamma}\right) + \\ &+ K_{ss}\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 - i\rho_1 - i\rho_2}{2} + \frac{\pi i}{\gamma}\right). \quad (6.103) \end{aligned}$$

Формулы (6.102)—(6.103) подтверждают, что двойной солитон является связанным состоянием солитона и антисолитона. Действительно, они согласованы с тем, что двойной солитон получается из двухсолитонного решения с нулевым топологическим зарядом и параметрами  $\lambda_1=i\kappa_1, \lambda_2=i\kappa_2, \gamma_1=\bar{\gamma}_1, \gamma_2=\bar{\gamma}_2, \gamma_1\gamma_2 < 0$  аналитическим продолжением  $\lambda_1=-\bar{\lambda}_2, \gamma_1=\bar{\gamma}_2$ .

Разумеется, рассеяние солитонов можно описывать и в терминах параметров  $P_{sj}, Q_{sj}, P_{bk}, Q_{bk}, \rho_k, \varphi_k$ . Имеем

$$\begin{aligned} Q_{sj}^{(+)} &= Q_{sj}^{(-)} + \frac{\partial S}{\partial P_{sj}}, \quad j = 1, \dots, n_1; \\ Q_{bk}^{(+)} &= Q_{bk}^{(-)} + \frac{\partial S}{\partial P_{bk}}, \quad \varphi_k^{(+)} = \varphi_k^{(-)} + \frac{\partial S}{\partial \rho_k}, \quad k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2, \end{aligned} \quad (6.104)$$

где производящая функция  $S$  получается из (6.94)—(6.95) заменой переменных (6.49)—(6.50).

На этом мы заканчиваем изложение модели SG в лабораторных координатах  $x, t$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \varphi = 0. \quad (6.105)$$

Она представляет собой уникальный пример вполне интегрируемой модели релятивистской теории поля, имеющей богатый спектр возбуждений и содержательную факторизованную теорию рассеяния.

### § 7. Модель SG в координатах светового конуса

Уравнение SG часто рассматривают в координатах светового конуса

$$\xi = \frac{t+x}{2}, \quad \eta = \frac{t-x}{2}, \quad (7.1)$$

в которых оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \chi = 0. \quad (7.2)$$

Локально уравнения (7.2) и (6.105) эквивалентны и их решения переходят друг в друга при замене переменных

$$\chi(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta, \xi + \eta), \quad \varphi(x, t) = \chi\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right). \quad (7.3)$$

Однако менее тривиальной является задача об описании связи классов решений, соответствующих различным граничным условиям. Мы дадим здесь параметризацию класса решений  $\chi(\xi, \eta)$ , отвечающих быстроубывающим граничным условиям для решения  $\varphi(x, t)$ .

Решение задачи (7.2) естественно параметризовать начальными данными на одной из характеристик, например, при  $\eta=0$ :

$$\chi(\xi) = \chi(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0}. \quad (7.4)$$

Быстроубывающие граничные условия  $\left(\text{mod } \frac{2\pi}{\beta}\right)$  для функции  $\chi(\xi)$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \chi(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \chi(\xi) = \frac{2\pi Q}{\beta}, \quad (7.5)$$

где граничные значения принимаются в смысле Шварца, а  $Q$  — целое, позволяют ввести топологический заряд

$$Q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (7.6)$$

Однако, как мы убедимся в этом ниже, *начальные данные*  $\chi(\xi)$ , порожденные решением  $\varphi(x, t)$  с быстроубывающими граничными условиями, удовлетворяют, помимо (7.5), еще бесконечной серии условий. Они, в частности, означают, что при  $|\xi| \rightarrow \infty$  убывают также и все производные решения  $\chi(\xi, \eta)$  по  $\eta$  при  $\eta=0$ :

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\partial^n \chi(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (7.7)$$

Последние можно записать в виде

$$Q_n = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\chi, \xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.8)$$

где  $F_n$  неявно определяется следующим образом:

$$F_n(\chi, \xi) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \eta^{n-1}} \sin \beta \chi |_{\eta=0}. \quad (7.9)$$

Правая часть (7.9) может быть выражена через начальные данные  $\chi(\xi)$  при помощи соотношений

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^k \chi}{\partial \eta^k} = -\frac{m^2}{\beta} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \eta^{k-1}} \sin \beta \chi, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (7.10)$$

последовательным интегрированием по  $\xi$ . В частности,

$$F_1 = \sin \beta \chi(\xi), \quad F_2 = -m^2 \cos \beta \chi(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} \sin \beta \chi(\xi') d\xi'. \quad (7.11)$$

Сходные условия возникают при рассмотрении высших уравнений SG в координатах светового конуса. Мы не будем здесь описывать их явно в терминах начальных данных  $\chi(\xi)$ . Ниже мы охарактеризуем их в терминах данных вспомогательной линейной задачи.

Отметим, что в линейном пределе

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + m^2 \chi = 0 \quad (7.12)$$

соответствующие условия принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \chi(\xi) d\xi = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7.13)$$

так что преобразование Фурье функции  $\chi(\xi)$  исчезает в нуле вместе со всеми производными.

Опишем теперь гамильтонову картину, связанную с уравнением SG в координатах светового конуса и параметризации  $\chi(\xi)$ . Пуассонова структура формально задается скобками Пуассона

$$\{\chi(\xi), \chi(\xi')\} = \frac{1}{4} \text{sign}(\xi - \xi'), \quad (7.14)$$

а фазовое пространство образовано функциями  $\chi(\xi)$ , удовлетворяющими условию (7.5) и отмеченным выше связям. Гамиль-

тоннан модели имеет вид

$$H = \frac{2m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \beta \chi(\xi)) d\xi, \quad (7.15)$$

и уравнения движения

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \{H, \chi\} \quad (7.16)$$

совпадают с (7.2). Роль импульса играет функционал

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} \right)^2 d\xi. \quad (7.17)$$

Наличие связей не влияет на вид уравнений движения (7.16). Можно проверить, что связи находятся в инволюции как с гамильтонианом  $H$ , так и с импульсом  $P$  на «поверхности связей». Ниже мы убедимся, что эта охарактеризованная весьма неявно пуассонова структура индуцируется стандартной пуассоновой структурой в переменных  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$ .

Перейдем теперь к формулировке основных утверждений этого параграфа.

I. Пусть  $\chi(\xi, \eta)$  — решение уравнения (7.2), удовлетворяющее условию (7.5) и сформулированным выше связям. Тогда формула (7.3) дает решение  $\varphi(x, t)$  уравнения (6.105) в классе быстроубывающих начальных данных

$$\varphi(x) = \chi(x/2, -x/2), \quad (7.18)$$

$$\pi(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \chi(\xi, \eta) \Big|_{\xi = -\eta = x/2}. \quad (7.19)$$

Топологические заряды решений  $\chi$  и  $\varphi$  совпадают.

II. Пусть  $\varphi(x, t)$  — решение уравнения (6.105) с быстроубывающими граничными условиями. Тогда формула (7.3) дает решение  $\chi(\xi, \eta)$  уравнения (7.2) с начальными данными

$$\chi(\xi) = \varphi(\xi, \xi), \quad (7.20)$$

удовлетворяющими условию (7.5) и связям. Топологические заряды этих решений совпадают.

Сформулированные утверждения означают совпадение классов решений уравнения  $SG$ , параметризованных начальными данными  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$  в лабораторных координатах и  $\chi(\xi)$  в координатах светового конуса.

III. Для указанных классов решений имеет место связь гамильтонианов и импульсов:

$$H(\chi) = P(\pi, \varphi) + H(\pi, \varphi), \quad (7.21)$$

$$P(\chi) = P(\pi, \varphi) - H(\pi, \varphi). \quad (7.22)$$

IV. Пуассоновы структуры (6.1) и (7.14) эквивалентны. На решениях уравнения SG имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\chi'(\xi) \wedge d\chi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\pi(x) \wedge d\varphi(x) dx, \quad (7.23)$$

где штрих обозначает производную по  $\xi$ .

Доказательство утверждений I—IV будет дано при помощи формализма обратной задачи. Приведем его формулировку для уравнения (7.2).

1) Представление нулевой кривизны получается из (I.1.30)—(I.1.31) заменой переменных (7.1). Соответствующие матрицы  $U_x$  и  $V_x$  имеют вид

$$\begin{aligned} U_x(\xi, \eta, \lambda) &= V_{\pi, \varphi}(x, t, \lambda) + U_{\pi, \varphi}(x, t, \lambda) = \\ &= \frac{\beta}{4i} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \sigma_3 + \frac{m\lambda}{2i} e^{\frac{i\beta\chi(\xi)}{2} \sigma_3} \sigma_2, \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} V_x(\xi, \eta, \lambda) &= V_{\pi, \varphi}(x, t, \lambda) - U_{\pi, \varphi}(x, t, \lambda) = \\ &= -\frac{\beta}{4i} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \sigma_3 + \frac{m}{2i\lambda} e^{-\frac{i\beta\chi(\xi)}{2} \sigma_3} \sigma_2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Вспомогательная линейная задача

$$\frac{dF}{d\xi} = U_x(\xi, \lambda) F \quad (7.26)$$

калибровочным преобразованием

$$F(\xi, \lambda) = e^{\frac{i\beta\chi(\xi)}{4} \sigma_3} \tilde{F}(\xi, \lambda) \quad (7.27)$$

приводится к виду

$$\frac{d\tilde{F}}{d\xi} = \left( \frac{m\lambda}{2i} \sigma_2 + \frac{\beta}{2i} \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} \sigma_3 \right) \tilde{F}. \quad (7.28)$$

Переходя к новому базису в  $\mathbb{C}^2$ , приводящему к замене матриц Паули

$$\sigma_2 \mapsto \sigma_3, \quad \sigma_3 \mapsto -\sigma_2, \quad \sigma_1 \mapsto \sigma_1, \quad (7.29)$$

получим матрицу  $U(\xi, \lambda)$  в виде

$$U(\xi, \lambda) = \frac{m\lambda}{2i} \sigma_3 - \frac{\beta}{2i} \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} \sigma_2. \quad (7.30)$$

Эта матрица буквально совпадает с соответствующей матрицей из вспомогательной линейной задачи для модели НШ

$$U(\xi, \lambda) = U^{\text{НШ}}(\xi, m\lambda), \quad (7.31)$$

где  $\kappa = -\beta^2/4 < 0$  и

$$\Psi(\xi) = -\bar{\Psi}(\xi) = i \frac{d\chi}{d\xi}(\xi) \quad (7.32)$$

(см. § 1.2 части I). Последнее условие означает, что имеется дополнительная инволюция

$$U(\xi, -\lambda) = \sigma_2 U(\xi, \lambda) \sigma_2. \quad (7.33)$$

2) Матрица перехода  $T(\xi, \xi', \lambda)$ , решения Йоста  $T_{\pm}(\xi, \lambda)$  и приведенная матрица монодромии  $T(\lambda)$ , помимо общих свойств из гл. I части I, удовлетворяют дополнительной инволюции, вытекающей из (7.33). Для матрицы  $T(\lambda)$  она имеет вид

$$T(-\lambda) = \bar{T}(\lambda). \quad (7.34)$$

Таким образом, коэффициенты перехода непрерывного спектра  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  удовлетворяют дополнительному условию

$$a(\lambda) = \bar{a}(-\lambda), \quad b(\lambda) = \bar{b}(-\lambda), \quad (7.35)$$

характерному для модели SG в лабораторных координатах (см. (4.54)).

Аналогичным образом убеждаемся, что дискретный спектр  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$  и соответствующие коэффициенты перехода  $\gamma_j, \bar{\gamma}_j, j=1, \dots, n$ , обладают всеми свойствами, перечисленными в § 4.

3) Граничные условия (7.5) приводят к соотношениям

$$a(0) = (-1)^q, \quad b(0) = 0. \quad (7.36)$$

Связи  $Q_n = 0$ , а также их аналоги, порожденные высшими уравнениями SG, означают, что вместе с  $b(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$  исчезают и все производные

$$\left. \frac{d^n b(\lambda)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.37)$$

Последнее утверждение мы не можем здесь полностью доказать, так как выше мы не описали все связи явно. Вместо этого мы примем набор условий (7.37) за определение полного набора связей.

При этих условиях справедливо асимптотическое разложение при  $\lambda \rightarrow 0$

$$\ln a(\lambda) = i \sum_{n=0}^{\infty} I_{-n} \lambda^n, \quad I_{-2n} = 0, \quad n > 0, \quad (7.38)$$

где

$$I_0 \equiv \pi Q \pmod{2\pi}, \quad (7.39)$$

$$I_{-1} = \frac{\beta^2}{4m} H, \quad (7.40)$$

а  $I_{-n}$  при  $n > 1$  порождают высшие уравнения SG. Эти интегралы движения нелокальны.

При  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеем асимптотическое разложение

$$\ln a(\lambda) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}, \quad I_{2n} = 0, \quad (7.41)$$

определяющее серию локальных интегралов движения  $I_n$ . Их плотности являются полиномами от  $\chi(\xi)$  и ее производных в точке  $\xi$ . В частности,

$$I_1 = \frac{\beta^2}{4m} P. \quad (7.42)$$

4) Временная динамика коэффициентов перехода дается следующими формулами:

$$a(\lambda, \eta) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, \eta) = e^{\frac{mi}{\lambda} \eta} b(\lambda, 0), \quad (7.43)$$

$$\lambda_j(\eta) = \lambda_j(0), \quad \gamma_j(\eta) = e^{\frac{mi}{\lambda_j} \eta} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, n.$$

Динамика, порожденная функционалами  $\frac{4m}{\beta^2} I_{-l}$ ,  $l \equiv 1 \pmod{2}$ , описывается аналогичными формулами с заменой  $\exp\left\{\frac{mi}{\lambda} \eta\right\}$  (соответственно  $\exp\left\{\frac{mi}{\lambda_j} \eta\right\}$ ) на  $\exp\left\{\frac{mi}{\lambda^l} \eta\right\}$  (соответственно  $\exp\left\{\frac{mi}{\lambda_j^l} \eta\right\}$ ). Подчеркнем, что условия (7.37) инвариантны по отношению к динамике.

5) Обратная задача для нашей модели является частным случаем обратной задачи для модели НШ, рассмотренной в гл. II части I. Дополнительная инволюция (7.35) приводит к тому, что функция  $\frac{d\chi}{d\xi}(\xi)$  вещественнозначна.

Перечисленные результаты позволяют дать доказательство утверждений I—IV. Начнем с утверждения I. Рассмотрим вспомогательную линейную задачу (7.28) с коэффициентом  $\frac{\partial \chi}{\partial \xi}(\xi, \eta)$  при фиксированном  $\eta$ . Пусть  $\tilde{T}_{\pm}(\xi, \eta, \lambda)$  — соответствующие решения Йоста. В силу условия нулевой кривизны матрицы

$$F_{\pm}(\xi, \eta, \lambda) = e^{\frac{i\beta\chi(\xi)}{4} \sigma_3} \tilde{T}_{\pm}(\xi, \eta, \lambda) e^{-\frac{mi}{2\lambda} \eta \sigma_3} \quad (7.44)$$



удовлетворяют системе

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial \xi} = U_x(\xi, \eta, \lambda) F_{\pm}, \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial \eta} = V_x(\xi, \eta, \lambda) F_{\pm}. \quad (7.46)$$

При  $\xi \rightarrow \pm \infty$ ,  $\eta = \text{const}$  они имеют асимптотики

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F_{-}(\xi, \eta, \lambda) \exp\left\{\frac{mi}{2}\left(\lambda\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right)\sigma_3\right\} = \mathcal{E}, \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} F_{+}(\xi, \eta, \lambda) \exp\left\{\frac{mi}{2}\left(\lambda\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right)\sigma_3\right\} = \\ = \begin{cases} (-1)^{Q/2} \mathcal{E}, & Q - \text{четно,} \\ (-1)^{(Q-1)/2} i\sigma_3 \mathcal{E}, & Q - \text{нечетно,} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.48)$$

где матрица  $\mathcal{E}$  введена в (5.21) и реализует автоморфизм (7.29).

Эти асимптотики имеют место и вдоль пространственно-подобных прямых  $\eta = c\xi$ ,  $c < 0$  при  $\xi \rightarrow \pm \infty$ , что следует из

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{mi}{2}\left(\lambda + \frac{c}{\lambda}\right)\xi} f(\lambda) d\lambda = 0, \quad (7.49)$$

где функция  $f(\lambda)$  принадлежит пространству Шварца и исчезает при  $\lambda=0$  вместе со всеми производными. Действительно, именно такие выражения мы имеем в ядрах уравнений Винера—Хопфа или Гельфанда—Левитана—Марченко (см. § II.2—II.4 части I), которые, тем самым, исчезают вдоль указанных направлений. Вместе с ними убывают и соответствующие решения — ядра в интегральных представлениях для решений Йоста, обеспечивая справедливость асимптотик типа (7.47), (7.48).

Полагая  $\eta = -\xi + O(1)$ , получаем, что матрицы

$$\tilde{F}_{\pm}(x, t, \lambda) = F_{\pm}\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}, \lambda\right) \quad (7.50)$$

при  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $t = \text{const}$  имеют асимптотики

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{F}_{-}(x, t, \lambda) \exp\left\{\frac{mi}{4}\left(\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)t\right)\sigma_3\right\} = \mathcal{E}, \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{F}_{+}(x, t, \lambda) \exp\left\{\frac{mi}{4}\left(\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)t\right)\sigma_3\right\} = \\ = \begin{cases} (-1)^{Q/2} \mathcal{E}, & Q - \text{четно,} \\ (-1)^{(Q-1)/2} i\sigma_3 \mathcal{E}, & Q - \text{нечетно.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Соответствующие им матрицы  $U$  и  $V$

$$U(x, t, \lambda) = \frac{\partial \tilde{F}_{\pm}}{\partial x} \tilde{F}_{\pm}^{-1}, \quad V(x, t, \lambda) = \frac{\partial \tilde{F}_{\pm}}{\partial t} \tilde{F}_{\pm}^{-1} \quad (7.53)$$

представляются в виде (I.1.30)—(I.1.31), где функция  $\varphi(x, t)$  дается формулой (7.3), а  $\pi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$ . Из асимптотик (7.51)—(7.52) следует

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x, t, \lambda) &= \frac{m}{4i} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sigma_2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x, t, \lambda) &= \frac{m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sigma_2, \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, t, \lambda) &= \frac{(-1)^Q m}{4i} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sigma_2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, t, \lambda) &= \frac{(-1)^Q m}{4i} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sigma_2, \end{aligned} \quad (7.55)$$

откуда получаем, что начальные данные (7.18)—(7.19) удовлетворяют быстроубывающим граничным условиям. При этом матрицы

$$T_{\pm}(x, t, \lambda) = \tilde{F}_{\pm}(x, t, \lambda) e^{-\frac{mi}{4} \left( t + \frac{1}{\lambda} \right) i \sigma_3} \quad (7.56)$$

являются решениями Йоста вспомогательной линейной задачи (4.1) с теми же коэффициентами перехода и дискретным спектром, что и у задачи (7.28).

Утверждение I доказано. Утверждение II доказывается аналогично.

Для доказательства утверждения III рассмотрим 1-форму на  $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (h + p) dx - \left( h + p - \frac{2m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \varphi) \right) dt, \quad (7.57)$$

где

$$h = \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \varphi), \quad (7.58)$$

$$p = -\pi \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7.59)$$

Форма  $\omega$  замкнута на решениях уравнения SG в силу закона сохранения энергии — импульса

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7.60)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( h - \frac{2m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \varphi) \right). \quad (7.61)$$

Проинтегрируем ее по замкнутому контуру  $l$  в  $(x, t)$ -плоскости, ограничивающему два прямоугольных треугольника, изображенных на рис. 3.

Имеем

$$0 = \int_l \omega = \int_{-2X}^{2X} (h + p)|_{t=0} dx - \frac{2m^2}{\beta^2} \int_{-X}^X (1 - \cos \beta \chi(\xi))|_{\eta=0} d\xi + \\ + \int_{-X}^0 \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)^2 \Big|_{\xi=X} d\eta + \int_0^X \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)^2 \Big|_{\xi=-X} d\eta, \quad (7.62)$$

где мы использовали, что  $\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Из быстрого убывания функции  $\frac{\partial \chi}{\partial \eta}$  при  $\xi \rightarrow \pm \infty$  следует, что последние два слагаемых в (7.62) исчезают при  $X \rightarrow \infty$ , и в пределе мы получаем равенство (7.21). Равенство (7.22) доказывается аналогично.

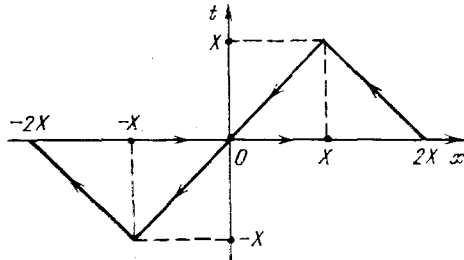


Рис. 3

Для доказательства утверждения IV рассмотрим эволюцию вариации  $d\varphi$  решения  $\varphi$ . Она дается линеаризованным уравнением

$$\frac{\partial^2 d\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 d\varphi}{\partial x^2} + m^2 \cos \beta \varphi d\varphi = 0, \quad (7.63)$$

из которого следует замкнутость 1-формы  $\theta$ ,

$$\theta = \left( d \frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge d\varphi \right) dx + \left( d \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge d\varphi \right) dt, \quad (7.64)$$

на  $\mathbb{R}^2$ . Интегрируя ее по контуру  $l$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( d \frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge d\varphi \right) \Big|_{t=0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( d \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \wedge d\chi \right) \Big|_{\eta=0} d\xi, \quad (7.65)$$

что и доказывает равенство (7.23).

Итак, мы установили эквивалентность моделей, порождаемых уравнением SG в лабораторных координатах и координатах светового конуса, как на уровне уравнений движения и гра-

ничных условий, так и в рамках их естественной гамильтоновой интерпретации. В частности, обе эти модели являются вполне интегрируемыми и описываются одним и тем же набором канонических переменных типа действие — угол.

**§ 8. Уравнение Л — Л как универсальная интегрируемая модель с двумерным вспомогательным пространством**

Модель Л — Л описывается уравнениями движения

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} + \vec{S} \wedge J \vec{S}, \tag{8.1}$$

где  $J$  — диагональная матрица,  $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ ,  $J_1 < J_2 < J_3$ . Соответствующие матрицы  $U$  и  $V$  из представления нулевой кривизны имеют вид

$$U(x, t, \lambda) = \frac{1}{i} \sum_{a=1}^3 u_a(\lambda) S_a \sigma_a, \tag{8.2}$$

$$V(x, t, \lambda) = 2iu_1(\lambda) u_2(\lambda) u_3(\lambda) \sum_{a=1}^3 \frac{S_a}{u_a(\lambda)} \sigma_a + \frac{1}{i} \sum_{a,b,c=1}^3 u_a(\lambda) \varepsilon_{abc} S_b \frac{\partial S_c}{\partial x} \sigma_a, \tag{8.3}$$

где

$$u_1(\lambda) = \rho \frac{1}{\text{sn}(\lambda, k)}, \quad u_2(\lambda) = \rho \frac{\text{dn}(\lambda, k)}{\text{sn}(\lambda, k)}, \quad u_3(\lambda) = \rho \frac{\text{cn}(\lambda, k)}{\text{sn}(\lambda, k)} \tag{8.4}$$

и

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{J_3 - J_1} > 0, \quad 0 < k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}} < 1 \tag{8.5}$$

(см. § 1.1).

В отличие от рассмотренных ранее примеров моделей НШ, МГ и SG, где спектральный параметр  $\lambda$  пробегает всю комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ , для модели Л — Л естественной областью изменения  $\lambda$  является эллиптическая кривая — тор  $E = \mathbb{C}/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — решетка с образующими  $4K$  и  $4iK'$ . Здесь  $K$  и  $K'$  — полные эллиптические интегралы модулей  $k$  и  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  соответственно. В результате исследование прямой и обратной задач для вспомогательной линейной задачи модели Л — Л оказывается технически более громоздким, и мы не будем его здесь приводить, а ограничимся лишь рядом замечаний кинематического характера. Именно, мы покажем, что модель Л — Л допускает  $r$ -матричную формулировку, и опишем предельные переходы, приводящие к моделям МГ, НШ и SG.

Начнем с гамильтоновой формулировки. Рассмотрим основные скобки Пуассона модели  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$

$$\{S_a(x), S_b(y)\} = -\varepsilon_{abc} S_c(x) \delta(x-y) \quad (8.6)$$

и запишем их в терминах матрицы  $U(x, \lambda)$

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = \sum_{a,b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} u_a(\lambda) u_b(\mu) S_c(x) (\sigma_a \otimes \sigma_b) \delta(x-y). \quad (8.7)$$

Наша цель состоит в том, чтобы представить правую часть (8.7) в виде следующего коммутатора:

$$[r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x-y).$$

Для этого воспользуемся теоремами сложения для эллиптических функций Якоби. В терминах функций  $u_a(\lambda)$  они приводят к тождествам

$$u_a(\lambda) u_b(\mu) = u_a(\lambda - \mu) u_c(\mu) - u_b(\lambda - \mu) u_c(\lambda), \quad (8.8)$$

где набор  $(a, b, c)$  является циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Из формул (8.7) — (8.8) немедленно получаем фундаментальные скобки Пуассона модели  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x-y), \quad (8.9)$$

где матрица  $r(\lambda)$  имеет вид

$$r(\lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 u_a(\lambda) \sigma_a \otimes \sigma_a. \quad (8.10)$$

Формулы (8.8) показывают также, что матрица  $r(\lambda)$  удовлетворяет уравнениям

$$r(-\lambda) = -Pr(\lambda)P \quad (8.11)$$

и

$$[r_{12}(\lambda - \mu), r_{13}(\lambda) + r_{23}(\mu)] + [r_{13}(\lambda), r_{23}(\mu)] = 0 \quad (8.12)$$

(см. § III.1 части I), которые обеспечивают совместность скобок Пуассона (8.9) со свойством антисимметрии и тождеством Якоби. На самом деле (8.10) представляет собой общее решение уравнений (8.11) — (8.12) для случая матриц  $4 \times 4$ . Более подробно об этом будет сказано в гл. IV, где будет показано, что фазовое пространство матриц  $U(x, \lambda)$  интерпретируется как простейшая орбита подходящей бесконечномерной алгебры Ли.

Убедимся теперь, что рассмотренные выше интегрируемые модели с двумерным вспомогательным пространством и мини-

мальным дивизором полюсов получаются из модели Л — Л различными предельными переходами.

Простейший из них отвечает случаю  $k \rightarrow 0$ , при котором  $K \rightarrow \infty$ ,  $K' \rightarrow \pi/2$  и эллиптическая кривая  $E$  вырождается в рациональную кривую — цилиндр  $\mathbb{C}/\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ . При этом эллиптические функции Якоби переходят в тригонометрические:

$$\operatorname{sn}(\lambda, k) \rightarrow \sin \lambda, \quad \operatorname{cn}(\lambda, k) \rightarrow \cos \lambda, \quad \operatorname{dn}(\lambda, k) \rightarrow 1. \quad (8.13)$$

В результате приходим к *частично анизотропной модели* МГ — частному случаю модели Л — Л, отвечающему условию  $J_1 = J_2 < J_3$ . Представление нулевой кривизны для этой модели и  $r$ -матрица получаются из формул (8.3) — (8.4) и (8.10) в результате замены (8.13). Полагая в полученной  $r$ -матрице  $\lambda = i\alpha$  и  $\rho = i\gamma$ , приходим к выражению (6.14) для  $r$ -матрицы модели SG с точностью до несущественного слагаемого, пропорционального матрице  $I \otimes I$ .

Полностью изотропная модель Л — Л — модель МГ — появляется в результате предела  $\rho \rightarrow 0$ , при котором  $J_2 \rightarrow J_3$ . Заменяя в соответствующих формулах для частично анизотропной модели МГ  $\lambda$  на  $2\rho/\lambda$  и переходя к пределу  $\rho \rightarrow 0$ , получаем представление нулевой кривизны (I.1.14) и  $r$ -матрицу (3.9) для модели МГ.

Таким образом, модель Л — Л является наиболее общей моделью магнетика, допускающей  $r$ -матричную формулировку.

Теперь мы покажем, что модели SG и НШ также получают предельными переходами из модели Л — Л. Тем самым эта модель действительно является универсальной для интегрируемых систем с двумерным фазовым пространством при фиксированном  $x$ . Мы не выбрали ее в качестве основной модели для этой книги только потому, что ее исследование технически сложнее по сравнению с моделью НШ.

При переходе к моделям SG и НШ, помимо вырождения эллиптической кривой  $E$ , участвует контракция фазового пространства модели Л — Л. Она основана на еще не использованной нами схеме в описании фазового пространства, состояющей в следующем: вместо сферы радиуса 1 в  $\mathbb{R}^3$ , на которой меняется вектор  $\vec{S}(x)$ , мы можем рассматривать сферу произвольного радиуса  $R > 0$ ; кроме того, в пуассоновой структуре (8.6) мы можем выбирать произвольную «константу связи»  $\eta > 0$

$$\{S_a(x), S_b(y)\} = -\eta \epsilon_{abc} S_c(x) \delta(x-y). \quad (8.14)$$

Конечно, при фиксированных  $R$  и  $\eta$  этот произвол можно устранить растяжением  $\vec{S}$  и заменой независимой переменной  $x$ . Однако в пределах  $R \rightarrow \infty$ , или  $\eta \rightarrow 0$ , которые мы будем использовать ниже, такая замена неестественна.

Итак, будем считать, что переменные  $\vec{S}(x)$  меняются на сфере радиуса  $R$ :

$$\vec{S}^2(x) = R^2, \quad (8.15)$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} + \vec{S} \wedge J \vec{S} \quad (8.16)$$

и имеют скобки Пуассона (8.14). При этом  $r$ -матрица в (8.9) отличается от (8.10) на множитель  $\eta$ , и в представлении нулевой кривизны следует модифицировать матрицу  $V$ : второе слагаемое в (8.3) следует поделить на  $R^2$ .

Рассмотрим переход к модели SG и начнем с уравнений движения. Совершим в (8.16) замену переменных  $\vec{S}(x, t) \mapsto \pi(x, t)$ ,  $\varphi(x, t)$  по формулам

$$S_1 = -\frac{\beta\pi}{2}, \quad S_2 = \sqrt{R^2 - \frac{\beta^2\pi^2}{4}} \sin \frac{\beta\varphi}{2}, \quad S_3 = \sqrt{R^2 - \frac{\beta^2\pi^2}{4}} \cos \frac{\beta\varphi}{2}, \quad (8.17)$$

где  $\beta > 0$ , и выберем параметры  $J_1, J_2, J_3$  в виде

$$J_2 = J_1 + 1, \quad J_3 = J_2 + m^2/R^2. \quad (8.18)$$

После этого несложно убедиться, что в уравнении (8.16) в новых переменных можно перейти к пределу  $R \rightarrow \infty$ , и оно превращается в уравнение SG

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta\varphi = 0 \quad (8.19)$$

$$\text{и } \pi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Для осуществления предельного перехода  $R \rightarrow \infty$  в представлении нулевой кривизны удобно сделать сдвиг спектрального параметра  $\lambda = \alpha + K$ , так что

$$\tilde{u}_1(\alpha) = u_1(\alpha + K) = \rho \frac{\operatorname{dn}(\alpha, k)}{\operatorname{cn}(\alpha, k)}, \quad (8.20)$$

$$\tilde{u}_2(\alpha) = u_2(\alpha + K) = \rho \frac{k'}{\operatorname{cn}(\alpha, k)}, \quad (8.21)$$

$$\tilde{u}_3(\alpha) = u_3(\alpha + K) = -\rho k' \frac{\operatorname{sn}(\alpha, k)}{\operatorname{cn}(\alpha, k)}. \quad (8.22)$$

Используя равенства

$$\operatorname{sn}(\alpha, 1) = \operatorname{th} \alpha, \quad \operatorname{cn}(\alpha, 1) = \operatorname{dn}(\alpha, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \quad (8.23)$$

и вытекающие из (8.5), (8.18) формулы

$$\rho = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad k' = \frac{m}{R} + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad (8.24)$$

для коэффициентов  $\tilde{u}_a(\alpha)$  получаем следующие асимптотики при  $R \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow 1$ ):

$$\tilde{u}_1(\alpha) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (8.25)$$

$$\tilde{u}_2(\alpha) = \frac{m}{2R} \operatorname{ch} \alpha + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad (8.26)$$

$$\tilde{u}_3(\alpha) = -\frac{m}{2R} \operatorname{sh} \alpha + O\left(\frac{1}{R^3}\right). \quad (8.27)$$

Подставим теперь эти формулы и выражения (8.17) для  $S_a$  в (8.2) и модифицированную формулу (8.3) и перейдем к пределу  $R \rightarrow \infty$ . В результате мы получим представление нулевой кривизны для модели SG, которое после автоморфизма матриц Паули

$$\sigma_1 \rightarrow -\sigma_3, \quad \sigma_2 \rightarrow \sigma_1, \quad \sigma_3 \rightarrow -\sigma_2 \quad (8.28)$$

и замены  $\lambda = e^\alpha$  совпадает с формулами (I.1.30) — (I.1.32).

Стандартная пуассонова структура модели SG получается из скобок Пуассона (8.14) с  $\eta = \beta^2/4$  в результате замены переменных (8.17) и предельного перехода  $R \rightarrow \infty$ . Как отмечалось выше, множитель  $\beta^2/4$  появляется и в  $r$ -матрице; используя формулу (8.23) и автоморфизм (8.28), мы получаем из нее  $r$ -матрицу модели SG (с точностью до несущественного слагаемого, пропорционального матрице  $I \otimes I$ ).

Рассмотрим теперь переход к уравнению НШ. Будем считать, что  $R=1$ , и использовать предельный переход  $\eta \rightarrow 0$ . Положим

$$(S_1 + iS_2)(x, t) = \sqrt{2\eta} e^{2ixt/\eta} \psi(x, t), \quad (8.29)$$

$$S_3(x, t) = \sqrt{1 - 2\eta} |\psi(x, t)|^2, \quad (8.30)$$

$$J_1 = J_2, \quad J_3 = J_1 - 2\kappa/\eta, \quad (8.31)$$

где  $\kappa > 0$  — новый параметр. Подставляя эти формулы в уравнение (8.1) и переходя к пределу  $\eta \rightarrow 0$ , мы получим, что функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению НШ

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa |\psi|^2 \psi. \quad (8.32)$$

Для предельного перехода в представлении нулевой кривизны частично анизотропной модели МГ удобно положить  $\lambda = \alpha + \pi/2$ , так что

$$\tilde{u}_1(\alpha) = \tilde{u}_2(\alpha) = u_1\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = u_2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{-\frac{\kappa}{2\eta}} / \cos \alpha, \quad (8.33)$$

$$\tilde{u}_3(\alpha) = u_3\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{-\frac{\kappa}{2\eta}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.34)$$



Еще раз полагая  $\alpha = -\sqrt{\frac{\eta}{-2x}} \lambda$ , подставим формулы (8.29)—(8.30) и (8.33)—(8.34) в (8.2)—(8.3), совершим калибровочное преобразование с матрицей  $\exp \frac{ixt}{\eta} \sigma_3$  и перейдем к пределу  $\eta \rightarrow 0$ . Как нетрудно убедиться, в результате мы получим представление нулевой кривизны для модели НШ из § I.2 части I.

Стандартная пуассонова структура модели НШ получается, с использованием формул (8.29)—(8.30), из скобок Пуассона (8.14) при  $\eta \rightarrow 0$ . В этом же пределе мы получим  $r$ -матрицу модели НШ из § III.1 части I (с точностью до несущественного единичного слагаемого).

Геометрический смысл приведенных контракций фазового пространства модели  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  очевиден. При фиксированном  $x$  динамические переменные модели  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  лежат на сфере  $S^2$  и скобки Пуассона (8.6) порождаются симплектической структурой — формой площади на  $S^2$ . Соответствующие фазовые пространства моделей SG и НШ суть цилиндр  $S^1 \times \mathbb{R}^1$  и плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Эти многообразия получаютсЯ контракцией сферы  $S^2$  при растяжении полосы вдоль выделенного меридиана и круговой шапочки на северном полюсе соответственно. Формы площади на  $S^1 \times \mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^2$  и определяют симплектические структуры для моделей SG и НШ.

На этом мы заканчиваем конкретное описание непрерывных интегрируемых моделей. В гл. IV мы еще вернемся к их общему рассмотрению и классификации с ли-алгебраической точки зрения.

## § 9. Комментарии и литературные указания

1) Метод обратной задачи для модели МГ был развит в работе [2.57]. Полная интегрируемость этой модели в быстроубывающем случае была установлена в работах [2.20], [2.47]; в частности, в [2.47] были приведены канонические переменные типа действие — угол. Связь пуассоновых структур моделей МГ и НШ при калибровочном преобразовании отмечалась в [2.27].

2) Метод обратной задачи для модели SG в лабораторных координатах был сформулирован в работах [2.18], [2.36]. В [2.36—2.37] была доказана полная интегрируемость модели, приведены канонические переменные типа действие — угол и интерпретация спектра возбуждений в терминах релятивистской теории поля. Выражение для генератора лоренцевых вращений  $K$  через переменные действие — угол было дано в работе [2.44].

3) Модель SG в координатах светового конуса была проинтегрирована с помощью метода обратной задачи в работах [2.35], [2.43]. Установлению связей моделей SG в лабораторных координатах и координатах светового конуса посвящены работы [2.38], [2.49]. Формулировка связей (7.8) и доказательство эквивалентности гамильтоновых картин для этих моделей приведены в [2.38].

4) Уравнение SG в координатах светового конуса, записанное в эволюционном виде по отношению к параметру  $\eta$ :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = -\frac{m^2}{\beta} \int_{-\infty}^{\xi} \sin \beta \chi(\xi') d\xi', \quad (9.1)$$

является нелокальным. Поэтому класс быстроубывающих начальных данных не сохраняется в динамике. Полная система связей из § 7 выделяет из этого класса начальных данных подмножество, инвариантное по отношению к динамике для всех высших уравнений SG

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = -\frac{2m}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\delta I_{-n}}{\delta \chi(\xi')} d\xi', \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

Эти связи определяются процедурой, аналогичной изложенной в § 7.

5) Для плотностей интегралов движения  $J_n^{(1)}$  модели SG в лабораторных координатах, вычисленных на решениях уравнений движения, выполняются соотношения

$$\frac{\partial J_n^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial J_n^{(n)}}{\partial x}, \quad n = -\infty, \dots, \infty, \quad n \equiv 1 \pmod{2}. \quad (9.3)$$

Здесь  $J_n^{(0)}(x, t)$  — полиномы от функций  $\varphi(x, t)$ ,  $\pi(x, t)$  и их производных по  $x$ , просто определяемые из представления нулевой кривизны (см., например, [2.14]). Из (9.3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (J_n^{(0)} + J_n^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (J_n^{(0)} - J_n^{(1)}), \quad (9.4)$$

и поэтому (см. § 7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_n^{(1)}|_{t=0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (J_n^{(0)} + J_n^{(1)})|_{\eta=0} d\xi. \quad (9.5)$$

Выражения  $J_n^{(+)}(\chi) = J_n^{(0)}(\pi, \varphi) + J_n^{(1)}(\pi, \varphi)$  локальны по  $\chi$  и  $\frac{\partial \chi}{\partial \eta}$ ; нелокальность интегралов движения  $J_n^{(+)}(\chi)$  модели SG в координатах светового конуса при  $n < -1$  объясняется тем, что для таких  $n$  из  $J_n^{(0)}(\pi, \varphi) + J_n^{(1)}(\pi, \varphi)$  приходится исключать функцию  $\frac{\partial \chi}{\partial \eta}$  при помощи уравнения (9.1).

6) Описанная в § 7 связь гамильтоновых картин для модели SG в лабораторных координатах и координатах светового конуса является весьма общей; в частности, она имеет место для моделей главного кирального поля и  $n$ -поля.

7) Уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \operatorname{sh} \beta \varphi = 0 \quad (9.6)$$

в быстроубывающем случае исследуется буквально аналогично уравнению SG после замены  $\beta \rightarrow i\beta$  во вспомогательной линейной задаче (4.1). При этом последняя становится формально самосопряженной и коэффициент  $a(\lambda)$  не имеет нулей. Тем самым модель, описываемая уравнением (9.6), не имеет солитонов. В этом смысле взаимоотношение моделей (9.6) и SG такое же, как и моделей НШ в быстроубывающем случае при  $\kappa > 0$  и  $\kappa < 0$  соответственно.

8) В некотором смысле аналогами солитонов модели SG являются сингулярные решения уравнения (9.6). По поводу общего подхода к сингулярным решениям и их частицеподобной интерпретации см. обзор [2.54]. Вариант метода обратной задачи для построения сингулярных решений нелинейных уравнений изложен в работах [2.1—2.3].

9) Асимптотики решений уравнения SG при  $t \rightarrow \pm\infty$  в лабораторных координатах и  $\eta \rightarrow \pm\infty$  в координатах светового конуса были получены в работах [2.19], [2.22]. Соответствующие асимптотики для двумеризованной модели Тода, включающие, в частности, уравнение (9.6), были получены в работе [2.34].

10) Как и для модели НШ, для моделей МГ и SG можно определить иерархии пуассоновых структур. Порождающие их  $\Lambda$ -операторы приведены в работах [2.52], [2.48] и [2.50], соответственно.

11) Представление нулевой кривизны для модели Л—Л было получено в работах [2.11] и [2.56]. В [2.56] была исследована вспомогательная линейная задача для быстроубывающих граничных условий и введены переменные типа действие — угол. Подчеркнем, что в работе [2.56] на примере модели Л—Л впервые появилось понятие (классической)  $g$ -матрицы.

12) По поводу обозначений и свойств эллиптических функций Якоби см., например, [2.39].

13) Обратная задача для модели Л—Л как матричная задача Римана на эллиптической кривой была сформулирована и исследована в работах [2.53], [2.55], в которых были описаны и  $n$ -солитонные решения.

В [2.55] также обсуждалась матричная задача Римана на произвольной алгебраической кривой (компактной римановой поверхности).

14) Конструкция солитонных решений уравнения Л—Л при помощи процедуры одевания приведена в работах [2.6], [2.8], [2.10].

15) Конечнозонные решения уравнения SG как в лабораторных координатах, так и в координатах светового конуса были получены в работах [2.21], [2.23]. Алгебро-геометрическое решение проблемы вещественности было приведено в [2.41], а в терминах явных тэта-функциональных формул — в работах [2.4] (двухзонный случай) и [2.15] (общий случай). По поводу общей проблемы вещественности в конечнозонном интегрировании см. работу [2.33].

16) Общее алгебро-геометрическое описание конечнозонных решений уравнения Л—Л приведено в [2.42]. Явная конструкция, выражающая эти решения в терминах тэта-функций, была дана в работах [2.5], [2.7] для частной анизотропной модели МГ, а в работах [2.9], [2.45] — для уравнения Л—Л. Уравнение Л—Л выделено с точки зрения конечнозонного интегрирования тем, что участвующая в этом методе алгебраическая кривая  $\Gamma$  является двулистной накрытием эллиптической кривой, а не комплексной плоскости, как это было для моделей с рациональной зависимостью от спектрального параметра. Поэтому вместо тэта-функций Римана в окончательных формулах для конечнозонных решений появляются тэта-функции Прима [2.9], [2.46].

17) По поводу конструкции конечнозонных решений общего уравнения нулевой кривизны с рациональной зависимостью от спектрального параметра, помимо упомянутых выше работ, см. также обзоры [2.16], [2.24—2.25].

18) Уравнение Л—Л связано с интегрируемыми системами классической механики. В работе [2.13] показано, что стационарные (т. е. не зависящие от  $t$ ) решения уравнения Л—Л являются решениями задачи Неймана о движении частицы на двумерной сфере, а решения, зависящие только от комбинации  $x-ut$ , отвечают интегрируемому случаю задачи Клебша о движении твердого тела в жидкости. Явные формулы для этих решений в терминах тэта-функций Прима приведены в [2.9].

19) Полная интегрируемость перечисленных в гл. II моделей: модели КдФ, векторной модели НШ, модели  $N$ -волн и  $SO(N)$ -модели SG (для характерного случая  $N=3$ ) с быстроубывающими граничными условиями была доказана, соответственно, в работах [2.17], [2.30], [2.31] и [2.12], где и были введены канонические переменные типа действие — угол.

20) В векторной модели НШ солитоны имеют поляризацию, которая, вообще говоря, меняется в процессе взаимодействия [2.32]. Однако теория рассеяния солитонов по-прежнему является факторизованной [2.26], [2.29].

21) Модели, приведенные в § 1.2, допускают  $r$ -матричную формулировку:

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(x, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x - y); \quad (9.7)$$

здесь для векторной модели НШ с  $n$  цветами и модели  $N = \frac{n(n-1)}{2}$ -волн  $r(\lambda, \mu) = r(\lambda - \mu)$ , где

$$r(\lambda) = -\kappa \frac{P}{\lambda} \quad (9.8)$$

и

$$r(\lambda) = \frac{P}{\lambda} \quad (9.9)$$

соответственно, а  $P$  — матрица перестановки в  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$  (см. [2.28]). Для двумеризованной модели Тода имеем

$$r(\lambda, \mu) = -\frac{\lambda^n + \mu^n}{2(\lambda^n - \mu^n)} \sum_{i=1}^{n-1} H_i \otimes H_i - \frac{1}{\lambda^n - \mu^n} \sum_{\alpha} \lambda^{p(\alpha)} \mu^{n-p(\alpha)} E_{\alpha} \otimes E_{-\alpha} \quad (9.10)$$

(см. [2.51]). Здесь  $\alpha$  пробегает все корни алгебры Ли  $A_{n-1}$ ,  $p(\alpha) = 1, \dots, n-1$  — высота корня  $\alpha$  по  $\text{mod } n$ , а  $H_i, E_{\alpha}$  — базис Картана — Вейля алгебры Ли  $A_{n-1}$ .

22) Основные скобки Пуассона (1.3.15) модели КдФ содержат производную  $\delta$ -функции (неультралокальный случай), поэтому скобки Пуассона  $\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$  не представляются в виде (9.7). Последнее относится и к модели SG в координатах светового конуса. Однако скобки Пуассона для матриц перехода этих моделей уже представляются в привычном виде:

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)], \quad y \leq x \quad (9.11)$$

(см. [2.40]), где для модели КдФ

$$r(\lambda, \mu) = \frac{2}{\lambda^2 - \mu^2} P, \quad (9.12)$$

а  $r$ -матрицы моделей SG в лабораторных координатах и координатах светового конуса совпадают.

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ НА РЕШЕТКЕ

Здесь мы приведем полный список результатов по поводу модели Тода — фундаментальной модели на решетке. Мы покажем, что к ней применим  $r$ -матричный подход, и с его помощью докажем полную интегрируемость модели в квазипериодическом случае. Для быстроубывающих граничных условий мы изучим отображение  $\mathcal{F}$  от начальных данных вспомогательной линейной задачи к коэффициентам перехода и дадим процедуру решения обратной задачи — построения отображения  $\mathcal{F}^{-1}$ . На основании  $r$ -матричного подхода будет показано, что отображение  $\mathcal{F}$  представляет собой каноническое преобразование к переменным типа действие — угол, что доказывает полную интегрируемость модели Тода в быстроубывающем случае. Мы также введем решеточную модель РЛ — Л, являющуюся наиболее общей интегрируемой системой на решетке с двумерным вспомогательным пространством.

### § 1. Полная интегрируемость модели Тода в квазипериодическом случае

Уравнения движения модели имеют вид

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

где

$$q_{N+n} = q_n + c. \quad (1.2)$$

Она является гамильтоновой с фазовым пространством  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$  с координатами  $(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$ , стандартной пуассоновой структурой

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

и гамильтонианом

$$H = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2} p_n^2 + e^{q_{n+1} - q_n} \right) \quad (1.4)$$

(см. § 1.2).

Мы покажем, что *наша модель является вполне интегрируемой* в смысле классической гамильтоновой механики с конечным числом степеней свободы. Согласно теореме Лиувилля — Арнольда для этого достаточно предъявить набор из  $N$  инволютивных интегралов движения  $I_n$ :

$$\{H, I_n\} = 0, \quad \{I_n, I_m\} = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

функционально независимых:

$$\text{rang} \left( \frac{\partial I_m}{\partial p_n}, \frac{\partial I_m}{\partial q_n} \right) = N \quad (1.6)$$

на множестве полной меры в  $\mathcal{M}$ . Здесь в левой части стоит матрица  $N \times 2N$ , составленная из первых производных функций  $I_m$ .

Для доказательства рассмотрим вспомогательную линейную задачу для модели Toda

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n, \quad (1.7)$$

где

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_n + \lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

(см. § 1.2), и применим к ней  $r$ -матричный подход. *Естественным аналогом фундаментальных скобок Пуассона из гл. II будет соотношение*

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda, \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm}. \quad (1.9)$$

Действительно, матрицу  $L_n(\lambda)$  можно рассматривать как матрицу перехода (на один узел решетки), и скобки Пуассона для нее надо моделировать по аналогии с соответствующими формулами для матрицы  $T(x, y, \lambda)$ .

Для вычисления  $r$ -матрицы представим  $L_n(\lambda)$  в виде

$$L_n(\lambda) = (p_n + \lambda)\sigma + \text{sh } q_n \sigma_1 + i \text{ch } q_n \sigma_2, \quad (1.10)$$

где

$$\sigma = \frac{I + \sigma_3}{2}. \quad (1.11)$$

Из формул

$$\{p_n, \text{sh } q_m\} = \text{ch } q_n \delta_{nm}, \quad \{p_n, \text{ch } q_m\} = \text{sh } q_n \delta_{nm} \quad (1.12)$$

получаем

$$\begin{aligned} L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu) &= (i \text{sh } q_n (\sigma \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma) + \\ &+ \text{ch } q_n (\sigma \otimes \sigma_1 - \sigma_1 \otimes \sigma)) \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

так что левая часть (1.9) линейна по  $\text{sh } q_n$  и  $\text{ch } q_n$  и не зависит от  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $p_n$ . В произведении  $L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)$  линейные по  $\text{sh } q_n$  и

$\text{ch } q_n$  члены имеют вид

$$\text{sh } q_n (\lambda \sigma \otimes \sigma_1 + \mu \sigma_1 \otimes \sigma) + i \text{ch } q_n (\lambda \sigma \otimes \sigma_2 + \mu \sigma_2 \otimes \sigma),$$

а оставшиеся слагаемые коммутируют с матрицей перестановки  $P$ . Поэтому будем искать  $r$ -матрицу в виде

$$r(\lambda, \mu) = f(\lambda, \mu) P, \quad (1.14)$$

где  $f(\lambda, \mu)$  — неизвестная функция. Имеем

$$\begin{aligned} [P, \lambda \sigma \otimes \sigma_1 + \mu \sigma_1 \otimes \sigma] &= (\lambda - \mu) P (\sigma \otimes \sigma_1 - \sigma_1 \otimes \sigma) = \\ &= i(\lambda - \mu) (\sigma \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} [P, \lambda \sigma \otimes \sigma_2 + \mu \sigma_2 \otimes \sigma] &= (\lambda - \mu) P (\sigma \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma) = \\ &= i(\lambda - \mu) (\sigma_1 \otimes \sigma - \sigma \otimes \sigma_1), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где мы использовали представление

$$P = \frac{1}{2} \left( I \otimes I + \sum_{a=1}^3 \sigma_a \otimes \sigma_a \right) \quad (1.17)$$

и формулы умножения для матриц Паули. Отсюда получаем, что соотношение (1.9) удовлетворяется при выборе функции  $f(\lambda, \mu)$  в виде

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}. \quad (1.18)$$

В результате матрица  $L_n(\lambda)$  удовлетворяет фундаментальным скобкам Пуассона на решетке (1.9) с  $r$ -матрицей

$$r(\lambda, \mu) = r(\lambda - \mu) = \frac{P}{\lambda - \mu}, \quad (1.19)$$

которая уже встречалась в случае модели НШ в части I.

Вводя матрицу монодромии

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(\lambda), \quad (1.20)$$

для соответствующих скобок Пуассона из (1.9) получаем выражение

$$\{T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)]. \quad (1.21)$$

Как уже отмечалось в § I.7, в случае периодических граничных условий след матрицы монодромии является производящей функцией интегралов движения. В квазипериодическом случае

$$L_{N+1}(\lambda) = Q(c) L_1(\lambda) Q^{-1}(c), \quad (1.22)$$

где

$$Q(c) = \exp \frac{c\sigma_3}{2}, \quad (1.23)$$

аналогичную роль играет функция

$$F_N(\lambda) = \text{tr } T_N(\lambda) Q^{-1}(c) \quad (1.24)$$

(сравни с моделью НШ в случае квазипериодических граничных условий в § 1.2 части I), которая представляет собой полином от  $\lambda$  степени  $N$

$$F_N(\lambda) = e^{-c/2} \lambda^N + \sum_{n=1}^N I_n \lambda^{N-n}, \quad (1.25)$$

где коэффициенты  $I_n$ , в свою очередь, являются полиномами от  $p_j$  и  $e^{\pm q_j}$ . В частности, имеем

$$I_1 = e^{-c/2} \sum_{n=1}^N p_n, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= e^{-c/2} \left( \sum_{1 \leq k < n \leq N} p_k p_n - \sum_{n=1}^{N-1} e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_1 + c - q_N} \right) = \\ &= e^{-c/2} \left( \sum_{1 \leq k < n \leq N} p_k p_n - \sum_{n=1}^N e^{q_{n+1} - q_n} \right), \quad (1.27) \end{aligned}$$

так что

$$H = \frac{e^c}{2} I_1^2 - e^{c/2} I_2. \quad (1.28)$$

В силу коммутативности матриц  $r(\lambda)$  и  $Q(c) \otimes Q(c)$  из (1.21) следует, что

$$\{F_N(\lambda), F_N(\mu)\} = 0, \quad (1.29)$$

поэтому функции  $I_1, \dots, I_N$  образуют инволютивное семейство интегралов движения, содержащее гамильтониан модели.

Для завершения доказательства полной интегрируемости модели Toda нам осталось проверить функциональную независимость интегралов  $I_n$ . Очевидно, что

$$I_n = e^{-c/2} S_n(p_1, \dots, p_N) + I_n', \quad (1.30)$$

где  $S_n(p_1, \dots, p_N)$  —  $n$ -я элементарная симметрическая функция, а  $I_n'$  — полином от  $p_1, \dots, p_N$  степени не выше  $n-1$ . Поэтому соотношение (1.6) справедливо при больших  $p_n$  и вследствие полиномиальности имеет место во всем фазовом пространстве  $\mathcal{M}$ , за исключением алгебраического подмногообразия (в координатах  $p_n, e^{q_n}$ ) размерности, меньшей  $N$ .



Для явного описания канонических переменных типа действие — угол требуется привлечение методов алгебраической геометрии, которые мы в этой книге не рассматриваем.

## § 2. Вспомогательная линейная задача для модели Тода в быстроубывающем случае

Здесь мы введем основные характеристики вспомогательной линейной задачи

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n \quad (2.1)$$

в быстроубывающем случае

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = c, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} p_n = 0. \quad (2.2)$$

Мы предполагаем, что предельные значения в (2.2) принимаются достаточно быстро; величины  $q_n$ ,  $q_n - c$ ,  $p_n$  и их разности всех порядков убывают при  $|n| \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $|n|^{-1}$  (аналог условий Шварца на решетке).

**1. Матрица перехода и решения Йоста.** Матрица перехода  $T(n, m, \lambda)$  определяется как решение уравнения (2.1) с начальным условием

$$T(n, m, \lambda) |_{n=m} = I \quad (2.3)$$

и при  $n > m$  имеет вид

$$T(n, m, \lambda) = \prod_{k=m}^{\overleftarrow{n-1}} L_k(\lambda); \quad (2.4)$$

при  $n < m$

$$T(n, m, \lambda) = T^{-1}(m, n, \lambda) = \prod_{k=n}^{\overleftarrow{m-1}} L_k^{-1}(\lambda). \quad (2.5)$$

Матрица  $T(n, m, \lambda)$  унимодулярна, является полиномом по  $\lambda$  степени  $|n-m|$  и удовлетворяет инволюции

$$\overline{T}(n, m, \lambda) = T(n, m, \overline{\lambda}). \quad (2.6)$$

При  $n \rightarrow \pm \infty$  вспомогательная линейная задача (2.1) упрощается и принимает вид

$$E_{n+1} = L_{\pm}(\lambda) E_n, \quad (2.7)$$

где

$$L_{-}(\lambda) = L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$L_{+}(\lambda) = Q(c) L(\lambda) Q^{-1}(c). \quad (2.9)$$

При  $\lambda \neq 2$  матрица  $L(\lambda)$  приводится к диагональному виду

$$L(\lambda) = U(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z(\lambda) & z(\lambda) \\ 0 & z(\lambda) \end{pmatrix} U^{-1}(\lambda), \quad (2.10)$$

где

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -z(\lambda) \\ -z(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

а  $z(\lambda)$  определяется из уравнения

$$z + \frac{1}{z} = \lambda \quad (2.12)$$

и дается формулой

$$z(\lambda) = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}. \quad (2.13)$$

Функция  $z(\lambda)$  аналогична  $k(\lambda)$  для модели НШ в случае конечной плотности (см. § 1.8 части I) и определена на римановой поверхности функции  $\sqrt{\lambda^2 - 4}$ . Часто удобно использовать переменную  $z$  вместо спектрального параметра  $\lambda$ ; в этом случае для функции  $F(\lambda)$  мы не меняем функционального значка и через  $F(z)$  обозначаем  $F(\lambda(z))$ .

Решения уравнений (2.7) даются формулами

$$E_n^{(-)}(z) = E_n(z) = U(z) \begin{pmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

и

$$E_n^{(+)}(z) = Q(c) E_n(z). \quad (2.15)$$

Матрица  $E_n(z)$  удовлетворяет инволюциям

$$\bar{E}_n(z) = E_n(\bar{z}), \quad (2.16)$$

$$\bar{E}_n\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} E_n(z) \sigma_1 \quad (2.17)$$

и соотношению

$$\det E_n(z) = 1 - z^2. \quad (2.18)$$

На окружности  $|z|=1$  матричные элементы  $E_n(z)$  ограничены при всех  $n$ , что соответствует *непрерывному спектру* вспомогательной линейной задачи (2.7). В терминах переменной  $\lambda$  непрерывный спектр заполняет отрезок  $-2 \leq \lambda \leq 2$ . Матрица  $E_n(z)$  вырождается при  $z = \pm 1$ , так что у задачи (2.7) на краях спектра имеются *виртуальные уровни* (сравни с § 1.8—1.9 части I). Внутренность и внешность единичного круга в переменной  $z$  играют роль, аналогичную верхней и нижней полуплоскостям переменной  $k(\lambda)$  для модели НШ в случае конечной плотности.

Свойства аналитичности матрицы  $E_n(z)$  аналогичны таковым для матрицы  $E_\rho(x, k)$  из § 1.8 части I.

Решения Йоста  $T_\pm(n, z)$  при  $|z|=1$  определяются как пределы

$$T_\pm(n, z) = \lim_{m \rightarrow \pm\infty} T(n, m, z) E_m^{(\pm)}(z). \quad (2.19)$$

Альтернативно их можно задать как решения задачи (2.1) со следующими асимптотиками:

$$T_\pm(n, z) = E_n^{(\pm)}(z) + o(1) \quad (2.20)$$

при  $n \rightarrow \pm\infty$ .

Матрицы  $T_\pm(n, z)$  при  $|z|=1$  удовлетворяют инволюциям

$$\bar{T}_\pm(n, z) = T_\pm(n, \bar{z}), \quad (2.21)$$

$$\bar{T}_\pm(n, z) = -\frac{1}{z} T_\pm(n, z) \sigma_1 \quad (2.22)$$

и соотношению

$$\det T_\pm(n, z) = 1 - z^2. \quad (2.23)$$

Они обладают следующими аналитическими свойствами: столбцы  $T_-^{(1)}(n, z)$  и  $T_+^{(2)}(n, z)$  аналитически продолжаются во внутренность единичного круга  $|z| \leq 1$ , а столбцы  $T_+^{(1)}(n, z)$  и  $T_-^{(2)}(n, z)$  — во внешность  $|z| \geq 1$  и имеют там асимптотики

$$z^n T_-^{(1)}(n, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(|z|), \quad (2.24)$$

$$z^{-n} T_+^{(2)}(n, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-c/2} \end{pmatrix} + O(|z|), \quad |z| \leq 1, \quad (2.25)$$

при  $z \rightarrow 0$  и

$$z^n T_+^{(1)}(n, z) = -e^{-c/2} z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O(1), \quad (2.26)$$

$$z^{-n} T_-^{(2)}(n, z) = -z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(1), \quad |z| \geq 1, \quad (2.27)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Для доказательства существования решений Йоста и исследования их свойств удобно совершить калибровочное преобразование

$$F_n = \Omega_n \tilde{F}_n, \quad (2.28)$$

где

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} e^{qn/2} & 0 \\ 0 & -e^{-qn-1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

при котором вспомогательная линейная задача (2.1) принимает вид

$$\tilde{F}_{n+1} = \tilde{L}_n(\lambda) \tilde{F}_n, \quad (2.30)$$

где

$$\tilde{L}_n(\lambda) = \Omega_{n+1}^{-1} L_n(\lambda) \Omega_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{q_n - q_{n+1}}{2}} (p_n + \lambda) & -e^{-\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Полагая

$$\tilde{F}_n = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

отсюда получаем, что  $g_{n+1} = f_n$  и

$$c_{n+1} f_{n+1} - p_n f_n + c_n f_{n-1} = \lambda f_n, \quad (2.33)$$

где

$$c_n = e^{\frac{q_n - q_{n-1}}{2}}. \quad (2.34)$$

Таким образом, вспомогательная линейная задача (2.1) эквивалентна задаче на собственные значения (2.33) для бесконечной якобиевой матрицы  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_{nm} = c_n \delta_{n, m+1} - p_n \delta_{nm} + c_{n+1} \delta_{n+1, m}. \quad (2.35)$$

Покажем, что эта задача при  $|z|=1$  имеет решения  $\psi_{\pm}(n, z)$  со следующими асимптотиками:

$$\psi_{\pm}(n, z) = z^n + o(1) \quad (2.36)$$

при  $n \rightarrow \pm \infty$  (напомним, что  $\lambda = z + 1/z$ ). Будем искать эти решения в виде

$$\psi_+(n, z) = z^n + \sum_{m=n}^{\infty} \Gamma(n, m) z^m, \quad (2.37)$$

$$\psi_-(n, z) = z^n + \sum_{m=-\infty}^n \tilde{\Gamma}(n, m) z^m, \quad (2.38)$$

где

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \Gamma(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow -\infty} \tilde{\Gamma}(n, m) = 0. \quad (2.39)$$

Рассмотрим, для определенности, представление (2.37) и подставим его в уравнение (2.33). Отделяя члены при одинаковых степенях  $z$ , мы получим, что

$$c_n(1 + \Gamma(n-1, n-1)) = 1 + \Gamma(n, n), \quad (2.40)$$

$$c_n \Gamma(n-1, n) - p_n(1 + \Gamma(n, n)) = \Gamma(n, n+1) \quad (2.41)$$

и

$$\Gamma(n, m+1) + \Gamma(n, m-1) = c_{n+1}(\delta_{m-n, 1} + \Gamma(n+1, m)) - p_n \Gamma(n, m) + c_n \Gamma(n-1, m) \quad (2.42)$$

при  $m > n$ .

В классе ядер  $\Gamma(n, m)$ , удовлетворяющих условию (2.39), система (2.40)–(2.42) однозначно разрешима. Действительно, уравнение (2.40) позволяет найти значения  $\Gamma(n, n)$ , а уравнение (2.41) — значения  $\Gamma(n, n+1)$  при всех  $n$ , так что уравнение (2.42) — уравнение в частных разностях второго порядка — однозначно разрешимо в области  $m > n$ . При этом предельные значения в (2.39) принимаются в смысле Шварца. Таким образом, существование решения  $\psi_+(n, z)$  доказано.

Существование решения  $\psi_-(n, z)$  доказывается аналогично.

В терминах  $\psi_{\pm}(n, z)$  решения Йоста  $T_{\pm}(n, z)$  имеют вид

$$T_{\pm}(n, z) = \Omega_n \begin{pmatrix} \psi_{\pm}(n, 1/z) & -z\psi_{\pm}(n, z) \\ \psi_{\pm}(n-1, 1/z) & -z\psi_{\pm}(n-1, z) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

и очевидно удовлетворяют сформулированным выше свойствам.

**2. Приведенная матрица монодромии и коэффициенты перехода.** Приведенная матрица монодромии  $T(z)$  при  $|z|=1$ ,  $z \neq \pm 1$ , определяется как отношение решений Йоста

$$T(z) = T_+^{-1}(n, z) T_-(n, z) \quad (2.44)$$

и может быть представлена в виде предела

$$T(z) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} E_n^{-1}(z) Q^{-1}(c) T(n, m, z) E_m(z). \quad (2.45)$$

Матрица  $T(z)$  унимодулярна, удовлетворяет инволюциям

$$\bar{T}(z) = \sigma_1 T(z) \sigma_1, \quad (2.46)$$

$$\bar{T}(z) = T(\bar{z}) \quad (2.47)$$

и представляется в виде

$$T(z) = \begin{pmatrix} a(z) & \bar{b}(z) \\ b(z) & \bar{a}(z) \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

где  $a(z)$  и  $b(z)$  — коэффициенты перехода непрерывного спектра. Они определены при  $|z|=1$ ,  $z \neq \pm 1$ , и удовлетворяют условиям нормировки

$$|a(z)|^2 - |b(z)|^2 = 1 \quad (2.49)$$

и симметрии

$$\bar{a}(z) = a(\bar{z}), \quad \bar{b}(z) = b(\bar{z}). \quad (2.50)$$

Для коэффициента  $a(z)$  имеем представление

$$a(z) = \frac{1}{1-z^2} \det(T_-^{(1)}(n, z), T_+^{(2)}(n, z)), \quad (2.51)$$

показывающее, что он допускает аналитическое продолжение в единичный круг  $|z| < 1$  и

$$a(0) = e^{-c/2}. \quad (2.52)$$

Аналогичное представление для коэффициента  $b(z)$

$$b(z) = \frac{1}{1-z^2} \det(T_-^{(1)}(n, z), T_+^{(1)}(n, z)) \quad (2.53)$$

показывает, что он, вообще говоря, не продолжается с окружности  $|z|=1$ . Такое продолжение возможно, если существует  $N > 0$  такое, что  $c_n=1, p_n=0$  при  $|n| > N$ .

Обсудим теперь возможное поведение функций  $a(z)$  и  $b(z)$  в окрестностях точек  $z = \pm 1$ . В случае, если столбцы  $T_-^{(1)}(n, z)$  и  $T_+^{(2)}(n, z)$  линейно независимы при  $z=1$  или  $z=-1$ , то коэффициент  $a(z)$  сингулярен и представляется в виде

$$a(z) = \frac{a_{\pm}}{z \mp 1} + O(1), \quad (2.54)$$

где  $a_{\pm}$  отличны от нуля и вещественны (сравни с моделью НШ в случае конечной плотности в § 1.9 части I). Именно это реализуется в ситуации общего положения. В специальной ситуации, когда столбцы  $T_-^{(1)}(n, z)$  и  $T_+^{(2)}(n, z)$  становятся линейно зависимыми при  $z=1$  или  $z=-1$ , коэффициенты  $a_+$ , или  $a_-$ , или оба исчезают и функция  $a(z)$  несингулярна в окрестности соответствующих точек. В этом случае  $z=1$ , или  $z=-1$ , или оба значения являются виртуальными уровнями. Они расположены на краях  $\lambda = \pm 2$  непрерывного спектра вспомогательной линейной задачи.

Коэффициент  $b(z)$  сингулярен или регулярен в окрестности  $z = \pm 1$  одновременно с  $a(z)$ . Действительно, имеем

$$T_+^{(1)}(n, z)|_{z=\pm 1} = \mp T_+^{(2)}(n, z)|_{z=\pm 1}, \quad (2.55)$$

так что если  $a_+$  или  $a_-$  отличны от нуля, то

$$b(z) = \mp \frac{a_{\pm}}{z \mp 1} + O(1). \quad (2.56)$$

В частности, при этом условии

$$\lim_{z \rightarrow \pm 1} \frac{b(z)}{a(z)} = \mp 1 \quad (2.57)$$

(сравни с соответствующими формулами в § 1.9 части I).

В силу условия нормировки нули коэффициента  $a(z)$  могут лежать только внутри окружности  $|z|=1$  и их число  $N$  конечно. Если  $a(z_j)=0$ , то

$$T_-^{(1)}(n, z_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(n, z_j), \quad \gamma_j \neq 0, \quad (2.58)$$

и

$$\Psi_-(n, \frac{1}{z_j}) = -z_j \gamma_j \Psi_+(n, z_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.59)$$

Таким образом,  $\lambda_j = z_j + 1/z_j$  являются *дискретными собственными значениями* самосопряженного оператора  $\mathcal{L}$  и поэтому  $\lambda_j$ , а вместе с ними  $z_j$ , вещественны,  $-1 < z_j < 1$ ;  $z_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Соответствующие им *коэффициенты перехода дискретного спектра*  $\gamma_j$  также вещественны.

Покажем, что нули  $z_j$  простые. Из (2.43) имеем

$$a(z) = -\frac{c_n z}{1-z^2} (\dot{\Psi}_+(n, z) \Psi_-(n-1, 1/z) - \Psi_+(n-1, z) \dot{\Psi}_-(n, 1/z)). \quad (2.60)$$

Дифференцируя это равенство по  $z$  и полагая  $z = z_j$ , получаем

$$\dot{a}(z_j) = \frac{c_n z_j}{1-z_j^2} (\dot{\Psi}_+(n-1, z_j) \Psi_-(n, 1/z_j) - \dot{\Psi}_+(n, z_j) \Psi_-(n-1, 1/z_j) - z_j^{-2} \dot{\Psi}_+(n-1, z_j) \dot{\Psi}_-(n, 1/z_j) + z_j^{-2} \dot{\Psi}_+(n, z_j) \dot{\Psi}_-(n-1, 1/z_j)), \quad (2.61)$$

где точка обозначает производную по  $z$ . Из уравнений (2.33) и

$$c_{n+1} \dot{f}_{n+1} - p_n \dot{f}_n + c_n \dot{f}_{n-1} = \left(z + \frac{1}{z}\right) \dot{f}_n + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) f_n \quad (2.62)$$

получаем, что величины

$$\Phi_+(n, z) = c_n (\dot{\Psi}_+(n, z) \Psi_-(n-1, 1/z) - \dot{\Psi}_+(n-1, z) \Psi_-(n, 1/z)) \quad (2.63)$$

и

$$\Phi_-(n, z) = -c_n z^{-2} (\Psi_+(n, z) \dot{\Psi}_-(n-1, 1/z) - \Psi_+(n-1, z) \dot{\Psi}_-(n, 1/z)) \quad (2.64)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{\pm}(n+1, z) = \Phi_{\pm}(n, z) \pm (1-1/z^2) \Psi_+(n, z) \Psi_-(n, 1/z). \quad (2.65)$$

Полагая здесь  $z = z_j$  и используя (2.59), получаем

$$\Phi_+(n, z_j) = \frac{\gamma_j (z_j^2 - 1)}{z_j} \sum_{k=n}^{\infty} \Psi_+^2(k, z_j) \quad (2.66)$$

и

$$\Phi_-(n, z_j) = \frac{\gamma_j (z_j^2 - 1)}{z_j} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Psi_+^2(k, z_j), \quad (2.67)$$

так что

$$\dot{a}(z_j) = \gamma_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_+^2(n, z_j) \neq 0. \quad (2.68)$$

Это равенство также показывает, что

$$\text{sign } \gamma_j = \text{sign } \dot{a}(z_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.69)$$

(сравни с соответствующими рассуждениями в § 1.9 части I).

Функция  $a(z)$  однозначно определяется по коэффициенту  $b(z)$  и нулям  $z_1, \dots, z_N$ . Для вывода соответствующего дисперсионного соотношения рассмотрим формулу Шварца

$$f(z) = \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \operatorname{Re} f(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi}, \quad (2.70)$$

где  $f(z)$  — аналитическая функция в круге  $|z| \leq 1$ , и применим ее к функции

$$f(z) = \ln \prod_{j=1}^N \operatorname{sign} z_j \frac{zz_j - 1}{z - z_j} a(z), \quad (2.71)$$

где выбрана главная ветвь логарифма. Используя неравенство  $a(0) > 0$  и условие нормировки, получаем, что

$$a(z) = \prod_{j=1}^N \operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{zz_j - 1} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{|\xi|=1} \ln(1 + |b(\xi)|^2) \frac{\xi + z}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi} \right\}. \quad (2.72)$$

Учитывая инволюцию (2.50), приходим к окончательному выражению для функции  $a(z)$ :

$$a(z) = \prod_{j=1}^N \operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{zz_j - 1} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln(1 + |b(\xi)|^2) \frac{1 - z^2}{(1 - z\xi)(\xi - z)} d\xi \right\}, \quad (2.73)$$

где  $C$  — полуокружность  $|\xi| = 1$ ,  $0 \leq \arg \xi \leq \pi$ .

Данные  $b(z)$ ,  $z_j$  и  $c$  не являются независимыми. Во-первых, из формулы (2.52) следует, что

$$e^{-c/2} = \prod_{j=1}^N |z_j| \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln(1 + |b(\xi)|^2) \frac{d\xi}{\xi} \right\}. \quad (2.74)$$

Это соотношение будем называть *условием (с)*. Во-вторых, в ситуации общего положения, когда в окрестности  $z = \pm 1$

$$b(z) = \frac{b_{\pm}}{z \mp 1} + O(1), \quad (2.75)$$

имеем условия

$$\operatorname{sign} b_{\pm} = \prod_{j=1}^N (\mp \operatorname{sign} z_j) \quad (2.76)$$

(сравни с условием (θ) и условиями выбора знаков в § 1.9 части I).

Для вывода (2.76) рассмотрим асимптотики  $a(z)$  при  $z \rightarrow \pm 1$ ,  $|z| < 1$ , используя дисперсионное соотношение (2.73). Главный



вклад в (2.73) дает сингулярное слагаемое (2.75), и он имеет вид

$$I_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \ln \frac{|b_{\pm}|^2}{|\xi \mp 1|^2} \frac{1-z^2}{(1-z\xi)(\xi-z)} \frac{d\xi}{\xi}, \quad (2.77)$$

где  $C_{\pm}$  — малые окрестности точек  $\xi = \pm 1$  на  $C$ . Имеем

$$\begin{aligned} I_{+} &= \frac{1}{\pi i} \int_{C_{+}} \ln \frac{|b_{+}| |\xi + 1|}{2 |\xi - 1|} \frac{\xi - z^2}{(1 - z\xi)(\xi - z)} \frac{d\xi}{\xi} + O(|z - 1|) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \ln \left| \frac{b_{+}}{2} \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right| \frac{\xi + z}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi} + O(|z - 1|) = \\ &= \ln \left( - \frac{|b_{+}|}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \right) + O(|z - 1|), \quad (2.78) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы использовали формулу Шварца. Отсюда получаем при  $z \rightarrow 1$

$$a(z) = - \frac{|b_{+}| \prod_{j=1}^N (-\text{sign } z_j)}{z - 1} + O(1), \quad (2.79)$$

и сравнивая эту формулу с (2.57), приходим к условию (2.76) для знака  $+$ .

Вторая формула в (2.76) доказывается аналогично.

Подчеркнем, что как и для модели НШ в случае конечной плотности, усложнение аналитических свойств коэффициентов перехода связано с тем, что непрерывный спектр вспомогательной линейной задачи имеет край: точки  $\lambda = \pm 2$ .

Описание отображения  $\mathcal{F}: (p_n, q_n) \mapsto (b(z), \bar{b}(z), z_j, \gamma_j, j = 1, \dots, N)$  от начальных данных модели Тода к характеристикам вспомогательной линейной задачи (2.1) на этом заканчивается.

**3. Временная динамика коэффициентов перехода.** Рассмотрим эволюцию коэффициентов перехода, когда  $p_n(t)$  и  $q_n(t)$  удовлетворяют уравнениям движения модели Тода. Используя представление нулевой кривизны (см. § 1.2), получаем

$$\frac{dT}{dt}(n, m, z) = V_n(z) T(n, m, z) - T(n, m, z) V_m(z), \quad (2.80)$$

где

$$V_n(z) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_n} \\ e^{q_{n-1}} & z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Переходя в (2.80) к пределам при  $n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow -\infty$  в соответствии с определениями (2.19), (2.45) и используя формулу

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (E_n^{(\pm)}(z))^{-1} V_n(z) E_n^{(\pm)}(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (E_n^{(\pm)}(z))^{-1} L_{\pm}(z) E_n^{(\pm)}(z) = V(z), \quad (2.82)$$

где

$$V(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

получаем эволюционные уравнения для решений Йоста

$$\frac{dT_{\pm}(n, z)}{dt} = V_n(z) T_{\pm}(n, z) - T_{\pm}(n, z) V(z) \quad (2.84)$$

и приведенной матрицы монодромии

$$\frac{dT}{dt}(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) [\sigma_3, T(z)]. \quad (2.85)$$

Они приводят к следующей явной зависимости коэффициентов перехода от времени  $t$ :

$$a(z, t) = a(z, 0), \quad b(z, t) = e^{-\left(z - \frac{1}{z}\right)t} b(z, 0), \quad (2.86)$$

$$z_j(t) = z_j(0), \quad \gamma_j(t) = e^{-\left(z_j - \frac{1}{z_j}\right)t} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.87)$$

Как и в рассмотренных ранее примерах, коэффициент  $a(z)$  является производящей функцией интегралов движения. Закончим этот параграф описанием семейства локальных интегралов движения. Под последними мы понимаем функционалы вида

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n, \quad (2.88)$$

где  $f_n$  является полиномом от  $p_n$ ,  $c_n$  и их высших разностей.

**4. Локальные интегралы движения.** Убедимся, что разложение функции  $\ln a(z)$  в ряд Тейлора в точке  $z=0$

$$\ln a(z) = -\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n z^n \quad (2.89)$$

дает серию локальных интегралов движения модели Toda, содержащую ее гамильтониан. В рассмотренных ранее примерах непрерывных моделей мы использовали асимптотические разложения  $\ln a(\lambda)$  в окрестностях точек  $\lambda = \infty$  или  $\lambda = 0$ , в которых коэффициент  $b(\lambda)$  быстро убывал. Это позволяло нам начинать с асимптотического разложения матрицы перехода  $T(x, y, \lambda)$  и за-

тем переходить к пределам при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow -\infty$ . В случае модели Тода коэффициент  $b(z)$ , вообще говоря, не определен в окрестности  $z=0$ , и поэтому этот способ неприменим. Мы дадим здесь другую процедуру вычисления коэффициентов  $I_n$ , непосредственно основанную на рассмотрении вспомогательной линейной задачи (2.33) для быстроубывающего случая.

Рассмотрим формулу (2.60) при  $|z| < 1$  и перейдем в ней к пределу  $n \rightarrow +\infty$ . Учитывая (2.36), получим

$$a(z) = \frac{z}{1-z^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (z^{n-1} \varphi(n, z) - z^n \varphi(n-1, z)), \quad (2.90)$$

где мы положили  $\varphi(n, z) = \psi_-(n, 1/z)$ . При малых  $z$  функцию  $\varphi(n, z)$  можно представить в виде

$$\varphi(n, z) = z^{-n} \prod_{k=-\infty}^n \frac{\chi(k, z)}{c_k}. \quad (2.91)$$

Подставляя это представление в (2.90) и используя формулы (2.2) и (2.34), получаем, что

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{z}{1-z^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{z} \prod_{k=-\infty}^n \frac{\chi(k, z)}{c_k} - z \prod_{k=-\infty}^{n-1} \frac{\chi(k, z)}{c_k} \right) = \\ &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\chi(n, z)}{c_n} = e^{-c/2} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n, z). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Дадим теперь процедуру определения коэффициентов  $\chi(n, z)$ . Подставляя (2.91) в (2.33), получаем уравнение

$$\chi(n, z) (\chi(n+1, z) - 1 - zp_n - z^2) = -z^2 c_n^2, \quad (2.93)$$

которое допускает решение вида

$$\chi(n, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi(n, m) z^m, \quad (2.94)$$

где

$$\chi(n, 0) = 1, \quad \chi(n, 1) = p_{n-1}, \quad (2.95)$$

$$\chi(n, 2) = 1 - c_{n-1}^2 \quad (2.96)$$

и для  $m > 2$

$$\chi(n, m) = c_{n-1}^2 \chi(n-1, m-2) - \sum_{k=3}^{m-1} \chi(n, k) \chi(n-1, m-k). \quad (2.97)$$

Формулы (2.92) и (2.94)–(2.97) позволяют выразить функционалы  $I_m$  через  $p_n$  и  $c_n$ . В частности, имеем

$$I_1 = P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \quad (2.98)$$

и

$$I_2 = -H = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} p_n^2 + c_n^2 - 1 \right). \quad (2.99)$$

С помощью дисперсионного соотношения (2.73) функционалы  $I_n$  выражаются через коэффициенты перехода и дискретный спектр вспомогательной линейной задачи. Соответствующие тождества следов имеют вид

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln(1 + |b(\zeta)|^2) (\zeta^n + \zeta^{-n}) \frac{d\zeta}{\zeta} + \\ + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N (z_j^n - \bar{z}_j^n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.100)$$

В § 4 мы обсудим вопрос о принадлежности функционалов  $I_n$  к алгебре наблюдаемых на фазовом пространстве нашей модели.

Исследование вспомогательной линейной задачи и отображения  $\mathcal{F}$  для модели Тода на этом заканчивается.

### § 3. Обратная задача и динамика солитонов модели Тода в быстроубывающем случае

Здесь мы опишем отображение  $\mathcal{F}^{-1}$ , т. е. дадим решение обратной задачи о восстановлении  $p_n$  и  $q_n$  по коэффициентам перехода и дискретному спектру. Как и ранее, мы можем использовать два подхода: матричную задачу Римана или формализм Гельфанда — Левитана — Марченко. Наличие краев у непрерывного спектра вспомогательной линейной задачи и, как следствие, ограничения на коэффициенты перехода и дискретный спектр (условие (c) и т. д.), приводят к усложнению первого подхода (сравни с моделью НШ в случае конечной плотности в § II.6 части I). Поэтому мы рассмотрим только формализм Гельфанда — Левитана — Марченко. С его помощью в конце этого параграфа мы опишем динамику солитонов модели Тода.

**1. Формализм Гельфанда — Левитана — Марченко.** В его основе лежит формула связи решений Йоста при  $|z|=1$

$$T_-(n, z) = T_+(n, z) T(z), \quad (3.1)$$

которая в терминах  $\psi_{\pm}(n, z)$  переписывается следующим образом:

$$\frac{1}{a(z)} \psi_-\left(n, \frac{1}{z}\right) = \psi_+\left(n, \frac{1}{z}\right) + r(z) \psi_+(n, z) \quad (3.2)$$

и

$$\frac{1}{a(z)} \psi_+(n, z) = \psi_-(n, z) + \tilde{r}(z) \psi_-\left(n, \frac{1}{z}\right), \quad (3.3)$$

где

$$r(z) = -z \frac{b(z)}{a(z)}, \quad \tilde{r}(z) = \frac{\bar{b}(z)}{za(z)}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим для определенности уравнение (3.2) и совершим следующие преобразования: подставим в него представления (2.37)–(2.38), умножим на  $\frac{1}{2\pi i} z^{m-1}$ ,  $m \geq n$ , и проинтегрируем по окружности  $|z|=1$ . Используя формулы (2.52), (2.59) и формулу Коши, получаем соотношение

$$\delta_{n,m} + \Gamma(n, m) + K(n+m) + \sum_{l=n}^{\infty} \Gamma(n, l) K(l+m) = e^{c/2} \delta_{n,m} (1 + \tilde{\Gamma}(n, n)), \quad (3.5)$$

где

$$K(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} r(z) z^n \frac{dz}{z} + \sum_{j=1}^N m_j z_j^n, \quad (3.6)$$

а

$$m_j = \frac{\gamma_j}{a(z_j)}, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

и точка обозначает производную по  $z$ .

В отличие от рассмотренных ранее примеров непрерывных моделей, в уравнении (3.5) появился дополнительный член в правой части, порожденный вычетом функции  $\frac{1}{a(z)} \Psi_-(n, z) z^{m-1}$  при  $z=0$ . Его можно следующим образом выразить через  $\Gamma(n, n)$ . Рассмотрим уравнение (2.40): из (2.1), (2.34) и условия (2.39) получаем, что

$$1 + \Gamma(n, n) = e^{(q_n^{-c})/2}. \quad (3.8)$$

Из аналогичного уравнения для  $\tilde{\Gamma}(n, n)$

$$c_{n+1} (1 + \tilde{\Gamma}(n+1, n+1)) = 1 + \tilde{\Gamma}(n, n) \quad (3.9)$$

следует, что

$$1 + \tilde{\Gamma}(n, n) = e^{-q_n/2}, \quad (3.10)$$

поэтому

$$e^{c/2} (1 + \Gamma(n, n)) = (1 + \Gamma(n, n))^{-1}. \quad (3.11)$$

В результате (3.5) принимает вид

$$\frac{\delta_{n,m}}{1 + \Gamma(n, n)} = \delta_{n,m} + \Gamma(n, m) + K(n+m) + \sum_{l=n}^{\infty} \Gamma(n, l) K(l+m). \quad (3.12)$$

К сожалению, это уравнение для  $\Gamma(n, m)$  нелинейно.

Чтобы свести (3.12) к линейному уравнению, положим

$$X(n, m) = \frac{\Gamma(n, m)}{1 + \Gamma(n, n)}, \quad m > n, \quad (3.13)$$

и умножим (3.12) на  $(1 + \Gamma(n, n))^{-1}$ . При  $m > n$  получаем линейное уравнение

$$X(n, m) + K(n + m) + \sum_{l=n+1}^{\infty} X(n, l) K(l + m) = 0, \quad (3.14)$$

а при  $m = n$  — соотношение

$$\frac{1}{(1 + \Gamma(n, n))^2} = 1 + K(2n) + \sum_{l=n+1}^{\infty} X(n, l) K(l + n). \quad (3.15)$$

Уравнение (3.14) и представляет собой искомое уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко для правого конца, а соотношение (3.15) позволяет определить  $\Gamma(n, n)$  по заданному  $X(n, m)$ .

Аналогичным образом из уравнения (3.3) получаем уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко для левого конца:

$$\tilde{X}(n, m) + \tilde{K}(n + m) + \sum_{l=-\infty}^{n-1} \tilde{X}(n, l) \tilde{K}(l + m) = 0, \quad n > m, \quad (3.16)$$

где

$$\tilde{K}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \tilde{r}(z) z^{-n} \frac{dz}{z} + \sum_{j=1}^N \tilde{m}_j z_j^{-n-2}, \quad (3.17)$$

$$\tilde{m}_j = -\frac{1}{\gamma_j \dot{a}(z_j)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

а

$$\tilde{X}(n, m) = \frac{\tilde{\Gamma}(n, m)}{1 + \tilde{\Gamma}(n, n)}, \quad (3.19)$$

и соотношение

$$\frac{1}{(1 + \tilde{\Gamma}(n, n))^2} = 1 + \tilde{K}(2n) + \sum_{l=-\infty}^{n-1} \tilde{X}(n, l) \tilde{K}(l + n). \quad (3.20)$$

Опишем теперь процедуру решения обратной задачи.

Исходными данными являются функции  $r(z)$ ,  $\tilde{r}(z)$  и набор вещественных чисел  $m_j$ ,  $\tilde{m}_j$ ,  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ;  $c$ , обладающие следующими свойствами.

1. Гладкие на окружности  $|z| = 1$  функции  $r(z)$ ,  $\tilde{r}(z)$  удовлетворяют инволюции

$$\bar{r}(z) = r(\bar{z}), \quad \bar{\tilde{r}}(z) = \tilde{r}(\bar{z}) \quad (3.21)$$

и условию

$$|r(z)| = |\tilde{r}(z)| \leq 1, \quad (3.22)$$

причем знак равенства может достигаться лишь в точках  $z = \pm 1$ , и тогда

$$r(\pm 1) = -\tilde{r}(\pm 1) = 1. \quad (3.23)$$

II. Попарно неравные числа  $z_j \neq 0$  лежат в интервале  $-1 < z_j < 1$ , а числа  $m_j$  и  $\tilde{m}_j$  положительны,  $j = 1, \dots, N$ .

III. Справедливо условие (с)

$$e^{-c/2} = \prod_{j=1}^N |z_j| \exp \left\{ \frac{i}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \ln(1 - |r(\xi)|^2) \frac{d\xi}{\xi} \right\}. \quad (3.24)$$

IV. Имеют место формулы связи

$$\frac{\tilde{r}(z)}{r(z)} = -\frac{\bar{a}(z)}{a(z)} \quad (3.25)$$

и

$$m_j \tilde{m}_j = \frac{1}{a^2(z_j)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.26)$$

где

$$a(z) = \prod_{j=1}^N \operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{zz_j - 1} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{|\xi|=1} \ln(1 - |r(\xi)|^2) \frac{z + \xi}{z - \xi} \frac{d\xi}{\xi} \right\}. \quad (3.27)$$

Построим по этим данным ядра  $K(n)$ ,  $\tilde{K}(n)$  и рассмотрим уравнения (3.14), (3.16). Справедливы следующие утверждения.

I'. Уравнения (3.14) и (3.16) однозначно разрешимы в пространствах  $l_1(n+1, \infty)$  и  $l_1(-\infty, n-1)$  соответственно. Их решения  $X(n, t)$  и  $\tilde{X}(n, t)$  быстро убывают при  $n, t \rightarrow +\infty$  и  $n, t \rightarrow -\infty$  соответственно.

II'. Правые части формул (3.15) и (3.20) положительны и поэтому можно выбрать положительные значения для  $1 + \Gamma(n, n)$  и  $1 + \tilde{\Gamma}(n, n)$ .

III'. Положим

$$\Gamma(n, t) = (1 + \Gamma(n, n)) X(n, t) \quad (3.28)$$

и

$$\tilde{\Gamma}(n, t) = (1 + \tilde{\Gamma}(n, n)) \tilde{X}(n, t). \quad (3.29)$$

Построенные по ним с помощью формул (2.37) — (2.38) функции  $\psi_{\pm}(n, z)$  удовлетворяют уравнениям

$$c_{n+1}^{(\pm)} \psi_{\pm}(n+1, z) - p_n^{(\pm)} \psi_{\pm}(n, z) + c_n^{(\pm)} \psi_{\pm}(n-1, z) = \left( z + \frac{1}{z} \right) \psi_{\pm}(n, z), \quad (3.30)$$

где

$$c_n^{(+)} = \frac{1 + \Gamma(n, n)}{1 + \Gamma(n-1, n-1)}, \quad c_n^{(-)} = \frac{1 + \tilde{\Gamma}(n-1, n-1)}{1 + \tilde{\Gamma}(n, n)} \quad (3.31)$$

и положительны, а

$$p_n^{(+)} = \frac{c_n^{(+)}\Gamma(n-1, n) - \Gamma(n, n+1)}{1 + \Gamma(n, n)}, \quad (3.32)$$

$$p_n^{(-)} = \frac{c_n^{(-)}\tilde{\Gamma}(n+1, n) - \tilde{\Gamma}(n, n-1)}{1 + \tilde{\Gamma}(n, n)}. \quad (3.33)$$

IV'. Имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n^{(\pm)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} p_n^{(\pm)} = 0, \quad (3.34)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

V'. Имеют место формулы связи

$$p_n^{(+)} = p_n^{(-)} = p_n, \quad c_n^{(+)} = c_n^{(-)} = e^{\frac{q_n - q_{n-1}}{2}}, \quad (3.35)$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = c, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} p_n = 0, \quad (3.36)$$

где предельные значения принимаются в смысле Шварца.

VI'. Функции  $a(z)$  и  $b(z) = -\frac{a(z)r(z)}{z}$  являются коэффициентами перехода вспомогательной линейной задачи

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n, \quad (3.37)$$

где

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_n + \lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Ее дискретный спектр состоит из собственных значений  $\lambda_j = z_j + \frac{1}{z_j}$  с коэффициентами перехода  $\gamma_j = m_j \hat{a}(z_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Мы не будем приводить здесь доказательство этих утверждений, так как, по существу, оно является прямым переносом рассуждений из § II.7 части I на решеточный случай. Укажем лишь в заключение, что формализм Гельфанда — Левитана — Марченко позволяет доказать, что если данные обратной задачи зависят от времени  $t$  согласно формулам (2.86) — (2.87), то построенные по ним  $p_n(t)$  и  $q_n(t)$  удовлетворяют уравнениям движения модели Тода.

**2. Солитонные решения.** Солитонные решения модели Тода отвечают случаю

$$b(z) = 0 \quad (3.39)$$



при всех  $z$  на окружности  $|z|=1$ . При этом условия на данные  $\{c, z_j, m_j, \tilde{m}_j, j=1, \dots, N\}$  упрощаются и состоят в следующем.

I. Числа  $z_j \neq 0$  лежат в интервале  $-1 < z_j < 1$  и среди них нет совпадающих.

II. Справедливо условие (c):

$$e^{-c} = \prod_{j=1}^N z_j^2. \quad (3.40)$$

III. Величины  $m_j, \tilde{m}_j$  положительны и связаны соотношением

$$m_j \tilde{m}_j = \frac{1}{a^2(z_j)}, \quad j=1, \dots, N, \quad (3.41)$$

где

$$a(z) = \prod_{j=1}^N \operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{zz_j - 1}. \quad (3.42)$$

Для таких данных уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (3.14) и (3.16) сводятся к линейным алгебраическим уравнениям и решаются явно.

Рассмотрим сначала случай  $N=1$ . Ядро  $K(n)$  уравнения (3.14) имеет вид

$$K(n) = m_1 z_1^n \quad (3.43)$$

и является одномерным. Полагая

$$X(n, m) = X(n) m_1 z_1^n, \quad (3.44)$$

из (3.14) получаем

$$X(n) + z_1^n + X(n) m_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} z_1^{2l} = 0, \quad (3.45)$$

так что

$$X(n) = - \frac{z_1^n}{1 + |\gamma_1| z_1^{2n+2}}, \quad (3.46)$$

где мы учли, что

$$m_1 = - \operatorname{sign} z_1 \gamma_1 (1 - z_1^2) = |\gamma_1| (1 - z_1^2). \quad (3.47)$$

Подставляя (3.44) и (3.46) в (3.15), приходим к выражению

$$\frac{1}{(1 + \Gamma(n, n))^2} = 1 + m_1 z_1^n - \frac{m_1^2 z_1^{2n}}{1 + |\gamma_1| z_1^{2n+2}} \sum_{l=n+1}^{\infty} z_1^{2l} = \frac{1 + |\gamma_1| z_1^{2n}}{1 + |\gamma_1| z_1^{2n+2}}. \quad (3.48)$$

Теперь из формулы (3.8) получаем

$$e^{q_n} = e^c \frac{1 + |\gamma_1| z_1^{2n+2}}{1 + |\gamma_1| z_1^{-n}}. \quad (3.49)$$

(Напомним, что в этом случае  $e^{-c} = z_1^2$ .)

Зависимость от времени  $t$  вводится при помощи замены  $\gamma_1$  на  $\gamma_1(t)$ :

$$\gamma_1(t) = e^{-\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right)t} \gamma_1. \quad (3.50)$$

Полагая

$$z_1 = \varepsilon e^{-\alpha_1}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3.51)$$

для решений  $q_n(t)$  и  $p_n(t)$  уравнений движения модели Toda получаем окончательные выражения

$$q_n(t) = c + \ln \frac{1 + \exp\{-2\alpha_1(n+1 - v_1 t + n_{01})\}}{1 + \exp\{-2\alpha_1(n - v_1 t + n_{01})\}} \quad (3.52)$$

и

$$p_n(t) = \frac{dq_n}{dt}(t), \quad (3.53)$$

где

$$v_1 = \varepsilon_1 \frac{\operatorname{sh} \alpha_1}{\alpha_1}, \quad n_{01} = -\frac{1}{2\alpha_1} \ln |\gamma_1|. \quad (3.54)$$

Решение (3.52) представляет собой волну, распространяющуюся вдоль решетки со скоростью  $v_1$ ,  $|v_1| > 1$ , и положением  $n_{01}$  центра инерции при  $t=0$ . Согласно общему определению из части 1, ее следует называть *солитоном модели Toda*. Солитон характеризуется двумя вещественными параметрами  $v_1$  и  $n_{01}$ .

Рассмотрим теперь общий случай, когда число  $N$  произвольно. Ядро  $K(n+m)$  по-прежнему является вырожденным:

$$K(n+m) = \sum_{j=1}^N \sqrt{m_j} z_j^n \sqrt{m_j} z_j^m, \quad (3.55)$$

где  $\sqrt{m_j} > 0$ ; решение уравнения (3.14) ищем в виде

$$X(n, m) = \sum_{j=1}^N X_j(n) \sqrt{m_j} z_j^m. \quad (3.56)$$

Подставляя (3.56) в (3.14), приходим к системе уравнений

$$M(n)X(n) = -Y(n), \quad (3.57)$$

где  $X(n)$  — вектор-столбец с компонентами  $X_j(n)$ ,  $Y(n)$  — с компонентами  $\sqrt{m_j} z_j^n$ ,  $j=1, \dots, N$ , а  $M(n)$  — матрица  $N \times N$

с матричными элементами

$$M(n)_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\sqrt{m_i m_j} (z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.58)$$

Из (3.56) — (3.57) получаем, что

$$X(n, m) = -Y^\tau(n) M^{-1}(n) Y(m). \quad (3.59)$$

Подставляя это выражение в (3.15), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \Gamma(n, n))^2} &= 1 + Y^\tau(n) Y(n) + Y^\tau(n) (M(n) - I) X(n) = \\ &= 1 - Y^\tau(n) X(n) = 1 + Y^\tau(n) M^{-1}(n) Y(n). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Последнюю формулу можно упростить. Заметим, что из (3.58) следует

$$M(n-1) - M(n) = Y(n) Y^\tau(n), \quad (3.61)$$

или

$$M(n-1) M^{-1}(n) = I + Y(n) Y^\tau(n) M^{-1}(n). \quad (3.62)$$

Матрица  $B(n) = Y(n) Y^\tau(n) M^{-1}(n)$  одномерна и

$$B^2(n) = \alpha(n) B(n), \quad \alpha(n) = Y^\tau(n) M^{-1}(n) Y(n). \quad (3.63)$$

Сравнивая формулы (3.60) и (3.62) — (3.63), получаем, что

$$(1 + \Gamma(n, n))^2 = \frac{\det M(n)}{\det M(n-1)}. \quad (3.64)$$

Вводя зависимость от  $t$  посредством формул

$$\gamma_j(t) = e^{-\left(z_j - \frac{1}{z_j}\right)t} \gamma_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.65)$$

из (3.64) получаем выражение для  $N$ -солитонного решения модели Тода

$$q_n(t) = c + \ln \frac{\det M(n, t)}{\det M(n-1, t)}. \quad (3.66)$$

Выражение для  $p_n(t)$ , как всегда, дается формулой (3.53).

Как и в рассмотренных ранее примерах,  $N$ -солитонное решение описывает процесс рассеяния  $N$  солитонов. Именно, при больших  $|t|$  решение  $q_n(t)$  представляется в виде следующей суммы односолитонных решений:

$$q_n(t) = \sum_{j=1}^N q_n^{+j}(t) + O(e^{-at}) \quad (3.67)$$

при  $t \rightarrow +\infty$  и

$$q_n(t) = \sum_{j=1}^N q_n^{-j}(t) + O(e^{at}) \quad (3.68)$$

при  $t \rightarrow -\infty$ . Здесь  $a = \min \alpha_j \min_{i \neq j} |v_i - v_j|$ , а  $q_n^{(\pm)}(t)$  — солитоны с параметрами  $c_j, v_j, n_{0j}^{(\pm)}$ :

$$q_n^{(\pm)}(t) = q_{c_j}(n - v_j t + n_{0j}^{(\pm)}), \quad (3.69)$$

где

$$c_j = -\ln z_j^2, \quad v_j = 2 \operatorname{sign} z_j \frac{\operatorname{sh} \frac{c_j}{2}}{c_j} \quad (3.70)$$

и

$$n_{0j}^{(+)} = n_{0j} + \frac{1}{c_j} \left( \sum_{v_k < v_j} \ln \left| \frac{1 - z_j z_k}{z_j - z_k} \right| - \sum_{v_k > v_j} \ln \left| \frac{1 - z_j z_k}{z_j - z_k} \right| \right), \quad (3.71)$$

$$n_{0j}^{(-)} = n_{0j} - \frac{1}{c_j} \left( \sum_{v_k < v_j} \ln \left| \frac{1 - z_j z_k}{z_j - z_k} \right| - \sum_{v_k > v_j} \ln \left| \frac{1 - z_j z_k}{z_j - z_k} \right| \right), \quad n_{0j} = \frac{1}{c_j} \ln |\gamma_j|, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.72)$$

Доказательство этих формул основано на вычислениях, по существу аналогичных приведенным в § II.8 части I.

Как и для модели НШ в случае конечной плотности,  $N$ -солитонное решение  $q_n(t)$  с параметром  $c$  распадается на солитоны  $q_n^{(\pm)}(t)$  с различными параметрами  $c_j$ . Таким образом, взаимодействуют лишь солитоны с разными значениями  $c_j$ . На соотношение

$$c = \sum_{j=1}^N c_j \quad (3.73)$$

можно смотреть как на закон сохранения. Интерпретация формул (3.67) — (3.72) в терминах теории рассеяния аналогична приведенной для рассмотренных ранее примеров.

Изложение динамики солитонов и результатов по обратной задаче для модели Тода на этом заканчивается.

#### § 4. Полная интегрируемость модели Тода в быстроубывающем случае

Здесь мы рассмотрим отображение  $\mathcal{F}$  с точки зрения канонических преобразований в фазовом пространстве. Мы убедимся, что как и для модели НШ в случае конечной плотности, в программе построения канонических переменных типа действие — угол для модели Тода имеются интересные особенности, связанные с существованием края у непрерывного спектра вспомога-

тельной линейной задачи. Мы покажем, как они влияют на гамильтонову интерпретацию теории рассеяния солитонов.

**1. Пуассонова структура и алгебра наблюдаемых.** Фазовое пространство  $\mathcal{M}_c$  модели Тода параметризуется координатами  $p_n, q_n$ , удовлетворяющими быстроубывающим граничным условиям

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = c, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} p_n = 0. \quad (4.1)$$

Пуассонова структура на  $\mathcal{M}_c$  задается формальными скобками Пуассона

$$\{p_n, p_m\} = \{q_n, q_m\} = 0, \quad \{p_n, q_m\} = \delta_{nm}. \quad (4.2)$$

Алгебра наблюдаемых образована допустимыми функционалами  $F(p_n, q_n)$ . Допустимыми являются функционалы  $F(p_n, q_n)$ , которые порождают гамильтоновы потоки, не выводящие из  $\mathcal{M}_c$ . В частности, они должны удовлетворять условиям

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial p_n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial q_n} = 0. \quad (4.3)$$

Простейшим примером недопустимого функционала является величина

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n, \quad (4.4)$$

возникающая как первый коэффициент при разложении  $\ln a(z)$  в ряд Тейлора при  $z=0$  (см. п. 4 § 2). Его роль сводится к одновременному сдвигу всех координат  $q_n$ , что нарушает граничные условия (4.1).

Мы имеем следующую аналогию с моделью НШ в случае конечной плотности: величина  $c$ , как и фаза  $\theta$ , играет роль номера фазового пространства  $\mathcal{M}_c$  и связана с коэффициентами перехода и дискретным спектром условием (с). Функционал  $P$  аналогичен функционалу  $N_\theta$  для модели НШ в случае конечной плотности. Пример этой модели учит нас, что следует соблюдать аккуратность при исследовании формальных скобок Пуассона коэффициентов перехода на краях непрерывного спектра. Ниже мы будем обращать особое внимание на выделение допустимых наблюдаемых из семейства локальных интегралов движения  $I_n$ , порождаемого тождествами следов.

**2. Скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра.** Рассмотрим вытекающие из фундаментальных скобок Пуассона (1.9) скобки Пуассона для матрицы перехода  $T(n, m, z)$

$$\{T(n, m, z) \otimes T(n, m, z')\} =$$

$$= [r(z, z'), T(n, m, z) \otimes T(n, m, z')], \quad m < n, \quad (4.5)$$

где

$$r(z, z') = r(\lambda(z) - \lambda(z')), \quad (4.6)$$

а  $r(\lambda)$  дается формулой (1.19), и перейдем в них к пределам при  $n \rightarrow +\infty$ ,  $m \rightarrow \pm\infty$  в соответствии с определениями (2.19) и (2.45). В результате мы получим следующие выражения для скобок Пуассона решений Юста  $T_{\pm}(n, z)$  и приведенной матрицы монодромии  $T(z)$ :

$$\{T_{\pm}(n, z) \otimes T_{\pm}(n, z')\} = \mp r(z, z') T_{\pm}(n, z) \otimes T_{\pm}(n, z') \pm \pm T_{\pm}(n, z) \otimes T_{\pm}(n, z') r_{\pm}(z, z'), \quad (4.7)$$

$$\{T_{+}(n, z) \otimes T_{-}(n, z')\} = 0, \quad (4.8)$$

$$\{T(z) \otimes T(z')\} = r_{+}(z, z') T(z) \otimes T(z') - T(z) \otimes T(z') r_{-}(z, z'). \quad (4.9)$$

Здесь

$$r_{\pm}(z, z') = \begin{pmatrix} \text{v. p. } \frac{zz'\alpha(z, z')}{(z-z')(zz'-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{v. p. } \frac{zz'\beta(z, z')}{(z-z')(zz'-1)} \mp \pi i t \frac{\delta' zz'^{-1} z}{1-z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm \pi i t \frac{\delta' zz'^{-1} z}{1-z^2} & \text{v. p. } \frac{zz'\beta(z, z')}{(z-z')(zz'-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{v. p. } \frac{zz'\alpha(z, z')}{(z-z')(zz'-1)} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

а

$$\alpha(z, z') = \frac{(zz'-1)^2}{(1-z^2)(1-z'^2)}, \quad \beta(z, z') = -\frac{(z-z')^2}{(1-z^2)(1-z'^2)}, \quad (4.11)$$

так что

$$\alpha(z, z') + \beta(z, z') = 1, \quad (4.12)$$

и в силу инволюций (2.21) и (2.47) мы считаем, что  $|z| = |z'| = 1$ ,  $\text{Im } z, \text{Im } z' > 0$ , причем  $z, z' \neq \pm 1$ ;  $\delta$ -функция  $\delta(zz'^{-1})$  определяется естественным образом:

$$\int_{|z'|=1} \delta(zz'^{-1}) f(z') \frac{dz'}{z'} = f(z). \quad (4.13)$$

При выводе формул (4.10)–(4.11) мы также использовали соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \text{v. p. } \frac{(zz'^{-1})^n}{1-zz'^{-1}} = \mp \pi i \delta(zz'^{-1}), \quad (4.14)$$

где  $|z| = |z'| = 1$ .

Из формулы Сохоцкого — Племеля

$$\frac{1}{z - z' e^{-0}} = \lim_{\substack{\tilde{z} \rightarrow z' \\ |\tilde{z}| < 1}} \frac{1}{z - \tilde{z}} = \text{v. p.} \frac{1}{z - z'} + \pi i \frac{\delta(z z'^{-1})}{z} \quad (4.15)$$

и (4.7) — (4.11) получаем следующие выражения для скобок Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра:

$$\{a(z), a(z')\} = \{a(z), \bar{a}(z')\} = 0, \quad (4.16)$$

$$\{b(z), b(z')\} = 0, \quad (4.17)$$

$$\{b(z), \bar{b}(z')\} = 2\pi i \frac{z |a(z)|^2}{1 - z^2} \delta(z z'^{-1}), \quad (4.18)$$

$$\{a(z), b(z')\} = \frac{z z' ((1 - z z')^2 + (z - z')^2) a(z) b(z')}{(z e^{-0} - z') (1 - z z') (1 - z^2) (1 - z'^2)}, \quad (4.19)$$

$$\{a(z), \bar{b}(z')\} = - \frac{z z' ((1 - z z')^2 + (z - z')^2) a(z) \bar{b}(z')}{(z e^{-0} - z') (1 - z z') (1 - z^2) (1 - z'^2)} \quad (4.20)$$

и

$$\{a(z), \gamma_j\} = \frac{z z_j ((1 - z z_j)^2 + (z - z_j)^2) a(z) \gamma_j}{(z - z_j) (1 - z z_j) (1 - z^2) (1 - z_j^2)}, \quad (4.21)$$

$$\{b(z), z_j\} = \{b(z), \gamma_j\} = 0, \quad (4.22)$$

$$\{z_i, z_j\} = \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (4.23)$$

$$\{z_i, \gamma_j\} = - \frac{z_i}{1 - z_i} \gamma_j \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.24)$$

При этом, благодаря аналитичности функции  $a(z)$ , формулы (4.19) — (4.21) справедливы и при  $|z| < 1$ .

Как и в случае модели НШ, получим отсюда набор независимых переменных с простыми скобками Пуассона. Именно, рассмотрим формулы (4.19) и (4.21) для  $|z| < 1$ , устремим  $|z|$  к 1 и отделим в них соответственно мнимую и вещественную части. Мы получим, что при  $|z| = |z'| = 1$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ ,  $\text{Im } z' > 0$ ,

$$\{\ln |a(z)|, \arg b(z')\} = - \frac{\pi \delta(z z'^{-1}) z}{1 - z^2} + \frac{\pi z'}{1 - z'^2} (\delta(z) + \delta(-z)). \quad (4.25)$$

и

$$\{\ln |a(z)|, \ln |\gamma_j|\} = \frac{\pi i z_j}{1 - z_j^2} (\delta(z) + \delta(-z)). \quad (4.26)$$

Слагаемые с  $\delta(\pm z)$  в этих формулах порождаются сингулярным знаменателем  $(1 - z^2)^{-1}$ , присутствующим в (4.19) и (4.21);

$\delta$ -функция  $\delta(\pm z)$  понимается следующим образом:

$$\int_C \delta(\pm z) f(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} f(\pm 1), \quad (4.27)$$

где  $C$  — полуокружность  $|z|=1$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . (Сравни с аналогичными формулами в § III.9 части I.)

Введем набор переменных

$$\rho(\theta) = \frac{\sin \theta}{\pi} \ln(1 + |b(e^{i\theta})|^2), \quad \varphi(\theta) = -\arg b(e^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (4.28)$$

$$\tilde{p}_j = \lambda_j = z_j + \frac{1}{z_j}, \quad \tilde{q}_j = \ln |\gamma_j|, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.29)$$

со следующими областями значений:

$$0 \leq \rho(\theta) < \infty, \quad 0 \leq \varphi(\theta) < 2\pi, \quad (4.30)$$

$$|\tilde{p}_j| > 2, \quad -\infty < \tilde{q}_j < \infty. \quad (4.31)$$

Используя формулы (4.24)–(4.26), убеждаемся, что эти переменные имеют следующие неисчезающие скобки Пуассона:

$$\{\rho(\theta), \varphi(\theta')\} = \delta(\theta - \theta') - \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} (\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)), \quad (4.32)$$

$$\{\rho(\theta), \tilde{q}_j\} = -\frac{2 \sin \theta z_j}{z_j^2 - 1} (\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)), \quad (4.33)$$

$$\{\tilde{p}_i, \tilde{q}_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.34)$$

Эти скобки Пуассона имели бы канонический вид, если бы в правых частях (4.32)–(4.33) отсутствовали слагаемые, пропорциональные  $\sin \theta (\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi))$ . Эти дополнительные слагаемые следует интерпретировать в том же смысле, что и в § III.9 части I. Их необходимо учитывать каждый раз, когда мы имеем дело с функционалами вида

$$F(\rho) = \int_0^\pi \frac{\rho(\theta)}{\sin \theta} f(\theta) d\theta, \quad (4.35)$$

где  $f(\theta)$  — гладкая функция при  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $f(0) = f(\pi) \neq 0$ . С такими функционалами мы встретимся в следующем пункте.

**3. Гамильтонова динамика и интегралы движения в переменных  $\rho(\theta)$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\tilde{p}_j$ ,  $\tilde{q}_j$ .** Введенные переменные можно рассматривать как координаты на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_c$ , в терминах которых пуассонова структура (4.2) записывается в виде (4.32)–(4.34). Однако они не являются полностью независимыми.



Именно, имеет место условие (с) :

$$c = - \int_0^{\pi} \frac{\rho(\theta)}{\sin \theta} d\theta - \sum_{j=1}^N \ln z_j^2. \quad (4.36)$$

Кроме того, в случае общего положения величина  $\frac{\rho(\theta)}{\sin \theta}$  при  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\pi$  имеет особенность типа  $\ln \frac{1}{|\sin \theta|}$ , а значения  $\varphi(0)$  и  $\varphi(\pi)$  фиксированы и равны 0 или  $\pi$  в соответствии с формулами (2.76). В случае, если  $\theta=0$  или  $\theta=\pi$  или оба эти значения являются виртуальными уровнями, то величина  $\frac{\rho(\theta)}{\sin \theta}$  в этих точках конечна, а  $\varphi(\theta)$  принимает значения 0 или  $\pi$ .

В качестве иллюстрации *убедимся в том, что хотя правая часть в (4.36) зависит, на первый взгляд, от динамических переменных  $\rho(\theta)$  и  $\tilde{p}_j$ , на самом деле она находится в инволюции с переменными  $\varphi(\theta)$  и  $\tilde{q}_j$*  (сравни с § III.9 части I). Действительно, из (4.32) — (4.34) имеем

$$\{c, \varphi(\theta)\} = -\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta'}{\sin \theta'} (\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)) d\theta' = 0 \quad (4.37)$$

и

$$\{c, \tilde{q}_j\} = \frac{2z_j}{z_j^2 - 1} - \{\ln z_j^2, \tilde{q}_j\} = 0. \quad (4.38)$$

Покажем теперь, что *переход к новым переменным тривиализует динамику модели Toda*. Гамильтониан  $H$  и уравнения движения записываются следующим образом:

$$H = - \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \rho(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{z_j^2} - z_j^2 \right), \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial t} = \{H, \rho(\theta)\} = 0, \quad \frac{d\tilde{p}_j}{dt} = \{H, \tilde{p}_j\} = 0, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial t} = \{H, \varphi(\theta)\} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = 2 \sin \theta, \quad (4.41)$$

$$\frac{d\tilde{q}_j}{dt} = \{H, \tilde{q}_j\} = \frac{z_j^4 + 1}{z_j(1 - z_j^2)} - \frac{2z_j}{1 - z_j^2} = -\left( z_j - \frac{1}{z_j} \right) \quad (4.42)$$

и тривиально решаются. Ответ эквивалентен формулам (2.86) — (2.87).

*Подчеркнем, что игнорирование дополнительных слагаемых в скобках Пуассона (4.32) — (4.34) привело бы к неправильной временной динамике коэффициентов перехода.*

Для локальных интегралов движения  $I_n$  из тождеств следов (2.100) получаем следующие выражения:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\sin \theta} \rho(\theta) d\theta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N (z_j^n - z_j^{-n}), \quad (4.43)$$

так что они зависят лишь от переменных  $\rho(\theta)$  и  $\tilde{p}_j$ . Из этих формул следует, что функционалы  $I_{2n+1}$  являются недопустимыми. Действительно, уравнения движения

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial t} = \{I_{2n+1}, \varphi(\theta)\} \quad (4.44)$$

имеют вид

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial t} = \frac{\cos(2n+1)\theta}{\sin \theta} \quad (4.45)$$

(дополнительное слагаемое в скобке Пуассона (4.32) не дает вклада в (4.44)), и их решение

$$\varphi(\theta, t) = \varphi(\theta, 0) + \frac{\cos(2n+1)\theta}{\sin \theta} t \quad (4.46)$$

при  $t > 0$  сингулярно при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , и, тем самым, динамика, порожденная  $I_{2n+1}$ , выводит из фазового пространства  $\mathcal{M}_c$ . В частности, это еще раз показывает недопустимость функционала  $P = -I_1$ .

Функционалы  $I_{2n}$  являются допустимыми и отвечают наблюдаемым на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_c$ . Порождаемые ими уравнения движения в переменных  $\rho(\theta)$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\tilde{p}_j$ ,  $\tilde{q}_j$  имеют вид

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial t} = \{I_{2n}, \varphi(\theta)\} = \frac{\cos 2n\theta - 1}{\sin \theta} = -\frac{2 \sin^2 n\theta}{\sin \theta}, \quad (4.47)$$

$$\frac{d\tilde{q}_j}{dt} = \{I_{2n}, \tilde{q}_j\} = \frac{(z_j^{2n} + z_j^{-2n})}{z_j - z_j^{-1}} - \frac{2}{z_j - z_j^{-1}} = \frac{(z_j^n - z_j^{-n})^2}{z_j - z_j^{-1}} \quad (4.48)$$

(где дополнительные слагаемые в (4.32)–(4.33) уже дают вклад), и временная динамика коэффициентов перехода дается формулами

$$b(z, t) = \exp \left\{ \frac{(z^n - z^{-n})^2}{z - z^{-1}} t \right\} b(z, 0), \quad (4.49)$$

$$\gamma_j(t) = \exp \left\{ \frac{(z_j^n - z_j^{-n})^2}{z_j - z_j^{-1}} t \right\} \gamma_j(0), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.50)$$

При  $n=1$  отсюда получаем (после обращения знака времени) знакомые выражения (2.86)–(2.87).

Не следует думать, что «половина» локальных интегралов движения являются недопустимыми. Действительно, величины

$$\tilde{I}_n = I_n - I_{n-2}, \quad n > 1, \quad (4.51)$$

где  $I_0 = -c$ , уже допустимы. Они представляются в виде

$$\tilde{I}_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta - \cos(n-2)\theta}{\sin \theta} \rho(\theta) d\theta + \sum_{j=1}^N \left( \frac{z_j^n - z_j^{-n}}{n} - \frac{z_j^{n-2} - z_j^{-n+2}}{n-2} \right), \quad (4.52)$$

и подынтегральное выражение  $\frac{\cos n\theta - \cos(n-2)\theta}{\sin \theta}$  уже несингулярно при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ . Поэтому функционалы  $\tilde{I}_n$  отвечают наблюдаемым на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_c$ , и при написании порождаемых ими уравнений движения можно не учитывать дополнительные слагаемые в (4.32)–(4.33). Аналогичную регуляризацию мы проводили для модели НШ в случае конечной плотности. Единственной величиной, не допускающей такую регуляризацию, является функционал  $P$  (сравни с § III.9 части I).

Гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{dp_n}{dt} = \{\tilde{I}_l, p_n\}, \quad \frac{dq_n}{dt} = \{\tilde{I}_l, q_n\}, \quad n = -\infty, \dots, \infty, \quad (4.53)$$

естественно называть *высшими уравнениями модели Toda*. Все эти уравнения являются точно решаемыми.

Приведенные результаты позволяют утверждать, что модель Toda и все ее высшие аналоги являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. Переменные  $\rho(\theta)$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\tilde{p}_j$  и  $\tilde{q}_j$  фактически играют для них роль переменных типа действие — угол.

В регуляризованных интегралах движения  $\tilde{I}_l$  естественным образом видно разделение мод. Так, для  $\tilde{H} = -\tilde{I}_2 = H - c$  имеем выражение

$$\tilde{H} = 2 \int_0^\pi \sin \theta \rho(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (z_j^{-2} - z_j^2 + 2 \ln z_j^2), \quad (4.54)$$

которое интерпретируется в виде суммы по независимым модам. Мода непрерывного спектра с номером  $\theta$  имеет положительную энергию

$$h(\theta) = 2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (4.55)$$

а мода дискретного спектра — солитон — имеет также положительную энергию

$$h(z) = \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{1}{2} z^2 + \ln z^2, \quad -1 < z < 1. \quad (4.56)$$

**4. Динамика солитонов.** Скобки Пуассона (4.32)—(4.33) показывают, что, вообще говоря, *динамика солитонов не отщепляется гамильтоновым образом от динамики мод непрерывного спектра*. Другими словами, связь  $\rho(\theta) = 0$  не согласована с этими скобками Пуассона. Однако (сравни с моделью НШ в случае конечной плотности в § III.9 части I) для уравнений движения, порожденных регуляризованными функционалами  $\tilde{I}_l$ , в  $N$ -солитонном подмногообразии фазового пространства можно ввести новое гамильтоново описание. Именно, на фазовом пространстве с координатами  $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j, j=1, \dots, N$ , с единственными ограничениями  $|\tilde{p}_j| > 2$  и пуассоновой структурой

$$\{\tilde{p}_i, \tilde{q}_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (4.57)$$

гамильтонианы

$$\tilde{I}_l^{(\text{sol})} = \tilde{I}_l|_{\rho, \theta=0}, \quad (4.58)$$

порождают динамику, совпадающую с динамикой солитонов по высшим уравнениям модели Тода.

Так же как и для модели НШ в случае конечной плотности, рассеяние солитонов, задаваемое формулами (3.67)—(3.72), *не описывается каноническим преобразованием*, если мы будем считать, что асимптотические переменные  $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j^{(\pm)} = \tilde{q}_j \pm \Delta \tilde{q}_j$ , где

$$\Delta \tilde{q}_j = \sum_{v_k < v_j} \ln \left| \frac{1 - z_j z_k}{z_j - z_k} \right| - \sum_{v_k > v_j} \ln \left| \frac{1 - z_j z_k}{z_j - z_k} \right|, \quad (4.59)$$

имеют те же скобки Пуассона, что и  $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j$ .

Действительно, для двухсолитонного рассеяния имеем при  $\tilde{p}_1 > \tilde{p}_2$

$$\Delta \tilde{q}_1 = -\Delta \tilde{q}_2 = \ln \frac{|\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + \sqrt{\tilde{p}_1^2 - 4} \sqrt{\tilde{p}_2^2 - 4} - 4|}{2(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)}, \quad (4.60)$$

и это выражение, очевидно, не является функцией только от разности  $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ .

Это означает, конечно, что априорное предположение о каноничности набора переменных  $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j^{(\pm)}$  неверно. Вопрос о корректном выборе канонических асимптотических переменных для динамики солитонов (а также и для мод непрерывного спектра) требует особого исследования и выходит за рамки этой книги.

Разобранный пример модели Тода показывает, что метод обратной задачи столь же эффективен для моделей на решетке, как и для непрерывных моделей. Фундаментальные скобки Пуассона (1.9) для матрицы  $L_n(\lambda)$  играют основную роль в гамильтоновой интерпретации этого метода. На этом мы заканчиваем описание модели Тода.

### § 5. Решеточная модель Л—Л как универсальная интегрируемая система с двумерным вспомогательным пространством

В § II.8 мы убедились, что модель Л—Л является в определенном смысле универсальной для интегрируемых систем с двумерным фазовым пространством при фиксированном  $x$ , которые допускают представление нулевой кривизны с двумерным вспомогательным пространством. В частности, модели SG, НШ и МГ получались из нее различными предельными переходами. Здесь мы введем решеточный аналог модели Л—Л — модель РЛ—Л — и рассмотрим модели, получающиеся из нее соответствующими предельными переходами. В частности, помимо описанных в § I.2 моделей РМГ и РНШ<sub>1</sub>, мы получим естественный решеточный аналог модели SG — модель LSG.

Как мы уже отмечали в § I.2, при переходе от непрерывных моделей к решеточным наиболее просто выглядит матрица  $L_n(\lambda)$  из представления нулевой кривизны. Она является более непосредственным обобщением своего непрерывного аналога — матрицы  $U(x, \lambda)$  из вспомогательной линейной задачи, чем другие объекты: матрица  $V_n(\lambda)$  и соответствующие уравнения движения, пуассонова структура и гамильтониан. Поэтому мы поступим здесь следующим образом: сначала, исходя из естественных условий, определим матрицу  $L_n(\lambda)$ , а затем опишем и саму модель РЛ—Л.

Основное условие на  $L_n(\lambda)$  состоит в том, что эта матрица должна удовлетворять фундаментальным скобкам Пуассона на решетке

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm}. \quad (5.1)$$

Важная роль этих соотношений была проиллюстрирована выше на примере модели Тода. В качестве матрицы  $r(\lambda)$  мы возьмем  $r$ -матрицу модели Л—Л

$$r(\lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 u_a(\lambda) \sigma_a \otimes \sigma_a, \quad (5.2)$$

где

$$u_1(\lambda) = \rho \frac{1}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad u_2(\lambda) = \rho \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad u_3(\lambda) = \rho \frac{\operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad (5.3)$$

а

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{J_3 - J_1}, \quad 0 < k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}} < 1 \quad (5.4)$$

и  $J_1 < J_2 < J_3$  (см. § II.8). Это вполне естественно, поскольку (5.1) можно интерпретировать как соотношение для скобок Пуассона матрицы перехода на один узел решетки — на малый интервал

$\Delta$  для соответствующей непрерывной модели (см. § III.1 части I и § 1).

Продолжая эту аналогию, для искомой матрицы  $L_n(\lambda)$  имеем приближенное выражение

$$L_n(\lambda) = I + \int_{\Delta_n} U(x, \lambda) dx + O(\Delta^2) = \\ = I + \frac{1}{i} \sum_{a=1}^3 u_a(\lambda) \int_{\Delta_n} S_a(x) dx + O(\Delta^2) \quad (5.5)$$

(см. формулу (II.8.2) для  $U(x, \lambda)$ ). Члены  $O(\Delta^2)$  в (5.5) не фиксируются соответствующей непрерывной моделью. Опыт моделей РМГ и РНШ, рассмотренных в § I.2, показывает, что эти члены определяются из представления нулевой кривизны. Здесь мы убедимся, что они однозначно фиксируются и фундаментальными скобками Пуассона (5.1). Формула (5.5) показывает, что матрицу  $L_n(\lambda)$  естественно искать в следующем виде:

$$L_n(\lambda) = \mathcal{F}_0^{(n)} I + \frac{1}{i} \sum_{a=1}^3 u_a(\lambda) \mathcal{F}_a^{(n)} \sigma_a, \quad (5.6)$$

где  $\mathcal{F}_\alpha^{(n)}$ ,  $\alpha=0, 1, 2, 3$  — новые динамические переменные. В непрерывном пределе к модели Л—Л они должны иметь асимптотики

$$\mathcal{F}_0^{(n)} = 1 + O(\Delta^2), \quad \mathcal{F}_a^{(n)} = \Delta S_a(x) + O(\Delta^3), \quad (5.7)$$

где  $\Delta n = x$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  и  $S_1^2(x) + S_2^2(x) + S_3^2(x) = 1$ .

Замечательно, что фундаментальные скобки Пуассона (5.1) с  $r$ -матрицей (5.2)—(5.3) удовлетворяются для матрицы  $L_n(\lambda)$  вида (5.6), если переменные  $\mathcal{F}_0^{(n)}$ ,  $\mathcal{F}_a^{(n)}$  подчиняются следующим скобкам Пуассона:

$$\{\mathcal{F}_a^{(n)}, \mathcal{F}_0^{(m)}\} = J_{bc} \mathcal{F}_b^{(n)} \mathcal{F}_c^{(n)} \delta_{nm} \quad (5.8)$$

и

$$\{\mathcal{F}_a^{(n)}, \mathcal{F}_b^{(m)}\} = -\mathcal{F}_0^{(n)} \mathcal{F}_c^{(n)} \delta_{nm}. \quad (5.9)$$

Здесь и ниже набор  $(a, b, c)$  — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3, и мы положили

$$J_{bc} = \frac{1}{4} (J_c - J_b). \quad (5.10)$$

При выводе (5.8)—(5.9) следует использовать соотношения (II.8.8) и тождества

$$u_a(\lambda - \mu) u_b(\lambda) u_a(\mu) - u_b(\lambda - \mu) u_a(\lambda) u_b(\mu) = J_{ab} u_c(\lambda), \quad (5.11)$$

которые вытекают из теорем сложения для эллиптических функций Якоби. Их можно проверить и непосредственно, сравнивая

полюса по переменной  $\lambda$  левой и правой частей и используя теорему Лиувилля.

Обсудим полученные скобки Пуассона (5.8)—(5.9).

1. Эти скобки Пуассона ультралокальны: переменные  $\mathcal{P}_\alpha^{(n)}$ , принадлежащие разным узлам решетки, находятся в инволюции. Поэтому мы рассмотрим сначала (5.8)—(5.9) в одном узле (опуская зависимость от  $n$ ) как скобки Пуассона на  $\mathbb{R}^4$

$$\{\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_0\} = J_{bc} \mathcal{P}_b \mathcal{P}_c, \quad (5.12)$$

$$\{\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b\} = -\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_c. \quad (5.13)$$

2. Тожество Якоби для скобок Пуассона (5.8)—(5.9) и (5.12)—(5.13) гарантируется уравнением (II.8.12), которому удовлетворяет матрица  $r(\lambda)$ . Однако его легко проверить и непосредственно, используя очевидное соотношение

$$J_{12} + J_{23} + J_{31} = 0. \quad (5.14)$$

3. В отличие от скобок Ли — Пуассона, с которыми мы имели дело в случае моделей МГ и РМГ (см. § I.1—I.2), скобки Пуассона (5.12)—(5.13) квадратичны по образующим  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ . Они являются в некотором естественном смысле деформацией скобок Пуассона модели РМГ. В частности, в непрерывном пределе (5.7) они переходят в скобки Ли — Пуассона для модели МГ.

4. Пуассонова структура (5.12)—(5.13) вырожденна. Ее аннулятор порождается двумя полиномами

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{a=1}^3 \mathcal{P}_a^2 \quad (5.15)$$

и

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}_0^2 - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 J_a \mathcal{P}_a^2. \quad (5.16)$$

Уравнения

$$\mathcal{E}_0 = c_0, \quad \mathcal{E}_1 = c_1, \quad (5.17)$$

где  $c_0$  и  $c_1$  вещественны, выделяют симплектическое подмногообразие  $\Gamma = \Gamma(J_a, c_0, c_1)$  в  $\mathbb{R}^4$ .

5. Многообразие  $\Gamma$ , вообще говоря, несвязно. При условии

$$c_1 > -\frac{J_1}{4} c_0 \quad (5.18)$$

$\Gamma$  гомеоморфно несвязному объединению двух сфер  $S^2$ . Дополнительное условие  $\mathcal{P}_0 > 0$  отбирает одну из них; соответствующее фазовое пространство будем обозначать через  $\Gamma_0$ . В случае

$$-\frac{J_3}{4} c_0 < c_1 < -\frac{J_2}{4} c_0 \quad (5.19)$$

многообразие  $\Gamma$  по-прежнему гомеоморфно объединению двух сфер. Однако при  $-\frac{J_2}{4}c_0 < c_1 < -\frac{J_1}{4}c_0$  оно уже связно и гомеоморфно тору  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . (Фазовое пространство такого типа нам встретится ниже при описании модели LSG.) При условии  $c_1 < -\frac{J_3}{4}c_0$  уравнения (5.17) не имеют решений в  $\mathbb{R}^4$ .

6. Вернемся к скобкам Пуассона (5.8)—(5.9) на решетке. Они естественно заданы на произведении  $\underbrace{\mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^4}_N$ , где  $N$  — число узлов решетки. В качестве фазового пространства  $\mathcal{M}$  модели РЛ—Л мы возьмем произведение фазовых пространств  $\Gamma_0$ , считая, что  $c_0$  и  $c_1$  не зависят от номера  $n$ . (Последнее означает пространственную однородность модели.) В непрерывном пределе при условии

$$c_0 = \Delta^2, \quad c_1 = 1 \quad (5.20)$$

фазовое пространство  $\mathcal{M}$  переходит в фазовое пространство модели Л—Л.

Итак, мы определили фазовое пространство  $\mathcal{M}$  модели РЛ—Л и матрицу  $L_n(\lambda)$  из соответствующей вспомогательной линейной задачи

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n. \quad (5.21)$$

С последней связана матрица монодромии  $T_N(\lambda)$ ,

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}} L_n(\lambda), \quad (5.22)$$

скобки Пуассона для которой имеют тот же вид, что и для матриц  $L_n(\lambda)$ :

$$\{T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)]. \quad (5.23)$$

Отсюда следует, что функции

$$F_N(\lambda) = \text{tr } T_N(\lambda) \quad (5.24)$$

порождают на  $\mathcal{M}$  инволютивное семейство наблюдаемых:

$$\{F_N(\lambda), F_N(\mu)\} = 0. \quad (5.25)$$

Выбор семейства (5.24) соответствует периодическим граничным условиям

$$\mathcal{F}_\alpha^{(n+N)} = \mathcal{F}_\alpha^{(n)}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (5.26)$$

Покажем, что в этом семействе содержатся локальные наблюдаемые, которые представляются в виде суммы по узлам



решетки

$$G_k = \sum_{n=1}^N \hat{g}(\mathbb{S}_\alpha^{(n)}, \dots, \mathbb{S}_\alpha^{(n+k)}), \quad (5.27)$$

где  $k < N$ . Будем говорить, что  $G_k$  описывает взаимодействие  $k+1$  ближайших соседей на решетке. В частности, гамильтониан  $H$  будет описывать взаимодействие двух ближайших соседей.

Для его определения мы поступим следующим образом. Запомним, что выражение (5.24) для  $F_N(\lambda)$  упрощается, если  $\lambda = \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — значение, при котором матрица  $L_n(\lambda)$  вырождается. Действительно, из представления

$$L_n(\lambda_0) = \alpha_n \beta_n^\tau, \quad (5.28)$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  — векторы-столбцы, а  $\tau$  означает транспонирование, следует, что

$$F_N(\lambda_0) = \prod_{n=1}^N \beta_{n+1}^\tau \alpha_n, \quad \beta_{N+1} = \beta_1, \quad (5.29)$$

и, таким образом,  $\ln F_N(\lambda_0)$  — локальная наблюдаемая, описывающая взаимодействие двух ближайших соседей. К сожалению, эта величина, вообще говоря, комплексна. Для построения вещественнозначной наблюдаемой следует использовать две инволюции, которым удовлетворяет матрица  $L_n(\lambda)$ :

$$\bar{L}_n(\lambda) = \sigma_2 L_n(\bar{\lambda}) \sigma_2 \quad (5.30)$$

и

$$L_n(-\lambda) = \sigma_2 L_n^\tau(\lambda) \sigma_2 \quad (5.31)$$

(они непосредственно следуют из определений (5.3) и (5.6)). Первая из них означает, что  $\bar{F}_N(\lambda) = F_N(\bar{\lambda})$ , так что

$$H = \ln \frac{|F_N(\lambda_0)|^2}{2} \quad (5.32)$$

также принадлежит инволютивному семейству, порожденному  $F_N(\lambda)$ . Вторая инволюция позволяет вычислить величину  $H$  явно.

Действительно, из уравнения

$$\det L_n(\lambda_0) = c_1 + c_0 (u_1^2(\lambda_0) + J_1/4) = 0 \quad (5.33)$$

и условия (5.18) следует, что  $\lambda_0$  можно выбрать чисто мнимым, что приводит к представлению

$$L_n(\bar{\lambda}_0) = \bar{L}_n(-\lambda_0) = \sigma_2 \beta_n \alpha_n^\tau \sigma_2, \quad (5.34)$$

поэтому

$$F_N(\bar{\lambda}_0) = F_N(-\lambda_0) = \prod_{n=1}^N \alpha_{n+1}^\tau \beta_n, \quad \alpha_{N+1} = \alpha_1. \quad (5.35)$$

Отсюда получаем

$$H = \sum_{n=1}^N \ln \frac{\beta_{n+1}^\tau \alpha_n \alpha_{n+1}^\tau \beta_n}{2} = \sum_{n=1}^N \ln h(\mathcal{F}_\alpha^{(n)}, \mathcal{F}_\alpha^{(n+1)}), \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} h(\mathcal{F}_\alpha^{(n)}, \mathcal{F}_\alpha^{(n+1)}) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} L_{n+1}(\lambda_0) L_n(\lambda_0) = \\ &= \mathcal{F}_0^{(n)} \mathcal{F}_0^{(n+1)} + \sum_{a=1}^3 \left( \frac{c_a}{c_0} + \frac{J_a}{4} \right) \mathcal{F}_a^{(n)} \mathcal{F}_a^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

При выводе последнего равенства следует использовать формулы (5.6), (5.15)—(5.17) и (5.33).

Величину  $H$  мы и возьмем в качестве гамильтониана для модели РЛ—Л. Порождаемые им уравнения движения

$$\frac{d\mathcal{F}_\alpha^{(n)}}{dt} = \{H, \mathcal{F}_\alpha^{(n)}\}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (5.38)$$

не слишком поучительны, и мы не будем здесь их явно выписывать. Вместо этого обсудим их общие свойства.

1) В непрерывном пределе (5.7) при условиях (5.20) гамильтониан  $H$  переходит в гамильтониан модели Л—Л из § 1.1:

$$-2H + 2N \ln 2 = \frac{\Delta}{2} \int \left( \left( \frac{d\vec{S}}{dx} \right)^2 - J(\vec{S}) \right) dx + O(\Delta^2) \quad (5.39)$$

и из уравнений (5.38) получаем уравнение Л—Л.

2) Модель РЛ—Л является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Действительно, семейство из  $N-1$  независимых, инволютивных интегралов движения, содержащее гамильтониан  $H$ , можно построить следующим образом:

$$I_k = \frac{d^k}{d\lambda^k} \ln |F_N(\lambda)|^2 \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (5.40)$$

Величины  $I_k$  локальны и описывают взаимодействие  $k+2$  ближайших соседей. Недостающий интеграл движения можно взять в виде  $\operatorname{arg} F_N(\lambda_0)$ .

3) Уравнения движения (5.38) представляются в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{dL_n}{dt}(\lambda) = V_{n+1}(\lambda) L_n(\lambda) - L_n(\lambda) V_n(\lambda). \quad (5.41)$$

Действительно, действуя совершенно аналогично рассуждениям в § III.3 части I, получаем соотношение

$$\{\ln F_N(\mu), L_n(\lambda)\} = V_{n+1}(\lambda, \mu) L_n(\lambda) - L_n(\lambda) V_n(\lambda, \mu), \quad (5.42)$$

где

$$V_n(\lambda, \mu) = \frac{1}{F_N(\mu)} \operatorname{tr}_1 \left( \left( \prod_{k=n}^{\widehat{N}} L_k(\mu) \otimes I \right) r(\mu - \lambda) \left( \prod_{k=1}^{\widehat{n-1}} L_k(\mu) \otimes I \right) \right) \quad (5.43)$$

и мы использовали введенное там обозначение  $\operatorname{tr}_1$ . Из формулы (5.32) следует, что  $\{H, L_n(\lambda)\}$  совпадает с правой частью в (5.41), где

$$V_n(\lambda) = \frac{1}{2} (V_n(\lambda, \lambda_0) + V_n(\lambda, \bar{\lambda}_0)). \quad (5.44)$$

Таким образом, уравнения движения

$$\frac{dL_n}{dt}(\lambda) = \{H, L_n(\lambda)\} \quad (5.45)$$

представляются в виде (5.41).

Выражение для матрицы  $V_n(\lambda)$  можно упростить, используя формулы (5.29), (5.35) и (5.37). Имеем

$$\begin{aligned} V_n(\lambda) &= \frac{\operatorname{tr}_1(\alpha_{n-1} \beta_n^\top \otimes I) r(\lambda_0 - \lambda)}{4\beta_n^\top \alpha_{n-1}} - \frac{\operatorname{tr}_1(\sigma_2 \beta_{n-1} \alpha_n^\top \sigma_2 \otimes I) r(\lambda_0 + \lambda)}{2\alpha_n^\top \beta_{n-1}} = \\ &= -\frac{1}{h(\mathcal{P}_\alpha^{(n-1)}, \mathcal{P}_\alpha^{(n)})} \operatorname{tr}_1((L_{n-1}(\lambda_0) L_n(\lambda_0) \otimes I) r(\lambda - \lambda_0) + \\ &\quad + (L_{n-1}(-\lambda_0) L_n(-\lambda_0) \otimes I) r(\lambda + \lambda_0)). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Последняя формула показывает, что матрица  $V_n(\lambda)$  зависит лишь от двух ближайших соседей.

Подчеркнем, что как и в непрерывном случае, *фундаментальные скобки Пуассона на решетке заменяют представление нулевой кривизны*. Это еще раз демонстрирует полезность и универсальность понятия  $r$ -матрицы.

На этом мы заканчиваем описание модели РЛ—Л. Рассмотрим теперь модели, получающиеся из нее вырождением эллиптической кривой  $E$  (см. § II.8).

Простейший предельный переход отвечает случаю  $k \rightarrow 0$ , при котором  $J_1 = J_2 < J_3$ . Соответствующая матрица  $L_n(\lambda)$  приобретает вид

$$L_n(\lambda) = \mathcal{P}_0^{(n)} I + \frac{\rho}{i \sin \lambda} (\mathcal{P}_1^{(n)} \sigma_1 + \mathcal{P}_2^{(n)} \sigma_2 + \cos \lambda \mathcal{P}_3^{(n)} \sigma_3), \quad (5.47)$$

где переменные  $\mathcal{P}_\alpha^{(n)}$  удовлетворяют скобкам Пуассона (5.8)—(5.9) с  $J_{12} = 0$ ,  $J_{13} = J_{23} = \rho^2$ . В этом случае для переменных  $\mathcal{P}_\alpha$

(в каждом узле) можно написать явное представление через обычные переменные  $S_1, S_2, S_3$  на сфере радиуса  $R$  в  $\mathbb{R}^3$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = R^2 \quad (5.48)$$

со скобками Ли — Пуассона

$$\{S_a, S_b\} = -S_c. \quad (5.49)$$

Именно, положим

$$\mathcal{S}_0 = \text{ch}(\rho S_3), \quad \mathcal{S}_3 = \frac{1}{\rho} \text{sh}(\rho S_3), \quad (5.50)$$

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{\rho} F(S_3) S_1, \quad \mathcal{S}_2 = \frac{1}{\rho} F(S_3) S_2,$$

где

$$F(x) = \sqrt{\frac{\text{sh}^2 \rho R - \text{sh}^2 \rho x}{R^2 - x^2}}. \quad (5.51)$$

Тогда переменные  $\mathcal{S}_a$  удовлетворяют скобкам Пуассона (5.12) — (5.13), а значения инвариантов  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_1$  имеют вид

$$c_0 = \frac{\text{sh}^2 \rho R}{\rho^2}, \quad c_1 = 1 - \frac{J_1}{4} c_0. \quad (5.52)$$

После подстановки формул (5.50) — (5.51) в (5.47) мы получим матрицу  $L_n(\lambda)$  для модели, которую естественно называть *частично анизотропной моделью РМГ*;  $r$ -матрица для нее получается из (5.2) — (5.3) в пределе при  $k \rightarrow 0$  и имеет вид

$$r(\lambda) = -\frac{\rho}{2 \sin \lambda} (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \cos \lambda \sigma_3 \otimes \sigma_3). \quad (5.53)$$

Эта же  $r$ -матрица обслуживает и частично анизотропную модель МГ (см. § 1.8), в которую наша модель переходит в непрерывном пределе при наивной замене

$$S_a^{(n)} = \Delta S_a(x), \quad R = \Delta. \quad (5.54)$$

Описанная частично анизотропная модель РМГ допускает дальнейшее вырождение. Именно, в пределе  $\rho \rightarrow 0$  (заменяя  $\lambda$  на  $2\rho/\lambda$ ) мы приходим к изотропному случаю  $J_1 = J_2 = J_3$ , отвечающему модели РМГ из § 1.2. Соответствующая ей  $r$ -матрица получается из (5.53) в этом пределе и совпадает с  $r$ -матрицей для модели МГ из § 11.3. Как было объяснено в § 1.2, тем самым мы приходим и к модели РНШ<sub>1</sub>.

Опишем теперь решеточный аналог модели SG — модель LSG. По существу, она является другой вещественной формой только что рассмотренной частично анизотропной модели РМГ. Именно, мы поменяем роль параметров  $J_1, J_2, J_3$  и будем считать,

что  $J_1 = J_2 > J_3$ , оставляя представления (5.3)–(5.4) (где  $k=0$ ) и вид (5.47) матрицы  $L_n(\lambda)$  неизменными. Ограничения (5.19) превращаются в

$$-\frac{J_1}{4} c_0 < c_1 < -\frac{J_3}{4} c_0, \quad (5.55)$$

и фазовое пространство модели в одном узле решетки гомеоморфно тору  $\mathbb{T}^2$ . Переменные  $\mathcal{S}_\alpha$  реализуются как функции от канонических переменных  $\pi$  и  $\varphi$  на торе

$$\{\pi, \varphi\} = 1. \quad (5.56)$$

Именно, положим

$$\mathcal{S}_0 = s \cos \frac{\beta\varphi}{2}, \quad \mathcal{S}_3 = \frac{s}{\gamma} \sin \frac{\beta\varphi}{2}, \quad (5.57)$$

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{f(\varphi)}{\gamma} \sin \frac{\beta\pi}{4}, \quad \mathcal{S}_2 = -\frac{f(\varphi)}{\gamma} \cos \frac{\beta\pi}{4},$$

где

$$f(x) = \sqrt{1 + s^2 \cos^2 \beta x / 2}, \quad (5.58)$$

а  $\gamma = \beta^2 / 8 > 0$  и  $s > 0$  — произвольные параметры. Тогда переменные  $\mathcal{S}_\alpha$  удовлетворяют скобкам Пуассона (5.12)–(5.13) с параметрами

$$J_{12} = 0, \quad J_{13} = J_{23} = -\gamma^2, \quad (5.59)$$

где  $J_1 = J_2 = 4\gamma^2$ ,  $J_3 = 0$ , а инварианты  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_1$  имеют значения

$$c_0 = \frac{s^2 + 2}{2\gamma^2}, \quad c_1 = \frac{s^2 - 2}{2}. \quad (5.60)$$

Рассмотрим теперь матрицу  $L_n^{\text{SG}}(\alpha)$  вида

$$L_n^{\text{SG}}(\alpha) = -i \operatorname{sh} \alpha \sigma_2 L_n(i\alpha), \quad (5.61)$$

где матрица  $L_n(\lambda)$  дается формулой (5.47) с  $\rho = i\gamma$ . Подставляя вместо  $\mathcal{S}_\alpha^{(n)}$  их выражения (5.57)–(5.58) через  $\pi_n$  и  $\varphi_n$ , получаем

$$\begin{aligned} L_n^{\text{SG}}(\alpha) = & f(\varphi_n) \cos \frac{\beta\pi_n}{4} I + \frac{1}{i} f(\varphi_n) \sin \frac{\beta\pi_n}{4} \sigma_3 + \\ & + \frac{s}{i} \left( \operatorname{ch} \alpha \sin \frac{\beta\varphi_n}{2} \sigma_1 + \operatorname{sh} \alpha \cos \frac{\beta\varphi_n}{2} \sigma_2 \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Матрица  $L_n^{\text{SG}}(\alpha)$  удовлетворяет фундаментальным скобкам Пуассона (5.1) с  $r$ -матрицей вида (5.53) при  $\lambda = i\alpha$ ,  $\rho = i\gamma$ . Матрица  $r(\alpha)$  совпадает (с точностью до несущественного слагаемого, пропорционального  $I \otimes I$ ) с  $r$ -матрицей модели SG из § II.6.

Гамильтониан  $H$  модели LSG имеет вид

$$H^{\text{LSG}} = \sum_{n=1}^N \ln \left( \frac{2s^2\gamma^2}{s^2+2} (-\mathcal{F}_1^{(n)} \mathcal{F}_1^{(n+1)} + \mathcal{F}_2^{(n)} \mathcal{F}_2^{(n+1)}) + \frac{2-s^2}{2+s^2} \gamma^2 \mathcal{F}_3^{(n)} \mathcal{F}_3^{(n+1)} + \mathcal{F}_0^n \mathcal{F}_0^{(n+1)} \right), \quad (5.63)$$

где вместо  $\mathcal{F}_\alpha^{(n)}$  следует подставить их выражения (5.57)—(5.58) через  $\pi_n$ ,  $\varphi_n$ , и получается из формул (5.36)—(5.37) при учете (5.60)—(5.61). Отметим, что изменение знака у слагаемых  $\mathcal{F}_1^{(n)} \mathcal{F}_1^{(n+1)}$  и  $\mathcal{F}_3^{(n)} \mathcal{F}_3^{(n+1)}$  по сравнению с (5.37) согласовано с формулой (5.61), которая может быть интерпретирована как операция альтернирования знака

$$\mathcal{F}_1^{(n)} \mapsto (-1)^n \mathcal{F}_1^{(n)}, \quad \mathcal{F}_3^{(n)} \mapsto (-1)^n \mathcal{F}_3^{(n)} \quad (5.64)$$

(сравни с рассуждениями в § 1.2).

Вспомогательная линейная задача (после замены  $\lambda = e^x$ ), гамильтониан  $H$  и прочие характеристики модели LSG в непрерывном пределе

$$\pi_n = \Delta \pi(x), \quad \varphi_n = \varphi(x), \quad s = m\Delta/2 \quad (5.65)$$

переходят в соответствующие объекты для модели SG из § 1.1. Это оправдывает название описанной вполне интегрируемой модели на решетке решеточной моделью SG.

Отметим, что в то время как на решетке модель LSG и частично анизотропная модель РМГ, по существу, совпадают, их непрерывные модели весьма далеки, так как они получаются в результате различных непрерывных пределов.

Список моделей, порождаемых моделью РЛ—Л, отнюдь не исчерпывается приведенными выше примерами. Мы можем рассматривать высшие аналоги модели РЛ—Л с гамильтонианами  $I_n$ , их контракции, а также другие значения параметров  $J_a$  и инвариантов  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_1$ . Более того, мы можем изменять вид матрицы  $L_n(\lambda)$  по формуле

$$L_n(\lambda) \mapsto AL_n(\lambda), \quad (5.66)$$

где матрица  $A \otimes A$  коммутирует с  $r$ -матрицей. На этом пути можно получить и модель Тода.

Однако мы выбрали именно модель Тода в качестве основного примера модели на решетке, поскольку ее исследование технически более просто. В то же время она вполне удовлетворительно иллюстрирует основные особенности формализма метода обратной задачи для решеточных моделей.

## § 6. Комментарии и литературные указания

1) Полная интегрируемость модели Тода в периодическом случае была доказана в работах С. В. Манакова [3.7] и Г. Флашки [3.17—3.18], в которых использовалось представление Лакса с матрицей  $\mathcal{L}$  вида (2.35):

$$\mathcal{L}_{nm} = c_n \delta_{n,m+1} - p_n \delta_{nm} + c_m \delta_{n,m-1}, \quad (6.1)$$

где  $\delta_{n+N,m} = \delta_{n,N+m} = \delta_{nm}$ . Функции  $\text{tr } \mathcal{L}^k$ ,  $k=1, \dots, N$ , образуют инволютивное семейство на фазовом пространстве модели и при этом  $H = \frac{1}{2} \text{tr } \mathcal{L}^2$ . Матрица  $L_n(\lambda)$  вида (1.8) была введена в [3.11].

2) Общее решение периодической модели Тода в терминах тэта-функций Римана было получено в работе [3.6]. Соответствующие канонические переменные типа действие — угол были введены в [3.19].

3) Вспомогательная линейная задача (2.33) (при  $N = \infty$ )

$$\mathcal{L}f = \lambda f \quad (6.2)$$

и обратная задача для нее исследовались в работах [3.7], [3.17—3.18] (без обсуждения тонкостей, связанных с краем непрерывного спектра и условием (с)); см. также монографии [3.3] и [3.12]. В последней приведены и различные физические приложения модели Тода.

4) При  $p_n = 0$  уравнение (6.2) превращается во вспомогательную линейную задачу для введенной в § 1.2 модели Вольтерра

$$c_{n+1} f_{n+1} + c_n f_{n-1} = \lambda f_n, \quad (6.3)$$

где  $c_n = \sqrt{u_n}$  (см. [3.7]). В этом случае коэффициенты перехода  $a(z)$  и  $b(z)$  удовлетворяют дополнительной инволюции

$$a(z) = a(-z), \quad b(z) = -b(-z). \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) представляет собой решеточный аналог одномерного уравнения Шредингера и в этом качестве исследовалось в работе [3.15].

5) В непрерывном пределе уравнения движения модели Тода переходят в уравнение нелинейной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad (6.5)$$

которое также интегрируется методом обратной задачи (см. [3.2]), а уравнения движения модели Вольтерра — в уравнение КдФ (см. [3.7], [3.3]). При этом представление нулевой кривизны для решеточных моделей переходят в соответствующие непрерывные аналоги.

6) Переменные типа действие — угол из § 4 (без учета дополнительных слагаемых в скобках Пуассона (4.32)—(4.33)) были введены в [3.8] (см. также [3.16]), где с самого начала использовался гамильтониан  $\mathcal{H}$ .

7) Интересную задачу представляет собой описание топологии фазового пространства  $\mathcal{M}_c$  в терминах переменных  $\rho(\theta)$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\tilde{p}_j$ ,  $\tilde{q}_j$  и соответствующей алгебры наблюдаемых.

8) Для моделей, у которых непрерывный спектр вспомогательной линейной задачи имеет край, вопрос о корректном выборе канонических асимптотических переменных для динамики солитонов (а также и мод непрерывного спектра) является нетривиальным (сравни с моделью НШ в случае конечной плотности). Для уравнения КдФ эта задача была решена в [3.14]. Методы этой работы могут быть, в принципе, применены к моделям Тода и НШ в случае конечной плотности.

9) Как и в случае моделей НШ и КдФ, для модели Тода можно ввести иерархию пуассоновых структур, начинающуюся со скобок Пуассона (1.3). Вторая пуассонова структура для модели Тода была введена в [3.13] и в

терминах переменных  $p_n, u_n = e^{q_n - q_{n-1}}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \{p_n, u_m\} &= -p_n u_m (\delta_{nm} - \delta_{n-1, m}), \\ \{p_n, p_m\} &= u_m^2 \delta_{n, m+1} - u_n^2 \delta_{n, m-1}, \\ \{u_n, u_m\} &= -u_n u_m (\delta_{n+1, m} - \delta_{n-1, m}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

В отличие от пуассоновой структуры (1.3), скобки Пуассона (6.6) допускают нетривиальную редукцию на подмногообразии  $p_n = 0$ . Получающаяся пуассонова структура

$$\{u_n, u_m\} = -u_n u_m (\delta_{n+1, m} - \delta_{n-1, m}) \quad (6.7)$$

приводит к уравнениям движения модели Вольтерра

$$\frac{du_n}{dt} = u_n (u_{n+1} - u_{n-1}), \quad (6.8)$$

если в качестве гамильтониана взять выражение

$$H = \sum_n u_n. \quad (6.9)$$

В непрерывном пределе  $u_n \rightarrow 1 - \Delta u(x)$  скобки Пуассона (6.7) переходят в скобки Пуассона (1.3.15) для модели КдФ.

Скобки Пуассона (1.2.18) для модели Вольтерра получаются из третьей пуассоновой структуры для модели Тода ограничением на подмногообразии  $p_n = 0$ . В непрерывном пределе  $u_n \rightarrow 1 - \Delta^2 u(x)$  они переходят во вторую пуассоновую структуру для модели КдФ (см. § III.10 части I).

10) Модель РЛ—Л и квадратичная алгебра скобок Пуассона были введены Е. К. Скляниным в работе [3.9]. Исследование этой модели в быстроубывающем случае было проделано в [3.1], где были описаны и переменные типа действие — угол.

11) Модель LSG была сформулирована в работах [3.4], [3.20]. В [3.10] было показано, что эта модель в быстроубывающем случае является вполне интегрируемой, и приведены переменные типа действие — угол.

12) В работах [3.1] и [3.10] было показано, что переменные типа действие — угол для моделей РЛ—Л и LSG совпадают со своими аналогами для моделей Л—Л и SG, и подчеркнуто, что этот факт обусловлен совпадением соответствующих  $r$ -матриц.

13) Используемая нами схема построения локальных гамильтонианов для моделей на решетке была развита в работах [3.5], [3.21]. Отметим, что рассмотренный в [3.10] гамильтониан из [3.5], [3.21] отличается от приведенного в § 5.

14) При построении решеточного аналога модели Л—Л мы положили в основу построение матрицы  $L_n(\lambda)$  из вспомогательной линейной задачи, удовлетворяющей фундаментальным скобкам Пуассона. Мы считаем, что этот принцип является наиболее удачным для построения интегрируемых решеточных аналогов непрерывных моделей.



## Глава IV

### ЛИ-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЮ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

В этой главе мы обобщим накопленный при рассмотрении конкретных примеров опыт описания интегрируемых моделей. Основными объектами метода обратной задачи и его гамильтоновой интерпретации являлись оператор вспомогательной линейной задачи  $L = \frac{d}{dx} - U(x, \lambda)$  и фундаментальные скобки Пуассона для матрицы  $U(x, \lambda)$ , в которых участвует  $r$ -матрица. Аналогичные объекты были введены и для моделей на решетке. Мы покажем, что эти понятия допускают простую геометрическую интерпретацию.

Мы приведем естественное разбиение интегрируемых моделей на три семейства: рациональные, тригонометрические и эллиптические, в соответствии с видом зависимости матриц  $U(x, \lambda)$  и  $r(\lambda)$  от спектрального параметра  $\lambda$ . Мы дадим интерпретацию фундаментальных скобок Пуассона для рационального семейства в терминах бесконечномерной алгебры Ли, ассоциированной с алгеброй токов. Тригонометрические и эллиптические семейства получаются при помощи процедуры усреднения по одномерной и двумерной решеткам на комплексной плоскости спектрального параметра  $\lambda$ . Аналогичные семейства имеются и для решеточных моделей, и мы обсудим соответствующие им фундаментальные скобки Пуассона. Ограничиваясь рациональным случаем, мы также обсудим с общей точки зрения и динамику интегрируемых моделей. При этом мы получим естественную геометрическую интерпретацию задачи Римана. Мы приведем также ли-алгебраическую интерпретацию иерархии пуассоновых структур и соответствующего  $\Lambda$ -оператора.

#### § 1. Фундаментальные скобки Пуассона, порожденные алгеброй токов

Напомним определение стандартной пуассоновой структуры, ассоциированной с произвольной связной группой Ли  $G$ ,  $\dim G = n$ . Пусть  $\mathfrak{g}$  — ее алгебра Ли и  $X_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , — ее генераторы со структурными константами  $C_{ab}$ :

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже мы принимаем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. В линейном пространстве  $\mathfrak{g}^*$ , двойственном к  $\mathfrak{g}$ , естественно вводятся координаты  $u_a$ : если  $\xi = \xi^a X_a$  принадлежит  $\mathfrak{g}$ , то  $u(\xi) = (u, \xi) = u_a \xi^a$ . В алгебре  $\mathcal{A}$  гладких функций  $f(u)$  на  $\mathfrak{g}^*$  определим скобку  $\{ , \}$ :  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,

$$\{f_1, f_2\}(u) = -C_{ab}^c \frac{\partial f_1}{\partial u_a} \frac{\partial f_2}{\partial u_b} u_c, \quad (1.2)$$

которая, очевидно, антисимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби в силу соответствующего тождества Якоби для коммутатора (1.1). Таким образом, скобка (1.2) задает пуассонову структуру на фазовом пространстве  $\mathfrak{g}^*$ . Для координат  $u_a$  скобка Пуассона (1.2) принимает вид

$$\{u_a, u_b\} = -C_{ab}^c u_c \quad (1.3)$$

и называется *скобкой Ли — Пуассона*.

Пуассонова структура (1.2), вообще говоря, вырожденна. Ее аннулятор совпадает с алгеброй функций Казимира  $I(\mathfrak{g})$ , состоящей из функций  $f(u)$ , инвариантных относительно коприсоединенного действия  $u \rightarrow \text{Ad}^* g \cdot u$  группы  $G$  на  $\mathfrak{g}^*$ , задаваемого формулой

$$\text{Ad}^* g \cdot u(\xi) = u(g^{-1} \xi g). \quad (1.4)$$

Ограничение скобки Пуассона (1.2) на орбиты этого действия невырожденно, так что пуассоновы подмногообразия в  $\mathfrak{g}^*$  представляют собой объединения орбит.

Фактически в этих определениях используется лишь алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$  и ее коприсоединенное действие  $u \rightarrow \text{ad}^* \eta \cdot u$ , задаваемое формулой

$$\text{ad}^* \eta \cdot u(\xi) = u([\xi, \eta]). \quad (1.5)$$

Орбиты действия  $\text{Ad}^*$  группы  $G$  в  $\mathfrak{g}^*$  являются интегральными многообразиями для распределений, порожденных векторными полями  $\text{ad}^* \eta$  при всех  $\eta$  из  $\mathfrak{g}$ . Поэтому мы будем говорить о ли-алгебраической пуассоновой структуре, порожденной скобками Ли.

При описании интегрируемых систем мы будем иметь дело с бесконечномерными алгебрами Ли. Все приведенные выше определения переносятся на них естественным образом.

Рассмотрим алгебру токов  $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ , ассоциированную с алгеброй Ли  $\mathfrak{g}$ . Она состоит из формальных рядов Лорана  $\xi(\lambda)$  по переменной  $\lambda$

$$\xi(\lambda) = \sum_{k \gg -\infty}^{\infty} \xi_k \lambda^k, \quad (1.6)$$

где  $\xi_k$  принадлежат  $\mathfrak{g}$  и символ  $k \gg -\infty$  означает, что ряд по степеням  $\lambda^{-1}$  обрывается. Коммутатор в  $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$  задается очевидной

формулой

$$[\xi(\lambda), \eta(\lambda)] = \sum_{k \geq -\infty}^{\infty} \sum_{i+j=k} [\xi_i, \eta_j] \lambda^k. \quad (1.7)$$

В качестве генераторов алгебры  $C(g)$  можно взять элементы вида

$$X_{a,k} = X_a \lambda^k, \quad a = 1, \dots, n; \quad k = -\infty, \dots, \infty, \quad (1.8)$$

где  $X_a$  — генераторы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  со структурными константами  $C_{ab}^c$ . Их коммутатор, очевидно, имеет вид

$$[X_{a,k}, X_{b,l}] = C_{ab}^c X_{c,k+l}. \quad (1.9)$$

Обозначим через  $u_{a,k}$  координаты элемента  $u$  в двойственном пространстве  $C^*(g)$ ; в соответствии с (1.6) считаем, что  $u_{a,k} = 0$  при достаточно больших положительных  $k$ . Соответствующее спаривание имеет вид

$$u(\xi) = (u, \xi) = \sum_k u_{a,k} \xi_k^a, \quad (1.10)$$

где сумма по  $k$  всегда конечна. Скобки Ли — Пуассона для координат  $u_{a,k}$  имеют вид

$$\{u_{a,k}, u_{b,l}\} = -C_{ab}^c u_{c,k+l}. \quad (1.11)$$

Удобно ввести производящую функцию  $u_a(\lambda)$  координат  $u_{a,k}$  элемента  $u$  из  $C^*(g)$  в виде следующего формального ряда Лорана:

$$u_a(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k \ll \infty} u_{a,k} \lambda^{-k-1}. \quad (1.12)$$

Для спаривания (1.10) имеем красивую формулу

$$u(\xi) = \text{Res } u_a(\lambda) \xi^a(\lambda), \quad (1.13)$$

где символ Res для любого формального ряда Лорана означает его коэффициент при  $\lambda^{-1}$ .

Переменная  $\lambda$  вводит в алгебре  $C(g)$  градуировку:

$$C(g) = \sum_{k \geq -\infty}^{\infty} g \lambda^k = \sum_{k \geq -\infty}^{\infty} C_k, \quad (1.14)$$

где

$$[C_h, C_l] \subset C_{h+l}, \quad (1.15)$$

которая, в частности, позволяет разложить  $C(g)$  в линейную сумму двух подалгебр:

$$C(g) = C_+(g) + C_-(g), \quad (1.16)$$

где

$$C_+(g) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k, \quad C_-(g) = \sum_{k \geq -1}^{k=-1} C_k. \quad (1.17)$$

Аналогичное разложение имеет место и для пространства  $C^*(g)$ :

$$C^*(g) = C_+^*(g) + C_-^*(g), \quad (1.18)$$

которое в терминах производящей функции  $u_a(\lambda)$  имеет вид

$$u_a(\lambda) = u_a^+(\lambda) + u_a^-(\lambda), \quad (1.19)$$

где

$$u_a^+(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} u_{a,k} \lambda^{-k-1}, \quad u_a^-(\lambda) = \sum_{k=0}^{k \leq \infty} u_{a,k} \lambda^{-k-1}. \quad (1.20)$$

Подпространства  $C_{\pm}^*(g)$  ортогональны  $C_{\pm}(g)$  в смысле спаривания (1.10) и  $C_{\pm}^*(g) = (C_{\mp}(g))^*$ . Скобка Ли — Пуассона (1.11) естественно ограничивается на эти подпространства.

Получающаяся пуассонова структура на  $C_{\pm}^*(g)$  красиво записывается в терминах производящих функций  $u_a^{\pm}(\lambda)$ . Именно, умножим обе части (1.11) на  $\lambda^{-k-1} \mu^{-l-1}$  и просуммируем по  $k, l < 0$  и  $k, l \geq 0$ . Мы получим, что

$$\{u_a^{\pm}(\lambda), u_b^{\pm}(\mu)\} = \mp C_{ab}^c \frac{u_c^{\pm}(\lambda) - u_c^{\pm}(\mu)}{\lambda - \mu}. \quad (1.21)$$

Соответствующая формула для скобки Пуассона  $\{u_a^+(\lambda), u_b^-(\mu)\}$  уже не столь элегантна. К счастью, она нам и не нужна, поскольку мы сейчас введем на фазовом пространстве  $C^*(g)$  новую пуассонову структуру. Именно, в соответствии с разложением (1.16) введем на векторном пространстве  $C(g)$  новую структуру алгебры Ли с коммутатором  $[\ , ]_0$ , полагая

$$[\xi_+, \eta_+]_0 = [\xi_+, \eta_+], \quad [\xi_-, \eta_-]_0 = -[\xi_-, \eta_-] \quad (1.22)$$

и

$$[\xi_+, \eta_-]_0 = 0, \quad (1.23)$$

где  $\xi = \xi_+ + \xi_-$ ,  $\eta = \eta_+ + \eta_-$  — элементы из  $C(g)$ . Вводя оператор

$$R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-), \quad (1.24)$$

где  $P_{\pm}$  — проекторы на подпространства  $C_{\pm}(g)$ ,  $P_+P_- = P_-P_+ = 0$ , соотношения (1.22) — (1.23) можно записать в виде одной формулы

$$[\xi, \eta]_0 = [R\xi, \eta] + [\xi, R\eta]. \quad (1.25)$$

Описанную бесконечномерную алгебру Ли с коммутатором  $[\cdot, \cdot]_0$  будем обозначать через  $C_0(\mathfrak{g})$ . Именно она и будет играть основную роль при классификации интегрируемых моделей.

Соответствующие скобки Ли — Пуассона  $\{, \}_0$  на фазовом пространстве  $C^*(\mathfrak{g})$  даются формулами (1.21) без знака  $\pm$  в правой части и

$$\{u_a^+(\lambda), u_b^-(\mu)\}_0 = 0. \quad (1.26)$$

Теперь объединим (1.21) и (1.26) в одну элегантную формулу, предполагая, что алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  допускает симметричную невырожденную билинейную форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , инвариантную относительно присоединенного действия. Например, можно считать алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  полупростой и в качестве  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  взять форму Киллинга.

Рассмотрим невырожденную матрицу  $K$  с матричными элементами

$$K_{ab} = \langle X_a, X_b \rangle. \quad (1.27)$$

(В случае, если алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  полупроста и реализована как матричная алгебра, то можно считать  $K_{ab} = \text{tr } X_a X_b$ .) Через  $K^{ab}$  будем обозначать матричные элементы обратной матрицы  $K^{-1}$ . Введем элемент  $\Pi$  из  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  и элементы  $A^a$  из  $\mathfrak{g}$  по формулам

$$\Pi = K^{ab} X_a \otimes X_b, \quad (1.28)$$

$$A^a = K^{ab} X_b. \quad (1.29)$$

Справедливы соотношения

$$[\Pi, A^a \otimes I] = -[\Pi, I \otimes A^a] = C_{ab}^c A^a \otimes A^b, \quad (1.30)$$

где символы  $A \otimes I$  и  $I \otimes A$  обозначают естественные вложения элемента  $A$  из алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Для доказательства этих формул следует, помимо (1.1), использовать свойство антисимметрии структурных констант: тензор  $C^{abc} = K^{aa'} K^{bb'} C_{a'b'}$  полностью антисимметричен, что вытекает из инвариантности формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Используя введенные объекты  $\Pi$  и  $A^a$ , определим элемент  $r(\lambda)$  из  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$$r(\lambda) = \Pi / \lambda \quad (1.31)$$

и формальный ряд Лорана  $U(\lambda)$  с коэффициентами в  $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$

$$U(\lambda) = u_a(\lambda) A^a. \quad (1.32)$$

В их терминах скобки Ли — Пуассона (1.21) и (1.26), порожденные алгеброй  $C_0(\mathfrak{g})$ , переписываются в виде одной формулы

$$\{U(\lambda) \otimes U(\mu)\}_0 = [r(\lambda - \mu), U(\lambda) \otimes I + I \otimes U(\mu)], \quad (1.33)$$

где в левой части мы использовали естественное обозначение  $\{\otimes\}_0$  (см. § III.1 части I). Формула (1.33) получается из (1.21)

после умножения на  $A^a \otimes A^b$  и учета соотношений (1.30). Далее вплоть до § 4 мы будем использовать только скобки Пуассона  $\{, \}_0$ , поэтому для упрощения формул будем опускать индекс 0.

Поучительно сравнить скобки Ли — Пуассона для алгебры Ли  $S_0(\mathfrak{g})$  в форме (1.33) с фундаментальными скобками Пуассона для непрерывных моделей из § III.1 части I и § II.3, II.6 и II.8. Эти формулы практически совпадают по своей записи; формальное отличие состоит в том, что в (1.33) отсутствует пространственная переменная  $x$ . Зависимость от  $x$  легко ввести в наше изложение, если рассмотреть прямое произведение алгебр  $S(\mathfrak{g})$  по всем  $x$ . Более формально, следует использовать алгебру токов  $\mathcal{E}((\mathfrak{g}))$  рядов Лорана  $\xi(\lambda, x)$  с коэффициентами, зависящими от  $x$  и удовлетворяющими определенным граничным условиям (например, периодическим или быстроубывающим). Она порождается генераторами  $X_{a,k}(x)$  с коммутатором

$$[X_{a,k}(x), X_{b,l}(y)] = C_{ab}^c X_{c,k+l}(x) \delta(x - y). \quad (1.34)$$

Повторяя приведенные выше рассуждения применительно к алгебре  $\mathcal{E}((\mathfrak{g}))$ , мы приходим к скобкам Ли — Пуассона на фазовом пространстве  $\mathcal{E}^*((\mathfrak{g}))$

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x - y), \quad (1.35)$$

которые по своей форме полностью совпадают с фундаментальными скобками Пуассона для непрерывных моделей.

Тем не менее, содержание формул (1.35) и, скажем, (II.3.8) все еще различно. Так, в последней формуле мы имеем дело с конкретной матрицей  $U(x, \lambda)$  во вспомогательном пространстве, являющейся рациональной функцией спектрального параметра  $\lambda$ , в то время как в (1.35) участвует формальный ряд Лорана с коэффициентами в заданной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ . Согласование состоит в том, что фундаментальные скобки Пуассона для конкретных моделей представляют собой реализацию скобок Пуассона (1.35) для конкретного матричного представления данной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  (причем пространство представления играет роль вспомогательного пространства), ограниченную на орбиту соответствующей алгебры  $\mathcal{E}_0((\mathfrak{g}))$  в фазовом пространстве  $\mathcal{E}^*((\mathfrak{g}))$ . Здесь мы называем для краткости орбитами алгебры Ли упомянутые выше интегральные многообразия для распределений, порожденных коприсоединенным действием. Эти орбиты представляют собой произведение по переменной  $x$  орбит коприсоединенного действия алгебры Ли  $S_0(\mathfrak{g})$  в  $S^*(\mathfrak{g})$ . Условие пространственной однородности требует, чтобы эти орбиты при каждом  $x$  совпадали. Поэтому ниже мы опять будем опускать зависимость от переменной  $x$ .

Для приложения к интегрируемым моделям наибольший интерес представляют конечномерные орбиты алгебры Ли  $C_0(\mathfrak{g})$ . (Отметим, что в ситуации общего положения орбиты бесконечномерны.) Для их описания удобно ввести конечномерные пуассоновы подмногообразия в  $C^*(\mathfrak{g})$ , накладывая на координаты  $u_{a,k}$  (или на их производящие функции  $u_a(\lambda)$ ,  $U(\lambda)$ ) ограничения, инвариантные относительно пуассонова действия алгебры Ли  $C_0(\mathfrak{g})$ .

Простейшим примером такого пуассонова подмногообразия, очевидно, является линейное подпространство  $C_{N,M}^*$  в  $C^*(\mathfrak{g})$ , определяемое уравнениями

$$u_{a,k} = 0 \quad (1.36)$$

при  $k \geq N$  и  $k \leq -M-1$ , где  $N, M \geq 0$ . Действие алгебры  $C_0(\mathfrak{g})$  на подпространстве  $C_{N,M}^*$  редуцируется до действия конечномерной алгебры Ли  $C_{N,M}(\mathfrak{g})$  с генераторами  $X_{a,k}$ ,  $-M \leq k < N$ , и коммутатором

$$[X_{a,k}, X_{b,l}] = \begin{cases} C_{ab}^c X_{c,k+l} & \text{при } k, l \geq 0, k+l < N, \\ -C_{ab}^c X_{c,k+l} & \text{при } k, l < 0, -M-1 < k+l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.37)$$

Орбиты этой алгебры в  $C_{N,M}^*$  и образуют искомые фазовые пространства, отвечающие интегрируемым моделям. Более конкретно, координаты в  $C_{N,M}^*$  даются набором  $u_{a,k}$ ,  $k = -M, \dots, N-1$ ; их скобки Ли — Пуассона имеют вид

$$\{u_{a,k}, u_{b,l}\} = \begin{cases} -C_{abl}^c u_{c,k+l} & \text{при } k, l \geq 0, k+l < N, \\ C_{abl}^c u_{c,k+l} & \text{при } k, l < 0, -M-1 < k+l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.38)$$

и пуассоновы подмногообразия представляют собой объединения орбит алгебры Ли  $C_{N,M}(\mathfrak{g})$ . Задача о выборе этих орбит уже конечномерна и ее можно решать традиционными методами, например, фиксируя значения функций Казимира.

Производящая функция координат  $u_{a,k}$  (или  $u_{a,k}(x)$  после восстановления зависимости от  $x$ ) теперь представляет собой рациональную функцию переменной  $\lambda$

$$U(\lambda) = \sum_{k=-M}^{N-1} u_{a,k} A^k \lambda^{-k-1} \quad (1.39)$$

и при конкретном выборе представления алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  есть матрица в пространстве этого представления. Она и представляет собой матрицу  $U(x, \lambda)$  из вспомогательной линейной задачи для рассматриваемых ниже интегрируемых моделей.

Рассмотрим несколько примеров.

1.  $N=1, M=0$ .

Соответствующий элемент  $U(\lambda)$  имеет вид

$$U(\lambda) = \frac{U_0}{\lambda} = \frac{S_a A^a}{\lambda}, \quad (1.40)$$

где  $S_a$  — динамические переменные на пространстве  $C_{1,0}^* = \mathfrak{g}^*$  со скобками Пуассона

$$\{S_a, S_b\} = -C_{ab}^c S_c. \quad (1.41)$$

В простейшем случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  имеем три динамические переменные  $S_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Рассматривая фундаментальное представление  $\mathfrak{su}(2)$  с генераторами  $X_a = \frac{1}{2i} \sigma_a$ , структурными константами  $C_{abc} = \varepsilon_{abc}$  и матрицами  $A^a = i\sigma_a$ , имеем

$$U(\lambda) = \frac{i S_a \sigma_a}{\lambda}, \quad (1.42)$$

$$r(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} \sigma_a \otimes \sigma_a. \quad (1.43)$$

Соответствующие орбиты выделяются условием

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \text{const}. \quad (1.44)$$

Динамические переменные  $S_a$ , удовлетворяющие соотношению (1.44) и скобкам Пуассона (1.41), использовались нами при описании фазового пространства модели МГ в § 1.1. Матрица  $U(x, \lambda)$  вида (1.42) и  $r$ -матрица (1.43) переходят в соответствующие объекты из § II.3, после замены  $\lambda \rightarrow -2/\lambda$ , если вспомнить, что матрица перестановки  $P$  в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  имеет вид

$$P = \frac{1}{2} (I \otimes I + \sigma_a \otimes \sigma_a), \quad (1.45)$$

и опустить несущественное слагаемое, пропорциональное матрице  $I \otimes I$ .

В случае произвольной полупростой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  рассмотренный пример дает интегрируемое обобщение модели МГ —  $\mathfrak{g}$ -инвариантный магнетик.

2.  $N=0$ ,  $M=2$ .

Соответствующий элемент  $U(\lambda)$  имеет вид

$$U(\lambda) = U_{-1} + \lambda U_{-2} = Q_a A^a + \lambda J_a A^a, \quad (1.46)$$

где  $Q_a, J_a$  — динамические переменные на фазовом пространстве  $C_{0,2}^*$  со скобками Пуассона

$$\{Q_a, Q_b\} = C_{ab}^c J_c, \quad (1.47)$$

$$\{Q_a, J_b\} = \{J_a, J_b\} = 0.$$



Рассмотрим простейший случай алгебр Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  или  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, 1)$  в фундаментальном представлении с генераторами  $X_a = \frac{1}{2i} \sigma_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , и  $X_1 = \frac{1}{2} \sigma_3$ ,  $X_2 = \frac{1}{2} \sigma_2$ ,  $X_3 = \frac{1}{2i} \sigma_3$  соответственно. Интересующая нас орбита выделяется условиями

$$J_1 = J_2 = 0, \quad J_3 = \varepsilon/2, \quad (1.48)$$

$$Q_3 = 0, \quad Q_1 + iQ_2 = \psi, \quad (1.49)$$

где  $\varepsilon = -1$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  и  $\varepsilon = 1$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, 1)$ ; единственная неисчезающая скобка Пуассона имеет вид

$$\{\psi, \bar{\psi}\} = i. \quad (1.50)$$

В результате матрица  $U(\lambda)$  записывается следующим образом:

$$U(\lambda) = -\frac{\varepsilon\lambda}{2i} \sigma_3 + \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

и после замены  $\lambda \rightarrow -\varepsilon\lambda$  переходит в матрицу  $U(x, \lambda)$  для модели НШ (см. § 1.2 части I), где  $x = \varepsilon$ . При этой замене матрица  $r(\lambda)$ ,

$$r(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left( P - \frac{I \otimes I}{2} \right), \quad (1.52)$$

переходит (с точностью до несущественного единичного слагаемого) в  $r$ -матрицу модели НШ из § III.1 части I.

В случае других алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  мы получим векторные и матричные обобщения модели НШ.

Таким образом, изложенная общая схема позволила не только включить два основных примера этой книги, но и дать их содержательное обобщение. При этом мы убедились, что модели НШ и МГ действительно являются простейшими в бесконечной серии примеров: мы можем брать произвольные  $N$  и  $M \geq 0$ , алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  и орбиту алгебры Ли  $S_{N,M}(\mathfrak{g})$ . Вспомогательная линейная задача с матрицей  $U(x, \lambda)$  вида (1.39) и  $r$ -матрица (1.31) порождают представление нулевой кривизны для соответствующих гамильтоновых уравнений движения. Ли-алгебраическая интерпретация соответствующих гамильтонианов и схема решения уравнений движения будут приведены в § 4.

Здесь мы заметим, что приведенные примеры не исчерпывают все интересные конечномерные фазовые пространства (при фиксированном  $x$ ). Приведем еще серию содержательных примеров. Начнем со следующего замечания. Скобки Пуассона (1.41) можно вывести из соотношения (1.33), подставляя в него  $U(\lambda)$  в виде (1.40). При этом то, что полюс функции  $U(\lambda)$  расположен в точке  $\lambda = 0$ , несущественно. Подстановка

$$U(\lambda) = \frac{S_a A^a}{\lambda - c} \quad (1.53)$$

приводит к тому же результату. Эта функция  $U(\lambda)$  уже принадлежит пространству  $C_+^*(g)$  и соответствующие коэффициенты  $u_{a,k}$  отличны от нуля при всех  $k < 0$  и связаны соотношением

$$u_{a,k-1} = \frac{1}{c} u_{a,k}, \quad (1.54)$$

которое вытекает из разложения  $(\lambda - c)^{-1}$  в геометрическую прогрессию. Последние условия инвариантны относительно коприсоединенного действия алгебры  $C_0(g)$ . Это же верно и для элементов

$$U(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_i} \frac{S_{a,k}^{(i)} A^a}{(\lambda - c)^{k+1}}. \quad (1.55)$$

Таким образом, производящие функции вида (1.55) образуют пуассоново подмногообразие в  $C^*(g)$ , параметризованное координатами  $S_{k,a}^{(i)}$ . В этих координатах скобки Пуассона (1.33) принимают вид

$$\{S_{a,k}^{(i)}, S_{b,l}^{(j)}\} = \begin{cases} -C_{ab}^c \delta^{ij} S_{c,k+l}^{(i)} & \text{при } k+l \leq n_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.56)$$

и представляют собой скобки Ли — Пуассона конечномерной алгебры Ли — прямой суммы алгебр  $C_{n_{i+1,0}}(g)$  по всем полюсам.

С матрицами  $U(x, \lambda)$  вида (1.55) мы уже встречались в § 1.6—1.7 при обсуждении решений общего уравнения нулевой кривизны. Здесь мы пришли к ним, исходя из общих ли-алгебраических соображений, и ввели пуассонову структуру для связанных с ними интегрируемых моделей.

Итак, в этом параграфе мы привели общую схему построения матриц  $U(x, \lambda)$ , удовлетворяющих фундаментальным скобкам Пуассона с  $r$ -матрицей вида (1.31), и объяснили геометрическое происхождение последних. Повторяя рассуждения из части I, с каждой из матриц  $U(x, \lambda)$  мы можем связать серию интегрируемых моделей. Именно, рассмотрим вспомогательную линейную задачу

$$\frac{dF}{dx} = U(x, \lambda) F \quad (1.57)$$

и ее матрицу монодромии

$$T(\lambda) = \overleftarrow{\exp} \int_{-L}^L U(x, \lambda) dx \quad (1.58)$$

(где для определенности мы предполагаем периодические граничные условия). Функционалы  $\text{tr} T(\lambda)$  и другие алгебраические инварианты матрицы  $T(\lambda)$  образуют инволютивное семей-

ство, и гамильтоновы уравнения движения, порождаемые всеми функционалами из этого семейства, допускают представление нулевой кривизны. Геометрический смысл этих конструкций будет объяснен в § 4.

## § 2. Тригонометрические и эллиптические $r$ -матрицы и связанные с ними фундаментальные скобки Пуассона

В предыдущем параграфе для произвольной полупростой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  мы ввели  $r$ -матрицу

$$r(\lambda) = \frac{\Pi}{\lambda} = \frac{K^{ab} X_a \otimes X_b}{\lambda}. \quad (2.1)$$

(Здесь мы, допуская известную вольность, используем термин  $r$ -матрица и для элемента  $r(\lambda)$  из  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ .) Она обобщает  $r$ -матрицы моделей НШ и МГ (см. § III.1 части I и § II.3), которые отвечают алгебре Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  и имеют вид  $P/\lambda$ , где  $P$  — матрица перестановки в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Однако для других примеров — моделей SG и  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  (см. § II.6 и II.8) — мы имеем более сложные  $r$ -матрицы, которые зависят от спектрального параметра  $\lambda$  посредством тригонометрических и эллиптических функций соответственно. Естественно называть  $r$ -матрицы вида (2.1) *рациональными* и считать  $r$ -матрицы для моделей SG и  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  примерами *тригонометрических* и *эллиптических*  $r$ -матриц. В § I мы убедились, что рациональные  $r$ -матрицы определяют структуру алгебры Ли  $\mathcal{C}_0(\mathfrak{g})$ . Возникает вопрос об описании и геометрической интерпретации тригонометрических и эллиптических  $r$ -матриц, который мы и обсудим в этом параграфе.

Мы начнем с построения обширного семейства таких  $r$ -матриц. В основу положим функциональные уравнения

$$r_{12}(-\lambda) = -r_{21}(\lambda) \quad (2.2)$$

и

$$[r_{12}(\lambda - \mu), r_{13}(\lambda) + r_{23}(\mu)] + [r_{13}(\lambda), r_{23}(\mu)] = 0, \quad (2.3)$$

которые обеспечивают свойство антисимметрии и тождество Якоби для фундаментальных скобок Пуассона (см. § III.1 части I). Здесь индексы 12, 21, 13, 23 указывают на конкретное вложение элемента  $r$  из  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  в  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  (сравни с аналогичными обозначениями для матриц в § III.1 части I). Очевидно, что  $r$ -матрица вида (2.1) этим соотношениям удовлетворяет, причем равенство (2.3) эквивалентно тождеству Якоби для структурных констант  $C_{ab}^c$ .

Замечательное свойство соотношения (2.3) состоит в том, что оно допускает усреднение по решетке в комплексной плоскости переменной  $\lambda$ . Именно, пусть  $\theta$  — автоморфизм полупростой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  конечного порядка  $q$ ,  $\theta^q = I$ , и  $\Lambda_1 = \{n\omega, n =$

$= -\infty, \dots, \infty$  — одномерная решетка в  $\mathbb{C}$  с образующей  $\omega$ . Введем действие аддитивной группы сдвигов решетки  $\Lambda_1$  на  $r$ -матрицу вида (2.1) по формуле

$$r(\lambda) \mapsto r^{(n)}(\lambda) = (\theta^n \otimes I) r(\lambda - n\omega) = (I \otimes \theta^{-n}) r(\lambda - n\omega). \quad (2.4)$$

Здесь последнее равенство в (2.4) отражает инвариантность  $r$ -матрицы вида (2.1) относительно диагонального действия автоморфизма  $\theta$

$$(\theta \otimes \theta) r(\lambda) = r(\lambda), \quad (2.5)$$

которая, очевидно, следует из формулы

$$(\theta \otimes \theta) \Pi = \Pi. \quad (2.6)$$

Пусть

$$r^{\Lambda_1}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{(n)}(\lambda) \quad (2.7)$$

— результат усреднения  $r$ -матрицы вида (2.1) по решетке  $\Lambda_1$ . Усредненная  $r$ -матрица  $r^{\Lambda_1}(\lambda)$  квазипериодична:

$$r^{\Lambda_1}(\lambda + \omega) = (\theta \otimes I) r^{\Lambda_1}(\lambda) = (I \otimes \theta^{-1}) r^{\Lambda_1}(\lambda), \quad (2.8)$$

удовлетворяет уравнению (2.2) и, на первый взгляд, уравнению (2.3). Действительно, заменим в (2.3)  $\lambda$  на  $\lambda - n\omega$ ,  $\mu$  на  $\mu - m\omega$  и применим к левой части автоморфизм  $\theta^n \otimes \theta^m \otimes I$ . Учитывая свойства (2.5), мы получим равенство

$$[r_{12}^{(n-m)}(\lambda - \mu), r_{13}^{(n)}(\lambda) + r_{23}^{(m)}(\mu)] + [r_{13}^{(n)}(\lambda), r_{23}^{(m)}(\mu)] = 0, \quad (2.9)$$

откуда соотношение (2.3) для  $r^{\Lambda_1}(\lambda)$  получается в результате суммирования по  $n$  и  $m$ .

Однако это рассуждение слишком наивно и, вообще говоря, неверно. Дело в том, что ряд в (2.7) сходится лишь в смысле главного значения

$$\text{в. п.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \quad (2.10)$$

и замена суммирования по  $n$  и  $m$  на суммирование по  $n-m$  и  $t$  или  $n-m$  и  $n$  незаконна.

Выясним, каким условиям должен удовлетворять автоморфизм  $\theta$  для того, чтобы ряд (2.7) все-таки удовлетворял уравнению (2.3). Используя формулу

$$\text{в. п.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - n\omega} = \frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi\lambda}{\omega}, \quad (2.11)$$

для ряда (2.7) получаем выражение

$$r^{\Lambda_1}(\lambda) = \frac{\pi}{q\omega} \sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\lambda - k\omega)}{q\omega} (\theta^k \otimes I) \Pi, \quad (2.12)$$

так что функция  $r^{\Lambda_1}(\lambda)$  действительно квазипериодична в смысле (2.8).

Обратимся теперь к уравнению (2.3) и обозначим его левую часть через  $\Phi(\lambda, \mu)$ :

$$\Phi(\lambda, \mu) = [r_{12}^{\Lambda_1}(\lambda - \mu), r_{13}^{\Lambda_1}(\lambda) + r_{23}^{\Lambda_1}(\mu)] + [r_{13}^{\Lambda_1}(\lambda), r_{23}^{\Lambda_1}(\mu)]. \quad (2.13)$$

Рассмотрим  $\Phi(\lambda, \mu)$  как функцию переменной  $\lambda$  при фиксированном  $\mu$ ,  $\mu \not\equiv 0 \pmod{\Lambda_1}$ . Она удовлетворяет условию квазипериодичности

$$\Phi(\lambda + \omega, \mu) = (\theta \otimes I \otimes I) \Phi(\lambda, \mu) \quad (2.14)$$

и может иметь лишь простые полюса в точках  $\lambda \equiv \mu \pmod{\Lambda_1}$  и  $\lambda \equiv 0 \pmod{\Lambda_1}$ . Убедимся, что  $\Phi(\lambda, \mu)$  является целой функцией  $\lambda$ . Действительно, ее вычет при  $\lambda = \mu$  имеет вид  $[\Pi_{12}, r_{13}^{\Lambda_1}(\mu) + r_{23}^{\Lambda_1}(\mu)]$  и исчезает в силу свойства

$$[\Pi, A \otimes I + I \otimes A] = 0 \quad (2.15)$$

(см. (1.30)). Аналогично рассматривается случай  $\lambda = 0$ ; при этом следует использовать и уравнение (2.2). Далее, функция  $\Phi(\lambda, \mu)$  ограничена, так что по теореме Лиувилля получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu) &= \Phi(\pm i\infty, \mu) = \\ &= -\frac{\pi^2}{\omega^2} [\mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{23}] \pm \frac{\pi i}{\omega} [\mathcal{P}_{12} + \mathcal{P}_{13}, r_{23}^{\Lambda_1}(\mu)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\mathcal{P} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (\theta^k \otimes I) \Pi. \quad (2.17)$$

Отсюда заключаем, что

$$[\mathcal{P}_{12} + \mathcal{P}_{13}, r_{23}^{\Lambda_1}(\mu)] = 0 \quad (2.18)$$

и

$$\Phi(\lambda, \mu) = -\frac{\pi^2}{\omega^2} [\mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{23}]. \quad (2.19)$$

Итак, мы доказали, что ряд (2.12) удовлетворяет уравнению (2.3), если

$$[\mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{23}] = 0. \quad (2.20)$$

Это и есть необходимое условие на автоморфизм  $\theta$ . Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно следующему:

$$[\mathcal{X}_a, \mathcal{X}_b] = 0, \quad (2.21)$$

где для любого генератора  $X_a$  через  $\bar{X}_a$  мы обозначили его усреднение  $\bar{X}_a = q^{-1}(I + \theta + \dots + \theta^{q-1})X_a$ , инвариантное относительно действия  $\theta$ . Условие (2.21) означает, что подалгебра  $\mathfrak{h}$  в  $\mathfrak{g}$ , состоящая из неподвижных точек автоморфизма  $\theta$ , абелева.

Таким образом, мы получили новое семейство  $r$ -матриц вида (2.12), параметризованное одномерной решеткой  $\Lambda_1$  и автоморфизмом  $\theta$  конечного порядка, подалгебра неподвижных точек которого абелева. Формула (2.12) показывает, что такие  $r$ -матрицы естественно называть *тригонометрическими*.

Еще одно семейство  $r$ -матриц получается при усреднении  $r$ -матрицы вида (2.1) по двумерной решетке  $\Lambda_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2; \text{Im } \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0, n_1, n_2 = -\infty, \dots, \infty\}$ . Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — автоморфизмы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  порядков  $q_1$  и  $q_2$  соответственно, а  $r^\lambda(\lambda)$  — усредненная  $r$ -матрица

$$r^\lambda(\lambda) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} (\theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2} \otimes I) r(\lambda - n_1\omega_1 - n_2\omega_2). \quad (2.22)$$

Для справедливости «наивного доказательства» уравнения (2.3), основанного на соотношении типа (2.9), необходимо, чтобы эти автоморфизмы коммутировали. Однако ряд (2.22) следует понимать в смысле (2.10); повторяя приведенный выше вывод уравнения (2.3), используя теорему Лиувилля, можно убедиться, что автоморфизмы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  не должны иметь общих неподвижных точек. Такие пары автоморфизмов существуют лишь для алгебр Ли серии  $A_{n-1}$ , т. е. в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ , при этом  $q_1 = q_2 = n$ . В фундаментальном представлении  $\mathfrak{sl}(n)$ , с точностью до внутреннего автоморфизма, имеем

$$\theta_i \xi = T_i \xi T_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \quad (2.23)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — матрицы  $n \times n$  с матричными элементами

$$(T_1)_{kl} = \xi^k \delta_{kl}, \quad (T_2)_{kl} = \delta_{k+1,l} \quad (2.24)$$

и  $\xi$  — примитивный корень  $n$ -й степени из 1,  $k, l = 1, \dots, n$ , а  $\delta_{k+n,l} = \delta_{k,l+n} = \delta_{k,l}$ .

Итак, соответствующая  $r$ -матрица может быть полностью охарактеризована как мероморфная матрица-функция со значениями в  $\mathfrak{sl}(n) \otimes \mathfrak{sl}(n)$ , удовлетворяющая условиям квазипериодичности

$$r^{\lambda_2}(\lambda + \omega_i) = (T_i \otimes I) r^{\lambda_2}(\lambda) (T_i^{-1} \otimes I), \quad i = 1, 2, \quad (2.25)$$

и требованию

$$r^{\lambda_2}(\lambda) = \frac{\Pi}{\lambda} + O(1) \quad (2.26)$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ . Ее матричные элементы являются эллиптическими функциями с решеткой периодов  $n\Lambda_2$  и простыми полюсами в

точках решетки  $\Lambda_2$ . Такие  $r$ -матрицы естественно называть *эллиптическими*.

Рассмотрим простейшие примеры, отвечающие алгебре Ли  $sl(2)$  в фундаментальном представлении. В качестве образующей одномерной решетки  $\Lambda_1$  возьмем  $\omega = \pi$  и определим автоморфизм  $\theta$  по формуле

$$\theta \xi = \sigma_3 \xi \sigma_3. \quad (2.27)$$

Как следует из (2.12), соответствующая тригонометрическая  $r$ -матрица имеет вид

$$r(\lambda) = \frac{1}{2\sin \lambda} (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \cos \lambda \sigma_3 \otimes \sigma_3). \quad (2.28)$$

Такая  $r$ -матрица уже встречалась нам при описании частично анизотропной модели МГ и модели SG (см. § II.8 и II.6; в последнем случае  $\lambda$  следует заменить на  $i\alpha$ ).

В качестве образующих двумерной решетки  $\Lambda_2$  возьмем  $\omega_1 = 2K$ ,  $\omega_2 = 2iK'$ , где  $K$  и  $K'$  — полные эллиптические интегралы модулей  $k$  и  $k' = \sqrt{1-k^2}$  соответственно, и положим

$$T_1 = \sigma_3, \quad T_2 = \sigma_1. \quad (2.29)$$

Соответствующая эллиптическая  $r$ -матрица имеет вид

$$r(\lambda) = \frac{1}{2\operatorname{sn}(\lambda, k)} (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \operatorname{dn}(\lambda, k) \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \operatorname{cn}(\lambda, k) \sigma_3 \otimes \sigma_3), \quad (2.30)$$

в чем можно убедиться, суммируя ряд (2.22). Конечно, условия (2.25) — (2.26) непосредственно следуют из приведенной формулы для  $r(\lambda)$ . Такая  $r$ -матрица участвовала при описании модели Л — Л (см. § II.8).

Итак, мы убедились, что все возникающие при рассмотрении конкретных моделей  $r$ -матрицы погружаются в одно из трех описанных семейств: рациональные  $r$ -матрицы, имеющие ли-алгебраическую интерпретацию, и тригонометрические и эллиптические, получающиеся из рациональных в результате усреднения.

Каждая из этих  $r$ -матриц порождает фундаментальные скобки Пуассона

$$\{U(\lambda) \otimes U(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), U(\lambda) \otimes I + I \otimes U(\mu)], \quad (2.31)$$

где мы опять опустили зависимость от  $x$ . Участвующий в них элемент  $U(\lambda)$  из алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  должен удовлетворять условиям квазипериодичности:

$$U(\lambda + \omega) = \theta U(\lambda) \quad (2.32)$$

в тригонометрическом случае и

$$U(\lambda + \omega_i) = \theta_i U(\lambda), \quad i = 1, 2, \quad (2.33)$$

в эллиптическом случае. *Естественный способ построения таких  $U(\lambda)$  состоит в применении процедуры усреднения к элементам  $U(\lambda)$ , определяющим конечномерное фазовое пространство в рациональном случае.* Большое количество примеров таких элементов приведено в § 1. Однако условие сходимости соответствующих рядов накладывает дополнительные ограничения на возможный выбор рациональных  $U(\lambda)$ .

Наиболее представительный пример доставляют элементы  $U(\lambda)$  вида

$$U(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_i} \frac{S_{a,k}^{(i)} A^a}{(\lambda - c_i)^{k+1}}. \quad (2.34)$$

Полагая для таких  $U(\lambda)$

$$U^{\Lambda_1}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta^n U(\lambda - n\omega) \quad (2.35)$$

в тригонометрическом случае и

$$U^{\Lambda_2}(\lambda) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2} U(\lambda - n_1\omega_1 - n_2\omega_2) \quad (2.36)$$

в эллиптическом случае (с соглашениями о суммировании типа (2.10)), получаем, что  $U^{\Lambda_1}(\lambda)$  и  $U^{\Lambda_2}(\lambda)$  удовлетворяют фундаментальным скобкам Пуассона с  $r$ -матрицами  $r^{\Lambda_1}(\lambda)$  и  $r^{\Lambda_2}(\lambda)$  соответственно. Действительно, полагая

$$U^{(n)}(\lambda) = \theta^n U(\lambda - n\omega), \quad (2.37)$$

из (2.31) получаем

$$\{U^{(n)}(\lambda) \otimes U^{(m)}(\mu)\} = [r^{(n-m)}(\lambda - \mu), U^{(n)}(\lambda) \otimes I + I \otimes U^{(m)}(\mu)], \quad (2.38)$$

откуда после суммирования по  $n$  и  $m$  заключаем, что  $U^{\Lambda_1}(\lambda)$  удовлетворяет фундаментальным скобкам Пуассона с  $r$ -матрицей  $r^{\Lambda_1}(\lambda)$ . Для строгого доказательства следует сравнить полюса левой и правой частей фундаментальных скобок Пуассона и использовать теорему Лнувилля. Эллиптический случай рассматривается аналогично.

Простейшим примером этой конструкции является матрица  $U^{\mathcal{L}-\mathcal{L}}(\lambda)$  модели  $\mathcal{L}-\mathcal{L}$ , которая получается в результате эллиптического усреднения соответствующей матрицы  $U^{\text{МГ}}(\lambda)$  модели  $\text{МГ}$ ,

$$U^{\text{МГ}}(\lambda) = \frac{iS_a \sigma_a}{\lambda} \quad (2.39)$$



(см. формулу (1.42)). Имеем

$$\begin{aligned}
 U^{\text{Л-Л}}(\lambda) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sigma_3^{n_1} \sigma_1^{n_2} U^{\text{МГ}}(\lambda - 2n_1K - 2in_2K') \sigma_1^{n_2} \sigma_3^{n_1} = \\
 &= i \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{\lambda - 2n_1K - 2in_2K'} S_1 \sigma_1 + \\
 &+ i \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{\lambda - 2n_1K - 2in_2K'} S_2 \sigma_2 + \\
 &+ i \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2}}{\lambda - 2n_1K - 2in_2K'} S_3 \sigma_3 = \\
 &= \frac{i}{\text{sn}(\lambda, k)} (S_1 \sigma_1 + \text{dn}(\lambda, k) S_2 \sigma_2 + \text{cn}(\lambda, k) S_3 \sigma_3). \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

В тригонометрическом случае, очевидно, получаем матрицу  $U(\lambda)$  для частично анизотропной модели МГ.

Матрица  $U(\alpha)$  модели SG

$$U(\alpha) = \text{ch } \alpha S_1 \sigma_1 + \text{sh } \alpha S_2 \sigma_2 + S_3 \sigma_3, \quad (2.41)$$

где

$$S_1 = \frac{m}{2i} \sin \frac{\beta\varphi}{2}, \quad S_2 = \frac{m}{2i} \cos \frac{\beta\varphi}{2}, \quad S_3 = \frac{\beta\pi}{4i}, \quad (2.42)$$

дает пример квазипериодической матрицы  $U(\alpha)$  (где  $\omega = i\pi$ , а  $\theta$  дается формулой (2.27)), удовлетворяющей фундаментальным скобкам Пуассона с  $r$ -матрицей вида (2.28) (где  $\lambda = i\alpha$ ), которую нельзя непосредственно получить процедурой усреднения. Однако ее можно получить при помощи контракции из матрицы  $U^{\text{Л1}}(\lambda)$ , возникающей при усреднении двухполюсной матрицы  $U(\lambda)$

$$U(\lambda) = \frac{S_a^{(1)} \sigma_a}{\lambda - c} + \frac{S_a^{(2)} \sigma_a}{\lambda + c}. \quad (2.43)$$

Поэтому мы можем утверждать, что процедура усреднения позволяет дать классификацию непрерывных моделей с конечным числом степеней свободы при фиксированном  $x$ , допускающих тригонометрические или эллиптические  $r$ -матрицы, если разрешить себе использовать также и контракции фазового пространства.

Итак, мы получили схему построения матриц  $U(x, \lambda)$  вспомогательной линейной задачи, удовлетворяющих фундаментальным скобкам Пуассона с  $r$ -матрицей из рационального, тригонометрического или эллиптического семейств. В рациональном случае матрицы  $U(x, \lambda)$  представляют собой орбиты, конечномерные при фиксированном  $x$ , коприсоединенного действия алгебры Ли

$\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ ). Поэтому изложенную схему можно рассматривать как способ классификации соответствующих интегрируемых моделей. В тригонометрическом и эллиптическом случаях мы ввели процедуру усреднения, позволяющую строить богатое семейство квазипериодических матриц  $U(x, \lambda)$ .

В следующем параграфе мы обобщим эти соображения на случай моделей на решетке.

### § 3. Фундаментальные скобки Пуассона на решетке

В основу рассмотрения решеточных моделей в главе III мы положили вспомогательную линейную задачу

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n \quad (3.1)$$

с матрицей  $L_n(\lambda)$ , удовлетворяющей фундаментальным скобкам Пуассона в форме

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm}, \quad (3.2)$$

для совместности которых  $r$ -матрица должна удовлетворять уравнениям (2.2) — (2.3). Эти фундаментальные скобки Пуассона на решетке не имеют простой ли-алгебраической интерпретации. Однако описание соответствующих  $r$ -матриц уже было получено при рассмотрении непрерывных моделей. Поэтому здесь мы обсудим только вопрос о выборе конечномерных фазовых пространств при фиксированном  $n$  и отвечающих им матриц  $L_n(\lambda)$ . Индекс  $n$  в дальнейшем будем опускать.

Рассмотрим сначала рациональные  $r$ -матрицы, ограничившись для простоты случаем алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$  в фундаментальном представлении. Соответствующая  $r$ -матрица (2.1) (с точностью до несущественного единичного слагаемого) имеет вид

$$r(\lambda) = \frac{P}{\lambda}, \quad (3.3)$$

где  $P$  — матрица перестановки в  $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ . Простейшая матрица  $L(\lambda)$ , удовлетворяющая соотношению (3.2), дается выражением

$$L(\lambda) = I + \frac{S_a A^a}{\lambda}, \quad (3.4)$$

где динамические переменные  $S_a$  удовлетворяют скобкам Ли — Пуассона алгебры Ли  $\mathfrak{su}(N)$

$$\{S_a, S_b\} = -C_{ab}^c S_c \quad (3.5)$$

и могут быть ограничены на орбиты. Проверка соотношения (3.2) проводится непосредственно: помимо формул (1.30)

следует также использовать и свойство

$$[P, A \otimes A] = 0. \quad (3.6)$$

Отметим, что формула (3.4) представляет собой наивное решеточное обобщение оператора  $L$  вспомогательной линейной задачи для непрерывного случая

$$L = \frac{d}{dx} - \frac{S_a \sigma_a}{\lambda}, \quad (3.7)$$

который для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  участвовал в описании модели МГ (см. § 1). Таким образом, представление (3.4) дает решеточное обобщение непрерывного  $\mathfrak{g}$ -инвариантного магнетика для алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$ .

Вследствие мультипликативного характера соотношения (3.2) матрица  $L(\lambda)$ , представляющая собой произведение простейших,

$$L(\lambda) = L^{(1)}(\lambda + c_1) \dots L^{(m)}(\lambda + c_m), \quad (3.8)$$

также удовлетворяет фундаментальным скобкам Пуассона (3.2). Конечно, динамические переменные  $S_a^{(i)}$ , входящие в  $L^{(i)}(\lambda)$ , при разных  $i$  находятся в инволюции. Формула (3.8) дает решеточный аналог многополюсной матрицы  $U(\lambda)$  из (1.55) с простыми полюсами. Обратно, выбором различных непрерывных пределов из (3.8) можно получить рациональную матрицу  $U(\lambda)$  общего вида, в том числе и с кратными полюсами.

Таким образом, мы получили богатый набор матриц  $L(\lambda)$ , описывающих интегрируемые решеточные модели, которые связаны с рациональными  $r$ -матрицами для алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$ . Выбор матриц  $L(\lambda)$ , удовлетворяющих фундаментальным скобкам Пуассона (3.2) с рациональными  $r$ -матрицами, для остальных серий классических алгебр Ли более сложен, и мы не будем на нем здесь останавливаться.

Перейдем теперь к фундаментальным скобкам Пуассона (3.2) с тригонометрическими и эллиптическими  $r$ -матрицами. Здесь мы можем лишь предложить искать удачные подстановки, обобщающие (3.4) и удовлетворяющие условиям квазипериодичности

$$L(\lambda + \omega_i) = \theta_i L(\lambda), \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

В случае алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  в фундаментальном представлении мы уже знаем простейшую матрицу  $L(\lambda)$  — это матрица  $L(\lambda)$  для модели РЛ—Л (см. § III.5). Ее тригонометрическое вырождение приводит к матрице  $L(\lambda)$  для частично анизотропной модели РМГ или для модели LSG в случае другой вещественной формы. Аналогичные подстановки существуют и в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$  для произвольного  $N$ , но мы не будем приводить их

явные выражения. Зная простейшие матрицы  $L(\lambda)$ , мы можем строить более сложные по формулам типа (3.8).

Отметим, что процедура усреднения из § 2, введенная для непрерывных моделей, может быть обобщена и на решеточный случай. Пусть матрица  $L(\lambda)$  удовлетворяет фундаментальным скобкам Пуассона (3.2) с рациональной  $r$ -матрицей. Полагая

$$L^{(n)}(\lambda) = \theta^n L(\lambda - n\omega), \quad (3.10)$$

перепишем (3.2) в виде

$$\{L^{(n)}(\lambda) \otimes L^{(m)}(\mu)\} = [r^{(n-m)}(\lambda - \mu), L^{(n)}(\lambda) \otimes L^{(m)}(\mu)], \quad (3.11)$$

где матрица  $r^{(n-m)}(\lambda)$  была введена в (2.4). Перемножая формально (3.11) по всем  $n$  и  $m$ , приходим к соотношению (3.2), в котором участвует матрица

$$L^{\Lambda_1}(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} L^{(n)}(\lambda) \quad (3.12)$$

и  $r$ -матрица  $r^{\Lambda_1}(\lambda)$  вида (2.7). Однако эта процедура требует значительного обоснования, которое выходит за рамки этой книги.

Этими замечаниями о решеточных моделях мы здесь и ограничимся. Приведенные классы матриц  $L_n(\lambda)$  содержат рассмотренные в этой книге модели и позволяют строить их интересные обобщения.

Итак, в этом и в двух предыдущих параграфах мы рассмотрели с общей точки зрения вспомогательные линейные задачи для интегрируемых моделей и соответствующие им фундаментальные скобки Пуассона. Наиболее законченная геометрическая интерпретация была получена для непрерывных моделей с рациональной  $r$ -матрицей. Как мы показали, связанные с ней фундаментальные скобки Пуассона порождаются специальной бесконечномерной алгеброй Ли  $\mathcal{E}_0((\mathfrak{g}))$ , и соответствующие непрерывные модели обладают наибольшей степенью симметрии. Непрерывные модели с тригонометрическими и эллиптическими  $r$ -матрицами имеют частично нарушенную симметрию и описаны менее детально. В частности, не был приведен соответствующий аналог алгебры  $\mathcal{E}_0((\mathfrak{g}))$ . Наконец, при описании моделей на решетке мы, по существу, ограничились лишь подходящими подстановками. Однако, во всяком случае для рациональной  $r$ -матрицы, отвечающей алгебре  $\mathfrak{su}(N)$ , эти подстановки в непрерывном пределе дают весь класс матриц  $U(x, \lambda)$ , описанных в § 1. Роль алгебр Ли  $\mathcal{E}_0((\mathfrak{g}))$  для моделей на решетке должен играть объект типа группы Ли, однако подробное обсуждение этого выходит за рамки настоящей книги. Этими словами мы и заканчиваем изложение нашей классификационной схемы для интегрируемых моделей.

#### § 4. Геометрическая интерпретация представления нулевой кривизны и метода задачи Римана

Задача Римана о факторизации матриц-функций играла важную роль в нашей книге. Во-первых, она использовалась для решения обратной задачи — обращения отображения  $\mathcal{F}$  (см. § II.1—3, § II.6 части I и § II.2, II.5) и, тем самым, была составной частью метода решения начальной задачи для рассматриваемых нелинейных уравнений. В частности, представление нулевой кривизны для этих уравнений вытекало из формализма задачи Римана. Во-вторых, в § I.6 с ее помощью мы описали метод нахождения широкого класса частных решений общего уравнения нулевой кривизны — процедуру одевания. В этом параграфе мы рассмотрим метод решения начальной задачи для интегрируемых нелинейных уравнений и процедуру одевания с общей точки зрения. Именно, мы изложим геометрическую схему, порождающую гамильтоновы уравнения, имеющие богатый набор инволютивных интегралов движения и допускающие представление нулевой кривизны. В ней свое естественное место найдет и процедура одевания. Основную роль в этой схеме будет играть введенная в § 1 бесконечномерная алгебра Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  с двумя коммутаторами  $[\cdot, \cdot]$  и  $[\cdot, \cdot]_0$  и ее центральное расширение.

Построение геометрической схемы мы разобьем на несколько этапов. Сначала в п. 1 мы рассмотрим модельную ситуацию, отправляясь от конечномерной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . На ее примере будут введены основные приемы геометрического подхода к построению интегрируемых уравнений и их решений при помощи задачи факторизации в группе Ли  $G$ . Затем в п. 2 мы заменим алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  на бесконечномерную алгебру Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  — алгебру Ли функций от  $x$  со значениями в  $\mathfrak{g}$  и ее центральное расширение. Там естественным образом появятся представление нулевой кривизны и матрица монодромии вспомогательной линейной задачи. Окончательная схема в п. 3 получается при замене алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  из п. 2 на алгебру токов  $S(\mathfrak{g})$ , приводящей к алгебре Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$ . Таким образом, порядок введения переменных  $x$  и  $\lambda$  здесь обратен принятому в § 1. Абстрактная задача о факторизации из п. 1 в п. 3 превратится в традиционную задачу Римана об аналитической факторизации матриц-функций.

**1. Задача о факторизации как способ построения интегрируемых гамильтоновых уравнений и их решений.** Пусть  $G$  — конечномерная группа Ли, такая, что ее алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  допускает разложение в линейную сумму двух подалгебр

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-, \quad (4.1)$$

а  $P_{\pm}$  — соответствующие проекторы:

$$P_{\pm}\mathfrak{g}_{\pm} = \mathfrak{g}_{\pm}, \quad P_{\pm}\mathfrak{g}_{\mp} = 0. \quad (4.2)$$

Положим

$$R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-) \quad (4.3)$$

и введем на  $\mathfrak{g}$  вторую структуру алгебры Ли с коммутатором  $[\cdot, \cdot]_0$ :

$$[\xi, \eta]_0 = [R\xi, \eta] + [\xi, R\eta], \quad (4.4)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — исходный коммутатор в  $\mathfrak{g}$  (сравни с § 1). На фазовом пространстве  $\mathfrak{g}^*$  рассмотрим скобки Ли — Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}$  и  $\{\cdot, \cdot\}_0$ , ассоциированные с коммутаторами  $[\cdot, \cdot]$  и  $[\cdot, \cdot]_0$  соответственно. Через  $I(\mathfrak{g})$  обозначим аннулятор пуассоновой структуры  $\{\cdot, \cdot\}$  — алгебру функций Казимира — состоящую из инвариантов коприсоединенного действия  $\text{Ad}^*$  группы Ли  $G$  на  $\mathfrak{g}^*$ : для функции  $f(u)$  из  $I(\mathfrak{g})$

$$f(\text{Ad}^*g \cdot u) = f(u) \quad (4.5)$$

для всех  $g$  из  $G$ .

Замечательное свойство пуассоновой структуры  $\{\cdot, \cdot\}_0$  состоит в следующем: алгебра  $I(\mathfrak{g})$  инволютивна по отношению к скобке Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}_0$ .

Для доказательства используем инвариантное определение скобки Ли — Пуассона, которая была введена в § 1 формулой (1.2). Для любой функции  $f(u)$  на  $\mathfrak{g}^*$  через  $\nabla f(u)$  обозначим ее градиент — элемент из алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , задаваемый формулой

$$\nabla f(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u_a} X_a. \quad (4.6)$$

В этих обозначениях формула (1.2) переписывается в виде

$$\{f_1, f_2\}(u) = -(u, [\nabla f_1(u), \nabla f_2(u)]), \quad (4.7)$$

где  $u$  из  $\mathfrak{g}^*$  — точка, в которой вычисляется скобка Пуассона, а  $(\cdot, \cdot)$  — спаривание  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{g}^*$  (см. § 1). В частности, полагая  $f_1(u) = u_a \xi^a$  и  $f_2(u) = f(u)$ , где  $f(u)$  лежит в  $I(\mathfrak{g})$ , получаем, что

$$(u, [\nabla f(u), \xi]) = 0 \quad (4.8)$$

для любого элемента  $\xi = \xi_a X^a$  из алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Теперь свойство инволютивности алгебры  $I(\mathfrak{g})$  очевидно: для любых функций  $f_1(u), f_2(u)$  из  $I(\mathfrak{g})$  имеем

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\}_0(u) &= -(u, [R\nabla f_1(u), \nabla f_2(u)]) - \\ &= -(u, [\nabla f_1(u), R\nabla f_2(u)]) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

поскольку каждое слагаемое в правой части исчезает в силу (4.8).

Итак, мы получили богатое семейство функций, инволютивное по отношению к скобке Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}_0$ . Естественно рассмотреть гамильтоновы уравнения движения, порожденные его

элементами. Они имеют вид

$$\frac{du_a}{dt} = \{f, u_a\}_0(u), \quad (4.10)$$

где в качестве гамильтониана выбрана функция  $f$  из  $I(\mathfrak{g})$ . Формула (4.8) позволяет записать эти уравнения следующим образом:

$$\frac{du_a}{dt} = -(u, [R\nabla f(u), \nabla u_a]) = (\text{ad}^*(R\nabla f(u)) \cdot u)_a, \quad (4.11)$$

или

$$\left( \frac{du}{dt}, \xi \right) = -(u, [R\nabla f(u), \xi]) \quad (4.12)$$

для всех  $\xi$  из  $\mathfrak{g}$ . В полупростом случае это уравнение переписывается более элегантно: для элемента  $U$  из  $\mathfrak{g}$ ,

$$U = u_a A^a \quad (4.13)$$

(сравни с формулой (1.32)), оно принимает вид

$$\frac{dU}{dt} = [R\nabla f(u), U]. \quad (4.14)$$

Представление уравнения (4.10) в виде (4.12) (или (4.14)) очень важно. Как мы сейчас убедимся, оно приводит к процедуре построения решения начальной задачи  $u_a(t)|_{t=0} = u_a^0$  для нелинейного уравнения (4.10) в терминах задачи о факторизации в группе Ли  $G$ .

Обозначим через  $G_{\pm}$  подгруппы в  $G$ , отвечающие подалгебрам  $\mathfrak{g}_{\pm}$ . Для любого элемента  $g$  из  $G$ , достаточно близкого к  $I$ , справедливо разложение

$$g = g_+ g_-, \quad (4.15)$$

где  $g_{\pm}$  лежат в  $G_{\pm}$ ; это разложение единственно, если  $g_{\pm}$  также близки к единичному элементу в  $G$ . *Задача о факторизации (4.15) представляет собой абстрактный аналог задачи Римана.*

Покажем, как с ее помощью решается нелинейное уравнение (4.10). *Рассмотрим однопараметрическую подгруппу в  $G$ , состоящую из элементов вида  $g(t) = \exp\{-t\nabla f(u^0)\}$ , и свяжем с ней (при достаточно малых  $t$ ) семейство задач о факторизации*

$$g(t) = g_+(t) g_-(t), \quad (4.16)$$

где  $g_{\pm}(t)|_{t=0} = I$ . Тогда решение уравнений движения (4.10) с начальным условием  $u^0$  дается формулами

$$u(t) = \text{Ad}^* g_+^{-1}(t) \cdot u^0 = \text{Ad}^* g_-(t) u^0, \quad (4.17)$$

или

$$(u(t), \xi) = (u^0, g_+(t) \xi g_+^{-1}(t)) = (u^0, g_+^{-1}(t) \xi g_-(t)) \quad (4.18)$$

для всех  $\xi$  из  $\mathfrak{g}$ .

Совпадение двух вариантов представления для  $u(t)$  в формуле (4.17) (или в (4.18)) следует из соотношения

$$\text{Ad}^*g(t) \cdot u^0 = u^0, \quad (4.19)$$

инфинитезимальный вариант которого дается формулой (4.8).

Для доказательства продифференцируем равенство (4.16) по  $t$  и запишем результат в виде

$$g_+^{-1}(t) \frac{dg}{dt}(t) g^{-1}(t) g_+(t) = g_+^{-1}(t) \frac{dg_+}{dt}(t) + \frac{dg_-}{dt}(t) g_-^{-1}(t). \quad (4.20)$$

Вспоминая, что  $\frac{dg}{dt}(t) g^{-1}(t) = -\nabla f(u^0)$ , и обозначая

$$\xi_+(t) = g_+^{-1} \frac{dg_+}{dt}(t), \quad \xi_-(t) = \frac{dg_-}{dt}(t) g_-^{-1}(t), \quad (4.21)$$

получаем

$$-g_+^{-1}(t) \nabla f(u^0) g_+(t) = \xi_+(t) + \xi_-(t). \quad (4.22)$$

Нетрудно убедиться, что выражение в левой части этого равенства есть  $-\nabla f(u(t))$ . Для доказательства следует воспользоваться  $\text{Ad}^*$ -инвариантностью функции  $f(u)$ , из которой, в частности, имеем

$$f(u) = f(\text{Ad}^*g_+^{-1}(t) \cdot u), \quad (4.23)$$

и продифференцировать это равенство по  $u$  с учетом (4.17). Другими словами, градиент  $\text{Ad}^*$ -инвариантной функции «преобразуется подобно». В результате приходим к разложению

$$-\nabla f(u(t)) = \xi_+(t) + \xi_-(t), \quad (4.24)$$

так что

$$\xi_{\pm}(t) = -P_{\pm}(\nabla f(u(t))). \quad (4.25)$$

Теперь дифференцируя формулы (4.18) по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{du(t)}{dt}, \xi \right) &= \left( u^0, \frac{dg_+}{dt}(t) \xi g_+^{-1}(t) \right) - \\ &- \left( u^0, g_+(t) \xi g_+^{-1}(t) \frac{dg_+}{dt}(t) g_+^{-1}(t) \right) = (u(t), [\xi_+, \xi]) \end{aligned} \quad (4.26)$$

и

$$\left( \frac{du}{dt}(t), \xi \right) = -(u(t), [\xi_-, \xi]). \quad (4.27)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2}(\xi_+(t) - \xi_-(t)) = -R\nabla f(u(t)), \quad (4.28)$$

то на основании (4.26)–(4.27) заключаем, что  $u(t)$  удовлетворяет уравнению (4.12) или (4.10).

Итак, мы показали, что решение нелинейного уравнения (4.10) сводится к построению однопараметрической подгруппы



$g(t)$  и решению задачи факторизации (4.16). Обе эти задачи линейны. Другими словами, на модельном конечномерном примере мы объяснили процедуру линеаризации гамильтоновых уравнений специального вида (4.10). Как мы видим, в ней уже содержатся основные моменты метода обратной задачи: гамильтоновость уравнений движения, наличие серии интегралов движения в инволюции, метод построения решения начальной задачи при помощи задачи о факторизации. В основе описанной схемы, по существу, лежит лишь одна формула — разложение исходной алгебры Ли в линейную сумму двух подалгебр.

**2. Центральное расширение алгебры Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  и уравнение нулевой кривизны.** Рассмотрим алгебру Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  функций  $\xi(x)$  со значениями в конечномерной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ . Для определенности будем считать, что функции  $\xi(x)$  удовлетворяют периодическим граничным условиям

$$\xi(x+2L) = \xi(x). \quad (4.29)$$

Алгебра  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  задается генераторами  $X_a(x)$ ,  $-L \leq x < L$ , с коммутатором

$$[X_a(x), X_b(y)] = C_{ab}^c X_c(x) \delta(x-y) \quad (4.30)$$

(сравни с формулой (1.34)).

Будем считать, что алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  допускает инвариантную билинейную форму  $\langle, \rangle$ , и введем центральное расширение  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g})$  алгебры Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  при помощи 2-коцикла Маурера — Картана

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{-L}^L \left\langle \xi(x), \frac{d\eta}{dx}(x) \right\rangle dx. \quad (4.31)$$

Элементами алгебры Ли  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g})$  являются пары  $\tilde{\xi} = (\xi(x), \sigma)$ , где  $\xi(x)$  — элемент из  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$ , а  $\sigma$  — комплексное число, с коммутатором

$$[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = ([\xi(x), \eta(x)], \omega(\xi, \eta)). \quad (4.32)$$

Тождество Якоби для коммутатора (4.32) выполняется ввиду свойства 2-коцикла

$$\omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\zeta, \xi], \eta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) = 0, \quad (4.33)$$

которое следует из (4.31) при помощи интегрирования по частям с использованием инвариантности формы  $\langle, \rangle$ . Элементы вида  $(0, \sigma)$  образуют центр в  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g})$ .

Генераторами алгебры Ли  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g})$  являются  $\tilde{X}_a(x)$  и  $I$  с коммутационными соотношениями

$$[\tilde{X}_a(x), \tilde{X}_b(y)] = C_{ab}^c \tilde{X}_c(x) \delta(x-y) + K_{ab} \delta'(x-y) I, \quad (4.34)$$

$$[\tilde{X}_a(x), I] = 0 \quad (4.35)$$

(сравни с (4.30)), где  $\delta'(x-y)$  означает производную  $\delta$ -функции  $\delta(x-y)$  по аргументу. Здесь

$$K_{ab} = \langle X_a, X_b \rangle, \quad (4.36)$$

где  $X_a$  — генераторы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

Двойственное пространство  $\tilde{\mathcal{E}}^*(\mathfrak{g})$  к алгебре Ли  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g})$  образовано элементами  $\tilde{u}$  с координатами  $(u_a(x), c)$ ; соответствующее спаривание имеет вид

$$\tilde{u}(\tilde{\xi}) = (\tilde{u}, \tilde{\xi}) = \int_{-L}^L u_a(x) \xi^a(x) dx + c\sigma. \quad (4.37)$$

В коприсоединенном представлении алгебры Ли  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g})$  элементы центра действуют тривиально, поэтому  $\tilde{\text{ad}}^*$ -действие  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g})$  редуцируется к действию  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ , которое будем обозначать тем же символом. Имеем по определению

$$\tilde{\text{ad}}^* \xi \cdot \tilde{u}(x) = \left( C_{ab}^c u_c(x) \xi^b(x) + c K_{ab} \frac{d\xi^b}{dx}, 0 \right), \quad (4.38)$$

где  $\xi(x) = \xi^a(x) X_a$ . Считая, что матрица  $K_{ab}$  невырождена (что мы будем предполагать в дальнейшем), действие (4.38) можно записать в элегантном виде

$$(\tilde{\text{ad}}^* \xi \cdot U)(x) = c \frac{d\xi^a(x)}{dx} + [\xi^a(x), U(x)], \quad (4.39)$$

вводя для любого элемента  $\tilde{u} = (u_a(x), c)$  из  $\tilde{\mathcal{E}}^*(\mathfrak{g})$  функцию  $U(x)$  со значениями в  $\mathfrak{g}$

$$U(x) = u_a(x) A^a, \quad A^a = K^{ab} X_b \quad (4.40)$$

(сравни с (4.14)). Последняя формула задает отождествление двойственного пространства  $\tilde{\mathcal{E}}^*(\mathfrak{g})$  с  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ .

Действие  $\tilde{\text{ad}}^*$  алгебры Ли  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathfrak{g})$  поднимается до действия группы Ли  $\mathcal{E}(G)$ , состоящей из периодических функций  $g(x)$  со значениями в группе Ли  $G$ :

$$(\tilde{\text{Ad}}^* g \cdot U)(x) = c \frac{dg(x)}{dx} g^{-1}(x) + g(x) U(x) g^{-1}(x), \quad (4.41)$$

которое представляет собой расширение обычного действия  $\text{Ad}^*$  (преобразований подобия).

Уместно сравнить последнюю формулу с калибровочным преобразованием, введенным в § 1.2 части I. Это сравнение показывает, что элементу  $\tilde{u} = (u_a(x), c)$  удобно сопоставлять дифференциальный оператор

$$L = c \frac{d}{dx} - U(x). \quad (4.42)$$

Действие  $\tilde{\text{Ad}}^*$  группы  $\mathcal{G}(G)$  тогда дается формулой

$$\tilde{\text{Ad}}^*g \cdot L = g(x) L g^{-1}(x), \quad (4.43)$$

где правая часть понимается как композиция операторов умножения на функции  $g(x)$  и  $g^{-1}(x)$  с дифференциальным оператором  $L$ . «Матрица» монодромии

$$T(\tilde{u}) = \exp \frac{1}{c} \int_{-L}^L U(x) dx \quad (4.44)$$

является функционалом на  $\tilde{\mathcal{G}}^*(\mathfrak{g})$  со значениями в  $G$  и преобразуется под действием  $\tilde{\text{Ad}}^*$  следующим образом:  $T \rightarrow g(L) T g^{-1}(L)$  (где мы учли периодичность функции  $g(x)$ ). Поэтому инварианты конечномерного действия  $\text{Ad}$  группы Ли  $G$ .

$$\text{Ad } g \cdot T = g T g^{-1} \quad (4.45)$$

являются инвариантами действия  $\tilde{\text{Ad}}^*$  группы Ли  $\mathcal{G}(G)$  и порождают алгебру функций Казимира  $I(\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g}))$  алгебры  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g})$ . Действительно, если матрицы монодромии  $T(\tilde{u}_1)$  и  $T(\tilde{u}_2)$  подобны в  $G$

$$T(\tilde{u}_2) = g T(\tilde{u}_1) g^{-1}, \quad (4.46)$$

то функция

$$g(x) = F_2(x) g F_1^{-1}(x), \quad (4.47)$$

где

$$L_1 F_1(x) = 0, \quad L_2 F_2(x) = 0 \quad (4.48)$$

и

$$F_1(x)|_{x=-L} = F_2(x)|_{x=-L} = I, \quad (4.49)$$

периодична — принадлежит группе Ли  $\mathcal{G}(G)$  и

$$\tilde{\text{Ad}}^*g \cdot U_1(x) = U_2(x). \quad (4.50)$$

Предположим теперь, что алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  допускает разложение (4.1). Тогда мы можем в рассмотрении п. 1 заменить  $\mathfrak{g}$  на  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$ . Именно, в соответствии с (4.1) разложим алгебру Ли  $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$  в линейную сумму двух подалгебр

$$\mathcal{G}(\mathfrak{g}) = \mathcal{G}_+(\mathfrak{g}) + \mathcal{G}_-(\mathfrak{g}), \quad (4.51)$$

где  $\mathcal{G}_\pm(\mathfrak{g}) = \mathcal{G}(\mathfrak{g}_\pm)$ , и определим на  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g})$  вторую структуру алгебры Ли, положив

$$[(\xi(x), \sigma), (\eta(x), \tau)]_0 = ([\xi_+(x), \eta_+(x)] - [\xi_-(x), \eta_-(x)], \omega(\xi_+, \eta_+) - \omega(\xi_-, \eta_-)), \quad (4.52)$$

где  $\xi(x) = \xi_+(x) + \xi_-(x)$ ,  $\eta(x) = \eta_+(x) + \eta_-(x)$ . Соответствующую алгебру Ли обозначим через  $\tilde{\mathcal{G}}_0(\mathfrak{g})$ . Она получается из алгебры

Ли  $\mathcal{G}_0(\mathfrak{g})$  с коммутатором

$$[\xi(x), \eta(x)]_0 = [R\xi(x), \eta(x)] + [\xi(x), R\eta(x)] \quad (4.53)$$

(сравни с (4.4)), где оператор  $R$  порождается разложением (4.51) по формуле (4.3), при помощи центрального расширения с 2-коциклом

$$\omega_0(\xi, \eta) = \omega(R\xi, \eta) + \omega(\xi, R\eta). \quad (4.54)$$

На фазовом пространстве  $\tilde{\mathcal{G}}^*(\mathfrak{g})$  введем скобки Ли — Пуассона  $\{, \}_0$  и рассмотрим гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \{f, u\}_0, \quad (4.55)$$

где  $\tilde{u} = (u_a(x), c)$ , а  $f(\tilde{u})$  принадлежит  $I(\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g}))$ . Сопоставляя общую формулу (4.11) из п. 1 с формулой (4.39), получаем, что в терминах элемента  $U(x) = u_a(x)A^a$  уравнение (4.55) принимает вид

$$\frac{\partial U(x)}{\partial t} = c \frac{\partial V(x)}{\partial x} + [V(x), U(x)], \quad (4.56)$$

$$\frac{dc}{dt} = 0, \quad (4.57)$$

где

$$V(x) = R\nabla f(u), \quad (4.58)$$

$$\nabla f(u) = \frac{\delta f}{\delta u_a(x)} X_a. \quad (4.59)$$

Мы видим, что фазовое пространство  $\tilde{\mathcal{G}}^*(\mathfrak{g})$  расслаивается на пуассоновы подмногообразия  $c = \text{const}$ . На редуцированном фазовом пространстве  $\mathcal{G}^*(\mathfrak{g})$  с  $c=1$  гамильтоново уравнение (4.55) переходит в уравнение нулевой кривизны. Интегралами движения для него являются элементы алгебры Казимира  $I(\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g}))$  — инварианты матрицы монодромии (4.44) (при  $c=1$ ). Функциональная размерность  $I(\tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{g}))$  совпадает с размерностью картановской подалгебры в  $\mathfrak{g}$ .

На этом мы заканчиваем описание общей схемы, порождающей гамильтоновы уравнения, имеющие инволютивные интегралы движения и допускающие представление нулевой кривизны. Однако в представлениях нулевой кривизны, с которыми мы имели дело при рассмотрении интегрируемых моделей, участвовали матрицы  $U$  и  $V$ , зависящие, помимо  $x$  и  $t$ , еще и от спектрального параметра  $\lambda$ . Этот случай получается в результате специализации общей схемы, когда в качестве алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  мы выберем алгебру токов  $C(\mathfrak{g})$  из § 1.

**3. Реализация общей схемы на примере алгебры Ли  $\mathcal{G}((\mathfrak{g}))$ ; задача Римана и семейство пуассоновых структур.** Заменим в рассмотрении п. 2 алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  на алгебру токов  $C(\mathfrak{g})$  из § 1 с:

описанным там разложением

$$C(\mathfrak{g}) = C_+(\mathfrak{g}) + C_-(\mathfrak{g}). \quad (4.60)$$

Чтобы иметь возможность ввести соответствующую группу токов  $C(G)$ , нам придется несколько изменить данное там определение. Для определенности будем считать, что алгебра Ли  $C(\mathfrak{g})$  образована функциями  $\xi(\lambda)$  со значениями в  $\mathfrak{g}$ , аналитическими в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Подалгебры  $C_+(\mathfrak{g})$  и  $C_-(\mathfrak{g})$  при этом состоят, соответственно, из функций  $\xi_+(\lambda)$  и  $\xi_-(\lambda)$ , аналитических в областях  $\mathbb{C}$  и  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ , причем  $\xi_-(\infty) = 0$ . (Здесь возможны и другие определения  $C(\mathfrak{g})$  и  $C_{\pm}(\mathfrak{g})$ , с одним из которых мы встретимся в § 5.) Тогда группы Ли  $\tilde{C}(G)$  и  $C_{\pm}(G)$  состоят из функций  $g(\lambda)$  и  $g_{\pm}(\lambda)$  со значениями в  $G$ , аналитических в соответствующих областях с условием нормировки  $g_-(\infty) = I$ . Задачу о факторизации

$$g(\lambda) = g_+(\lambda)g_-(\lambda) \quad (4.61)$$

в группе Ли  $C(G)$  можно интерпретировать как задачу Римана для контура, разделяющего точки  $\lambda=0$  и  $\lambda=\infty$ .

Каждая инвариантная билинейная форма  $\langle, \rangle$  на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  порождает бесконечное семейство инвариантных форм  $\langle, \rangle_p$  на алгебре токов  $C(\mathfrak{g})$  по правилу

$$\langle \xi, \eta \rangle_p = \text{Res } \lambda^p \langle \xi(\lambda), \eta(\lambda) \rangle, \quad p = -\infty, \dots, \infty. \quad (4.62)$$

Каждая такая форма задает 2-коцикл на алгебре Ли  $\mathcal{C}((\mathfrak{g})) = = \mathcal{C}(C(\mathfrak{g}))$

$$\omega_p(\xi, \eta) = \int_{-L}^L \text{Res } \lambda^p \left\langle \xi(\lambda, x), \frac{d}{dx} \eta(\lambda, x) \right\rangle dx, \quad (4.63)$$

который определяет ее центральное расширение  $\tilde{\mathcal{C}}_p((\mathfrak{g}))$ . Алгебра Ли  $\tilde{\mathcal{C}}_p((\mathfrak{g}))$  образована генераторами  $X_{a,k}(x)$  и  $I$  с коммутатором

$$[X_{a,k}(x), X_{b,l}(y)]_p = C_{ab}^c X_{c,k+l} \delta(x-y) + \delta_{k+l, -p-1} K_{ab} \delta' (x-y) I, \quad (4.64)$$

$$[X_{a,k}(x), I]_p = 0. \quad (4.65)$$

Разложение (4.60) позволяет ввести на  $\tilde{\mathcal{C}}((\mathfrak{g}))$  вторую структуру алгебры Ли и порожденное ею семейство скобок Ли — Пуассона  $\{, \}_p$  на редуцированном фазовом пространстве  $\mathcal{E}^*((\mathfrak{g}))$  с координатами  $u_{a,k}(x)$ :

$$\{u_{a,k}(x), u_{b,l}(y)\}_p = \begin{cases} -C_{ab}^c u_{c,k+l}(x) \delta(x-y) - K_{ab} \delta_{k+l, -p-1} \delta'(x-y) & \text{при } k, l \geq 0, \\ C_{ab}^c u_{c,k+l}(x) \delta(x-y) + K_{ab} \delta_{k+l, -p-1} \delta'(x-y) & \text{при } k, l < 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.66)$$

Конечно, неультралокальное слагаемое  $\pm K_{ab}\delta'(x-y)$  входит только в одну из строчек в правой части (4.66): в верхнюю при  $p < 0$  и в нижнюю при  $p > 0$ . При  $p = 0$  оно вообще отсутствует, и мы приходим к ультралокальным скобкам Пуассона из § 1.

Таким образом, рассмотрение § 1 полностью погружается в изложенную общую схему. При этом нам стало ясно, почему естественно рассматривать дифференциальный оператор  $L$  вспомогательной линейной задачи и инварианты отвечающей ему матрицы монодромии.

В общем случае коприсоединенное действие  $\text{ad}^*$  алгебры Ли  $\mathcal{C}((g))$  на редуцированном фазовом пространстве  $\mathcal{C}^*((g))$  дается формулой

$$\tilde{\text{ad}}_{p\xi}^* \cdot U(x, \lambda) = \lambda^p \frac{d\xi}{dx}(x, \lambda) + [\xi(x, \lambda), U(x, \lambda)] \quad (4.67)$$

(сравни с формулой (4.39)). Поэтому гамильтоновы уравнения движения с гамильтонианом  $f$  из алгебры Казимира  $I(\tilde{\mathcal{C}}((g)))$

$$\frac{\partial U(x, \lambda)}{\partial t} = \{f, U(x, \lambda)\}_p = \tilde{\text{ad}}^* R \nabla f(U(x, \lambda)) \quad (4.68)$$

принимают вид уравнения нулевой кривизны, если сделать замену матрицы  $U$ , вводя

$$U_p(x, \lambda) = \lambda^{-p} U(x, \lambda). \quad (4.69)$$

Уравнения (4.68) при разных  $p$  по существу являются эквивалентными. Более точно, гамильтоново уравнение (4.68) с  $p = p_1$  и гамильтонианом  $f_1$  может быть записано как уравнение того же вида при  $p = p_2$  с гамильтонианом  $f_2$ , просто связанным с  $f_1$ . Например, если в качестве  $f_1$  мы возьмем функционал

$$f_1(U(x, \lambda)) = \text{Res } \lambda^N P(T(U(\cdot, \lambda))), \quad (4.70)$$

где  $P$  — инвариант матрицы монодромии  $T(U(\cdot, \lambda))$ , то в качестве функционала  $f_2$  мы должны взять

$$f_2(U(x, \lambda)) = \text{Res } \lambda^{N+p_2-p_1} P(T(U(\cdot, \lambda) \lambda^{p_1-p_2})). \quad (4.71)$$

Для доказательства заметим, что поскольку в определении матрицы монодромии (4.44)  $\lambda$  является параметром, для  $\nabla f_1$  имеем общее выражение

$$\nabla f_1(U(x, \lambda)) = M(x, \lambda) \lambda^N, \quad (4.72)$$

где  $M(x, \lambda)$  — функция от  $x$  и  $\lambda$  со значениями в алгебре Ли  $g$ , зависящая от  $\lambda$  только через  $U(x, \lambda)$ :  $M(x, \lambda) = M(U(\cdot, \lambda), x)$ . Отсюда следует, что

$$\nabla f_2(U(x, \lambda) \lambda^{p_2-p_1}) = \nabla f_1(U(x, \lambda)), \quad (4.73)$$

и уравнения нулевой кривизны, порождаемые соответствующими гамильтоновыми уравнениями (4.68), совпадают после замены  $U(x, \lambda) \mapsto U(x, \lambda)\lambda^{p_2 - p_1}$ .

Введенные в § 1 пуассоновы подмногообразия  $C_{N,M}^*$  скобки Ли — Пуассона  $\{, \}_0$  являются пуассоновыми и для скобок Ли — Пуассона  $\{, \}_p$  при  $p = -N, \dots, M$ . Формулы для соответствующих скобок Ли — Пуассона можно получить из (4.66), если положить в них  $u_{a,k} = 0$ ,  $k \geq N$ ,  $k < -M$ . Формула (4.69) показывает, что гамильтоново уравнение (4.68), записанное как уравнение нулевой кривизны, удобнее рассматривать на фазовом пространстве  $C_{N-p, M+p}^*$ . Соответствующие элементы  $U_p(x, \lambda)$  в этом случае имеют одинаковый вид:

$$U_p(x, \lambda) = \sum_{k=-M}^{N-1} u_{a,k}^{(p)}(x) A^a \lambda^{-k-1}, \quad (4.74)$$

и фазовые пространства естественно отождествляются. В следующем параграфе мы убедимся на примере модели НШ, для которой  $N=0$ ,  $M=2$ , что семейство скобок  $\{, \}_p$  естественно порождает  $\Lambda$ -оператор и иерархию пуассоновых структур, введенную в § III.5 части I.

**4. Геометрическая интерпретация процедуры одевания.** Процедура одевания общего уравнения нулевой кривизны

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (4.75)$$

была изложена в § I.6 и состояла в следующем: по исходным данным  $U(x, t; \lambda)$  и  $V(x, t; \lambda)$  — рациональным функциям  $\lambda$  со значениями в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $G$ , удовлетворяющим уравнению (4.75), мы строили новое решение  $U^g(\lambda)$  и  $V^g(\lambda)$  уравнения (4.75), параметризованное элементом  $g$  из группы  $C(G)$  — группы Ли функций  $g(\lambda)$  на контуре  $\Gamma$  в  $\mathbb{C}$  со значениями в  $G$ . Для этого мы использовали решение  $F(x, t, \lambda)$  совместной системы уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F, \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda) F \quad (4.77)$$

и решали при каждом  $x$  и  $t$  задачу о факторизации

$$FgF^{-1}(\lambda) = (FgF^{-1})_+(\lambda) (FgF^{-1})_-(\lambda), \quad (4.78)$$

где функции  $h_+(\lambda) = (FgF^{-1})_+(\lambda)$  и  $h_-(\lambda) = (FgF^{-1})_-(\lambda)$  допускают аналитическое продолжение соответственно во внутренность и внешность контура  $\Gamma$ . После этого, полагая

$$F^g = h_+^{-1} F = h_- F g^{-1}, \quad (4.79)$$

мы определяли  $U^g(\lambda)$  и  $V^g(\lambda)$  по формулам

$$U^g = \frac{\partial F^g}{\partial x} (F^g)^{-1}, \quad V^g = \frac{\partial F^g}{\partial t} (F^g)^{-1}. \quad (4.80)$$

При этом сохранялись и дивизоры полюсов функций  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  или, на нашем новом языке, пуассоновы подмногообразия, конечномерные при фиксированных  $x$  (см. § 1.6 и § 1).

Здесь мы выясним смысл одевающих преобразований как преобразований на фазовом пространстве  $\mathcal{E}^*(\mathfrak{g})$  функций  $U(x, \lambda)$ .

Нетрудно убедиться, что для двух последовательных преобразований с функциями  $g_1(\lambda)$  и  $g_2(\lambda)$  мы имеем

$$F^{g_1 g_2}(x, \lambda) = (F^{g_2})^{g_1}(x, \lambda). \quad (4.81)$$

Действительно, используя оба представления (4.79) и элементарные свойства

$$(g_+ f)_- = f_-, \quad (g f_-)_- = g_- f_-, \quad (4.82)$$

получаем

$$\begin{aligned} (F^{g_2})^{g_1} &= (F^{g_2} g_1 F^{g_2^{-1}})_- F^{g_2} g_1^{-1} = \\ &= ((F g_2 F)_+^{-1} F g_1 g_2 F^{-1} (F g_2 F^{-1})_-)_- (F g_2 F^{-1})_- F g_2^{-1} g_1^{-1} = \\ &= (F g_1 g_2 F^{-1})_- F (g_1 g_2)^{-1} = F^{g_1 g_2}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Однако соответствующее групповое свойство для элементов фазового пространства  $U^g$ , вообще говоря, неверно. Действительно, функция  $U$  не меняется при правом умножении  $F \rightarrow Fg$ , которое не коммутирует с описанным действием группы  $C(\mathfrak{G})$   $F \rightarrow F^g$ . Эту ситуацию можно исправить, фиксируя значение функций  $F(x, \lambda)$  в одной точке  $x$ , например, при  $x = -L$ :

$$F(x, \lambda)|_{x=-L} = I. \quad (4.84)$$

Модифицированное одевание

$$F^g = h_+^{-1} F h_+ = h_- F h_-^{-1} \quad (4.85)$$

сохраняет граничное условие (4.84), но уже не является действием группы  $C(\mathfrak{G})$ .

Замечательно, что существует группа, для которой формула (4.85) задает групповое действие. Как множество она совпадает с  $C(\mathfrak{G})$ , но имеет другой закон умножения

$$g \circ f = f_+ g_+ g_- f_-, \quad (4.86)$$

где  $g = g_+ g_-$  и  $f = f_+ f_-$  (при условии, что задача о факторизации в  $C(\mathfrak{G})$  однозначно разрешима). Эту группу будем обозначать через  $C_0(\mathfrak{G})$ , а подгруппы, порожденные элементами  $g_+$  и  $g_-$ , — через  $C_+(\mathfrak{G})$  и  $C_-(\mathfrak{G})$ . Эти подгруппы коммутируют в  $C_0(\mathfrak{G})$ , и



закон умножения в каждой из них имеет вид

$$g_+ \circ f_+ = f_+ g_+, \quad g_- \circ f_- = g_- f_-. \quad (4.87)$$

Сравнение с формулами (1.22) — (1.23) показывает, что алгебры Ли групп  $C_0(G)$  и  $C_{\pm}(G)$  совпадают (с точностью до обращения знака у коммутатора) соответственно с введенными в § 1 алгебрами Ли  $C_0(\mathfrak{g})$  и  $C_{\pm}(\mathfrak{g})$ .

Проверим, что формула (4.85) задает действие группы  $C_0(G)$ . Соответствующая выкладка практически аналогична (4.83):

$$\begin{aligned} (F^g)^{\circ} &= (F^i g F^{i-1})_- \cdot F^i g^{-1} = \\ &= ((F f F^{-1})_+^{-1} F f_+ g f_- F^{-1} (F f F^{-1})_- (F f F^{-1})_- F f_-^{-1} g^{-1} = \\ &= (F f_+ g_+ g_- f_- F^{-1})_- \cdot F (g_- f_-)^{-1} = F^{g \circ f}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Формула

$$U^g(x, \lambda) = \frac{d}{dx} F^g (F^g)^{-1} = \frac{d}{dx} h_- h_-^{-1} + h_- U h_-^{-1} = \tilde{A} d^* h_- \cdot U(x, \lambda) \quad (4.89)$$

(сравни с (4.41)) переносит это действие на фазовое пространство  $\mathcal{E}^*(\mathfrak{g})$ . Более того, преобразование  $U \mapsto U^g$  действует только в некотором расширении пространства  $C^*(\mathfrak{g})$ , поскольку оно, вообще говоря, нарушает условие периодичности. Мы не будем здесь давать соответствующих уточнений.

Уместно сравнить формулы процедуры одевания (4.78), (4.89) с формулами (4.16) — (4.17) для решений уравнений движения в общей схеме п. 1. Они практически совпадают по виду, но факторизуемые матрицы в (4.78) и (4.16), на первый взгляд, различны: в процедуре одевания участвует произвольная функция  $g(\lambda)$ , подобно преобразованная при помощи решения уравнения вспомогательной линейной задачи  $F(x, \lambda)$ , а для решения уравнений движения мы факторизовали функцию  $\exp\{-t\nabla f(U(x, \lambda))\}$ , где  $f(U)$  — элемент алгебры Казимира  $I(\mathcal{E}^*(\mathfrak{g}))$ . Однако можно показать, что

$$\exp\{-t\nabla f(U)\} = F g_0(\lambda, t) F^{-1}, \quad (4.90)$$

где  $F(x, \lambda)$  — решение уравнения вспомогательной линейной задачи для начального условия  $U(x, \lambda)$ , а  $g_0(\lambda, t)$  принимает значения в картановской подгруппе  $K$  группы  $G$ , не зависящей от  $t$ . Действительно, рассмотрим функции  $h(\lambda)$ , переводящую матрицу монодромии в функцию, принимающую значения в фиксированной картановской подгруппе  $K$ ,

$$T(U(\cdot, \lambda)) = h(\lambda) \hat{T}(U(\cdot, \lambda)) h^{-1}(\lambda) = h(\lambda) \exp C(\lambda) h^{-1}(\lambda), \quad (4.91)$$

где  $C(\lambda)$  принимает значения в соответствующей картановской подалгебре  $\mathfrak{k}$ . Из формул (4.46) — (4.50) следует, что

$$U(x, \lambda) = \tilde{A} d^* h(x, \lambda) \cdot \hat{U}_0(\lambda), \quad (4.92)$$

где

$$\hat{U}_0(\lambda) = \frac{1}{2L} C(\lambda), \quad h(x, \lambda) = F(x, \lambda) h(\lambda) \exp\left(-\frac{x+L}{2L} C(\lambda)\right) \quad (4.93)$$

и  $F(x, \lambda)$  удовлетворяет уравнению вспомогательной линейной задачи с граничным условием (4.84). Теперь, вспоминая, что градиент инвариантной функции преобразуется подобно, получим формулу

$$\nabla f(U(x, \lambda)) = F(x, \lambda) h(\lambda) \nabla f(\hat{U}_0) h^{-1}(\lambda) F^{-1}(x, \lambda), \quad (4.94)$$

где мы учли, что  $\nabla f(\hat{U}_0)$ , так же как  $\hat{U}_0$ , принимает значения в  $\mathfrak{f}$ . Формула (4.90) немедленно следует из (4.94). Это замечание показывает, что преобразование динамики естественно включается в общую группу процедуры одевания. В частности, из него еще раз следует, что процедура одевания переводит множество решений уравнений движения в себя. Однако, в отличие от преобразований динамики, общее преобразование одевания не является гамильтоновым.

На этом мы закончим описание общей геометрической схемы метода обратной задачи. Конечно, наше изложение было неполным. Аналитическое обоснование приведенных формальных бесконечномерных конструкций выходит за рамки настоящей книги. Тем не менее мы привели здесь эту общую схему, поскольку она представляется нам достаточно элегантно и проливает свет на основные конструкции метода обратной задачи, которые мы использовали при рассмотрении конкретных моделей на протяжении всей книги.

## § 5. Иллюстрация общей схемы на примере модели НШ

Завершая эту книгу, мы еще раз вернемся к нашему основному примеру — модели НШ и посмотрим, как развитый в части I метод ее точного решения согласуется с общим геометрическим рассмотрением настоящей главы. Именно, мы покажем, в каком смысле задача Римана, использованная для решения начальной задачи в гл. II части I, получает интерпретацию как задача о факторизации из § 4. Кроме того, мы свяжем введенную в § III.5 части I иерархию пуассоновых структур и порождающий их  $\Lambda$ -оператор с семейством пуассоновых структур из п. 3 § 4. При этом мы докажем обещанное в § III.5 части I тождество Якоби.

При обсуждении задачи Римана мы ограничимся случаем быстроубывающих граничных условий и будем считать, что дискретный спектр отсутствует. Решение начальной задачи для модели НШ при помощи задачи Римана, данное в § III.3 части I, состояло в следующем: по начальным данным  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  мы строили коэффициент перехода  $b(\lambda)$  и решали семейство

регулярных задач Римана

$$G(x, t, \lambda) = G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda), \quad (5.1)$$

где

$$G(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \bar{b}(\lambda) e^{-i\lambda x + i\lambda t} \\ -b(\lambda) e^{i\lambda x - i\lambda t} & 1 \end{pmatrix} = e^{\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3} G(x, \lambda) e^{-\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3},$$

$$\varepsilon = \text{sign } \kappa, \quad (5.2)$$

и

$$G(x, \lambda) = G(x, 0, \lambda). \quad (5.3)$$

В качестве контура  $\Gamma$  выбиралась вещественная ось и предполагалось, что решения  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$  допускают аналитическое продолжение в полуплоскости  $\pm \text{Im } \lambda > 0$ , невырождены там и нормированы на  $I$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ :

$$G_{\pm}(x, t, \infty) = I. \quad (5.4)$$

Матрица  $U(x, t, \lambda)$  из вспомогательной линейной задачи выражалась через решения  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$  следующими формулами:

$$\begin{aligned} U(x, t, \lambda) &= \\ &= -G_+^{-1}(x, t, \lambda) \frac{\partial G_+}{\partial x}(x, t, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} G_+^{-1}(x, t, \lambda) \sigma_3 G_+(x, t, \lambda) = \\ &= \frac{\partial G_-}{\partial x}(x, t, \lambda) G_-^{-1}(x, t, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} G_-(x, t, \lambda) \sigma_3 G_-^{-1}(x, t, \lambda). \end{aligned} \quad (5.5)$$

В обозначениях из § 4 эти формулы записываются в компактном виде:

$$U(t) = \tilde{\text{Ad}}^* G_+^{-1}(t) \left( \frac{\lambda \sigma_3}{2i} \right) = \tilde{\text{Ad}}^* G_-(t) \left( \frac{\lambda \sigma_3}{2i} \right), \quad (5.6)$$

где здесь и ниже мы часто будем опускать зависимость от  $x$  и  $\lambda$ .

Используя формулы (5.6) и групповое свойство  $\tilde{\text{Ad}}^*$ , получаем представление для решения  $U(t)$  в терминах начального даного  $U_0 = U(t) |_{t=0}$ :

$$U(t) = \tilde{\text{Ad}}^* h_+^{-1}(t) U_0 = \tilde{\text{Ad}}^* h_-(t) U_0, \quad (5.7)$$

где матрицы  $h_{\pm}(t)$  имеют вид

$$h_+(x, t, \lambda) = G_+^{-1}(x, 0, \lambda) G_+(x, t, \lambda), \quad (5.8)$$

$$h_-(x, t, \lambda) = G_-(x, t, \lambda) G_-^{-1}(x, 0, \lambda). \quad (5.9)$$

Эти матрицы дают решение задачи о факторизации

$$h(t) = h_+(t) h_-(t), \quad (5.10)$$

где матрица  $h(t)$  представляется в виде

$$h(x, t, \lambda) = G_+^{-1}(x, 0, \lambda) e^{\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3} G_+(x, 0, \lambda) G_-(x, 0, \lambda) e^{-\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3} G_-^{-1}(x, 0, \lambda) \quad (5.11)$$

и выражается через решения задачи Римана (5.1) при  $t=0$ , которые однозначно определяются начальным условием  $U_0$ .

Формулы (5.7) совпадают с общими формулами (4.17) из п. 1 § 4 для решения начальной задачи для абстрактного гамильтонова уравнения (4.10), которое, как мы знаем из п. 2 § 4, представляет собой уравнение нулевой кривизны. Однако общая задача о факторизации (4.16) и задача Римана (5.10) отличаются: в первой задаче речь шла о факторизации однопараметрической подгруппы матриц  $g(t) = \exp\{-t\nabla H(U_0)\}$ , в то время как участвующие во второй задаче матрицы  $h(t)$  однопараметрической подгруппы не образуют.

Для согласования этих двух подходов к решению начальной задачи заметим, что формулы типа (5.7) определяют матрицы  $h_+^{-1}(t)$  и  $h_-(t)$  с точностью до правых множителей из централизатора элемента  $U_0$  относительно действия  $\text{Ad}^*$ . Очевидно, что матрицы вида  $F(x, \lambda)C(\lambda)F^{-1}(x, \lambda)$ , где  $F(x, \lambda)$  — решение вспомогательной линейной задачи с матрицей  $U_0(x, \lambda)$ , а  $C(\lambda)$  — произвольная матрица, принадлежат этому централизатору. Используя это соображение, введем матрицы

$$g_+(x, t, \lambda) = h_+(x, t, \lambda), \quad (5.12)$$

$$g_-(x, t, \lambda) = h_-(x, t, \lambda) G_-(x, 0, \lambda) e^{\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3} G_-^{-1}(x, 0, \lambda), \quad (5.13)$$

которые удовлетворяют соотношению

$$g_+(t)g_-(t) = g(t), \quad (5.14)$$

где

$$g(x, t, \lambda) = G_+^{-1}(x, 0, \lambda) e^{\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3} G_+(x, 0, \lambda). \quad (5.15)$$

Матрицы  $g(t)$  уже образуют однопараметрическую подгруппу, и сравнение с формулой (4.90) показывает, что

$$g(t) = \exp\{-t\nabla H(U_0)\}. \quad (5.16)$$

Таким образом, соотношение (5.14) реализует абстрактную задачу о факторизации в применении к модели НШ. Формулы (5.12) — (5.13) показывают, каким функциональным классам принадлежат искомые матрицы  $g_{\pm}(x, t, \lambda)$ : эти матрицы допускают аналитическое продолжение в полуплоскости  $\pm \text{Im } \lambda > 0$  и

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеют следующие асимптотики:

$$g_+(x, t, \lambda) = I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (5.17)$$

$$g_-(x, t, \lambda) = \left(I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right) e^{\frac{i\lambda t}{2} \sigma_3} \left(I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right). \quad (5.18)$$

Итак, мы получили формальное согласование конкретной задачи Римана для модели НШ и абстрактной задачи о факторизации из п. 1 § 4. Следует, однако, сказать, что абстрактная задача о факторизации для бесконечномерной группы  $\mathcal{G}((G))$  в случае быстроубывающих граничных условий нами не была сформулирована (даже и для соответствующей алгебры Ли). Поэтому на проведенное выше рассуждение следует смотреть как на определение такой задачи в применении к конкретной орбите, отвечающей модели НШ. Этот пример показывает, что для приложения общей схемы из § 4 к конкретному нелинейному уравнению, отвечающему специальной орбите, требуется дополнительное аналитическое исследование соответствующей вспомогательной линейной задачи, приводящее к подходящей задаче Римана. На этом мы заканчиваем обсуждение роли задачи о факторизации для решения начальной задачи для интегрируемых нелинейных уравнений.

Перейдем теперь к описанию геометрического смысла  $\Lambda$ -оператора из § III.5 части I и связанной с ним иерархии пуассоновых структур. Напомним соответствующие определения, ограничиваясь для простоты быстроубывающим случаем и считая, что  $\kappa = -1$ . На фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$  с координатами  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , помимо основной пуассоновой структуры

$$\{f, g\} = \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle = i \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\text{grad } f(x) \sigma_3 \text{grad } g(x)) dx, \quad (5.19)$$

где для произвольной наблюдаемой  $f$

$$\text{grad } f(x) = \frac{1}{i} \left( \frac{\delta f}{\delta \psi(x)} \sigma_+ + \frac{\delta f}{\delta \bar{\psi}(x)} \sigma_- \right), \quad (5.20)$$

мы ввели иерархию пуассоновых структур

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{,k} &= \langle \text{grad } f, \Lambda^k \text{grad } g \rangle = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\text{grad } f(x) \sigma_3 \Lambda^k \text{grad } g(x)) dx, \quad k = -\infty, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь  $\Lambda$  — интегро-дифференциальный оператор, действующий на антидиагональные матрицы  $F(x)$  по формуле

$$\Lambda F(x) = i\sigma_3 \left( \frac{dF}{dx}(x) - [U_0(x), d^{-1}([U_0(\cdot), F(\cdot)])(x)] \right), \quad (5.22)$$

где

$$U_0(x) = i(\psi(x)\sigma_- + \bar{\psi}(x)\sigma_+) \quad (5.23)$$

и  $\langle , \rangle$  означает билинейную форму, задаваемую интегралом в (5.19). Очевидно, что  $\{ , \} = \{ , \}_{(0)}$ .

Тождество Якоби для скобок Пуассона  $\{ , \}_{(k)}$  в § III.5 части I нами проверено не было. *Здесь мы выясним геометрический смысл пуассоновой структуры  $\{ , \}_{(1)}$  и докажем это тождество Якоби.*

В п. 3 предыдущего параграфа на фазовом пространстве  $C_{N,M}^*$  мы ввели семейство пуассоновых структур  $\{ , \}_p$ ,  $p = -N, \dots, M$ . В частности, мы показали, что уравнение нулевой кривизны для матрицы  $U(x, \lambda)$  вида

$$U(x, \lambda) = \lambda J + Q(x), \quad (5.24)$$

где для алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$

$$J = iJ_a \sigma_a, \quad Q(x) = iQ_a(x) \sigma_a, \quad (5.25)$$

может быть записано в гамильтоновой форме тремя способами; ниже нас будут интересовать только два из них. В первом способе участвует фазовое пространство  $C_{0,2}^*$ , состоящее из матриц  $U(x, \lambda)$  вида (5.24) со скобкой Пуассона  $\{ , \}_0$ :

$$\{J_a, J_b\}_0 = 0, \quad \{J_a, Q_b(x)\}_0 = 0, \quad (5.26)$$

$$\{Q_a(x), Q_b(y)\}_0 = \varepsilon_{abc} J_c \delta(x-y), \quad (5.27)$$

а во втором — фазовое пространство  $C_{1,1}^*$ , состоящее из матриц  $\tilde{U}(x, \lambda) = J + \frac{Q(x)}{\lambda}$  со скобкой Пуассона  $\{ , \}_{-1}$ :

$$\{J_a, J_b\}_{-1} = 0, \quad \{J_a, Q_b(x)\}_{-1} = 0, \quad (5.28)$$

$$\{Q_a(x), Q_b(y)\}_{-1} = -\varepsilon_{abc} Q_c(x) \delta(x-y) + \frac{1}{2} \delta_{ab} \delta'(x-y). \quad (5.29)$$

В последнем способе уравнение нулевой кривизны получается для матрицы  $U(x, \lambda) = \lambda \tilde{U}(x, \lambda)$ , по виду совпадающей с (5.24).

Модели НШ отвечает специальная орбита в фазовом пространстве  $C_{0,2}^*$ , задаваемая условиями

$$J_1 = J_2 = 0, \quad J_3 = -1/2, \quad Q_3(x) = 0, \quad (5.30)$$

которая отождествляется с фазовым пространством  $\mathcal{M}_0$ , если положить

$$\psi(x) = Q_1(x) + iQ_2(x) \quad (5.31)$$

(см. пример 2 в § 1). Однако  $\mathcal{M}_0$  не является пуассоновым подмногообразием относительно скобки Пуассона  $\{ , \}_{-1}$ .

Тем не менее, мы можем редуцировать пуассонову структуру  $\{ , \}_{-1}$  на многообразие  $\mathcal{M}_0$ , рассматривая уравнения  $Q_3(x) = 0$  как связи. Мы осуществим это, вычислив явно соответствующую скобку Пуассона — Дирака, которая имеет вид

$$\{f, g\}_{-1}^* = \{f, g\}_{-1} + \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \{f, Q_3(x)\}_{-1} K^{-1}(x, y) \{Q_3(y), g\}_{-1} dx dy, \quad (5.32)$$

где  $K^{-1}(x, y)$  — ядро интегрального оператора  $K^{-1}$ , обратного к оператору  $K$  с ядром  $K(x, y) = \{Q_3(x), Q_3(y)\}_{-1}$ , и в правой части (5.32) следует ограничиться на поверхность связей  $Q_3(x) = 0$ . Из (5.29) имеем

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \delta'(x - y), \quad (5.33)$$

так что

$$K^{-1}(x, y) = \varepsilon(x - y), \quad (5.34)$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

В частности, полагая формально  $f = \psi(x)$  и  $g = \psi(y)$  или  $\bar{\psi}(y)$ , получаем скобки Пуассона — Дирака для координат  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ :

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{-1}^* = \psi(x) \psi(y) \varepsilon(x - y), \quad (5.36)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_{-1}^* = \delta'(x - y) - \psi(x) \bar{\psi}(y) \varepsilon(x - y). \quad (5.37)$$

Этот же ответ мы получим, вычисляя скобки Пуассона координат  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  по формуле (5.21) при  $k=1$ . Таким образом, мы показали совпадение пуассоновых структур  $\{ , \}_{(1)}$  и  $\{ , \}_{-1}^*$ . Отсюда, в частности, следует справедливость тождества Якоби для скобки Пуассона  $\{ , \}_{(1)}$ .

Для доказательства тождества Якоби для всех пуассоновых структур  $\{ , \}_{(k)}$  применим следующий прием. Заметим, что скобки Пуассона  $\{ , \}_0$  и  $\{ , \}_{-1}$  на  $S_{0,2}^*$  согласованы в следующем смысле: при всех  $\alpha$  скобки Пуассона  $\{ , \}_{-1}^{(\alpha)} = \{ , \}_{-1} + \alpha \{ , \}_0$  удовлетворяют тождеству Якоби. Это проще всего проверить в координатах  $Q_a(x)$ ,  $a=1, 2, 3$ . Из (5.26) — (5.27) и (5.28) — (5.29) имеем

$$\begin{aligned} \{Q_a(x), Q_b(y)\}^{(\alpha)} &= \{Q_a(x), Q_b(y)\}_{-1} + \alpha \{Q_a(x), Q_b(y)\}_0 = \\ &= -\varepsilon_{abc} \bar{Q}_c(x - y) + \frac{1}{2} \delta_{ab} \delta'(x - y), \end{aligned} \quad (5.38)$$

где  $\bar{Q}_a(x) = Q_a(x) + \alpha J_a$ ,  $a=1, 2, 3$ . Таким образом скобка  $\{ , \}_{-1}^{(\alpha)}$  получается из скобки Пуассона  $\{ , \}_{-1}$  заменой координат

$Q_\alpha(x) \mapsto \tilde{Q}_\alpha(x)$  и, тем самым, удовлетворяет тождеству Якоби. Редуцированные скобки Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$  и  $\{ , \}_{(1)}$  на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$  также являются согласованными. Рассмотрим теперь симплектическую форму  $\Omega_\alpha$ , отвечающую скобке Пуассона  $\{ , \}_{(1)}$ . Она является билинейной формой антидиагональных матриц  $\xi(x)$ ,  $\eta(x)$  и имеет вид

$$\Omega_\alpha(\xi, \eta) = \Omega_{(0)}(\xi, (\Lambda + \alpha)^{-1}\eta), \quad (5.39)$$

где  $\Omega_{(0)}$  — симплектическая форма скобки Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$ . Из замкнутости формы  $\Omega_\alpha$  следует замкнутость всех форм  $\Omega_{(k)}$ :

$$\Omega_{(k)}(\xi, \eta) = \Omega_{(0)}(\xi, \Lambda^{-k}\eta), \quad (5.40)$$

в чем легко убедиться, раскладывая  $(\Lambda + \alpha)^{-1}$  в геометрическую прогрессию в окрестности точек  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \infty$ . Формы  $\Omega_{(k)}$  соответствуют скобкам Пуассона  $\{ , \}_{(k)}$ , и тождество Якоби для последних следует из замкнутости первых.

Конечно, из приведенного рассуждения следует также, что *тождество Якоби справедливо и для более общей скобки Пуассона*

$$\{f, g\}_\varphi = \langle \text{grad } f, \varphi(\Lambda) \text{grad } g \rangle, \quad (5.41)$$

где  $\varphi$  — произвольная гладкая функция. Тем самым согласованными являются скобки Пуассона  $\{ , \}_\varphi$  и  $\{ , \}_\chi$  для произвольных функций  $\varphi$  и  $\chi$ . Приведенному формальному доказательству нетрудно придать необходимую строгость, если считать, что  $\Lambda$  обратим; в случае, если оператор  $\Lambda$  имеет ядро (это так для  $\Lambda$ -оператора вида (5.22), следует редуцировать фазовое пространство  $\mathcal{M}_0$ , фиксируя значения функционалов из аннулятора.

В § III.5 части I мы выяснили и вторую роль  $\Lambda$  как оператора, порождающего семейство инволютивных интегралов движения  $I_n$  посредством соотношения

$$\text{grad } I_n(x) = \Lambda \text{grad } I_{n-1}(x). \quad (5.42)$$

Здесь мы покажем, как эта формула, установленная в § III.5 части I непосредственным вычислением, получается из простых геометрических соображений и может служить для построения семейства  $I_n$ .

Будем считать, что нам заданы два функционала  $I_1$  и  $I_2$  такие, что гамильтоновы уравнения движения, порождаемые ими на фазовом пространстве  $\mathcal{M}_0$  относительно скобок Пуассона  $\{ , \}_{(1)}$  и  $\{ , \}_{(0)}$ , соответственно, совпадают, т. е. для произвольной наблюдаемой  $f$

$$\{I_1, f\}_{(1)} = \{I_2, f\}_{(0)}. \quad (5.43)$$

Убедимся, используя согласованность скобок Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$ ,



и  $\{ , \}_{(1)}$ , что из этого равенства следует существование семейства функционалов  $I_n$ , инволютивных по отношению к скобкам Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$  и  $\{ , \}_{(1)}$  и удовлетворяющих соотношению

$$\{I_n, f\}_{(1)} = \{I_{n+1}, f\}_{(0)}. \quad (5.44)$$

Для доказательства достаточно установить существование функционала  $I_3$  такого, что

$$\{I_2, f\}_{(1)} = \{I_3, f\}_{(0)}. \quad (5.45)$$

Для этого покажем, что векторное поле  $X$

$$Xf = \{I_2, f\}_{(1)} \quad (5.46)$$

является (локально) гамильтоновым по отношению к скобке Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$ , т. е.

$$X\{f, g\}_{(0)} = \{Xf, g\}_{(0)} + \{f, Xg\}_{(0)}. \quad (5.47)$$

Последняя формула переписывается в виде

$$\{I_2, \{f, g\}_{(0)}\}_{(1)} = \{\{I_2, f\}_{(1)}, g\}_{(0)} + \{f, \{I_2, g\}_{(1)}\}_{(0)} \quad (5.48)$$

и следует из тождества Якоби для скобки Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$  +  $\{ , \}_{(1)}$  и равенства

$$\{I_2, \{f, g\}_{(1)}\}_{(0)} = \{\{I_2, f\}_{(0)}, g\}_{(1)} + \{f, \{I_2, g\}_{(0)}\}_{(1)}, \quad (5.49)$$

которое получается аналогично (5.48) из заданного соотношения (5.43).

Из явного вида (5.19) и (5.21) скобок Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$  и  $\{ , \}_{(1)}$  следует, что функционал  $I_3$  можно определить из соотношения

$$\text{grad } I_3(x) = \Lambda \text{grad } I_2(x). \quad (5.50)$$

Приведенное выше рассуждение можно рассматривать как доказательство разрешимости этого уравнения (в случае односвязного фазового пространства).

Окончательная формула для функционалов  $I_n$  имеет вид

$$I_n = \text{grad}^{-1} \Lambda^{n-1} \text{grad } I_1 = \text{grad}^{-1} \Lambda^{n-m} \text{grad } I_m. \quad (5.51)$$

Отсюда и из определения (5.21) скобок Пуассона  $\{ , \}_{(k)}$  следует инволютивность функционалов  $I_n$  по отношению ко всем этим пуассоновым структурам и более общее, чем (5.44), соотношение

$$\{I_k, f\}_{(l)} = \{I_m, f\}_{(n)}, \quad (5.52)$$

где  $k+l = m+n$ .

Для модели НШ в качестве  $I_1$  и  $I_2$  мы можем выбрать функционалы числа частиц  $N$

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx \quad (5.53)$$

и импульса  $P$

$$P = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\bar{\psi}}{dx} \right) dx \quad (5.54)$$

и проверить соотношение (5.43) по заданным скобкам Пуассона  $\{ , \}_{(0)}$  и  $\{ , \}_{(1)}$  в форме (5.19) и (5.36) — (5.37). Из приведенных рассуждений следует существование  $\Lambda$ -оператора, иерархии пуассоновых структур  $\{ , \}_{(h)}$  и семейства функционалов  $I_n$ , инволютивного по отношению ко всем этим скобкам Пуассона.

Итак, вернувшись к модели НШ, мы по-новому осветили связанные с ней структуры. Тем самым мы замкнули круг идей, которым посвящена эта книга, и на этом месте она пришла к естественному концу.

## § 6. Комментарии и литературные указания

1) Скобка Ли — Пуассона вида (1.3) на фазовом пространстве  $\mathfrak{g}^*$  была введена и изучалась С. Ли [4.52]. Эта пуассонова структура и порожденная ею симплектическая структура на орбитах коприсоединенного действия алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в дальнейшем переоткрывалась различными авторами: [4.3], [4.16], [4.49], [4.62]. Современное изложение свойств скобки Ли — Пуассона и теории пуассоновых многообразий содержится в работе [4.64].

2) Термин алгебра токов для бесконечномерной алгебры Ли  $C(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \otimes C[[\lambda, \lambda^{-1}]]$  взят из квантовой теории поля. В математической литературе алгебры Ли  $C(\mathfrak{g})$  называются алгебрами петель.

3) Схема построения интегрируемых систем, использующая разложение алгебры Ли в линейную сумму двух подалгебр, была предложена Б. Костанто на конечномерном примере модели Toda со свободными концами [4.50]. В работах [4.23], [4.36], [4.56], [4.57—4.58], [4.63] эта схема была усовершенствована и применена к широкому классу алгебр Ли, включающему и бесконечномерные алгебры; вторая структура алгебры Ли с коммутатором  $[ , ]_0$  была введена в [4.56], [4.58].

4) Связь  $r$ -матричной формулировки с алгеброй Ли  $C_0(\mathfrak{g})$  была обнаружена в работе [4.30].

5) Формула (1.25) подсказывает абстрактное определение  $R$ -матрицы, введенное в работе [4.31]:  $R$ -матрицей называется оператор  $R$  в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , для которого коммутатор вида (1.25) удовлетворяет тождеству Якоби. Важный класс  $R$ -матриц образуют операторы  $R$ , удовлетворяющие при всех  $\xi$  и  $\eta$  из алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  уравнению

$$[R\xi, R\eta] - R([R\xi, \eta] + [\xi, R\eta]) = -[\xi, \eta] \quad (6.1)$$

— так называемому модифицированному уравнению Янга — Бакстера (см. [4.31]). Именно это уравнение справедливо для интегрального оператора  $R$  в  $C(\mathfrak{g})$  с ядром  $r(\lambda - \mu)$  вида (1.31), где интеграл понимается в смысле главного значения; при  $\lambda \neq \mu$  оно совпадает с обычным уравнением Янга — Бакстера (2.3).

6) Для придания строгого смысла обозначениям  $A \otimes I$  и  $I \otimes A$  из § 1 следует считать, что алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  вложена в ассоциативную алгебру с единицей (например, в универсальную обертывающую алгебру  $U(\mathfrak{g})$ ); ясно, что эти обозначения «функториальны».

7) Описание алгебры функций Казимира алгебры Ли  $C_{N,M}(\mathfrak{g})$  приведено в работах [4.18], [4.34].

8) Многополюсные пуассоновы подмногообразия из § 1 допускают простую интерпретацию в терминах алгебры Ли  $\mathfrak{g}_D$  над кольцом аделей  $\mathbb{A}$  поля  $\mathbb{C}(\lambda)$  рациональных функций на  $\mathbb{C}$  (см. [4.35]). Аналогом разложения (1.16) является представление алгебры Ли  $\mathfrak{g}_D$  в виде суммы подалгебры главных аделей  $\mathfrak{g}(\lambda)$  — рациональных функций от  $\lambda$  со значениями в  $\mathfrak{g}$  — и подалгебры целых аделей  $\mathfrak{g}_D^0$  (переформулировка разложения рациональной функции на простые дроби). Элементы  $U(\lambda)$  вида (1.55) образуют пуассоновое подмногообразие в  $\mathfrak{g}(\lambda)$  относительно действия подалгебры  $\mathfrak{g}_D^0$ .

9) Классификация решений уравнений (2.2) — (2.3), принимающих значения в простой алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , дана в работе [4.2]. В ней дано описание всех тригонометрических и эллиптических  $r$ -матриц вида  $r(u) = X^{ab}(u)t_a \otimes t_b$  с не вырождающейся тождественно матрицей  $X^{ab}(u)$ , удовлетворяющей условию  $X^{ab}(u) = \delta^{ab}/u + O(1)$  при  $u \rightarrow 0$ , где  $t_a$  — базис в  $\mathfrak{g}$ , ортонормированный относительно формы Киллинга, и построено обширное семейство рациональных  $r$ -матриц. При этом обнаружилась тесная связь задачи о классификации тригонометрических  $r$ -матриц со структурной теорией аффинных алгебр Ли.

10) Способ построения тригонометрических и эллиптических  $r$ -матриц и связанных с ними фундаментальных скобок Пуассона при помощи процедуры усреднения был предложен в работе [4.30]. Не все тригонометрические  $r$ -матрицы получаются таким образом; однако можно показать, что для построения всех таких  $r$ -матриц нужно скомбинировать процедуру усреднения с расширением линейных операторов по фон Нейману [4.2], [4.31].

11) Отметим, что если автоморфизмы конечного порядка  $\theta$  и  $\theta'$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  имеют абелевы подалгебры неподвижных точек и отличаются на внутренний автоморфизм, то построенные по ним тригонометрические  $r$ -матрицы эквивалентны [4.2].

12) Эллиптическая  $r$ -матрица при  $n=2$  была введена Е. К. Склянным в [4.61] и обобщена на произвольные размерности в работе [4.1]. В [4.33] она была проинтерпретирована как матричный аналог дзета-функции Вейерштрасса.

13) Можно определить аналог алгебры Ли  $C_0(\mathfrak{g})$  для тригонометрического и эллиптического случаев. Алгебра  $C(\mathfrak{g})$  и ее подалгебра  $C_+(\mathfrak{g})$  имеют тот же вид, что и в рациональном случае, в то время как аналог подалгебры  $C_-(\mathfrak{g})$  строится по решетке  $\Lambda_1$  или  $\Lambda_2$ . Так, например, в эллиптическом случае ( $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ) ее можно определить следующим образом. Пусть  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$  — алгебра мероморфных функций  $\xi(\lambda)$  на  $\mathbb{C}$  со значениями в  $\mathfrak{g}$ , удовлетворяющих условиям квазипериодичности

$$\xi(\lambda + \omega_i) = \theta_i \xi(\lambda), \quad i=1, 2, \quad (6.2)$$

и имеющих полюса в точках решетки  $\Lambda_2$ . Отождествим алгебру  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$  с подалгеброй в  $C(\mathfrak{g})$ , сопоставив каждой функции из  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$  ее ряд Лорана в точке  $\lambda=0$ . Функции из  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$  однозначно определяются своими главными частями при  $\lambda=0$ , поэтому справедливо разложение

$$C(\mathfrak{g}) = C_+(\mathfrak{g}) + \mathcal{E}(\mathfrak{g}), \quad (6.3)$$

задающее структуру алгебры Ли  $C_0(\mathfrak{g})$ . Оператор  $R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-)$  (см. формулу (1.24)) приводит к эллиптической  $r$ -матрице  $r^{\Lambda_2}(\lambda)$ . Линейное пространство  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$  является двойственным к алгебре Ли  $C_+(\mathfrak{g})$  относительно спаривания (1.13), и описанные в § 1 орбиты коприсоединенного действия алгебры  $C_+(\mathfrak{g})$  получают новую функциональную реализацию в пространстве  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ . В частности, простейшая орбита, отвечающая модели МГ, превращается в орбиту, описывающую модель Л—Л. Эти результаты принадлежат А. Г. Рейману и М. А. Семенову-Тян-Шанскому [4.29].

14) Простейшие матрицы  $L(\lambda)$ , удовлетворяющие фундаментальным скобкам Пуассона с рациональной  $r$ -матрицей, для классических алгебр Ли приведены в работе [4.30].

15) Аналитическое обоснование мультипликативного усреднения (3.12) для случая  $g = sl(2)$  и матрицы  $L(\lambda)$  модели РМГ было проведено в работе [4.30]. Бесконечное произведение (3.12) вычисляется явно и приводит к матрице  $\tilde{L}(\lambda)$  модели LSG из § III. 5.

16) Фундаментальные скобки Пуассона (3.2) в одном узле задают пуассонову структуру на группе Ли  $C(G)$ : элементы  $L(\lambda)$  при всех  $\lambda$  можно считать образующими кольца функций на группе  $C(G)$  и продолжить скобку Пуассона на него по «правилу Лейбница». Описанная скобка Пуассона является примером класса скобок Пуассона на группах Ли, введенного в работе [4.13]. Основное свойство таких пуассоновых структур состоит в том, что операция группового умножения является пуассоновым отображением. Это свойство формализует тот факт, что матрица монодромии  $T_N(\lambda)$  для решеточных моделей удовлетворяет тем же скобкам Пуассона, что и матрицы  $L_n(\lambda)$  (см. § III.1). Группа Ли с такой пуассоновой структурой называется пуассоновой группой Ли (или группой Гамильтона — Ли в работе [4.13]). Квадратичная скобка Пуассона, введенная в работе [4.8], доставляет один из примеров пуассоновой группы Ли [4.31].

17) Геометрическая теория интегрируемых решеточных моделей построена в работах [4.31], [4.60]; соответствующие пуассоновы подмногообразия и орбиты описаны В. Г. Дрифельдом (см. [4.60]).

18) Инволютивность алгебры функций Казимира  $I(g)$  по отношению к скобке Пуассона  $\{ , \}_0$  — «теорема инволютивности» — по существу содержится в работе [4.50]. Ее  $r$ -матричная формулировка приведена в [4.31].

19) Способ решения гамильтоновых уравнений движения (4.10), порожденных функциями Казимира и скобкой Пуассона  $\{ , \}_0$ , при помощи задачи о факторизации (4.16) в группе Ли  $G$  («теорема о факторизации») был предложен в работах [4.57—4.58]. Идея этого метода восходит к работе В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [4.15].

20) Конечномерные простые алгебры Ли приводят к интегрируемым системам, обобщающим модель Тода со свободными концами на случай произвольной системы корней; эти модели были введены в работе [4.39], где для них было получено представление Лакса. Решение соответствующих уравнений движения и исследование асимптотической динамики дано в работе [4.51].

21) Центральное расширение  $\tilde{\mathcal{G}}(g)$  алгебры токов  $C(g)$  (в случае если  $G$  — простая алгебра Ли) является примером алгебры Каца — Мути — аффинной алгебры Ли высоты 1 [4.48]. Ее введение мотивировано тем, что соответствующее коприсоединенное действие группы Ли  $\mathcal{G}(G)$  задается калибровочными преобразованиями и приводит к уравнениям движения в форме нулевой кривизны. Впервые это обстоятельство отмечено в работе [4.25], где эти алгебры также использовались для построения интегрируемых уравнений.

22) Введение спектрального параметра  $\lambda$  приводит к бесконечному числу независимых функций Казимира и, тем самым, позволяет строить содержательные примеры нелинейных уравнений, являющихся вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. Если  $g$  — конечномерная простая алгебра Ли, то с алгеброй токов  $C(g)$  (зависимость от  $x$  отсутствует) связан ряд интересных конечномерных интегрируемых систем: обобщенные периодические модели Тода, многомерные волчки в потенциальных полях и системы взаимодействующих волчков [4.5], [4.26], [4.29], [4.37], [4.57—4.58]. В этом случае теорема о факторизации немедленно приводит к теореме о линеаризации уравнений движения на якобиане спектральной кривой, т. е. алгебраической кривой, задаваемой уравнением  $\det(U(\lambda) - \mu) = 0$  [4.58]. Это связывает ли-алгебраический подход к интегрируемым уравнениям с теорией конечнозонного интегрирования и уравнениями Новикова [4.14], [4.22].

23) «Включение» зависимости от  $x$  можно рассматривать как «двумеризацию» конечномерных интегрируемых систем. Так, например, имеется естественная двумеризация периодических моделей Тода [4.20]; двумеризация волчков приводит к системам типа матричной модели Sine-Gordon (см. § I.8).

24) Если в уравнении нулевой кривизны

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \quad (6.4)$$

зависимость от  $t$  отсутствует (стационарный случай), то оно приобретает лаксов вид по отношению к матрице  $V(x, \lambda)$ :

$$\frac{dV}{dx} = [U, V]. \quad (6.5)$$

Ли-алгебраическая схема дает простую интерпретацию введенной в [4.4], [4.7] пуассоновой структуры для таких стационарных уравнений: она совпадает со скобкой Ли — Пуассона для конечномерной орбиты, проходящей через элемент  $V(x, \lambda)$  [4.27], [4.44]. Кроме того, можно рассмотреть совместную систему высших уравнений (6.4)

$$\frac{\partial U}{\partial t_n} - \frac{\partial V_n}{\partial x} + [U, V_n] = 0, \quad (6.6)$$

где для каждого уравнения введена своя временная переменная  $t_n$  (так что  $t = t_N$ ,  $V = V_N$ ; для модели НШ  $N=3$ ). Ввиду совместности системы (6.6) матрицы  $V_n(x, t_1, \dots, \lambda)$  удовлетворяют также уравнениям

$$\frac{\partial V_n}{\partial t_k} - \frac{\partial V_k}{\partial t_n} + [V_n, V_k] = 0. \quad (6.7)$$

Отсюда на многообразии стационарных решений ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) возникает совместная система уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t_n} = [V_n, V] \quad (6.8)$$

— уравнений Новикова, которые также являются гамильтоновыми по отношению к той же скобке Ли — Пуассона на орбите [4.27], [4.44].

25) Утверждение о том, что разные коциклы  $\omega_p$  приводят к различным пуассоновым структурам  $\{, \}_p$ , обслуживающим одну и ту же серию интегрируемых уравнений, содержится в работе [4.18].

26) Уравнения (6.6) являются гамильтоновыми и плотности  $h_n(x, t_1, \dots)$  их гамильтонианов на решениях уравнений движения удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial h_n}{\partial t_k} = \frac{\partial p_n^k}{\partial x}, \quad (6.9)$$

где  $p_n^k(x, t_1, \dots)$  — плотности гамильтонианов для уравнений (6.7). Плотности  $h_n$  можно выбрать таким образом (добавляя к ним, если необходимо, полные производные), что они и  $p_n^k$  порождаются производящей функцией  $\tau(x, t_1, \dots)$  в следующем смысле:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial x} \ln \tau, \\ p_n^k &= \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_n} \ln \tau \end{aligned} \quad (6.10)$$

[4.27], [4.44—4.45]. (В случае модели НШ плотности  $h_n$  следует выбирать согласно формуле (III.5.42) в части 1.) Функция  $\tau$  совпадает с известной  $\tau$ -функцией из работы японских авторов [4.40], которые вводили ее, исходя из теории представлений аффинных алгебр Ли. Первоначально  $\tau$ -функция в частном случае была определена в работе Р. Хироты [4.47] как решение некоторой системы билинейных уравнений (уравнений Хироты). Эти уравнения получили естественную интерпретацию в терминах теории представлений аффинных алгебр Ли [4.40], [4.48]. Другой подход к  $\tau$ -функции, основанный на аналитических свойствах решений уравнения вспомогательной линейной задачи, был предложен в работе [4.59].

27) Общая ли-алгебраическая схема из § 4 может быть применена не только к алгебре токсов, но и к алгебре символов псевдодифференциальных операторов [4.19], [4.36]. В результате пуассоновы структуры, введенные в [4.7], получают естественную интерпретацию. Процедура двумеризации, использующая 2-коцикл Маурера — Картана, в этом случае приводит к уравнениям типа Кадомцева — Петвиашвили [4.28].

28) Естественное объяснение поведения скобок Пуассона при одевающих преобразованиях основано на теории пуассоновых групп Ли. Именно, одевающие преобразования являются пуассоновыми относительно некоторой пуассоновой структуры на группе Ли  $C_0(G)$  [4.60]. Инфинитезимальные одевающие преобразования можно также определить и прямыми методами. Реализующие преобразования поля часто сопоставляют со «скрытыми симметриями»; они описаны в обзоре [4.42]. (Заметим, что эти векторные поля, вообще говоря, не гамильтоновы [4.60].)

29) Важным классом одевающих преобразований, которые могут быть заданы в явном виде, являются так называемые преобразования Бэклунда, введенные Бэклундом для уравнения Sine-Gordon [4.38] и часто встречающиеся в современной литературе по методу обратной задачи и теории солитонов [4.55].

30) Формуле (5.16) можно придать строгий смысл, если рассматривать для быстроубывающих граничных условий группу токов  $\mathcal{E}((G))$  с треугольными асимптотиками при  $x \rightarrow \pm\infty$  (сравни с соответствующими формулами для асимптотик матриц  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$  из § II.1 части I). Инварианты коприсоединенного действия в этом случае совпадают с минорами приведенной матрицы монодромии  $T(\lambda)$  (т. е. с коэффициентом  $a(\lambda)$  для модели НШ).

31) Утверждение о том, что скобка Пуассона  $\{, \}_{(1)}$  получается редукцией по Дираку [4.41] из скобки Ли — Пуассона  $\{, \}_{-1}$ , содержится в работе [4.24].

32) Понятие согласованных скобок Пуассона было введено в работе [4.53] и подробно изучено в [4.9—4.10] (отметим, что тождество Якоби для скобки Пуассона  $\{, \}_{(\alpha)}$  при всех  $\alpha$  вытекает из тождества Якоби при одном значении  $\alpha \neq 0$ ). Вывод тождества Якоби для скобок Пуассона  $\{, \}_{(k)}$ , приведенный в § 5, взят из работы [4.9].

33) Построение семейства функционалов  $I_n$  и иерархии согласованных скобок Пуассона  $\{, \}_{(k)}$ , данное в § 5, восходит к работе [4.53] (см. также [4.17]).

34) Для модели МГ также имеются  $\Lambda$ -оператор и иерархия пуассоновых структур. Соответствующая вторая скобка Пуассона  $\{, \}_{(1)}$  получается из скобки Ли — Пуассона

$$\{S_a(x), S_b(y)\}_{(1)} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \delta'(x - y) \quad (6.11)$$

редукцией на орбиту  $\vec{S}^2(x) = 1$ ; возникающий  $\Lambda$ -оператор совпадает с приведенным в работе [4.46].

35) Общая ли-алгебраическая схема из § 4 также приводит к интересным результатам, если в качестве алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  взять алгебру векторных полей на окружности и рассмотреть центральное расширение алгебры Ли  $C(\mathfrak{g})$  при помощи 2-коцикла Гельфанда — Фукса [4.6], приводящее к алгебре Ви-

расоро. В частности, вторая пуассонова структура с  $\Lambda$ -оператором для уравнения КдФ совпадает с соответствующей скобкой Ли—Пуассона [4.32].

36) Связь между основной и второй пуассоновыми структурами для уравнения КдФ устанавливается известным преобразованием Миуры [4.54]. Обобщение этого факта на уравнения в алгебре символов, связанные с дифференциальными операторами старших порядков, дано в работе [4.11]. Именно, по каждой аффинной алгебре Ли строится серия уравнений типа модифицированного уравнения КдФ и несколько серий уравнений типа КдФ, причем их решения связаны обобщенным преобразованием Миуры. Структура преобразования Миуры определяется диаграммой Дынкина аффинной алгебры Ли [4.12].

37) Другой подход к классификации интегрируемых уравнений в аргументах заданной функциональной форме предложен в работе [4.21], в которой используются классические методы теории преобразований Ли—Бэклунда.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Это заключение предназначено читателю, который прочел книгу до конца. Мы надеемся, что чтение основного текста и комментариев к отдельным главам убедительно показало ему, насколько тематика, связанная с солитонами и интегрируемыми уравнениями в частных производных, богата с математической точки зрения как идейно, так и технически. Действительно, в методе обратной задачи естественно переплелись различные области математики: дифференциальная геометрия, теория групп и алгебр Ли и их представлений, комплексный и функциональный анализ. Все они служат одной цели — классификации интегрируемых уравнений и описанию их решений. В результате такие традиционные разделы этих областей, как гамильтонов формализм, аффинные алгебры Ли или задача Римана, проявили себя в новом свете. Более того, развитие метода обратной задачи привело к новым задачам и новым структурам в этих областях. Достаточно напомнить общее понятие  $r$ -матрицы и его интерпретацию с гамильтоновой, теоретико-групповой и аналитической точек зрения. В этом и отражается современная тенденция в математике, когда на первый взгляд мало связанные теоретические области объединяются и взаимобогащаются при решении конкретных задач, имеющих важные физические приложения.

Еще в большей степени эта тенденция проявляется при обобщении методов, изложенных в этой книге, на модели квантовой механики и теории поля. Это обобщение активно развивалось в последние годы. Объединяющим объектом явилась опять (квантовая)  $R$ -матрица. Мы надеемся, что это направление вскоре будет отражено в монографии, подобной данной.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Введение

1. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега — де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система.— Функци. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18—27.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волны в нелинейных средах.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 1, с. 118—134.
3. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи./Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
4. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Квантовый метод обратной задачи.— ЭЧАЯ, 1982, т. 13, № 3, с. 501—541.
5. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. Квантование солитонов.— В кн.: Физика элементарных частиц. (Материалы XII Зимней школы Ленингр. ин-га ядерной физики.)— Л., 1977, с. 130—146.
6. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга — Бакстера.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129—160.
7. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга.— УМН, 1979, т. 34, № 5, с. 13—63.
8. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform.— SIAM, Philadelphia, 1981.
9. Bullough R. K., Caudrey P. J. (editors). Solitons.— Berlin — New York: Springer, 1980. (Русский перевод: Буллаф Р. К., Кодри П. Дж. Солитоны.— М.: Мир, 1983.)
10. Calogero F. (editor). Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform.— Research Notes in Mathematics, v. 26, London: Pitman, 1978.
11. Calogero F., Degasperis A. Spectral Transform and Solitons, volume I.— Amsterdam: North-Holland, 1982. (Русский перевод: Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны.— М.: Мир, 1985.)
12. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and Nonlinear Waves.— New York: Academic Press, 1982.
13. Eilenberger G. Solitons. Mathematical Method for Physicists.— Berlin: Springer, 1981.
14. Faddeev L. D., Korepin V. E. Quantum Theory of Solitons.— Physics Reports, 1978, v. 42C, № 1.
15. Faddeev L. D. A Hamiltonian interpretation of the inverse scattering method.— In: Solitons, edited by Bullough R. K., Caudrey P. J.— Berlin; New York: Springer, 1980, p. 339—354. (Русский перевод: Фаддеев Л. Д. Гамильтонова интерпретация метода обратного преобразования.— В кн.: Солитоны.— М.: Мир, 1983, с. 363—379).
16. Faddeev L. D. Quantum completely integrable models in field theory.— In: Mathematical Physics Review. Sect. C.: Math. Phys. Rev. 1. Harwood Academic 1980, v. 1, p. 107—155.
17. Faddeev L. D. Two-dimensional integrable models in quantum field theory.— Physica Scripta 1981, v. 24, № 5, p. 832—835.

18. Faddeev L. D. Recent development of QST.— In: Recent development in gauge theory and integrable systems.— Kyoto: Kyoto Univ. Research Inst. for Math. Sci., 1982, p. 53—71.
19. Faddeev L. D. Quantum scattering transformation.— In: Structural Elements in Particle Physics and Statistical Mechanics.— New York; London: Plenum Press, 1983, v. 82, p. 93—114. (Freiburg Summer Inst. on Theor. Physics 1981.)
20. Faddeev L. D. Integrable models in 1+1-dimensional quantum field theory.— In: Les Houches, Session XXXIX, 1982, Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Zuber J.—B., Stora R. (editors), p. 563—608. Elsevier Science Publishers, 1984.
21. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg — de Vries equation.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, № 19, p. 1095—1097.
22. Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. Recent developments.— Lecture Notes in Physics.— Berlin — New York: Springer, 1982, v. 151, p. 61—119.
23. Lamb G. L., Jr. Elements of Soliton Theory.— New York: Wiley, 1980. (Русский перевод: Лэмб Дж. Элементы теории солитонов.— М.: Мир, 1984).
24. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.— Comm. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, № 5, p. 467—490. (Русский перевод: Лэкс П. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны.— сб. Математика, 1969, т. 13, № 15, с. 128—150.)
25. Longren K., Scott A. (editors). Solitons in Action.— New York: Academic Press, 1978. (Русский перевод: Солитоны в действии.— М.: Мир, 1981.)
26. Manakov S. V., Zakharov V. E. (editors). Soliton Theory. Proceedings of the Soviet — American Symposium on Soliton Theory.— Physica D, 1981, v. 3D, № 1+2.
27. Miura R. (editor). Bäcklund transformations.— Lecture Notes in Math.— Berlin: Springer, 1976, v. 515.
28. Takhtajan L. A. Integrable models in classical and quantum field theory.— In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1983.— Warszawa, North-Holland, 1984, p. 1331—1346.

## ЧАСТЬ I

### Глава I

- 1.1. Герджиков В. С., Кулиш П. П. Вполне интегрируемые гамилтоновы системы, связанные с несамосопряженным оператором Дирака.— Болг. физ. ж., 1978, т. 5, № 4, с. 337—348.
- 1.2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 1, с. 118—134.
- 1.3. Захаров В. Е., Шабат А. Б. О взаимодействии солитонов в устойчивой среде.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, № 5, с. 1627—1639.
- 1.4. Захаров В. Е., Михайлов А. В. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, № 6, с. 1953—1973.
- 1.5. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II.— Функции анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 3, с. 13—22.
- 1.6. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга.— Теор. и мат. физика, 1979, т. 38, № 1, с. 26—35.
- 1.7. Крейн М. Г. К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем.— ДАН СССР, 1956, т. 111, № 6, с. 1167—1170.

- 1.8. Левин Б. Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка.— ДАН СССР, 1956, т. 106, № 2, с. 187—190.
- 1.9. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.
- 1.10. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. I.— Функци. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 54—66.
- 1.11. Фролов И. С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 1, с. 44—47.
- 1.12. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transform— Fourier analysis for nonlinear problems.— Stud. Appl. Math., 1974. v. 53, № 4, p. 249—315.
- 1.13. Asano N., Kato Y. Non-self-adjoint Zakharov—Shabat operator with a potential of the finite asymptotic values. I. Direct spectral and scattering problems.— J. Math. Phys., 1981, v. 22, № 12, p. 2780—2793.

## Глава II

- 2.1. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.— М.: Наука, 1970.
- 2.2. Гасымов М. Г., Левитан Б. М. Обратная задача для системы Дирака.— ДАН СССР, 1966, т. 167, № 5, с. 967—970.
- 2.3. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1951, т. 15, № 4, с. 309—360.
- 2.4. Герджиков В. С., Кулиш П. П. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с несамосопряженным оператором Дирака.— Болг. физ. ж., 1978, т. 5, № 4, с. 337—348.
- 2.5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов.— УМН, 1958, т. 13, № 2, с. 3—72.
- 2.6. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 1, с. 118—134.
- 2.7. Захаров В. Е., Шабат А. Б. О взаимодействии солитонов в устойчивой среде.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, № 5, с. 1627—1639.
- 2.8. Захаров В. Е., Манаков С. В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейной среде.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, № 5, с. 1654—1673.
- 2.9. Захаров В. Е., Манаков С. В. Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, № 1, с. 203—215.
- 2.10. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II.— Функци. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 3, с. 13—22.
- 2.11. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
- 2.12. Итс А. Р. Асимптотика решений нелинейного уравнения Шредингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1981, т. 261, № 1, с. 14—18.
- 2.13. Итс А. Р. Теорема Лиувилля и метод обратной задачи.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 113—125.
- 2.14. Итс А. Р. „Изомонодромные“ решения уравнений нулевой кривизны.— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1985, т. 48, № 9 с. 530—565.
- 2.15. Крейн М. Г. Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка.— ДАН СССР, 1954, т. 97, № 1, с. 21—24.

- 2.16. Крейн М. Г. Об определении потенциала частицы по ее  $S$ -функции.— ДАН СССР, 1955, т. 105, № 3, с. 433—436.
- 2.17. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183—208.
- 2.18. Левитан Б. М. Достаточные условия разрешимости обратной задачи теории рассеяния на всей прямой.— Мат. сб., 1979, т. 108, № 3, с. 350—357.
- 2.19. Марченко В. А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн.— ДАН СССР, 1955, т. 104, № 5, с. 695—698.
- 2.20. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.
- 2.21. Марченко В. А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры.— Киев: Наукова думка, 1985.
- 2.22. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.— М.: Наука, 1968.
- 2.23. Новокшенов В. Ю. Асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 799—802.
- 2.24. Потапов В. П. Мультипликативная структура  $J$ -нерастягивающих матриц-функций.— Труды Моск. мат. о-ва, 1955, т. 4, с. 125—236.
- 2.25. Тахтаджян Л. А. Гамильтоновы системы, связанные с уравнением Дирака.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1973, т. 37, с. 66—76.
- 2.26. Фаддеев Д. К., Соинский И. С. Сборник задач по высшей алгебре.— М.: Наука, 1977.
- 2.27. Фаддеев Л. Д. О связи  $S$ -матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера.— ДАН СССР, 1958, т. 121, № 1, с. 63—66.
- 2.28. Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния.— УМН, 1959, т. 14, № 4, с. 57—119.
- 2.29. Фаддеев Л. Д. Свойства  $S$ -матрицы одномерного уравнения Шредингера.— Тр. мат. ин-та АН СССР, 1964, т. 73, с. 314—336.
- 2.30. Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1974, т. 3, с. 93—180. (Итоги науки и техники.)
- 2.31. Фролов И. С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 1, с. 44—47.
- 2.32. Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений.— Функц. анализ и его прилож., 1975, т. 9, № 3, с. 75—78.
- 2.33. Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния.— Диф. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1824—1834.
- 2.34. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems.— Stud. Appl. Math., 1974, v. 53, № 4, p. 249—315.
- 2.35. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of  $P$ -type. I.— J. Math. Phys., 1980, v. 21, № 4, p. 715—721.
- 2.36. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of  $P$ -type II.— J. Math. Phys., 1980, v. 21, № 5, p. 1006—1015.
- 2.37. Ablowitz M. J. Remarks on nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type.— Physica D, 1981, v. 3D, № 1+2, p. 129—141.
- 2.38. Asano N., Kato Y. Non-self-adjoint Zakharov—Shabat operator with a potential of the finite asymptotic values. I. Direct spectral and scattering problems.— J. Math. Phys., 1981, v. 22, № 12, p. 2780—2793.
- 2.39. Asano N., Kato Y. Non-self-adjoint Zakharov—Shabat operator with a potential of the finite asymptotic values. II. Inverse Problem.— J. Math. Phys., 1984, v. 25, № 3, p. 570—588.

- 2.40. Deift P., Trubowitz E. Inverse scattering on the line.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1979, v. 32, p. 121—251.
- 2.41. Flashka H., Newell A. C. Monodromy and spectrum-preserving deformations. I.— *Comm. Math. Phys.*, 1980, v. 76, № 1, p. 65—116.
- 2.42. Fokas A. S., Ablowitz M. J. Linearization of the Korteweg—de Vries and Painleve II equations.— *Phys. Rev. Lett.*, 1981, v. 47, № 16, p. 1096—1100.
- 2.43. Jimbo M., Miwa T., Ueno K. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and  $\tau$ -function.— *Physica D*, 1981, v. 2D, № 2, p. 306—352.
- 2.44. Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II.— *Physica D*, 1981, v. 2D, № 3, p. 407—448.
- 2.45. Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III.— *Physica D*, 1981, v. 4D, № 1, p. 26—46.
- 2.46. Kay I., Moses H. E. The determination of the scattering potential from the spectral measure function. I. Continuous spectrum.— *Nuovo Cimento*, 1955, v. 2, № 5, p. 917—961.
- 2.47. Kay I., Moses H. E. The determination of the scattering potential from the spectral measure function. II. Point eigenvalues and proper eigenfunctions.— *Nuovo Cimento*, 1956, v. 3, № 1, p. 66—84.
- 2.48. Kay I., Moses H. E. The determination of the scattering potential from the spectral measure function. III. Calculation of the scattering potential from the scattering operator for the one dimensional Schrödinger equation.— *Nuovo Cimento*, 1956, v. 3, № 2, p. 276—304.
- 2.49. Mikhailov A. V. The reduction problem and the inverse scattering method.— *Physica D*, 1981, v. 3D, № 1+2, p. 73—117.
- 2.50. Quispel G. R. W., Capel H. W. The anisotropic Heisenberg spin chain and the nonlinear Schrödinger equation.— *Physica A*, 1983, v. 117A, № 1, p. 76—102.
- 2.51. Ueno K. Monodromy preserving deformation and its application to soliton theory.— *Proc. Japan Acad., ser. A*, 1980, v. 56, № 3, p. 103—108.
- 2.52. Ueno K. Monodromy preserving deformation and its application to soliton theory. II.— *Proc. Japan Acad., ser. A*, 1980, v. 56, № 5, p. 210—215.

### Глава III

- 3.1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
- 3.2. Белавин А. А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, т. 14, № 4, с. 18—26.
- 3.3. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, т. 16, № 3, с. 1—29.
- 3.4. Богоявленский О. И., Новиков С. П. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, т. 10, № 2, с. 9—12.
- 3.5. Богоявленский О. И. Об интегралах высших стационарных уравнений КдФ и собственных числах оператора Хилла.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, т. 10, № 2, с. 9—12.
- 3.6. Веселов А. П., Новиков С. П. О скобках Пуассона, согласованных с алгебраической геометрией и динамикой Кортвега—де Фриза на множестве конечнозонных потенциалов.— *ДАН СССР*, 1982, т. 266, № 3, с. 533—537.
- 3.7. Веселов А. П., Новиков С. П. Скобки Пуассона и комплексные торы.— *Тр. мат. ин-та АН СССР*, 1984, т. 165, с. 49—61.

- 3.8. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза.— УМН, 1975, т. 30, № 5, с. 67—100.
- 3.9. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Интегрируемые нелинейные уравнения и теорема Лиувилля.— Функци. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 1, с. 8—20.
- 3.10. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы.— Функци. анализ и его прилож., 1980, т. 14, № 3, с. 71—74.
- 3.11. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли.— Функци. анализ и его прилож., 1981, т. 15, № 3, с. 23—40.
- 3.12. Герджиков В. С., Христов Е. Х. Об эволюционных уравнениях, решаемых методом обратной задачи. I. Спектральная теория.— Болг. физ. ж., 1980, т. 7, № 1, с. 28—41.
- 3.13. Герджиков В. С., Христов Е. Х. Об эволюционных уравнениях, решаемых методом обратной задачи. II. Гамильтонова структура и преобразование Бэклунда.— Болг. физ. ж., 1980, т. 7, № 2, с. 119—133.
- 3.14. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодический и условно периодический аналог многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 6, с. 2131—2144.
- 3.15. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55—136.
- 3.16. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.
- 3.17. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения.— УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11—80.
- 3.18. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Алгеброгеометрические скобки Пуассона для вещественных конечнозонных решений уравнения sine-Gordon нелинейного уравнения Шредингера.— ДАН СССР, 1982, т. 267, № 6, с. 1295—1300.
- 3.19. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система.— Функци. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18—27.
- 3.20. Захаров В. Е., Манаков С. В. О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера.— Теор. и мат. физика, 1974, т. 19, № 3, с. 332—343.
- 3.21. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи./Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
- 3.22. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Квантовый метод обратной задачи.— Физика ЭЧАЯ, 1982, т. 13, № 3, с. 501—541.
- 3.23. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и  $N$ -солитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза.— Теор. и мат. физика, 1975, т. 23, № 1, с. 51—68.
- 3.24. Итс А. Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений.— Вестник ЛГУ, сер. мат.-мех.-астр., 1976, № 7, вып. 2, с. 39—46.
- 3.25. Итс А. Р., Котляров В. П. Об одном классе решений нелинейного уравнения Шредингера.— ДАН УССР, сер. А, 1976, № 11, с. 965—968.
- 3.26. Котляров В. П. Периодическая задача для нелинейного уравнения Шредингера.— В кн.: Вопросы математической физики и функционального анализа (материал научных семинаров), вып. 1.— Киев: Наукова думка, 1976, с. 121—131.
- 3.27. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183—208.

- 3.28. Кулиш П. П., Манаков С. В., Фаддеев Л. Д. Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера.— Теор. и мат. физика, 1976, т. 28, № 1, с. 38—45.
- 3.29. Кулиш П. П., Рейман А. Г. Иерархия симплектических форм для уравнений Шредингера и Дирака на прямой.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1978, т. 77, с. 134—147.
- 3.30. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга — Бакстера.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129—160.
- 3.31. Кулиш П. П. Порождающие операторы интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.— В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 12. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 96, с. 105—112.
- 3.32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. т. 1. Механика.— М.: Наука, 1973.
- 3.33. Левитан Б. М. Почти периодичность бесконечно-зонных потенциалов.— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1981, т. 45, № 2, с. 291—320.
- 3.34. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля.— М.: Наука, 1984.
- 3.35. Марченко В. А. Периодическая задача Кортвега — де Фриса.— Мат. сборник, 1974, т. 95, № 3, с. 331—356.
- 3.36. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.
- 3.37. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортвега — де Фриса. I.— Функци. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 54—66.
- 3.38. Новиков С. П. Алгебро-топологический подход в проблемах вещественности. Вещественные переменные действия в теории конечнзонных решений уравнения Sine-Gordon.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 177—196.
- 3.39. Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля.— ДАН СССР, 1978, т. 243, № 6, с. 1430—1433.
- 3.40. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. I.— Теор. и мат. физика, 1979, т. 40, № 2, с. 194—220.
- 3.41. Склянин Е. К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера.— ДАН СССР, 1979, т. 244, № 6, с. 1337—1341.
- 3.42. Склянин Е. К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 55—128.
- 3.43. Тахтаджян Л. А. Гамильтоновы системы, связанные с уравнением Дирака.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1973, т. 37, с. 66—76.
- 3.44. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга.— УМН, 1979, т. 34, № 5, с. 13—63.
- 3.45. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Простая связь геометрического и гамильтонова представлений, интегрируемых нелинейных уравнений.— В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, т. 115, с. 264—273.
- 3.46. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems.— Stud. Appl. Math., 1974, v. 53, № 4, p. 249—315.
- 3.47. Alber S. I. On stationary problems for equations of Korteweg — de Vries type.— Comm. Pure Appl. Math., 1981, v. 34, № 2, p. 259—272.
- 3.48. Baxter R. J. Partition function of the eight-vertex lattice model.— Ann. of Physics (N. Y.), 1972, v. 70, № 1, p. 193—228.

- 3.49. Baxter R. J. Exactly solved models in statistical mechanics.—London: Academic Press, 1982 (Русский перевод: Бэксстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике.—М.: Мир, 1985.)
- 3.50. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform. I.—Nuovo Cimento, 1976, v. 32B, № 2, p. 201—242.
- 3.51. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform. II.—Nuovo Cimento, 1977, v. 39B, № 1, p. 1—54.
- 3.52. Dirac P. A. M. Lectures on quantum mechanics.—Belfer Grad. School of Science, Yeshiva University, N.-Y., 1964. (Русский перевод: Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике.—М.: Мир, 1968.)
- 3.53. Faddeev L. D. Quantum completely integrable models in field theory.—In: Mathematical Physics Review. Sect. C.: Math. Phys. Rev. 1. Harwood Academic, 1980, v. 1, p. 107—155.
- 3.54. Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Poisson structure for the KdV equation.—Lett. Math. Phys., 1985, v. 10, № 2&3, p. 231—236.
- 3.55. Flashka H., McLoughlin D. Canonically conjugate variables for the Korteweg — de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions.—Prog. of Theor. Phys., 1976, v. 55, № 2, p. 438—456.
- 3.56. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Korteweg — de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution.—Comm. Pure Appl. Math., 1974, v. 27, № 1, p. 97—133.
- 3.57. Hermite Ch. Sur l'équation de Lamé.—Ch. Cours d'analyse de l'École polytechn. Paris, 1872—1873, 32-e leçon; Oeuvres, т. III, p. 118—122, Paris, 1912.
- 3.58. Izergin A. G., Korepin V. E. The inverse scattering method approach to the quantum Shabat — Mikhailov model.—Comm. Math. Phys., 1981, v. 79, № 3, p. 303—316.
- 3.59. Kaup D. J. Closure of the squared Zakharov — Shabat eigenstates.—J. Math. Anal. Appl., 1976, v. 54, № 3, p. 849—864.
- 3.60. Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. Recent developments.—Lecture Notes in Physics, Berlin—New York: Springer, 1982, v. 151, p. 61—119.
- 3.61. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation.—Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, № 1, p. 141—188.
- 3.62. Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation.—J. Math. Phys., 1978, v. 19, № 5, p. 1156—1162.
- 3.63. McKean H. P., van Moerbeke P. The spectrum of Hill's equation.—Invent. Math., 1975, v. 30, № 3, p. 217—274.
- 3.64. McKean H. P., Trubowitz E. Hill's operator and hyperelliptic-function theory in the presence of infinitely many branch points.—Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, № 2, p. 143—226.
- 3.65. Newell A. C. Near-integrable systems, nonlinear tunneling and solitons in slowly changing media.—In: Calogero F. (editor). Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform.—Research Notes in Mathematics, v. 26.—London: Pitman, 1978, p. 127—179.
- 3.66. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau — Lifshitz equation.—Preprint LOMI, E-3-79, Leningrad 1979.

## ЧАСТЬ II

### Глава I

- 1.1. Адамс Д. Лекции по группам Ли.—М.: Наука, 1979.
- 1.2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1974.
- 1.3. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики.—Изв. АН СССР (сер. мат.), 1984, т. 48, № 5, с. 883—938.



- 1.4. Боровик А. Е., Робук В. Н. Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау — Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией. — Теор. и мат. физика, 1981, т. 46, № 3, с. 371—381.
- 1.5. Будагов А. С., Тахтаджян Л. А. Нелинейная одномерная модель классической теории поля с внутренними степенями свободы. — ДАН СССР, 1977, т. 235, № 4, с. 805—808.
- 1.6. Будагов А. С. Вполне интегрируемая модель классической теории поля с нетривиальным взаимодействием частиц в двумерном пространстве-времени. — В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1978, т. 77, с. 24—56.
- 1.7. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления группы  $SL(2, R)$ , где  $R$  — кольцо функций. — УМН, 1973, т. 28, № 5, с. 83—128.
- 1.8. Веселов А. П. Уравнение Ландау — Лифшица и интегрируемые системы классической механики. — ДАН СССР, 1983, т. 270, № 5, с. 1094—1097.
- 1.9. Веселов А. П., Тахтаджян Л. А. Интегрируемость уравнений Новикова для главных киральных полей с многозначным лагранжианом. — ДАН СССР, 1984, т. 279, № 5, с. 1097—1100.
- 1.10. Владимиров В. С., Волович И. В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений. — Теор. и мат. физика, 1985, т. 62, № 1, с. 3—29.
- 1.11. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Обобщенные функции. (Выпуск 6.) Теория представлений и автоморфные функции. — М.: Наука, 1966.
- 1.12. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриса. — УМН, 1975, т. 30, № 5, с. 67—100.
- 1.13. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Резольвента и гамильтоновы системы. — Функци. анализ и его прилож., 1977, т. 11, № 2, с. 11—27.
- 1.14. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Уравнения типа Кортевега — де Фриса и простые алгебры Ли. — ДАН СССР, 1981, т. 258, № 1, с. 11—16.
- 1.15. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега — де Фриса. — В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники.) — М.: ВИНТИ, 1984, т. 24, с. 81—180.
- 1.16. Дрюма В. С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриса (КдВ). — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, № 12, с. 753—755.
- 1.17. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
- 1.18. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега — де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система. — Функци. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18—27.
- 1.19. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Полное описание решений « $\sin$ -Gordon» уравнения. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1334—1337.
- 1.20. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I. — Функци. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 43—53.
- 1.21. Захаров В. Е., Манакон С. В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейной среде. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, № 5, с. 1654—1673.
- 1.22. Захаров В. Е., Михайлов А. В. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, № 6, с. 1953—1973.
- 1.23. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II. — Функци. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 3, с. 13—22.

- 1.24. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга.—Теор. и мат. физика, 1979, т. 38, № 1, с. 26—35.
- 1.25. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи/Под редакцией С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
- 1.26. Жибер А. В., Шабат А. Б. Уравнения Клейна—Гордона с нетривиальной группой.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1103—1106.
- 1.27. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шредингера.— ДАН СССР, 1981, т. 259, № 1, с. 76—79.
- 1.28. Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП). I.— Функци. анализ и его прилож., 1978, т. 12, № 4, с. 41—52.
- 1.29. Кричевер И. М. Аналог формулы Даламбера для уравнений главного поля и уравнения sine-Gordon.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 288—292.
- 1.30. Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые.— В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники.) — М.: ВИНТИ, 1983, т. 23, с. 79—136.
- 1.31. Кулиш П. П., Рейман А. Г. Гамильтонова структура полиномиальных пучков.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. V. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1983, т. 123, с. 67—76.
- 1.32. Манаков С. В. К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, № 2, с. 505—516.
- 1.33. Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 2, с. 543—555.
- 1.34. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела.— Функци. анализ и его прилож., 1976, т. 10, № 4, с. 93—94.
- 1.35. Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с. 443—448.
- 1.36. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли.— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1978, т. 42, № 2, с. 396—415.
- 1.37. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза. I.— Функци. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 54—66.
- 1.38. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— УМН, 1982, т. 37, № 5, с. 3—49.
- 1.39. Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости.— Функци. анализ и его прилож., 1981, т. 15, № 2, с. 83—85.
- 1.40. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А., Френкель И. Б. Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 802—804.
- 1.41. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 6, с. 1310—1314.
- 1.42. Рейман А. Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 3—54.
- 1.43. Рейман А. Г. Единая гамильтонова система на полиномиальных пучках и структура стационарных задач.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 4. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1983, т. 131, с. 118—127.
- 1.44. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера.— Функци. анализ и его прилож., 1982, т. 16, № 4, с. 27—34.
- 1.45. Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Локальные

- гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке.—Теор. и мат. физика, 1983, т. 57, № 2, с. 163—181.
- 1.46. Тахтаджян Л. А. Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах.—ЖЭТФ, 1974, т. 66, № 2, с. 476—489.
  - 1.47. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля.—Теор. и мат. физика, 1974, т. 21, № 2, с. 160—174.
  - 1.48. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Простая связь геометрического и гамильтонова представлений интегрируемых нелинейных уравнений.— В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, т. 115, с. 264—273.
  - 1.49. Чередник И. В. Локальные законы сохранения главных киральных полей ( $d=1$ ).—Теор. и мат. физика, 1979, т. 38, № 2, с. 179—185.
  - 1.50. Чередник И. В. Законы сохранения и элементы теории рассеяния для главных киральных полей ( $d=1$ ).—Теор. и мат. физика, 1979, т. 41, № 2, с. 236—244.
  - 1.51. Чередник И. В. Алгебраические аспекты двумерных киральных полей. I.— В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники).— М.: ВИНТИ, 1981, т. 17, с. 175—218.
  - 1.52. Чередник И. В. Об определении  $\tau$ -функций для обобщенных аффинных алгебр Ли.— Функци. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 3, с. 93—95.
  - 1.53. Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений.— Функци. анализ и его прилож., 1975, т. 9, № 3, с. 75—78.
  - 1.54. Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния.— Диф. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1824—1834.
  - 1.55. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Method for solving the Sine-Gordon equation.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, № 25, p. 1262—1264.
  - 1.56. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transform— Fourier analysis for nonlinear problems.— Stud. Appl. Math., 1974, v. 53, № 4, p. 249—315.
  - 1.57. Ablowitz M. J., Ladik J. F. Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, № 6, p. 1011—1018.
  - 1.58. Ablowitz M. J., Yan Yaakov D., Fokas A. S. On the inverse scattering transform for Kadomtsev—Petviashvili equation.— Stud. Appl. Math., 1983, v. 69, № 2, p. 135—143.
  - 1.59. Adler M., van Moerbeke P. Completely integrable systems. Euclidean Lie algebras and curves.— Adv. Math., 1980, v. 38, № 2, p. 267—317.
  - 1.60. Buslaev V. S., Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Scattering theory for the Korteweg—de Vries equation and its Hamiltonian interpretation.— Physica D, 1986, v. 18D, № 1, p. 255—256.
  - 1.61. Date E., Kashiwara M., Miwa T. Vertex operators and  $\tau$ -functions. Transformation groups for soliton equations. II.— Proc. Japan Acad., 1981, v. 57, Ser. A, № 8, p. 387—392.
  - 1.62. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Operator approach to the Kadomtsev—Petviashvili equation. Transformation groups for soliton equations. III.— J. Phys. Soc. Japan, 1981, v. 50, № 11, p. 3806—3812.
  - 1.63. Dodd R. K., Bullough R. K. Polynomial conserved densities for the Sine-Gordon equations.— Proc. Roy. Soc. (London), 1977, v. A 352, № 1671, p. 481—503.
  - 1.64. Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Poisson structure for the KdV equation.— Lett. Math. Phys., 1985, v. 10, № 2&3, p. 183—188.
  - 1.65. Faddeev L. D., Reshetikhin N. Yu. Integrability of the principal chiral field model in  $1 \times 1$  dimension.— Ann. Phys. (N. Y.), 1985, v. 167, № 2, p. 215—232.
  - 1.66. Flaschka H. The Toda lattice. II. Existence of integrals.— Phys. Rev., 1974, v. B9, № 4, p. 1924—1925.

- 1.67. Fiaschka H. On the Toda lattice. II. Inverse transform solution.—*Prog. Theor. Phys.*, 1974, v. 51, № 3, p. 703—716.
- 1.68. Fokas A. C., Ablowitz M. J. On the inverse scattering of the time dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev—Petviashvili (I) equation.—*Stud. Appl. Math.*, 1983, v. 69, № 3, p. 211—228.
- 1.69. Fordy A. P., Kulish P. P. Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras.—*Comm. Math. Phys.*, 1983, v. 89, № 3, p. 427—443.
- 1.70. Frenkel I. B., Кас V. G. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models.—*Invent. Math.*, 1980, v. 62, № 1, p. 23—66.
- 1.71. Gardner C. S. Korteweg—de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg—de Vries equation as a Hamiltonian system.—*J. Math. Phys.* 1971, v. 12, № 8, p. 1548—1551.
- 1.72. Gerdjikov V. S., Ivanov M. I., Kulish P. P. Expansions over the «squared» solutions and difference evolution equations.—*J. Math. Phys.*, 1984, v. 25, № 1, p. 25—34.
- 1.73. Како F., Mugibayashi N. Complete integrability of general nonlinear differential-equation solvable by the inverse method. II.—*Prog. Theor. Phys.*, 1979, v. 61, № 3, p. 776—790.
- 1.74. Lakshmanan M. Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system.—*Phys. Lett.*, 1977, v. 61A, № 1, p. 53—54.
- 1.75. Лакс P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.—*Comm. Pure and Appl. Math.*, 1968, v. 21, № 5, p. 467—490. (Русский перевод: Лэкс П. Интегралы нелинейных уравнений и уединенные волны. Сб. Математика, 1969, т. 13, № 15, с. 128—150.)
- 1.76. Leznov A. N., Saveliev M. A. Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations  $\chi_{a\bar{z}\bar{z}} = (\exp K \chi)_a$  and its integrability.—*Lett. Math. Phys.*, 1979, v. 3, № 5, p. 489—494.
- 1.77. Манакoв S. V. The inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation and Kadomtsev—Petviashvili equation.—*Physica D*, 1981, v. 3D, № 1+2, p. 420—427.
- 1.78. Mikhailov A. V. The reduction problem and the inverse scattering method.—*Physica D*, 1981, v. 3D, № 1+2, p. 73—117.
- 1.79. Mikhailov A. V., Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Two-dimensional generalized Toda lattice.—*Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 79, № 4, p. 473—488.
- 1.80. Newell A. C. The general structure of integrable evolution equations.—*Proc. Royal Soc. (London)*, 1979, v. A365, № 1722, p. 283—311.
- 1.81. Pohlmeyer K. Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints.—*Comm. Math. Phys.*, 1976, v. 46, № 3, p. 207—221.
- 1.82. Ramadas T. R. The Wess—Zumino term and fermionic solitons.—*Comm. Math. Phys.*, 1984, v. 93, № 3, p. 355—365.
- 1.83. Рейман A. G., Семенов-Тянь-Шанский M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. I.—*Invent. math.*, 1979, v. 54, № 1, p. 81—100.
- 1.84. Segal G. Unitary representations of some infinite dimensional groups.—*Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 80, № 3, p. 301—342.
- 1.85. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau—Lifshitz equation.—*Preprint LOMI E-3-79, Leningrad*, 1979.
- 1.86. Такhtajan L. A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method.—*Phys. Lett.*, 1977, v. 64A, № 2, p. 235—237.
- 1.87. Toda M. Waves in nonlinear lattice.—*Proc. Theor. Phys. Suppl.*, 1970, № 45, p. 174—200.
- 1.88. Volterra V. *Leçons sur la théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie.*—Paris: Gauthier-Villars, 1931.
- 1.89. Wess J., Zumino B. Consequences of anomalous Ward identities.—*Phys. Lett.*, 1971, v. 37B, № 1, p. 95—97.
- 1.90. Wilson G. Commuting flows and conservation laws for Lax equations.—*Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1979, v. 86, № 1, p. 131—143.

- 1.91. Wilson G. On two constructions of conservation laws for Lax equations.— *Quart. J. Math. Oxford*, 1981, v. 32, № 128, p. 491—512.
- 1.92. Witten E. Global aspects of current algebra.— *Nucl. Phys.*, 1983, v. B223, № 2, p. 422—432.
- 1.93. Witten E. Non-abelian bosonization in two dimensions.— *Comm. Math. Phys.*, 1984, v. 92, № 4, p. 455—472.

#### Глава II

- 2.1. Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений. I.— *Теор. и мат. физика*, 1982, т. 53, № 2, с. 163—180.
- 2.2. Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений. II.— *Теор. и мат. физика*, 1983, т. 54, № 1, с. 23—37.
- 2.3. Аркадьев В. А. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений. III.— *Теор. и мат. физика*, 1984, т. 58, № 1, с. 38—49.
- 2.4. Белоколот Е. Д., Энольский В. З. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния.— *УМН*, 1982, т. 37, № 4, с. 89.
- 2.5. Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау—Лифшица.— *ДАН СССР*, 1983, т. 272, № 6, с. 1293—1298.
- 2.6. Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. Уравнение Ландау—Лифшица. Теория точных решений (часть I).— *Предпринт ДонФТИ-84-6 (81)*, Донецк 1984.
- 2.7. Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. Уравнение Ландау—Лифшица. Теория точных решений (часть II).— *Предпринт ДонФТИ-84-7 (82)*, Донецк 1984.
- 2.8. Бобенко А. И. Уравнение Ландау—Лифшица. Процедура «одевания». Элементарные возбуждения.— В кн.: *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. V. Зап. науч. семин. ЛОМИ*, 1983, т. 123, с. 58—66.
- 2.9. Бобенко А. И. Вещественные алгебро-геометрические решения уравнения Ландау—Лифшица в  $\tau$ -функциях Прима.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, т. 19, № 1, с. 6—19.
- 2.10. Борисов А. Б. Многосолитонные решения уравнений неизотропного магнетика.— *ФММ*, 1983, т. 55, № 2, с. 230—234.
- 2.11. Боровик А. Е., Робук В. Н. Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау—Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией.— *Теор. и мат. физика*, 1981, т. 46, № 3, с. 371—381.
- 2.12. Будагов А. С. Вполне интегрируемая модель классической теории поля с нетривиальным взаимодействием частиц в двумерном пространстве-времени.— В кн.: *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ*, 1978, т. 77, с. 24—56.
- 2.13. Веселов А. П. Уравнение Ландау—Лифшица и интегрируемые системы классической механики.— *ДАН СССР*, 1983, т. 270, № 5, с. 1094—1097.
- 2.14. Владимиров В. С., Волович И. В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений.— *Теор. и мат. физика*, 1985, т. 62, № 1, с. 3—29.
- 2.15. Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon.— *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, т. 16, № 1, с. 27—43.
- 2.16. Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы.— В кн.: *Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники.)— М.: ВИНТИ*, 1983, т. 23, с. 33—78.
- 2.17. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега—де Фриса—

- вполне интегрируемая гамильтонова система.— Функци. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18—27.
- 2.18. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Полное описание решений «*sin-Gordon*» уравнения.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1334—1337.
- 2.19. Захаров В. Е., Манакон С. В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейной среде.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, № 5, с. 1654—1673.
- 2.20. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга.— Теор. и мат. физика, 1979, т. 38, № 1, с. 26—35.
- 2.21. Итс А. Р. О конечнозонных решениях уравнения *Sine-Gordon*.— Изложение см.: Matveev V. B. Abelian functions and solitons.— Preprint of Wrocław university, 1976, № 373.
- 2.22. Итс А. Р., Петров В. Э. «Изомонодромные» решения уравнения *sine-Gordon* и временная асимптотика его быстроубывающих решений.— ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1302—1306.
- 2.23. Козел В. А., Котляров В. П. Почти-периодические решения уравнения  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ .— ДАН УССР, 1976, сер. А, № 10, с. 878—881.
- 2.24. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183—208.
- 2.25. Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые.— В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники.)— М.: ВИНТИ, 1983, т. 23, с. 79—136.
- 2.26. Кулиш П. П. Факторизация классической и квантовой *S*-матриц и законы сохранения.— Теор. и мат. физика, 1976, т. 26, № 2, с. 198—205.
- 2.27. Кулиш П. П., Рейман А. Г. Иерархия симплектических форм для уравнений Шредингера и Дирака на прямой.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1978, т. 77, с. 134—147.
- 2.28. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга — Бакстера.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129—160.
- 2.29. Кулиш П. П. Рассеяние солитонов с внутренними степенями свободы.— В сб.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. II Международный семинар, Протвино, 1979, с. 463—470.
- 2.30. Кулиш П. П. О переменных типа действие — угол для многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера.— В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, т. 115, с. 126—136.
- 2.31. Манакон С. В. Пример вполне интегрируемого нелинейного волнового поля с нетривиальной динамикой (модель Ли).— Теор. и мат. физика, 1976, т. 28, № 2, с. 172—179.
- 2.32. Манакон С. В. К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, № 2, с. 505—516.
- 2.33. Новиков С. П. Алгебро-топологический подход в проблемах вещественности. Вещественные переменные действия в теории конечнозонных решений уравнения *Sine-Gordon*.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 177—196.
- 2.34. Новокшенов В. Ю. Асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши для двумерного обобщения цепочки Тоды.— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1984, т. 48, № 2, с. 372—410.
- 2.35. Тахтаджян Л. А. Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах.— ЖЭТФ, 1974, т. 66, № 2, с. 476—489.
- 2.36. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля.— Теор. и мат. физика, 1974, т. 21, № 2, с. 160—174.

- 2.37. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля. (Дополнение.) — Теор. и мат. физика, 1975, т. 22, № 1, с. 143.
- 2.38. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонова система, связанная с уравнением  $u_{\eta\eta} + \sin u = 0$ . — Тр. мат. ин-та АН СССР, 1976, т. 142, с. 254—266.
- 2.39. Уиттекер Э., Ватсон Г. Курс современного анализа. ч. II. Трансцендентные функции. — М.: Физматгиз, 1963.
- 2.40. Цыпляев С. А. Коммутационные соотношения матрицы перехода в классическом и квантовом методах обратной задачи. (Локальный случай). — Теор. и мат. физика, 1981, т. 48, № 1, с. 24—33.
- 2.41. Чередник И. В. Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании». — ДАН СССР, 1980, т. 252, № 5, с. 1104—1108.
- 2.42. Чередник И. В. Интегрируемые дифференциальные уравнения и накрытия эллиптических кривых. — Изв. АН СССР (сер. мат.), 1983, т. 47, № 2, с. 384—406.
- 2.43. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Method for solving the Sine-Gordon equation. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, № 25, p. 1262—1264.
- 2.44. Alonso Martínez L. Group-theoretical analysis of the Sine-Gordon equation as a relativistic dynamical system. — J. Math. Phys., 1983, v. 24, № 4, p. 982—989.
- 2.45. Bikbaev R. F., Bobenko A. I. On finite-gap integration of the Landau—Lifshitz equation. XYZ case. — Preprint LOMI E-8-83, Leningrad 1983.
- 2.46. Date E., Jimbo M., Kashiwara M. Landau—Lifshitz equation: solitons, quasi-periodic solutions and infinite dimensional Lie algebras. — J. Phys. A., 1983, v. 16, № 2, p. 221—236.
- 2.47. Fogedby H. C. Solitons and magnons in the classical Heisenberg chain. — J. Phys. A., 1980, v. 13, № 4, p. 1467—1499.
- 2.48. Gerdjikov V. S., Yanovski A. B. Gauge covariant formulation of the generating operator. 1. The Zakharov—Shabat system. — Phys. Lett., 1984, v. 103A, № 5, p. 232—236.
- 2.49. Kaup D. J., Newell A. C. The Goursat and Cauchy problems for the Sine-Gordon equation. — SIAM J. Appl. Math., 1978, v. 34, № 1, p. 37—54.
- 2.50. Kaup D. The squared eigenstates of the Sine-Gordon eigenvalue problem. — J. Math. Phys., 1984, v. 25, № 8, p. 2467—2471.
- 2.51. Kulish P. P. Quantum difference nonlinear Schrödinger equation. — Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, № 3, p. 191—197.
- 2.52. Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. — J. Math. Phys., 1978, v. 19, № 5, p. 1156—1162.
- 2.53. Mikhailov A. V. The Landau—Lifshitz equation and the Riemann boundary problem on a torus. — Phys. Lett., 1982, v. 92A, № 2, p. 51—55.
- 2.54. Pogrebkov A. K., Polivanov M. K. Singular solutions of the Liouville and Sinh-Gordon equations. — Sov. Sci. Rev., Ser. C, Review in Math. Physics, 1985, v. 5, p. 120—169.
- 2.55. Rodin Yu. L. The Riemann boundary problem on Riemann surfaces and the inverse scattering problem for the Landau—Lifshitz equation. — Physica D, 1984, v. 11D, № 1, p. 90—108.
- 2.56. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau—Lifshitz equation. — Preprint LOMI E-3-79, Leningrad 1979.
- 2.57. Takhtajan L. A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method. — Phys. Lett., 1977, v. 64A, № 2, p. 235—237.

### Глава III

- 3.1. Волков А. Ю. Дискретный вариант уравнения Ландау—Лифшица. — В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 5. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1985, т. 145, с. 62—71.

- 3.2. Захаров В. Е. К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов.—ЖЭТФ, 1973, т. 65, № 1, с. 219—225.
- 3.3. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи/под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
- 3.4. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель синус-Гордон.— Вестник ЛГУ, сер. физика, химия, 1981, № 22, с. 84—87.
- 3.5. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточные регуляризации квантово-полевых двумерных моделей.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 3. Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1982, т. 120, с. 75—91.
- 3.6. Кричевер И. М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.— УМН, 1978, т. 33, № 4, с. 215—216.
- 3.7. Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 2, с. 543—555.
- 3.8. Манаков С. В. Метод обратной задачи рассеяния в применении к некоторым проблемам физики волн в нелинейных средах.— Кандидатская диссертация, Черноголовка, 1974, 211 стр.
- 3.9. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера.— Функци. анализ и его прилож., 1982, т. 16, № 4, с. 27—34.
- 3.10. Тарасов В. О. Классический вариант решеточной модели синус-Гордон.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 3. Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1982, т. 120, с. 173—187.
- 3.11. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга.— УМН, 1979, т. 34, № 5, с. 13—63.
- 3.12. Toda М. Теория нелинейных решеток.— М.: Мир, 1984.
- 3.13. Adler M. On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of the Korteweg—de Vries type equations.— Inv. Math., 1979, v. 50, № 2, p. 219—248.
- 3.14. Buslaev V. S., Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Scattering theory for the Korteweg—de Vries equation and its Hamiltonian interpretation.— Physica D, 1986, v. 18D, № 1, p. 255—256.
- 3.15. Case K. M., Cas M. A discrete version of the inverse scattering problem.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, № 5, p. 594—603.
- 3.16. Eilenberger G. Solitons. Mathematical Method for Physicists.— Berlin: Springer, 1981.
- 3.17. Flashka H. The Toda lattice. II. Existence of integrals.— Phys. Rev., 1974, v. B9, № 6, p. 1924—1925.
- 3.18. Flashka H. On the Toda lattice. II. Inverse scattering solution.— Prog. Theor. Phys., 1974, v. 51, № 3, p. 703—716.
- 3.19. Flashka H., McLaughlin D. Canonically conjugate variables for the Korteweg—de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions.— Prog. Theor. Phys., 1976, v. 55, № 2, p. 438—456.
- 3.20. Izergin A. G., Korepin V. E. The lattice quantum Sine-Gordon model.— Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, № 3, p. 199—205.
- 3.21. Izergin A. G., Korepin V. E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions.— Nucl. Phys., 1982, v. B 205, № 3, p. 401—413.

#### Глава IV

- 4.1. Белавин А. А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем.— Функци. анализ и его прилож., 1980, т. 14, № 4, с. 18—26.
- 4.2. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли.— Функци. анализ и его прилож., 1982, т. 16, № 3, с. 1—29.
- 4.3. Березин Ф. А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли.— Функци. анализ и его прилож., 1967, т. 1, № 2, с. 1—14.



- 4.4. Богоявленский О. И., Новиков С. П. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач.— Функци. анализ и его прилож., 1976, т. 10, № 1, с. 9—13.
- 4.5. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики.— Изв. АН СССР (сер. мат.), 1984, т. 48, № 5, с. 883—938.
- 4.6. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологи алгебры Ли векторных полей на окружности.— Функци. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 4, с. 92—93.
- 4.7. Гельфанд И. М., Диккий Л. А. Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза.— УМН, 1975, т. 30, № 5, с. 67—100.
- 4.8. Гельфанд И. М., Диккий Л. А. Семейство гамильтоновых структур, связанных с интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями.— Препринт ИПМ 1978, № 136.
- 4.9. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры.— Функци. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 4, с. 13—30.
- 4.10. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы.— Функци. анализ и его прилож., 1980, т. 14, № 3, с. 71—74.
- 4.11. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Уравнения типа Кортевега — де Фриза и простые алгебры Ли.— ДАН СССР, 1981, т. 258, № 1, с. 11—16.
- 4.12. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега — де Фриза.— В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники).— М.: ВИНТИ, 1984, т. 24, с. 81—180.
- 4.13. Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биналгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера.— ДАН СССР, 1983, т. 268, № 2, с. 285—287.
- 4.14. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55—136.
- 4.15. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II.— Функци. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 3, с. 13—22.
- 4.16. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.
- 4.17. Кулиш П. П., Рейман А. Г. Иерархия симплектических форм для уравнений Шредингера и Дирака на прямой.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. I. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1978, т. 77, с. 134—147.
- 4.18. Кулиш П. П., Рейман А. Г. Гамильтонова структура полиномиальных пучков.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. V. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1983, т. 123, с. 67—76.
- 4.19. Лебедев Д. Р., Маннин Ю. И. Гамильтонов оператор Гельфанда — Дикого и коприсоединенное представление группы Вольтерра.— Функци. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 4, с. 40—46.
- 4.20. Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с. 443—448.
- 4.21. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида  $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$ . I.— Теор. и мат. физика, 1985, т. 62, № 2, с. 163—185.
- 4.22. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. I.— Функци. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 54—66.
- 4.23. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А., Френкель И. Б. Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 802—804.
- 4.24. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А. Семейство гамильтоновых структур, иерархия гамильтонианов и редукция для матрич-

- ных дифференциальных операторов первого порядка.— Функц. анализ и его прилож., 1980, т. 14, № 2, с. 77—78.
- 4.25. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 6, с. 1310—1314.
- 4.26. Рейман А. Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 3—54.
- 4.27. Рейман А. Г. Единая гамильтонова система на полиномиальных пучках и структура стационарных задач.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 4. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1983, т. 131, с. 118—127.
- 4.28. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А. Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 212—227.
- 4.29. Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А. Алгебры Ли и лагранжевы уравнения со спектральным параметром на эллиптической кривой.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 6. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1986, т. 150, с. 104—118.
- 4.30. Решетихин Н. Ю., Фаддеев Л. Д.— Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля.— Теор. и мат. физика, 1983, т. 56, № 3, с. 323—343.
- 4.31. Семенов-Тянь-Шанский М. А. Что такое классическая  $r$ -матрица.— Функц. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 4, с. 17—33.
- 4.32. Семенов-Тянь-Шанский М. А. Теоретико-групповые методы в теории интегрируемых систем.— Докт. дис., Л., 1985, 328 с.
- 4.33. Тахтаджян Л. А. Решения уравнений треугольников с  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ -симметрией как матричные аналоги дзета- и сигма-функций Вейерштрасса.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 258—276.
- 4.34. Трофимов В. В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левонинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре.— ДАН СССР, 1982, т. 263, № 4, с. 812—816.
- 4.35. Чередник И. В. Об определении  $\tau$ -функций для обобщенных аффинных алгебр Ли.— Функц. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 3, с. 93—95.
- 4.36. Adler M. On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of the Korteweg — de Vries type equations.— Invent. Math., 1979, v. 50, № 2, p. 219—248.
- 4.37. Adler M., Moerbeke P. Completely integrable systems. Euclidian Lie algebras and curves.— Adv. Math., 1980, v. 38, № 2, p. 267—317.
- 4.38. Bäcklund A. V. Zur Theorie der Flächentransformationen.— Math. Ann., 1882, Bd. 19, № 4, S. 387—422.
- 4.39. Bogoyavlensky O. I. On perturbations of the periodic Toda lattice.— Comm. Math. Phys., 1976, v. 51, № 3, p. 201—209.
- 4.40. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Operator approach to the Kadomtsev — Petviashvili equation. Transformation groups for soliton equations. III.— J. Phys. Soc. Japan, 1981, v. 50, № 11, p. 3806—3812.
- 4.41. Dirac P. A. M. Lectures on quantum mechanics.— Belfer Grad. School of Science, Yeshiva University, N.—Y., 1964. (Русский перевод: Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике.— М.: Мир, 1968.)
- 4.42. Dolan L. Kac — Moody algebras and exact solvability in hadronic physics.— Phys. Rep., 1984, v. 109, № 1, p. 1—94.
- 4.43. Flaschka H., Newell A. C., Ratiu T. Kac — Moody Lie algebras and soliton equations. II. Lax equations associated with  $A_1^{(1)}$ .— Physica D, 1983, v. 9D, № 2, p. 303—323.

- 4.44. Flaschka H., Newell A. C., Ratiu T. Кас—Moody Lie algebras and soliton equations. III. Stationary equations associated with  $A_1^{(1)}$  — *Physica D*, 1983, v. 9D, № 2, p. 324—332.
- 4.45. Flaschka H., Newell A. C., Ratiu T. Кас—Moody Lie algebras and soliton equations. IV.— *Physica D*, 1983, v. 9D, № 2, p. 333—345.
- 4.46. Gerdjikov V. S., Yanovski A. B. Gauge covariant formulation of the generating operator. 1. The Zakharov—Shabat system.— *Phys. Lett.*, 1984, v. 103A, № 5, p. 232—236.
- 4.47. Hirota R. Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations.— in: Miura R. (editor) *Bäcklund transformations*. Lecture Notes in Math., Berlin: Springer, 1976, v. 515, p. 40—68.
- 4.48. Кас V. G. Infinite dimensional Lie algebras.— *Progress in Mathematics*, v. 44. Boston: Birkhäuser, 1983.
- 4.49. Kostant B. Quantization and unitary representations. I. Prequantization.— *Lecture Notes in Math.*, 1970, v. 170, p. 87—208.
- 4.50. Kostant B. Quantization and representation theory.— *Proc. of Symposium on Representations of Lie groups*. Oxford 1977, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 1979, v. 34, p. 287—316.
- 4.51. Kostant B. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory.— *Adv. Math.*, 1979, v. 34, p. 195—338.
- 4.52. Lie S. (unter Mitwirkung von F. Engel) *Theorie der Transformationsgruppen*. Bd. 1—3.— Lpz.: Teubner, 1888, 1890, 1893.
- 4.53. Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation.— *J. Math. Phys.*, 1978, v. 19, № 5, p. 1156—1162.
- 4.54. Miura R. M. Korteweg—de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation.— *J. Math. Phys.*, 1968, v. 9, № 8, p. 1202—1204.
- 4.55. Miura R. (editor). *Bäcklund transformations*.— *Lecture Notes in Math.*, Berlin: Springer, 1979, v. 515.
- 4.56. van Moerbeke P., Mumford D. The spectrum of difference operators and algebraic curves.— *Acta Math.*, 1979, v. 143, p. 93—154.
- 4.57. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. I.— *Invent. Math.*, 1979, v. 54, № 1, p. 81—100.
- 4.58. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. II.— *Invent. Math.*, 1981, v. 63, № 3, p. 423—432.
- 4.59. Segal G., Wilson G. Loop groups and equations of KdV type.— *Publ. IHES*, 1985, v. 61, p. 5—65.
- 4.60. Semenov-Tian-Shansky M. A. Dressing transformations and Poisson group actions.— *Publ. of RIMS*, 1985, v. 21, № 6, p. 1203—1221.
- 4.61. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau—Lifshitz equation.— *Preprint LOMI E-3-79*, Leningrad 1979.
- 4.62. Souriau J.-M. *Structure des systèmes dynamiques*.— Paris: Dunod, 1970.
- 4.63. Symes W. Systems of Toda type, inverse spectral problems and representation theory.— *Invent. math.*, 1980, v. 59, № 1, p. 13—51.
- 4.64. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds.— *J. Diff. Geometry*, 1983, v. 18, № 3, p. 523—557.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра наблюдаемых 16  
 — токов 291, 457  
 — — центрально расширенная 300, 480  
 Аннулятор 22, 293, 457  
 Антисолитон 377  
 Асимптотики решений Юста для модели МГ 318, 320  
 — — — — — НШ в быстроубывающем случае 42, 43; в случае конечной плотности 58, 59  
 — — — — — SG 349, 351, 352  
 — — — — — Тода 418  
 Асимптотические разложения для матрицы монодромии, коэффициентов перехода и функции  $p_L(\lambda)$  модели НШ 31, 34, 37, 38  
 — — — — — перехода модели МГ 323—325  
 — — — — — НШ 35—37  
 — — — — — SG 356, 357  
 — — — — — приведенной матрицы монодромии и коэффициентов перехода непрерывного спектра: модели МГ 325, 326; модели НШ в быстроубывающем случае 53, 54; в случае конечной плотности 72, 73; модели SG 357, 358; модели Тода 425, 426
- Безотражательные функции  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  121  
 Бризер 378  
 Бриллюэна зона 243, 345
- Вариационная производная 16  
 Виртуальный уровень 62, 136, 417  
 Вспомогательная линейная задача 26, 465  
 — — — — — безотражательная 120  
 — — — — — для модели Вольтерра 454  
 — — — — — КдФ 277  
 — — — — — Л — Л 403  
 — — — — — МГ 316  
 — — — — — НШ 28  
 — — — — — SG 348  
 — — — — — в координатах светового конуса 397  
 — — — — — РМГ 268  
 — — — — — РНШ<sub>1</sub> 272  
 — — — — — Тода 416  
 — — — — — непрерывных моделей 277  
 — — — — — решеточных моделей 265
- Вспомогательное пространство 259, 461
- Гамильтониан 18  
 — модели Вольтерра 266  
 — — главного кирального поля 290  
 — — КдФ 278  
 — — Л — Л 258  
 — — LSG 453  
 — — МГ 255  
 — —  $N$ -волн 280  
 — — — — —  $\rightarrow$   
 — —  $n$ -поля 296  
 — — НШ 18, 22  
 — — — векторной 260  
 — — РЛ — Л 449  
 — — РМГ 267  
 — — РНШ<sub>1</sub> 271  
 — — РНШ<sub>2</sub> 273  
 — — SG 257  
 — — — в координатах светового конуса 396  
 — — Тода 266  
 — — двумеризованной 283
- Гамильтоновы уравнения движения 18, 478, 483  
 $\gamma$ -упорядоченная матричная экспонента 25
- Граничные условия 14  
 — — быстроубывающие 14, 254, 257, 265  
 — — в смысле Шварца 15  
 — — квазипериодические 15, 254, 260, 265  
 — — конечной плотности 15, 265  
 — — периодические 256
- Двойной солитон 378  
 Действие для главного кирального поля 281, 290  
 — — — — — модифицированное 298
- Дивизор полюсов 301  
 Динамика солитонов  
 — для модели МГ 339  
 — — НШ в быстроубывающем случае 126; в случае конечной плотности 161  
 — — — SG 379, 380  
 — — — Тода 434, 435
- Дисперсионное соотношение 51  
 — для модели МГ 322

- Дисперсионное соотношение для модели НШ в быстроубывающем случае 50; в случае конечной плотности 67  
 ———— SG 354  
 ———— Тода 423
- Дифференциальные уравнения для ядер  $\Gamma_{\pm}$  модели МГ 319  
 ———— SG 351
- Задача Гурса для ядер  $\Gamma_{\pm}$  57, 319, 351, 490  
 — Римана 77, 302, 484  
 — для модели МГ 329, 330  
 ———— НШ в быстроубывающем случае 84, 490; в случае конечной плотности 132  
 ———— SG 360—362  
 — на поверхности  $\Gamma$  132  
 — регулярная 86  
 — скалярная 94, 230  
 — с пулями 86, 304  
 — сопряжения специальная для модели НШ в быстроубывающем случае 108, 109; в случае конечной плотности 138—140  
 — факторизации 478, 484, 491
- Закон дисперсии 225, 242, 345, 387
- Законы сохранения 26
- Заряд 19
- Иерархия пуассоновых структур 201, 202, 493—495
- Импульс 261, 262  
 — для модели КдФ 278  
 ———— Л—Л 263  
 ———— МГ 255, 263, 345  
 ———— НШ 18, 215, 242, 262  
 ———— SG 257, 262, 386  
 ———— в координатах светового конуса 396
- Инволюции свойства для матрицы монодромии и коэффициентов перехода модели НШ 29  
 ———— перехода модели МГ 317  
 ———— НШ 29  
 ———— SG 348, 349  
 ———— приведенной матрицы монодромии, решений Йоста и коэффициентов перехода непрерывного и дискретного спектра; модели МГ 318, 320; модели НШ в быстроубывающем случае 42, 45, 49; в случае конечной плотности 59—61, 63; модели SG 349, 352—354; модели Тода 418, 420—422  
 ———— матриц  $G(\lambda)$  и  $G_{\pm}(\lambda)$ : модели МГ 329; модели НШ в быстроубывающем случае 80, 81; в случае конечной плотности 133, 134; модели SG 360, 361
- Интеграл энергии 18
- Интегралы движения 19  
 — в инволюции 19  
 — для модели МГ 325—327  
 ———— НШ в быстроубывающем случае 53; в случае конечной плотности 71—73  
 ———— РЛ—Л 449  
 ———— SG 356—358  
 ———— в координатах светового конуса 398, 399, 409  
 ———— Тода 425—427  
 ———— локальные 35, 323, 448
- Интегральные представления для матрицы монодромии модели НШ 34  
 ———— перехода модели НШ 32  
 ———— приведенной матрицы монодромии и коэффициентов перехода непрерывного спектра модели НШ в быстроубывающем случае 47; в случае конечной плотности 63  
 ———— матриц  $G(\lambda)$  и  $G_{\pm}(\lambda)$  для модели НШ в быстроубывающем случае 80, 81; в случае конечной плотности 133, 136  
 ———— решений Йоста модели МГ 318  
 ———— модели НШ в быстроубывающем случае 41; в случае конечной плотности 57  
 ———— SG 350  
 — уравнения для матрицы перехода моделей НШ 31  
 ———— решений Йоста модели МГ 318  
 ———— НШ в быстроубывающем случае 44  
 ———— ядер  $\Gamma$ ,  $\tilde{\Gamma}$  модели НШ в быстроубывающем случае 32
- Интегрируемость 276
- Казимира функция 457, 462, 477, 483
- Калибровочная эквивалентность 276, 284
- Калибровочное преобразование 24, 36, 276, 481
- Картана — Вейля базис 411
- Киллинга форма 289, 460
- Конечнозонные решения 248
- Константа связи 14
- Коприсоединенное действие 457, 485
- Коцикл Маурера — Картана 291, 480
- Коэффициенты перехода дискретного спектра для модели МГ 322

Коэффициенты перехода дискретного спектра для модели НШ в быстроубывающем случае 50; в случае конечной плотности 66  
 ————— SG 354  
 ————— Тода 422  
 — для модели НШ 29  
 — непрерывного спектра для модели МГ 321  
 ————— НШ в быстроубывающем случае 45, 50; в случае конечной плотности 61  
 ————— SG 353  
 ————— Тода 420  
 — отражения и прохождения для модели НШ в быстроубывающем случае 79; в случае конечной плотности 131  
 — связности 24

Лагуна 56  
 Лежандра преобразование 290  
 Лоренцевых вращений генератор 257, 388

Матрица монодромии 26, 311  
 — для модели НШ 26, 28  
 — Тода 414  
 — приведенная для модели МГ 320  
 — НШ в быстроубывающем случае 44; в случае конечной плотности 61  
 — SG 352  
 — Тода 420  
 — перехода для модели МГ 317  
 — НШ 28  
 — SG 348  
 — Тода 416  
 — рассеяния 79, 131

Матрицы Паули 23  
 Матричный множитель Бляшке — Потапова 87, 337, 376  
 Маурера — Картана форма 281, 297  
 Множитель Бляшке 50  
 Модель Вольтерра 266  
 — кирального поля главного 280, 281  
 — модифицированного 298  
 — Кортвега — де Фриза (КдФ) 277  
 — Ландау — Лифшица (Л—Л) 258  
 — решеточная (РЛ—Л) 444—449  
 — магнетика Гейзенберга (МГ) 253  
 — решеточная (РМГ) 267  
 —  $N$ -волн 279, 280  
 — нелинейного уравнения Шредингера (НШ) 15  
 — векторная 260  
 — решеточная 1 (РНШ<sub>1</sub>) 271, 272

Модель нелинейного уравнения Шредингера решеточная 2 (РНШ<sub>2</sub>) 273  
 — Sipe-Gordon (SG) 256  
 — в координатах светового конуса 394  
 — матричная 314  
 — Тода 265  
 — двумеризованная 282

Нелинейное уравнение Шредингера 14  
 — векторное 260  
 — высшее 183, 194  
 Непрерывный предел 268, 269  
 — солитонное решение для модели МГ 338, 339  
 — НШ в быстроубывающем случае 125, 126; в случае конечной плотности 160, 161  
 — SG 378, 379  
 — Тода 434

Нормированное кольцо  $\mathfrak{R}_0$  48  
 —  $\mathfrak{R}^{(2 \times 2)}$  81  
 — подкольцо  $\mathfrak{R}_+$  48  
 Нормированные подкольца  $\mathfrak{R}_{\pm}^{(2 \times 2)}$  81  
 Нормировка задачи Римана 303  
 — единичная 303  
 — для модели МГ 329  
 — SG 362

Одевания процедура 303, 486—489  
 Оператор Захарова — Шабата 76  
 — Шредингера 76  
 —  $\Lambda$  196, 249, 492

Параллельный перенос 24, 25  
 Переменные действие — угол для модели МГ 343  
 — НШ 213, 214, 234—237  
 — SG 384, 386  
 — Тода 439

Представление Лакса 11  
 — нулевой кривизны 23, 24, 264, 265, 275, 483  
 — для модели Вольтерра 267  
 — кирального поля 281  
 — КдФ 277  
 — Л — Л 259  
 — МГ 256  
 —  $N$ -волн 279  
 — НШ 23, 24; векторной 260  
 — РЛ — Л 449—450  
 — РМГ 267, 268  
 — РНШ<sub>1</sub> 272  
 — РНШ<sub>2</sub> 274  
 — SG 258  
 — в координатах светового конуса 397  
 — Тода 266; двумеризованной 283

- Преобразование рассеяния для солитонов модели МГ 347  
 ————— НШ 227  
 ————— SG 391, 392
- Производящая функция интегралов движения (законов сохранения) 311  
 ————— для модели МГ 326  
 ————— НШ 27, 35—39, 54, 71  
 ————— SG 355, 358  
 ————— Тода 425, 426
- Производящие функции канонических преобразований для рассеяния солитонов модели МГ 347, — модели НШ 227, — модели SG 392, 393
- Пуассонова структура 17, 456, 457,
- Раздевания процедура 306—308  
 ————— для главного кирального поля 309, 310
- Регуляризация фредгольмова уравнения 114, 119
- Редукция 277, 279, 281, 283
- Рекурсионный оператор 196
- $r$ -матрица 175, 460  
 — рациональная 466  
 — тригонометрическая 469  
 — эллиптическая 469, 470  
 — для модели КдФ 411  
 ————— Л — Л 404  
 ————— МГ 341  
 ————— LSG 452  
 —————  $N$ -волн 411  
 ————— НШ 175  
 ————— векторной 411  
 ————— РЛ — Л 444  
 ————— РМГ 451  
 ————— SG 382  
 ————— Тода 414  
 ————— двумеризованной 411
- Решения Йоста для модели МГ 318  
 ————— НШ в быстроубывающем случае 40; в случае конечной плотности 57, 58  
 ————— SG 349  
 ————— Тода 418
- Свойство суперпозиции 28  
 — унимодулярности 29
- Сгущение пучей для модели МГ 345  
 ————— НШ 238—240  
 ————— SG 387
- Симплектическая структура 18  
 — форма 18, 261, 262, 495
- Скобки Ли — Пуассона 254, 255, 291, 457, 461, 462, 484  
 — Пуассона 17, 172, 254, 257, 260, 266, 267, 269, 273
- Скобки Пуассона коэффициентов перехода и дискретного спектра для модели МГ 342, 343  
 ————— НШ в быстроубывающем случае 208—211; в случае конечной плотности 234  
 ————— SG 383, 384  
 ————— Тода 438  
 — согласованные 494  
 — фундаментальные для модели Л — Л 404  
 ————— МГ 341  
 ————— НШ 174, 175  
 ————— SG 382  
 ————— моделей на решетке 413, 473  
 — Пуассона — Дирака 252, 494
- $S$ -матрица классическая 228, 347, 392  
 Солитон 122  
 — для модели МГ 337, 338  
 ————— НШ в быстроубывающем случае 121, 122; в случае конечной плотности 158, 159  
 ————— SG 377  
 ————— Тода 433
- Соотношение нормировки 29, 45, 61, 321, 353, 420
- Сохоцкого — Племеля формула 50, 209, 438
- Спектр дискретный 49, 64, 65, 321, 354, 422  
 — непрерывный 50, 55, 417
- Спектральный параметр 26, 483
- Спин 255, 327, 328
- Теорема Гохберга — Крейна 85
- Тождества следов для модели МГ 326  
 ————— НШ в быстроубывающем случае 54; в случае конечной плотности 75  
 ————— SG 359  
 ————— Тода 427
- Токи левые 281  
 — правые 291
- Топологический заряд 257, 377, 380, 385
- Ультралокальность 176, 485
- Уравнение Винера — Хопфа 85, 92, 113  
 — Кадомцева — Петвиашвили 315  
 — Риккати для модели МГ 323  
 ————— НШ 36  
 ————— SG 356  
 — скалярное 116  
 — треугольников 247
- Уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко для модели МГ 332

- Уравнения Гельфанда — Левитана —  
 Марченко для модели НШ в бы-  
 строубывающем случае 110; в слу-  
 чае конечной плотности 143, 144  
 ————— SG 367, 368  
 ————— Тода 429  
 — движения модели Вольтерра 266  
 ————— КдФ 277  
 ————— кирального поля 280  
 ————— модифицированного 298  
 ————— Л — Л 258  
     →  
 ————— л-поля 296  
 ————— N-волн 280  
 ————— МГ 253  
 ————— — выше 344  
 ————— НШ 14  
 ————— — векторной 260  
 ————— — выше 183, 194  
 ————— РМГ 267  
 ————— РНШ<sub>1</sub> 271  
 ————— РНШ<sub>2</sub> 273  
 ————— SG 256  
 ————— — выше 385  
 ————— — в координатах светового  
 конуса 394; выше 409  
 ————— Тода 265  
 ————— — выше 442  
 ————— — двумеризованной 282  
 — Новикова 248  
 Условие (A) для модели МГ 321  
 ————— НШ 49  
 ————— SG 354  
 — квазипериодичности 19, 20  
 Условие (с) 423  
 — (θ) 67, 235  
 — нулевой кривизны 24, 107, 138, 184,  
 300  
 ————— для моделей на решетке 264,  
 265, 304  
 — совместности 22  
 — унитарности классическое 247  
 Условия выбора знаков для модели  
 НШ 69  
 Условия выбора знаков для модели  
 Тода 423  
 Усреднение r-матриц 466—470  
 — фундаментальных скобок Пуассо-  
 на 471  
 ————— на решетке 475  
 Фазовое пространство  $\mathcal{M}_0$  15, 219  
 —————  $\mathcal{M}_{L,0}$  19  
 —————  $\mathcal{M}_{0,0}$  21  
 —————  $\mathcal{M}_c$  436  
 ————— для модели РЛ — Л 447  
 ————— — LSG 452  
 ————— — расширенное 166  
 Факторизация рассеяния 129, 167,  
 348, 380  
 Формула суперпозиции 25  
 Функционал вещественно-аналитиче-  
 ский 16  
 — гладкий 16  
 — допустимый 20, 73, 193, 217, 220,  
 222, 436, 441  
 — локальный 35, 323, 425  
 — многозначный 273, 297  
 — недопустимый 20, 21, 241, 344, 442  
 — финитный 20, 172  
 Функция Жуковского 66  
 Хопфа расслоение 288  
 Эволюционные уравнения для матри-  
 цы перехода 30, 70, 424  
 ————— приведенной матрицы моно-  
 дромии 52, 70, 322, 355, 425  
 ————— — решений Йоста 52, 70, 322,  
 355, 425  
 ————— коэффициентов перехода не-  
 прерывного и дискретного спектра  
 52, 71  
 Якобиева матрица 419  
 Якоби тождество 17, 173  
 Янга — Бакстера уравнение 247