

ББК 22.343

С91

УДК 535.9+535.33+537.86/87

Рецензент

доктор физико-математических наук *Л.А. Большов*

**Сухо руков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике.** — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 232 с., ISBN 5-02-013842-8

Дано систематическое изложение современной теории нелинейных взаимодействий волновых пучков и волновых пакетов в анизотропных диспергирующих средах. Рассмотрены трехволновые взаимодействия в нелинейной оптике и радиофизике, включающие параметрическое усиление и распадную неустойчивость, генерацию гармоник, суммарных и разностных волн, вынужденное комбинационное рассеяние коротких импульсов и возбуждение поляритонных колебаний, нелинейные проявления дисперсии и дифракции. Описан ряд новых явлений в нелинейной волновой физике: параметрическая диффузия, расплывание и компрессия импульсов, связанные трехчастотные солитоны, взаимокомпрессия волновых пакетов, дисперсионная некогерентность и их дифракционные аналоги.

Для специалистов, работающих в области нелинейной оптики и лазерной физики, радиофизики и акустики, физики плазмы и физики твердого тела, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ил. 97. Библиогр.: 313 назв.

С  $\frac{1704050000-180}{053(02)-88}$  115-88

ISBN 5-02-013842-8

© Издательство "Наука".  
Главная редакция  
физико-математической литературы,  
1988

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	7
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ . . . . .	10

### Глава 1

<b>КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТРЕХВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1.1. Уравнения нелинейной электродинамики в диспергирующих средах . . . . .	12
§ 1.2. Дифракция волновых пучков в анизотропных средах . . . . .	13
§ 1.3. Квазиизотропное приближение при слабой анизотропии . . . . .	17
§ 1.4. Распространение волновых пакетов в диспергирующих средах . . . . .	19
§ 1.5. Трехчастотные взаимодействия волновых пучков и импульсов . . . . .	20
§ 1.6. Пространственно-временная аналогия . . . . .	23
§ 1.7. Теория подобия трехволновых взаимодействий . . . . .	24
§ 1.8. Учет дисперсии высших порядков . . . . .	27

### Глава 2

<b>ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ СЛАБЫХ ВОЛН ПРИ РАССТРОЙКЕ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ . . . . .</b>	<b>30</b>
§ 2.1. Связанные уравнения для сигнальной и холостой волн . . . . .	30
§ 2.2. Закон дисперсии волн в параметрическом усилителе . . . . .	32
§ 2.3. Параметрическая диффузия волновых пакетов . . . . .	34
§ 2.4. Усиление фазово-модулированного импульса . . . . .	36
§ 2.5. Распадная неустойчивость фазово-модулированной волны накачки . . . . .	37
§ 2.6. Комбинированные пространственно-временные эффекты при усилении волновых пучков и импульсов . . . . .	40
§ 2.7. Влияние расстройки волновых векторов и диссипации энергии . . . . .	43

### Глава 3

<b>ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПЛЫВАНИЕ И КОМПРЕССИЯ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ ВОЛН . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 3.1. Нестационарные уравнения для параметрического преобразования частоты . . . . .	47
§ 3.2. Нелинейная дисперсия суммарных и разностных волн с учетом расстройки групповых скоростей . . . . .	49

§ 3.3.	Метод параболического уравнения для парциальных амплитуд . . . . .	52
§ 3.4.	Параметрическое расплывание связанных волновых пакетов . . . . .	54
§ 3.5.	Использование нелинейной дисперсии для сжатия фазово-модулированных импульсов . . . . .	55
§ 3.6.	Пространственно-временные эффекты при параметрическом расплывании . . . . .	58

**Глава 4**

<b>НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПАДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА . . . . .</b>		<b>60</b>
§ 4.1.	Точные решения связанных уравнений в форме Римана . . . . .	60
§ 4.2.	Усиление попутной и уходящей волн . . . . .	65
§ 4.3.	Усиление уходящих волн, $\nu_{13} \nu_{23} > 0$ . . . . .	68
§ 4.4.	Модовое усиление при захвате волн импульсом накачки, $\nu_{13} \nu_{23} < 0$ . . . . .	70
§ 4.5.	Асимптотические методы описания нестационарных параметрических процессов . . . . .	77

**Глава 5**

<b>ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛЕ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА НАКАЧКИ . . . . .</b>		<b>80</b>
§ 5.1.	Классификация нестационарных режимов преобразования частоты . . . . .	80
§ 5.2.	Генерация $\pi$ -импульсов на суммарной частоте . . . . .	82
§ 5.3.	Формирование квазистационарных фронтов связанных волн . . . . .	84
§ 5.4.	Возбуждение второй гармоники волнового пакета . . . . .	85
§ 5.5.	Формирование квазистационарных импульсов в диссипативной среде . . . . .	87

**Глава 6**

<b>НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ СИЛЬНОМ ЭНЕРГООБМЕНЕ . . . . .</b>		<b>90</b>
§ 6.1.	Точное решение укороченных уравнений при когерентном двухчастотном взаимодействии . . . . .	90
§ 6.2.	Нестационарные эффекты на нелинейной стадии генерации второй гармоники . . . . .	93
§ 6.3.	Генерация гигантского параметрического импульса . . . . .	97
§ 6.4.	Ограничение эффективности удвоения частоты фазово-модулированного импульса . . . . .	99
§ 6.5.	Общие закономерности нестационарных трехфотонных взаимодействий . . . . .	105

**Глава 7**

<b>ТРЕХЧАСТОТНЫЕ СОЛИТОНЫ В СРЕДАХ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА . . . . .</b>		<b>108</b>
§ 7.1.	Реактивные трехволновые взаимодействия и стационарные волны . . . . .	108
§ 7.2.	Солитоны при вырожденном взаимодействии . . . . .	110
§ 7.3.	Свойства трехволновых солитонов . . . . .	113
§ 7.4.	Параметрически связанные солитоны при учете кубичной нелинейности . . . . .	116

**Глава 8**

<b>АНОМАЛЬНАЯ ДИФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИОННОЕ РАСПЛЫВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВОЛН . . . . .</b>		<b>118</b>
§ 8.1.	Параболическое уравнение для пучков и импульсов в параметрически-активной среде . . . . .	119

§ 8.2.	Аномальная дифракция волновых пучков . . . . .	122
§ 8.3.	Дифракция волн в параметрически-активном волноводе . . . . .	126
§ 8.4.	Вторичное упрощение укороченных уравнений; моды параметрического волновода . . . . .	129
§ 8.5.	Усиление волновых пакетов при дисперсии групповых скоростей . . . . .	131
§ 8.6.	Частотно-угловая картина параметрического рассеяния . . . . .	132
§ 8.7.	Дифракционные и дисперсионные явления в поле низкочастотной волны накачки . . . . .	134

## Глава 9

<b>ТРЕХВОЛНОВАЯ ВЗАИМОФОКУСИРОВКА И ВЗАИМОКОМПРЕССИЯ В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ . . . . .</b>		<b>139</b>
§ 9.1.	Взаимофокусировка основной и второй гармоник . . . . .	139
§ 9.2.	Теория подобия и нелинейная геометрическая оптика . . . . .	145
§ 9.3.	Трехволновая взаимфокусировка в параметрическом усилителе . . . . .	147
§ 9.4.	Самокомпрессия волновых пакетов при взаимодействии двух гармоник . . . . .	150
§ 9.5.	Нелинейная декомпрессия взаимодействующих импульсов . . . . .	154

## Глава 10

<b>ТРЕХЧАСТОТНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫЕ СОЛИТОНЫ И ВОЛНОВОДЫ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА . . . . .</b>		<b>157</b>
§ 10.1.	Уравнения длягибающих связанных солитонов . . . . .	157
§ 10.2.	Свойства солитонов при групповом синхронизме . . . . .	158
§ 10.3.	Специальные солитоны при групповых расстройках . . . . .	160
§ 10.4.	Солитоны в отсутствие дисперсии одной из волн . . . . .	162
§ 10.5.	Захват волн в связанные солитоны и волноводы . . . . .	163
§ 10.6.	Взаимодействие многочастотных солитонов . . . . .	168

## Глава 11

<b>ДИФРАКЦИОННО-ДИСПЕРСИОННАЯ НЕКОГЕРЕНТНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ . . . . .</b>		<b>169</b>
§ 11.1.	Дифракционная некогерентность и оптимальная фокусировка при слабом возбуждении гармоник . . . . .	169
§ 11.2.	Дифракционный предел эффективности удвоения частоты . . . . .	176
§ 11.3.	Оптимальное профилирование пучков в преобразователях частоты . . . . .	181
§ 11.4.	Дисперсионная некогерентность при взаимодействии волновых пакетов . . . . .	182
§ 11.5.	Влияние дисперсии нелинейной связи на взаимодействие волновых пакетов . . . . .	184

## Глава 12

<b>НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЯНИИ . . . . .</b>		<b>187</b>
§ 12.1.	Укороченные уравнения нестационарного ВКР . . . . .	188
§ 12.2.	Влияние молекулярной релаксации на ВКР . . . . .	190
§ 12.3.	Комбинированные эффекты молекулярной релаксации и дисперсии волн . . . . .	193

§ 12.4. ВКР фазово-модулированных импульсов . . . . .	197
§ 12.5. Трехчастотные ВКР-солитоны. . . . .	200

*Глава 13*

<b>НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТРЕХЧАСТОТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С УЧАСТИЕМ ПОЛЯРИТОНОВ . . . . .</b>	<b>205</b>
---	------------

§ 13.1. Укороченные уравнения взаимодействия волновых пакетов при поляритонном резонансе. . . . .	206
§ 13.2. Диссипативный механизм формирования стационарных поляритонных импульсов. . . . .	208
§ 13.3. Дисперсия параметрических квазичастиц -- фоторитонов . . . . .	213
§ 13.4. Динамика двухфотонного параметрического просветления экситон-поляритонного резонанса . . . . .	218

<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. . . . .</b>	<b>223</b>
-----------------------------------	------------

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагаются основы теории и физические представления о трехчастотных нелинейных взаимодействиях волновых пучков и пакетов волн. Поведение волновых пучков и пакетов в нелинейных средах стало объектом интенсивных исследований более 20 лет назад. С того времени данная проблема занимает одно из центральных мест во многих областях физики: в оптике и радиофизике, в физике плазмы и гидродинамике, в акустике и физике твердого тела.

Трехволновые (трехчастотные) взаимодействия охватывают широкий круг нелинейных явлений: возбуждение второй гармоники, генерацию суммарных и разностных волн, параметрическое усиление и распадную неустойчивость. Первые представления о протекании этих явлений были получены при рассмотрении взаимодействий плоских монохроматических волн. Однако этих сведений явно не достаточно для объяснения всего многообразия нелинейных волновых процессов, протекающих в реальных условиях. На практике мы имеем дело с модулированными волнами, ограниченными в пространстве и во времени. Это обстоятельство принципиально меняет всю картину нелинейного взаимодействия волн.

Волновые пучки и пакеты относятся к важному классу модулированных волн. Они представляют собой квазиплоские и квазимонохроматические волны. Огибающие таких волн медленно меняются в процессе их распространения и взаимодействия. Это свойство позволило развить эффективные методы описания дифракционных и нестационарных явлений при взаимодействии волновых пакетов и пучков.

Дифракция и дисперсия волн изменяют протекание трехчастотных взаимодействий. Вследствие дисперсии пакеты разных частот распространяются с различными скоростями, испытывают распыливание. Дифракция пучков меняет их амплитудные и фазовые профили, что влияет на характер энергообмена между волнами уже на линейной стадии. Более того, при достаточно больших интенсивностях вместо известных и привычных закономерностей поведения волновых пучков и пакетов в линейных средах возникает новый класс чрезвычайно важных и интересных нелинейно-дифракционных и нелинейно-дисперсионных явлений. При сильных взаимодействиях можно наблюдать параметрическую диффузию и компрессию импульсов, захват трех пакетов в связанные солитоны, взаимофокусиров-

ку и взаимокомпрессию и т.д. Обсуждение перечисленных выше явлений, их теоретическое описание и составляет цель этой книги. Следует отметить, что до сих пор в литературе отсутствовало достаточно полное и систематическое изложение проблем трехчастотных взаимодействий волновых пучков и пакетов.

Содержание книги можно разделить на следующие разделы. В главе 1 излагается квазиоптический подход к описанию трехволновых взаимодействий в анизотропных диспергирующих средах. В последующих шести главах представлены взаимодействия модулированных волн в условиях расстройки групповых скоростей и лучевых векторов. Сначала рассматриваются нестационарные эффекты, обусловленные модуляцией слабых сигналов, а затем — модуляцией волны накачки. Отдельно обсуждается проблема солитонов в средах с относительной дисперсией первого порядка. Четыре главы, с восьмой по одиннадцатую, посвящены описанию взаимодействия волновых пакетов во втором приближении теории дисперсии и взаимодействию волновых пучков в рамках нелинейной квазиоптики (параболических уравнений).

Среди новых волновых эффектов выделяется аномальная дифракция пучков при распадной неустойчивости плоской волны накачки, переходящая в нелинейной стадии во взаимофокусировку волн. Обсуждается также дифракционный сбой фаз при взаимодействии волновых пучков. С дифракционной некогерентностью связано принципиальное ограничение уровня перекачки энергии основного излучения во вторую гармонику. В заключительных двух главах кратко обсуждаются особенности взаимодействия световых волн с молекулярными колебаниями и поляритонным излучением. Здесь помимо волновой проявляется локальная нестационарность, связанная с конечными временами молекулярной релаксации.

Изложение основного материала книги отталкивается от проблем нелинейной оптики. Однако в силу общности понятий о волновых пучках и пакетах, дифракции и дисперсии волн многие закономерности, установленные на примере взаимодействия световых волн, в равной степени относятся к волнам другой физической природы. Поэтому автор надеется, что книга представит интерес не только для специалистов в области нелинейной оптики, но и для более широкого круга физиков, изучающих нелинейные волны.

Материал отдельных глав книги был прочитан автором на Международных школах по когерентной оптике (Бехине, СССР — 1982; Бухарест, СРР — 1983; Янска Долина, СССР — 1987; Тбилиси — 1987), на физическом факультете Московского университета для слушателей спецотделения "Лазерная техника" в курсе "Дифракционные и дисперсионные явления в нелинейных средах" и для студентов радиофизического отделения в курсе "Теория волн". Поэтому книга по стилю изложения материала близка к учебному пособию и может быть использована при чтении спецкурсов по ряду специализаций. В книге описание электромагнитных волн ведется в гауссовой системе единиц.

Книга написана на основе исследований, выполненных автором на кафедре волновых процессов физического факультета МГУ. Начало этих работ относится к периоду 1963–1965 гг., когда академик Рем Викторович Хохлов привлек внимание автора к проблемам только зарождавшейся

в то время нелинейной квазиоптики, связанной с изучением самовоздействия и взаимодействия волновых пучков и импульсов. Первые работы, выполненные под руководством Р.В. Хохлова, надолго определили научные интересы автора в области физики нелинейных волн. Большую роль сыграло также плодотворное сотрудничество с С.А. Ахмановым, возглавляющим ныне кафедру общей физики и волновых процессов.

Автор приносит глубокую благодарность Ю.Н. Карамзину, А.К. Сухо-руковой, В.С. Азимову, Ю.Г. Гриню, В.И. Пустовому, Т.С. Филипчук и другим сотрудникам физического факультета, результаты совместных работ с которыми использованы при написании книги.

Автор признателен рецензенту Л.А. Большову, внимательно прочитавшему рукопись и высказавшему ценные замечания, учтенные при окончательной редакции книги.



## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A$  — амплитуда волны  
 $a$  — поперечный радиус волнового пучка  
 $D$  — коэффициент дифракционного или дисперсионного расплывания  
 $E$  — распределение амплитуды волны на границе среды  
 $I$  — интенсивность волны  
 $j$  — номер волны  
 $k$  — волновое число  
 $l$  — длина нелинейной среды  
 $l_a$  — апертурная длина сноса энергии пучков  
 $l_d$  — длина дисперсионного расплывания пакетов  
 $l_T$  — длина группового запаздывания  
 $P$  — мощность  
 $Q$  — амплитуда молекулярных колебаний  
 $R_d$  — длина дифракционного расплывания пучков  
 $u$  — групповая скорость  
 $W$  — энергия волнового пакета  
 $x, y$  — поперечные координаты  
 $z$  — продольная координата  
 $\beta$  — угол между лучевыми векторами  
 $\Gamma$  — инкремент параметрического усиления  
 $\gamma$  — коэффициент нелинейной связи амплитуд  
 $\Delta k$  — волновая расстройка  
 $\vartheta, \varphi$  — углы наблюдения  
 $\lambda$  — длина волны  
 $\nu$  — расстройка групповых скоростей  
 $\tau$  — длительность импульса  
 $\chi_2$  — квадратичная восприимчивость  
 $\Omega$  — сдвиг частоты  
 $\omega$  — несущая частота  
 $\eta$  — характеристическая переменная для волнового пакета

**КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ  
ТРЕХВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ**

В этой главе излагается методика исследования резонансных нелинейных взаимодействий волновых пакетов и пучков, имеющих электромагнитную природу. Нелинейное распространение таких волн описывается уравнениями Максвелла совместно с материальными уравнениями. В силу огромной сложности решения этих уравнений возникает необходимость в разработке приближенных методов, основанных на введении малых параметров.

В слабонелинейных и слабопоглощающих средах амплитуды волновых пучков и пакетов являются медленными функциями координат и времени. Этот факт используется для упрощения нелинейных волновых уравнений, заключающегося в переходе к укороченным уравнениям для медленно меняющихся амплитуд.

В первом приближении по малому параметру трехволновые взаимодействия описываются уравнениями нестационарной геометрической оптики для лучевых амплитуд, учитывающими различие групповых скоростей по модулю и направлению. Во втором, квазиоптическом, приближении учитывается диффузия лучевых амплитуд в область геометрической тени. Это позволяет описать дифракцию и дисперсионные эффекты второго порядка в нелинейных средах. Так как нелинейные среды, в которых осуществляются трехволновые взаимодействия, часто являются анизотропными (например, в оптике), то особое внимание в этой главе уделено обобщению метода параболического уравнения для описания дифракции пучков в анизотропных кристаллах.

Далее в рамках геометрооптических и параболических уравнений развиваются принципы теории подобия трехволновых взаимодействий и пространственно-временной аналогии между поведением пучков и волновых пакетов, позволяющие исследовать нелинейные явления, в наиболее общей форме.

В конце главы обсуждаются третье приближение в теории линейной дисперсии и дисперсия коэффициентов нелинейной связи амплитуд взаимодействующих волн.

### § 1.1. Уравнения нелинейной электродинамики в диспергирующих средах

Распространение интенсивных электромагнитных волн в немагнитной среде, где  $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}$ , описывается в рамках классической электродинамики волновым уравнением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{D}}}{\partial t^2} = 0, \quad \vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{E}} + 4\pi \vec{\mathcal{P}}. \quad (1.1)$$

Поляризация диэлектрика  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}^{(л)} + \vec{\mathcal{P}}^{(нл)}$  связана с напряженностью поля  $\vec{\mathcal{E}}$  в общем случае функционалом (см., например, [1, 2]). С учетом временной дисперсии  $i$ -я компонента линейной части вектора поляризации имеет вид

$$\mathcal{P}_i^{(л)} = \int_0^\infty dt' \chi_{ij}(t') \mathcal{E}_j(t-t'), \quad (1.2)$$

где по немому индексу  $j$  осуществляется суммирование.

Нелинейную часть поляризации можно представить в виде разложения по степеням напряженности электрического поля  $\mathcal{E}$ , так как практически всегда поле световой волны мало по сравнению с внутриатомным  $\mathcal{E}_a$  (параметр разложения  $\mu_a = \mathcal{E}/\mathcal{E}_a \ll 1$ ). В этом случае

$$\mathcal{P}_i^{(нл)} = \iint_0^\infty dt' dt'' \chi_{ijk}(t', t'') \mathcal{E}_j(t-t') \mathcal{E}_k(t-t'-t'') + \dots \quad (1.3)$$

Здесь мы учли только квадратичный по полю член разложения, так как именно он обеспечивает развитие трехчастотных взаимодействий электромагнитных волн [1–8]. Последующие члены разложения в (1.3) ответственны за четырехчастотное взаимодействие [1, 2, 9–11] и самовоздействие волн [12–16] и т.д.

В недиспергирующих средах интегральные представления (1.2), (1.3) переходят в алгебраические:

$$\mathcal{P}_i^{(л)} = \chi_{ij} \mathcal{E}_j, \quad \mathcal{P}_i^{(нл)} = \chi_{ijk} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k + \dots \quad (1.4)$$

В нелинейных средах без дисперсии (1.4) или при слабой дисперсии возможно образование ударных электромагнитных волн, означающее каскадное возбуждение большого числа гармоник [17–19].

Для оптических волн дисперсия играет принципиальную роль — в эффективное взаимодействие вступает небольшое число волн, как правило две-четыре волны, для которых подбираются специальные условия согласования фазовых скоростей. Таким образом, для описания трехчастотного взаимодействия волновых пакетов необходимо использовать материальные уравнения в виде (1.2), (1.3). Это имеет первостепенное значение для нелинейной оптики пико- и фемтосекундных импульсов [20, 21]. С линейной дисперсией связаны эффекты критического фазового синхронизма, группового запаздывания и дисперсионного распыливания взаимодействующих импульсов. В ряде случаев необходимо учитывать и дисперсию нелинейных свойств среды, однако вдали от частотных резонансов она относительно слаба. Отметим также, что в области прозрач-

ности среды, представляющей наибольший интерес, диссипация энергии волн мала — характерная длина затухания много больше длины волны.

Таким образом, будем считать среду слабонелинейной, слабодиспергирующей и слабопоглощающей. Следует подчеркнуть, что такая ситуация характерна не только для оптики, но и для взаимодействия электромагнитных волн в плазме, для акустических взаимодействий и т.д. Используя этот факт, запишем волновое уравнение (1.1) в виде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{D}}(\pi)' = \frac{4\pi\mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{\mathcal{F}}^{(нл)} + \vec{\mathcal{F}}^{(л)}], \quad (1.5)$$

где  $\vec{\mathcal{D}}(\pi)'$  и  $\vec{\mathcal{F}}^{(л)}$  связаны с действительной  $\chi'_{ij}$  и мнимой  $\chi''_{ij}$  частями линейной восприимчивости соответственно. Малый параметр  $\mu_0$  характеризует отличие среды от принятой нами линейной недиссипативной модели.

Для многих практических задач значительный интерес представляют квазиплоские и квазимонохроматические волны, или, иными словами, волновые пучки и пакеты. Они обладают малой угловой расходимостью и узким частотным спектром. В оптике такие свойства присущи лазерному излучению. Это позволяет применить к анализу нелинейных явлений метод медленно меняющихся амплитуд, согласно которому суммарное поле трех взаимодействующих волн запишем следующим образом:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 A_j(\mu_1 z, \mu_2 x, \mu_3 y, \mu_4 t) \exp[i(\omega_j t - k_j r)] + \text{к.с.}, \quad (1.6)$$

где  $A_j$  — комплексная амплитуда бегущей волны с частотой  $\omega_j$  и волновым вектором  $k_j$  ( $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны),  $\mu$  — малые параметры, характеризующие медленность изменения амплитуды в пространстве и во времени по сравнению с быстрыми изменениями эйканала плоской волны (экспоненциальный множитель). Запись (1.6) описывает волновое поле пучков с характерным масштабом пространственной модуляции  $a \gg \lambda$  и импульсных сигналов с масштабом временной модуляции  $\tau \gg \lambda/u$ ;  $u$  — скорость распространения волны. Так как факторы, влияющие на изменение огибающих волновых пакетов и пучков (дифракция, дисперсия, диссипация, нелинейность) имеют, вообще говоря, разный порядок малости, то в зависимости от их соотношения укороченные уравнения для амплитуд приобретают различный вид. Так, в первом приближении по малым параметрам  $\mu$  из (1.5) следуют уравнения геометрической оптики, а во втором — параболические уравнения с мнимыми коэффициентами диффузии лучевых амплитуд. Вывод укороченных уравнений для амплитуд обсуждается в следующих параграфах этой главы.

## § 1.2. Дифракция волновых пучков в анизотропных средах

Рассмотрим распространение в линейной непоглощающей среде ( $\mu_0 \rightarrow 0$ ) монохроматической волны ( $\mu_4 = 0$ ), для которой волновое уравнение (1.5) переходит в уравнение Гельмгольца

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} + (\omega/c)^2 \hat{\epsilon}(\omega) \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad (1.7)$$

где  $\hat{\epsilon}(\omega) = 1 + 4\pi\hat{\chi}(\omega)$  — спектральный образ тензора диэлектрической

проницаемости. Подставляя (1.6) в (1.7), находим уравнение

$$\text{rot rot } A - i [k [\nabla A]] - i [\nabla [kA]] + [k[kA]] + (\omega/c)^2 \hat{\epsilon} A = 0, \quad (1.8)$$

которое описывает поведение амплитуд невзаимодействующих волн в линейной анизотропной среде. Для случая распространения волновых пучков (1.8) можно упростить с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

**Приближение геометрической оптики.** В нулевом приближении ( $\mu = 0$ ) в среде бежит плоская волна постоянной амплитуды и фазы,

$$A = eE_0, \quad (1.9)$$

вектор поляризации  $e$  и волновой вектор  $k$  которой связаны соотношением

$$[k[ke]] + (\omega/c)^2 \hat{\epsilon} e = 0. \quad (1.10)$$

Приравненный к нулю определитель системы однородных уравнений (1.10) дает дисперсионное уравнение четвертого порядка относительно компонент  $k_x, k_y, k_z$ , решение которого представляет собой две поверхности волновых векторов. Каждому заданному направлению распространения  $k/k$  соответствуют два различных значения волнового числа  $k = n\omega/c$  ( $n$  — показатель преломления), т.е. имеются две нормальные волны, распространяющиеся с разными фазовыми скоростями. Одна из них называется обыкновенной, другая — необыкновенной. Нормаль к поверхности волновых векторов указывает направление лучевого вектора  $s$ , который составляет с волновым вектором  $k$  угол  $\beta$ , называемый углом двулучепреломления или углом анизотропии (рис. 1.1).

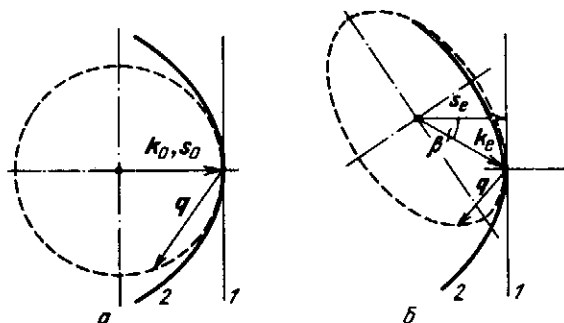


Рис. 1.1. Поперечные сечения поверхностей волновых векторов в однородном кристалле для обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн:

штриховая линия — решение волнового уравнения; касательная  $l$  — приближение геометрической оптики; парабола 2 — квазиоптическое приближение

Упростим теперь (1.8), считая медленные изменения амплитуды  $A$  в первом приближении равноправными по всем направлениям ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ). Учитывая, что при слабой дифракции вектор поляризации волны в основном сохраняет свое положение в пространстве, амплитуду можно представить в виде [1]

$$A = eA(\mu r) + \mu U(r). \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.8), получим в первом приближении по  $\mu$  укороченное уравнение для лучевой амплитуды [1]

$$[e[ke]] \nabla A = 0, \quad (1.12)$$

которое имеет общее решение

$$A = A([sr], [s[sr]]). \quad (1.13)$$

В данном приближении амплитуда волны является произвольной функцией координат, перпендикулярных лучу  $s$ . Таким образом, уравнение (1.12) соответствует приближению геометрической оптики; при этом все лучи, составляющие пучок, параллельны друг другу.

**Метод параболического уравнения в анизотропных кристаллах.** Второе приближение в методе медленно меняющихся амплитуд учитывает дифракцию волновых пучков. Впервые этим методом было получено параболическое уравнение для лучевой амплитуды в задаче дифракции радиоволн над земной поверхностью [22–24]. Затем метод параболического уравнения нашел широкое применение для нахождения мод открытого резонатора, описания распространения лазерных пучков [25, 26].

Применяем метод параболического уравнения для анализа дифракции волновых пучков в анизотропных средах. Согласно этому методу амплитуда вдоль направления распространения пучка изменяется более медленно, чем в перпендикулярной плоскости (в поперечном сечении), где происходит переход из области света в область тени ( $\mu = \mu_1 = \mu_2^2 = \mu_3^2$ ):

$$A = e A(\mu^{1/2} x_s, \mu^{1/2} y_s, \mu z_s) + \mu U(r). \quad (1.14)$$

Здесь введены лучевые координаты  $x_s \parallel e$ ,  $y_s \parallel h = [se]$ ,  $z_s \parallel s$ . Подставляя (1.14) в (1.8), можно прийти к параболическому уравнению [7–9]

$$2i(ks) \frac{\partial A}{\partial z_s} = \frac{(ks)(e\hat{e}e)}{(k\hat{e}e)} \frac{\partial^2 A}{\partial x_s^2} + \left[ 1 - \frac{(ke)^2}{k^2 - (\omega/c)^2 h\hat{e}h} \right] \frac{\partial^2 A}{\partial y_s^2}. \quad (1.15)$$

В одноосном кристалле (1.15) можно преобразовать с помощью известных соотношений кристаллооптики [27, 28] к виду

$$2i(k\hat{e}s) \frac{\partial A}{\partial z_s} = (e\hat{e}e) \frac{\partial^2 A}{\partial x_s^2} + (h\hat{e}h) \frac{\partial^2 A}{\partial y_s^2}. \quad (1.16)$$

Впервые (1.16) было получено в [29] для случая двумерной дифракции и в [30] для трехмерных задач. Вывод (1.16) был выполнен также в [31, 32]. Из анализа процедуры вывода параболических уравнений следует, что малый параметр  $\mu$  в (1.14) равен по порядку величины  $(ka)^{-2}$ .

При дифракции обыкновенной волны ( $k \parallel s$ ) с амплитудой  $A_0$  уравнение (1.16), как и следовало ожидать, принимает такую же форму, как в изотропной среде [24],

$$2ik_0 \frac{\partial A_0}{\partial z_s} = \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y_s^2}. \quad (1.17)$$

Согласно (1.17) дифракционное расплывание электромагнитного поля трактуется как результат поперечной диффузии лучевых амплитуд. При

этом в силу малости коэффициента диффузии параболическое уравнение описывает искажения не только амплитудного профиля волны, но и ее фазового фронта. Очевидно, уравнения (1.15)–(1.17) можно применить в линейной оптике к расчету резонаторов с анизотропным заполнением.

**Поверхности волновых векторов.** Характер приближений, сделанных при выводе параболических уравнений (1.15)–(1.17), можно более ясно представить, разлагая поле по плоским волнам. Положим амплитуду обыкновенной волны равной

$$A_0 = \exp(-iqr). \quad (1.18)$$

Тогда волновой вектор угловой компоненты

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}, \quad (1.19)$$

и поверхность волновых векторов обыкновенной волны имеет сферическую форму:  $|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}|^2 = k_0^2$ , или

$$2k_0q_z + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 0. \quad (1.20)$$

В квазиоптическом приближении (1.17) эта поверхность аппроксимируется параболоидом (пренебрегаем членом  $q_z^2$ )

$$2k_0q_z + q_x^2 + q_y^2 = 0. \quad (1.21)$$

На рис. 1.1а представлены графики сечений поверхностей волновых векторов (1.20) и (1.21) плоскостью  $q_y = 0$ . В точке  $\mathbf{q} = 0$  параболоид и сфера имеют второй порядок касания (они имеют одинаковый радиус кривизны, равный  $k_0$ ). Такая же картина сохраняется в изотропной среде.

Аналогичным образом исследуем поверхность волновых векторов необыкновенной волны. Подставляя (1.19) в (1.16), находим, что эта поверхность имеет форму эллипсоида

$$2k_e \hat{e} s q_z + 2e \hat{e} s q_x q_z + s \hat{e} s q_z^2 + e \hat{e} e q_x^2 + h \hat{e} h q_y^2 = 0. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) легко получить, если воспользоваться соотношением  $\mathbf{k} \hat{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \epsilon_o \epsilon_e \omega^2 / c^2$  [23] и подставить в него  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_e + \mathbf{q}$ . В квазиоптическом приближении (1.16) вместо (1.22) получаем уравнение параболоида (рис. 1.1б)

$$2k_e \hat{e} s q_z + e \hat{e} e q_x^2 + h \hat{e} h q_y^2 = 0, \quad (1.23)$$

который имеет в точке  $\mathbf{q} = 0$  второй порядок касания с эллипсоидом (1.22).

Таким образом, при переходе от волнового уравнения (1.7) к параболическим уравнениям (1.15)–(1.17) поверхности волновых векторов аппроксимируются параболоидами, которые в точке, соответствующей среднему волновому вектору  $\mathbf{k}$ , имеют второй порядок касания с указанными поверхностями; ось параболоида совпадает с направлением лучевого вектора, а радиусы кривизны двух поверхностей равны друг другу. Так как угловой спектр медленно модулированных волн (широких пучков) достаточно узок,  $q/k \sim \mu^{1/2}$ , то такое приближение оправдано.

### § 1.3. Квазиизотропное приближение при слабой анизотропии

В анизотропной среде коэффициенты диффузии необыкновенной волны (см. (1.16)) различны вдоль осей  $x_s$  и  $y_s$  (в главной оптической плоскости и перпендикулярной ей) и меняются в зависимости от направления распространения волны относительно оптических осей кристалла. Вместе с тем в оптических экспериментах используют кристаллы, угол анизотропии которых мал,  $\beta \sim \mu^{1/2}$ . При этом условии можно пренебречь анизотропией поперечной диффузии комплексной амплитуды. Полагая в (1.16) диэлектрическую проницаемость  $\hat{\epsilon}$  скалярной величиной, приходим к параболическому уравнению

$$2ik_e \frac{\partial A_e}{\partial z_s} = \frac{\partial^2 A_e}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 A_e}{\partial y_s^2}, \quad (1.24)$$

описывающему дифракцию необыкновенной волны в квазиизотропном приближении. Сравнение (1.17) и (1.24) показывает, что дифракция необыкновенной волны в слабоанизотропной среде проходит по тем же законам, что и дифракция обыкновенной волны. Однако из-за несовпадения лучевых координат обыкновенной и необыкновенной волн наблюдается различие между поведением их фазовых фронтов.

При использовании квазиизотропного приближения (1.24) эллипсоид (1.22) аппроксимируется параблоидом типа (1.21). Хотя эти поверхности имеют только первый порядок касания, отличие их при  $q \ll k$  в слабоанизотропной среде незначительно.

**Краевые задачи. Наклонное и нормальное распространения воли.** В общем случае дифрагирующая волна распространяется под некоторым углом  $\beta$  к нормали  $\mathbf{n}$  к плоской грани кристалла. Расчет дифракционного поля наклонной волны сводится в квазиоптическом приближении к решению параболического уравнения (см. (1.17)–(1.24))

$$\frac{\partial A}{\partial z_s} = \frac{1}{2ik} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y_s^2} \right) \quad (1.25)$$

с граничным условием

$$A(z_s = x_s \operatorname{tg} \beta) = E(x_s / \cos \beta, y_s).$$

Решение поставленной задачи в системе координат  $x, y, z$ , связанной с кристаллом ( $z \parallel \mathbf{n}, x \parallel x_s$ ), имеет следующий вид:

$$A = \frac{ik \cos \beta}{2z} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{x+z \operatorname{ctg} \beta} d\zeta \frac{E(\zeta, \xi)}{[z + (x - \zeta) \operatorname{tg} \beta]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{ik \cos \beta (\zeta - x - z \operatorname{tg} \beta)^2}{2[z + (x - \zeta) \operatorname{tg} \beta]} - \frac{ik(y - \xi)^2}{2z} \right\}. \quad (1.26)$$

Интегрирование (1.26) затруднительно даже при простых начальных распределениях амплитуды: дифракция на щели [29], гауссов пучок. Вместе с тем в типичных задачах нелинейной оптики интерес представляют пучки,



распространяющиеся под малыми углами к нормали. Использование этого обстоятельства позволяет существенно упростить краевую задачу, сведя ее к задаче Коши.

На расстояниях  $z \gg a \operatorname{tg} \beta$  ( $a$  — ширина пучка) решение (1.26) можно записать для малых углов следующим образом:

$$A = \frac{ik}{2z} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta E(\xi, \eta) \exp \left[ -\frac{ik(\xi - x - \beta z)^2 + ik(y - \eta)^2}{2z} \right]. \quad (1.27)$$

Чем меньше угол наклона пучка, тем скорее (1.26) переходит в (1.27). Более того, для широких пучков ( $a \gg \lambda$ ) решением (1.27) можно пользоваться практически при любых  $z$  (так как  $a \operatorname{tg} \beta \ll a^2/\lambda$ ).

Решение (1.27) удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2ik} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) \quad (1.28)$$

и граничному условию

$$A(z=0) = E(x, y). \quad (1.29)$$

Таким образом, расчет дифракции волн, распространяющихся почти вдоль нормали к границе среды, можно проводить, решая задачу Коши для уравнения (1.28). Диффузия амплитуды происходит теперь не поперек лучей, а вдоль плоскостей, параллельных входной грани кристалла.

В нелинейной оптике встречаются также задачи с объемными излучателями, роль которых играют волны поляризации, возбуждаемые в среде на комбинационных частотах (гл. 12). Такая ситуация возникает, например, при расчете гармоник заданного поля основного излучения (гл. 11). Решение неоднородного параболического уравнения, учитывающего действие объемного источника  $Q$ ,

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2ik} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + Q(x, y, z) \quad (1.30)$$

с граничным условием (1.29) дается формулой

$$A = \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta E(\xi, \eta) G(x, \xi, y, \eta, z) + \int_0^z d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta Q(\xi, \eta, \tau) G(x, \xi, y, \eta, z - \tau). \quad (1.31)$$

Здесь введена функция Грина

$$G = \frac{ik}{2z} \exp \left[ -\frac{ik(\xi - x + \beta z)^2 + ik(\eta - y)^2}{2z} \right]. \quad (1.32)$$

При нормальном падении световой волны на переднюю грань кристалла для обыкновенно поляризованной составляющей ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{h} \parallel z$ ) угол наклона луча  $\beta = 0$ , а для необыкновенно поляризованной составляющей угол наклона равен углу двулучепреломления.

## § 1.4. Распространение волновых пакетов в диспергирующих средах

Распространение протяженных волновых пакетов в среде с временной дисперсией (1.2) можно рассмотреть по той же схеме, что и поведение волновых пучков (§ 1.2, 1.3).

В первом приближении теории дисперсии огибающие пакетов сохраняют свою форму:

$$A = A(\eta), \quad \eta = t - z/u, \quad (1.33)$$

где  $u = (\partial k / \partial \omega)^{-1}$  — групповая скорость. Уравнение геометрической оптики, которому подчиняется амплитуда (1.33), имеет простой вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (1.34)$$

Во втором приближении теории дисперсии огибающая волнового пакета меняется по мере его распространения по закону

$$A = eA(\mu^{1/2}\eta, \mu z_s). \quad (1.35)$$

Медленные изменения амплитуды описываются с точностью до членов порядка  $\mu$  параболическим уравнением [52]

$$\frac{\partial A}{\partial z_s} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}. \quad (1.36)$$

Диффузия амплитуды волнового пакета происходит вдоль оси времени относительно его "центра тяжести", движущегося с групповой скоростью. Коэффициент диффузии зависит от дисперсии групповой скорости:  $\partial^2 k / \partial \omega^2 = \partial u^{-1} / \partial \omega$ . Решение уравнения (1.36) с граничным условием  $A(z=0) = E(t)$  легко находится с помощью соответствующей функции Грина (ср. с решением пространственной задачи (1.30)).

Рассматривая отдельную спектральную компоненту волнового пакета

$$A = \exp [i(\Omega t - qz_s)], \quad (1.37)$$

где  $\Omega$  — отклонение от несущей частоты, можно найти вид дисперсионной характеристики, отвечающей тому или иному приближению. Геометро-оптическое приближение (1.33) обосновано, когда дисперсию среды можно

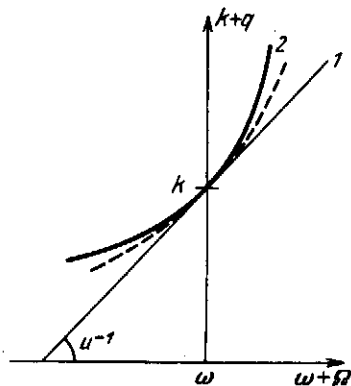


Рис. 1.2. Зависимость волнового вектора от частоты в диспергирующей среде:

штриховая линия — решение волнового уравнения; касательная  $l$  — первое приближение в теории дисперсии; парабола  $2$  — второе приближение

считать линейной функцией частоты (рис. 1.2, линия 1):

$$q = \Omega/\mu. \quad (1.38)$$

В квазиоптическом приближении (1.36) имеет место параболическая аппроксимация дисперсионных свойств (рис. 1.2, линия 2):

$$q = \frac{\Omega}{u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Omega^2. \quad (1.39)$$

**Пространственно-модулированные квазимонохроматические волны.** В общем случае световая волна промодулирована как в пространстве, так и во времени. Распространение медленно модулированных волн с амплитудой ( $\mu = \mu_1 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = \mu_4^2$ )

$$A = eA(\mu^{1/2}x_s, \mu^{1/2}y_s, \mu^{1/2}\eta, \mu z) \quad (1.40)$$

описывается в квазиоптическом приближении параболическим уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} = \\ = \frac{1}{2ik} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (1.41)$$

с граничным условием

$$A(z = 0) = E(x, y, t). \quad (1.42)$$

Решение этой задачи в общем виде не представляет труда. Однако в зависимости от масштабов пространственной и временной модуляций ( $a$  и  $\tau$  соответственно) дифракционные и дисперсионные эффекты имеют различный порядок.

Существенные изменения амплитуды волны вдоль нормали (оси  $z$ ) за счет дифракции происходят на расстоянии

$$R_d = ka^2/2,$$

а за счет эффекта дисперсионного расплывания — на расстоянии

$$I_d = (\tau^2/2) (\partial^2 k / \partial \omega^2)^{-1}.$$

Если длина среды ограничена,  $0 < z < l$ , то при условии  $l < R_d$  можно не учитывать дифракционное расплывание пучка и ответственные за него вторые производные по поперечным координатам в (1.41); при условии  $l < I_d$  можно отбросить в (1.41) вторую производную по сопровождающей координате  $\eta$ . Если одновременно  $l < R_d, I_d$ , то распространение волны описывается уравнением первого порядка (приближение геометрической оптики).

### § 1.5. Трехчастотные взаимодействия волновых пучков и импульсов

Метод параболического уравнения можно обобщить на задачи о взаимодействии квазиплоских, квазимонохроматических волн (1.6) в слабонелинейной среде (1.5). Предполагая медленную зависимость амплитуд взаимодействующих волн в виде (1.40) и подставляя (1.6) в (1.5), можно

получить с учетом нелинейных членов первого порядка малости ( $\mu_0 = \mu_1$ ) систему квазилинейных параболических уравнений ( $j = 1, 2, 3$ )

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \beta_j \frac{\partial A_j}{\partial x} + \nu_{jm} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_m} + \frac{i}{2k_j} \left( \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} \right) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2} \frac{\partial^2 A_j}{\partial \eta_m^2} + \delta_j A_j = F_j(A_1, A_2, A_3), \quad (1.43)$$

где  $\delta_j$  — коэффициент линейного затухания,  $\eta_m = t - z/u_m$  — сопровождающая координата  $m$ -й волны,  $\nu_{jm} = u_j^{-1} - u_m^{-1}$  — расстройка обратных величин групповых скоростей,

$$F_j = - \frac{2\pi i \omega_j^2}{c^2 k_j} P^{(нл)}(\omega_j) \quad (1.44)$$

и  $P^{(нл)}(\omega_j)$  — амплитуды фурье-компонент волн нелинейной поляризации. Конкретизируем вид функций  $F_j$  для взаимодействия волн в квадратично-нелинейной среде.

Пусть в среде с отличной от нуля квадратичной восприимчивостью (существуют компоненты  $\chi_{ijk} \neq 0$ ) распространяются три волны, средние частоты и средние волновые векторы которых удовлетворяют соотношениям синхронизма:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_3 = k_1 + k_2 + \Delta k. \quad (1.45)$$

В этом случае поляризацию среды на суммарной частоте можно найти из (1.3) [1, 2]:

$$P^{(нл)}(\omega_3) = \iint_0^\infty dt' dt'' e_3 \hat{\chi}_2(t', t'') e_1 e_2 A_1(r, t - t') \times \\ \times A_2(r, t - t' - t'') \exp(-i\omega_3 t' - i\omega_2 t'' - i\Delta k r), \quad (1.46)$$

где  $\hat{\chi}_2$  — тензор с компонентами  $\chi_{ijk}$ . Нелинейная восприимчивость  $\chi_{ijk}$  обусловлена, как и линейная  $\chi_{ij}$ , весьма быстрыми электронными процессами, времена релаксации которых порядка  $10^{-15}$  с. Однако в отличие от линейной восприимчивости эффекты, связанные с дисперсией  $\chi_{ijk}$ , имеют вдали от резонансов порядок  $\mu^2$  и поэтому пренебрежимо малы. Таким образом, при исследовании трехчастотных взаимодействий модулированных волн нелинейность среды можно учитывать квазистатически,

$$P^{(нл)}(\omega_3) = e_3 \hat{\chi}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) e_1 e_2 A_1 A_2 e^{-i\Delta k r}, \quad (1.47)$$

с помощью спектральных компонент  $\chi_{ijk}$ , взятых для средних частот:

$$\chi_{ijk}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \iint_0^\infty dt' dt'' \chi_{ijk}(t', t'') e^{-i\omega_3 t' - i\omega_2 t''}. \quad (1.48)$$

В области прозрачности для компонент тензора  $\chi_{ijk}$  установлены соотношения симметрии по отношению к перестановке частот и пространственных индексов [1-3],

$$\chi_{ijk}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2) = \chi_{kij}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1), \quad (1.49)$$

связывающие между собой прямые и обратные нелинейные процессы (сложение и вычитание частот), которые протекают одновременно при взаимодействии трех волн. Соотношения (1.49) обеспечивают выполнение закона сохранения энергии трех волн.

Амплитуды волн поляризаций на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  находятся аналогичным образом. Связь между ними устанавливается с помощью (1.49). В итоге правые части (1.44) укороченных уравнений (1.43) можно представить в виде

$$F_j = -i\gamma_j \partial U / \partial A_j^*, \quad (1.50)$$

где функция  $U$  пропорциональна усредненной по времени свободной энергии элемента объема нелинейной среды и

$$\gamma_j = 2\pi\chi_2\omega_j/cn_j \quad (1.51)$$

— коэффициент нелинейной связи волн,  $\chi_2 = e_3 \hat{\chi}_{22} e_1 e_2$ .

Большое значение для анализа трехволновых взаимодействий имеют законы сохранения или интегралы движения волновых пакетов и пучков. Для энергий волн  $W_j = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy d\eta_m |A_j|^2$  в недиссипативной среде выполняются соотношения Мэнли — Роу [1–2]:

$$\frac{W_1(z) - W_1(0)}{\omega_1} = \frac{W_2(z) - W_2(0)}{\omega_2} = \frac{-W_3(z) + W_3(0)}{\omega_3} \quad (1.52)$$

и закон сохранения полной энергии волн:  $\sum_{j=1}^3 W_j(z) = \text{const}$ . На квантовом языке (1.52) определяют изменение числа квантов в процессах слияния и распада. В случае взаимодействия немодулированных волн соотношения типа (1.52) справедливы для интенсивностей  $I_j = |A_j|^2$ .

Законы сохранения энергии не содержат информацию о фазовой модуляции взаимодействующих волн, их дифракции и дисперсии. Эти эффекты учитываются в интеграле движения

$$\begin{aligned} J_3 = & \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy d\eta_m \left\{ -2 |A_1 A_2 A_3| \cos \Phi + \frac{\Delta k}{\gamma_3} |A_3|^2 + \right. \\ & + \sum_{j=1}^3 \gamma_j^{-1} \left[ \beta_j |A_j|^2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \nu_{jm} |A_j|^2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_m} + \frac{1}{2k_j} \left| \frac{\partial A_j}{\partial x} \right| + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2k_j} \left| \frac{\partial A_j}{\partial y} \right|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2} \left| \frac{\partial A_j}{\partial \eta_m} \right|^2 \right] \right\}, \quad (1.53) \end{aligned}$$

где  $\Phi = \Phi_3 - \Phi_1 - \Phi_2 + \Delta kz$  — обобщенная фаза трехволнового взаимодействия,  $\Phi_j$  — фаза волны  $A_j = |A_j| \exp(-i\Phi_j)$ . Интеграл движения (1.53) определяет, в частности, условия захвата пучков и импульсов в трехчастотные связанные солитоны (гл. 10). Он вместе с соотношениями Мэнли — Роу (1.52) используется при построении алгоритмов численного решения уравнений (1.43).

Метод укороченных уравнений (1.43) широко используется для описания взаимодействия волн в физике плазмы [33–35], в гидродинамике [36–38], в нелинейной акустике [39–41] и других областях волновой физики.

### § 1.6. Пространственно-временная аналогия

При квазиоптическом описании нелинейных волновых эффектов можно в ряде случаев выявить закономерности их протекания без предварительного решения параболических уравнений, используя математическую аналогию краевых задач [42].

Нелинейные взаимодействия квазиплоских монохроматических волн описываются уравнениями типа (1.43):

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \beta_j \frac{\partial A_j}{\partial x} + \frac{i}{2k_j} \left( \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} \right) = F_j(A_1, A_2, A_3). \quad (1.54)$$

С другой стороны, уравнения, описывающие нелинейные взаимодействия и самовоздействия медленно модулированных во времени плоских волн на безынерционной нелинейности, имеют вид

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + v_{jm} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_m} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2} \frac{\partial^2 A_j}{\partial \eta_m^2} = F_j(A_1, A_2, A_3). \quad (1.55)$$

Уравнение (1.55) математически эквивалентно (1.54) в двумерном случае ( $\partial^2 A/\partial y^2 = 0$ ). Этому факту соответствует аналогия в поведении волнового пакета и двумерного волнового пучка. При этом можно сопоставить характерные параметры пространственной и временной задач (рис. 1.3). Движение импульсов по характеристикам  $\eta_j = \eta_m + v_{jm}z$  подобно распространению пучков по лучам  $x - \beta_j z$ .

Пространственному масштабу медленной модуляции лучевой амплитуды по координате  $x$  соответствует временной масштаб по характеристике  $\eta$ . Например, ширине пучка  $a$  — длительности импульса  $\tau$ , угловой компоненте  $q$  — спектральной компоненте  $\Omega$ , угловой расходимости  $\alpha \approx (ka)^{-1}$  — ширине частотного спектра импульса  $\Delta\omega \approx \tau^{-1}$ .

Углу наклона лучевого вектора к нормали  $\beta_j$  соответствует расстройка групповых скоростей  $v_{jm}$ . Здесь сопоставляются эффект пространственного разделения пучков, распространяющихся в среде по разным направлениям, и эффект расхождения волновых пакетов, распространяющихся с различными групповыми скоростями. Сопоставимы и масштабы проявления этих эффектов: апертурной длине  $l_a = a/|\beta_j|$  соответствует длина группового запаздывания  $l_{\tau jm} = \tau/|v_{jm}|$ .

Далее, дисперсионное распыление пакета подобно дифракционному расширению пучка; при этом коэффициент продольной диффузии пакета  $(-i/2)\partial^2 k/\partial \omega^2$  имеет свой аналог — коэффициент поперечной диффузии пучка  $i/2k$ . Продольному масштабу дифракционного расширения пучка — дифракционной длине пучка  $R_d = ka^2/2$  — соответствует во временной задаче длина дисперсионного распыления пакета  $l_d = (\tau^2/2)(\partial^2 k/\partial \omega^2)^{-1}$ .

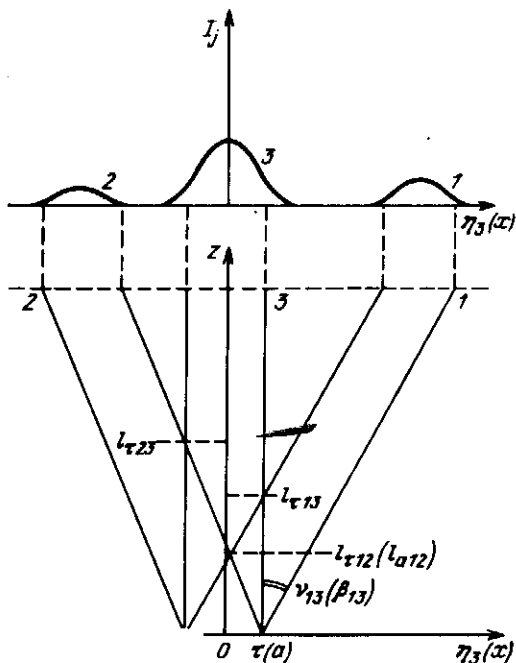


Рис. 1.3. Иллюстрация пространственно-временной аналогии между неколлинеарным распространением пучков разных частот  $\omega_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и движением волновых пакетов вдоль характеристик

Эту аналогию можно распространить и на нелинейные процессы. Так, результаты расчетов нелинейных явлений, выполненных для пространственно-модулированных волн, применимы для анализа взаимодействия импульсов. К указанной аналогии мы будем неоднократно обращаться в дальнейшем, однако следует иметь в виду ее ограниченный характер. Не все математические аналогии временных эффектов могут быть практически реализованы в пространстве при взаимодействии пучков, и наоборот.

### § 1.7. Теория подобия трехволновых взаимодействий

Теория подобия как метод исследования нашла широкое применение в современной науке и технике. Наибольшее развитие она получила в задачах механики [43], теплотехники [44] и электроэнергетики [45]. Методы теории подобия позволяют находить определенные классы аналитических решений, проводить анализ и обработку экспериментальных данных и т.д. Они оказываются чрезвычайно полезными при лабораторном и численном моделировании различных физических процессов и явлений.

С помощью методов теории подобия решение нелинейных волновых уравнений (1.43) представляется в так называемой критериальной форме, т.е. через критерии подобия, или  $\pi$ -комплексы. Безразмерные  $\pi$ -комплексы состояются из размерных параметров, характеризующих свойства нелинейной среды и начальные распределения амплитуд. Для их нахождения

надо привести волновое уравнение к безразмерному виду так, чтобы число независимых  $\pi$ -комплексов было минимальным. Критерии подобия связаны между собой функциональным соотношением, к которому можно применить  $\pi$ -теорему и ее следствия.

Покажем использование принципов теории подобия трехволновых взаимодействий на двух примерах: нестационарном взаимодействии коротких импульсов при расстройках групповых скоростей и взаимодействии дифрагирующих волновых пучков [45, 46].

**Нестационарное взаимодействие волновых пакетов.** Выпишем три связанных уравнения для амплитуд в первом приближении теории дисперсии

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + v_{3j} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_3} = -i\gamma_j \frac{\partial U}{\partial A_j^*} - \delta_j A_j \quad (1.56)$$

с граничными условиями

$$A_j(z=0) = E_{j0} f_j(t/\tau). \quad (1.57)$$

Начальная амплитуда  $E_{j0}$  связана с энергией волны:

$$W_{j0} = E_{j0}^2 \tau. \quad (1.58)$$

Введем теперь следующий набор безразмерных величин:

$$\bar{\eta}_3 = \frac{\eta_3}{\tau}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l_{\tau 31}}, \quad \bar{v}_{3j} = \frac{v_{3j}}{|\nu_{31}|},$$

$$\bar{\delta}_j = \delta_j l, \quad \Delta \bar{k} = \Delta k l_{\tau 31}, \quad (1.59)$$

$$\pi_j = \gamma_j l_{\tau 31} E_{10} E_{20} E_{30} E_{j0}^{-2} = \gamma_j l_{\tau 31} (W_{10} W_{20} W_{30} / \tau)^{1/2} W_{j0}^{-1}.$$

Общая запись нормированных амплитуд имеет вид ( $p = 1, 2, 3$ )

$$A_j = E_{j0} \bar{A}_j = (W_{j0} / \tau)^{1/2} \bar{A}_j(\bar{\eta}_3, \bar{z}, \bar{\delta}_p, \Delta \bar{k}, \bar{v}_{3p}, \pi_p). \quad (1.60)$$

Они находятся как решение задачи

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{z}} + \bar{v}_{3j} \frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{\eta}_3} = -i\pi_j \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{A}_j^*} - \bar{\delta}_j \bar{A}_j, \quad (1.61)$$

$$\bar{A}_j(\bar{z}=0) = f_j(\bar{\eta}_3).$$

Из рассмотрения (1.59), (1.60) следует, что два трехволновых взаимодействия (I и II) будут подобны друг другу, если подобны начальные распределения амплитуд,  $f_{j,I} = f_{j,II}$ , одинаковы соотношения между расстройками групповых скоростей,  $\bar{v}_{3j,I} = \bar{v}_{3j,II}$ , совпадают параметры  $\pi_j$ ,  $\Delta \bar{k}$ ,  $\bar{\delta}_j$  и наблюдение ведется в соответствующих точках:  $(\eta_3/\tau)_I = (\eta_3/\tau)_{II}$ ,  $(z/l_{\tau 31})_I = (z/l_{\tau 31})_{II}$ .

Интегрируя профиль интенсивности по времени, находим общее представление для энергии импульсов:

$$W_j(z) = W_{j0} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\eta}_3 |\bar{A}_j(\bar{\eta}_3, \bar{z}, \bar{\delta}_p, \Delta \bar{k}, \bar{v}_{3p}, \pi_p)|^2. \quad (1.62)$$

С помощью (1.60), (1.62) можно строить изограммы энергии, пиковых интенсивностей, длительностей импульсов в различных координатах, роль которых выполняют  $\pi$ -комплексы или их комбинации.



Отметим, что если одна из волн отсутствует на границе нелинейной среды, например  $f_1 \equiv 0$ , то соответствующую ей нормировочную амплитуду  $E_{10}$  можно выбрать произвольным образом, например  $E_{10} = E_{20}$  или  $E_{10} = E_{30}$ ; в ряде случаев целесообразно подобрать  $E_{10}$  так, чтобы нелинейный критерий подобия для этой волны был равен единице. Тогда из условия  $\pi_1 = 1$  находим

$$E_{10} = \gamma_1 E_{20} E_{30} l_{\tau 31}.$$

Такая нормировка особенно удобна при расчетах возбуждения волны  $A_1$  в приближении двух заданных полей  $A_2$  и  $A_3$ . Аналогичным образом следует поступать при возбуждении волн  $A_2$  и  $A_3$ .

Критериальная запись амплитуд волн и их энергий позволяет эффективно проводить, например, оптимизацию таких параметров, как длительность импульса накачки  $\tau$  (гл. 4, 5).

**Взаимодействие дифрагирующих волн.** Теория подобия в нелинейных задачах дифракции волн строится по той же схеме. При коллинеарном взаимодействии пучков (лучевые векторы параллельны оси  $z$ ,  $\beta_j = 0$ ) параболические уравнения (1.43) при переходе к критериям подобия принимают вид

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{z}} + i \frac{k_j}{k_3} \left( \frac{\partial^2 \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}_j}{\partial \bar{y}^2} \right) = -i \pi_j \frac{\partial \bar{U}_{\text{вз}}}{\partial \bar{A}_j^*} - \bar{\delta}_j \bar{A}_j, \quad (1.63)$$

$$\bar{A}_j(\bar{z} = 0) = f_j(\bar{x}, \bar{y}).$$

Здесь расстояние  $z$  нормировано на дифракционную длину  $R_{\text{дз}} = k_3 a^2 / 2$ , поперечные координаты — на начальный радиус пучка  $a$  и т.д.:

$$\bar{z} = z / 4R_{\text{дз}}, \quad \bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \bar{\delta}_j = 4\delta_j R_{\text{дз}}, \quad \Delta \bar{k} = 4\Delta k R_{\text{дз}}, \quad (1.64)$$

$$\pi_j = 4\gamma_j R_{\text{дз}} E_{10} E_{20} E_{30} E_{j0}^{-2} = 4\gamma_j R_{\text{дз}} (P_{10} P_{20} P_{30})^{1/2} (a P_{j0})^{-1}.$$

Мощность пучка частоты  $\omega_j$  равна ( $P_{j0} = E_{j0}^2 a^2$ )

$$P_j(\bar{z}) = P_{j0} \iint_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} d\bar{y} |\bar{A}_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, k_p/k_3, \bar{\delta}_p, \Delta \bar{k}, \pi_p)|^2 (p = 1, 2, 3). \quad (1.65)$$

Последнюю формулу можно применить для расчета оптимальной фокусировки пучка накачки, обеспечивающей достижение максимальной перекачки энергии в возбуждаемую волну. (максимального КПД преобразователя частоты).

Согласно соотношениям (1.64) дифракция двух пучков в линейной среде ( $\pi_j = 0$ ) подобна друг другу, если на входе в среду они имеют одинаковый закон распределения амплитуды и фазы,  $f_I = f_{II}$ . Тогда если первый пучок с начальной амплитудой  $a_I$  и волновым числом  $k_I$  имеет некоторое дифракционное поле в сечении  $z_I$ , то второй пучок с параметрами  $a_{II}$  и  $k_{II}$  будет иметь такую же картину дифракции в сечении  $z_{II} = z_I (k_{II} a_{II}^2 / k_I a_I^2)$  (рис. 1.4). В нелинейной среде подобие дифракции взаимодействующих пучков наблюдается, если одинаковы все другие  $\pi$ -комплексы:  $\Delta \bar{k}$ ,  $\bar{\delta}_j$ ,  $\pi_j$  и  $k_j/k_3$ .

Особый интерес представляет тот факт, что в рамках теории подобия можно сделать переход к нелинейной геометрической оптике, устремляя к нулю длину волны  $\lambda$ , при этом  $k \rightarrow \infty$ . Проследим с помощью (1.59)

Рис. 1.4. Подобие дифракции двух пучков разной апертуры:

на расстоянии  $z_{II} = (a_{II}/a_I)^2 z_I$  вторая волна имеет ту же картину распределения поля, что и первая при  $z_I$

за измерением критериев подобия  $\bar{z}$  и  $\pi_j$  (полагаем для простоты  $\delta_j, \Delta k = 0$ ). Видно, что при переходе к геометрической оптике  $\bar{z} \rightarrow 0$ , а  $\pi_j \rightarrow \infty$ . Но полагать  $\bar{z} = 0$  нельзя, так как при этом пропадает зависимость амплитуд от координаты  $z$ ;  $\pi$ -комплексы, содержащие нелинейность среды, также нельзя устранить из задачи. Здесь на помощь приходит  $\pi$ -теорема, согласно которой из двух  $\pi$ -комплексов можно образовать другой, сохраняющий конечную величину при  $k \rightarrow \infty$ . Очевидно, нужными комбинациями являются  $\bar{z}_{нг} = \bar{z} \pi_3^{1/2}$  и отношения  $\pi_j/\pi_3 = \gamma_j E_{30}^2 / \gamma_3 E_{j0}^2$ . Таким образом, в приближении геометрической оптики интенсивность на оси первого пучка записывается в виде ( $p = 1, 2, 3$ )

$$|A_1|^2 = E_{10}^2 |\bar{A}_1(\bar{z}_{нг}, \pi_p/\pi_3, k_p/k_3)|^2. \quad (1.66)$$

Видно, что характерным пространственным масштабом сильного нелинейного взаимодействия становится длина нелинейной рефракции

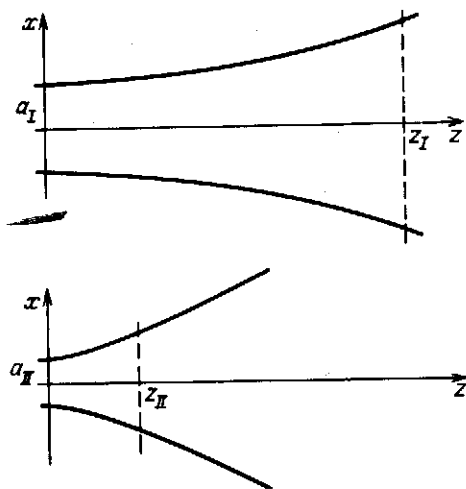
$$l_{нг} = \frac{2k_3 a^2}{\pi_3^{1/2}} = a \left( \frac{\epsilon_3 E_{30}}{\pi \chi_2 E_{10} E_{20}} \right)^{1/2}, \quad (1.67)$$

характеризующая расстояние, на котором происходит взаимофокусировка пучков в преобразователе частоты (гл. 9).

### § 1.8. Учет дисперсии высших порядков

В § 1.4 рассмотрено второе приближение, согласно которому дисперсионное уравнение  $k(\omega)$  аппроксимируется квадратичной параболой (1.39). В этом приближении поведение волнового пакета описывается параболическим уравнением (1.36) для медленно меняющейся амплитуды. При учете трехволновых взаимодействий в параболических уравнениях появляются нелинейные члены, пропорциональные амплитудам волн поляризации среды на соответствующих частотах (1.43). В этой книге мы ограничимся именно таким приближением. Вместе с тем необходимо сказать несколько слов и о последующих уточнениях теории нестационарных трехволновых взаимодействий. Дальнейшие приближения связаны с учетом линейной дисперсии коэффициентов нелинейной связи волн. Рассмотрим их основные черты отдельно.

**Взаимодействие волн в третьем приближении теории дисперсии.** По мере сокращения длительности импульса (расширения его частотного спек-



ра) параболическое описание реальной дисперсионной кривой  $k(\omega)$  с помощью аппроксимации (1.39) становится недостаточным и надо учитывать следующий член разложения волнового числа по частоте:

$$q = \frac{\partial k}{\partial \omega} \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Omega^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} \Omega^3. \quad (1.68)$$

Это необходимо, в частности, делать, когда дисперсия второго порядка обращается в нуль,  $\partial^2 k / \partial \omega^2 = 0$  (несущая частота волнового пакета попадает в точку перегиба дисперсионной кривой). Такая ситуация может наблюдаться в оптических кристаллах в области между резонансами и в оптических волокнах, когда естественная дисперсия материала — стекла компенсируется дисперсией волноводных мод. Разложению (1.68) можно поставить в соответствие дифференциальный оператор,  $\Omega \rightarrow -i \partial / \partial t$ , в результате чего укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд принимают вид (ср. с (1.55))

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + v_{jm} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_m} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2} \frac{\partial^2 A_j}{\partial \eta_m^2} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 k_j}{\partial \omega_j^3} \frac{\partial^3 A_j}{\partial \eta_m^3} = F_j(A_1, A_2, A_3). \quad (1.69)$$

В третьем приближении теории дисперсии гауссов профиль огибающей волнового пакета перестает быть автомодельным даже в линейной среде. Поэтому анализ распространения взаимодействующих пакетов становится чрезвычайно сложным и требует широкого привлечения численных методов. Пока подобного рода расчеты проделаны для задач самовоздействия коротких оптических импульсов в волоконных световодах [47, 48].

**Дисперсия коэффициента нелинейной связи волн.** При сильной дисперсии нелинейной восприимчивости  $\chi_2(\omega)$ , что имеет место вблизи резонансных частот атомов и молекул, для амплитуд волн нелинейной поляризации, как правило, также удается сформулировать укороченные уравнения в двух- или многоуровневом приближении с учетом поляритонных или экситонных мод. Однако и вдали от резонансов дисперсия нелинейности может оказаться существенной. Речь идет о следующем нестационарном эффекте.

В исходное волновое уравнение (1.1) входит вторая производная поляризации среды по времени. Волна поляризации, как и электромагнитная волна, имеет быстро изменяющуюся часть и медленную амплитуду:

$$\mathcal{P}_j^{(\text{нл})} = P_j^{(\text{нл})} \exp[i(\omega_j t - k_{jn} r)]. \quad (1.70)$$

При проведении процедуры укорачивания волнового уравнения в слабонелинейной среде обычно учитывается только главная часть члена  $\partial^2 P_j^{(\text{нл})} / \partial t^2$ , а именно  $-\omega_j^2 P_j^{(\text{нл})}$  (остальные члены отбрасываются). В результате в укороченные уравнения (1.55) входят нелинейные члены (1.50) с коэффициентами  $\gamma_j$  (1.51), пропорциональными частотам  $\omega_j$ . Мы видим, что коэффициенты нелинейной связи обладают дисперсией.

Рассмотрим теперь в рамках (1.55) эффекты, связанные с изменением частот волновых пакетов на некоторые величины  $\Omega_j$ :  $A_{jn} = A_j \exp(i \Omega_j t)$ . Переход на новые частоты в диспергирующей среде означает изменение

волновых чисел на величину  $q_j$ . Этот эффект во втором приближении теории дисперсии отражается наличием в уравнениях (1.43) линейных дифференциальных операторов параболического типа. Однако нелинейные члены  $F_j$  останутся при таком изменении частот неизменными. Парадокс возник из-за того, что при укорачивании уравнения были учтены только нелинейные члены вида  $-\omega_j^2 P_j^{(\text{нл})}$ . Чтобы описать дисперсию коэффициентов нелинейной связи волн  $\gamma_j(\omega_j)$  надо помимо главного члена учесть и следующий:

$$\frac{\partial^2 P_j^{(\text{нл})}}{\partial t^2} = \left( -\omega_j^2 P_j^{(\text{нл})} - 2i\omega_j \frac{\partial P_j^{(\text{нл})}}{\partial t} \right) e^{i(\omega_j t - k_{jn} r)}. \quad (1.71)$$

При последовательной процедуре укорачивания уравнений необходимо учесть члены порядка  $\partial^2 A / \partial z \partial \eta$ , которые также дают вклад в дисперсию нелинейной связи. В итоге правые части уравнений (1.43) приобретают новую структуру (ср. с (1.50)):

$$F_j = -i\gamma_j \left( 1 + \frac{1}{i\omega_j} \frac{\partial}{\partial \eta_m} \right) \frac{\partial U}{\partial A_j^*}. \quad (1.72)$$

Теперь, если вернуться к задаче об изменении несущих частот  $\omega_{jn} = \omega_j + \Omega_j$ , коэффициенты нелинейной связи согласно (1.72) пересчитываются корректным способом: вместо  $\gamma_j \sim \omega_j$  появится коэффициент  $\gamma_{jn} \sim \omega_j + \Omega_j$ . Дисперсия рассматриваемого типа (1.72) исследовалась при анализе самокомпрессии импульсов в оптических волноводах [49, 50].

Дисперсия коэффициентов нелинейной связи приводит к дополнительному нарушению фазовых соотношений между волнами, а следовательно, и к дополнительной фазовой модуляции волновых пакетов. Это оказывает влияние и на искажение амплитудных профилей, и на энергообмен между волнами при трехчастотных взаимодействиях в диспергирующих средах [51]. В гл. 11 рассмотрен пример о влиянии дисперсии коэффициентов нелинейной связи на генерацию второй гармоники.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ СЛАБЫХ ВОЛН ПРИ РАССТРОЙКЕ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Данная глава посвящена анализу параметрического усиления волновых пакетов и пучков в заданном поле плоской монохроматической волны накачки. Теория строится в приближении геометрической оптики с учетом расстройки групповых скоростей сигнальной и холостой волн как по величине, так и по направлению. Из-за дисперсии различные спектральные компоненты усиливаются в неравной степени, что приводит к искажению частотно-углового спектра волн и к модификации огибающих (амплитудных профилей) волновых пучков и импульсов. В параметрическом усилителе относительная дисперсия связанных волн уменьшается. При этом волновые пакеты и импульсы распространяются с одинаковой скоростью, а их расщепление носит диффузионный характер.

Важно отметить также, что при усилении модулированных волн принципиально меняется роль расстройки групповых скоростей и асимметрии коэффициентов поглощения по сравнению со случаем взаимодействия плоских монохроматических волн, прежде всего при определении порога параметрического усиления и инкремента распадной неустойчивости. Рассмотрение пространственно-временных эффектов ведется на основе точных решений укороченных уравнений и с помощью приближенных методов.

### § 2.1. Связанные уравнения для сигнальной и холостой волн

В приближении геометрической оптики процесс трехволнового взаимодействия описывается системой квазилинейных уравнений первого порядка для медленно меняющихся амплитуд (1.56). Конкретизируем эти уравнения сначала для нестационарного случая параметрического усиления волновых пакетов в заданном поле монохроматической волны накачки постоянной амплитуды  $A_3 = E_{30}$ . Для упрощения изложения положим пока волновую расстройку  $\Delta k$  и коэффициенты поглощения  $\delta_j$  равными нулю. Их роль мы выясним позже в § 2.6.

Уравнения для параметрически связанных волновых пакетов записываются следующим образом:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \nu_{13} \frac{\partial A_1}{\partial \eta_3} = -i\gamma_1 E_{30} A_2^*, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{23} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_3} = -i\gamma_2 E_{30} A_1^*. \quad (2.1)$$

Этой системе можно придать симметричную форму, если вместо характеристики  $\eta_3$  ввести среднюю характеристику для сигнальной и холостой волн

$$\eta_{\text{ср}} = (\eta_1 + \eta_2)/2 = t - z/u_{\text{ср}}, \quad (2.2)$$

где

$$u_{\text{ср}} = 2u_1u_2/(u_1 + u_2) \quad (2.3)$$

— средняя групповая скорость пакетов. Она, очевидно, имеет промежуточное значение между  $u_1$  и  $u_2$ . После введения (2.2) уравнения (2.1) приобретают вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\nu_{12}}{2} \frac{\partial A_1}{\partial \eta_{\text{ср}}} = -i\gamma_1 E_{30} A_2^*, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\nu_{12}}{2} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_{\text{ср}}} = -i\gamma_2 E_{30} A_1^*. \quad (2.4)$$

От последней системы легко перейти к одному уравнению, исключая, например,  $A_2$ :

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} - \frac{\nu_{12}^2}{4} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \eta_{\text{ср}}^2} = \Gamma_0^2 A_1, \quad \Gamma_0 = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} E_{30}, \quad (2.5)$$

где  $\Gamma_0$  — инкремент стационарного усиления. Граничные условия для сигнальной и холостой волн зададим на входе в нелинейную среду:

$$A_{1,2}(z=0) = E_{1,2}(t).$$

При согласовании групповых скоростей  $\nu_{12} = 0$  и (2.4), (2.5) переходят в хорошо известные уравнения параметрического усиления плоских монохроматических волн, имеющие простое решение

$$A_1 = E_{10} \text{ch}(\Gamma_0 z) + (\gamma_1/\gamma_2)^{1/2} E_{20} \text{sh}(\Gamma_0 z). \quad (2.6)$$

В диспергирующей среде укороченные уравнения (2.4), (2.5) решаются при переходе к разложению амплитуд в частотный спектр (§ 2.2) или непосредственно методом Римана.

**Точное решение связанных уравнений.** Гиперболическая система (2.4) имеет точное решение в интегральной форме. Так, амплитуда сигнальной волны выражается следующим образом [1, 2]:

$$A_1 = E_1(\eta_1) + \gamma_1 E_{30} \int_{-z/2}^{z/2} d\xi E_2^*(\eta_{\text{ср}} - \nu_{12}\xi) I_0(G) + \\ + \gamma_1 \gamma_2 E_{30}^2 \int_{-z/2}^{z/2} d\xi E_1(\eta_{\text{ср}} - \nu_{12}\xi) (z - 2\xi) I_1(G) G^{-1}, \quad (2.7)$$

где  $I_0$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядков, аргументом которых служит величина

$$G = \Gamma_0(z^2 - 4\xi^2)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Формула для вычисления амплитуды холостой волны  $A_2$  получается из (2.7) с помощью циклической перестановки индексов  $1 \leftrightarrow 2$ .

На начальном этапе при малом усилении ( $\Gamma_0 z \ll 1$ ) аргумент функций Бесселя мал ( $G \ll 1$ ), а сами они равны  $I_0 \approx 1$ ,  $I_1 \approx G/2$ ; при этом второй интеграл в (2.7) становится величиной второго порядка малости. В резуль-

гате (2.7) принимает простую форму

$$A_1 = E_1(\eta_1) + \gamma_1 E_{30} \int_0^z d\xi E_2^*(\eta_2 - \nu_{12}\xi), \quad (2.9)$$

которая соответствует случаю генерации волны разностной частоты в заданных полях двух волн — накачки и холостой. Так как для параметрического усиления и распадной неустойчивости этот случай не представляет интереса, мы отложим его обсуждение до следующей главы, специально посвященной возбуждению суммарных и разностных волн.

**Диффузионное приближение.** Параметрическому усилению, сопровождаемому экспоненциальным ростом обеих амплитуд, отвечают большие значения аргумента (2.8),  $G \gg 1$ . В этой области функции Бесселя имеют асимптотику [3]

$$I_0 \approx I_1 \approx (2\pi G)^{-1} \exp G \approx \frac{\exp(\Gamma_0 z - 2\Gamma_0 \xi^2/z)}{(2\pi\Gamma_0 z)^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Если, кроме того, исследовать процесс усиления в сугубо нестационарной области при  $z > \tau/|\nu_{12}|$ , пределы интегрирования в (2.7) можно распространить до бесконечности. Учитывая эти особенности параметрического усиления волновых пакетов, из (2.7) находим приближенное выражение для амплитуды:

$$A_1 = B_1 \exp(\Gamma_0 z), \\ B_1 = \frac{1}{4} (\pi D_{12} z)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[ E_1(y) + \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/2} E_2(y) \right] \exp \left[ -\frac{(y - \eta_{cp})^2}{4D_{12} z} \right], \quad (2.11)$$

где

$$D_{12} = \nu_{12}^2 / 8\Gamma_0 \quad (2.12)$$

— коэффициент параметрической диффузии. Парциальная амплитуда  $B_1$  в (2.11) является решением параболического уравнения типа диффузионного [1, 4, 5]:

$$\frac{\partial B_1}{\partial z} = D_{12} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \eta_{cp}^2}. \quad (2.13)$$

С помощью полученных точных выражений (2.7) и приближенных (2.11) можно исследовать поведение волновых пакетов, имеющих разные групповые скорости ( $\nu_{12} \neq 0$ ) при параметрическом усилении в однородном поле волны накачки. Однако, прежде чем переходить к такому рассмотрению, целесообразно выявить характер изменения дисперсии слабых волн. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

## § 2.2. Закон дисперсии волн в параметрическом усилителе

Дисперсия волн связана с зависимостью волнового числа  $k(\omega)$  от частоты. В общем случае волновое число имеет действительную и мнимую части:  $k = k' + ik''$ . Действительная часть  $k'$  описывает изменение фазовой скорости с частотой; через нее выражаются групповая скорость и коэффициенты дисперсионного расплывания. Мнимая часть  $k''$  характеризует контур

линии поглощения или усиления. Для того чтобы найти дисперсию сигнальной и холостой волн в параметрическом усилителе, представим амплитуды через спектральные компоненты ( $j = 1, 2$ ):

$$A_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_j S_j(\omega_j + \Omega_j) \exp[i(\Omega_j \eta_{cp} \pm \Gamma z)]. \quad (2.14)$$

В силу выполнения условия резонанса,  $\omega_3 = \omega_1 + \Omega_1 + \omega_2 + \Omega_2$ , частоты спектральных компонент волн связаны соотношением  $\Omega_1 = -\Omega_2$ . После подстановки (2.14) в (2.4) или (2.5) находим зависимость инкремента параметрического усилителя от частотной отстройки (рис. 2.1а):

$$\Gamma = (\Gamma_0^2 - \nu_{12}^2 \Omega_1^2 / 4)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Из выражения (2.14) с учетом (2.2) можно найти поправки к волновым числам (рис. 2.1б):

$$k_j = k_j(\omega_j) + q_j, \quad q_j = \Omega_j / u_{cp}. \quad (2.16)$$

Из (2.15) следует, что усиление в диспергирующей среде происходит в конечной полосе частот

$$\Omega_c = 2\Gamma_0 / |\nu_{12}|. \quad (2.17)$$

Ширина синхронизма неограниченно возрастает (в первом приближении теории дисперсии) при согласовании групповых скоростей ( $u_1 = u_2$ ). Так как при этом  $\partial k_1 / \partial \omega_1 = \partial k_2 / \partial \omega_2$ , то такой синхронизм называют касательным или некритическим. Исследуемый нами случай  $\nu_{12} \neq 0$  относится к критическому синхронизму.

Выражение (2.16) показывает, что относительная дисперсия сигнальной и холостой волн в линейной среде ( $u_1 \neq u_2$ ) переходит в параметрическом усилителе в усредненную дисперсию: обе волны приобретают

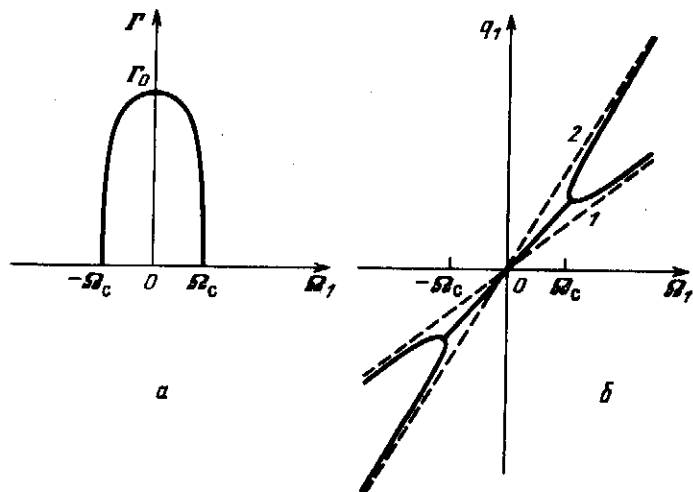


Рис. 2.1. Дисперсия параметрически связанных волн:

а — контур усиления; б — поправка к волновому числу  $k$ ; штриховые линии 1 и 2 — дисперсия первого порядка в линейной среде на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно



одинаковую дисперсию. Наклон дисперсионных кривых (2.16) определяет групповую скорость слабых волн  $u_{cp}$  (см. (2.3)).

Вне полосы усиления,  $|\Omega_1| > \Omega_c$ , величина  $\Gamma$  в (2.15) становится мнимой,  $\Gamma = iQ$ , причем  $Q = (\nu_{12}^2 \Omega_1^2 / 4 - \Gamma_0^2)^{1/2}$ . В этой области сигнал не усиливается, а слабые волны имеют две ветви дисперсии [5-7]:

$$k_j = k_j(\omega_j) + q_j \pm Q \quad (2.18)$$

При больших отстройках от синхронизма ( $|\Omega_1| \gg \Omega_c$ ) одна ветвь переходит в ветвь линейной дисперсии волны с частотой  $\omega_1$ , другая — с частотой  $\omega_2$  (рис. 2.16).

В полосе усиления экспоненциальный рост спектральных компонент с пройденным расстоянием зависит от их частоты, вернее от отклонения их частот от центральных, для которых, как было принято нами в начале главы, выполнено условие синхронизма  $\Delta k = 0$ . Наличие относительной дисперсии слабых волн ( $u_1 \neq u_2$ ) приводит при отходе от центральных частот к появлению волновой расстройки  $\Delta k_\Omega = \nu_{12} \Omega_1$  и, как следствие этого, к уменьшению инкремента  $\Gamma$ . В результате неоднородного усиления частотные спектры сигнальной и холостой волн сужаются по закону

$$\Delta \omega_j \approx \Omega_c (2/\Gamma_0 z)^{1/2} \quad (2.19)$$

Монохроматизации волн соответствует расплывание амплитудных профилей волновых пакетов, которое носит, как было показано в конце предыдущего параграфа, диффузионный характер. В отсутствие фазовой модуляции длительность импульса пропорциональна ширине спектра,  $\tau \sim 1/\Delta\omega$ , и можно предположить, что увеличение длительности при диффузии импульса идет как  $\tau(z) \approx (\Gamma_0 z / 2\Omega_c^2)^{1/2} = (4D_{12}z)^{1/2}$ . Эта оценка согласуется с результатами строгих расчетов, представленных в следующем параграфе.

### § 2.3. Параметрическая диффузия волновых пакетов

В линейной среде при относительной дисперсии первого порядка ( $\nu_{12} \neq 0$ ) импульсы на сигнальной и холостой частотах расходятся на время  $T$ , пропорциональное пройденному пути:  $T = |\nu_{12}| z$ . При длительности импульса  $\tau_1$  эффект группового запаздывания будет заметен ( $T > \tau_1$ ) на расстояниях  $z$ , превышающих групповую длину  $l_{\tau_{12}} = \tau_1 / |\nu_{12}|$ . При малых усилениях ( $\Gamma_0 z \ll 1$ ) взаимодействие импульса холостой частоты  $\omega_2$  с однородной волной накачки  $\omega_3$  приводит к возбуждению разностной волны частоты  $\omega_1$ .

Этот процесс описывается формулой (2.9). Вследствие эффекта группового запаздывания импульс  $A_1$  уширяется и его профиль принимает почти прямоугольную форму; фронт находится на характеристике  $\eta_1$  (распространяется со скоростью  $u_1$ ), а хвост импульса — на  $\eta_2$  (имеет скорость  $u_2$ ); длительность импульса увеличивается пропорционально расстоянию:

$$\tau(z) = \tau_1 + |\nu_{12}| z \quad (2.20)$$

В области больших усилений ( $\Gamma_0 z \gg 1$ ) картина взаимодействия импульсов принципиально другая: эффекты группового запаздывания сменяются процессом диффузии огибающих.

Пусть на вход нелинейной среды подан сигнал с гауссовым профилем огибающей

$$E_1 = E_{10} \exp(-t^2/\tau_1^2). \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в решение дифференциального уравнения (2.11), находим, что амплитудный профиль расплывается по закону

$$A_1 = (1/2) E_{10} [\tau_1/\tau(z)] \exp[\Gamma_0 z - \eta_{\text{ср}}^2/\tau^2(z)]. \quad (2.22)$$

Длительность импульса увеличивается с расстоянием (рис. 2.2) [4, 5]:

$$\tau(z) = \tau_1(1 + z/l_{12})^{1/2}, \quad (2.23)$$

где

$$l_{12} = \tau_1^2/4D_{12} \quad (2.24)$$

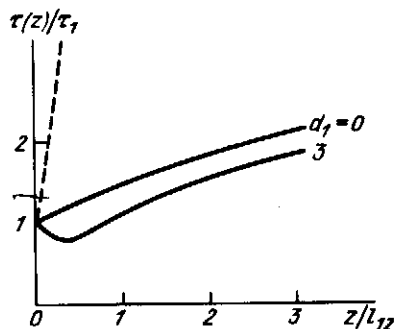
— характерная длина диффузионного расплывания волнового пакета в параметрическом усилителе, на которой длительность импульса (2.23) увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз.

При большом усилении на групповой длине ( $\Gamma_0 l_{\tau 12} \gg 1$ ) диффузионное расплывание начинается после прохождения нескольких длин группового запаздывания  $l_{\tau 12}$  ( $l_{12} \gg l_{\tau 12}$ ). Когда усиление мало ( $\Gamma_0 l_{\tau 12} \ll 1$ ), тенденция разбегания сигнальной и холостой волн, имеющих в линейной среде разные скорости, подавляется слабо и диффузионное расплывание наступает раньше:  $l_{12} < l_{\tau 12}$ .

Отметим, что такое же расплывание испытывает импульс на холостой частоте  $\omega_2$ . Как следует из (2.23), на больших расстояниях  $z \gg l_{12}$  длительность параметрически связанных импульсов  $\tau(z) \approx (4D_{12}z)^{1/2}$  не зависит

Рис. 2.2. Изменение длительности импульсов с расстоянием при параметрической диффузии без фазовой модуляции ( $d_1 = 0$ ) и при ее наличии:

штриховая линия — разбегание  $T/\tau_1$  импульсов в линейной среде



от начальной длительности сигнала  $\tau_1$ . Сравнение скорости расплывания импульсов при параметрической диффузии (2.23) со скоростью уширения импульса в режиме возбуждения разностной волны (2.20) показывает, что в сильном поле волны накачки дисперсия волн существенно подавляется (примерно в  $(\Gamma_0 z)^{1/2}$  раз). Наличие в (2.22) предэкспоненциального множителя обусловлено замедлением роста амплитуды с расстоянием из-за параметрической диффузии.

## § 2.4. усиление фазово-модулированного импульса

Монохроматизация спектра слабых волн сопровождается, как было показано в предыдущем параграфе, диффузионным расплыванием пакетов. Однако если наблюдать параметрическое усиление фазово-модулированного (ФМ) импульса, то расплыванию предшествуют весьма интересные эффекты. Рассмотрим особенности усиления и диффузии гауссова импульса с квадратичной фазовой модуляцией:

$$E_1 = E_{10} \exp[-t^2(1 - id_1)/\tau_1^2], \quad d_1 = \Omega_{10}\tau_1. \quad (2.25)$$

Мгновенная частота такого импульса  $\omega_1(t) = \omega_1 + 2\Omega_{10}t/\tau_1$  меняется линейно со временем. При  $t = \tau_1$  девиация частоты достигает величины  $2\Omega_{10}$ .

Ширина спектра сигнала (2.25)  $\Delta\omega_1 = 2(\Omega_{10}^2 + \tau_1^{-2})^{1/2}$ .

Поведение ФМ импульса в процессе усиления формально описывается прежней формулой (2.22), полученной при  $\Omega_{10} = 0$ , только теперь в соответствии с (2.25) надо в (2.22) подставить вместо  $\tau_1^2$  величину  $\tau_1^2/(1 - id_1)$ . В результате находим следующее выражение для амплитуды:

$$A_1 = (1/2)E_{10}f^{-1/2}(z) \exp[\Gamma_0 z - \eta_{cp}^2/\tau_1^2 f(z)], \\ f(z) = 1 + z(1 - id_1)/l_{12}. \quad (2.26)$$

Выделяя в показателе экспоненты (2.26) действительную и мнимую части, можно получить формулы для длительности и параметра фазовой модуляции импульса.

Длительность усиливаемого импульса описывается сложным выражением

$$\tau^2(z) = \tau_1^2 \frac{1 + 2z/l_{12} + z^2(1 + d_1^2)/l_{12}^2}{1 + z(1 + d_1^2)/l_{12}}. \quad (2.27)$$

В отсутствие фазовой модуляции ( $d_1 = 0$ ) (2.27) переходит в прежнюю формулу (2.23), согласно которой длительность импульса монотонно увеличивается с расстоянием. При усилении импульса с  $d_1 \geq 1$  ситуация изменяется: на начальном этапе происходит не расплывание, а сужение импульса (рис. 2.2). Действительно, из (2.27) следует, что на расстоянии

$$z_{сж} = l_{12}(d_1 - 1)/(1 + d_1^2) \quad (2.28)$$

длительность импульса достигает минимума

$$\tau_{сж} = \tau_1 [2d_1/(1 + d_1^2)]^{1/2}. \quad (2.29)$$

Затем, на больших расстояниях, она растет по такому же закону, что и в отсутствие ФМ:  $\tau^2 \approx 4D_{12}z$ .

Механизм сужения связан не с компрессией импульса, а со спецификой параметрического усиления при критическом синхронизме. Дело заключается в том, что из-за быстрой фазовой модуляции на краях сигнального импульса возникает уход от фазового синхронизма, вследствие чего здесь усиление меньше, чем в центре. Поэтому из начального импульса (2.25) экспоненциально усиливается только центральная часть длительностью  $\tau(z)$ , в пределах которой уход частоты  $\Omega_1(t) = 2\Omega_{10}\tau(z)/\tau_1$  не превышает спектральной ширины параметрического усиления (2.19). Полагая в (2.19)  $\Delta\omega_1 = 2\Omega_{10}\tau(z)/\tau_1$ , можно получить такую же оценку для длительности связанных импульсов, как и из (2.27):  $\tau(z) \approx \Omega_{10}(l_{12}/z)^{1/2}$ . Однако с

уменьшением длительности все большую роль начинает играть диффузия (2.23). Когда эффекты сужения и распыливания импульса приходят в равновесие, его длительность достигает минимального значения (2.29). После точки сжатия волновые пакеты расширяются.

Так как при сжатии импульса теряется его периферийная часть, где девиация частоты наибольшая, то это означает, по существу, подавление фазовой модуляции. Чтобы подтвердить сделанный вывод, выпишем с помощью (2.26) параметр частотного заполнения импульса, равный произведению ширины спектра на длительность,

$$[\Delta\omega(z)\tau(z)]^2 = 4(1+d_1^2) \frac{1+2z/l_{12}+z^2(1+d_1^2)/l_{12}^2}{[1+z(1+d_1^2)/l_{12}]^2} \quad (2.30)$$

Графики изменения частотного заполнения с расстоянием представлены на рис. 2.3а. Для сравнения на рис. 2.3б показан процесс монохроматизации спектров сигнальной и холостой волн при параметрическом усилении:

$$\Delta\omega^2(z) = 4\tau_1^{-2}(1+d_1^2) [1+z(1+d_1^2)/l_{12}]^{-1}.$$

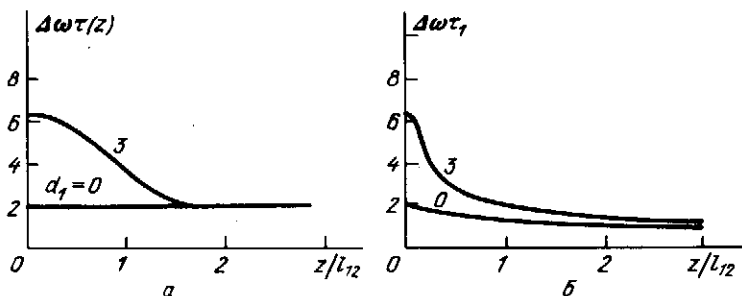


Рис. 2.3. Подавление фазовой модуляции и монохроматизация спектров волновых пакетов при параметрическом усилении в среде с расстройкой групповых скоростей: показаны зависимости от расстояния  $z$  произведений ширины спектра  $\Delta\omega(z)$  на текущую  $\tau(z)$  (а) и начальную  $\tau_1$  (б) длительности сигнального импульса

В отсутствие начальной фазовой модуляции ( $d_1 = 0$ ) из (2.30) следует, что  $\Delta\omega\tau = 2$  при любых  $z$ , т.е. фазовая модуляция не возникает в процессе усиления. Если же на входе в среду волновой пакет промодулирован по фазе (2.25), то, в отличие от поведения длительности импульса (рис. 2.2), частотное заполнение всегда монотонно уменьшается и стремится на больших расстояниях к одной и той же величине  $\Delta\omega\tau = 2$ , т.е. у импульса постепенно пропадает модуляция по фазе. По-видимому, рассмотренный выше параметрический механизм формирования спектрально-ограниченных импульсов из ФМ сигнала носит общий характер.

### § 2.5. Распадная неустойчивость фазово-модулированной волны накачки

Изменение несущей частоты волны накачки на величину  $\Omega_3$  автоматически ведет к перестройке частот сигнальной и холостой волн на  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причем  $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3$ . Так как волны обладают дисперсией, то их волновые числа изменяются на  $q_j = \Omega_j/v_j$ . Это ведет к появлению фазовой расст-

ройки  $\Delta k = q_3 - q_1 - q_2 = \Omega_3 \nu_{31} + \Omega_1 \nu_{21} = \Omega_3 \nu_{31} + \Omega_2 \nu_{12}$ . Очевидно, синхронизм не нарушается в тривиальном случае равенства всех групповых скоростей и при отсутствии относительной дисперсии между волной накачки и одной из слабых волн. Так, соотношение  $\Delta k = 0$  сохраняется при  $\nu_{32} = 0$ ,  $\Omega_1 = 0$ ,  $\Omega_2 = \Omega_3$  и при  $\nu_{31} = 0$ ,  $\Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_1 = \Omega_3$ . В этих случаях фазовая модуляция волны накачки перекладывается на попутную волну, и поэтому она не сказывается на параметрическом усилении.

Перейдем к более строгому анализу нестационарных волновых эффектов, полагая в (2.1) волну накачки промодулированной по фазе (для простоты изложения рассмотрим квадратичную фазовую модуляцию):

$$A_3 = E_{30} \exp(i \Omega_{30} \eta_3^2 / \tau_3). \quad (2.31)$$

Решение граничной задачи для системы (2.1) с ФМ волной накачки (2.31) можно представить в интегральной форме (для простоты полагаем  $E_1 = 0$ ) [8]:

$$A_1 = -i \gamma_1 \int_0^z dy E_2(\eta_1 + \nu_{12} y) E_3(\eta_1 + \nu_{13} y) \Phi(i G_\Phi; 1; -i \frac{\Gamma_0^2}{4G_\Phi} y(z-y)), \quad (2.32)$$

где  $\Phi$  — вырожденная гипергеометрическая функция [9].

Ключевым параметром, характеризующим соотношение между коэффициентом стационарного усиления  $\Gamma_0$ , дисперсией среды  $\nu_{j3}$  и девиацией частоты  $\Omega_{30}$ , является величина:

$$G_\Phi = \Gamma_0^2 \tau_3 / \Omega_{30} \nu_{13} \nu_{23}. \quad (2.33)$$

В области слабого усиления  $\Phi \rightarrow 1$  и (2.32) описывает генерацию разностной волны. Если фазовую модуляцию накачки устранить, то гипергеометрическая функция переходит в функцию Бесселя мнимого аргумента  $I_0(\Gamma_0(y(z-y))^{1/2})$  а выражение (2.32) — в (2.7) с учетом замены переменных.

Задавая импульс на холостой частоте  $\omega_2$  в виде  $\delta$ -функции, находим из (2.32) амплитуду усиливаемого сигнала:

$$A_1 = \frac{-i \gamma_1 E_{20} E_{30} \tau_2}{\nu_{12}} \exp \frac{i \Omega_{30} \eta_1^2 \nu_{32}}{\tau_3 \nu_{12}} \Phi \left( i G_\Phi; 1; -i \frac{\Gamma_0}{4G_\Phi} \left( z^2 - \frac{4\eta_{cp}^2}{\nu_{12}^2} \right) \right). \quad (2.34)$$

Из анализа (2.34) следует прежде всего, что экспоненциальный рост амплитуды полностью пропадает при малом параметре  $G_\Phi < 1$ , т.е. при сильной фазовой модуляции накачки, когда

$$\Omega_{30} \geq \Gamma_0^2 \tau_3 / |\nu_{13} \nu_{23}|. \quad (2.35)$$

Поэтому будем считать девиацию частоты  $\Omega_{30}$  достаточно малой, чтобы выполнялось обратное неравенство,  $G_\Phi \gg 1$ . Тогда можно воспользоваться асимптотикой гипергеометрической функции [9] и получить экспоненциальный закон роста амплитуды  $A_j \propto \exp G(z)$ :

$$G = (\Gamma_0/2) \operatorname{Re} [z(1 - z^2/l_\Phi^2)^{1/2} + l_\Phi \arcsin(z/l_\Phi)], \quad (2.36)$$

где

$$l_\Phi = 4\Gamma_0 \tau_3 / |\Omega_{30} \nu_{13} \nu_{23}| \quad (2.37)$$

Рис. 2.4. Зависимость коэффициента параметрического усиления от расстояния в отсутствие фазовой модуляции волны накачки (1) и при ее наличии (2)

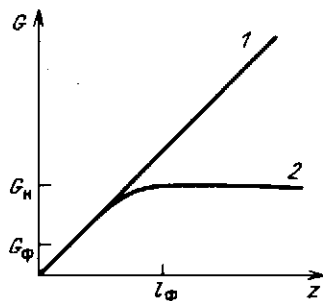
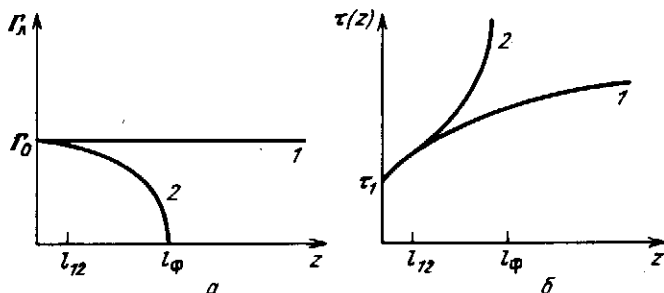


Рис. 2.5. Уменьшение локального инкремента (а) и ускорение диффузионного расплывания импульсов (б) при переходе от монохроматической (1) к фазово-модулированной (2) волне накачки



— длина дисперсионно-фазового ограничения параметрического усиления. Сравнение (2.37) с (2.33) дает соотношение  $|G_\phi| = \Gamma_0 l_\phi / 4$ .

Из (2.36) видно, что на малых длинах  $z \ll l_\phi$  коэффициент усиления  $G = \Gamma_0 z$  (рис. 2.4). Однако затем из-за нарушения синхронизма темпы усиления замедляются и за дисперсионно-фазовой длиной ( $z \geq l_\phi$ ) наступает насыщение усиления на уровне

$$G_n = \pi |G_\phi|. \quad (2.38)$$

Примечательно, что уровень насыщения параметрического усиления (2.38) пропорционален квадрату амплитуды накачки (см. (2.33)). Отсюда следует подтверждение вывода, сделанного выше, что при  $|G_\phi| \ll 1$  экспоненциальный рост амплитуд не наблюдается.

Переход квазистационарного усиления в режим насыщения (2.38) можно характеризовать уменьшением локального коэффициента усиления  $\Gamma_n = \partial G / \partial z$ :

$$\Gamma_n = \Gamma_0 (1 - z^2 / l_\phi^2)^{1/2}. \quad (2.39)$$

Падение усиления приводит в свою очередь к ускорению диффузионного расплывания волновых пакетов (рис. 2.5):

$$\tau^2(z) = \tau_1^2 + (z / l_{12}) (1 - z^2 / l_\phi^2)^{-1/2}. \quad (2.40)$$

Пока процесс усиления сохраняет когерентность,  $z \ll l_\phi$ , диффузия идет, как в однородном поле накачки (2.23). В области  $z \approx l_\phi$  фазы волн настолько перемешиваются, что параметрическая связь волновых пакетов ослабевает, их амплитуды перестают экспоненциально расти с расстоянием,

а диффузия становится настолько большой, что длительность импульсов ограничивается, по существу, величиной  $\tau(z) \approx |\nu_{12}|z$ .

Из выражения (2.34) для  $A_1$  и аналогичного ему с заменой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  для  $A_2$  следует еще одно важное свойство. В процессе параметрического усиления фазовая модуляция волны накачки перекладывается на сигнальную и холостую волны:

$$A_1 \propto \exp \frac{i\Omega_{30}\nu_{23}\eta_1^2}{\nu_{21}\tau_3}, \quad A_2 \propto \exp \frac{i\Omega_{30}\nu_{31}\eta_2^2}{\nu_{21}\tau_3}. \quad (2.41)$$

Причем скорость изменения мгновенной частоты усиливаемых волн может существенно превысить таковую для накачки, особенно вблизи группового синхронизма при  $\nu_{12} \rightarrow 0$ . Таким образом, ФМ волну накачки можно использовать для сильной фазовой модуляции волновых пакетов с тем, чтобы затем осуществить их компрессию в какой-либо диспергирующей системе [10, 11].

Возвращаясь к рассуждениям, сделанным в начале этого параграфа, следует сказать, что, действительно, при групповом синхронизме между волной накачки и, например, холостой волной ( $\nu_{23} = 0$ ) влияние фазовой модуляции волны накачки на параметрическое усиление пропадает, так как  $I_\Phi \rightarrow \infty$  и  $G_\Phi \rightarrow \infty$ . При этом, как видно из (2.41), накачка модулирует по фазе только холостую волну. Схожая картина наблюдается и при  $\nu_{31} = 0$ .

Рассмотренные в этом параграфе нестационарные эффекты при параметрическом усилении волновых пакетов в поле фазово-модулированной волны накачки имеют аналогию с процессом распадной неустойчивости электромагнитной волны в неоднородной плазме [12–14].

## § 2.6. Комбинированные пространственно-временные эффекты при усилении волновых пучков и импульсов

В соответствии с пространственно-временной аналогией (§ 1.6) параметрическое усиление волновых пучков, имеющих разные направления лучевых векторов, протекает по тем же законам, что и рассмотренное нами усиление пакетов волн при расстройке групповых скоростей. В полученных выражениях достаточно вместо длительности импульса  $\tau$  ввести ширину пучка  $a$ , параметр квадратичной фазовой модуляции  $d$  заменить на величину  $ka^2/2\rho$ , где  $\rho$  — радиус кривизны волнового фронта расходящегося или сходящегося пучка, расстройки групповых скоростей  $\nu$  — на углы  $\beta$  между лучевыми векторами и осью  $z$  и т.д. Нетрудно переформулировать и закономерности, присущие поведению волновых пакетов, на случай взаимодействия волновых пучков. Так, в области сильного усиления пучки распространяются вдоль среднего направления  $\beta_{\text{ср}} = (\beta_1 + \beta_2)/2$ , диффузия определяется параметром  $D_{12} = \beta_{12}^2/8\Gamma_0$  и длиной  $l_{12} = = \Gamma_0 a^2/\beta_{12}^2$ , где  $\beta_{12} = \beta_1 - \beta_2$  (ср. с (2.3), (2.12), (2.24)).

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию, когда слабые волны имеют как пространственную, так и временную модуляцию, а векторы групповых скоростей рассогласованы как по величине, так и по направлению. Для анализа комбинированных нестационарных и пространственных эффектов

надо обратиться к решению укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \nu_{13} \frac{\partial A_1}{\partial \eta_3} + \beta_{13} \frac{\partial A_1}{\partial x_3} &= -i\gamma_1 E_3(\eta_3, x_3) A_2^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{23} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_3} + \beta_{23} \frac{\partial A_2}{\partial x_3} &= -i\gamma_2 E_3(\eta_3, x_3) A_1^*, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где  $x_3 = x - \beta_3 z$ ,  $\beta_{j3} = \beta_j - \beta_3$ .

Уравнения типа (2.42) обладают замечательным свойством. С помощью замены переменных из них можно исключить операторы дифференцирования или по координате  $x_3$ , или по времени  $\eta_3$  [15]. Если ввести новую переменную

$$\xi = x_3 - \frac{\beta_{12}}{\nu_{12}} \eta_3 - \frac{\beta_{13}\nu_{23} - \beta_{23}\nu_{13}}{\nu_{12}} z, \quad (2.43)$$

то (2.42) сводится к виду (2.1), только теперь в амплитуде волны накачки и граничных условиях для сигнальной и холостой волн пространственная модуляция будет учитываться как временная:

$$\begin{aligned} A_3(x, t) &= E_3 \left( \xi + \frac{\beta_{12}}{\nu_{12}} \eta_3 + \frac{\beta_{13}\nu_{23} - \beta_{23}\nu_{13}}{\nu_{12}} z, \eta_3 \right), \\ E_j(x, t) &= E_j \left( \xi + \frac{\beta_{12}}{\nu_{12}} t, t \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где новая пространственная координата  $\xi$  фигурирует до получения окончательных результатов как параметр. Рассмотрим два примера: 1) совместную диффузию пучков и пакетов, 2) усиление в расходящемся пучке накачки с линейным изменением частоты.

**Совместная диффузия волновых пучков и пакетов.** Опуская выкладки, приведем окончательное решение уравнений (2.42), описывающее параметрическую диффузию сигнальной волны, промодулированной в пространстве и во времени по гауссовому закону:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(E_{10}/2) \exp(\Gamma_0 z)}{(1 + z/L_{12})^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{x_{\text{ср}}^2}{a_1^2} (1 - \psi_x) - \frac{\eta_{\text{ср}}^2}{\tau_1^2} (1 - \psi_\eta) + \frac{2x_{\text{ср}}\eta_{\text{ср}}}{a_1\tau_1} (\psi_x\psi_\eta)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\psi_x = l_{12\nu}^2 z (z + L_{12})^{-1} (l_{12\nu}^2 + l_{12\beta}^2)^{-1}, \quad \psi_\eta = \psi_x l_{12\beta}^2 l_{12\nu}^{-2},$$

где диффузия характеризуется обобщенной длиной расплывания

$$L_{12} = l_{12\nu} l_{12\beta} (l_{12\nu} + l_{12\beta})^{-1}. \quad (2.46)$$

В отсутствии апертурных эффектов ( $\beta_1 = \beta_2$ ) диффузия пучков пропадает и формулы (2.45), (2.46) переходят в (2.22), (2.24), описывающие усиление пакетов. В другом случае,  $\nu_{12} = 0$ , диффузию испытывают только пучки. Совместная диффузия пучков и волновых пакетов приводит к ограничению длительности импульсов и ширины пучков и к эффек-



ту запаздывания (рис. 2.6). Из (2.45) следует, что на больших расстояниях устанавливаются стационарные величины

$$a_{\text{нр}}^2 = a_1^2 + \tau_1^2 \beta_{12}^2 / \nu_{12}^2, \quad \tau_{\text{нр}}^2 = \tau_1^2 + a_1^2 \nu_{12}^2 / \beta_{12}^2. \quad (2.47)$$

Вершины пучков и импульсов распространяются примерно вдоль характеристики  $x_{\text{ср}}/\beta_{12} = \eta_{\text{ср}}/\nu_{12}$ . Таким образом, в разные точки  $x_{\text{ср}}$  приходят пакеты с одинаковой длительностью  $\tau_{\text{нр}}$  с относительным запаздыванием  $\eta_{\text{ср}}$  (рис. 2.6).

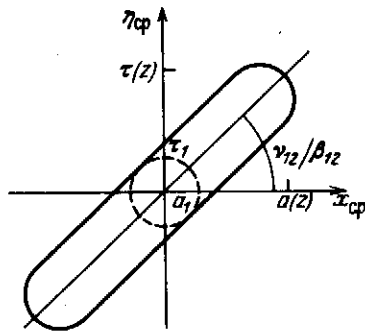


Рис. 2.6. Пространственно-временная картина параметрической диффузии волнового пучка импульсного излучения:

показаны линии равной интенсивности исходного пучка-пакета (штриховая) и на некотором расстоянии  $z$  в среде (сплошная). Горизонтальные сечения характеризуют размер и смещение центра пучка в фиксированные моменты времени  $\eta_{\text{ср}}$ . Вертикальные сечения — длительность и смещение сигнала в точке  $x_{\text{ср}}$

Если регистрировать полную мощность волны  $P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |A_1|^2$ , то интегральный импульс испытывает такое же расплывание, как пакет в отсутствие пространственной модуляции (ср. с (2.22)):

$$P_1 = \frac{P_{10}/4}{(1 - z/L_{12})(1 - \psi_x)^{1/2}} \exp\left(2\Gamma_0 z - \frac{2\eta_{\text{ср}}^2}{\tau^2(z)}\right). \quad (2.48)$$

С помощью общего выражения (2.45) можно также рассмотреть совместную диффузию расходящихся (сходящихся) пучков и пакетов с линейной модуляцией частоты по аналогии с подходом, изложенным в § 2.4.

Особенности проявления двумерной параметрической диффузии можно пояснить, если из (2.42) получить (ср. с § 2.2) формулу для контура усиления частотно-угловых спектральных компонент:

$$\Gamma = [\Gamma_0^2 - (\Omega_1 \nu_{12} + \beta_{12} k_1 \theta_1)^2 / 4]^{1/2}, \quad (2.49)$$

где  $\theta_1$  — угол, под которым распространяется элементарная плоская волна сигнальной волны частоты  $\omega_1 + \Omega_1$ ; холостая волна идет под углом  $\theta_2 = k_1 \theta_1 / k_2$  и имеет частоту  $\omega_2 - \Omega_1$ . Условие синхронизма  $\Delta k(\Omega_1, \theta_1) = 0$  выполняется, как видно из (2.49), вдоль перестроечной линии  $\Omega_1 \nu_{12} = -\beta_{12} k_1 \theta_1$ . Для частотно-угловых компонент, лежащих на этой линии, коэффициент усиления максимален,  $\Gamma = \Gamma_0$ . Именно этим и объясняется выделение в пространственно-временной картине (рис. 2.6) характеристики  $x_{\text{ср}}/\beta_{12} = \eta_{\text{ср}}/\nu_{12}$ , описывающей движение вершины волновых пакетов и пучков и перпендикулярного ей направления  $x_{\text{ср}} \nu_{12} = -\eta_{\text{ср}} \beta_{12}$ , вдоль которого диффузия не развивается.

**Параметрическое усиление при пространственной и временной фазовой модуляциях волны накачки.** Рассмотрим одновременное действие пространственной и временной модуляций фазы волны накачки по квадратичному закону:

$$E_3 = E_{30} \exp(i\alpha_{30}/\alpha_{д3} a_3^2 + i d_3 t^2/\tau_3^2), \quad (2.50)$$

где  $\alpha_{30} = a_3/\rho_3$  — начальная угловая расходимость,  $\alpha_{д3} = 2/k_3 a_3$  — дифракционная расходимость пучка накачки.

Решение геометрооптических уравнений (2.42) с использованием перехода от  $x_3$  к новой переменной (2.43) описывается выражением, аналогичным (2.32), только ключевой параметр  $G_\Phi$  (2.33) заменяется на параметр [15]

$$G_{\Phi \beta \nu} = \Gamma_0^2 (d_{30} \nu_{13} \nu_{23} / \tau_3^2 + \alpha_{30} \beta_{13} \beta_{23} / \alpha_{д3} a_3^2)^{-1}, \quad (2.51)$$

при этом, очевидно, меняется и длина насыщения,  $l_\Phi = 4 G_{\Phi \beta \nu} / \Gamma_0$ .

Если в коллимированном пучке ( $\alpha_{30} = 0$ ) частотная модуляция уменьшает или даже подавляет экспоненциальный рост амплитуд, то в расходящемся (сходящемся) пучке накачки можно создать условия для компенсации дисперсионных эффектов, связанных с модуляцией фазы. Именно, в поле волны накачки с расходимостью

$$\alpha_{30} = -d_{30} \alpha_{д3} a_3^2 \nu_{13} \nu_{23} (\tau_3^2 \beta_{13} \beta_{23})^{-1} \quad (2.52)$$

параметр  $G_{\Phi \beta \nu}$  и длина  $l_\Phi$  стремятся к бесконечности и усиление становится нечувствительным к изменению частоты волны накачки в расходящемся пучке.

### § 2.7. Влияние расстройки волновых векторов и диссипации энергии

При изложении теории нелинейно-дисперсионных явлений в параметрическом усилителе мы до сих пор не учитывали ради простоты расстройку волновых векторов  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$  и влияние диссипативных процессов через коэффициенты поглощения  $\delta_j$  (§ 1.6). Однако для полноты общей картины распадной неустойчивости необходимо обратиться к анализу уравнений, включающих  $\Delta k$  и  $\delta_j$  (ср. с (2.1)),

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \nu_{j3} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_3} = -i \gamma_j E_{30} \left( \frac{A_1 A_2}{A_j} \right)^* e^{-i \Delta k z} - \delta_j A_j \quad (2.53)$$

( $j = 1, 2$ ). Переходя к спектрам, из (2.53) можно получить выражение для контура усиления

$$\Gamma = -(\delta_1 + \delta_2)/2 + \text{Re} [\Gamma_0^2 + (\delta_1 - \delta_2 - i \Delta k \Omega)^2 / 4]^{1/2}, \quad (2.54)$$

где  $\Delta k \Omega = \Delta k - \Omega_1 \nu_{12}$ . Из условия  $\Gamma = 0$  в (2.54) определяется порог усиления и ширина синхронизма.

Замечательным свойством системы укороченных уравнений (2.53) является возможность исключения из них  $\Delta k$  и  $\delta_j$ . Для достижения этой цели введем в амплитуды сигнальной и холостой волн экспоненциальные множители [2]:

$$A_j = \bar{A}_j \exp \left[ \frac{\delta_1 - \delta_2 - i\Delta k}{\nu_{21}} \eta_{\text{ср}} - (\delta_1 + \delta_2 + i\Delta k) \frac{z}{2} \right]. \quad (2.55)$$

После подстановки (2.55) в (2.53) полученные уравнения для нормированных амплитуд  $\bar{A}_j$  формально оказываются абсолютно такими же, как (2.1) — не содержат  $\Delta k$  и  $\delta_j$ . Переход к новым амплитудам  $\bar{A}_j$  означает изменение граничных условий на

$$\bar{E}_j = E_j(t) \exp [(\delta_2 - \delta_1 + i\Delta k)t/\nu_{12}]. \quad (2.56)$$

В соответствии с преобразованиями (2.55), (2.56) изменяются интегральные выражения для амплитуд (2.7), (2.32) и вытекающие из них различные формулы для расчетов диффузионного распыления волновых пакетов и пучков. Так как в общем виде выражения для амплитуд довольно сложные и громоздкие, то мы ограничимся изложением основных выводов о влиянии расстройки волновых чисел и разницы коэффициентов поглощения  $\delta_1 \neq \delta_2$  на нестационарное параметрическое усиление.

Рассмотрим диффузию пакетов, имеющих гауссову огибающую (2.21), в среде с  $\delta_1 = \delta_2$  и  $\Delta k \neq 0$ . Обобщение (2.22) приводит к следующей формуле:

$$A_1 = \frac{E_{10}}{2(1+z/l_{12})} \exp \left[ (\Gamma_0 - \delta_1)z - \frac{\eta_{\text{ср}}^2}{\tau_1^2(1+z/l_{12})} + i\Omega_1 \eta_{\text{ср}} - \frac{\Omega_1^2 \tau_1^2 (1+z/l_{12})}{z/l_{12}} \right], \quad (2.57)$$

которая показывает, что в процессе усиления несущие частоты пакетов перестраиваются:

$$\Omega_1(z) = (\Delta k/\nu_{12}) z (z + l_{12})^{-1}. \quad (2.58)$$

В области эффективной диффузии ( $z \gg l_{12}$ ) перестройка заканчивается и несущие частоты  $\omega_1(\Delta k) = \omega_1 + \Delta k/\nu_{12}$  и  $\omega_2(\Delta k) = \omega_2 - \Delta k/\nu_{12}$ . Нетрудно показать, что на новых частотах устанавливается фазовый синхронизм:  $\Delta k_\Omega = \Delta k - \Omega_1 \nu_{12} = \Delta k (1 + z/l_{12})^{-1}$ , а при  $z \gg l_{12}$  имеем  $\Delta k_\Omega \approx 0$ . Объясняется данный эффект тем, что в соответствии с видом контура усиления (2.54) наибольший коэффициент усиления имеют не центральные спектральные компоненты с  $\Delta k_\Omega \neq 0$ , а боковые, для которых  $\Delta k_\Omega = 0$ . Этому условию удовлетворяют как раз те частоты  $\omega_j(\Delta k)$ , на которые перестраиваются волновые пакеты. Так как гауссов импульс имеет гауссову огибающую спектральной интенсивности, то боковые компоненты, испытывающие большее усиление, имеют меньшую амплитуду относительно

центральной частоты в начальном распределении. Этим и вызвано появление в (2.56) дополнительного экспоненциального множителя.

Разница коэффициентов поглощения сигнальной и холостой волн также изменяет диффузию пакетов. Расчеты показывают, что длительность импульсов увеличивается по прежнему закону (2.23):  $\tau^2(z) = \tau_1^2 + 4D_{12}z$ , но вершины двигаются со скоростью, отличной от  $u_{cp}$ , а именно

$$u_{cp}^{-1}(\delta) = u_{cp}^{-1} - \nu_{12}(\delta_2 - \delta_1)/2\Gamma_0. \quad (2.59)$$

Анализ (2.59) показывает, что средняя скорость  $u_{cp}(\delta)$  приближается к групповой скорости той волны, которая имеет большее поглощение; при  $\delta_2 > \delta_1$  скорость  $u_{cp}(\delta)$  ближе к групповой скорости  $u_2$ , а при  $\delta_1 > \delta_2$  — к  $u_1$ .

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПЛЫВАНИЕ  
И КОМПРЕССИЯ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ ВОЛН**

В этой главе рассматриваются закономерности взаимодействия двух модулированных волн в поле низкочастотной волны накачки при расстройке групповых скоростей. Низкочастотная волна накачки не испытывает распадной неустойчивости, и параметрически связанные слабые волны не нарастают экспоненциально с расстоянием (или во времени). В соответствии с соотношениями Мэнли — Роу число квантов, которое может отдать волна накачки слабым волнам, не превышает их начального запаса на сигнальной и холостой частотах. Поэтому поле интенсивной низкочастотной волны накачки (в отличие от случая распадной неустойчивости, см. гл. 2) остается практически неизменным даже при сильнонелинейном взаимодействии сигнальной и холостой волн. Иными словами, истощением низкочастотной волны накачки можно пренебречь и все расчеты нелинейно-дисперсионных эффектов генерации суммарных и разностных волн выполнять в приближении заданного поля волны накачки.

В оптике этот тип взаимодействия нашел широкое применение для параметрического преобразования частоты вверх или вниз [1], для создания когерентных источников суммарных и разностных волн в ультрафиолетовом и далеком инфракрасном диапазонах [2]. Генерация суммарной волны используется для визуализации инфракрасного изображения [3].

Дисперсия параметрических связанных волн в преобразователе частоты отлична от дисперсии в параметрическом усилителе. Здесь появляются две ветви нелинейной дисперсии, одинаковые для суммарной и разностной волн и имеющие противоположные знаки кривизны. Естественно, что другой характер носит и распывание волновых пакетов, возникает новый механизм компрессии фазово-модулированных импульсов. При неколлинеарном взаимодействии пучков слабые волны распространяются вдоль среднего лучевого вектора, а при начальной расходимости или сходимости они испытывают параметрическую фокусировку.

Основное внимание в этой главе будет уделено изложению нестационарных эффектов, обусловленных модуляцией слабых волн. Анализ дисперсионно-нелинейных эффектов проводится в рамках геометрической оптики.

### § 3.1. Нестационарные уравнения для параметрического преобразования частоты

Нестационарное трехчастотное взаимодействие при относительной дисперсии волн первого порядка описываются укороченными уравнениями (§ 1.6; члены с  $\Delta k$  и  $\delta_j$  не учитываем,  $j = 1, 2, 3$ )

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \nu_{j1} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_1} = -i\gamma_j \frac{\partial U}{\partial A_j^*}, \quad U = A_1 A_2 A_3^* + \text{к.с.} \quad (3.1)$$

Эти уравнения имеют ряд интегралов движения. К их числу относятся соотношения Мэнли — Роу (1.52), регулирующие потоки энергии между волнами. При нелинейном взаимодействии энергия волны накачки частоты  $\omega_1$  может уменьшаться на величину  $W_{20} \omega_1 / \omega_2$  или увеличиваться на  $W_{30} \omega_1 / \omega_3$ . Если начальный запас энергии волны накачки намного превышает энергию слабых волн,  $W_{10} \gg W_{j0}$ , то, очевидно, относительное изменение энергии волны накачки незначительно. Для квазинепрерывного излучения соотношения Мэнли — Роу описывают связь между вариациями интенсивностей волн. Таким образом, можно считать, что мощная низкочастотная волна накачки не истощается и ее амплитудный профиль не искажается при взаимодействии со слабыми волнами.

Это обстоятельство позволяет сильно упростить построение аналитической теории нестационарного преобразования частоты, заменяя решение трех укороченных уравнений (3.1) решением двух уравнений, связанных через волну накачки,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} &= -i\gamma_2 E_1^*(\eta_1) A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + \nu_{31} \frac{\partial A_3}{\partial \eta_1} &= -i\gamma_3 E_1(\eta_1) A_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учет слабого поглощения  $\delta_j$  и расстройки волновых векторов нетрудно провести с помощью специальной нормировки амплитуды по аналогии со случаем нестационарного параметрического усиления волновых пакетов (§ 2.7).

Прежде чем идти дальше, сделаем одно замечание. На практике может встретиться случай, когда  $I_{10} \gg I_{20}$ , но  $W_{10} \ll W_{20}$ , т.е. имеет место взаимодействие мощного короткого импульса накачки со слабым квазинепрерывным сигналом ( $\tau_1 \ll \tau_2$ ). При длительном взаимодействии таких пакетов волна накачки может, вообще говоря, потерять значительную часть своей энергии. Но отбор энергии слабыми волнами будет идти настолько медленно, что на конечных расстояниях или конечных временах взаимодействия даже в этом неблагоприятном случае можно пользоваться приближением заданного поля волны накачки. Численное моделирование генерации суммарных и разностных волн, проведенное на основе решения полной системы уравнений (3.1), подтверждает сказанное.

Будем считать амплитуду волны накачки постоянной,  $A_1 = E_{10}$ . При задании граничных условий для слабых волн выберем ситуацию, отвечающую

щую генерации суммарной волны,

$$A_2(z=0) = E_2(t), \quad A_3(z=0) = 0. \quad (3.3)$$

Возбуждение волны разностной частоты  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ , когда  $E_2(t) = 0$ , сохраняет все закономерности, свойственные генерации суммарной волны.

В отсутствие относительной дисперсии ( $\nu_{j1} = 0$ ) уравнения (3.2) имеют простые решения

$$A_2 = E_2 \cos(\Gamma_0 z), \quad (3.4)$$

$$A_3 = -i(\gamma_3/\gamma_2)^{1/2} E_2 \sin(\Gamma_0 z),$$

где  $\Gamma_0 = (\gamma_2 \gamma_3)^{1/2} E_{10}$  характеризует параметрическую связь суммарной и разностной волн. Очевидно, что в поле низкочастотной волны накачки взаимодействие слабых волн носит характер пространственных биений: волны периодически передают свою энергию друг другу (строго говоря, при этом колеблется и энергия волны накачки, чем мы в силу относительной малости эффекта пренебрегаем). Полное преобразование энергии сигнальной волны в энергию суммарной происходит на длине  $z_{\text{нл}} = (\pi/2)l_{\text{нл}}$ , где

$$l_{\text{нл}} = 1/\Gamma_0 \quad (3.5)$$

— характерный пространственный масштаб нелинейного взаимодействия.

При наличии в нелинейной среде относительной дисперсии первого порядка взаимодействие волновых пакетов сопровождается нестационарными эффектами группового запаздывания. Решение системы двух связанных уравнений (3.2) можно найти, в частности, методом Римана [4]. Так, амплитуда суммарной волны имеет интегральное выражение [5]

$$A_3 = -i\gamma_3 E_{10} \int_0^z d\xi E_2(\eta_3 + \nu_{32}\xi) J_0\{2\Gamma_0[\xi(z-\xi)]^{1/2}\}. \quad (3.6)$$

При возбуждении волны на суммарной частоте в линейном режиме ( $\Gamma_0 z \ll 1$ ) аргумент функции Бесселя  $J_0$  мал и  $J_0 = 1$ . Этот случай соответствует приближению заданного поля как волны накачки,  $A_1 = E_{10}$ , так и сигнальной волны,  $A_2 = E_2(\eta_2)$ .

В области сильного взаимодействия волновых пакетов ( $\Gamma_0 z \gg 1$ ) функция Бесселя осциллирует, что описывает периодический энергообмен между волнами с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Для сравнения напомним, что в параметрическом усилителе функцией Римана (или функцией Грина) служит модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента (2.10), которая экспоненциально увеличивается с расстоянием и имеет вблизи максимума гауссово распределение по переменной интегрирования. Это говорит о совершенно различном характере нелинейно-дисперсионного расплывания волновых пакетов в поле низкочастотной волны накачки и параметрической диффузии импульсов при распадной неустойчивости волны накачки (§ 2.3).

§ 3.2. Нелинейная дисперсия суммарных  
и разностных волн  
с учетом расстройки групповых скоростей

Рассмотрим взаимодействие спектральных компонент, представив амплитуды пакетов в виде интегралов Фурье

$$A_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega S_j(z, \omega_j + \Omega) e^{i\Omega t} \quad (j = 2, 3), \quad (3.7)$$

где  $\Omega = \Omega_2 = \Omega_3$  — отклонение частоты спектральной компоненты от несущей  $\omega_j$ . Подставляя (3.7) в (3.2), находим уравнения для спектральных амплитуд

$$\frac{dS_j}{dz} + iq_j S_j = -i\gamma_j E_{10} \frac{S_2 S_3}{S_j}, \quad (3.8)$$

в которых  $q_j = \Omega/u_j$  — рассчитанное в первом приближении теории дисперсии изменение волнового числа в отсутствие низкочастотной волны накачки ( $E_{10} = 0$ ). Выведем из (3.8) закон дисперсии суммарной и разностной волн, взаимодействующих друг с другом через волну накачки.

**Дисперсия связанных волн.** Полагая в (3.8)  $S_j \propto e^{-iq_{23}z}$ , получаем дисперсионное уравнение для нелинейной добавки к волновым числам  $q_{23} = k_2(\omega_2) - k_2(\omega_2 + \Omega) = q_{32} = k_3(\omega_3) - k_3(\omega_3 + \Omega)$  в следующем виде:

$$(q_{23} - q_2)(q_{23} - q_3) = \Gamma_0^2. \quad (3.9)$$

Квадратное уравнение (3.9) имеет два решения:

$$q_{23} = \Omega/u_{cp} \pm (\Gamma_0^2 + \Omega^2 v_{23}^2/4)^{1/2}, \quad (3.10)$$

где  $u_{cp} = 2u_2 u_3 / (u_2 + u_3)$  — средняя групповая скорость параметрически связанных волновых пакетов. Решения (3.10) описывают дисперсию бифотонов — параметрических квазичастиц, объединяющих пары фотонов разных частот  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Параметрическая связь, осуществляемая низкочастотной волной накачки, изменяет дисперсию слабых волн (рис. 3.1).

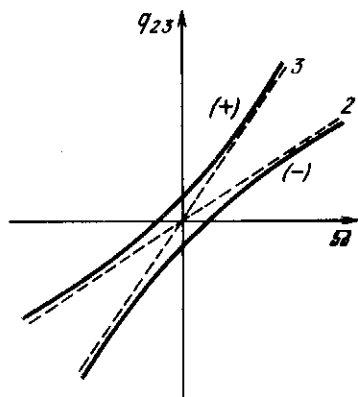


Рис. 3.1. Две ветви (+) и (-) нелинейной дисперсии суммарных и разностных волн в поле низкочастотной волны накачки: штриховые линии — дисперсия первого порядка в линейной среде на частотах  $\omega_2$  (2) и  $\omega_3$  (3)



Видно, что накачка формирует две ветви нелинейной дисперсии, одинаковые для суммарной и разностной волн. Эти ветви как бы отталкиваются друг от друга — они имеют кривизну разного знака. При больших отстройках  $\Omega$  от несущих частот  $\omega_j$  нелинейная дисперсия переходит в линейную:  $q_j = \Omega/u_j$ .

Дисперсия связанных волн (3.10) наблюдается во многих волновых системах параметрического типа [6]. Например, она имеет место в устройствах СВЧ электроники, использующих взаимодействие волны пространственного заряда с электромагнитной волной (лампы с бегущей волной) [7]. Если говорить о пространственном аналоге, то параметрической дисперсии (3.10) соответствует параметрическая дифракция волновых пучков на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , распространяющихся под разными углами  $\beta_j$  в нелинейной среде. К этому типу взаимодействия близка двухволновая дифракция по схеме Лауэ в средах с пространственной периодической модуляцией показателя преломления [8].

В области малых отстроек выражение (3.10) можно разложить в ряд по степеням  $\Omega$ . В первом приближении теории дисперсии  $q_{23} = \Omega/u_{cp}$ , откуда следует, что связанные волновые пакеты распространяются с одинаковой групповой скоростью  $u_{cp}$ . Во втором приближении учитывается следующий, квадратичный член [9]:

$$q_{23} = \Omega/u_{cp} \pm D_{23}\Omega^2, \quad D_{23} = \nu_{23}^2/8\Gamma_0, \quad (3.11)$$

где  $D_{23}$  — коэффициент нелинейно-дисперсионного расщепления связанных волн, имеющих в линейной среде разные групповые скорости. Знаки "+" и "-" относятся к двум разным ветвям нелинейной дисперсии (рис. 3.1).

Таким образом, низкочастотная волна накачки трансформирует линейную дисперсию первого порядка в нелинейную дисперсию второго порядка (3.11). Эту дисперсию можно использовать для параметрической компрессии фазово-модулированного импульса. Наличие двух ветвей с разными знаками кривизны (см. рис. 3.1 и формулу (3.11)) обеспечивает компрессию половины импульса (декомпрессия другой дает пьедестал) независимо от знака частотной модуляции падающей на среду волны. Детально картина параметрической компрессии будет рассмотрена в § 3.5.

**Спектральная интенсивность суммарной волны.** Интенсивность спектра волны на частоте  $\omega_3$  легко находится из решения (3.8) с учетом (3.10):

$$|S_3|^2 = (\gamma_3\Gamma_0 z/\gamma_2)^2 |S_{20}(\Omega)|^2 \text{sinc}^2 [z(\Gamma_0^2 + \nu_{23}^2\Omega^2/4)^{1/2}], \quad (3.12)$$

где  $S_{20}$  — исходный профиль спектра волнового пакета сигнала, функция

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}.$$

В начальном слое нелинейной среды, где  $\text{sinc } x \approx 1$ , спектр суммарной волны повторяет форму спектра сигнальной волны. При дальнейшем взаимодействии с увеличением  $z$  спектр  $S_3$  искажается из-за дисперсионных эффектов ( $\nu_{23} \neq 0$ ). Их проявление зависит от степени параметрической связи волн  $\Gamma_0$ . Рассмотрим далее типичные случаи преобразования спектра [10].

Линейный режим генерации суммарной волны,  $\Gamma_0 z \ll 1$ . Здесь спектр (3.12) характеризуется независимостью его профиля от амплитуды волны накачки (рис. 3.2а):

$$|S_3|^2 = (\gamma_3 \Gamma_0 z / \gamma_2)^2 |S_{20}(\Omega)|^2 \text{sinc}^2(\pi \Omega / 2 \Omega_c). \quad (3.13)$$

Дисперсионная функция  $\text{sinc } x$  имеет частотную ширину

$$\Omega_c = \pi / |\nu_{23}| z, \quad (3.14)$$

сокращающуюся с увеличением расстояния  $z$ . Очевидно, нестационарные эффекты, обусловленные расстройкой групповых скоростей, начинают проявляться, когда  $\Omega_c$  становится меньше ширины или характерного масштаба модуляции спектра сигнальной волны  $\Delta \omega_2$ , т.е. при  $\Omega_c \leq \Delta \omega_2$ . Нетрудно видеть, что переход от квазистационарной области возбуждения импульса суммарной частоты к нестационарному режиму происходит на длине порядка

$$l_{\text{ког}} = 1 / |\nu_{32}| \Delta \omega_2, \quad (3.15)$$

называемой длиной когерентного взаимодействия волновых пакетов в диспергирующей среде. На этапе когерентного взаимодействия,  $0 < z < l_{\text{ког}}$ , дисперсионная функция  $\text{sinc } x \approx 1$  и спектр суммарной волны повторяет профиль спектра сигнала

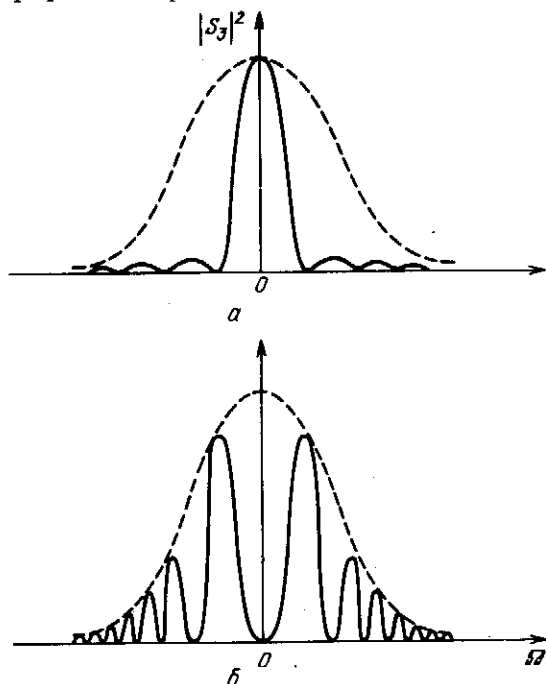


Рис. 3.2. Профили спектральной интенсивности суммарной волны, возбуждаемой в линейном квазистационарном (штриховые линии), линейном (а) и нелинейном (б) нестационарных режимах

За когерентной длиной ( $z \gg l_{\text{ког}}$ ) спектр суммарной волны определяется дисперсионной функцией, т.е. приобретает универсальную форму  $|S_3|^2 \propto \text{sinc}^2(\pi\Omega/2\Omega_c)$ . Такой спектр имеют, в частности, волновые пакеты с огибающей прямоугольного профиля длительностью  $\tau \approx |\nu_{23}|z$ . Действительно, как показывает интегрирование (3.6) при  $J_0 = 1$ , импульсы суммарной частоты, возбуждаемые спектрально-ограниченными импульсами с частотой  $\omega_2$ , принимают прямоугольную форму за групповой длиной  $l_{\tau 23}$ , которая в данном случае ( $\Delta\omega_2\tau_2 \approx 1$ ) совпадает с когерентной длиной (3.15).

**Нелинейный режим параметрического преобразования частоты,  $\Gamma_0 z \gg 1$ .** Здесь возникает новый класс дисперсионных эффектов. Особого внимания заслуживает сильное взаимодействие, когда нелинейные эффекты проявляются раньше дисперсионных,  $l_{\text{нл}} \ll l_{\text{ког}}$ . Разлагая аргумент функции  $\text{sinc} x$  в ряд по частоте  $\Omega$ , находим в первом приближении следующее выражение:

$$|S_3|^2 = (\gamma_3 \Gamma_0 z / \gamma_2) |S_{20}(\Omega)|^2 \sin^2[\Gamma_0 z + D_{23} \Omega^2 z], \quad (3.16)$$

где  $D_{23}$  дается формулой (3.11). Сравнение (3.16) с (3.13) показывает, что в отличие от линейного режима относительная дисперсия  $\nu_{23}$  начинает влиять на преобразование частоты на расстоянии

$$l_{23} \approx l_{\text{ког}}^2 / l_{\text{нл}} \approx 1 / D_{23} \Delta\omega_2^2, \quad (3.17)$$

которая, как показано в § 3.3, является длиной нелинейно-дисперсионного расплывания волновых пакетов в параметрическом преобразователе частоты.

Так как  $l_{\text{нл}} \ll l_{\text{ког}}$ , то  $l_{23} \gg l_{\text{ког}}$ . Это означает, что в нелинейном режиме дисперсия среды проявляется позже, чем в линейном случае (3.13). Иными словами, сильное поле низкочастотной волны накачки значительно подавляет дисперсию связанных волн. Полная ширина спектра суммарной волны в нелинейном режиме равна ширине спектра входного сигнала,  $\Delta\omega_3 \approx \Delta\omega_2$ , но при  $z \gg l_{23}$  профиль спектральной интенсивности приобретает полосатую структуру (рис. 3.2б) из-за наложения на  $|S_{20}|^2$  синусоидальной модуляции, которая не является периодической по отклонению частоты  $\Omega$ . Она объясняется интерференцией быстрых и медленных компонент, имеющих различные ветви дисперсии  $q_{23} = \Omega / u_{\text{ср}} \pm D_{23} z$  (рис. 3.1).

### § 3.3. Метод параболического уравнения для парциальных амплитуд

Динамика изменения огибающих  $A_j$  в параметрическом преобразователе частоты с немодулированной накачкой описывается общим выражением (3.6). Изучение линейного режима, когда  $J_0 \approx 1$ , не представляет труда. Значительно более сложная задача возникает при анализе нелинейных режимов. Функция Бесселя становится быстро осциллирующей, и для вычисления интеграла (3.6) надо применять метод стационарной фазы. Более наглядным подходом к получению приближенного описания поведе-

ния волновых пакетов является метод вторичного упрощения связанных укороченных уравнений (3.2).

Для обсуждаемого здесь случая немодулированной волны накачки систему (3.2) можно привести к одному уравнению, например, для амплитуды суммарной волны:

$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} - \frac{\nu_{23}^2}{4} \frac{\partial^2 A_3}{\partial \eta_{cp}^2} = -\Gamma_0^2 A_3, \quad (3.18)$$

где  $\eta_{cp} = (\eta_1 + \eta_2)/2 = t - z/u_{cp}$  — средняя характеристика. Амплитуда сигнала  $A_2$  описывается таким же уравнением. При групповом синхронизме ( $u_2 = u_3$ ,  $\eta_{cp} = \eta_1 = \eta_2$ ) решение (3.18) содержит две моды, имеющие разные фазовые скорости,

$$A_3 = B_3^{(+)}(\eta_{cp}) e^{i\Gamma_0 z} + B_3^{(-)}(\eta_{cp}) e^{-i\Gamma_0 z}, \quad (3.19)$$

где  $B_3^{(+)}$  и  $B_3^{(-)}$  — парциальные амплитуды быстрых и медленных мод соответственно. Интерференция этих мод и приводит к пространственным биениям амплитуд связанных волн (3.4).

В диспергирующей среде амплитудные профили парциальных мод искажаются по мере их распространения, они становятся функциями координаты  $z$ . Будем считать дисперсионные эффекты слабыми; тогда изменения парциальных амплитуд незначительны на нелинейной длине  $l_{нл}$  (3.5). Это означает, что парциальные амплитуды являются медленно меняющимися по сравнению с экспоненциальными множителями. Если теперь подставить (3.19) в (3.18), то можно отбросить малую вторую производную по координате  $z$ , так как  $l_{нл} \partial B_3 / \partial z \ll B_3$ . В итоге мы приходим после вторичного укорачивания к двум параболическим уравнениям для парциальных амплитуд [5]:

$$\frac{\partial B_3^{(\pm)}}{\partial z} = \mp i D_{23} \frac{\partial^2 B_3^{(\pm)}}{\partial \eta_{cp}^2}. \quad (3.20)$$

Напомним, что в случае параметрического усиления параболическое уравнение для парциальной амплитуды экспоненциально нарастающей моды (2.13) не содержит мнимой единицы перед коэффициентом диффузии. Уравнение (3.20) имеет точно такой же вид, как уравнение второго приближения теории дисперсии в линейной среде (§ 1.5).

Используя известное решение уравнения (3.20) с учетом граничных условий (3.3), окончательно находим общее выражение для амплитуды сигнальной волны при нелинейном режиме преобразования частоты:

$$A_3 = -i \left( \frac{\gamma_3}{4 \pi \gamma_2 D_{23} z} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi E_2(\xi) \sin \left( \Gamma_0 z - \frac{(\xi - \eta_{cp})^2}{4 D_{23} z} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.21)$$

Последнюю формулу можно получить также непосредственно из общего решения (3.6), если функцию Бесселя представить в виде первого члена асимптотического ряда при больших значениях аргумента:  $J_0(x) = (2/\pi x)^{1/2} \sin x$ .

Таким образом, метод вторичного упрощения привел к параболическим уравнениям для парциальных амплитуд, решение которых в виде (3.21) позволяет достаточно просто проанализировать нелинейно-дисперсионное распывание и компрессию связанных волновых пакетов.

### § 3.4. Параметрическое распывание связанных волновых пакетов

Проследим основные закономерности распывания волновых пакетов  $\omega_2$  и  $\omega_3$  в поле низкочастотной волны накачки  $\omega_1$  на примере взаимодействия гауссовых импульсов

$$E_2(t) = E_{20} \exp(-t^2/\tau_2^2). \quad (3.22)$$

Подстановка (3.22) в (3.21) приводит к интегралам Френеля, которые легко вычисляются в бесконечных пределах. В результате получаем выражение для интенсивности суммарной волны

$$I_3 = (\gamma_3/\gamma_2) I_{20} (1 + z^2/l_{23}^2)^{-1/2} \exp[-2 \eta_{cp}^2/\tau^2(z)] \sin^2 \Phi, \quad (3.23)$$

$$\Phi = \Gamma_0 z + (1/2) \operatorname{arctg}(z/l_{23}) + \eta_{cp}^2 z/l_{23} \tau^2(z),$$

где длительность импульса увеличивается с пройденным расстоянием по закону

$$\tau(z) = \tau_2 (1 + z^2/l_{23}^2)^{1/2}, \quad l_{23} = \tau_2^2/4 D_{23}. \quad (3.24)$$

Длина нелинейно-дисперсионного распывания  $l_{23}$  соответствует ранее введенной при спектральном анализе длине (3.17), обозначающей границу области проявления дисперсионных эффектов в сильном поле волны накачки; при этом надо учесть соотношение  $\Delta\omega_2 \tau_2 \approx 1$ .

По мере параметрического распывания огибающая волнового пакета (3.23) не сохраняет гауссову форму. За длиной нелинейно-дисперсионного распывания ( $z \gg l_{23}$ ) появляются биения интенсивности, причем число осцилляций в пределах длительности импульса  $\tau(z)$  увеличивается пропорционально расстоянию  $z/l_{23}$ . Данный эффект связан с проявлением интерференции двух мод, имеющих разные ветви нелинейной дисперсии (3.10). Входной импульс (3.22) возбуждает на сигнальной и холостой частотах две волновые моды. Одна из них, состоящая из быстрых спектральных компонент, распывается с отрицательным коэффициентом диффузии, а другая — с положительным. Длина распывания для обеих мод одинакова, однако в процессе распывания они приобретают фазовую модуляцию разного знака. В результате наложения полей двух мод и возникает интерференционная картина амплитудной модуляции гауссовых импульсов (3.23). Следует отметить, что волновой пакет на частоте  $\omega_2$  распывается так же, как на частоте  $\omega_3$ .

Моделирование дисперсионного распывания гауссова импульса в параметрическом преобразователе частоты выполнено, в частности, в [5] на ос-

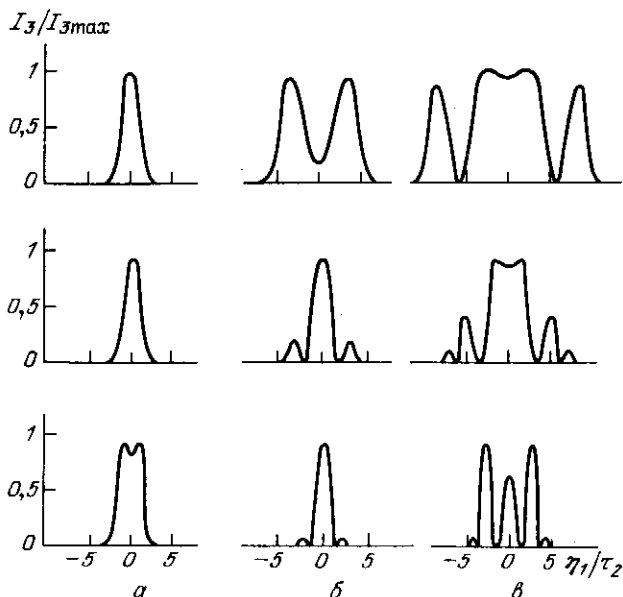


Рис. 3.3. Нелинейно-дисперсионные искажения профиля интенсивности суммарной волны с увеличением расстояния при различных уровнях амплитуды накачки:  
 $I_{\tau 23}/I_{\text{нл}} =$  (сверху вниз) 0, 2, 1 и 3;  $z/\tau_{23} = 2$  (а), 10 (б) и 20 (в)

нове численного решения полной системы уравнений (3.1). Результаты этих расчетов, часть из которых представлена рис. 3.3, подтверждают основные выводы о характере развития нелинейно-дисперсионного расщивания (3.23).

### § 3.5. Использование нелинейной дисперсии для сжатия фазово-модулированных импульсов

Расплывание связанных волновых пакетов обусловлено нелинейной дисперсией второго порядка. Известно, что в линейной среде, когда имеется только одна ветвь дисперсии, параметрическое расщивание может смениться компрессией импульса, имеющего квадратичную фазовую модуляцию определенного знака [11, 12].

Следует ожидать, что и в параметрическом преобразователе частоты ФМ импульс будет испытывать эффект сжатия. Наличие двух ветвей нелинейной дисперсии различных мод (параметрических бифотонов), несомненно, придает картине компрессии сложный характер.

Рассмотрим преобразование частоты волнового пакета, имеющего гауссову огибающую и линейную модуляцию частоты,

$$E_2 = E_{20} \exp[-t^2(1 - id_2)/\tau_2^2]. \quad (3.25)$$

В нелинейной среде импульс (3.25), взаимодействуя с волной частоты  $\omega_3$  в поле низкочастотной волны накачки, разбивается на две моды с разной нелинейной дисперсией (3.19). Парциальные амплитуды мод описываются во втором приближении теории нелинейной дисперсии параболическими уравнениями (3.20). Подставляя (3.25) в общее решение этих уравнений (3.21), находим огибающую импульса на суммарной частоте [9, 13]:

$$A_3 = (1/2)(\gamma_3/\gamma_2)^{1/2} E_{20} \{ \psi_+^{1/2} \exp [i\Gamma_0 z - \eta_{cp}^2 (1 - id_2) \psi_+ / \tau_2^2] - \psi_-^{1/2} \exp [-i\Gamma_0 z - \eta_{cp}^2 (1 - id_2) \psi_- / \tau_2^2] \}, \quad (3.26)$$

где поведение двух мод описывается функциями

$$\psi_{\pm} = [(1 \mp d_2 z / l_{23}) \mp iz / l_{23}]^{-1}. \quad (3.27)$$

Выражение для амплитуды сигнальной волны  $A_2$  имеет схожую с (3.26) структуру, только вместо разности экспонент входит их сумма. Из анализа (3.26), (3.27) выявляется одна из главных черт параметрического взаимодействия ФМ импульсов в поле низкочастотной накачки: параметрическую компрессию испытывают одновременно два импульса с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  независимо от знака линейной модуляции частоты  $d_2$ . Если мгновенная частота увеличивается к хвосту импульса ( $d_2 > 0$ ), то компрессия развивается на нижней ветви быстрой моды; при отрицательной девиации частоты ( $d_2 < 0$ ) сжатие испытывает медленная мода на верхней ветви дисперсии. Модули функции  $\psi_{\pm}$  описывают изменение длительности волновых пакетов разных мод:

$$\tau_{\pm}(z) = \tau_2 [(1 \pm z d_2 / l_{23})^2 + (z / l_{23})^2]^{1/2}. \quad (3.28)$$

Пусть  $d_2 > 0$ , тогда на расстоянии  $z = l_k$ ,

$$l_k = l_{23} d_2 / (1 + d_2^2), \quad (3.29)$$

волновой пакет медленной моды максимально сжимается до длительности

$$\tau_k = \tau_2 (1 + d_2^2)^{-1/2}, \quad (3.30)$$

определяемой обратной шириной частотного спектра входного импульса  $\Delta \omega_2^{-1}$ . Волновой пакет быстрой моды монотонно расплывается и служит пьедесталом для сжатой половины импульса. Сильное сжатие достигается при  $d_2 \gg 1$ . В этом случае в точке компрессии (3.29) импульс имеет широкое основание длительностью  $2\tau_2$  с малой интенсивностью  $I_n = I_{20}/8$ . На пьедестале расположен узкий импульс длительностью  $\tau_k$  с пиковой интенсивностью

$$I_k \approx (\gamma_3/\gamma_2) d_2 I_{20} / 4$$

(рис. 3.4). За точкой компрессии волновые пакеты обеих мод расплываются с одинаковой скоростью:

$$\tau_{\pm} \approx (1 + d_2^2)^{1/2} z / l_{23}.$$

Волновые пакеты быстрых и медленных мод распространяются с одной средней групповой скоростью, но с разными фазовыми скоростями. Относительный набег фазы между парциальными волнами приводит к пространственным биениям амплитуд  $A_j$  с периодом  $\pi/\Gamma_0$ . Интенсивность на оси колеблется в пределах

$$I_3 = (\gamma_3/\gamma_2)I_{20}(|\psi_+| \pm |\psi_-|)/4.$$

Наибольшая глубина биений наблюдается там, где длительности модовых пакетов одного порядка,  $\tau_+ \approx \tau_-$ . Это имеет место на начальном этапе

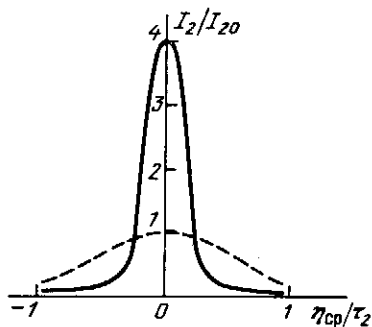


Рис. 3.4. Параметрическое сжатие фазово-модулированного импульса в точке компрессии  $z_k$  в поле низкочастотной волны накачки: штриховая линия — профиль входного импульса;  $d_2 = 10$

( $z \ll l_k$ ) и за точкой компрессии ( $z \gg l_k$ ). В области компрессии импульсов с  $d_2 \gg 1$  модуляция интенсивности незначительна, так как здесь  $|\psi_+| \gg |\psi_-|$  или  $\tau_+ \ll \tau_-$ .

Проведенное рассмотрение параметрической компрессии ФМ импульсов основано на приближенном описании взаимодействия волновых пакетов с помощью параболических уравнений для парциальных амплитуд. Оно применимо при условии  $\Gamma_0 l_{\text{кор}} \gg 1$ , когда дисперсионные кривые  $k(\omega)$  хорошо аппроксимируются параболой. Дисперсионные эффекты более высокого порядка искажают гауссовы профили пакетов; можно сказать, что на фоне общего процесса расплывания или компрессии возникают хроматические aberrации. Характер их проявления виден на рис. 3.5 [13], где представлены результаты численного решения полной системы трех укороченных уравнений для конкретного случая  $d_2 = 6$ ,  $\Gamma_0 l_{\tau 23} = 10$ . Так как ключевой параметр  $\Gamma_0 l_{\text{кор}} = \Gamma_0 l_{\tau 23} (1 + d_2^2)^{-1/2} = 1,7$ , то хроматические aberrации проявляются достаточно сильно. Как видно из рис. 3.5, огибающие пакетов имеют несимметричную форму. Вместе с тем оценки по формулам второго приближения теории нелинейной дисперсии длины компрессии  $l_k = 3,3 l_{\tau 23}$  и максимальной интенсивности  $I_k = 1,7 I_{20}$  находятся в хорошем соответствии с результатами точного численного решения укороченных уравнений (3.1).

Приведем для иллюстрации пример из нелинейной оптики, показывающий возможности параметрической компрессии. Пусть оптический импульс имеет длительность  $\tau_2 = 1$  пс и частотный параметр  $d_2 = 10$ . Возьмем кристалл KDP, в котором групповая расстройка  $\nu_{23} = 6,6 \cdot 10^{-13}$  с/см. Подби-



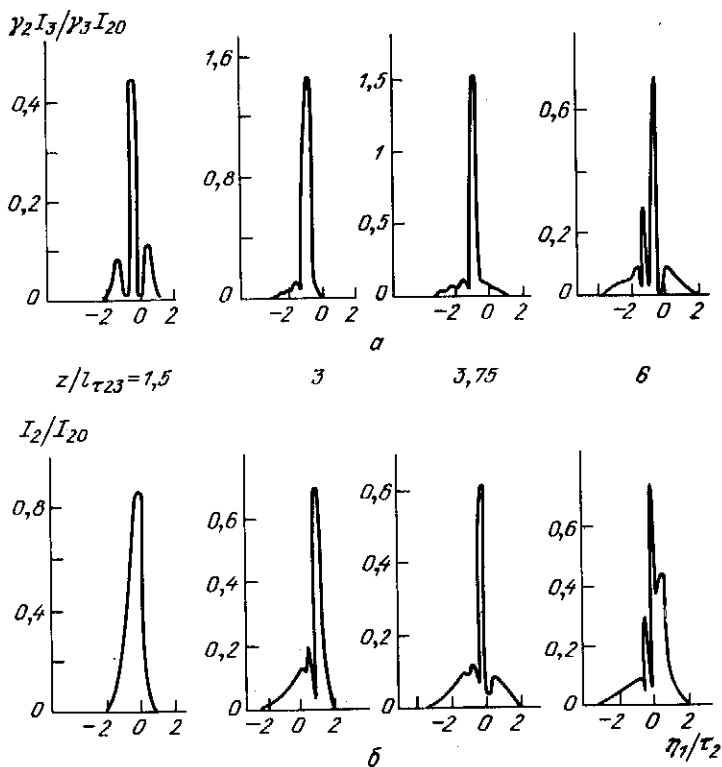


Рис. 3.5. Результаты численного моделирования параметрической компрессии фазово-модулированных импульсов суммарной (а) и разностной (б) частот при  $d_2 = 6$ ,  $\Gamma_0 l_{\tau 23} = 10$

раем уровень интенсивности волны накачки такой, чтобы  $\Gamma_0 = 10 \text{ см}^{-1}$ . Условие хорошей компрессии,  $\Gamma_0 l_{\text{кор}} = 1,5 > 1$ , выполнено. В точке компрессии, лежащей на расстоянии  $l_{\text{к}} = 5 \text{ см}$ , слабые импульсы сжимаются до 100 фс. Таким образом, на выходе из нелинейного кристалла длины 5 см, облучаемого мощной низкочастотной волной накачки, формируются два фемтосекундных импульса на суммарной  $\omega_3$  и разностной  $\omega_2$  частотах.

### § 3.6. Пространственно-временные эффекты при параметрическом распывании

Двумерное распывание связанных волновых пучков-пакетов, имеющих в линейной среде различие групповых скоростей по величине  $\nu_{23}$  и по направлению  $\beta_{23}$ , анализируется достаточно просто с помощью методики, развитой при описании двумерной диффузии в параметрическом усилителе (§ 2.5).

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для профиля интенсивности суммарной волны, возбуждаемой сигналом,

имеющим гауссову огибающую как в пространстве, так и во времени,

$$I_3 = (\gamma_3/\gamma_2) I_{20} (1 + z^2/L_{23}^2)^{-1/2} \sin^2 \Phi \exp(2F), \quad (3.31)$$

где

$$F = -(x_{cp}/a_2)^2 - (\eta_{cp}/\tau_2)^2 + \\ + (x_{cp}/a_2 l_{23\beta}^{1/2} - \eta_{cp}/\tau_2 l_{23\nu}^{1/2})^2 L_{23} z^2 (z^2 + L_{23}^2)^{-1},$$

$$\Phi = \Gamma_0 z + (1/2) \operatorname{arctg}(z/L_{23}) + \\ + (x_{cp}/a_2 l_{23\beta}^{1/2} + \eta_{cp}/\tau_2 l_{23\nu}^{1/2})^2 L_{23} z (z^2 + L_{23}^2)^{-1}.$$

Здесь введена обобщенная длина двумерного распывания

$$L_{23} = l_{23\nu} l_{23\beta} / (l_{23\nu} + l_{23\beta}), \quad (3.32)$$

где  $l_{23\nu} = 2 \Gamma_0 \tau_2^2 / \nu_{23}^2$ ,  $l_{23\beta} = 2 \Gamma_0 a_2^2 / \beta_{23}^2$  — элементарные длины распывания пакетов и пучков.

При взаимодействии коллинеарных пучков ( $\beta_{23} = 0$ ) параметрическая дифракция исчезает,  $l_{23\beta} \rightarrow \infty$ , и (3.31) описывает одномерное распывание волнового пакета, параметрически связанного с сигнальной волной (см. (3.23)). Если согласованы величины групповых скоростей ( $\nu_{23} = 0$ ), то остается параметрическая дифракция неколлинеарных пучков; при этом  $l_{23\nu} \rightarrow \infty$  и  $L_{23} = l_{23\beta}$ .

Наличие расстройки групповых скоростей суммарной и разностной волн как по модулю, так и по направлению приводит к их двумерному пространственно-временному распыванию. На плоскости переменных  $(\eta_{cp}/\tau_2, x_{cp}/a_2)$  вдоль направления с угловым коэффициентом  $-\tau_2 \beta_{23} / a_2 \nu_{23}$  огибающая  $I_3$  сохраняет гауссову форму (в частотно-угловой картине этому соответствует направление синхронизма), причем эффективная ширина волнового пучка-пакета в этом направлении остается неизменной. Пространственно-временное распывание развивается вдоль перпендикулярного направления с угловым коэффициентом  $a_2 \nu_{23} / \tau_2 \beta_{23}$ . На этой характеристике расположены вершины импульса и пучка. Иными словами, в процессе параметрического взаимодействия происходит своеобразное сканирование волновых пакетов и пучков: в точки с различными координатами  $x_{cp}$  импульсы приходят с разным запаздыванием во времени.

В заключение отметим, что длительность импульса, измеренная по интегральной мощности волны, увеличивается, как при одномерном распывании волновых пакетов (3.24), а ширина пучка, регистрируемая по полной энергии, растет по закону параметрической дифракции:  $a(z) = a_2 [1 + (z/l_{23\beta})^2]^{1/2}$ .

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПАДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

В этой главе обсуждаются закономерности параметрического усиления слабых волн в поле волнового пакета накачки, испытывающей распадную неустойчивость. В рамках первого приближения теории дисперсии рассматриваются нестационарные волновые эффекты, обусловленные конечной длительностью импульса накачки и расстройками групповых скоростей. Ограниченность волны накачки во времени проявляется за групповыми длинами, связанными с уходом энергии сигнальной и холостой волн из области усиления. В зависимости от соотношения групповых скоростей трех взаимодействующих пакетов (знаков и величин групповых расстроек), величины поля накачки и расстояния, пройденного в нелинейной среде, наблюдаются различные нестационарные режимы параметрического усиления: перед групповыми длинами — квазистационарный (по накачке), за первой групповой длиной — неустановившийся, за обеими групповыми длинами — модовый (соответствует абсолютной неустойчивости) и насыщения.

Картина нестационарных эффектов значительно усложняется при наличии частотной модуляции импульса накачки. Она непосредственно не сказывается на инкременте лишь при равенстве групповых скоростей волны накачки и одной из усиливаемых волн. В общем случае дисперсии волн выявляются условия подавления влияния фазовой модуляции накачки на протекание параметрического усиления.

Анализ нестационарных эффектов основан на использовании точных решений укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд, найденных для ряда характерных случаев амплитудно-фазовой модуляции импульса накачки. В заключительном параграфе представлен один из асимптотических методов для расчета нестационарного параметрического усиления в поле импульсной накачки.

### § 4.1. Точные решения связанных уравнений в форме Римана

Метод Римана упоминался в предыдущих двух главах в связи с обсуждением нестационарных эффектов при параметрическом усилении и преобразовании частоты в однородном поле волны накачки (2.7), (2.8), (3.6) и в поле фазово-модулированной волны накачки с постоянной интен-

сивностью (2.32). Ниже метод Римана будет изложен более детально в самом общем случае.

Взаимодействие слабых волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в заданном поле волнового пакета с несущей частотой  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  при наличии групповых расстройек описывается системой двух связанных уравнений для комплексных амплитуд (ср. с (2.1))

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \nu_{j3} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_3} = -i\gamma_j E_3(\eta_3) \left( \frac{A_1 A_2}{A_j} \right)^* + N_j(\eta_3, z) \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$A_j(z=0) = E_j(t) \quad (j=1, 2). \quad (4.2)$$

В (4.1) введены объемные источники слабых волн с амплитудой  $N_j$ . Как правило, они обусловлены тепловыми или другими флуктуациями волновых полей. Следует подчеркнуть, что в (4.1) не включены члены, описывающие фазовую расстройку  $\Delta k$  и поглощение волн  $\delta_j$  (ср. с (2.53)). Их можно учесть в окончательных выражениях для амплитуд с помощью процедуры, предложенной в § 2.7.

При исследовании распадной неустойчивости электромагнитной волны в плазме вместо граничной задачи (4.1), (4.2) решается задача с начальными условиями  $A_j(t=0) = E_j(z)$  [1-3]. В соответствии с этим при выполнении процедуры укорачивания волнового нелинейного уравнения амплитуды волн полагаются функциями  $A_j(t, \eta_3)$ . В итоге поведение волновых пакетов описывается уравнениями

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} + u_j \nu_{j3} \frac{\partial A_j}{\partial \eta_3} = i\gamma_j n_j c^{-1} E_3(\eta_3) \left( \frac{A_1 A_2}{A_j} \right)^* + N_j(t, \eta_3). \quad (4.3)$$

Сравнение (4.3) с (4.1) показывает их полную математическую идентичность. Поэтому все результаты, полученные для (4.1), применимы к (4.3) и наоборот.

Сведем систему двух уравнений (4.1) к одному уравнению гиперболического типа, исключив, например, амплитуду  $A_2$  и переходя от переменных  $\eta_3, z$  к характеристикам слабых волн  $\eta_1$  и  $\eta_2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial \ln E_3}{\partial \eta_1} \frac{\partial A_1}{\partial \eta_2} + \gamma_1 \gamma_2 |E_3|^2 \nu_{12}^{-2} A_1 = \\ & = -\nu_{12}^{-1} \frac{\partial \ln E_3}{\partial \eta_1} N_1 + \nu_{12}^{-1} \frac{\partial N_1}{\partial \eta_1} - \gamma_1 E_3 \nu_{12}^{-2} N_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Граничные условия (4.2) задаются теперь на пересечении характеристик  $\eta_1 = \eta_2$ .

Сложность нахождения точного аналитического решения (4.4) состоит в учете модуляции волны накачки

$$E_3(\eta_3) = E_3 \left( \frac{\nu_{23}}{\nu_{21}} \eta_1 + \frac{\nu_{13}}{\nu_{12}} \eta_2 \right) \quad (4.5)$$

при произвольном соотношении групповых скоростей.

Для нахождения решения (4.4) воспользуемся методом Римана, согласно которому необходимо сначала найти функцию, удовлетворяющую однородному гиперболическому уравнению (ср. с (4.4)) [4]

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \ln \left[ \frac{E_3(\eta_1, \xi_2)}{E_3(\xi_1, \xi_2)} \right] \frac{\partial R}{\partial \xi_1} + \gamma_1 \gamma_2 \nu_1^{-2} |E_3(\xi_1, \xi_2)|^2 R = 0 \quad (4.6)$$

с граничными условиями на характеристиках

$$R(\xi_1 = \eta_1) = 1, \quad R(\xi_2 = \eta_2) = 1.$$

Функция Римана  $R$  зависит только от вида модуляции волны накачки и расстройек групповых скоростей, представленных в форме (4.5). По сравнению с исходной постановкой задачи (4.1), (4.2) видно существенное упрощение как самого уравнения, так и граничных условий для него.

При параметрическом возбуждении слабых волн различают режим усиления бегущих волн, падающих на переднюю границу нелинейной среды с амплитудами  $E_j$  (сторонние силы отсутствуют,  $N_j = 0$ ), и режим вынужденного рассеяния на флуктуациях  $N_j \neq 0$ . Однако и падающие на среду волны также могут быть некогерентными. Например, параметрическое усиление оптических квантовых шумов можно трактовать как параметрическое рассеяние света [5].

Функция Римана выполняет роль функции Грина. Граничные условия (4.2), объемные источники  $N_j$ , расстройка волновых векторов  $\Delta k$ , коэффициенты затухания  $\delta_j$  учитываются уже в самом решении, имеющем интегральное представление. В случае параметрического усиления волн, заданных на передней границе нелинейной среды, решение (4.4) выражается через функцию Римана  $R$  следующим образом:

$$A_1 = E_1(\eta_1) - \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\xi E_1(\xi) E_3(\eta_1, \xi) E_3^{-1}(\xi, \xi) \frac{\partial R}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1 = \xi_2 = \xi} + \\ + i\gamma_1 \nu_1^{-1} \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\xi E_2^*(\xi) E_3(\eta_1, \xi) R(\eta_1, \eta_2, \xi, \xi). \quad (4.7)$$

При действии объемных источников волн решение (4.4) также представляется в квадратурах:

$$A_1 = \nu_2^{-1} \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\xi_2 \left[ N_1(\eta_1, \xi_2) - \right. \\ \left. - \int_{\xi_2}^{\eta_1} d\xi_1 N_1(\xi_1, \xi_2) E_3(\eta_1, \xi_2) E_3^{-1}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial R}{\partial \xi_1} + \right. \\ \left. + i\gamma_1 \nu_1^{-1} \int_{\xi_2}^{\eta_1} d\xi_1 N_2^*(\xi_1, \xi_2) E_3(\eta_1, \xi_2) R(\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) \right]. \quad (4.8)$$

Формулы для расчета амплитуды холостой волны  $A_2$  можно получить из (4.7), (4.8) с помощью циклической замены индексов  $1 \leftrightarrow 2$ . Если выполнить переход к новым амплитудам согласно преобразованиям (2.55),

(2.56), то можно учесть в решениях (4.7), (4.8) расстройку волновых векторов и поглощение волн.

Таким образом, мы получили интегральное представление амплитуд слабых волн при их нестационарном параметрическом усилении. Решение задачи состоит в отыскании функции Римана, удовлетворяющей гиперболическому уравнению (4.6). Для произвольного закона амплитудной и фазовой модуляций волны накачки при наличии обеих групповых расстроек ( $\nu_{j3} \neq 0$ ) функцию Римана найти не удастся. Однако можно указать ряд весьма важных случаев, когда проблема оказывается разрешимой.

В гл. 2 при обсуждении параметрической диффузии волновых пакетов приведены функции Римана для волны накачки с постоянной амплитудой (2.7) и при наличии линейной частотной модуляции (2.32). Большие трудности представляет учет амплитудной модуляции высокочастотной волны.

**Колоколообразный импульс волны накачки.** В среде с произвольной дисперсией первого порядка нестационарные параметрические процессы удается описать при распадной неустойчивости волнового пакета, имеющего колоколообразную форму огибающей и квазилинейную частотную модуляцию [6, 7], а именно следующую амплитудно-фазовую модуляцию (рис. 4.1):

$$E_3(t) = E_{30} \operatorname{ch}^{-1+2id_3}(t/\tau_3). \quad (4.9)$$

За счет фазовой модуляции мгновенная частота пакета меняется во времени:

$$\Omega_3(t) = 2(d_3/\tau_3) \operatorname{th}(t/\tau_3). \quad (4.10)$$

Полная девиация частоты

$$\Omega_{30} = \Omega_3(+\infty) - \Omega_3(-\infty) = 4d_3/\tau_3. \quad (4.11)$$

Вблизи вершины импульса имеет место линейная модуляция частоты

$$\Omega_3(t) = 2d_3 t/\tau_3^2.$$

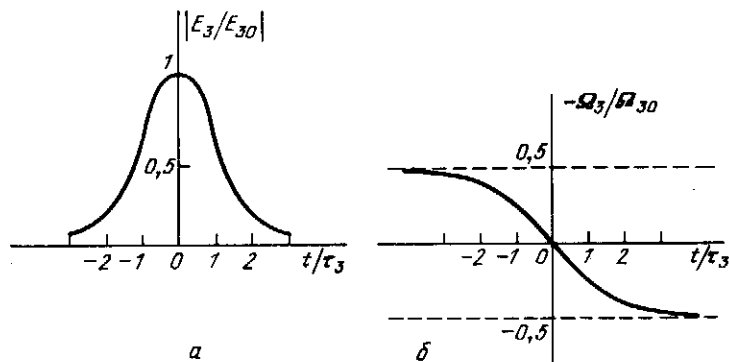


Рис. 4.1. Амплитудный профиль (а) и мгновенная частота (б) колоколообразного волнового пакета (4.9)

Интенсивность спектра колоколообразного импульса (4.9) описывается выражением

$$|S_3(\omega_3 + \Omega)|^2 = \frac{(1/2) \pi E_{30}^2 \tau_3^2 d_3^{-1} \text{sh}(2\pi d_3)}{\text{ch}(\pi \tau_3 \Omega) + \text{ch}(\pi \tau_3 \Omega_{30})}. \quad (4.12)$$

Ширина спектра  $\Delta\omega_3$  по уровню половины максимальной интенсивности находится из соотношения

$$\text{sh}(\pi \Delta\omega_3 \tau_3 / 2) = \text{ch}(\pi \Omega_{30} \tau_3 / 2). \quad (4.13)$$

При быстрой фазовой модуляции ( $d_3 \gg 1$ ) ширина частотного спектра импульса волны накачки (4.9) стремится по величине к полной девиации мгновенной частоты,  $\Delta\omega_3 \approx \Omega_{30}$ .

Модель колоколообразного импульса с квазилинейной частотной модуляцией (4.9) достаточно хорошо описывает сверхкороткие лазерные импульсы [8],  $\pi$ -импульсы при самоиндуцированной прозрачности [9]. В задачах о распаднй неустойчивости электромагнитного излучения в объеме плазмы (4.3) аналогичная модель представляет ограниченный в пространстве пучок накачки при наличии неоднородности плазмы, нарушающей фазовый синхронизм [3, 10, 11].

Ценность выбранной модели (4.9) заключается также в том, что она охватывает как частный случай и рассмотренную в § 2.6 волну накачки с постоянной амплитудой и квадратичной фазовой модуляцией (2.31). Действительно, если  $\tau_3 \rightarrow \infty$ , но величина  $d_3 \tau_3^2$  остается конечной, то (4.9) преобразуется к виду

$$E_3 = E_{30} e^{i\Omega_0 t^2 / \tau_3}, \quad (4.14)$$

описывающему линейную модуляцию частоты (ср. с (2.31)). Если же и величину  $d_3$  положить равной нулю, то мы приходим к модели длинного импульса накачки без фазовой модуляции,  $E_3 = E_{30}$ .

Функция Римана для фазово-модулированного импульса накачки (4.9), найденная в [7], выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$R = F(g + id_3, -g + id_3; 1; u) \quad (4.15)$$

с аргументом

$$u = -\text{sh} \frac{\nu_{13}(\eta_2 - \xi_2)}{\tau_3 \nu_{12}} \text{sh} \frac{\nu_{23}(\eta_1 - \xi_1)}{\tau_3 \nu_{12}} \text{ch}^{-1} \frac{\nu_{23} \xi_1 - \nu_{13} \xi_2}{\tau_3 \nu_{12}} \text{ch}^{-1} \frac{\eta_3}{\tau_3} \quad (4.16)$$

и ключевыми параметрами

$$g = (g_\nu^2 - d_3^2)^{1/2}, \quad g_\nu = \Gamma_0 \tau_3 (-\nu_{13} \nu_{23})^{-1/2}. \quad (4.17)$$

Величина  $|g_\nu|$  имеет смысл квазистационарного усиления на средней групповой длине:  $|g_\nu| = \Gamma_0 (l_{\tau 13} l_{\tau 23})^{1/2}$ .

В среде, где волна накачки имеет промежуточную скорость ( $u_1 < u_3 < u_2$  или  $u_2 < u_3 < u_1$ ), параметр  $g_\nu$  действителен. Если же импульс накачки бежит быстрее или медленнее слабых волн ( $u_3 > u_j$  или  $u_3 < u_j$ ), то  $\nu_{13} \nu_{23} > 0$  и  $g_\nu$  становится мнимым. Как будет показано ниже, в первом

случае развивается абсолютная неустойчивость, а во втором — конвективная.

При переходе к длинному импульсу накачки с квадратичной фазовой модуляцией (4.14) функция Римана (4.15) переходит в вырожденную гипергеометрическую функцию (2.32), а при отсутствии ФМ — в функцию Бесселя мнимого аргумента (2.7).

**Произвольная модуляция волны накачки.** При исследовании распадной неустойчивости и параметрического усиления часто можно считать, что одна из слабых волн имеет ту же скорость, что и волновой пакет накачки, например  $u_1 = u_3$ , а другая со временем выходит из поля накачки ( $\nu_{23} \neq 0$ ). В этом случае задачу (4.1), (4.2) удастся решить полностью для произвольного закона модуляции амплитуды и фазы высокочастотной волны. Функция Римана выражается через функцию Бесселя мнимого аргумента:

$$R = I_0 \{ 2\nu_{23}^{-1} [\gamma_1 \gamma_2 (\xi_2 - \eta_2)] \int_{\xi_1}^{\eta_1} d\xi |E_3(\xi)|^2 \}^{1/2}. \quad (4.18)$$

Для немодулированного поля волны накачки  $E_3 = E_{30}$  аргумент функции Бесселя упрощается и (4.18) совпадает с рассмотренным ранее при анализе параметрической диффузии связанных волновых пакетов выражением (2.7).

Важной особенностью функции Римана (4.18) является отсутствие в ней информации о фазовой модуляции основной волны. Фазовая модуляция волны накачки не влияет непосредственно на процесс усиления; так как она полностью перекладывается на попутную волну. Этот вывод следует из общего решения (4.7), если в нем учесть групповой синхронизм  $\nu_{13} = 0$ ; тогда  $E_3 = E_3(\eta_1)$  и  $A_1 \propto E_3(\eta_1)$ .

Таким образом, найденные выше выражения для функции Римана показывают, что нестационарные параметрические эффекты, обусловленные модуляцией высокочастотной волны, во многом зависят от соотношения групповых скоростей, которое можно оценивать по знаку произведения  $\nu_{13}\nu_{23}$ . В среде с  $\nu_{13}\nu_{23} > 0$  развивается абсолютная неустойчивость, а при  $\nu_{13}\nu_{23} \leq 0$  — конвективная, на которую при больших длинах (или временах) взаимодействия сильное влияние оказывают диссипативные процессы [12, 13]. Анализ нестационарных явлений при распадной неустойчивости для всех этих случаев будет представлен в следующих разделах главы. Прежде чем переходить к такому рассмотрению, отметим, что наряду с методами точного решения связанных уравнений можно при больших коэффициентах усиления развивать приближенные методы. О них идет речь в § 4.6.

## § 4.2. Усиление попутной и уходящей волн

Пусть волна частоты  $\omega_1$  распространяется вместе с импульсом накачки,  $u_1 = u_3$ , а другая волна уходит в сторону его хвоста со скоростью  $u_2 < u_3$ . Решение этой задачи обсуждалось различными авторами для процессов параметрического усиления, вынужденных рассеяний, распадной неустойчивости [14–16]. В интегральном виде оно описывается формула-



ми (4.7), (4.8) с представлением функции Римана через функцию Бесселя мнимого аргумента (4.18). В дальнейшем основное внимание мы уделим анализу усиления квазинепрерывных волн ( $E_j = E_{j0}$ ), когда наиболее четко проявляются нестационарные по импульсу накачки эффекты.

Если на вход среды подаются короткие импульсы слабых волн, длительность которых меньше длительности основного импульса,  $\tau_j \ll \tau_3$ , то на начальном этапе усиления происходит диффузионное распыление узких пакетов. Оно будет идти до тех пор, пока слабые волны не достигнут периферии импульса накачки. На расстояниях  $z \geq l_{\tau 23}$  возникают нестационарные эффекты, связанные с ограниченностью во времени высокочастотного импульса. В этой области параметрическое усиление носит неустановившийся характер. При больших коэффициентах усиления из (4.7) с учетом (4.18) можно найти асимптотические выражения для амплитуд попутной ( $u_1 \approx u_3$ ) и уходящей ( $u_2 \neq u_3$ ) волн:

$$\begin{aligned} A_1 &\sim E_3(\eta_3) [E_{10} + (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} E_{20}] \exp [G(\eta_3, z)], \\ A_2 &\sim [E_{20} + (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2} E_{10}] \exp [G(\eta_3, z)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$G = 2[\gamma_1 \gamma_2 z \nu_2^{-1} \int_{\eta_2}^{\eta_3} d\xi |E_3(\xi)|^2]^{1/2} \quad (4.20)$$

— коэффициент параметрического усиления в неустановившемся режиме. На расстояниях, превышающих групповую волну ( $z > l_{\tau 23}$ ), функция усиления (4.20) расплывается во времени и ее максимум перемещается вдоль характеристики  $\eta_{cp} = t - z/u_{cp}$ , где  $u_{cp} = 2u_2 u_3 / (u_2 + u_3)$ . Качественно такую форму имеет и распределение амплитуды уходящей волны (рис. 4.2), так как  $A_2 \propto \exp G$ . Максимальная величина усиления при  $z \gg l_{\tau 23}$  зависит от полной энергии импульса накачки  $W_{30}$ :

$$G_{max} = 2(\gamma_1 \gamma_2 W_{30} z / \nu_2 z)^{1/2}. \quad (4.21)$$

Если учесть, что  $W_{30} \approx E_{30}^2 \tau_3$ , то (4.21) можно придать другой вид:  $G_{max} = 2\Gamma_0 (z l_{\tau 23})^{1/2}$ .

Попутная волна усиливается строго в области, занимаемой основным импульсом,  $A_1 \propto E_3(\eta_3) \exp G$ . В силу свойств функции усиления (4.20) она локализуется вблизи хвоста основного импульса, т.е. там, где выходит вторая волна.

Представленная картина развития конвективной неустойчивости волнового пакета получена без учета диссипативных механизмов. Если положить для простоты  $\delta_1 = \delta_2$ , то в (4.19), как нетрудно показать (см. (2.55)), появится экспоненциальный член  $\exp(-\delta_1 z)$ . Так как нестационарное

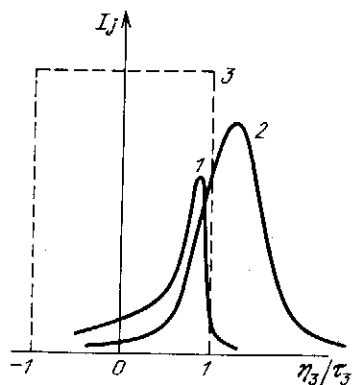


Рис. 4.2. Профили интенсивности попутной (1) и уходящей (2) волн, усиливаемых в поле импульса накачки (3)

усиление (4.21) развивается в пространстве более медленно ( $G \propto z^{1/2}$ ), то, достигнув наибольшей величины порядка  $2(\gamma_1 \gamma_2 W_{30} / \delta_1 |\nu_{23}|)^{1/2}$  на расстоянии  $l_\delta = \gamma_1 \gamma_2 W_{30} / \delta_1^2 |\nu_{23}|$ , оно затем ослабевает и пропадает на длине  $4l_\delta$ . Этот вывод относится к усилению слабых волн, падающих на границу нелинейной среды. Если же в среде действуют объемные источники, восполняющие потери энергии, то поглощение приводит к установлению стационарного распределения полей слабых волн.

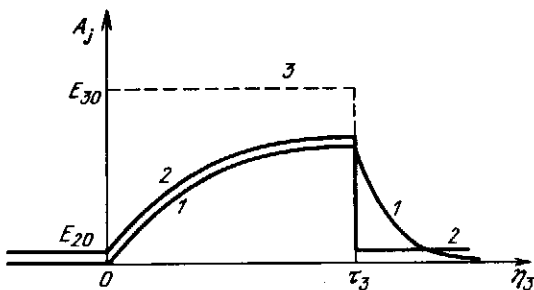


Рис. 4.3. Квазистационарные огибающие попутной (1) и уходящей (2) волн при распадающей неустойчивости прямоугольного импульса (3) в диссипативной среде

Рассмотрим простой случай, когда в отсутствие параметрических взаимодействий ( $E_3 = 0$ ) излучение на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равномерно занимает все пространство. Такое равновесное состояние, как видно из уравнений (4.1), обеспечивают объемные источники с  $N_j = E_{j0} / \delta_j$ . Найдем теперь квазистационарные распределения амплитуд слабых волн, формирующиеся на расстояниях  $z \gg l_\delta$ . Полагая в (4.1) производные по координате  $z$  равными нулю, приходим к уравнению для амплитуды уходящей волны

$$\nu_{23} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_3} = \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2 |E_3|^2}{\delta_1} - \delta_2 \right) A_2 + \delta_2 E_{20} - i \gamma_2 E_3 E_{10}^* \quad (4.22)$$

Попутная волна имеет простую связь с уходящей:

$$A_1 = -i \gamma_1 E_3 A_2^* / \delta_1 + E_{10} \quad (4.23)$$

Уравнение (4.22) решается в общем виде

$$A_2 = E_{20} - \frac{\delta_2}{\nu_{23}} \int_0^\infty dy [E_{20} - i \gamma_2 E_{10}^* E_3 (\eta_3 - y)] \times \\ \times \exp \left( - \frac{\delta_2 y}{\nu_{23}} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\delta_1 \nu_{23}} \int_{\eta_3 - y}^{\eta_3} dt |E_3|^2 \right) \quad (4.24)$$

В поле импульса волны накачки прямоугольной формы амплитуда уходящей волны нарастает от фронта к хвосту (для простоты полагаем  $E_{10} = 0$ ; см. также [17]):

$$A_2 = E_{20} \left( 1 - \frac{\Gamma_0^2}{\delta_1 \delta_2} \right)^{-1} \left[ 1 - \frac{\Gamma_0^2}{\delta_1 \delta_2} \exp \left( \delta_2 \frac{1 - \Gamma_0^2}{\delta_1 \delta_2} \eta_3 \nu_{23}^{-1} \right) \right] \quad (4.25)$$

( $0 < \eta_3 < \tau_3$ ), и затухает вне области накачки ( $\eta_3 > \tau_3$ ), стремясь к равновесному значению  $A_2 = E_{20} + A_2(\tau_3) \exp(-\delta_2 \eta_3 / \nu_{23})$ . Порог возникновения квазистационарного распределения (4.25)  $\Gamma_0 \geq \delta_1 \delta_2$  такой же, как при стационарном усилении плоских монохроматических волн. На рис. 4.3 представлены графики квазистационарных профилей огибающих слабых волн при конвективной неустойчивости прямоугольного импульса.

#### § 4.3. Усиление уходящих волн, $\nu_{13}\nu_{23} > 0$

В предыдущих параграфах было показано, что снос энергии одной из слабых волн из импульса накачки приводит за групповой длиной  $l_{\tau 23}$  к сильному замедлению параметрического усиления: вместо  $G = \Gamma_0 z$  для квазистационарного режима имеем  $G \approx \Gamma_0 (z l_{\tau 23})^{1/2}$  в нестационарной области. Если и вторая волна выходит из области взаимодействия с накачкой, причем в ту же сторону, что и первая, то экспоненциальное нарастание амплитуд за групповыми длинами  $l_{\tau 13}, l_{\tau 23}$  прекращается.

Пусть на вход усилителя подан длинный импульс на частоте  $\omega_2$  с амплитудой  $E_{20}$ . Для определенности положим, что первая волна имеет меньшую групповую расстройку, т.е.  $u_3 > u_1 > u_2$ . Тогда сначала на небольших расстояниях  $z < l_{\tau 13}, l_{\tau 23}$  имеет место квазистационарное усиление. Затем в промежуточной области, ограниченной групповыми длинами  $l_{\tau 23} < z < l_{\tau 13}$ , усиление переходит в неустановившийся режим. На еще больших расстояниях  $z > l_{\tau 13}, l_{\tau 23}$  происходит вынос энергии из импульса накачки обеими слабыми волнами. В результате основная часть усиливаемых волн расположена вне импульса накачки:  $\tau_3 < \eta_3 < |\nu_{23}| z$ . Из (4.16) видно, что этому режиму усиления соответствует аргумент гипергеометрической функции  $u \approx 1$ . Интегрирование (4.7) в этом случае дает выражение для стационарного уровня амплитуды волны частоты  $\omega_1$ :

$$|A_1| \approx E_{20} (\nu_{23} / \nu_{13})^{1/2} \operatorname{ch}(\pi |g|) \operatorname{sech}(\pi d_3), \quad (4.26)$$

где  $|g|^2 = |g_\nu|^2 + d_3^2$  (ср. с (4.17)),  $d_3$  — параметр частотного заполнения импульса накачки (4.9). Формула (4.26) показывает, что, как и ожидалось, за групповыми длинами экспоненциальный рост амплитуды сигнала с расстоянием прекращается.

В отсутствие фазовой модуляции импульса накачки коэффициент усиления насыщается на уровне

$$G_H = \pi |g_\nu|. \quad (4.27)$$

Если импульс накачки имеет фазовую модуляцию, то уровень насыщения снижается, как видно из (4.26), до величины

$$G_H = \pi(|g| - |d_3|). \quad (4.28)$$

Здесь интересно рассмотреть предельный случай сильной фазовой модуляции:  $|d_3| \gg |g_\nu|$ . Разлагая (4.28) в ряд по малой величине  $g_\nu$ , находим в первом приближении уровень насыщения в условиях проявления некогерентности, вызванной фазовой модуляцией волны накачки,

$$G_H = \pi |g_\nu|^2 / 2 |d_3|. \quad (4.29)$$

Аналогичный результат получен в § 2.5 при анализе параметрической диффузии в поле длинного импульса накачки постоянной интенсивности, имеющего квадратичную фазовую модуляцию (2.31).

Более наглядные представления об эффекте насыщения параметрического усиления при сносе энергии слабых волн в одну сторону из импульса накачки можно получить на примере, когда скорости уходящих волн равны друг другу,  $u_1 = u_2$ . При совпадении характеристик сигнальной и холостой волн ( $\eta_1 = \eta_2$ ) уравнения (4.1) решаются непосредственно, без привлечения метода Римана.

В поле спектрально-ограниченного импульса общее решение, описывающее усиление сигнала, имеет простую запись (ср. с (2.6))

$$A_1 = E_1(\eta_1) \operatorname{ch} G - i(\gamma_1/\gamma_2)^{1/2} E_3(\eta_1) \operatorname{sh} G, \quad (4.30)$$

где

$$G = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} \int_0^z d\xi E_3(\eta_1 + \nu_{13} \xi). \quad (4.31)$$

— коэффициент нестационарного усиления. На малых расстояниях, не превышающих длину группового запаздывания ( $z \ll l_{\tau 13}$ ), наблюдается квазистационарный режим усиления:  $G = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} E_3(\eta_1) z$ . Амплитудная модуляция импульса накачки перекладывается согласно (4.30) на усиляемые волны.

За групповой длиной начинает сказываться снос энергии усиливаемых волн. Максимум усиления лежит на средней характеристике (между сигнальной волной и накачкой)  $\eta_3 = \nu_{13} z/2$ . При  $z \gg l_{\tau 13}$  усиление насыщается на уровне

$$G_H = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} \nu_{13}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt E_3(t). \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, в частности, что в поле колоколообразного импульса накачки  $E_3 = E_{30} \operatorname{sech}(t/\tau_3)$  уровень насыщения равен выведенной ранее величине (4.27) с учетом равенства  $\nu_{13} = \nu_{23}$ .

Влияние фазовой модуляции волны накачки на параметрическое возбуждение сигнальной и холостой волн, имеющих групповой синхронизм  $u_1 = u_2$ , описывается следующим решением уравнений (4.1):

$$A_1 = C_1(\eta_1) F(g + id_3, -g + id_3; 1/2 + id_3; 1 + \exp(-2\eta_3/\tau_3)) + \\ + C_2(\eta_1) F(g + id_3, -g + id_3; 1/2 + id_3; 1 + \exp(2\eta_3/\tau_3)), \quad (4.33)$$

где  $F$  — гипергеометрические функции,  $g = i(\Gamma_0^2 l_{\tau 13}^2 + d_3^2)^{1/2}$ , функции  $C_{1,2}(\eta_1)$  определяются из граничных условий.

На расстояниях  $z > l_{\tau 13}$ , как показывает анализ (4.33), происходит насыщение усиления:

$$A_1 = C_2(\eta_1) + C_1(\eta_1) \operatorname{ch}(\pi |g|) \operatorname{sech}(\pi d_3). \quad (4.34)$$

Найденное решение близко к асимптотическому выражению (4.26), полученному в более общем случае  $u_1 \neq u_2$ . Поэтому все выводы о влиянии фазовой модуляции, сформулированные ранее, сохраняются. Подчеркнем только, что сильное поле накачки может сделать процесс параметрического

усиления когерентным даже при наличии фазовой модуляции. Для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\Gamma_0 l_{\tau 13} \gg d_3$ . Это накладывает условие на амплитуду волны накачки:

$$E_{30} \gg |\Omega_{30}^2 \nu_{13} \nu_{23} / \gamma_1 \gamma_2|^{1/2}, \quad (4.35)$$

где  $\Omega_{30}$  — девиация частоты импульса накачки (4.11). В сильном поле (4.35) рост амплитуды слабых волн практически нечувствителен к фазовой модуляции.

#### § 4.4. Модовое усиление при захвате волн импульсом накачки, $\nu_{13} \nu_{23} < 0$

Совершенно другая картина развития параметрического процесса наблюдается в диспергирующей среде, когда импульс накачки распространяется с промежуточной скоростью по отношению к усиливаемым волнам. В среде с такой дисперсией экспоненциальный рост амплитуд  $A_j$  продолжается и за групповыми длинами  $l_{\tau 13}, l_{\tau 23}$ . В этой области формируются стационарные импульсы, распространяющиеся вместе с основным излучением, причем инкремент  $\Gamma_M$  не зависит от времени и длины усиления  $z$ :

$$A_j = B_{jM}(\eta_3) \exp(\Gamma_M z). \quad (4.36)$$

В задаче с начальными условиями (4.3), где роль координаты  $z$  выполняет время  $t$ , модовому режиму (4.36) соответствует абсолютная неустойчивость волнового пакета: слабые волны экспоненциально нарастают во времени,  $A_j = B_{jM} \exp(\Gamma_M t)$ .

После подстановки (4.36) в (4.1) становится ясно, что нахождение параметрических мод связано с решением задачи на собственные функции и собственные значения для уравнений

$$\begin{aligned} \Gamma_M B_{1M} + \nu_{13} \frac{\partial B_{1M}}{\partial \eta_3} &= -i\gamma_1 E_3(\eta_3) B_{2M}^*, \\ \Gamma_M B_{2M} + \nu_{23} \frac{\partial B_{2M}}{\partial \eta_3} &= -i\gamma_2 E_3(\eta_3) B_{1M}^* \end{aligned} \quad (4.37)$$

при условии ограниченности амплитуд вне импульса накачки. Рассмотрим форму стационарных импульсов и их инкремент для некоторых видов модуляции волны накачки, полагая для определенности  $u_2 < u_3 < u_1$ .

**Параметрические моды в поле колоколообразного импульса накачки.** Для колоколообразного импульса (4.9) решение уравнений (4.37) выражается через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned} A_{1M} &= E_{1M} F\left(g + id_3, -g + id_3; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Gamma_M l_{\tau 12}^{1/2} l_{\tau 13}^{1/2} + id_3; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{\eta_3}{\tau_3}\right) \times \\ &\times \exp \frac{\Gamma_M \eta_3}{|\nu_{13}|}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

На фронте импульса накачки при  $\eta_3 = -\infty$  аргумент гипергеометрической функции равен нулю, а сама функция — единице. Это означает, что амплиту-

да моды сигнала экспоненциально уменьшается на фронте накачки с постоянной времени  $|\nu_{13}|/\Gamma_M$ .

Для нахождения структуры локализованных мод из (4.38) потребуем, чтобы и на хвосте ( $\eta_3 = \infty$ ) амплитуда моды была равна нулю. Гипергеометрическая функция единичного аргумента ограничена только при определенном соотношении между ее параметрами. В результате находим следующее выражение для инкремента  $p$  моды:

$$\Gamma_M^{(p)} = \frac{2g - (2p + 1)}{l_{\tau 13} + l_{\tau 23}} \quad (p = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.39)$$

Дискретному спектру инкремента (4.39) отвечает дискретный набор параметрических мод

$$A_{1M}^{(p)} = E_{1M} u^{1-g+p-id_3} \frac{d^p}{du^p} [u^{g-1+id_3} (1-u)^{g+id_3}] \exp \frac{\Gamma_M^{(p)} \eta_3}{|\nu_{13}|}, \quad (4.40)$$

где  $u = (1/2) [1 + \text{th}(\eta_3/\tau_3)]$  – аргумент гипергеометрической функции (4.38).

Из (4.39) можно определить порог возбуждения параметрических мод, полагая  $\Gamma_M = 0$ :

$$g_{\text{пор}} = 1/2 + p. \quad (4.41)$$

На пороге амплитуда моды в направлении оттока энергии сигнала не убывает (см. (4.38) при  $\Gamma_M = 0$ ). При превышении порога наибольшее усиление испытывает основная мода ( $p = 0$ ), имеющая амплитудный профиль

$$A_{1M}^{(0)} = E_{1M} \exp \left[ -\frac{\eta_3}{2\tau_3} + \frac{\Gamma_M^{(0)} \eta_3 (\nu_{23} - |\nu_{13}|)}{2|\nu_{13}| \nu_{23}} - \frac{i\eta_3 d_3}{\tau_3} \right] \text{ch}^{-g+id_3} \frac{\eta_3}{\tau_3}. \quad (4.42)$$

На рис. 4.4 показаны графики инкрементов и профилей параметрических мод (4.40) при  $d_3 = 0$ . Длительность стационарного импульса  $\tau_{1M} \approx \tau_3/g$ , а его вершина смещена по отношению к вершине импульса накачки на время  $\Delta\eta_{1M}$ , причем

$$\text{th} \frac{\Delta\eta_{1M}}{\tau_3} = \frac{\nu_{23} - |\nu_{13}|}{\nu_{23} + |\nu_{13}|} \frac{1}{2g}. \quad (4.43)$$

С ростом номера моды ее инкремент уменьшается.

Характер модового усиления зависит от предыстории. Если модовый режим наступает сразу за квазистатическим ( $\nu_{23} = |\nu_{13}|$ ), то стационарные импульсы локализованы вблизи вершины основного,  $\Delta\eta_{jM} \approx 0$ , и инкремент в случае  $d_3 = 0, g \gg p$  стремится к стационарной величине  $\Gamma_M \approx \Gamma_0$ .

При несимметричном сносе энергии сигнальной и холостой волн из импульса накачки ( $|\nu_{13}| \gg \nu_{23}$ ) параметрические моды формируются у края основного импульса:  $\Delta\eta_{1M} \approx (1/2) \tau_3 \ln |\nu_{13}/\nu_{23}|$ , где, естественно, амплитуда накачки меньше. Вследствие этого инкремент модового усиле-

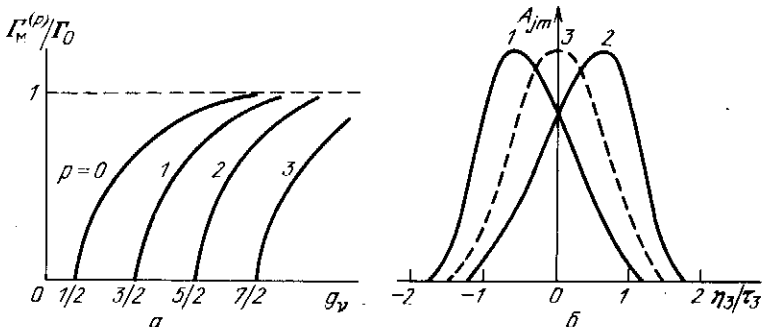


Рис. 4.4. Инкременты параметрических мод  $p$ -го порядка (а) и огибающие основной моды при  $p = 0$  (б):

1 — сигнальная волна, 2 — холостая волна, 3 — гауссов импульс накачки (б)

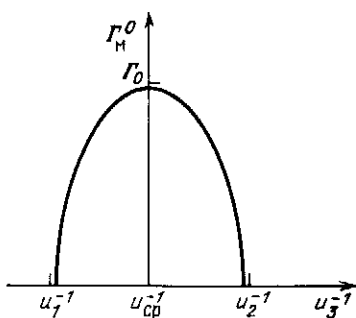


Рис. 4.5. Зависимость инкремента усиления параметрической моды от соотношения групповых скоростей волны накачки  $u_3$  и усиливаемых волн  $u_1$  и  $u_2$ ,  $u_{cp} = 2u_1u_2(u_1 + u_2)^{-1}$

ния падает при отходе от симметричного случая групповых расстройк (рис. 4.5):

$$\Gamma_M^{(p)} = 2\Gamma_0 \frac{|\nu_{13}\nu_{23}|^{1/2}}{\nu_{23} + |\nu_{13}|} \frac{2p + 1}{l_{\tau 12} + l_{\tau 13}} \quad (4.44)$$

Фазовая модуляция импульса накачки, характеризуемая параметром  $d_3$ , как видно из (4.39), уменьшает инкремент экспоненциального роста модовых амплитуд в соответствии с (4.17). Очень быстрая модуляция ( $|d_3| \gg g_\nu$ ) вообще подавляет модовый режим усиления (наступает насыщение по длине нелинейной среды). Напротив, в сильных полях импульса накачки ( $g_\nu \gg |d_3|$ ) процесс параметрического усиления становится когерентным; он так же эффективен, как и в поле спектрально-ограниченного импульса с  $d_3 = 0$ . Из-за фазовой модуляции основного импульса, как показывает (4.42), несущая частота модового сигнала перестраивается на величину  $\Omega_{30}$  и возникает квазилинейная частотная модуляция, в два раза меньшая по сравнению с импульсом накачки (ср. с (4.9)).

Во временной задаче (4.3) модовому усилению, как было уже сказано, соответствует абсолютная неустойчивость волнового пакета (или пучка) накачки. Причем эффект фазовой модуляции импульса накачки связан в такой задаче с неоднородностью нелинейной среды, например плазмы [3, 10, 11]. Не представляет особого труда переложить результаты, полученные при анализе условий возбуждения модового режима параметрического усиления, на рассмотрение особенностей абсолютной неустойчи-

ности в ограниченной области неоднородной параметрически-активной среды.

**Параметрические моды в поле прямоугольного импульса накачки** [6, 18]. Рассмотрим другой важный случай амплитудной модуляции импульса накачки, а именно прямоугольный профиль при длительности  $\tau_3$ . Решение (4.37) при условии отсутствия притока энергии на сигнальной и холостой частотах в область импульса параметрической накачки ( $B_{1M}(\tau_3/2) = 0$  и  $B_{2M}(-\tau_3/2) = 0$ ) дает следующие формулы для расчета инкремента моды:

$$\Gamma_M = -2\Gamma_0 |\nu_{13}\nu_{23}|^{1/2} (\nu_{23} + |\nu_{13}|)^{-1} \cos b, \quad (4.45)$$

и амплитудного профиля:

$$B_{1M} = E_{1M} \sin \left[ b \left( \frac{\eta_3}{\tau_3} - \frac{1}{2} \right) \right] \exp \left[ \frac{\Gamma_M (\nu_{23} - |\nu_{13}|)}{2 |\nu_{13}\nu_{23}|} \eta_3 \right], \quad (4.46)$$

где ключевой параметр  $b$  находится из трансцендентного уравнения

$$(\sin b)/b = \pm 1/g_\nu. \quad (4.47)$$

Последнее уравнение дает при превышении определенного порога по параметру  $g_\nu$  набор собственных значений  $b_p$ . Из них для модового режима усиления отбираются те, для которых  $\Gamma_M \geq 0$  (4.45). Возбуждение мод начинается при условии  $\cos b_p = 0$ , откуда следует выражение для порога в поле прямоугольного импульса:

$$g_{\nu \text{ пор}} = \pi(1/2 + p). \quad (4.48)$$

При большом усилении на средней групповой длине ( $g_\nu \gg 1$ ) из (4.47) имеем  $b = \pi(1 + p)$  для всех мод вплоть до номера  $p \approx g_\nu/\pi$ ; при этом инкремент этих мод равен квазистационарной величине,  $\Gamma_M = \Gamma_0$ , а их длительность равна  $\tau_3$ , но высшие моды имеют гармоническую модуляцию  $B_{1M}^{(p)} \propto \cos [\pi(1 + p)\eta_3/\tau_3]$ .

Таким образом, сравнение представленных выше двух случаев формирования параметрических мод в полях колоколообразного импульса накачки и с прямоугольным профилем показывает, что неоднородность распределения амплитуды накачки в большей степени влияет на огибающие модовых сигналов и в меньшей степени на их инкременты. Поэтому найденные формулы для инкрементов (4.39), (4.45) можно использовать для оценки модового усиления в поле импульса накачки с другим амплитудным профилем, например с гауссовым. Следует специально отметить еще одно важное обстоятельство. Расчеты характеристик параметрических мод в поле колоколообразного импульса накачки (4.39), (4.40) можно использовать и в некогерентных случаях, когда коэффициенты нелинейной связи волн  $\gamma_j$  в (4.1) являются комплексными величинами. С такого рода задачами сталкиваются при исследовании распространения радиоволн в ионосфере [19].

**Порог возникновения параметрических мод.** В произвольном случае модуляции импульса накачки  $E_3(\eta_3)$  найти структуру параметрических волн не удастся. Однако в недиссипативной среде ( $\delta_j = 0$ ) можно вывести общую формулу для порога модового усиления. Полагая в (4.37)  $\Gamma_M = 0$  и



считая импульс накачки спектрально-ограниченным (фазовая модуляция отсутствует), находим простые решения [20].

$$B_{1M} = E_{1M} \cos G, \quad B_{2M} = E_{2M} \sin G, \quad (4.49)$$

где функция усиления равна

$$G = g_{\nu} \int_{-\infty}^{\eta_3/\tau_3} d\xi E_3(\xi)/E_{30}. \quad (4.50)$$

На фронте импульса накачки нет холостой волны. Модовый режим реализуется, если и сигнальная волна имеет нулевую амплитуду на противоположной стороне, т.е. на хвосте при  $\eta_3 = +\infty$ . Этому условию отвечает нормированная площадь импульса накачки, кратная  $\pi/2$ :

$$g_{\nu \text{ пор}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi E_3(\xi)/E_{30} = \pi(1/2 + p). \quad (4.51)$$

Полученная формула охватывает как частные случаи рассмотренные выше законы модуляции импульса накачки. Так, для колоколообразного импульса (4.9) из (4.51) следует (4.41). Гипергауссов импульс накачки  $E_3 = E_{30} \exp(-t^N/\tau_3^N)$  возбуждает моды при превышении следующего порога:

$$g_{\nu \text{ пор}} = (\pi N/4) \Gamma(1/N) (2p + 1), \quad (4.52)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Полагая  $N = 2$ , находим порог в поле гауссова импульса:  $g_{\nu \text{ пор}} = \sqrt{\pi} (1/2 + p)$ ; устремляя  $N \rightarrow \infty$ , имеем для прямоугольного импульса  $g_{\nu \text{ пор}} = \pi(1/2 + p)$  (см. (4.48)).

Влияние поглощения и волновой расстройки на структуру мод можно проследить, если умножить амплитуды  $B_{jM}$  на экспоненциальные множители (см. преобразование в § 2.7):

$$B_{1M} = \bar{B}_{1M} \exp [i\Omega_1(\Delta k)\eta_3 + iq_1 z + (\delta_2 - \delta_1)\eta_3/|\nu_{12}| - (\delta_1|\nu_{23}| - \delta_2|\nu_{13}|)z/|\nu_{12}|], \quad (4.53)$$

где сдвиг частот, связанный с компенсацией волновой расстройки,  $\Omega_1 = \Delta k/\nu_{12}$  ( $\Omega_2 = -\Omega_1$ ); при этом соответствующим образом изменяются волновые числа мод. Перестройка частот при усилении волновых пакетов отмечалась и при параметрической диффузии волн (§ 2.7).

Рассмотрим с помощью (4.53) роль поглощения слабых волн при абсолютной неустойчивости волнового пакета накачки. Во-первых, дисперсия коэффициентов поглощения ( $\delta_1 \neq \delta_2$ ) вносит асимметрию в амплитудные профили мод. Вершины захваченных импульсов смещаются в сторону сноса волны, имеющей меньший коэффициент поглощения. Во-вторых, диссипация уменьшает инкременты модового усиления:

$$\Gamma_M(\delta) = \Gamma_M - \delta_M, \quad \delta_M = \delta_1 \nu_{13}/\nu_{12} + \delta_2 \nu_{23}/\nu_{21}. \quad (4.54)$$

При симметричном сносе ( $\nu_{31} = -\nu_{32}$ ) средняя скорость совпадает со скоростью основного импульса,  $u_{cp} = u_3$ , и снижение инкремента зависит от среднearифметического значения коэффициентов поглощения  $\delta_M = (\delta_1 + \delta_2)/2$ . Если энергия одной из волн сносится намного больше,

чем другой, например  $|\nu_{13}| \gg \nu_{23}$ , то модовый коэффициент затухания  $\delta_m$  определяется именно этой уходящей волной.

**Формирование параметрических мод.** Процесс выхода нестационарного усиления на модовый режим прослежен в ряде работ [6, 21]. В отсутствие фазовой модуляции волны накачки ( $d_3 = 0$ ) гипергеометрическая функция (4.15), определяющая функцию Римана  $R$  в (4.7), для целочисленных значений параметра  $g_\nu$ , представляется в виде конечного ряда по аргументу  $u$ . Так, для  $g_\nu = 1$  имеем  $R \equiv 1$  и интегрирование (4.7) существенно упрощается. На рис. 4.6 показаны результаты расчетов нестационарного параметрического усиления для  $g_\nu = 1$  (это выше порога в два раза) и симметричного сноса,  $\nu_{31} = -\nu_{32}$ . Представлены зависимости длительностей усиливаемых пакетов и положения их вершин от расстояния в нелинейной среде. Видно, что за групповой длиной  $l_{\tau 13}$  устанавливаются стационарные значения указанных параметров мод. Несложно выполнить подобные расчеты и для  $g_\nu = 2, 3, 4, \dots$ . Но при большом превышении порога ( $g_\nu \gg 1$ ) число членов ряда растет и расчеты, естественно, усложняются.

В общем случае выход на модовое усиление нетрудно проследить, рассмотрев интегральное выражение для амплитуд связанных волн (4.7) на больших расстояниях  $z \gg l_{\tau 13}, l_{\tau 23}$ . Используя асимптотические методы, можно показать, что, действительно, решения (4.7) принимают модовую структуру (4.40) [6]. В поле колоколообразного импульса амплитуда моды  $E_{1M}$  связана с начальными амплитудами слабых волн соотношением

$$E_{1M} = [E_{10} - i(\gamma_1/\gamma_2)^{1/2} E_{20}] \Gamma(g_\nu - 1/2) \Gamma(g_\nu + 1/2) / \sqrt{2} \Gamma^2(g_\nu), \quad (4.55)$$

где  $\Gamma(g_\nu)$  — гамма-функция.

Экспериментально эффект захвата волн в параметрические моды был зарегистрирован в пространственном варианте при взаимодействии световых пучков в кристалле KDP [22]. В проведенном эксперименте инкремент для плоских волн был равен  $\Gamma_0 = 1,4 \text{ см}^{-1}$ , углы наклона слабых пучков к пучку накачки —  $\beta_1 = 0,021$  и  $\beta_2 = 0,041$ , радиус пучка накачки —  $a_3 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ . Ключевой параметр  $g_\beta = \Gamma_0 a_3 (|\beta_{13} \beta_{23}|)^{-1/2}$  (ср. с

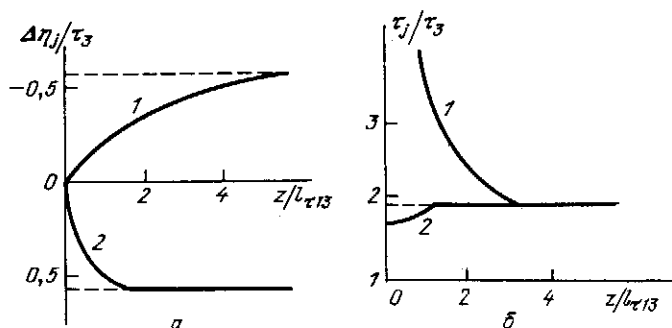


Рис. 4.6. Движение вершин  $\Delta\eta_j$  (а) и изменение длительностей (б) сигнального (1) и холостого (2) импульсов при захвате в основную ( $p = 0$ ) параметрическую моду колоколообразным импульсом накачки (4.9) при  $d_3 = 0$ ,  $g_\nu = 1$ ,  $\nu_{13} = -\nu_{23}$ ,  $E_1 = E_{10}$ ,  $E_2 = 0$

(4.17)) был равен 2,86, что в несколько раз превышало порог захвата (4.52). На заднем торце нелинейного кристалла наблюдалось сближение слабых пучков после включения мощной оптической накачки.

Таким образом, при превышении определенного порога (4.41), (4.52) в среде с относительной дисперсией первого порядка  $\nu_{13}\nu_{23} < 0$  за групповыми длинами сохраняется экспоненциальный рост амплитуд сигнальной и холостой волн, огибающие которых принимают стационарную форму. Модовому режиму усиления предшествует ряд других нестационарных

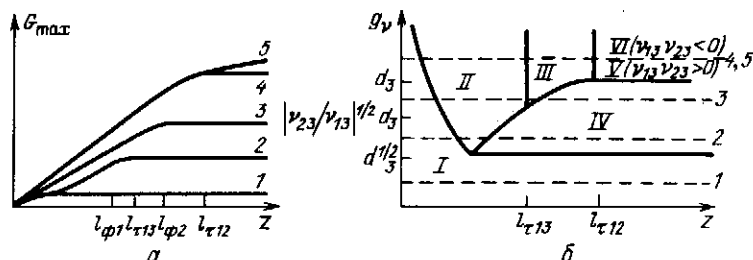


Рис. 4.7. Смена режимов параметрического усиления в диспергирующей среде при различных уровнях накачки (параметр  $g_\nu$ ):

приведены зависимости от расстояния коэффициента усиления (а) и карта различных режимов усиления (б). Разрезы на карте и зависимости усиления 1–5 соответствуют друг другу

режимов. По-другому развивается усиление в среде с дисперсией  $\nu_{13}\nu_{23} > 0$  (§ 4.3). Взаимосвязь различных режимов параметрического усиления в поле короткого импульса накачки, их сравнительные характеристики, закономерность чередования режимов при увеличении интенсивности накачки или по мере распространения в нелинейной среде представлены на рис. 4.7 [7].

На рис. 4.7а показано несколько наиболее характерных примеров смены различных режимов усиления при разных уровнях накачки (параметре  $g_\nu$ ). В зависимости от значения этого параметра и соотношения между расстоянием и групповыми длинами можно выделить шесть режимов усиления в поле фазово-модулированного импульса накачки (рис. 4.7б): I – преобразование частоты в заданных полях двух волн, например сигнальной и накачки (коэффициент усиления  $G_{\max} \ll 1$ ); II – квазистационарный режим на расстояниях, меньших групповых длин,  $G_{\max} = G_0 z$ , при  $|d_3|^{1/2} < g_\nu < |\nu_{23}/\nu_{13}|^{1/2} d_3$  переходит в режим насыщения на длине  $l_{\phi 1}$  (2.37); III – неустановившийся режим усиления между первой и второй групповыми длинами, где  $G_{\max} \propto \sqrt{z}$  (4.21), при  $|\nu_{23}/\nu_{13}|^{1/2} |d_3| < g_\nu < |d_3|$  экспоненциальный рост прекращается на длине  $l_{\phi 2} = l_{\phi 1}^2 / 4l_{\tau 13}$  при наличии фазовой модуляции основного импульса или на длине  $l_\delta$  (§ 4.2) в диссипативной среде; IV – режим насыщения усиления волн вследствие быстрой фазовой модуляции волны накачки,  $G_n = \pi \Gamma_0 l_{\phi 1} / 4$  (см. (2.38), (4.29)); V – режим насыщения усиления при сносе энергии сигнальной и холостой волн в одну сторону относительно импульса накачки,  $\nu_{13}\nu_{23} > 0$ ,  $G_n \approx \pi |g_\nu|$  (см. (4.27)); VI – модовый режим усиления волн в поле импульса накачки, имеющего промежуточ-

ную скорость относительно сигнального и холостого импульсов, обладает порогом  $g_{\text{впор}} \approx |d_3|$  (4.41), (4.51).

Если фиксировать длину нелинейной среды, то, проводя на рис. 4.76 вертикальные разрезы, можно получить закономерности смены различных режимов при увеличении интенсивности импульса накачки. Например, сначала идет генерация разностной волны, затем начинается экспоненциальный рост слабых волн в режиме насыщения IV (здесь коэффициент усиления пропорционален квадрату амплитуды накачки, а не первой степени, как в I, V и VI режимах); который переходит при  $g_{\nu} > |d_3|$  или в модовый режим VI, или в режим насыщения V (соответственно работает или вся длина нелинейной среды  $z$ , или только ее часть, ограниченная второй групповой длиной  $l_{\tau 23}$ ).

#### § 4.5. Асимптотические методы описания нестационарных параметрических процессов

Нестационарные эффекты при параметрическом усилении слабых волн в заданном поле импульса накачки в нелинейной среде с относительной дисперсией первого порядка описываются укороченными уравнениями (4.1). Точное решение этих уравнений в аналитической форме, как было показано выше, удается получить или при специальном соотношении групповых скоростей, или при специальной форме амплитудно-фазовой модуляции импульса накачки (4.9). Функции Римана выражаются через специальные математические функции, и, как правило, приходится прибегать к асимптотическому вычислению интегралов (4.7), (4.8). Таким образом, наряду с разработкой методов нахождения точных решений (4.1) появляется необходимость в упрощенном описании нестационарных эффектов при параметрическом усилении в поле импульса накачки.

При большом усилении между сигнальной и холостой волнами образуется сильная параметрическая связь, вследствие чего они ведут себя одинаковым образом. В этих условиях при нахождении решений можно использовать вторичное укорачивание (4.1) по аналогии с упрощением самих волновых уравнений. Одним из асимптотических методов вторичного укорачивания служит метод параболического уравнения (§ 2.1), примененный нами для описания параметрической диффузии связанных волновых пакетов на сигнальной и холостой частотах в поле модулированной волны накачки. Этот метод был распространен на неоднородную накачку [23]. Однако уравнение диффузии (2.13) для парциальных амплитуд при учете амплитудно-фазовой модуляции импульса накачки значительно усложняется. Это, в частности, обусловлено изменением эффективной групповой скорости связанных волн в процессе усиления: в режиме параметрической диффузии она равна средней величине (2.3), а при захвате в модовый режим — групповой скорости основного импульса. Ряд результатов при анализе нестационарных параметрических эффектов получен с помощью интегрального преобразования Лапласа по продольной координате  $z$ , что позволяет перейти от уравнений с частными производными (4.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям [21, 24]. При вычислении интегральных выражений для амплитуд слабых волн также приходится прибегать к асимптотическим методам.

Кроме перечисленных разработаны и некоторые другие асимптотические методы. Один из них переключается с методом геометрической оптики неоднородных (или нестационарных) сред [25]. Роль волнового числа здесь переходит к стационарному инкременту  $\Gamma_0$ , характеризующему связь волн в (4.1) и темпы экспоненциального роста амплитуд сигнальной и холостой волн в отсутствие дисперсии и модуляции волны накачки (2.5). Представим амплитуды усиливаемых волн в виде рядов, соответствующих разложению парциальных амплитуд по обратной величине инкремента  $\Gamma_0$ :

$$A_j = \sum_{p=0}^{\infty} (\Gamma_0)^{-p} A_{jp} \exp G. \quad (4.56)$$

Подставим (4.56) в (4.1) и соберем члены одного порядка по величине  $\Gamma_0$ , считая коэффициент усиления  $G$  пропорциональным  $\Gamma_0$ . Тогда получим цепочку уравнений, соответствующих различным порядкам приближения. Выделение главных членов дает уравнение для коэффициента усиления:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_1} \frac{\partial G}{\partial \eta_2} = -\gamma_1 \gamma_2 \nu_{12}^{-2} E_3^2(\eta_3). \quad (4.57)$$

Если собрать члены, пропорциональные первой степени  $\Gamma_0$ , получаем аналог уравнения переноса:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_1} \frac{\partial A_{10}}{\partial \eta_2} + \frac{\partial G}{\partial \eta_2} \frac{\partial A_{10}}{\partial \eta_1} + A_{10} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial G}{\partial \eta_2} \frac{\partial \ln E_3}{\partial \eta_1} \right) = 0. \quad (4.58)$$

Видно, что сначала надо отыскать функцию  $G$  (4.57), затем  $A_{10}$  (4.58) и т.д. Уравнение (4.57) решается методом характеристик, и в случае задания нулевого граничного условия  $G(z=0) = 0$  находим

$$G = 2(\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\xi E_3^2(\xi) [\nu_{12}^2 E_3^2(\eta_0) + 4\nu_{13}\nu_{23} E_3^2(\xi)]^{-1/2}, \quad (4.59)$$

где  $\eta_0$  — параметр, связанный с  $\eta_j$  и  $z$  соотношением

$$z = \nu_1(\eta_3 - \eta_0) - \nu_{12}^2 \int_{\eta_0}^{\eta_3} d\xi \left[ \nu_{12}^2 + 4\nu_{13}\nu_{23} \frac{E_3^2(\xi)}{E_3^2(\eta_0)} \right]^{-1/2}. \quad (4.60)$$

Используя (4.59), (4.60), решаем уравнение "переноса" (4.58) (полагая для простоты отсутствие фазовой модуляции накачки):

$$A_{10}^2 = E_1^2(\eta_0) \nu_{23}^{-2} \frac{\partial \eta_0}{\partial z} \left[ 1 - \nu_{12} \left( \nu_{12}^2 + 4\nu_{13}\nu_{23} \frac{E_3^2(\eta_3)}{E_3^2(\eta_0)} \right)^{-1/2} \right]. \quad (4.61)$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров. В качестве первого возьмем случай длинного импульса накачки (нестационарные эффекты "по накачке" отсутствуют). Подставляя в (4.59)–(4.61)  $E_3 = E_{30}$ , получаем

$$A_1 = A_1[\eta_3 - (\nu_{13} + \nu_{23})z/2] e^{\Gamma_0 z}, \quad (4.62)$$

т.е. импульс распространяется со средней групповой скоростью и испытывает стационарное экспоненциальное нарастание. Как и следовало ожидать, в приближении "геометрической оптики" импульсы сигнальной и холостой волн не расплываются.

Используем теперь выражения (4.59)–(4.61) для описания нестационарных эффектов, обусловленных модуляцией волны накачки. При групповом синхронизме между сигнальной и холостой волнами ( $\nu_{12} = 0$ ) из (4.60) имеем  $\eta_0 = \eta_1$ , а из (4.61) находим

$$A_1 = A_1(\eta_1) \exp \left[ (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} \nu_{13}^{-1} \int_{\eta_1}^{\eta_3} d\xi E_3(\xi) \right], \quad (4.63)$$

что находится в согласии с результатами § 4.2.

Покажем, наконец, применение асимптотического описания в анализе модового усиления. Полагая для простоты  $\nu_{13} = -\nu_{23}$ , получаем в случае колоколообразного импульса  $E_3 = E_{30} \operatorname{sech}(t/\tau_3)$  следующее выражение для амплитуды сигнала:

$$A_1 = E_{10} \left[ \frac{\operatorname{ch}(\eta_1/\tau_3)}{\operatorname{ch}(z/l_{\tau_{13}}) [\operatorname{sh}^2(z/l_{\tau_{13}}) + \operatorname{ch}^2(\eta_1/\tau_3)]^{1/2}} \right]^{1/2} \times \\ \times \left[ \frac{\operatorname{sh}(z/l_{\tau_{13}}) + [\operatorname{sh}^2(z/l_{\tau_{13}}) + \operatorname{ch}^2(\eta_3/\tau_3)]^{1/2}}{\operatorname{ch}(\eta_3/\tau_3)} \right]^{g_\nu}, \quad (4.64)$$

где  $g_\nu$  определяется прежней формулой (4.17). На больших расстояниях  $z \gg l_{\tau_{13}}$  решение (4.64) переходит в основную моду (4.42):

$$A_1 = \sqrt{2} E_{10} \frac{\exp(-\eta_3/2\tau_3)}{\operatorname{ch}(\eta_3/\tau_3)} \exp \left[ \left( \Gamma_0 - \frac{1}{2l_{\tau_{13}}} \right) z \right]. \quad (4.65)$$

Таким образом, из рассмотренных примеров видно, что аналог метода геометрической оптики неоднородных сред описывает основные черты нестационарного параметрического усиления. Здесь он изложен в простейшем варианте для длинных сигнальных импульсов,  $E_1 = E_{10}$ . Параметрическую диффузию волновых пакетов можно исследовать в рамках асимптотического разложения (4.56), если перенести граничное условие  $A_1(z=0)$  в коэффициент усиления, полагая  $G(z=0) = \ln[E_1(t)/E_{10}]$ . В случае быстрой модуляции накачки, в частности фазовой ( $d_3 \neq 0$ ), необходимо включить в уравнение для коэффициента усиления (4.57) член, пропорциональный производной амплитуды накачки. Следует отметить, что асимптотические методы можно использовать также для построения функций Римана.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛЕ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА НАКАЧКИ

Данная глава посвящена рассмотрению нестационарных эффектов при возбуждении разностных и суммарных волн в сильном поле ограниченного во времени импульса низкочастотной волны накачки. В гл. 3 мы обсуждали нелинейно-дисперсионные эффекты в поле квазинепрерывной накачки. Теперь основное внимание будет уделено эффектам, обусловленным амплитудной модуляцией основной волны, при различных соотношениях между групповыми скоростями.

При сносе волновых пакетов из импульса накачки в разные стороны рассматривается процесс формирования квазистационарных фронтов, а при уходе слабых волн в одну сторону от импульса накачки анализируются возможности генерации светлых и темных квазисолитонов на суммарных и разностных частотах.

Отдельно изучаются дисперсионные эффекты при возбуждении суммарной волны и второй гармоники при смещении частот двух волн заданного профиля. Наконец, исследуется диссипативный механизм формирования коротких импульсов второй гармоники в диспергирующей среде.

### § 5.1. Классификация нестационарных режимов преобразования частоты

В первом приближении теории дисперсии взаимодействие волновых пакетов на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  с мощным импульсом низкочастотной волны  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$  описывается двумя линейными уравнениями (3.2)

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} = -i\gamma_2 E_1^* A_3, \quad \frac{\partial A_3}{\partial z} + \nu_{31} \frac{\partial A_3}{\partial \eta_1} = -i\gamma_3 E_1 A_2, \quad (5.1)$$

в которых коэффициент параметрической связи меняется во времени в соответствии с модуляцией амплитуды волны накачки  $E_1(t)$ . Решение укороченных уравнений для случая генерации волны на суммарной частоте (3.3) дается формулой (3.6)

$$A_3 = -i\gamma_3 \int_0^z d\xi E_2(\eta_3 + \nu_{32}\xi) E_1(\eta_3 + \nu_{31}\xi) R, \quad (5.2)$$

Входящая под интеграл (5.2) функция Римана для немодулированной волны накачки выражается через функцию Бесселя (3.6). Теперь нам необходимо учесть модуляцию мощной волны  $E_1(t)$ . Для решения этой задачи можно воспользоваться методикой поиска функции Римана, развитой в § 4.1 при анализе нестационарного параметрического усиления в поле высокочастотного излучения.

Преобразование частоты при произвольной модуляции волны накачки, имеющей групповой синхронизм с одной из связанных волн, например  $u_1 = u_2$ , описывается с помощью функции Бесселя:

$$R = J_0 \left\{ \left[ 4\gamma_2\gamma_3(z - \xi) \int_0^\xi d\xi |E_1(\eta_1 - \nu_{31}\xi)|^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.3)$$

Более сложная картина параметрического взаимодействия возникает в среде с произвольной дисперсией,  $u_1 \neq u_j$ . Здесь точное решение задачи найдено для модели колоколообразного импульса волны накачки  $E_1 = E_{10} \text{ch}^{-1+d_1}(t/\tau_1)$  (см. также (4.9)); оно выражается с помощью гипергеометрической функции [1]:

$$R = F(-g_\nu, g_\nu; 1; u), \quad (5.4)$$

где

$$u = \frac{\text{ch}(\nu_{21}\xi/\tau_1) \text{sh}[\nu_{31}(z - \xi)/\tau_1]}{\text{ch}(\eta_1/\tau_1) \text{ch}[(\eta_2 - \nu_{32}\xi)/\tau_1]}, \quad g_\nu = \left[ \frac{\gamma_2\gamma_3 E_{10}^2 \tau_1^2}{\nu_{21}\nu_{31}} \right]^{1/2}. \quad (5.5)$$

Помимо нахождения точных решений в форме (5.2) можно также развивать асимптотические методы построения решения, такие как одно-волновое приближение и аналог метода геометрической оптики, хорошо зарекомендовавшие себя при анализе нестационарных явлений в параметрическом усилителе бегущих волн (§ 4.5).

Волновая нестационарность, обусловленная групповыми расстройками и ограниченностью импульса накачки, характеризуется, как видно из (5.2), (5.4), длинами группового запаздывания  $l_{\tau 1j} = \tau_1/|\nu_{1j}|$ . Как показывают численные эксперименты, на больших расстояниях  $z \gg l_{\tau 12}$ ,  $l_{\tau 13}$  при взаимодействии с квазинепрерывным сигналом импульс накачки формирует квазистационарные амплитудные профили связанных волн

$$A_j = A_j(\eta_1) \quad (j = 2, 3). \quad (5.6)$$

Для нахождения стационарной формы огибающих надо решить уравнения, вытекающие из (3.2),

$$\nu_{21} \frac{\partial A_1}{\partial \eta_1} = -i\gamma_2 E_1^*(\eta_1) A_3, \quad \nu_{31} \frac{\partial A_3}{\partial \eta_1} = -i\gamma_3 E_1(\eta_1) A_1. \quad (5.7)$$

Характер решений (5.6) кардинально зависит от знака произведения  $\nu_{21}\nu_{31}$ . Если импульс накачки бежит быстрее или медленнее слабых волн, то  $\nu_{21}\nu_{31} > 0$  и из непрерывного сигнала могут образоваться темные и светлые квазисолитоны (§ 5.2). Импульс накачки с промежуточной скоростью ( $\nu_{21}\nu_{31} < 0$ ) формирует стационарные фронты и хвосты связанных волновых пакетов.



Исследование нестационарных эффектов сильно упрощается для линейного режима преобразования частоты, когда сигнальная волна, как и накачка, также не истощается. В приближении двух заданных полей  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$  возбуждение суммарной волны описывается формулой (5.2) с функцией Римана  $R \equiv 1$  (см., например, [2, 3]). Если, к тому же, положить  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $E_1(t) = E_2(t)$ , то (5.2) можно использовать для анализа нестационарного возбуждения второй гармоники  $\omega_3 = 2\omega_1$  коротким волновым пакетом [4–6].

### § 5.2. Генерация $\pi$ -импульсов на суммарной частоте

Рассмотрим воздействие быстрого импульса волны накачки ( $u_1 > u_j$ ) на квазинепрерывный сигнал  $E_2$ . Слабая волна частоты  $\omega_2$ , входя в область накачки, возбуждает суммарную волну на частоте  $\omega_3$ . Если интенсивность накачки достаточно велика, то связанные волны успеют обменяться энергией раньше, чем они выйдут из импульса накачки. В результате продолжительного параметрического взаимодействия связанные пакеты приобретают в пределах импульса стационарную форму огибающей.

Наиболее наглядно формирование квазистационарных импульсов можно показать при групповом синхронизме для слабых волн ( $u_2 = u_3$ ). В отсутствие фазовой модуляции волны накачки уравнения (5.1) имеют простое точное решение [1]

$$A_3 = -i(\gamma_3/\gamma_2)^{1/2} E_2 \sin \sigma, \quad A_2 = E_2 \cos \sigma, \quad (5.8)$$

где величина

$$\sigma = (\gamma_2 \gamma_3)^{1/2} \nu_{31}^{-1} \int_{\eta_1 - \nu_{31} z}^{\eta_1} d\xi E_1(\xi) \quad (5.9)$$

пропорциональна определенной части площади амплитудного профиля низкочастотного импульса. Зададим на входе в среду непрерывный сигнал  $E_2 = E_{20}$ , который затем возбуждает суммарную волну, трансформируясь при этом и сам.

Особый интерес для нас вызывает область, лежащая за групповой длиной,  $z \gg l_{\tau 13}$ . Как видно из (5.9) в пределах импульса накачки можно устремить нижний предел интегрирования в (5.9) к бесконечности:

$$\sigma = (\gamma_2 \gamma_3)^{1/2} \nu_{31}^{-1} \int_{-\infty}^{\eta_1} d\xi E_1(\xi). \quad (5.10)$$

Очевидно, при этом огибающие связанных волн (5.8) принимают квазистационарную форму. Из анализа (5.8) с учетом (5.10) следует, что если полная площадь импульса кратна числу  $\pi$ ,

$$\sigma(\infty) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.11)$$

то амплитуда суммарной волны  $A_3$  вне импульса накачки ( $|\eta_1| \gg \tau_1$ ) равна нулю – возбуждаемый импульс как бы запирается внутри импульса накачки (рис. 5.1):

$$|A_3|^2 = (\gamma_3/\gamma_2) E_{20}^2 \sin^2 [n\pi \sigma(\eta_1)/\sigma(\infty)]. \quad (5.12)$$

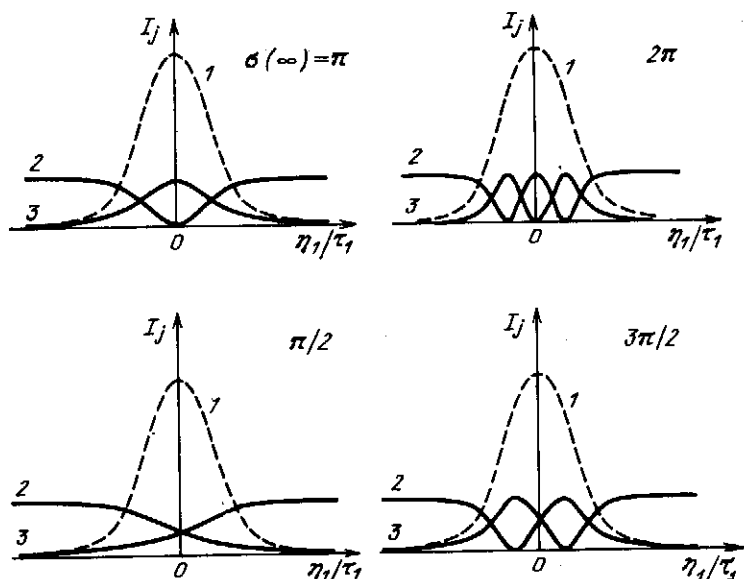


Рис. 5.1. Огибающие  $\pi$ - и  $\pi/2$ -импульсов на суммарной (3) и разностной (2) частотах в поле мощного импульса низкочастотной волны накачки (1) при дисперсии  $\nu_{21}\nu_{31} > 0$

На частоте входного сигнала формируется темный квазисолитон

$$|A_2|^2 = E_{20}^2 \{1 - \sin^2 [n\pi\sigma(\eta_1)/\sigma(\infty)]\}. \quad (5.13)$$

Если площадь импульса сделать кратной  $\pi/2$ ,  $\sigma(\infty) = \pi(1/2 + n)$ , то сигнальная волна не пройдет через импульс накачки, она полностью отдает свою энергию возбуждаемому импульсу суммарной частоты, длительность которого увеличивается как  $|\nu_{13}|z$  (рис. 5.1).

Характерные этапы формирования квазисолитона при неравных групповых скоростях связанных волн ( $u_2 \neq u_3$ ) показаны на рис. 5.2. Видно, что в переходной области помимо  $\pi$ -импульса, идущего со скоростью волны накачки  $u_1$ , образуется пакет, удаляющийся (от импульса волны накачки) со скоростью  $u_3$ . Его длительность порядка  $\tau_1\nu_{32}/\nu_{21}$ .

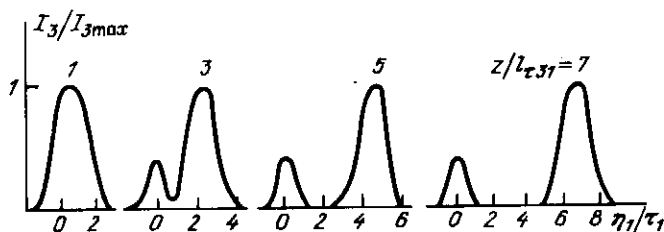


Рис. 5.2. Стадии формирования  $\pi$ -импульса на суммарной частоте  $\omega_3$  при взаимодействии непрерывного излучения сигнала с гауссовым импульсом низкочастотной волны накачки при  $\nu_{31} = 2\nu_{21}$ ,  $\sigma(\infty) = \pi$

Для нахождения квазистационарных огибающих связанных волн необходимо решить уравнения (5.7), полагая  $\nu_{21}\nu_{31} > 0$  и задавая амплитуды волн при  $u_1 > u_j$  вне импульса накачки в виде  $A_3(\eta_1 = -\infty) = 0$ ,  $A_2(\eta_1 = -\infty) = E_2$ . В результате несложных вычислений находим

$$A_3 = -i(\gamma_3\nu_{31}/\gamma_2\nu_{21})^{1/2}E_2 \sin \sigma(\eta_1), \quad A_2 = E_2 \cos \sigma(\eta_1), \quad (5.14)$$

где нормированная площадь импульса накачки

$$\sigma(\eta_1) = (\gamma_2\gamma_3/|\nu_{31}\nu_{21}|)^{1/2} \int_{-\infty}^{\eta_1} d\xi E_1(\xi). \quad (5.15)$$

При равенстве скоростей связанных волн ( $u_2 = u_3$ ) (5.14), (5.15) переходят в (5.8) с учетом (5.10). Поэтому свойства квазисолитонов (рис. 5.1) остаются прежними, только площадь амплитудного профиля надо подсчитывать по более общей формуле (5.15).

Следует отметить, что в поле ФМ импульса накачки параметрическое взаимодействие сильно усложняется [7]. Как показывают численные эксперименты, и в этом случае на больших расстояниях связанные волны приобретают квазистационарные профили. Однако их форма не такая простая, как в отсутствие фазовой модуляции. Они как бы изрезаны с временным масштабом, определяемым величиной частотного заполнения импульса накачки. Квазистационарные профили можно найти, решая (5.7) для прямоугольного импульса с линейной модуляцией частоты  $E_1 = E_{10} \exp(i\Omega_0 t^2/\tau_1)$  и для колоколообразного импульса с квазилинейной модуляцией частоты  $E_1 = E_{10} \operatorname{ch}^{-1+2id_1}(t/\tau_1)$ . В обоих случаях решение выражается через гипергеометрические функции. Из-за громоздкости анализа полученных формул мы опускаем их обсуждение.

Таким образом, в нелинейном режиме преобразования частоты при дисперсии групповых скоростей такой, что  $\nu_{31}\nu_{21} > 0$ , можно радикально менять форму возбуждаемого импульса и его энергию, варьируя площадь импульса накачки (параметр  $\sigma(\infty)$ ). Генерация  $\pi$ - и  $\pi/2$ -импульсов представляет интерес для построения некоторых логических элементов волнового типа.

### § 5.3. Формирование квазистационарных фронтов связанных волн

В среде с дисперсией  $\nu_{21}\nu_{31} < 0$  низкочастотный волновой пакет распространяется с промежуточной групповой скоростью, например  $u_2 < u_1 < u_3$ . Выявим прежде всего форму квазистационарных амплитудных профилей. На фронте импульса отсутствует медленная волна суммарной частоты,  $A_3(\eta_1 = -\infty) = 0$ , а на его хвост набегают квазинепрерывный сигнал  $A_2(\eta_1 = \infty) = E_{20}$ . Решение уравнений (5.7) при указанных граничных условиях имеет теперь качественно другой вид, чем в среде с дисперсией  $\nu_{21}\nu_{31} > 0$  (5.14), (5.15):

$$A_3 = -i|\gamma_3\nu_{31}/\gamma_2\nu_{21}|^{1/2}E_{20} \operatorname{sh} \sigma(\eta_1)/\operatorname{ch} \sigma(\infty), \quad (5.16)$$

$$A_2 = E_{20} \operatorname{ch} \sigma(\eta_1)/\operatorname{ch} \sigma(\infty),$$

где  $\sigma(\eta_1)$  определяется прежней формулой (5.15).

Анализ выражений (5.16) показывает, что при преобразовании частоты встречных волн (по отношению к импульсу накачки) они имеют гладкую форму. Если нормированная площадь импульса накачки велика,  $\sigma(\infty) \gg 1$ , то наблюдается насыщение стационарной амплитуды на уровне

$$|A_{3H}| = |\gamma_3 \nu_{31} / \gamma_2 \nu_{21}|^{1/2} E_{20}.$$

Длительность и энергия импульса на суммарной частоте увеличивается пропорционально расстоянию  $z$ , пройденному в нелинейной среде. На

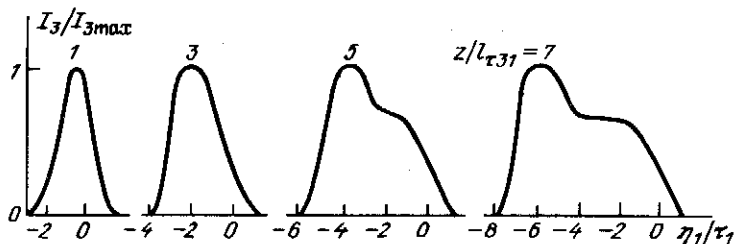


Рис. 5.3. Стадии формирования стационарного фронта суммарной волны в области взаимодействия с гауссовым импульсом накачки при  $\nu_{31} = -\nu_{21}$ ,  $\sigma(\infty) = 1,25$

рис. 5.3 представлены результаты численного моделирования взаимодействия гауссова импульса накачки с квазинепрерывным сигналом в среде с дисперсией  $\nu_{31} = -\nu_{21}$ . Из графиков профилей интенсивности видно, что хвост суммарной волны движется вместе с импульсом накачки со скоростью  $u_1$ , а фронт идет, как в линейной среде, со скоростью  $u_3$ . Профиль огибающей суммарной волны приобретает черты квазистационарной формы.

#### § 5.4. Возбуждение второй гармоники волнового пакета

Важным частным случаем трехволновых взаимодействий является взаимодействие двух волн, частоты которых различаются в два раза,  $\omega_2 = 2\omega_1$ . В параметрическом усилителе этому соответствует генерация субгармоники, а в преобразователе частоты – генерация второй гармоники.

Следует подчеркнуть, что генерация второй гармоники света была первым когерентным нелинейно-оптическим эффектом, наблюдавшимся на опыте [7]. Эффективность преобразования энергии лазерного излучения во вторую гармонику в современных устройствах достигает почти 100%.

Вырожденное по частоте взаимодействие волновых пакетов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -i\gamma_1 A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z} - \delta_1 A_1, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} &= -i\gamma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z} - \delta_2 A_2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где  $\gamma_j = 2\pi\chi_2\omega_2/cn_j$ ,  $\Delta k = k_2 - 2k_1$ . В приближении заданного поля основ-

ной волны эти уравнения имеют решение (положим пока  $\delta_j = 0$  и  $\Delta k = 0$ )

$$A_2 = -i\gamma_2 \int_0^z d\xi E_1^2(\eta_2 - \nu_{12}\xi). \quad (5.18)$$

Пусть основной импульс имеет гауссов профиль и квадратичную фазовую модуляцию (см. также (2.25)):

$$E_1(\eta_1) = E_{10} \exp[-\eta_1^2(1 - i\Omega_{10}\tau_1)/\tau_1^2]. \quad (5.19)$$

Тогда спектр второй гармоники имеет огибающую

$$|S_2(\omega_2 + \Omega)|^2 \propto z^2 \text{sinc}^2(\nu_{12}\Omega z/2) \exp(-\Omega^2/4\Delta\omega_1^2), \quad (5.20)$$

где  $\Delta\omega_1 = 2(\tau_1^{-2} + \Omega_{10}^2)^{1/2}$  — частотная ширина спектра основной волны. Используя (5.20), можно ввести две величины, характеризующие влияние дисперсии среды на возбуждение гармоники.

Дисперсионная функция взаимодействия  $\text{sinc}^2(x)$  имеет ширину [4, 6, 9, 10]

$$\Omega_c = \pi/(2|\nu_{12}|z), \quad (5.21)$$

в пределах которой спектральные компоненты основного излучения когерентно возбуждают компоненты второй гармоники. Так как ширина синхронизма (5.21) сужается с расстоянием, то когерентность взаимодействия волновых пакетов постепенно нарушается. Это происходит на характерной длине когерентности

$$l_{\text{кор}} = 2/|\nu_{12}|\Delta\omega_1, \quad (5.22)$$

когда ширина спектра  $\Delta\omega_1 \approx \Omega_c$ . За когерентной длиной ( $z > l_{\text{кор}}$ ) профиль спектральной интенсивности гармоники определяется дисперсионной функцией взаимодействия, имеющей частотную ширину (5.21). При удвоении частоты импульса без фазовой модуляции ( $\Omega_{10} = 0$ ) длина когерентного взаимодействия (5.22) равна длине группового запаздывания,  $l_{\text{кор}} = l_{\tau 12} = \tau_1/|\nu_{12}|$ .

Дисперсионные эффекты приводят к замедлению роста энергии второй гармоники  $W_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta |A_2|^2$ . Интегрирование (5.18) для гауссова импульса (5.19) дает следующее выражение [6, 11, 12]:

$$W_2 \approx \gamma_1^2 E_{10}^4 \tau_1^2 l_{\text{кор}}^2 h(\xi), \quad (5.23)$$

$$h(\xi) = \pi^{1/2} \xi \operatorname{erf} \xi + e^{-\xi^2} - 1,$$

где  $\xi = z/l_{\text{кор}}$ . В квазистационарном режиме удвоения ( $z < l_{\text{кор}}$ )  $h(\xi) = \xi^2$  и энергия растет пропорционально квадрату пройденного расстояния,  $W_2 \propto z^2$ . За когерентной длиной ( $z > l_{\text{кор}}$ ) функция  $h(\xi) = \pi^{1/2} \xi$  и темп перекачки энергии замедляется,  $W_2 \propto \pi^{1/2} z l_{\text{кор}}$  (рис. 5.4).

Проследим теперь за искажением профиля импульса второй гармоники. На малых расстояниях  $z \ll l_{\text{нл}}$  импульс  $A_2$  имеет гауссову форму с длительностью, меньшей длительности основного излучения,  $\tau_2 = \tau_1/\sqrt{2}$ .

В дальнейшем из-за дисперсии среды гауссова форма не сохраняется. При этом характер модификации амплитудного профиля второй гармоники зависит от наличия фазовой модуляции основной волны. В ее отсутствие ( $\Omega_{10} = 0$ ) импульс на удвоенной частоте сохраняет гладкую форму; за групповой длиной  $l_{\tau 12}$  он принимает прямоугольную форму с длительностью порядка  $|\nu_{12}|z$ . Более сложная картина возникает при возбуждении гармоники фазово-модулированным импульсом (5.19). В частности,

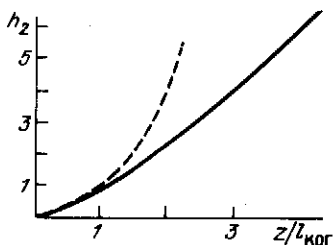


Рис. 5.4. Зависимость нормированной энергии второй гармоники, возбуждаемой гауссовым ФМ импульсом, от расстояния при расстройке групповых скоростей (сплошная линия) и при групповом синхронизме (штриховая)

при быстрой частотной модуляции ( $\Omega_{10} \gg \Omega_c$ ) огибающая волнового пакета на удвоенной частоте принимает вид

$$|A_2|^2 \propto \exp(-4\eta_1^2/\tau_1^2) \operatorname{sinc}^2(\eta_1/\tau_{\text{кор}}), \quad (5.24)$$

где  $\tau_{\text{кор}} = \tau_1 \Omega_c / \Omega_{10}$ . В данном случае  $\tau_{\text{кор}} \ll \tau_1$  и огибающая импульса повторяет форму спектра, которая описывается дисперсионной функцией  $\operatorname{sinc}^2(x)$ .

Полученные выражения описывают также генерацию второй гармоники в неоднородной плазме. В этом случае следует провести замену  $t \leftrightarrow z$  (ср. (4.1) с (4.3)) [13, 14].

### § 5.5. Формирование квазистационарных импульсов в диссипативной среде

В диспергирующей среде длительность импульса второй гармоники монотонно увеличивается благодаря сносу ее энергии из основной волны. Оказывается, на этот вопрос может радикально повлиять поглощение на удвоенной частоте. В приближении заданного поля основного импульса поведение амплитуды гармоники подчиняется уравнению

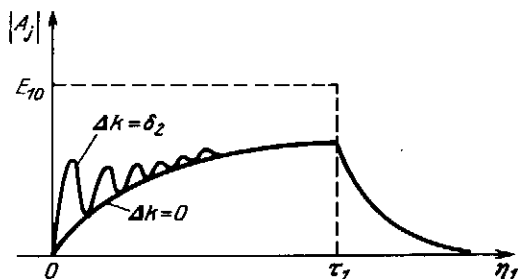
$$\frac{\partial B_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial B_2}{\partial \eta_1} = -i\gamma_2 E_1^2(\eta_1) - (\delta_2 + i\Delta k) B_2. \quad (5.25)$$

Здесь мы перешли для удобства дальнейшего анализа к новой амплитуде  $B_2 = A_2 e^{-i\Delta k z}$ . При групповом синхронизме ( $\nu_{12} = 0$ ) решение (5.25)

$$B_2 = -i\gamma_2 E_1^2 (\delta_2 + i\Delta k)^{-1} [1 - e^{-(\delta_2 + i\Delta k)z}] \quad (5.26)$$

имеет два слагаемых в квадратных скобках. Первый из них можно трактовать как амплитуду вынужденной волны гармоники, а второй — как амплитуду свободной волны. В среде без поглощения ( $\delta_2 = 0$ ) интерференция этих волн приводит к пространственным биениям амплитуды гармоники  $B_2 \propto \sin(\Delta k z/2)$ . При наличии поглощения свободная волна затухает,

Рис. 5.5. Стационарные амплитудные профили импульса второй гармоники (сплошные линии), возбуждаемой прямоугольным импульсом накачки (штриховая), в диспергирующей диссипативной среде в условиях фазового синхронизма и при отстройке от него



вследствие чего устанавливается постоянная равновесная амплитуда гармоники  $B_2 = -i\gamma_2 E_1^2 / (\delta_2 + i\Delta k)$ . Аналогичные эффекты проявляются и при возбуждении гармоники коротким импульсом основного излучения [15].

В диспергирующей среде на расстояниях  $z \gg \delta_2^{-1}$  также остается только вынужденная волна, которая имеет квазистационарную огибающую  $B_2(\eta_1)$ . Очевидно, в установившемся процессе удвоения частоты производная  $\partial B_2 / \partial z = 0$ , и для расчета огибающей квазистационарного импульса получаем из (5.25) релаксационное уравнение

$$\nu_{21} \frac{\partial B_2}{\partial \eta_1} + (\delta_2 + i\Delta k) B_2 = -i\gamma_2 E_1^2(\eta_1). \quad (5.27)$$

Пусть скорость основной волны меньше скорости гармоники,  $\nu_{12} > 0$ . Тогда на хвосте импульса накачки поле гармоники отсутствует,  $B_2(\eta_1 = -\infty) = 0$ . Решая (5.27), находим

$$B_2 = -i\gamma_2 \int_0^{\infty} d\xi \exp(-\xi/\tau_{\text{рел}} - i\Omega(\Delta k)\xi) E_1^2(\eta_1 - \xi), \quad (5.28)$$

где  $\tau_{\text{рел}} = \delta_2/\nu_{12}$  — эффективное время релаксации,  $\Omega(\Delta k) = \Delta k/\nu_{12}$  — перестройка несущей частоты гармоники. Проявление релаксационных и перестроечных явлений можно отчетливо показать на примере генерации гармоники прямоугольным импульсом волны накачки. Тогда из (5.28) следует (рис. 5.5) [16]

$$B_2 = -i \frac{\gamma_2 E_1^2 \nu_{12}}{\delta_2 + i\Delta k} [1 - \exp(-\eta_1/\tau_{\text{рел}} - i\Omega(\Delta k)\eta_1)], \quad 0 < \eta_1 < \tau_1, \\ B_2 = B_2(\eta_1 = \tau_1) \exp(-\eta_1/\tau_{\text{рел}} - i\Omega(\Delta k)\eta_1), \quad \eta_1 > \tau_1. \quad (5.29)$$

Из анализа (5.29) можно сделать следующий очень интересный вывод. В исходное уравнение (5.25) входит дисперсия волнового числа  $q_2 = \Delta k - i\delta_2$ . Когда свободная волна затухает, в среде распространяется вынужденная волна, возбуждаемая импульсом накачки. Очевидно, здесь основной импульс выполняет роль движущегося объемного источника. Но, как известно, в таких задачах должна проявляться дисперсия  $\omega(k)$ , а не  $k(\omega)$ , как для граничных задач. В полном соответствии с этими представлениями в выражении (5.26), являющимся решением граничной задачи, показатель экспоненты  $(\delta_2 + i\Delta k)z$  заменяется при переходе к воз-

буждению гармоники коротким импульсом (5.29) членом  $(\delta_2/v_{12} + i\Omega(\Delta k))\eta_1$ . Последнее обстоятельство как раз и обозначает проявление дисперсии  $\Omega = \Omega' + i\Omega''$ , где  $\Omega' = \Omega(\Delta k)$ ,  $\Omega'' = \tau_{\text{рел}}^{-1}$ . Такая закономерность перехода в поглощающей среде дисперсии  $k(\omega)$  свободной волны в дисперсию  $\omega(k)$  вынужденной носит фундаментальный характер. Она остается в силе при учете дисперсии второго и высших порядков, сложной дисперсии поляритонов (гл. 13).

Таким образом, при достаточно сильном поглощении на частоте второй гармоники ( $\tau_{\text{рел}} \ll \tau_1$ ) эффекты группового запаздывания подавляются и процесс возбуждения гармоники идет так же, как и при групповом синхронизме. Однако это достигается за счет потери энергии [17]. Если в нелинейной среде интенсивно поглощается основное излучение, то импульс гармоники возбуждается в слое толщиной порядка  $\delta_1^{-1}$ , а затем распространяется со скоростью  $u_2$ .



## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ СИЛЬНОМ ЭНЕРГООБМЕНЕ

В предыдущих главах были рассмотрены нелинейно-дисперсионные эффекты первого порядка в условиях, когда энергия волны накачки не истощается. С повышением начальных интенсивностей или с увеличением длины нелинейной среды амплитуды возбуждаемых и основной волн могут сравниться по величине. На этом этапе сильного взаимодействия нелинейные искажения испытывают все волны. Изменение амплитудно-фазовой модуляции волны накачки за счет обратной реакции приводит к совершенно новым проявлениям волновой нестационарности.

Задача настоящей главы состоит в обсуждении нелинейно-дисперсионных эффектов при сильном энергообмене между волновыми пакетами, имеющими разные групповые скорости. Такие взаимодействия наблюдаются при генерации второй гармоники, параметрическом усилении в нелинейном режиме. Основные вопросы в данной главе сосредоточены на выявлении дисперсионных механизмов ограничения эффективности взаимодействия волновых пакетов и, с другой стороны, механизмов формирования сверхкоротких импульсов.

Система укороченных уравнений, лежащая в основе теоретического анализа сильных взаимодействий, может быть решена точно с помощью метода обратной задачи рассеяния [1–4]. Однако получаемые этим методом решения имеют сложную форму, и обычно ограничиваются их асимптотикой, дающей представление о поведении волновых пакетов на больших расстояниях после их взаимодействия (столкновения). Но для многих практических задач важно проследить все этапы взаимодействия коротких импульсов. Поэтому к анализу данной проблемы привлекаются численные методы решения уравнений [5–8], другие подходы нахождения точных решений [9–11] и ряд методов построения приближенных решений [12–15].

### § 6.1. Точное решение укороченных уравнений при когерентном двухчастотном взаимодействии

Рассмотрим вырожденный по частоте случай трехволнового взаимодействия, когда  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Он описывает генерацию второй гармоники или первой субгармоники. При фазовом синхронизме ( $\Delta k = 0$ ) и при отсутствии начальной фазовой модуляции волновых пакетов их амплитуды

можно считать действительными величинами. В таких условиях взаимодействие двух пакетов описывается укороченными уравнениями

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} = \gamma_1 A_2 A_1, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -\gamma_1 A_1^2 \quad (6.1)$$

с граничными условиями

$$A_1(z=0) = E_1(t), \quad A_2(z=0) = E_2(t). \quad (6.2)$$

В отсутствие относительной дисперсии, т.е. при групповом синхронизме ( $u_1 = u_2$ ), уравнения (6.1) легко решаются в общем виде

$$A_1 = E_1(\eta_1) [\operatorname{ch} G - E_2(\eta_1) E_{12}^{-1/2}(\eta_1) \operatorname{sh} G]^{-1}, \quad (6.3)$$

$$A_2 = [E_2(\eta_1) \operatorname{ch} G - E_{12}(\eta_1) \operatorname{sh} G] [\operatorname{ch} G - E_2(\eta_1) E_{12}^{-1/2}(\eta_1) \operatorname{sh} G]^{-1},$$

где  $E_{12}^2 = E_1^2(\eta_1) + E_2^2(\eta_1)$  — суммарный профиль интенсивностей волн на входе в нелинейную среду,  $G = \gamma_1 E_{12}(\eta_1) z$ .

В случае возбуждения второй гармоники  $E_2 = 0$ ,  $E_{12} = E_1$  и из (6.3) следуют известные выражения [15, 21]

$$A_1 = E_1 \operatorname{sech}(\gamma_1 E_1 z), \quad A_2 = -E_1 \operatorname{th}(\gamma_1 E_1 z), \quad (6.4)$$

показывающие принципиальную возможность полного преобразования энергии из основной волны в излучение на удвоенной частоте. Неоднородное распределение амплитуды входного сигнала  $E_{10}(t)$  замедляет темп преобразования энергии.

При распадной неустойчивости интенсивной волны с амплитудой  $E_2 \gg E_1$  (при этом  $E_{12} \approx E_2 + E_1^2/2E_2$ ) амплитуда субгармоники меняется по закону

$$A_1 = E_1 [\exp(-\gamma_1 E_2 z) + (1/2)(E_1^2/E_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_1 E_2 z)]^{-1}. \quad (6.5)$$

На длине  $z_0 = (\gamma_1 E_2)^{-1} \ln(2E_2/E_1)$  она достигает максимума  $A_{1\max} \approx E_2$ , а затем при  $z > z_0$  уменьшается, так как начинается обратный процесс — генерация второй гармоники волны субгармоники, т.е. волны накачки.

При наличии дисперсии ( $u_1 \neq u_2$ ) взаимодействие волновых пакетов протекает значительно сложнее. Система (6.1) принадлежит классу уравнений Лиувилля, имеющих общее аналитическое решение. Действительно, введем функцию  $\phi$ , через которую выразим амплитуды  $A_j(\eta_1, \eta_2)$  следующим образом:

$$A_1 = E_0 \exp(m\phi/2), \quad A_2 = (\gamma_1 E_0^2 / \nu_{12}) \partial\phi / \partial\eta_2, \quad (6.6)$$

где  $m = 2\gamma_1^2 E_0^2 / \nu_{12}^2$ ,  $\eta_j = t - z/u_j$  — характеристики. При этом первое из уравнений (6.1) удовлетворяется тождественно. Подставляя (6.6) во второе уравнение, приходим к уравнению Лиувилля [4, 16]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial\eta_1 \partial\eta_2} = \exp(m\phi). \quad (6.7)$$

Оно имеет общее решение, которое при учете (6.6) дает выражение для амплитуды волнового пакета с несущей частотой  $\omega_1$ :

$$A_1^2 = E_0^2 e^{m[f_1(\eta_1) - f_2(\eta_2)]} \left( h \int d\xi e^{mf_1(\xi)} + \frac{m}{2h} \int d\xi e^{-mf_2(\xi)} \right)^{-2}, \quad (6.8)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции,  $h$  — произвольная константа. Подставляя (6.8) в (6.1), можно найти формулу для расчета амплитуды второго пакета  $A_2$ . Однако на практике воспользоваться точным общим решением (6.8) довольно сложно. Дело заключается в том, что при решении конкретных задач произвольные функции  $f_1$  и  $f_2$  определяются из граничных условий (6.2). В результате получаются дифференциальные уравнения для  $f_1$  и  $f_2$ , решение которых при произвольно заданных начальных амплитудных профилях волновых пакетов  $E_j$  найти не удастся.

Более наглядный путь интегрирования (6.1) заключается в сведении его к линейному уравнению [9–11]. С этой целью сначала исключим из (6.1) амплитуду  $A_1$ :

$$\nu_{12} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = 2\gamma_1 A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1}. \quad (6.9)$$

Очевидно, (6.9) можно проинтегрировать по характеристике  $\eta_1$ , получая

$$\nu_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_2} = \gamma_1 A_2^2 - F(\eta_2). \quad (6.10)$$

По существу, это дифференциальное уравнение первого порядка с обыкновенной производной — уравнение Риккати. Если теперь из первого уравнения (6.1) подставить в (6.10) амплитуду  $A_2$ , то получаем для  $A_1^{-1}$  линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 A_1^{-1}}{\partial \eta_2^2} = \gamma_1 \nu_{12}^{-2} F(\eta_2) A_1^{-1}. \quad (6.11)$$

Функцию  $F(\eta_2)$ , входящую в (6.10), (6.11), легко найти из граничных условий (6.2) с учетом (6.1):

$$F(t) = \gamma_1 E_1^2(t) + \gamma_1 E_2^2(t) - \nu_{12} \frac{\partial E_2}{\partial t}. \quad (6.12)$$

Следует отметить, что решение Лиувилля (6.8), как нетрудно проверить, удовлетворяет (6.11).

Метод линеаризации задачи о взаимодействии двух волновых пакетов при фазовом синхронизме, но при наличии расстройки групповых скоростей, позволивший перейти от квазилинейных уравнений с частными производными (6.1) к линейному уравнению с обыкновенной производной (6.11), предшествовал разработке более общего метода нахождения точных решений в случае взаимодействия трех волновых пакетов с комплексными амплитудами (фазовой модуляцией) — метода обратной задачи рассеяния. Описанию метода обратной задачи посвящено много оригинальных работ [1, 2] и монографий [3, 4]. Поэтому мы сочли возможным не излагать его в данной книге. Подчеркнем только, что получаемые

методом обратной задачи точные решения имеют сложную структуру, содержащую дискретный набор солитонов и фоновое излучение. Они не позволяют достаточно просто проследить все стадии нестационарного взаимодействия волновых пакетов на конечных расстояниях или за конечное время. Однако с помощью этих решений можно чрезвычайно просто находить амплитудно-фазовые профили волновых пакетов после их столкновения (взаимодействия) в нелинейной среде — эту информацию дают асимптотики при  $z \rightarrow \infty$  или  $t \rightarrow \infty$ . Метод обратной задачи дает регулярный способ нахождения солитонов огибающих.

## § 6.2. Нестационарные эффекты на нелинейной стадии генерации второй гармоники

При генерации второй гармоники  $E_2(t) = 0$  и функция граничных условий (6.12) равна  $F = \gamma_1 E_1^2(t)$ . Точное решение уравнения (6.11), описывающего нелинейно-дисперсионные эффекты при сильном энергообмене гармоник, удается найти для целого ряда характерных для практики амплитудных профилей основного импульса (например, для огибающей  $E_1 = E_{10} \operatorname{sech}(t/\tau_1)$ ). Мы приведем точное решение для случая удвоения частоты лоренцева импульса

$$E_1 = E_{10}(1 + t^2/\tau_1^2)^{-1}. \quad (6.13)$$

В результате отбора энергии от волны накачки ее лоренцев профиль искажается с расстоянием [10, 11]:

$$A_1 = E_1^{1/2}(\eta_1) E_1^{1/2}(\eta_2) [\operatorname{ch} G + (\eta_1/\tau_1)(g_\nu^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh} G], \quad (6.14)$$

где аргумент гиперболических функций

$$G = (g_\nu^2 - 1)^{1/2} [\operatorname{arctg}(\eta_1/\tau_1) - \operatorname{arctg}(\eta_2/\tau_1)], \quad (6.15)$$

$$g_\nu = l_{\tau 12}/l_{\text{нл}} = \tau_1/\tau_{\text{кр}}.$$

Ключевой параметр  $g_\nu$  характеризует соотношение между нелинейными и дисперсионными эффектами. Здесь  $l_{\tau 12} = \tau_1/|\nu_{12}|$  — длина группового запаздывания,  $l_{\text{нл}} = 1/\gamma_1 E_{10}$  — длина нелинейного взаимодействия, рассчитанная по максимальной амплитуде в вершине основного импульса. В другом представлении ключевого параметра  $g_\nu = \tau_1/\tau_{\text{кр}}$  фигурирует критическая длительность

$$\tau_{\text{кр}} = |\nu_{12}| l_{\text{нл}}. \quad (6.16)$$

Подставляя (6.14) в (6.1), можно найти выражение для амплитуды второй гармоники. Дисперсия волн существенно сказывается на процессе удвоения частоты, когда параметр  $g_\nu \ll 1$ , т.е. когда нелинейные эффекты не успевают развиваться на длине группового запаздывания. В обратном случае,  $g_\nu \gg 1$ , дисперсионные эффекты проявляются после практически полной перекачки энергии волны накачки в импульс второй гармоники.

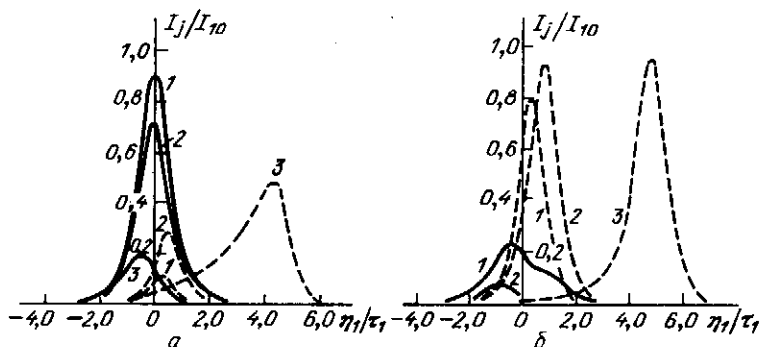


Рис. 6.1. Нелинейно-дисперсионные искажения огибающих импульсов основной (сплошные линии) и второй (штриховые) гармоник при  $g_\nu = \sqrt{2}$  (а) и  $\sqrt{10}$  (б).  $z/l_{T12} = 0,5$  (1), 1 (2), 10 (3)

На рис. 6.1 приведены графики, показывающие изменения профилей интенсивности основной и второй гармоник в зависимости от пройденного расстояния при разных соотношениях нелинейных и дисперсионных эффектов. Видно, что наряду со смещением максимума интенсивности второй гармоники (снос энергии идет к хвосту основного импульса,  $u_2 < u_1$ ,  $\nu_{21} > 0$ ) при не слишком малых значениях параметра  $g_\nu$  наблюдается заметный сдвиг вершины основного импульса в противоположном направлении. Этот эффект связан с обратной реакцией гармоники на волну основного излучения.

Значительный интерес для практики представляет эффективность перекачки энергии, характеризуемая отношением энергии гармоники к начальной энергии основного излучения,  $\eta_{вг} = W_2/W_{10}$ . Эту величину называют также КПД удвоителя частоты. Используя методы теории подобия (§ 1.7), запишем КПД в виде функции двух  $\pi$ -комплексов:

$$\eta_{вг} = \eta_{вг}(z/l_{T12}, g_\nu). \quad (6.17)$$

На рис. 6.2 представлены графики зависимости КПД от отношения длины нелинейной среды к длине группового запаздывания при различных значениях нелинейно-дисперсионного параметра  $g_\nu$  для случая генерации второй гармоники импульсом накачки с гауссовой огибающей  $E_1 = E_{10} \exp(-t^2/\tau_1^2)$  [17]. Аналогичный вид имеют графики КПД для лоренцева импульса накачки [10, 11].

В ряде прикладных задач представляет интерес изменение КПД при варьировании начальной длительности основного импульса  $\tau_1$  с сохранением его начальной энергии  $W_{10}$ . По кривым на рис. 6.2 за такими изменениями КПД проследить довольно трудно, так как длительность импульса  $\tau_1$  входит и в длину группового запаздывания (ось абсцисс), и в параметр кривых  $g_\nu$ . Для данной задачи целесообразно представить КПД удвоителя частоты в другой критериальной форме, нежели (6.17), а именно

$$\eta_{вг} = \eta_{вг}(z/l_{T12}, \gamma_1^2 W_{10} z / |\nu_{12}|). \quad (6.18)$$

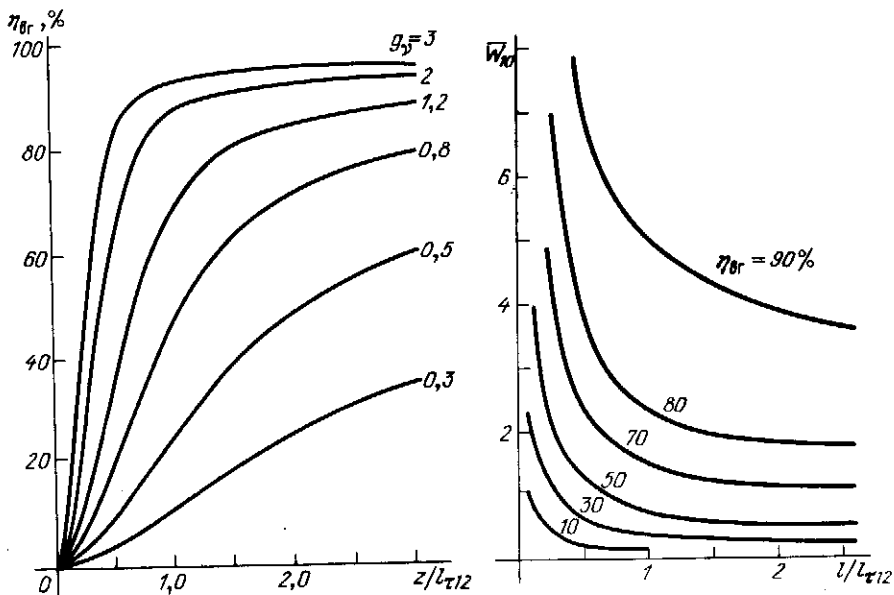


Рис. 6.2. Зависимость КПД удвоителя частоты гауссова импульса от расстояния, нормированного на длину группового запаздывания, при разных значениях нелинейно-дисперсионного параметра  $g_\nu = l\tau_{12}/l_{нл}$

Рис. 6.3. Линии равного КПД удвоителя частоты гауссова импульса как функции отношения пройденного в нелинейной среде расстояния к длине группового запаздывания и входной энергии в нормированных единицах:  $\bar{W}_{10} = W_{10}\gamma_1^2 z / |v_{12}|$

Здесь второй  $\pi$ -комплекс, пропорциональный начальной энергии основного импульса  $W_{10}$  и не зависящий явно от длительности  $\tau_1$ , образован из двух прежних критериев подобия, входящих в (6.17), в виде произведения первого на квадрат второго.

В новых переменных эффективность удвоителя (6.18) удобно представить на координатной плоскости семейством линий равных КПД (рис. 6.3). Так как расстояние  $z$  входит теперь в оба  $\pi$ -комплекса, отложенных по координатным осям, изменению КПД с расстоянием соответствует движение по лучу, угловой коэффициент которого равен  $g_\nu^2$ . Лучевой метод, основанный на теории подобия, позволяет, как видно, существенно облегчить и ускорить построение двухпараметрической функции (6.18), описывающей зависимость КПД от длины нелинейной среды, энергии основного импульса и длины группового запаздывания (относительной дисперсии первого порядка  $v_{12}$ ).

Уменьшению длительности импульса накачки  $\tau_1$  при фиксированной энергии  $W_{10}$ , очевидно, соответствует перемещение на рис. 6.3 по горизонтальной прямой в сторону больших значений  $z/l\tau_{12}$ . При этом видно, что эффективность перекачки энергии в импульс второй гармоники сначала быстро растет, но начиная с групповой длины рост КПД сильно замедляет-

ся, так как существенное влияние оказывает снос энергии гармоники из основного импульса.

При анализе нестационарных процессов в сильных полях накачки, когда на длине группового запаздывания укладывается много нелинейных длин ( $g_\nu \ll 1$ ), для нахождения решения уравнений (6.10), (6.11) можно воспользоваться методом ВКБ [18]. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для амплитуды основного импульса [14]:

$$A_1 = E_1^{1/2}(\eta_1) E_1^{1/2}(\eta_2) \left[ \operatorname{ch} G + \frac{\nu_{21}}{2\gamma_1} \frac{\partial E_1^{-1}}{\partial \eta_1} \operatorname{sh} G \right]^{-1},$$

$$G = \gamma_1 \int_0^z d\xi E_{10}(\eta_1 - \nu_{21} \xi). \quad (6.19)$$

Подставляя (6.19) в (6.1), нетрудно найти формулу для расчета амплитуды второй гармоники. Сравним полученные выражения (6.19) с точным решением (6.14) для лоренцевой формы огибающей. Видно, что при  $g_\nu \gg 1$ , когда можно считать  $(g_\nu^2 - 1)^{1/2} \approx g_\nu$ , точное решение (6.14) полностью совпадает с ВКБ-решением (6.19). В [14] была проведена количественная проверка (6.19) для лоренцева импульса, которая, в частности, показала, что вплоть до значений параметра  $g_\nu \approx 1$  и расстояний  $z \approx l_{\tau 12}$  расхождение точного и приближенного решений для огибающих на полуширине импульса составляет всего несколько процентов.

Рассмотрим теперь слабое взаимодействие импульсов, когда эффекты группового запаздывания проявляются значительно раньше, чем сказывается обратная реакция гармоники на поле основной волны ( $g_\nu \ll 1$ ). В данных условиях истощение энергии импульса накачки начнется на длинах, превышающих групповую длину,  $z \gg l_{\tau 12}$ . В этой наиболее интересной области в качестве первого приближения для амплитуды гармоники возьмем решение (6.10) без учета квадратичного члена (приближение заданного поля импульса накачки):

$$A_2 = \gamma_1 \nu_{12}^{-1/2} \int_0^\infty d\xi E_1^2(\xi).$$

Затем найдем амплитуду основного излучения, подставив в правую часть уравнения для  $A_1$  в (6.1) амплитуду гармоники, найденную в приближении заданного поля. Вслед за этим находим уточненное выражение для амплитуды гармоники из второго уравнения системы (6.1). В итоге получаем следующие выражения для амплитуд двух взаимодействующих волновых пакетов [6]:

$$A_1 = E_1(\eta_1) \left[ 1 + \gamma_1^2 \nu_{21}^{-1} z \int_{-\infty}^{\eta_1} d\xi E_1^2(\xi) \right]^{-1}, \quad (6.20)$$

$$A_2 = \gamma_1 \nu_{12}^{-1/2} \int_{-\infty}^{\eta_1} d\xi E_1^2(\xi) \left[ 1 + \gamma_1^2 \nu_{21}^{-1} z \int_{-\infty}^{\eta_1} d\xi E_1^2(\xi) \right]^{-1}.$$

Из (6.20) нетрудно вывести простую формулу для КПД удвоителя частоты:

$$\eta_{\text{вг}} = z/(z + l_{\text{нл}\nu}), \quad l_{\text{нл}\nu} = l_{\text{нл}}^2 / l_{\tau 12} \sigma_1, \quad (6.21)$$

где  $\sigma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi E_1^2(\xi) / E_{10}^2$  — норма профиля интенсивности основного импульса. Из (6.21) следует важный вывод: даже при сильной расстройке групповых скоростей ( $l_{\tau 12} \ll l_{\text{нл}}$ ) можно получить высокие КПД на достаточно больших длинах  $z \gg l_{\text{нл}\nu}$ . Характерная длина перекачки энергии  $l_{\text{нл}\nu}$ , на которой КПД достигает 50%, превышает групповую длину в  $g_{\nu}^{-2}$  раз и нелинейную длину — в  $g_{\nu}^{-1}$  раз. Формула (6.21) хорошо согласуется с результатами численных расчетов КПД (ср. с рис. 6.1).

### § 6.3. Генерация гигантского параметрического импульса

Рассмотрим теперь противоположный генерации второй гармоники процесс вырожденного взаимодействия — параметрическое усиление субгармоники. В отличие от вопросов, рассмотренных в гл. 2 и 4, нас интересует здесь нелинейная стадия параметрического усиления при наличии расстройки групповых скоростей. Напомним, что в линейном режиме относительная дисперсия в поле однородной волны накачки приводит к параметрической диффузии связанных пакетов. В неоднородном поле гауссова импульса накачки длительность субгармоники сокращается по закону  $\tau_1 \approx \tau_2(\Gamma_0 z)^{-1/2}$ . Однако этот процесс прекращается на групповой длине из-за сноса энергии субгармоники из основного импульса. Отметим, что механизм сокращения длительности субгармоники в поле гауссова импульса накачки не очень эффективен: даже при весьма большом усилении  $\Gamma_0 z = 10$  длительность субгармоники всего в три раза меньше длительности основного излучения.

Принципиально новые возможности формирования сверхкоротких импульсов открываются при использовании нелинейного режима параметрического усиления в поле квазинепрерывной волны накачки. Здесь рассогласование групповых скоростей играет главную роль в формировании гигантского параметрического импульса субгармоники. Этот импульс обладает уникальными характеристиками: его амплитуда во много раз превосходит амплитуду волны накачки, а длительность при определенных условиях монотонно сокращается с расстоянием и в нелинейном режиме взаимодействия.

Механизм генерации гигантского импульса обусловлен тем, что характер энергообмена между субгармоникой и накачкой различен для фронта и хвоста усиливаемого импульса. При  $u_1 > u_2$  режим экспоненциального усиления на фронте субгармоники сохраняется даже при  $A_{1\text{max}} \gg E_2$ ; при этом практически вся мощность накачки поглощается фронтом, а хвост резко обостряется за счет механизма нелинейных потерь, связанных с удвоением частоты волны субгармоники. Приведем основные результаты теории этого эффекта.

Будем считать начальное распределение амплитуды волны накачки однородным (длинный импульс накачки),  $E_2 \approx E_{20}$ , а входной импульс субгар-



моники слабым,  $E_1(t) \ll E_{20}$ . Для этого типа взаимодействия решение нестационарного линейного уравнения (6.11) имеет следующую форму [9, 11]:

$$A_1 = E_1(\eta_1) [e^{-\Gamma_0 z} + (\tau_{кр} E_{20}^2)^{-1} \text{sh}(\Gamma_0 z) \times \\ \times \int_0^{\infty} d\xi E_1^2(\eta_1 - \xi) e^{-2\xi/\tau_{кр}}]^{-1}, \quad (6.22)$$

где  $\Gamma_0 = \gamma_1 E_{20}$ ,  $\tau_{кр} = \nu_{21}/\Gamma_0$  (ср. с (6.15)). При подаче постоянного сигнала  $E_1 = E_{10}$  или при групповом синхронизме,  $\nu_{12} = 0$ , (6.22) переходит в квазистационарное решение (6.5). Анализ (6.22) показывает, что после нарастания амплитуды субгармоники  $A_{1\max}$  до амплитуды накачки  $E_{20}$  наступает нелинейный этап взаимодействия волн, протекание которого сильно зависит от профиля фронта импульса субгармоники.

Если быстрый сигнал на частоте субгармоники имеет экспоненциальный фронт  $E_1(\eta_1) = E_{10} e^{-\eta_1/\tau_1}$ , то на расстоянии

$$z \approx (1/2) \Gamma_0^{-1} \ln [2 E_{20}^2 (\tau_1 + \tau_{кр}) / E_{10}^2 \tau_1]$$

формируется квазистационарный импульс вида

$$A_c \approx E_{20} (1 + \tau_{кр}/\tau_1)^{1/2} \text{sech}(\Gamma_0 z - \eta_1/\tau_1). \quad (6.23)$$

Из (6.23) видно, что при усилении экспоненциального импульса крутизна фронта не изменяется (остается равной  $\tau_1$ ). Такую же крутизну приобретает хвост сигнала. Если крутизна фронта меньше критической величины,  $\tau_1 < \tau_{кр}$ , то пиковое значение амплитуды квазистационарного импульса (6.23) превышает амплитуду волны накачки  $E_{20}$ . Подробнее свойства стационарных импульсов — солитонов обсуждаются в гл. 7.

Существенное сокращение длительности испытывают сигналы, фронт которых имеет более резкий профиль, чем экспонента (гауссов, линейный,

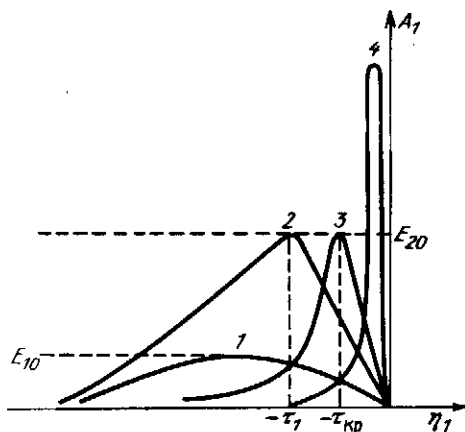


Рис. 6.4. Формирование гигантского параметрического импульса в поле монохроматической волны накачки:

1 - входной импульс субгармоники, 2 - параметрический импульс с  $A_{1\max} = E_{20}$ , 3 - квазистационарный импульс с  $\tau_1(z) = \tau_{кр}$ , 4 - гигантский импульс с  $A_{1\max} > E_{20}$ ,  $\tau_1(z) \ll \tau_{кр}$

степенной и т.п.). Усиление таких импульсов можно разбить на ряд этапов (рис. 6.4). На первом, линейном этапе наблюдается экспоненциальное нарастание сигнала в заданном поле накачки,  $A_1 \propto \exp(\Gamma_0 z)$ , вплоть до  $A_{1 \max} \approx E_{20}$ . Затем начинается сокращение длительности импульса до величины  $\tau_{кр}$  при сохранении пиковой амплитуды порядка  $E_{20}$ . После формирования квазистационарного импульса с энергией  $W_{кр} \approx E_{20}^2 \tau_{кр}$  происходит дальнейшее сокращение длительности при сохранении постоянной энергии; за счет этого возрастает пиковая интенсивность субгармоники. В случае усиления гауссова импульса амплитуда на последнем этапе растет по закону

$$A_{1 \max} \approx E_{20} (\tau_{кр} / \tau_1)^{1/2} (\Gamma_0 z)^{1/4},$$

а при степенной форме фронта,  $E_1 = E_{10} (\eta_1 / \tau_1)^N$ , темп нарастания поля носит экспоненциальный характер:

$$A_{1 \max} \propto \exp[\Gamma_0 z / (2N + 1)].$$

Хотя описанная картина формирования импульса имеет сходство с механизмом сужения в лазерном усилителе [19] и ВКР-усилителе [20], использование параметрических систем обладает важными преимуществами. Помимо малого времени релаксации электронной нелинейности, в параметрическом усилителе существует беспороговый механизм линейных потерь (генерация второй гармоники), с помощью которого формируется крутой задний фронт. Оценки показывают, что в кристалле KDP длины  $l = 3$  см и с  $|\nu_{12}| = 10^{-13}$  с/см оптический сигнал может сузиться до  $\tau_{кр} = 10^{-13}$  с при интенсивности поля накачки  $I_{10} = 10^9$  Вт/см<sup>2</sup>.

Предельная длительность импульса субгармоники  $\tau_{пред}$  ограничивается его дисперсионным расплыванием. Сужение импульса будет происходить, пока длина расплывания  $l_d = (1/2) \tau_1^2 |\partial^2 k / \partial \omega^2|^{-1}$  не станет меньше длины усиления  $l_{нл} = \Gamma_0^{-1}$ . Если  $\Gamma_0 = 1$  см<sup>-1</sup>, а  $\partial^2 k / \partial \omega^2 = 10^{-27}$  с<sup>2</sup>/см, то  $\tau_{пред} \approx 3 \cdot 10^{-14}$  с.

В заключение заметим, что рассмотренный механизм формирования гигантского параметрического импульса малой длительности можно реализовать и при невырожденном по частоте трехволновом взаимодействии. Экспериментально формирование гигантского импульса исследовано в параметрическом генераторе света (ПГС) на кристалле KDP [8]. При синхронной накачке ПГС длинными импульсами ( $\tau_2 = 30$  пс) достигалась длительность импульсов на сигнальной и холостой частотах порядка 0,3 пс, причем эта величина мало менялась при перестройке длины волны излучения ПГС в диапазоне 0,8–1,35 мкм.

#### § 6.4. Ограничение эффективности удвоения частоты фазово-модулированного импульса

Амплитудная модуляция основной волны снижает темп преобразования энергии во вторую гармонику. Во-первых, при неоднородном распределении поля преобразование частоты идет медленнее на фронте и хвосте импульса, что задерживает рост энергии гармоники. Во-вторых, при относи-

тельной дисперсии волн появляется снос энергии гармоники из основного импульса, что ограничивает область сильного нелинейного взаимодействия длиной группового запаздывания. Однако, как отмечалось в § 6.2, даже при большой расстройке групповых скоростей, когда  $l_{\tau 12} \ll l_{нл}$ , можно осуществить эффективную перекачку энергии во вторую гармонику на достаточно протяженных трассах,  $z \gg l_{нл}$  (6.21). Ситуация резко меняется при наличии фазовой модуляции основной волны.

Для проведения анализа взаимодействия фазово-модулированных импульсов обратимся к уравнениям для комплексных амплитуд

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -i\gamma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} = -i\gamma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z}, \quad (6.24)$$

где  $\Delta k = k_2 - 2k_1$ . Граничные условия при  $z = 0$  имеют вид

$$A_2(z=0) = 0, \quad A_1(z=0) = E_1(t) = |E_1(t)| e^{i\varphi_1(t)}. \quad (6.25)$$

Из (6.24) найдем скорость изменения энергий волн по длине нелинейной среды:

$$\frac{dW_2}{dz} = -\frac{dW_1}{dz} = 2\gamma_1 n_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 |A_2 A_1^2| \sin \varphi, \quad (6.26)$$

где  $\varphi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta k z$  — обобщенная фазовая расстройка. Оптимальное соотношение между фазами  $\varphi = \pi/2$ , когда скорость перекачки энергии максимальна, сохраняется в среде при  $\Delta k = 0$ . Однако в диспергирующей среде это соотношение нарушается вследствие фазовой модуляции.

В квазистационарном режиме ( $\nu_{12} = 0$ ) удвоение частоты детально проанализировано в [21]. В частности, амплитуда гармоники выражается через эллиптический синус [21]:

$$A_2 = -i(\gamma_2/\gamma_1)^{1/2} E_1(\eta_1) \operatorname{sn}(z/l_{нл} K^{1/2}, K), \quad (6.27)$$

где

$$l_{нл} = (\gamma_1 \gamma_2)^{-1/2} |E_1(\eta_1)|^{-1}, \quad K = \{|\Delta k| l_{нл}/4 + [1 + (\Delta k l_{нл}/4)^2]^{1/2}\}^{-2}$$

— модуль синуса. В условиях фазового синхронизма при  $\Delta k = 0$  имеем  $K = 1$  и  $A_2 = -i(\gamma_2/\gamma_1)^{1/2} E_1 \operatorname{th}(z/l_{нл})$  (ср. (6.4)). При рассогласовании фазовых скоростей ( $\Delta k \neq 0$ ) на определенной длине  $z_0$  начинается обратная перекачка энергии гармоники в основное излучение. При малой расстройке  $|\Delta k| l_{нл} \ll 1$ , из (6.27) получаем

$$z_0 = (1/2) l_{нл} \ln(16 |\Delta k l_{нл}|^{-1/2}), \quad (6.28)$$

причем максимальная амплитуда в точке  $z = z_0$  равна

$$A_{2\max} = (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2} E_{10} (1 - |\Delta k| l_{нл}/2)^{1/2}.$$

Из (6.28) следует, что даже при очень малых расстройках, например  $|\Delta k| l_{нл} = 0,01$ , длина обратной перекачки составляет всего несколько нелинейных длин,  $z_0 = 3,7 l_{нл}$ . Это говорит о высокой чувствительности сильного взаимодействия к любым нарушениям оптимального соотноше-

ния  $\varphi = \pi/2$  между фазами волн. Фиксируя длину нелинейной среды  $z = l$ , определим из (6.28) величину расстройки волновых чисел, при которой начинается обратная перекачка (рис. 6.5):

$$(\Delta k l)_{\text{кор}} = 16(l/l_{\text{нл}}) \exp(-2l/l_{\text{нл}}), \quad l \geq l_{\text{нл}}. \quad (6.29)$$

Когерентность процесса сильного взаимодействия обеспечивается при  $|\Delta k| < \Delta k_{\text{кор}}$ . Чем больше интенсивность основной волны (меньше  $l_{\text{нл}}$ ), тем более жесткие требования накладываются на допустимую расстройку фазовых скоростей. Напомним, что в слабых полях ( $l \ll l_{\text{нл}}$ ), когда справедливо приближение заданного поля, область когерентности процесса взаимодействия определяется длиной среды,  $\Delta k_{\text{кор}} = \pi/l$ . При малых КПД влияние фазовой модуляции на временные, спектральные и энергетические характеристики второй гармоники, связанные с конечной шириной частотного синхронизма в диспергирующей среде, рассмотрено в § 5.4.

Таким образом, при удвоении частоты высокоинтенсивного излучения следует ожидать повышенной чувствительности перекачки энергии к нарушениям фазового синхронизма. Теоретические расчеты нестационарного процесса генерации второй гармоники ФМ импульсов наталкиваются на большие трудности, так как простого аналитического решения уравнений (6.24) найти не удастся. Поэтому на первом плане стоят численные методы интегрирования (6.24) [5–7].

Приведем в качестве примера результаты расчетов КПД удвоителя частоты гауссова импульса с квадратичным изменением фазы во времени (см. также (2.25)):

$$E_1 = E_{10}(1 + d_1^2)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{t^2(1 - id_1)}{\tau_1^2(1 + d_1^2)} \right], \quad (6.30)$$

где  $d_1 = \Omega_{10}\tau_1$  — параметр частотного заполнения,  $\Omega_{10}$  — девиация частоты. Импульс (6.30) сохраняет ширину частотного спектра  $\Delta\omega_1 = 2/\tau_1$  и полную энергию при изменении параметра фазовой модуляции  $d_1$ . Увеличение  $d_1$  ведет к росту длительности импульса и падению его амплитуды.

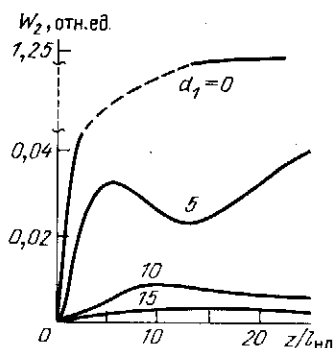
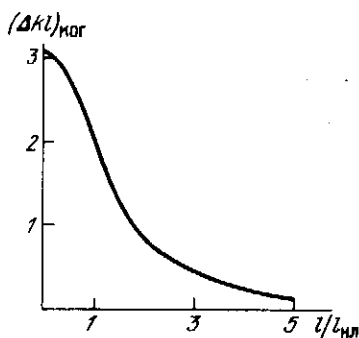


Рис. 6.5. Зависимость допустимой расстройки волновых векторов, обеспечивающей когерентность удвоения частоты, от отношения длины нелинейной среды к характерной длине нелинейного взаимодействия

Рис. 6.6. Зависимость от расстояния энергии второй гармоники, возбуждаемой гауссовым импульсом с различным коэффициентом частотного заполнения  $d_1$  и  $g_V = 1$

Это означает, что длина нелинейного взаимодействия растет,  $l_{нл}(d_1) = l_{нл}(0) (1 + d_1^2)^{1/2}$ , а скорость перекачки энергии замедляется. Из рис. 6.6 видно (1,25 отн. ед. соответствует 100%), что уже при  $d_1 = 5$  КПД падает до 4%, а при  $d_1 = 15$  — до 0,4%. Наличие фазовой модуляции основного излучения ведет к искажению формы импульсов в процессе взаимодействия. Профили их интенсивностей показаны на рис. 6.7 для тех же параметров, что и на рис. 6.6. Видно, что при наличии фазовой модуляции огибающая основного импульса принимает изрезанную форму, вследствие нарушения когерентности взаимодействия появляются области обратной перекачки.

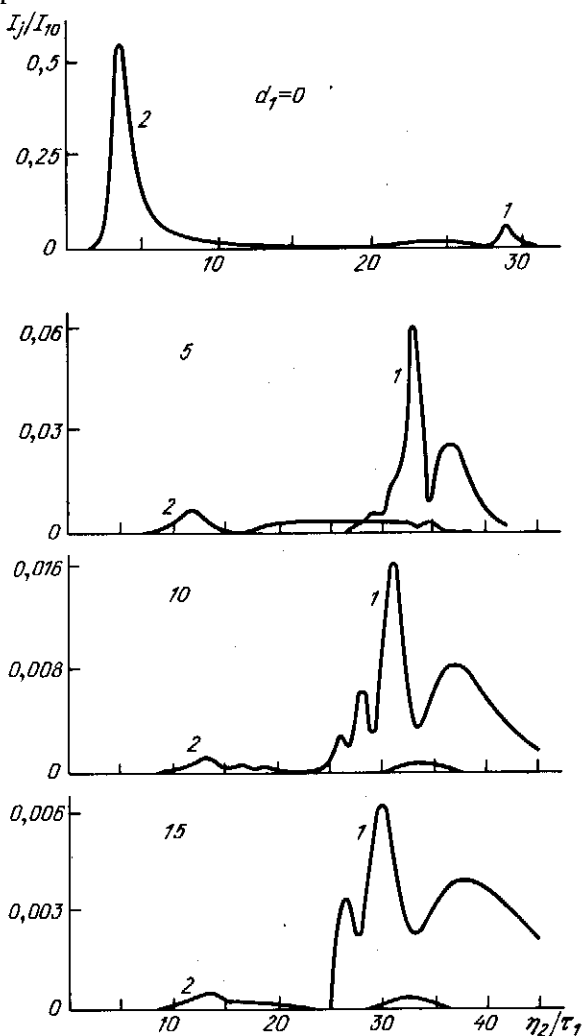
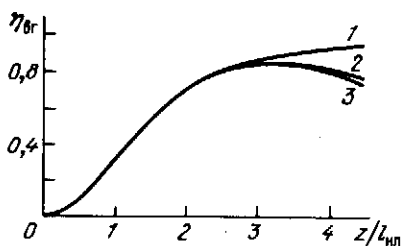


Рис. 6.7. Профили интенсивности основного излучения (1) и второй гармоники (2) на расстоянии  $z = 25l_{нл}$  при различной глубине фазовой модуляции гауссова импульса основной волны

Рис. 6.8. Зависимость от расстояния КПД удвоителя частоты гауссова импульса при некритическом синхронизме (1) и при дисперсионной некогерентности (2), вызванной фазовой модуляцией при критическом синхронизме; кривая 3 — приближенный расчет по формуле (6.34)



На рис. 6.8 приведены зависимости КПД от длины нелинейной среды при слабой дисперсионной некогерентности [6]. Кривая 1 представляет КПД удвоителя коротких импульсов, в котором групповые скорости гармоник согласованы,  $\nu_{12} = 0$  и, следовательно, когерентность взаимодействия импульсов не нарушается; кривая 2 показывает эффект ограничения КПД из-за дисперсионного сдвига фаз импульсов (приведены результаты численного решения укороченных уравнений (6.24) при нелинейно-дисперсионном параметре  $g_\nu = 9,3$  и параметре  $d_1 = 0,88$ ). Эффективность преобразования частоты не превышает 85%.

Помимо прямых численных решений уравнений (6.24) в ряде работ предложены приближенные аналитические методы, позволяющие упростить анализ нелинейно-дисперсионных эффектов при удвоении частоты. Один из подходов связан с учетом слабой дисперсионной некогерентности, когда сносом энергии гармоники из основного импульса можно пренебречь,  $z \ll l_{\tau 12}$ .

В этих условиях энергообмен между волнами определяется только обобщенной фазой  $\varphi$  (6.26). На первой стадии взаимодействия фазовая модуляция основного излучения  $\varphi_{10}(t)$  перекладывается на волну удвоенной частоты:  $\varphi_2 = 2\varphi_{10}$ . Однако вследствие дисперсии волновые фронты перемещаются вместе с импульсами с разными скоростями:  $\varphi_1 = \varphi_{10}(\eta_1)$  и  $\varphi_2 = 2\varphi_{10}(\eta_2)$ . В результате этого происходит нарушение фазового синхронизма. Предполагая, что фазы "заморожены", т.е. не меняются из-за нелинейного взаимодействия, находим в первом приближении

$$\varphi = 2[\varphi_{10}(\eta_1) - \varphi_{10}(\eta_2)] + \Delta k z. \quad (6.31)$$

В среде со слабой дисперсией эффекты группового запаздывания ярко выражены и (6.31) можно разложить в ряд по малому параметру  $\nu_{12}$  [6]:

$$\varphi = \Delta k_{эфф} z, \quad \Delta k_{эфф} = \Delta k + 2\nu_{12} \partial \varphi_{10} / \partial \eta_1. \quad (6.32)$$

Видно, что в каждой точке  $\eta_1$  амплитудного профиля возникает своя эффективная расстройка  $\Delta k_{эфф}$ .

Подставляя (6.32) в точное решение (6.27), полученное в квазистационарном приближении, и используя свойства эллиптических функций, можно исследовать влияние дисперсионной некогерентности (6.32) на удвоение частоты. Если эффективность перекачки падает незначительно, то, разлагая эллиптический синус в (6.27) в ряд, получаем с учетом пер-

вых двух членов следующее выражение для амплитуды второй гармоники:

$$A_2 = E_1(\eta_1) \left[ \operatorname{th} \bar{z} - \left( \frac{\Delta k_{\text{эфф}}}{8} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sh}(4\bar{z})}{4} - \bar{z} \right) \operatorname{sech}^2 \bar{z} \right], \quad (6.33)$$

где  $\bar{z} = z/l_{\text{нл}}(\eta_1)$  — расстояние, нормированное на квазистационарную нелинейную длину  $l_{\text{нл}}(\eta_1) = 1/\gamma_1 |E_1(\eta_1)|$ . Переходя в (6.33) к интенсивности, после интегрирования по времени находим формулу для приближенного расчета КПД удвоителя:

$$\eta_{\text{вт}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 |E_1(\eta_1)|^2 \left[ \operatorname{th} \bar{z} - \frac{1}{32} \left( \Delta k + 2\nu_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\operatorname{sh}(4\bar{z})}{4} - \bar{z} \right) \frac{\operatorname{sh} \bar{z}}{\operatorname{ch}^3 \bar{z}} \right]. \quad (6.34)$$

Формула (6.34) совпадает с выражением для КПД, полученным в [13] методом последовательных приближений, основанным на разложении амплитуд в (6.24) в ряд по малому параметру  $g_{\nu}^{-1}$ . Результаты расчетов КПД удвоителя [22] при  $g_{\nu} = 9,3$  и  $d_1 = 0,88$ , выполненные по (6.34) и представленные кривой 3 на рис. 6.8, с высокой точностью описывают влияние дисперсионной некогерентности.

Детальное сравнение расчетов КПД удвоителя по строгим укороченным уравнениям (6.24) и по квазистационарным уравнениям, когда в (6.24) полагается  $\nu_{21} = 0$ , с учетом эффективной нестационарной расстройки волновых чисел (6.32) для случая фазовой модуляции основного импульса вида  $\varphi_{10} = \varphi_0 \exp(-2t^2/\tau_1^2)$  выполнено в [7]. Обнаружено хорошее согласие (в пределах нескольких процентов по КПД) данных численных экспериментов. Однако отмечается, что если в квазистационарном приближении профили импульсов имеют симметричную форму, то с учетом сноса энергии огибающие становятся несимметричными. В [23] для расчета КПД использовалось разложение эллиптического синуса в (6.27) в ряд по гармоникам кратных периодов.

При умеренной перекачке энергии истощение импульса накачки можно учесть методом возмущений, полагая

$$A_1 = E_1(\eta_1) + \alpha_1(\eta_1, z), \quad (6.35)$$

где  $\alpha_1$  — малая поправка к заданному полю вследствие слабой обратной реакции гармоники. Подставляя (6.35) в (6.1) и линеаризуя уравнения по малой величине  $\alpha_1$ , получаем уравнение второго приближения

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -i\gamma_1 A_2 E_1^*(\eta_1) e^{-i\Delta k z}, \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -i\gamma_2 [E_1^2(\eta_1) + 2E_1(\eta_1)\alpha_1] e^{i\Delta k z}.$$

Исключая из (6.36)  $\alpha_1$ , находим упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + i\Delta k \nu_2^{-1} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} + 2\gamma_1 \gamma_2 \nu_2^{-2} |E_1(\eta_1)|^2 A_2 = 0, \quad (6.37)$$

которое было получено в [12] несколько другим способом. Так как в (6.37) входит только профиль интенсивности импульса накачки, то это приближение получило название приближения заданной интенсивности.

При согласовании групповых скоростей (6.37) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - i\Delta k \frac{\partial A_2}{\partial z} + 2\gamma_1\gamma_2 |E_1(\eta_1)|^2 A_2 = 0, \quad (6.38)$$

которое с учетом граничных условий (6.2) имеет решение

$$A_2 = -i\gamma_2 E_1^2(\eta_1) z \operatorname{sinc} [(2\gamma_1\gamma_2 |E_1|^2 + \Delta k^2/4)^{1/2} z] e^{i\Delta k z/2}. \quad (6.39)$$

Сопоставление (6.39) с точным решением (6.27) позволяет установить область его применимости. В частности, при  $\Delta k = 0$  им можно пользоваться на расстояниях  $z \leq l_{нл}$ , когда КПД не превышает 50%. Это ограничение на КПД остается и при учете  $\nu_{12}$  (6.37). В нестационарном случае решение (6.37) можно найти методом Римана (ср. с § 4.1, 5.1) [12].

Следует отметить, что представленные результаты по теории генерации второй гармоники ФМ импульсами в диспергирующей среде можно использовать согласно пространственно-временной аналогии для анализа эффективности удвоения частоты мощными расходящимися пучками при практическом синхронизме, когда лучевые векторы гармоник неколлинеарны. Сносу энергии второй гармоники из импульса накачки отвечает пространственный снос энергии из пучка основного излучения.

### § 6.5. Общие закономерности нестационарных трехфотонных взаимодействий

Нестационарные эффекты при взаимодействии трех волновых пакетов более разнообразны, чем вырожденные по частоте случаи генерации второй гармоники или субгармоники. В отсутствие относительной дисперсии волн, т.е. при равенстве всех групповых скоростей друг другу, нелинейное взаимодействие носит квазистационарный характер. Здесь остаются в силе решения укороченных уравнений (6.27), полученные для плоских монохроматических волн [21]. Необходимо только в них считать начальные амплитуды и фазы функциями характеристической координаты  $\eta = t - z/u$ .

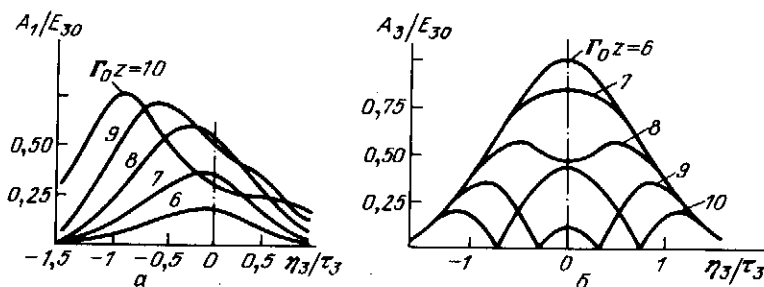


Рис. 6.9. Изменение амплитудных профилей импульсов сигнала (а) и накачки (б) в зависимости от пройденного расстояния  $z$  при переходе от модового режима усиления к нелинейному взаимодействию при  $g_\nu = 5$



Обсудим в качестве примера параметрическое усиление в поле короткого импульса с неоднородным амплитудным профилем, например гауссовым (рис. 6.9) [8,28]. На линейной стадии усиления происходит экспоненциальный рост амплитуд и сужение импульса на сигнальной и холостой частотах (§ 4.2). При значительном отборе энергии в вершине основного импульса появляется провал и сигнальный импульс расширяется, это начало нелинейного режима. На следующей стадии энергия сигнальной

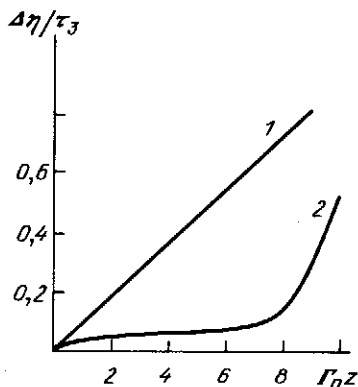


Рис. 6.10. Зависимость смещения вершины сигнала от расстояния при параметрическом усилении волн с одинаковыми групповыми расстройками,  $\nu_{1з} = \nu_{2з}$  (1), и с противоположными по знаку,  $\nu_{1з} = -\nu_{2з}$  (2)

и холостой волн начинает возвращаться в волну накачки вследствие процесса генерации суммарной частоты. По мере увеличения расстояния область нелинейного взаимодействия охватывает все большую часть импульса накачки.

Расстройка групповых скоростей приводит к сносу энергии усиливаемых волн из импульса накачки. Если сигнальная и холостая волны опережают импульс накачки или отстают от него, то параметрическое усиление может перейти в режим насыщения на групповой длине еще на линейной стадии, причем усиливаемые импульсы группируются около фронта или хвоста основного излучения в зависимости от того, куда идет снос энергии (§ 4.3). Поэтому и нелинейный режим параметрического усиления развивается в этой ограниченной области импульса накачки. В результате эффективность энергообмена резко падает из-за групповой расстройки, так как длина сильного взаимодействия импульсов ограничена не пройденным расстоянием, а длиной группового запаздывания.

Большой интерес представляет случай абсолютной неустойчивости, когда энергия сигнальной и холостой волн сносятся по разные стороны от импульса накачки. На линейной стадии возможен захват усиливаемых волн в параметрические моды, обеспечивающий экспоненциальный рост амплитуд слабых волн с увеличением пройденного расстояния (§ 4.4). Однако при вхождении в нелинейный режим профиль импульса накачки настолько искажается вследствие обратной реакции, что модовое усиление, естественно, прекращается. Этот эффект хорошо виден на рис. 6.10 [8], где показана зависимость положения вершины сигнала от расстояния. Область постоянного смещения вершины соответствует формированию стационарных профилей параметрических мод (ср. с рис. 4.6);

затем на нелинейной стадии импульс сигнальной частоты быстро сносится из области взаимодействия, так как волна накачки истощила запас своей энергии. В [8] представлены также графики, иллюстрирующие влияние расстройек групповых скоростей на усиление сигнального импульса и изменение его длительности.

С точки зрения достижения максимальной эффективности преобразования энергии короткого импульса накачки в энергию сигнальной и холостой волн явное предпочтение имеют трехчастотные взаимодействия, для которых на линейной стадии можно реализовать модовый режим параметрического усиления. Распространение импульса накачки с промежуточной скоростью обеспечивает интенсивный энергообмен между волнами и на нелинейной стадии взаимодействия.

В заключение укажем, что в поле интенсивного низкочастотного импульса сильный энергообмен развивается между слабыми волнами, поэтому в таких случаях можно полностью использовать результаты расчетов, выполненных в приближении заданного поля волны накачки (гл. 5). Отметим, что использование метода заданной интенсивности для расчета трехволновых взаимодействий, по существу, ограничивается из-за возникающих математических трудностей случаями группового синхронизма между какой-либо парой волн.

## ТРЕХЧАСТОТНЫЕ СОЛИТОНЫ В СРЕДАХ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этой главе обсуждаются свойства солитонов, формирующихся при трехчастотных взаимодействиях волн с различными групповыми скоростями. К солитонам, как известно, относится специальный класс волновых пакетов, которые при распространении в диспергирующей среде сохраняют свои огибающие неизменными благодаря компенсирующему действию нелинейных процессов. При трехволновом взаимодействии в среде с квадратичной нелинейностью стационарные профили принимают одновременно три волновых пакета разных частот. Так как, очевидно, стационарные импульсы не обмениваются энергией, взаимодействие носит чисто реактивный характер. Иными словами, трехчастотное взаимодействие выступает в этих условиях как механизм кооперативного самовоздействия. В среде с относительной дисперсией первого порядка уединенные волны могут образоваться только на двух из трех частот, а на оставшейся частоте можно наблюдать "темный" солитон. С подобными ситуациями мы уже сталкивались в гл. 5 и 6. Ниже предлагается детальный анализ трехчастотных солитонов.

### § 7.1. Реактивные трехволновые взаимодействия и стационарные волны

Обратимся снова к укороченным уравнениям трехволновых взаимодействий в первом приближении теории дисперсии (§ 1.5):

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial A_j}{\partial t} = -i\gamma_j \frac{\partial U}{\partial A_j^*}, \quad U = A_1 A_2 A_3^* + A_1^* A_2^* A_3. \quad (7.1)$$

В предыдущей главе нас интересовали взаимодействия, сопровождающиеся интенсивным энергообменом между волнами. Но при определенном соотношении между фазами волн можно реализовать принципиально другой тип взаимодействия, а именно реактивный.

Рассмотрим особенности реактивного взаимодействия сначала на примере взаимодействия плоских монохроматических волн. Так как при реактивном взаимодействии энергообмена между волнами нет, то их амплитуды не меняются с расстоянием, происходит лишь изменение их

фазовых скоростей или волновых чисел. Поэтому будем искать стационарное решение (7.1) в виде

$$A_j = E_{j0} \exp [i(\Omega_j t - q_j z + \varphi_{j0})], \quad (7.2)$$

где  $\Omega_j$  — сдвиг относительно несущей частоты  $\omega_j$ ,  $q_j$  — нелинейная добавка к волновому числу  $k_j$ ,  $\varphi_{j0}$  — постоянный сдвиг фазы. Подставляя (7.2) в (7.1), находим связь между амплитудами стационарных бегущих волн и их параметрами:

$$(q_j - \Omega_j/u_j)E_{j0}^2 = \gamma_j E_{10} E_{20} E_{30}, \quad (7.3)$$

$$q_3 = q_1 + q_2, \quad \Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \varphi_{30} = \varphi_{10} + \varphi_{20}.$$

Простые решения (7.2), (7.3) могут служить исходным материалом для построения более сложных стационарных решений нелинейных уравнений (7.1) с помощью преобразования Бэклунда [1]. В [2, 3] обсуждается связь преобразования Бэклунда с методом обратной задачи рассеяния для трехчастотных взаимодействий волновых пакетов [4, 5].

Рассмотрим свойства стационарных волн (7.2) в отсутствие сдвигов частот ( $\Omega_j = 0$ ) [6]. В частности, интерес представляет нелинейная дисперсия волн, т.е. зависимость поправок  $q_j$  к волновым числам от амплитуд  $E_{j0}$ . В силу соотношений (7.3) шесть неизвестных величин  $q_j$  и  $E_{j0}$  подчиняются четырем связям. Поэтому выберем в качестве независимых переменных амплитуду высокочастотной волны  $E_{30}$  и отношение интенсивностей двух других волн  $N = \gamma_2 E_{10}^2 / \gamma_1 E_{20}^2$ . Тогда, разрешая соотношения (7.3) относительно других величин, получаем следующие выражения:

$$E_{10}^2 = \gamma_1 \gamma_3^{-1} E_{30}^2 (1 + N), \quad E_{20}^2 = \gamma_2 \gamma_3^{-1} E_{30}^2 (1 + N^{-1}), \quad (7.4)$$

$$q_1 = \Gamma_0 N^{-1/2}, \quad q_2 = \Gamma_0 N^{1/2}, \quad q_3 = \Gamma_0 (N^{-1/2} + N^{1/2}), \quad (7.5)$$

где  $\Gamma_0 = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} E_{30}$ ,  $N = \gamma_2 E_{10}^2 / \gamma_1 E_{20}^2$ . График зависимостей стационарных интенсивностей и нелинейных добавок к волновым числам от параметра  $N$  представлены на рис. 7.1.

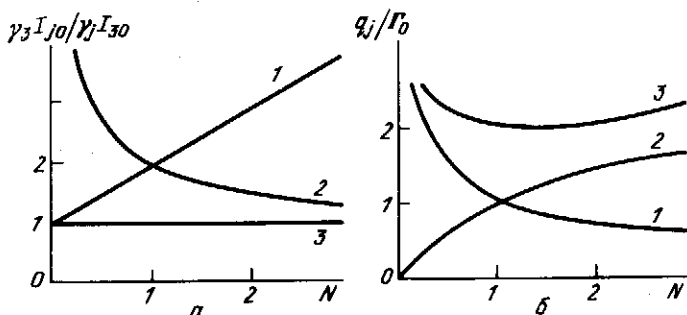


Рис. 7.1. Зависимость интенсивностей  $I_{j0}$  (а) и нелинейных добавок к волновым числам  $q_j$  (б) стационарных волн от числа  $N = \gamma_2 E_{10}^2 / \gamma_1 E_{20}^2$  при реактивном трехчастотном взаимодействии (номера кривых соответствуют значениям  $j = 1, 2, 3$ )

Минимальный запас энергии волн  $\sum_j E_{j0}^2$  достигается при  $N = (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2}$  и равен  $E_{30}^2 [1 + 2(\gamma_1\gamma_2)^{1/2}/\gamma_3]$ . Соотношения (7.3) также показывают, что замедление ( $q_j > 0$ ) испытывают волны, произведение амплитуд которых положительно,  $E_{10}E_{20}E_{30} > 0$ . Сдвиг по фазе на  $\pi$  у одной из них (этому отвечает отрицательная величина амплитуды) меняет характер кооперативного самовоздействия — наблюдается ускорение волн ( $q_j < 0$ ).

Для исследования вопроса об устойчивости стационарных решений введем в (7.2) малые возмущения:

$$A_j = (E_{j0} + C_j e^{i\Omega\tau_3 + \Gamma_B z}) e^{-iq_j z}. \quad (7.6)$$

Подставляя (7.6) в (7.1) и линеаризуя уравнения по малым величинам  $C_j$ , можно затем получить дисперсионное уравнение для  $\Gamma_B$ . В общем случае оно имеет шестой порядок. Для вырожденного взаимодействия волн ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ ,  $u_1 = u_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ ) дисперсионное уравнение приобретает относительно простой вид

$$\Gamma_B^4 + [8\gamma_1^2 E_{30}^2 + (2\gamma_1 E_{30} - \nu_{31}\Omega)^2] \Gamma_B^2 + 4\gamma_1^3 E_{30}^3 \Omega \nu_{31} = 0. \quad (7.7)$$

Из анализа (7.7) следует, что стационарные решения становятся неустойчивыми по отношению к спектральным компонентам с частотным сдвигом  $\Omega E_1 \nu_{21} < 0$ . При этом наибольший инкремент  $\Gamma_{B \max} \approx \Gamma_0$  имеют компоненты с  $\Omega_{\max} \approx \Gamma_0 / |\nu_{31}|$ . На временном языке описания это означает появление экспоненциально нарастающей амплитудной модуляции стационарных волн с характерным временным масштабом  $\tau_M \approx \Omega_{\max}^{-1} = |\nu_{31}| / \Gamma_0$ . Эта величина совпадает с  $\tau_{кр}$ , фигурирующей в теории генерации гигантского параметрического импульса (ср. с (6.22)). Дальнейший рост возмущений сопровождается распадом стационарных волн на серию импульсов.

## § 7.2. Солитоны при вырожденном взаимодействии

Рассмотрим теперь возможность подавления дисперсии первого порядка за счет реактивного взаимодействия модулированных волн. Квазистационарным волнам, амплитудные профили которых сохраняются, отвечают специальные решения уравнений (7.1):

$$A_j = B_j(\eta_c), \quad \eta_c = t - z/u_c, \quad (7.8)$$

где  $u_c$  — скорость распространения, не совпадающая с групповыми скоростями пакетов в линейной среде.

Для вырожденного взаимодействия ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ ,  $\gamma_j = \gamma_1$ ,  $B_1 = B_2$ ) уравнения (7.1) после подстановки в них (7.8) переходят в уравнения для солитонов огибающих:

$$\nu_{1c} \frac{\partial B_1}{\partial \eta_c} = -\gamma_1 B_1 B_3, \quad \nu_{3c} \frac{\partial B_3}{\partial \eta_c} = \gamma_1 B_1^2. \quad (7.9)$$

Из (7.9) следует, что солитон существует только на частоте  $\omega_1$ , а на удвоенной частоте  $\omega_3 = 2\omega_1$  волна не является уединенной.

Односолитонное решение уравнений (7.9) при накачке на частоте  $\omega_3$  имеет вид [7]

$$B_1 = E_{1c} \operatorname{sech}(\eta_c/\tau_c), \quad B_3 = E_{3c} \operatorname{th}(\eta_c/\tau_c). \quad (7.10)$$

Связь между амплитудами солитонов, их длительностью и групповой скоростью дается соотношениями

$$\nu_{1c}\nu_{3c} = \gamma_1^2 E_{1c}^2 \tau_c^2, \quad \nu_{1c} = \gamma_1 E_{3c} \tau_c. \quad (7.11)$$

Проведем обсуждение полученных результатов. Как видно из (7.10), на частоте  $\omega_1$  распространяется уединенный импульс — солитон, амплитуда

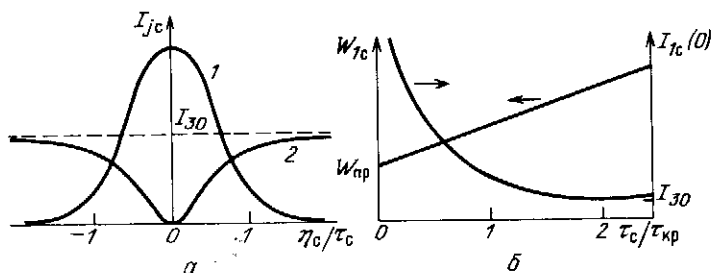


Рис. 7.2. а — Профили интенсивности солитонов на частотах  $\omega_1 = \omega_2$  (1) и  $\omega_3 = 2\omega_1$  (2); б — зависимости энергии  $W_{1c}$  и интенсивности  $I_{1c}(0)$  "светлого" солитона от его длительности  $\tau_c$

которого плавно спадает до нуля при отходе от его вершины,  $B_1 \rightarrow 0$  при  $|\eta_c| \rightarrow \infty$ . Профиль интенсивности солитона представлен на рис. 7.2а (кривая 1). На удвоенной частоте амплитуда волн  $B_3$  меняется в области взаимодействия с солитоном  $B_1$  с уровня  $-E_{3c}$  на  $E_{3c}$ ; перемена знака амплитуды означает изменение фазы волн накачки на  $\pi$ .

Решение (7.10) для второй гармоники в виде гиперболического тангенса можно интерпретировать как образование стационарной "ступеньки" или "доменной стенки" в распределении амплитуды. Однако если регистрировать не комплексную амплитуду, а интенсивность волны, то этому решению можно придать другой, более глубокий физический смысл. Действительно, интенсивность высокочастотной волны можно представить в виде

$$B_3^2 = E_{3c}^2 - E_{3c}^2 \operatorname{sech}^2(\eta_c/\tau_c). \quad (7.12)$$

Оказывается, что на фоне волны постоянной интенсивности  $E_{3c}^2$  в области взаимодействия образуется "темный" солитон (он представлен на рис. 7.2а кривой 2). Он имеет точно такую же форму, как и солитон на частоте  $\omega_1$ , только опрокинутую вниз. Таким образом, в среде с квадратичной нелинейностью и с дисперсией первого порядка образуется связанная пара "светлого" и "темного" солитонов на основной и удвоенной частотах соответственно.

Скорость солитонов определяется соотношениями (7.11). Видно, что она или больше, или меньше групповых скоростей  $u_1$ ,  $u_3$ , так как обязательно должно выполняться условие  $\nu_{1c}\nu_{3c} < 0$ . Исключая из (7.11) групповую

скорость солитонов  $u_c$ , можно найти связь между амплитудами:

$$E_{1c}^2 = E_{3c}^2 + \nu_{31} E_{3c} / \gamma_1 \tau_c. \quad (7.13)$$

Амплитуда субгармоники  $E_{1c}$  превышает амплитуду волны накачки  $E_{3c}$  при условии  $\nu_{31} E_{3c} > 0$ . При положительной амплитуде  $E_{3c}$  такой солитон, названный в гл. 6 гигантским параметрическим импульсом, имеет большую скорость, чем волна накачки. Это обеспечивает, как видно из (7.1) и (7.9), параметрическое усиление фронта солитона. Хвост солитона формируется благодаря механизму нелинейных потерь при генерации второй гармоники. С учетом сказанного огибающую солитона  $B_1$  можно записать вместо (7.10) по-другому:

$$B_1 = E_3 (1 + \tau_{кр} / \tau_c)^{1/2} \operatorname{sech}(\eta_c / \tau_c), \quad (7.14)$$

где  $\tau_{кр} = \nu_{31} / \dot{\gamma}_1 E_{3c}$  — критическая длительность солитона (см. также (6.22)). Выигрыш в амплитуде субгармоники ( $E_{1c} \gg E_{3c}$ ) имеют солитоны, длительность которых меньше критической,  $\tau_c \ll \tau_{кр}$ . Энергия солитона (7.14) равна

$$W_{1c} = 2E_{3c}^2 (\tau_c + \tau_{кр}). \quad (7.15)$$

Для сверхкоротких солитонов ( $\tau_c \ll \tau_{кр}$ ), как видно из (7.15), энергия достигает насыщения:  $W_{1н} = 2E_{3c}^2 \tau_{кр}$ . Графики зависимостей амплитуды и энергии солитона от его длительности представлены на рис. 7.2б. Скорость солитона малой длительности сравнивается с групповой скоростью движения пакета в линейной среде:  $u_c \approx u_1$ .

Солитон (7.10) может сформироваться при параметрическом усилении субгармоники в поле волны накачки постоянной амплитуды  $E_3(t) = E_{30}$ . Для описания нелинейной стадии параметрического усиления, когда, собственно, и формируется солитон, можно воспользоваться формулой (6.22) для амплитуды субгармоники:

$$A_1 = E_1(\eta_1) [\exp(-\Gamma_0 z) + (\tau_{кр} E_{30}^2)^{-1} \operatorname{sh}(\Gamma_0 z) \times \\ \times \int_0^\infty d\xi E_1^2(\eta_1 - \xi) \exp(-2\xi/\tau_{кр})]^{-1}. \quad (7.16)$$

Пусть на входе в нелинейную среду сигнал имеет экспоненциальный фронт:

$$E_1 = E_{10} \exp(t/\tau_1), \quad t < 0. \quad (7.17)$$

Подставим (7.17) в (7.16) и рассмотрим поведение импульса в области большого усиления ( $\Gamma_0 z \gg 1$ ), полагая  $\operatorname{sh}(\Gamma_0 z) \approx \exp(\Gamma_0 z)/2$ . Проведя интегрирование в (7.16), получаем следующее выражение для амплитуды субгармоники:

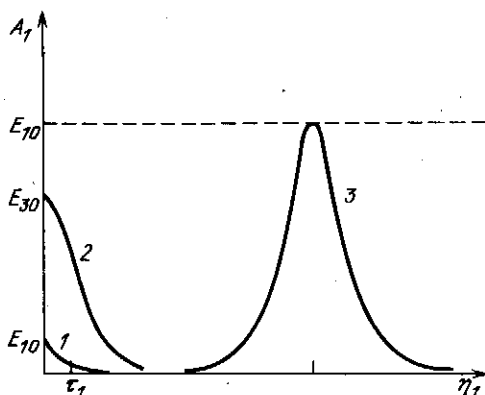
$$A_1 = E_{30} (1 + \tau_{кр} / \tau_1)^{1/2} \operatorname{sech}^{-1}[\eta_1 / \tau_1 + \Gamma_0 (z - l_c)], \quad (7.18)$$

где

$$l_c = (1/2) \Gamma_0^{-1} \ln [4(1 + \tau_{кр} / \tau_1) E_{30}^2 / E_{10}^2]$$

— длина формирования солитона.

Рис. 7.3. Этапы формирования солитона (3) из начального экспоненциального импульса субгармоники (1); на промежуточной стадии (2) амплитуда субгармоники достигает уровня волны накачки



С помощью (7.18) можно проследить основные этапы взаимодействия импульса субгармоники с непрерывным излучением накачки. На рис. 7.3 показаны амплитудные профили волн на разных расстояниях  $z$ . В области  $z < z_1 = l_{\text{нл}} \ln(E_{30}/E_{10})$  идет линейный режим усиления, в конце которого амплитуда субгармоники достигает уровня накачки:  $A_1(0) = E_{30}$ . Если крутизна фронта импульса мала ( $\tau_1 > \tau_{\text{кр}}$ ), то  $\dot{z}_1 \approx l_c$  и дальнейший рост максимума амплитуды, как видно из (7.18), прекращается; на нелинейной стадии заканчивается формирование хвоста импульса. Импульс субгармоники с крутым фронтом ( $\tau_1 \leq \tau_{\text{кр}}$ ) продолжает экспоненциально усиливаться и в области  $z > z_1$  вплоть до расстояний  $z \approx l_c$ . На этом отрезке пути в нелинейной среде пиковое значение амплитуды возрастает от  $E_{30}$  до  $E_{30}(1 + \tau_{\text{кр}}/\tau_1)^{1/2}$  за счет быстрого отбора энергии при набегании фронта субгармоники на "свежую порцию" волны накачки.

### § 7.3. Свойства трехволновых солитонов

Солитоны огибающих волновых пакетов формируются и в общем случае трехчастотных взаимодействий, когда существует расстройка между всеми групповыми скоростями [8]. Полагая, как и ранее, амплитудные профили стационарными (7.8), не меняющимися с расстоянием, находим из (7.1) уравнения для солитонов ( $j = 1, 2$ ):

$$v_{3c} \frac{\partial B_3}{\partial \eta_c} = \gamma_3 B_1 B_2, \quad v_{jc} \frac{\partial B_j}{\partial \eta_c} = -\gamma_j B_1 B_2 \frac{B_3}{B_j}. \quad (7.19)$$

Отметим прежде всего, что солитоны (уединенные волны с амплитудой, равной нулю при  $|\eta_c| = \infty$ ) существуют только на двух частотах, а на третьей частоте распространяется "темный" солитон. Вершине солитонов ( $\partial B_j / \partial \eta_c = 0$ ) соответствует нулевая амплитуда волны параметрической накачки, или, можно сказать, вершина "темного" солитона.

Односолитонное решение уравнений (7.19) при накачке волной частоты  $\omega_3$  имеет вид (рис. 7.4)

$$B_j = E_{j0} \operatorname{sech}(\eta_c/\tau_c), \quad B_3 = E_{30} \operatorname{th}(\eta_c/\tau_c). \quad (7.20)$$



Подставляя (7.20) в (7.19), получаем три соотношения, связывающие параметры солитонов:

$$\nu_{jc} E_{j0}^2 = \gamma_j \tau_c E_{10} E_{20} E_{30} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7.21)$$

В зависимости от знака правой части в (7.21) скорость солитонов может быть или больше скоростей волновых пакетов в линейной среде ( $u_c > u_j$ ), или меньше ( $u_c < u_j$ ).

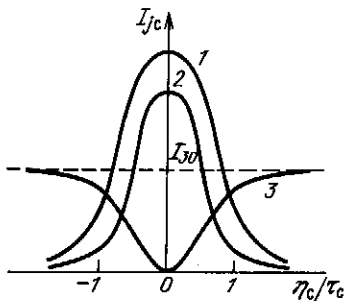


Рис. 7.4. Профили интенсивностей солитонов в среде с квадратичной нелинейностью и относительной дисперсией первого порядка:

групповые скорости всех волн в линейной среде различны; номера кривых здесь и на следующих двух рисунках соответствуют значениям индекса  $j = 1, 2, 3$

Если считать уровень волны накачки  $E_{30}$  заданным, а длительность солитона варьируемым параметром, то из (7.21) можно получить следующие выражения:

$$u_c^{-1} = u_1^{-1} - \frac{\nu_{12}}{2} \pm \left( \gamma_1 \gamma_2 \tau_c^2 E_{30}^2 + \frac{\nu_{12}^2}{4} \right)^{1/2},$$

$$E_{j0}^2 = \frac{\gamma_j}{\gamma_3} E_{30}^2 \left\{ 1 + \nu_{31} \left[ \frac{\nu_{12}}{2} \mp \left( \gamma_1 \gamma_2 \tau_c^2 E_{30}^2 + \frac{\nu_{12}^2}{4} \right)^{1/2} \right]^{-1} \right\}. \quad (7.22)$$

Для многих практических задач наибольший интерес представляют солитоны малой длительности  $\tau_c \rightarrow 0$  с амплитудой, превышающей амплитуду волны накачки ( $E_{10} \gg E_{30}$ ). В § 7.2, 7.3 были исследованы свойства такого солитона — гигантского параметрического импульса — при вырожденном взаимодействии основной волны с субгармоникой. При грехчастотном взаимодействии гигантский импульс формируется только на одной из частот, сигнальной или холостой. Чтобы лучше представить картину нелинейного взаимодействия, рассмотрим зависимость интенсивностей солитонов в их вершинах, т.е.  $E_{j0}^2$ , от скорости  $u_c$ . Из (7.21) легко найти следующее выражение:

$$E_{j0}^2 = (\gamma_j \nu_{3c} / \gamma_3 \nu_{jc}) E_{30}^2 \quad (j = 1, 2). \quad (7.23)$$

Характер зависимости интенсивностей от скорости  $u_c$  связан с видом относительной дисперсии волн. Графики функций (7.23) изображены на рис. 7.5, для двух случаев, различающихся знаком произведения групповых расстроек  $\nu_{13} \nu_{23}$ . Если  $\nu_{13} \nu_{23} > 0$ , то волна накачки имеет или наибольшую,  $u_3 > u_j$ , или наименьшую,  $u_3 < u_j$ , групповую скорость. На рис. 7.5а представлен последний вариант. Совместный анализ (7.22), (7.23) показывает, что при сокращении длительности солитонов ( $\tau_c \rightarrow 0$ ) его скорость приближается к скорости импульса в линейной среде,

$u_c \rightarrow u_1$ , а пиковое значение интенсивности увеличивается обратно пропорционально квадрату длительности, в то время как амплитуда солитона на холостой частоте ограничена по величине:

$$E_{10}^2 \approx \nu_{13}\nu_{12}/\gamma_2\gamma_3\tau_c^2, \quad E_{20}^2 = E_{30}^2\gamma_2\nu_{13}/\gamma_3\nu_{12}. \quad (7.24)$$

В среде с относительной дисперсией, обеспечивающей волне накачки промежуточную скорость, например  $u_1 < u_3 < u_2$ , произведение расстройк групповых скоростей имеет другой знак:  $\nu_{13}\nu_{23} < 0$ . Такая дисперсия позволяла, в частности, реализовать модовый режим усиления захваченных волн (гл. 4). Она благоприятна и для нелинейного реактивного взаимодействия, так как гигантский импульс в отличие от первого случая  $\nu_{13}\nu_{23} > 0$  может сформироваться как на сигнальной, так и на холостой частотах (рис. 7.5б). Поведение интенсивностей  $E_{j0}^2$  при сокращении длительности солитонов ( $\tau_c \rightarrow 0$ ) на ветви  $u_c \rightarrow u_1$  описывается прежними формулами (7.24), а для гигантского солитона на холостой частоте ( $u_c \rightarrow u_2$ ) необходимо в (7.24) взаимно поменять местами индексы 1 и 2.

Если два связанных солитона попадают в область группового синхронизма ( $u_1 = u_2$ ), то вместо (7.24) для гигантского импульса имеем

$$\gamma_2 E_{10}^2 = \gamma_1 E_{20}^2 \approx E_{30}\nu_{31}(\gamma_1\gamma_2)^{1/2}/\gamma_3\tau_c. \quad (7.25)$$

Из (7.20), (7.24), (7.25) видно, что энергия солитона, пропорциональная  $2E_{j0}^2\tau_c$ , при наличии групповой расстройки  $\nu_{12}$  растет по мере сокращения длительности как  $\tau_c^{-1}$ , а при групповом синхронизме ( $\nu_{12} = 0$ ) имеет

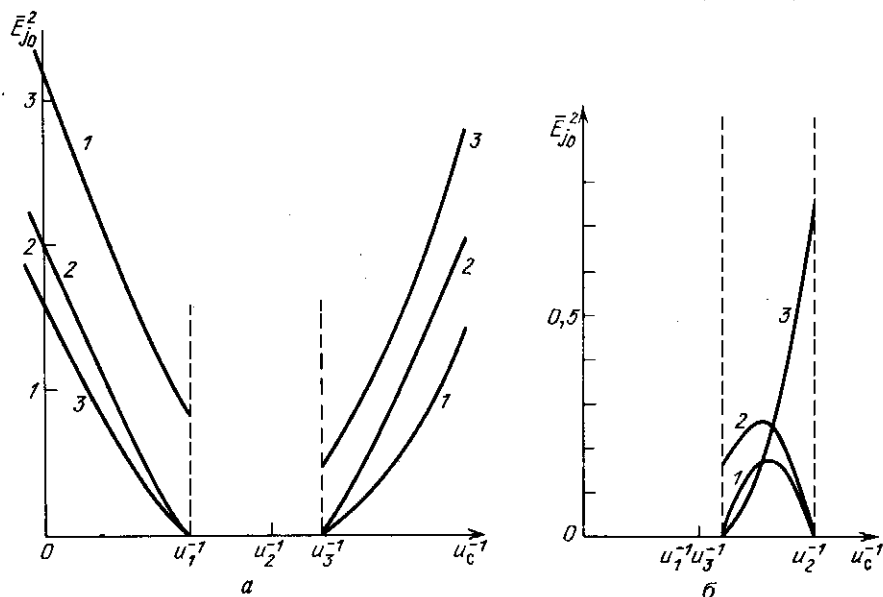


Рис. 7.5. Связь нормированных амплитуд трехчастотных солитонов с их скоростью  $u_c$  в среде:

$a - \nu_{13}\nu_{23} > 0$  (темный солитон на частоте  $\omega_3$ ),  $b - \nu_{13}\nu_{23} < 0$  (темный солитон на частоте  $\omega_1$ )

конечную величину. Насыщение энергии солитона было отмечено также для вырожденного взаимодействия волны накачки с импульсом субгармоники (см. (7.15) и рис. 7.2).

Снятие вырождения, т.е. появление групповых расстройек между всеми волнами, приводит, как мы видели, к новым зависимостям параметров солитонов от свойств среды и волны накачки. Более того, при реактивном трехчастотном взаимодействии теряется разница между волнами: любая из них может стать волной накачки. Действительно, стационарными решениями уравнений (7.19) являются следующие амплитудные профили ( $j = 2, 3$ ):

$$B_1 = E_{10} \operatorname{th}(\eta_c/\tau_c), \quad B_j = E_{j0} \operatorname{sech}(\eta_c/\tau_c). \quad (7.26)$$

Видно, что на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  формируются связанные солитоны, а на частоте  $\omega_1$  — "темный" солитон. Связь между параметрами солитонов дается соотношениями (ср. с. (7.21))

$$\nu_{jc} E_{j0}^2 = (-1)^j \gamma_j \tau_c E_{10} E_{20} E_{30} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7.27)$$

из которых следует, что формирование солитонов с низкочастотной волной накачки возможно только при условии  $\nu_{1c}\nu_{2c} < 0$  и  $\nu_{1c}\nu_{3c} > 0$ . Это означает, что скорость стационарных волн заключена между групповыми скоростями, которые имеют волны более низких частот:  $u_1 < u_c < u_2$  или  $u_1 > u_c > u_2$ . В то же время групповая скорость высокочастотной волны должна быть ближе по величине к скорости волны накачки, чем скорость волны на холостой частоте:  $u_1, u_3 < u_2$  или  $u_1, u_3 > u_2$ . Солитоны первого типа (7.20), наоборот, не могут распространяться со скоростью, промежуточной между  $u_1$  и  $u_2$  (рис. 7.5). Дальнейший анализ свойств солитонов второго типа (7.26) можно провести с помощью (7.27) аналогично предыдущему рассмотрению.

#### § 7.4. Параметрически связанные солитоны при учете кубической нелинейности

В средах с относительной дисперсией первого порядка и квадратичной нелинейностью уединенные волновые пакеты образуются только на двух частотах, а на третьей образуется темный солитон (§ 7.2, 7.3). Однако если учесть помимо квадратичной и кубическую нелинейность, ответственную за самовоздействие волн [9], то уединенные волны (солитоны) формируются на всех трех частотах, причем такие солитоны обязательно имеют фазовую модуляцию.

Таким образом, дополним укороченные уравнения (7.1) членами, ответственными за самовоздействие волн:

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial A_j}{\partial t} = -i\gamma_j \frac{\partial U}{\partial A_j^*} - iA_j \sum_{p=1}^3 \gamma_{jp} |A_p|^2, \quad (7.28)$$

где  $\gamma_{jp}$  — коэффициенты, пропорциональные кубической восприимчивости  $\chi_3$ . Будем искать квазистационарные решения (7.28) в виде ФМ импульсов:

$$A_j = B_j(\eta_c) \exp [i\varphi_j(\eta_c)]. \quad (7.29)$$

Односолитонное решение (7.28) в виде (7.29) показывает, что огибающие всех трех волновых пакетов имеют одинаковую лоренцеву форму:

$$B_j = E_{j0} (1 + \eta_c^2 / \tau_c^2)^{-1/2}. \quad (7.30)$$

Фазы волн меняются по простому закону

$$\varphi_j = \beta_j \operatorname{arctg}(\eta_c / \tau_c), \quad (7.31)$$

где константы  $\beta_j$  связаны соотношением  $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2 - 1$ .

Пиковые значения амплитуд связанных солитонов равны следующим величинам:

$$E_{10}^2 = -\frac{\nu_{2c}\nu_{3c}}{\gamma_2\gamma_3\tau_c^2}, \quad E_{20}^2 = -\frac{\nu_{1c}\nu_{3c}}{\gamma_1\gamma_3\tau_c^2}, \quad E_{30}^2 = \frac{\nu_{1c}\nu_{2c}}{\gamma_1\gamma_2\tau_c^2}. \quad (7.32)$$

Простой анализ правых частей в (7.32) приводит к важному выводу, что скорость солитонов, испытывающих самовоздействие, должна быть такой, чтобы  $\nu_{1c}\nu_{2c} > 0$ ,  $\nu_{1c}\nu_{3c} < 0$ ,  $\nu_{2c}\nu_{3c} < 0$ . Эти условия выполняются, если скорость солитонов заключена в пределах  $u_1, u_2 < u_c < u_3$  (аномальная дисперсия волн) или  $u_3 < u_c < u_1, u_2$  (нормальная дисперсия). Из (7.28)–(7.31) нетрудно получить выражения для параметров фазовой модуляции  $\beta_j$ .

Трехчастотные солитоны с учетом кубической нелинейности рассматривались в ряде работ при резонансном возбуждении среды на одной из частот. В этих случаях речь идет о ВКР-солитонах [10] или поляритон-солитонах [11].

## АНОМАЛЬНАЯ ДИФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИОННОЕ РАСПЛЫВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВОЛН

Настоящей главой открывается новая часть книги. До сих пор мы обсуждали трехволновые взаимодействия в приближении геометрической оптики с учетом расстройки векторов групповых скоростей по модулю и по направлению. Однако по мере сокращения длительности импульсов и сужения волновых пучков начинают проявляться эффекты следующего порядка — дисперсионное расплывание пакетов и дифракция волн. В гл. 2, 3 показано, что в сильном однородном поле волны накачки дисперсионные эффекты первого порядка существенно подавляются: групповые скорости связанных волн усредняются, а темпы расплывания пакетов меньше скорости разбегания импульсов в линейной среде. Схожие явления проявляются и при параметрическом усилении волновых пучков и пакетов, испытывающих дифракцию и дисперсионное расплывание.

В этой главе рассматриваются качественно новые черты дифракции параметрически связанных волн. Аномальные свойства дифракции в параметрических усилителях и преобразователях частоты заключаются в том, что в процессе взаимодействия дифрагирующих пучков волна с большей частотой приобретает сходящийся фронт. На выходе из нелинейной среды такой пучок фокусируется. Усиление субгармоники сопровождается не дифракцией, а параметрической диффузией более высокого порядка, волновой фронт в центральной части пучка на больших расстояниях остается практически плоским.

Физическая суть явления аномальной дифракции состоит в следующем. Дифракционно-расходящаяся волна частоты  $\omega_1$  возбуждает при взаимодействии с волной накачки  $\omega_3$  волну поляризуемости на комбинационной частоте  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ , причем фазовый фронт волны поляризуемости имеет кривизну противоположного знака, т.е. является сходящимся. Очевидно, волна поляризуемости, возбуждающая электромагнитную волну частоты  $\omega_2$ , стремится сфокусировать волну низкой частоты  $\omega_1$ . Эффект формирования сходящегося фронта более существен для волны с большим волновым числом (такая волна испытывает обычную дифракцию в меньшей степени). Важность этих явлений заключается в том, что при сильном энергообмене, когда интенсивности всех трех волн становятся одного порядка, аномальная дифракция приводит к одновременной взаимофокусировке трех пучков (гл. 9).

Дисперсионные эффекты второго порядка при взаимодействии волновых пакетов также приобретают новые черты. Отличие от аномальной дифракции заключается в переходе от двумерного сечения пучка к одномерной модуляции импульса во времени и в более разнообразных соотношениях между коэффициентами дисперсионного распыления по сравнению с фиксированными связями коэффициентов поперечной диффузии пучков.

### § 8.1. Параболическое уравнение для пучков и импульсов в параметрически-активной среде

Рассмотрим параметрическое усиление модулированных волн с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  в поле однородной волны накачки  $A_3 = E_{30}$  при групповом синхронизме (векторы групповых скоростей сигнальной и холостой волн имеют одинаковое направление и равные модули). Считая, что пространственные (временные) масштабы модуляции волн велики по сравнению с длиной волны (периодом колебаний), воспользуемся квазиоптическим описанием распространения и взаимодействия волновых пучков и пакетов (§ 1.5):

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + iD_j \Delta_{\perp} A_j = -i\gamma_j E_{30} \frac{A_1^* A_2^*}{A_j^*} \quad (j = 1, 2). \quad (8.1)$$

При анализе параметрического усиления дифрагирующих пучков оператор Лапласа в (8.1) задается в поперечных координатах:  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  (для осесимметричного случая  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r$ ), коэффициент поперечной диффузии  $D_j = 1/2k_j$ . В силу условия синхронизма ( $k_3 = k_1 + k_2$ ) коэффициенты диффузии связаны между собой соотношением  $D_3^{-1} = D_1^{-1} + D_2^{-1}$ .

Уравнения (8.1) можно также использовать для описания усиления волновых пакетов во втором приближении теории дисперсии. В этом случае  $D_j = -(1/2) \partial^2 k_j / \partial \omega_j^2$  — коэффициенты дисперсионного распыления  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial \eta^2$ ,  $\eta = t - z/u$  (групповые скорости всех волн приняты одинаковыми). В отличие от дифракции пучков коэффициенты  $D_j$  для волновых пакетов не связаны жестко, они могут иметь разные знаки и абсолютные величины. Поэтому далее мы сначала обсудим аномальное распыление волновых пакетов, а затем дадим обзор аналогичных эффектов для пучков [1].

Из (8.1) легко получить законы дисперсии сигнальной и холостой волн. С этой целью выразим амплитуду  $A_1$  через интеграл Фурье (ср. с (2.14)):

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_1 S_1(\omega_1 + \Omega_1) e^{i\Omega_1 \eta - iq_{12} z \pm \Gamma z}. \quad (8.2)$$

Аналогичное выражение имеет амплитуда холостой волны  $A_2$ . Из условия фазового синхронизма для взаимодействия спектральных компонент следует, что частоты компонент  $\Omega_j$  и поправки к волновым числам  $q_{j\rho}$  связаны простыми соотношениями  $\Omega_1 + \Omega_2 = 0$  и  $q_{12} + q_{21} = 0$ . Подставляя (8.2) в исходные уравнения (8.1), находим дисперсионное уравнение,

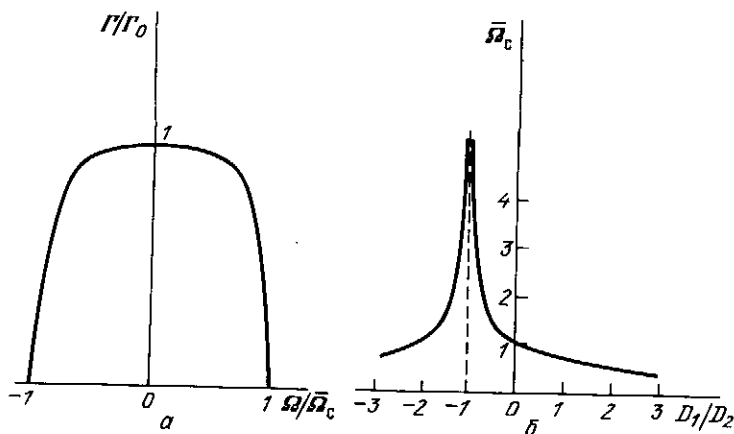


Рис. 8.1. Контур параметрического усиления спектральных компонент ( $\Omega = \Omega_1 = -\Omega_2$ ) (а) и зависимость частотной ширины полосы усиления  $\Omega_c$  от относительной дисперсии  $D_1/D_2$  сигнальной и холостой волн (б)

решение которого позволяет определить поправки к волновым числам сигнальной и холостой волн и инкремент  $\Gamma$ .

Контур параметрического усиления при учете дисперсии второго порядка (дисперсии групповых скоростей) имеет более прямоугольную форму по сравнению со случаем относительной дисперсии первого порядка (ср. рис. 8.1 с рис. 2.1):

$$\Gamma = \Gamma_0(1 - \Omega_1^4/\Omega_c^4)^{1/2}, \quad \Omega_c = (2\Gamma_0/|D_1 + D_2|)^{1/2}, \quad (8.3)$$

где  $\Omega_c$  — частотная ширина полосы параметрического усиления, на границах которой  $\Gamma = 0$ . Если коэффициенты дисперсии сигнальной и холостой волн равны друг другу по абсолютной величине, но противоположны по знаку,  $D_1 = -D_2$ , то, как видно из (8.3), ширина синхронизма неограниченно возрастает:  $\Omega_c \rightarrow \infty$ . Это случай касательного (некритического) синхронизма второго порядка, при котором коэффициент усиления постоянен для всех спектральных компонент,  $\Gamma = \Gamma_0$  (конечно, в рамках выбранной модели дисперсии).

В полосе усиления ( $|\Omega_1| \leq \Omega_c$ ) сигнальная и холостая волны имеют одинаковую дисперсию второго порядка:

$$q_{12} = -(D_1 - D_2)\Omega_1^2/2. \quad (8.4)$$

Вне полосы усиления ( $|\Omega_1| > \Omega_c$ ) параметрическая связь ослабевает, вследствие чего инкремент становится равным нулю,  $\Gamma = 0$ , а для волновых чисел возникают две ветви дисперсии:

$$q_{12} = -(D_1 - D_2)\Omega_1^2/2 + \Gamma_0(\Omega_1^4/\Omega_c^4 - 1)^{1/2}. \quad (8.5)$$

Анализ (8.5) при больших частотных расстройках ( $|\Omega_1| \gg \Omega_c$ ) показывает, что ветви параметрической дисперсии переходят постепенно в ветви линейной дисперсии сигнальной и холостой волн:  $q_j = -D_j\Omega_j^2$ . На рис. 8.2 представлены графики параметрической дисперсии сигнальной волны при

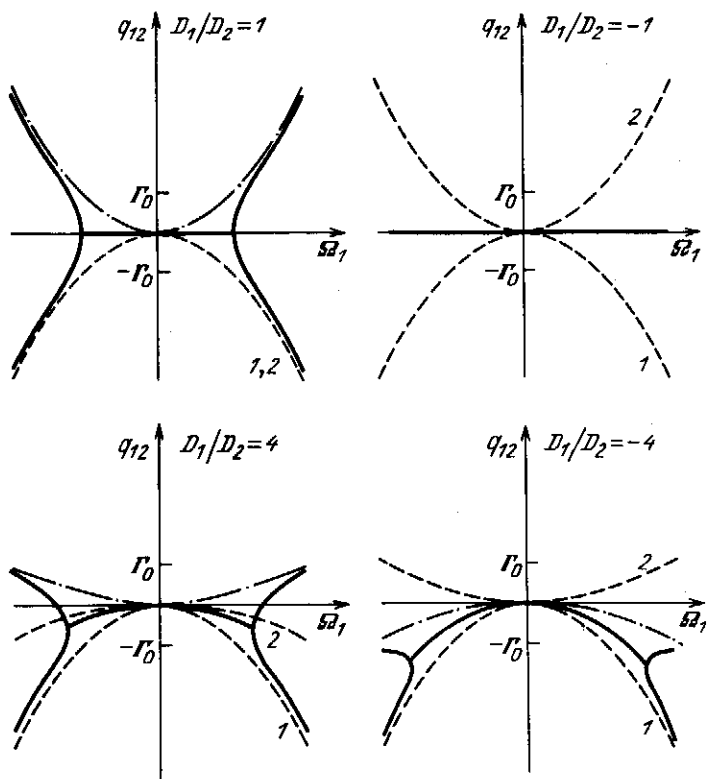


Рис. 8.2. Нелинейная дисперсия (сплошные линии) сигнальной волны (1), параметрически связанной с холостой (2), при различных значениях отношения  $D_1/D_2$ :

штриховые линии – дисперсия в линейной среде, штрихпунктирные – обращенная линейная дисперсия холостой волны

различных соотношениях между коэффициентами линейной дисперсии  $D_j$ . Рассмотрим свойства параметрической дисперсии более подробно.

**Некритический синхронизм второго порядка.** Так как групповые скорости сигнальной и холостой волн согласованы в рассматриваемой ситуации,  $u_1 = u_2$ , фазовый синхронизм не критичен в первом приближении к перестройке частоты сигнала:  $q_j = \Omega_j/u_j$ . Однако во втором приближении теории дисперсии надо учитывать характер изменения волновых чисел в зависимости от квадрата девиации частоты. Тогда нарушение фазового синхронизма характеризуется величиной  $\Delta k(\Omega_1) = (D_1 + D_2)\Omega_1^2$ , которая и определяет контур усиления  $\Gamma(\Omega_1)$  (8.3). Очевидно, синхронизм становится не критичен к уходу частоты  $\Omega_1$ , если линейная дисперсия второго порядка усиливаемых волн имеет противоположные знаки,  $D_1 = -D_2$ . В этом случае вместо (8.3) имеем

$$q_1 = D_1 \Omega_1^2, \quad \Gamma = \Gamma_0. \quad (8.6)$$



Иными словами, при некритическом синхронизме дисперсия волн не меняется из-за параметрического взаимодействия и коэффициент усиления одинаков для всех спектральных компонент.

**Критический синхронизм второго порядка.** В противоположном случае, когда волны имеют одинаковую дисперсию ( $D_1 = D_2$ ), в полосе усиления исчезает дисперсия групповой скорости:

$$q_1 = q_2 = 0, \quad \Gamma = (\Gamma_0^2 - D_1^2 \Omega_1^4)^{1/2}. \quad (8.7)$$

Только вне полосы параметрического усиления,  $|\Omega_1| > \Gamma_0 |D_1|^{-1}$ , появляются две ветви дисперсии (рис. 8.2). Контур полосы усиления (8.3) сохраняет свою форму (рис. 8.1а). При дисперсии (8.7) распыление носит диффузионный характер без появления фазовой модуляции у волновых пакетов. Промежуточный случай критического синхронизма  $D_1 = \pm 4D_2$  также представлен на рис. 8.2. Видно, что формирование параметрической дисперсии связанных волн определяется той волной, которая имеет большую дисперсию в линейной среде.

Таким образом, параметрическое усиление оказывает существенное влияние на дисперсию волн при критическом синхронизме. А так как с дисперсией связано распыление волновых пакетов, то следует ожидать изменения закономерностей дисперсионного распыления пакетов, имеющих параметрическую связь в поле волны накачки.

## § 8.2. Аномальная дифракция волновых пучков

Далее мы рассмотрим дифракцию связанных волн на примере гауссовых пучков, задавая граничные условия для (8.1) в виде  $A_j(z=0) = E_{j0} \exp(-r^2/a_j^2)$ . Используя выражения, аналогичные (8.2)–(8.5), можно найти, что поведение пучка описывается следующим образом:

$$A_1 = (a_1^2/4) \int_0^\infty dk_{1z} (E_{10} G_{11} + E_{20}^* G_{12}) J_0(k_{1z} r) \times \\ \times \exp\{-(k_{1z}^2/4)[a_1^2 + i2z(D_2 - D_1)]\}, \quad (8.8)$$

где  $k_{1z} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ ,  $J_0$  – функция Бесселя. Меняя местами индексы 1 и 2, можно получить выражение для амплитуды холостой волны  $A_2$ . Функции усиления  $G$ , входящие в (8.8), имеют вид

$$G_{11} = \text{sh}(\Gamma z) + i(D_1 + D_2) k_{1z}^2 \text{sh}(\Gamma z)/2\Gamma, \quad (8.9)$$

$$G_{12} = -i(\gamma_1/\gamma_2)^{1/2} \text{sh}(\Gamma z).$$

В случае линейной среды, когда коэффициент усиления  $\Gamma_0 = 0$ , выражение (8.8) дает известную формулу [2], описывающую изменение амплитуды гауссова пучка при дифракции:

$$A_j = \frac{E_j}{1 - iz/R_{dj}} \exp\left[-\frac{r^2}{a_j^2(1 - iz/R_{dj})}\right], \quad (8.10)$$

в которой длина дифракционного распыления  $R_{dj}$  характеризует, в частности, изменение поперечного радиуса:

$$a_j^2 = a_j^2(1 + z^2/R_{dj}^2), \quad R_{dj} = a_j^2/4D_j = k_j a_j^2/2. \quad (8.11)$$

Как следует из (8.10), вследствие дифракции пучок приобретает в дальнем поле расходящийся сферический фронт и его амплитуда убывает с расстоянием как  $R_{\text{д1}}/z$ , причем из двух пучков быстрее расплывается волна с меньшей частотой.

В параметрически активной среде дифракция усиливаемых волн начинается протекать совершенно иначе, если волновая расстройка в пределах угловой расходимости пучка относительно мала ( $|k_{\perp}| \ll \alpha_1 k_1$ ), т.е. если  $\Gamma_0 a_1^2 \gg |D_1 + D_2|$ . Другими словами, существует критическая интенсивность волны накачки

$$E_{\text{кр},1}^2 = \frac{|D_1 + D_2|^2}{\gamma_1 \gamma_2 a_1^4} = \frac{k_3^2}{\gamma_1 \gamma_2 k_1^2 k_2^2 a_1^4} \quad (8.12)$$

При превышении порога ( $E_{30}^2 > E_{\text{кр},1}^2$ ) возникают новые дифракционные явления.

**Аномальная дифракция.** Рассмотрим сначала случай, когда ширина контура усиления  $\Omega_c$  (8.3) настолько велика, что усиление всех угловых компонент можно считать однородным:  $\Gamma \approx \Gamma_0$ . Нетрудно показать, что это можно сделать, если интенсивность волны накачки превышает вторую критическую величину

$$E_{\text{кр},2}^2 = \left| \frac{D_1 + D_2}{D_1 - D_2} \right|^2 E_{\text{кр},1}^2 = \frac{k_3^2}{(k_2 - k_1)^2} E_{\text{кр},1}^2 \quad (8.13)$$

Полагая в (8.8), (8.9) инкремент постоянным ( $\Gamma = \Gamma_0$ ) и считая для определенности  $\omega_2 > \omega_1$ , находим амплитуды сигнальной и холостой волн

$$A_1 = \frac{E_{10} G_{11}(0, z) + E_{20}^* G_{12}(0, z)}{1 - iz/R_{\text{ан}}} \exp \left[ -\frac{r^2}{a_1^2(1 - iz/R_{\text{ан}})} \right], \quad (8.14)$$

$$A_2 = \frac{E_{20} G_{22}(0, z) + E_{10}^* G_{21}(0, z)}{1 + iz/R_{\text{ан}}} \exp \left[ -\frac{r^2}{a_1^2(1 + iz/R_{\text{ан}})} \right],$$

где

$$R_{\text{ан}} = a_1^2/2 |D_1 - D_2| = k_1 k_2 a_1^2 / (k_2 - k_1) \quad (8.15)$$

— общая для обоих пучков длина аномальной дифракции.

Сравнение формул (8.14), (8.15) с (8.10), (8.11) показывает, что при параметрическом усилении дифракция волн приобретает аномальный характер. Во-первых, хотя частоты пучков различны, при сильной параметрической связи темпы их дифракционного распыливания сравниваются и характеризуются одной длиной (8.15). Во-вторых, при аномальной дифракции у волны с большей частотой формируется сходящийся волновой фронт. В рассматриваемом случае,  $k_2 > k_1$ , обратную кривизну имеет пучок  $A_2$  (рис. 8.3). Этим обстоятельством и вызван термин "аномальная дифракция".

Разная кривизна волновых фронтов сигнальной и холостой волн проявляется после выхода пучков из слоя нелинейной среды толщиной  $l$ . Первый пучок, имеющий расходящийся фронт, сильно уширяется — действие среды можно сравнить с отрицательной линзой, фокусное расстояние которой равно  $R_{\text{ан}}$ . Второй пучок приобретает сходящийся волновой фронт и после

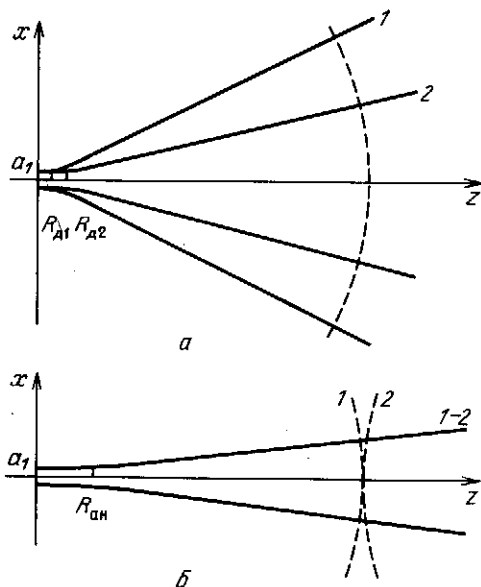


Рис. 8.3. Переход свободной дифракции волновых пучков на сигнальной и холостой частотах ( $\omega_2 = 2\omega_1$ ) (а) в аномальную дифракцию параметрически связанных волн в интенсивном поле накачки с амплитудой  $E_{s,0} > E_{кр,2}$  (б): штриховыми линиями обозначены волновые фронты

выхода из среды фокусируется; в перетяжке, образующейся на расстоянии  $z_{\pi} = l(k_2 - k_1)/2k_2$ , радиус пучка достигает первоначальной величины  $a_1$ . Таким образом, параметрически-активная среда действует на пучок большей частоты как фокусирующая линза.

**Параметрическая диффузия волновых пучков второго порядка.** В гл. 2 мы обсуждали параметрическую диффузию волновых пучков и пакетов, обусловленную частичным подавлением относительной дисперсии первого порядка в сильном поле волны накачки. В отличие от дисперсионного расплывания и дифракции при диффузии пучков их волновой фронт остается практически плоским. Аналогичное явление может возникнуть в параметрическом усилителе при дифракции сигнальной и холостой волн, имеющих близкие коэффициенты поперечной диффузии,  $D_1 \approx D_2$ . Полное интегрирование выражений (8.8) затруднительно. Поэтому мы проследим за изменением поля на оси пучка, полагая в (8.8)  $r = 0$ . Тогда в области экспоненциального роста амплитуд ( $\Gamma_0 z \gg 1$ ) из (8.8) получаем

$$\begin{aligned}
 A_1(0, z) &= [E_{10} G_{11}(0, z) + E_{20}^* G_{12}(0, z)] \times \\
 &\times (\pi R_{\pi}/4z)^{1/2} (1 - \operatorname{erf} \xi) \exp \xi^2, \\
 \xi &= (1 + iz/R_{\text{ан}})(R_{\pi}/4z)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Здесь  $\operatorname{erf} \xi$  — интеграл вероятности, а длина

$$R_{\pi} = \Gamma_0 a_1^4 (D_1 + D_2)^{-2} / 2 = 2\Gamma_0 a_1^4 k_1^2 k_2^2 / k_3^2 \tag{8.17}$$

характеризует влияние неоднородности контура параметрического усиления. Отметим, что  $R_{ан}/R_{п} = E_{кр,2}/E_{30}$ .

Формула (8.16) включает описание двух эффектов: аномальную дифракцию с длиной  $R_{ан}$  (8.15) и параметрическую диффузию второго порядка с длиной  $R_{п}$  (8.17). В очень сильных полях волны накачки ( $E_{30}^2 \gg E_{кр,2}^2$ ) преобладает эффект аномальной дифракции:  $R_{ан} \ll R_{п}$ . Действительно, при таком условии можно показать, что модуль аргумента интеграла вероятности имеет большую величину ( $|\xi| \gg 1$ ) при любых расстояниях  $z$ . Воспользуемся поэтому асимптотикой интеграла вероятности:

$$\operatorname{erf} \xi = 1 - \pi^{-1/2} \exp(-\xi^2), \quad |\xi| \gg 1. \quad (8.18)$$

Подставляя (8.18) в (8.16), приходим к прежнему описанию аномальной дифракции (ср. с (8.14)):

$$A_1(0, z) = [E_{10} G_{11}(0, z) + E_{20}^* G_{12}(0, z)] (1 - iz/R_{ан})^{-1}. \quad (8.19)$$

Если интенсивность волны накачки не очень велика ( $E_{кр,1}^2 < E_{30}^2 < E_{кр,2}^2$ ), то наблюдаются две области дифракции. Так как при этом  $R_{ан} \gg R_{п}$ , то сначала на длинах  $0 < z < R_{ан}$  фазовый фронт остается практически плоским, а амплитуда убывает с расстоянием из-за расширения пучка по закону (рис. 8.4)

$$\begin{aligned} A_1(0; z) &\propto 1 - 2z/R_{п}, \quad z \ll R_{п}; \\ A_1(0, z) &\propto (\pi R_{п}/4z)^{1/2}, \quad z \gg R_{п}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Следует подчеркнуть, что параметрическая диффузия связанных дифрагирующих пучков протекает значительно медленнее, чем обычная дифракция. Если при дифракции амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию (8.10), то при параметрической диффузии — обратно пропорционально корню квадратному из расстояния.

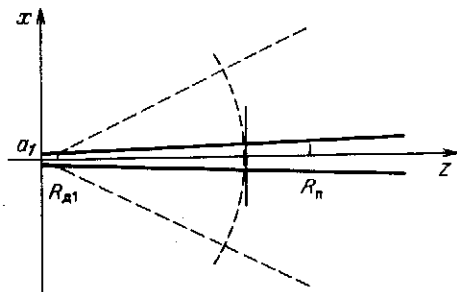


Рис. 8.4. Параметрическая диффузия пучка субгармоники с сохранением плоского волнового фронта в однородном поле волны накачки при  $\Gamma_0 R_{д1} = 5$ :

штриховыми линиями показана картина дифракции в линейной среде

За областью диффузии второго порядка на расстояниях  $z > R_{ан}$  развивается аномальная дифракция (8.14). Очевидно, при одинаковой дисперсии или дифракции волн, когда  $D_1 = D_2$ , имеет место только параметрическая диффузия, так как  $R_{ан} \rightarrow \infty$ . Параметрическая диффузия волновых пучков всегда наблюдается в чистом виде при возбуждении субгармоники  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ .

### § 8.3. Дифракция волн в параметрически-активном волноводе

При параметрическом усилении дифрагирующих волн в поле пространственно-ограниченного пучка накачки может возникнуть новый эффект — захват пучков в параметрический волновод, образованный за счет неоднородности коэффициента усиления по сечению волны накачки. В обычном диэлектрическом волноводе дифракция волн компенсируется рефракцией в неоднородном канале или отражением от стенок волновода [2]. В параметрическом усилителе механизм формирования пучков заключается в следующем. Пусть пучок основного излучения имеет гауссов амплитудный профиль:  $E_3 = E_{30} \exp(-r^2/a_3^2)$ . Тогда для пучков сигнальной и холостой частот имеется тенденция сужения их сечения (§ 4.2):

$$a_j \approx a_3(\Gamma_0 z)^{-1/2}. \quad (8.21)$$

Этому сжатию противодействует дифракция, причем поскольку речь идет о распространении пучков в параметрически-активной среде, то сжатие пучков в неоднородном поле волны накачки уравнивает аномальная дифракция или параметрическая диффузия второго порядка. Приближенную оценку стационарного радиуса пучков можно получить из условия равновесия противоборствующих процессов, полагая в (8.21) длину сжатия равной или  $z = R_{ан}$ , или  $z = R_{п}$  в зависимости от характера развития дифракции; при этом при расчете дифракционных длин (8.16), (8.17) надо вместо  $a_1$  подставить  $a_p$ .

В режиме аномальной дифракции из условия  $2\Gamma_0 R_{ан} a_p^2 = a_3^2$  находим стационарное значение поперечного радиуса параметрически связанных пучков:

$$a_p = a_3(E_{кр,3}^2/E_{30}^2)^{1/8}, \quad (8.22)$$

$$E_{кр,3}^2 = (D_1 - D_2)^2/a_3^4 \gamma_1 \gamma_2.$$

Если же параметрический волновод формируется при нелинейной компенсации диффузии пучков, то устанавливается следующая величина радиусов слабых пучков:

$$a_p = a_3(E_{кр,4}^2/E_{30}^2)^{1/6}, \quad (8.23)$$

$$E_{кр,4}^2 = (D_1 + D_2)^2/a_3^4 \gamma_1 \gamma_2.$$

Так как основной пучок сам испытывает дифракцию с характерным масштабом  $R_{д3} = D_3 a_3^2 = k_3 a_3^2/2$ , то, очевидно, параметрический волновод может существовать на расстояниях, не превышающих дифракционную длину пучка накачки,  $z \ll R_{д3}$ . Поэтому благоприятные условия для формирования стационарных параметрических мод создаются в широких пучках; большие коэффициенты усиления на длине дифракционного распывания основного пучка ( $\Gamma_0 R_{д3} \gg 1$ ) автоматически обеспечивают выполнение необходимого для образования стационарного волновода условия  $E_{30}^2 \gg E_{кр,3}^2$ .

Таким образом, если излучение на основной частоте  $\omega_3$  представляет собой ограниченный гауссов пучок, то для наблюдения захвата сигнальной

и холостой волн в параметрические волноводы необходимо, чтобы интенсивность волны накачки превышала  $E_{кр,3}^2$  (8.22). При этом если начальный радиус усиливаемых пучков больше радиуса пучка накачки,  $a_j > a_3$ , то происходит сужение слабых пучков до равновесного радиуса  $a_p$ . В обратном случае, когда  $a_j < a_3$ , пучки расплываются вследствие дифракции до равновесного радиуса.

Дифракционные явления в параметрическом усилителе исследовались в [1] с помощью численного решения системы (8.1). В численных экспериментах рассматривалось распространение осесимметричных пучков, имеющих на входе в нелинейную среду плоские волновые фронты и гауссовы амплитудные профили:  $E_j = E_{j0} \exp(-r^2/a_1^2)$ ,  $E_{10} = 10^{-5} E_{30}$ . Пучок накачки выбирался во много раз шире пучков на сигнальной и холостой частотах:  $a_3^2 = 20 a_1^2$ . Изучалась параметрическая дифракция волн как в вырожденном (усиление субгармоники),  $D_1 = D_2$ , так и в невырожденном,  $D_2 = 4D_1$ , случаях при интенсивности волны накачки, равной критической величине:  $E_{30}^2 \approx E_{кр,1}^2$  (8.12). В силу последнего условия слабые пучки испытывают вначале обычную дифракцию (8.10). Однако затем проявляются эффекты, обусловленные неоднородностью усиления по сечению пучка накачки, и радиусы пучков сигнальной и холостой волн стабилизируются. Рассмотрим далее два режима формирования стационарных пучков.

**Параметрический волновод для пучка субгармоники.** На рис. 8.5 представлены результаты численного эксперимента по усилению пучка субгармоники при следующих параметрах:

$$E_{30}^2 = E_{кр,1}^2 = 400 E_{кр,4}^2, \quad \Gamma_0 l = 16, \quad R_{д3} = 2,5l, \quad R_{д1} = R_{д2} = l/16.$$

Как видно из рис. 8.5, в процессе усиления пучок субгармоники сначала

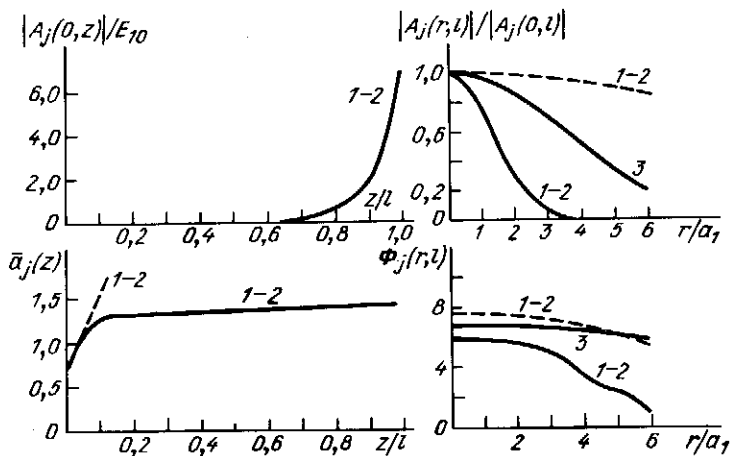


Рис. 8.5. Усиление узкого пучка субгармоники (1-2) в параметрически-активном волноводе, образованном гауссовым пучком накачки (3):

показаны изменения с расстоянием амплитуд на оси  $A_j(0, z)$  и нормированного радиуса  $\bar{a}_j(z)$  пучков (слева) и амплитудные и фазовые профили на выходе нелинейной среды при  $z = l$  (справа); штриховые линии описывают дифракцию в линейной среде

уширяется примерно в два раза, а затем его поперечный радиус стабилизируется. Отметим, что в отсутствие параметрической накачки ( $E_{30} = 0$ ) радиусы пучков увеличились бы на выходе из среды почти в 16 раз. Равновесный радиус пучка субгармоники согласно оценке (8.23) равен  $a_p = 1,4a_1$ , что хорошо согласуется с вычислительным экспериментом. На рис. 8.5 видно также, что волновой фронт в параметрическом волноводе более плоский, чем в линейной среде. Вследствие этого угловая ширина диаграммы направленности усиливаемых волн после прохождения через нелинейную среду уменьшается.

**Параметрический волновод для пучков с разной дисперсией.** В следующем численном эксперименте было исследовано усиление волн с разными частотами:  $\omega_1 = 0,2\omega_3$  и  $\omega_2 = 0,8\omega_3$ . Интенсивность волны накачки  $E_{30}^2 = 0,92E_{кр,1}^2 = 1475E_{кр,4}^2$ . Дифракционные длины составляли:  $R_{д1} = 0,1l$ ,  $R_{д2} = 1/40$  и  $R_{д3} = 5l$ , при этом  $\Gamma_0 l = 12, a_3 = \sqrt{20}a_1$ . Результаты численного решения уравнений (8.1) при заданных условиях представлены на рис. 8.6. Так как частоты усиливаемых волн отличались в 4 раза ( $D_1 = 4D_2$ ), то в эксперименте отчетливо проявляется эффект аномальной дифракции — первый пучок с меньшей частотой имеет расходящийся волновой фронт, а второй пучок — сходящийся. Равновесный радиус пучков по оценке (8.22) равен  $a_p = 1,55a_1$ , что хорошо согласуется с поперечными размерами стационарных пучков, полученных в численном эксперименте:  $a_{p1} = 1,35a_1$  и  $a_{p2} = 1,8a_1$ .

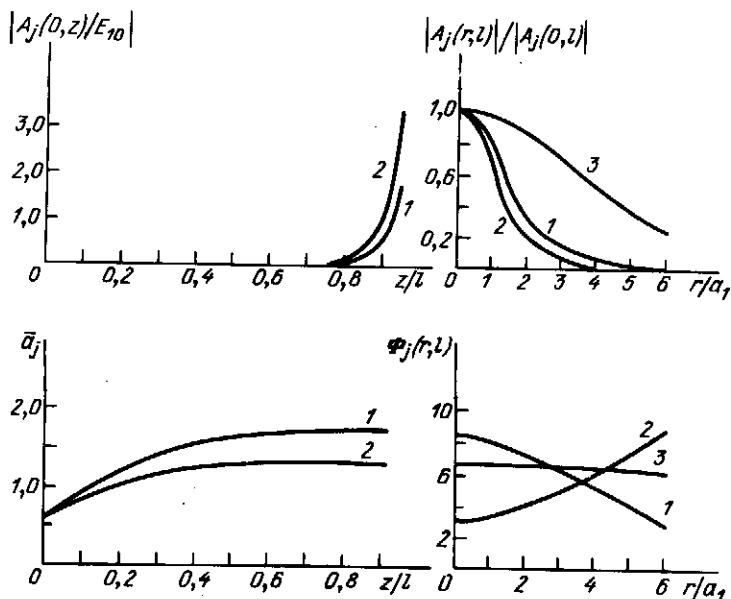


Рис. 8.6. Усиление сигнальной,  $\omega_1 = 0,2\omega_3$ , и холостой,  $\omega_2 = 0,8\omega_3$ , волн при подавлении аномальной дифракции в параметрически-активном волноводе, образованном гауссовым пучком накачки:

номера кривых соответствуют значениям индекса  $j = 1, 2, 3$

### § 8.4. Вторичное упрощение укороченных уравнений; моды параметрического волновода

Эффекты аномальной дифракции и параметрической диффузии второго порядка описываются исходной системой параболических уравнений для медленно меняющихся амплитуд (8.1). Непосредственный их анализ даже в поле однородной волны накачки затруднителен, не говоря уже о дифракционных эффектах в параметрическом волноводе. Поэтому приходится обращаться к численному решению (8.1) разностными методами или к приближенным оценкам параметров параметрически-активных волноводов (§ 8.3). Вместе с тем для достаточно широких пучков накачки и при больших коэффициентах усиления можно развить ряд асимптотических методов, таких как одноволновое приближение [3], разложение по взаимодействующим автомодельным пучкам свободного пространства [4] и т.д.

В данном параграфе мы представим метод вторичного упрощения укороченных уравнений (8.1), основанный на применении метода медленно меняющихся амплитуд к парциальной экспоненциально-растущей волне:

$$A_{1,2} = C_{1,2}(r_1, z) \exp(\Gamma_0 z). \quad (8.24)$$

Подставляя (8.24) в (8.1) и выполняя обычную процедуру отбрасывания малых членов, содержащих высшие производные, находим укороченное уравнение для парциальной амплитуды вблизи центра гауссова пучка накачки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{i(D_1 - D_2)}{2} \nabla^2 C_1 + \frac{(D_1 + D_2)^2}{8\Gamma_0} \nabla^4 C_1 = \\ = -\frac{\Gamma_0 r_1^2}{a_3^2} C_1. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Уравнение для парциальной амплитуды холостой волны  $C_2$  аналогично (8.25), только надо поменять местами индексы 1 и 2. Следует особо подчеркнуть, что (8.25) при переходе к спектральному разложению амплитуд типа (8.2) дает дисперсионное уравнение, которое с учетом (8.24) можно записать так:

$$q_1 = (D_1 - D_2)\Omega^2/2, \quad \Gamma = \Gamma_0 - (D_1 + D_2)^2 \Omega^4/8\Gamma_0. \quad (8.26)$$

Если сравнить эти выражения с точными (8.4), то можно установить, что поправка к волновому числу  $q_1$  остается точно такой же, как при строгом описании, а дисперсионное и дифракционное изменения инкремента (8.26) соответствуют учету первого члена разложения  $\Gamma$  в ряд по  $\Omega$  — малой частотной (угловой) отстройке усиливаемых компонент.

В (8.25) члены со вторыми производными описывают аномальную дифракцию, а члены с производными четвертого порядка — параметрическую диффузию второго порядка. При переходе к однородному распределению поля накачки ( $a_3 \rightarrow \infty$ ) правая часть в (8.25) исчезает и решение уравнения для парциальной амплитуды приводит к прежним результатам (8.14), (8.19).

Применим теперь (8.25) к анализу параметрического усиления дифрагирующих пучков в поле гауссова пучка накачки. При слабой дифракции



производными по поперечной координате можно пренебречь и решение дает гауссов пучок с уменьшающимся радиусом (8.21). По мере сокращения сечения пучков усиливается роль дифракции и надо решать полное уравнение (8.25). Если учитывать только аномальную дифракцию (вторые производные), то решение нетрудно построить. Оно содержит тригонометрические функции комплексного аргумента, и поэтому его анализ довольно громоздок. Однако следует отметить, что общее решение (8.25) на больших расстояниях приобретает стационарную форму — происходит формирование параметрического волновода в канале пучка накачки. Волноводное распространение сигнальной и холостой волн означает, что их амплитудный профиль не меняется в неоднородной параметрически-активной среде:

$$C_j = e^{i\rho_j z} B_{v,j}(r) \quad (j = 1, 2). \quad (8.27)$$

Найдем параметры основной моды, предполагая что она имеет гауссов профиль

$$B_{v,1} = E_{v,1} \exp(-r^2 \psi_1), \quad (8.28)$$

где  $\psi_1$  — комплексная функция, действительная часть которой характеризует радиус волноводного пучка:  $\text{Re } \psi = a_v^{-1}$ , а мнимая — кривизну его сферического фронта:  $R_1^{-1} = 4D_1 \text{Im } \psi_1$ .

Рассмотрим сначала параметрический волновод, образующийся при равновесии между неоднородным усилением в гауссовом пучке накачки и аномальной дифракцией (четвертыми производными в (8.25) пока пренебрегаем). Подставляя (8.27), (8.28) в (8.25) и собирая отдельно члены нулевого и второго порядка по поперечной координате  $r$  находим следующие соотношения:

$$\rho_1 = (-1+i)2(D_1 - D_2)a_v^{-2}, \quad \psi_1 = (1+i)a_v^2, \quad a_v = \sqrt{2}a_p, \quad (8.29)$$

где  $a_p$  — равновесный радиус (8.22), полученный из приближенной достаточно грубой оценки. Незначительное отличие  $a_v$  от  $a_p$  говорит о правильности физических представлений, изложенных выше. Новую информацию о параметрическом волноводе дают выражения для  $\psi_1$  и собственного значения моды  $\rho_1$ . Волновой фронт стационарного пучка является не плоским, а сферическим с радиусом кривизны

$$R_1 = a_v^2/4D_1, \quad (8.30)$$

равным дифракционной длине захваченного пучка. Заметим, что волна на сигнальной частоте имеет сопряженный фронт  $\psi_2 = \psi_1^* = (1-i)a_v^{-2}$ . Если  $D_2 < D_1$ , волна частоты  $\omega_1$  имеет расходящийся фронт, а частоты  $\omega_2$  — сходящийся.

Отметим, далее, что в параметрическом волноводе изменяется фазовая скорость: волна с расходящимся фронтом замедляется, а со сходящимся — убыстрается. Наконец, вследствие дифракции инкремент уменьшается на величину  $\text{Re } \rho_1 = 2(D_1 - D_2)a_v^{-2}$ .

Перейдем теперь к обсуждению свойств параметрического волновода, в котором главную роль играет диффузия второго порядка. Тогда в (8.25) можно отбросить члены со вторыми производными, но сохранить производные более высокого порядка. Снова подставляя модовое решение

(8.27), (8.28) и учитывая только члены, пропорциональные  $r^0$  и  $r^2$ , получаем выражения для параметров стационарной моды:

$$\rho_1 = 0, \quad \psi_1 = a_B^2, \quad a_B \approx 0,7 a_p, \quad (8.31)$$

где  $a_p$  дается формулой (8.23). Из (8.31) видно, что волновые фронты параметрически связанных пучков с близкими коэффициентами  $D_1 \approx D_2$  являются плоскими в полном соответствии с результатами численных экспериментов (рис. 8.5). В рассматриваемом приближении параметрическая диффузия второго порядка не изменяет коэффициент усиления  $\Gamma_0$  и фазовые скорости волн.

В заключение параграфа отметим, что уравнения этого приближения для парциальных амплитуд позволяют рассмотреть более широкий класс явлений, чем рассмотренные выше, в частности исследовать влияние аномальной дифракции на предварительно сфокусированные или расфокусированные пучки. При усилении сходящегося пучка субгармоники следует ожидать преобразования сферического фронта в плоский. Можно также включить в рассмотрение взаимодействие дифрагирующих пучков при критическом угловом синхронизме; в этом случае нужно учесть эффекты двулучепреломления, обусловленные неколлинеарностью лучевых векторов сигнальной и холостой волн.

### § 8.5. Усиление волновых пакетов при дисперсии групповых скоростей

Взаимодействия волновых пакетов во втором приближении теории дисперсии имеют много общих черт с усилением дифрагирующих пучков. Согласно пространственно-временной аналогии радиусу пучка отвечает длительность импульса, коэффициенту дифракционного распыливания пучка  $D_j = 1/2 k_j$  — коэффициент дисперсионного распыливания пакета  $D_j = -(1/2) \partial^2 k_j / \partial \omega_j^2$ . Нетрудно найти аналогию и самим эффектам. Аномальная дифракция переходит в аномальное дисперсионное распыливание пакетов, при котором может измениться знак квадратичной фазовой модуляции или направление линейной модуляции частоты. Например, если в отсутствие накачки мгновенная частота повышалась, то в поле параметрической накачки она может понижаться (ср. с трансформацией расходящегося волнового фронта в сходящийся). При усилении пакетов с одинаковой дисперсией ( $D_1 = D_2$ ) фазовая модуляция у распыляющихся пакетов не возникает — это процесс параметрической диффузии огибающих волновых пакетов. С точностью до коэффициентов порядка единицы сохраняют свою силу все формулы, описывающие поведение пучков в параметрически-активной среде (§ 8.4) с учетом замены параметров пучка на характеристики волновых пакетов.

Переход от двумерного пучка к одномерному пакету сказывается в замедлении темпов распыливания последних. При аномальном дисперсионном распылиании амплитудные профили гауссовых импульсов с начальной длительностью  $\tau_1$  меняются по закону ( $\eta_j = \eta$ )

$$A_1 = \frac{(E_{10} + E_{20})}{2\sqrt{\psi(z)}} \exp\left(\Gamma_0 z - \frac{\eta^2}{\tau_1^2 \psi(z)}\right), \quad A_2 = A_1^*, \quad (8.32)$$

где  $\psi = 1 - iz/R_{\text{ан}}$ ,  $R_{\text{ан}} = \tau_1^2/2 |D_1 - D_2|$ . Сравнение (8.32) с (8.16) показывает, что хотя уширение импульса идет так же, как увеличение радиуса пучка, амплитуда пакета уменьшается пропорционально  $z^{-1/2}$ , а пучка —  $z^{-1}$ .

В поведении пучков и импульсов при параметрической диффузии есть расхождения. Так, изменение парциальной амплитуды в центре импульсов ( $\eta = 0$ ) происходит по следующему закону:

$$C_1(0, z) = [\pi\xi \cdot 2(1 - iz/R_{\text{ан}})]^{1/2} (\pi\xi/4)^{1/2} \times \exp(\xi - i3\pi/8) \cdot H_{1/4}^{(2)}(\xi), \quad (8.33)$$

где  $H_{1/4}^{(2)}(\xi)$  — функция Ханкеля второго рода, аргументом которой служит величина (ср. с (8.16))

$$\xi = (1 - iz/R_{\text{ан}})^2 R_{\text{п}}/8iz, \quad (8.34)$$

где  $R_{\text{ан}}$  и  $R_{\text{п}}$  вычисляются по формулам (8.15), (8.17) с заменой радиуса пучка  $a_1$  на длительность импульса  $\tau_1$ . В области аномальной дифракции ( $z \ll R_{\text{п}}$ ,  $|\xi| \gg 1$ ) можно воспользоваться асимптотикой функции Ханкеля:

$$H_{1/4}^{(2)}(\xi) = (\pi/2\xi)^{-1/2} \exp[-i(\xi - 3\pi/8)].$$

В результате находим  $C_1 \sim (1 - iz/R_{\text{ан}})^{1/2}$ , что согласуется с законом аномальной дифракции (8.32).

При усилении пакетов с близкой дисперсией ( $D_1 \approx D_2$ ) на первый план выступает параметрическая диффузия с характерным пространственным масштабом  $R_{\text{п}}$ . На больших расстояниях  $\xi \rightarrow 0$ ,  $H_{1/4}^{(2)}(\xi) = 1 - \ln(\xi^2/4)$  и парциальная амплитуда убывает как

$$C_1(0, z) \sim (\pi R_{\text{п}}/iz)^{1/2} \ln(4z/R_{\text{п}}) + \dots \quad (8.35)$$

Наличие в (8.35) логарифмического члена свидетельствует о более медленном протекании параметрической диффузии пакетов по сравнению с аномальным дисперсионным расплыванием связанных пакетов и диффузией пучков.

Если импульс волны накачки практически не расплывается,  $|D_3| z \tau_3^{-2} \ll \ll 1$ , то при превышении порога по интенсивности  $E_{\text{кр}, 3}^2$  (8.22) или  $E_{\text{кр}, 4}^2$  (8.23) он может захватить сигнальную и холостую волны в связанные квазисолитоны — волновые пакеты со стационарными амплитудными профилями. Анализ этого явления можно провести по той же схеме, что и исследование параметрических волноводов (§ 8.4).

## § 8.6. Частотно-угловая картина параметрического рассеяния

При параметрическом усилении в поле плоской монохроматической волны накачки интересно проследить за модификацией частотно-углового спектра сигнала

$$S_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int dt dx dy A_1(x, y, \eta, z) \exp(i\Omega t - ik_x x - ik_y y) \quad (8.36)$$

в более широких границах, учитывая дисперсионные эффекты первого и второго порядков, неколлинеарность лучевых векторов пучков и их дифракцию. В заданном поле накачки усиление спектральных компонент сигнальной и холостой волн описывается выражением, аналогичным (8.8), (8.9), только инкремент

$$\Gamma = [\Gamma_0^2 - (q_1 + q_2^*)^2/4]^{1/2} \quad (8.37)$$

зависит теперь от расстройки между волновыми векторами компоненты с частотой  $\omega_1 + \Omega$  и сопряженной компоненты с частотой  $\omega_2 - \Omega$ . Входящие в (8.37) величины  $q_j$  суть изменения проекций волновых векторов на ось  $z$ , вдоль которой распространяется волна накачки. В квазиоптическом приближении они равны (§ 1.3, 1.4)

$$q_j = \frac{\Omega}{u_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2} \Omega^2 + \beta_j k_x - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_j},$$

$$q_j^* = q_j(-\Omega, -k_x, -k_y) \quad (j = 1, 2), \quad (8.38)$$

где  $u_j$  — групповая скорость,  $\beta_j$  — угол между лучевым вектором и осью  $z$ .

Наличие в исходном спектре холостой волны компоненты с параметрами  $\omega_2 + \Omega$ ,  $k_x$ ,  $k_y$  приводит к возбуждению в спектре сигнала компоненты  $\omega_1 - \Omega$ ,  $-k_x$ ,  $-k_y$ , и наоборот. Эффективность возбуждения такой пары волн зависит от волновой расстройки  $\Delta = q_1 - q_2$ . Максимальный инкремент определяет частотно-угловые характеристики усилителя и достигается при условии  $\Delta = 0$ . Например, при возбуждении обыкновенной  $\omega_1$

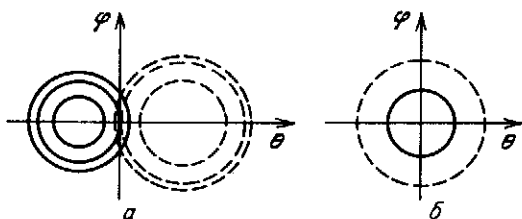


Рис. 8.7. Частотно-угловая картина параметрического рассеяния световых волн при взаимодействии  $e_3 \rightarrow e_1 o_2$  (а) и  $e_3 \rightarrow o_1 o_2$  (б):

сплошные кривые — компоненты на частотах  $\omega_1 + \Omega$ , штриховые — на  $\omega_2 - \Omega$

и необыкновенной  $\omega_2$  волн наибольшее усиление компоненты сигнала с частотой  $\omega_1 + \Omega$  будет происходить на конусе (рис. 8.7а)

$$\theta_1^2 + \varphi_1^2 + \frac{2k_2}{k_3} \beta_1 \theta_1 = \frac{2k_2}{k_3 k_1} \nu_{12} \Omega + \left( \frac{\partial^2 k_1}{\partial \omega_1^2} + \frac{\partial^2 k_2}{\partial \omega_2^2} \right) \frac{k_2 \Omega^2}{k_3 k_1}. \quad (8.39)$$

Здесь  $\theta_1 = k_x/k_1$  и  $\varphi_1 = k_y/k_1$  — углы наблюдения. Интересно отметить, что компоненты с  $\Omega = 0$  могут усиливаться не только одномерным образом, вдоль оси  $z$  ( $\theta = \varphi = 0$ ), но и двумерным, если угловые компоненты расположены на конусах, касающихся друг друга в точке одномерного синхронизма ( $\theta = \varphi = 0$ ), причем ось конуса для необыкновенной волны первого сигнала наклонена к оси  $z$  под углом  $\beta_1 k_2/k_3$  в сторону оптической оси отрицательного кристалла.

В случае обыкновенной поляризации волн обоих сигналов конусы синхронизма оставляют следы в виде концентрических окружностей с центром в точке  $\theta = \varphi = 0$  (рис. 8.7б). Указанная спектральная структура излучения наблюдается при параметрическом рассеянии света [5, 6].

Если от частотно-угловой картины перейти к пространственно-временному описанию усиления волновых пучков импульсного излучения, то соответствующие укороченные уравнения типа (8.1) с обобщенными дифференциальными операторами будут описывать параметрическую дифракцию и диффузию трехмерных пакетов или пучков. И в этом значительно более сложном случае можно провести вторичное упрощение укороченных уравнений, переходя к парциальным амплитудам (8.27). Мы не будем обсуждать возникающие при этом эффекты. Отметим только, что нетривиальные явления появляются при наличии относительной угловой и частотной дисперсии первого порядка, т.е. при критическом синхронизме первого порядка.

### § 8.7. Дифракционные и дисперсионные явления в поле низкочастотной волны накачки

Параметрическая связь двух волн в поле интенсивной волны накачки низкой частоты  $\omega_1$  носит другой характер, чем при распадной неустойчивости. Низкочастотная накачка обеспечивает энергообмен между слабыми волнами, оставляя свой запас энергии практически неизменным. Поэтому можно считать, что параметрическая связь в преобразователях частоты носит реактивный характер. Главной особенностью этого типа взаимодействия является образование двух равноправных ветвей нелинейной дисперсии на более высоких частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . При учете расстройки групповых скоростей эффекты нелинейной дисперсии разностных и суммарных волн обсуждались подробно в гл. 3 и 5. Рассмотрим теперь закономерности взаимодействия волновых пучков и пакетов в поле низкочастотной волны накачки с учетом дифракции и дисперсии второго порядка, полагая  $u_2 = u_3$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ .

Квазиоптические уравнения для амплитуд суммарной и разностной волн имеют вид (ср. с (8.1))

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + iD_2 \Delta_1 A_2 = -i\gamma_2 E_1^* A_3, \quad \frac{\partial A_3}{\partial z} + iD_3 \Delta_1 A_3 = -i\gamma_3 E_1 A_2. \quad (8.40)$$

**Нелинейная дисперсия параметрически связанных волн.** Переходя в (8.40) от медленно меняющихся амплитуд к спектрам волн, получим выражение для нелинейно-дисперсионных поправок к волновым числам:

$$q_{32} = q_{23} = -(D_2 + D_3) \Omega^2 / 2 \pm [\Gamma_0^2 + (D_2 - D_3)^2 \Omega^4 / 4]^{1/2}, \quad (8.41)$$

где  $\Gamma_0 = (\gamma_2 \gamma_3)^{1/2} E_{10}$  — коэффициент параметрической связи волн, обратная величина которого  $l_{нл} = \Gamma_0^{-1}$  характеризует пространственный масштаб интерференции двух мод. Из (8.41) видно, что при любой линейной дисперсии волн, т.е. при произвольных соотношениях между коэффициентами  $D_2$  и  $D_3$ , нелинейная дисперсия затрагивает только изменение волновых чисел (фазовых скоростей). Это и говорит о реактивном воздействии низкочастотной волны накачки  $\omega_1$  на слабые волны  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Если в параметри-

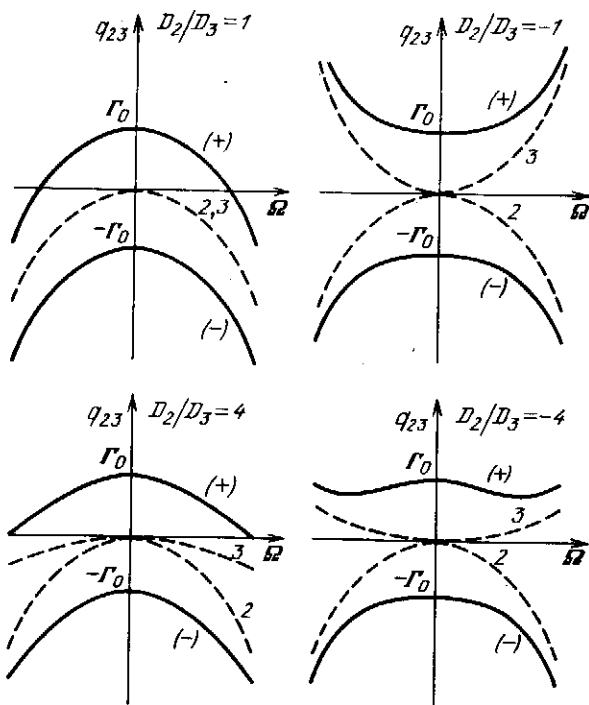


Рис. 8.8. Образование двух ветвей (+) и (-) нелинейной дисперсии (сплошные линии) в поле низкочастотной волны накачки при различных значениях отношения  $D_2/D_3$ :

штриховые линии – дисперсия второго порядка суммарной (3) и разностной (2) волн в линейной среде

ческом усилителе можно создать условия практически полного подавления дисперсии показателя преломления (§ 8.1), то в преобразователе частоты допустимо говорить лишь о существенном уменьшении дисперсии волн.

Условие фазового синхронизма для всех спектральных компонент выполняется при одинаковой дисперсии на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  ( $D_2 = D_3$ ). В этом случае происходит простое расщепление дисперсионной кривой на две ветви параболического типа (рис. 8.8):

$$q_{23} = -D_2 \Omega^2 \pm \Gamma_0. \quad (8.42)$$

При такой дисперсии волновые пакеты суммарной и разностной частот ведут себя одинаково, периодически обмениваясь энергией между собой.

Если волны обладают разной дисперсией, то синхронизм становится критическим к отстройкам частоты спектральных компонент, в результате чего дисперсионные кривые деформируются, теряют параболическую форму (рис. 8.8). В сильном поле низкочастотной накачки квадратный корень в (8.41) можно разложить в ряд по  $\Omega^4$  и, оставляя два члена, получить приближенный вид дисперсионных кривых:

$$q_{23} = -(D_2 + D_3) \Omega^2 / 2 \pm \Gamma_0 \pm (D_2 - D_3)^2 \Omega^2 / 8 \Gamma_0. \quad (8.43)$$

Зная дисперсию волн (8.41), легко найти общее выражение для спектральной амплитуды суммарной волны:

$$S_3 = -i\gamma_3 E_{10} S_{20}(\Omega) \exp[i(D_2 - D_3)\Omega^2 z/2] z \operatorname{sinc} \xi, \\ \xi = [\Gamma_0^2 + (D_2 + D_3)^2 \Omega^4/4]^{1/2} z, \quad (8.44)$$

где  $S_{20}$  — огибающая частотного спектра сигнальной волны.

**Линейный режим возбуждения суммарной волны.** При малой перекачке энергии из сигнальной волны параметр  $\xi$  мал и  $\operatorname{sinc} \xi \approx 1$ . Это соответствует возбуждению волны частоты  $\omega_3$  двумя заданными источниками, действующими на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если с однородным полем накачки сложить гауссов импульс сигнальной частоты  $\omega_2$ , то с помощью обратного преобразования Фурье находим из (8.44) выражение для амплитуды суммарной волны

$$A_3 = -i\gamma_3 E_{10} E_{20} \int_0^z d\xi \psi(\xi)^{-1/2} \exp[-\eta^2/\tau_2^2 \psi(\xi)], \quad (8.45)$$

в котором дисперсионные эффекты представлены функцией

$$\psi = 1 - 4i[D_3 z - (D_3 - D_2)\xi]\tau_2^{-2}. \quad (8.46)$$

При некритическом синхронизме второго порядка ( $D_2 = D_3$ ) импульс на суммарной частоте повторяет гауссов профиль сигнальной волны. Оба импульса расплываются с одинаковой скоростью:

$$\tau_3(z) = \tau_2 [1 + 16D_2^2 z^2 \tau_2^{-4}]^{1/2}. \quad (8.47)$$

Возбуждение суммарной волны при критическом синхронизме ( $D_2 \neq D_3$ ) приобретает новые черты. Из (8.45) получаем следующую оценку для длительности импульса:

$$\tau_3^4 = 2\tau_2^4 (1 + f_2^2)(1 + f_3^2) [1 - f_3 f_2 + (1 + f_2^2)^{1/2}(1 + f_3^2)^{1/2}]^{-1}, \quad (8.48)$$

где зависимость от расстояния заключена в функциях

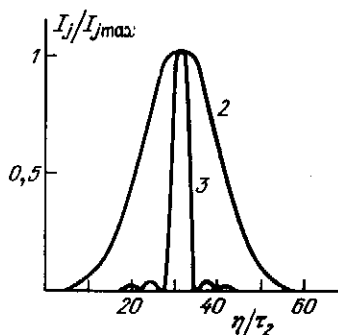
$$f_j = 4D_j z \tau_2^{-2} \quad (j = 2, 3). \quad (8.49)$$

Формула (8.48) переходит в прежнее выражение (8.47) при некритическом синхронизме ( $D_2 = D_3$ ). Если же коэффициенты дисперсионного расплывания равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки ( $D_2 = -D_3$ ), в максимальной степени проявляется механизм подавления дисперсии волн в поле интенсивной накачки. Действительно, в этом случае из (8.48) имеем

$$\tau_3 = \tau_2 [1 + (4D_2 z \tau_2^{-2})^2]^{1/4}. \quad (8.50)$$

На больших расстояниях длительность импульса суммарной волны растет пропорционально  $z^{1/2}$ , в то время как при некритическом синхронизме  $\tau_2 \propto z$  (см. (8.47)). Механизм замедления дисперсионного расплывания заключается в следующем. Сигнальный импульс за счет дисперсионного расплывания приобретает квадратичную фазовую модуляцию, знак которой определяется знаком коэффициента  $D_2$ . Волна суммарной частоты стремится приобрести фазовую модуляцию противоположного знака, так как  $D_3 = -D_2$ . Однако сигнальный импульс, выполняющий роль вынуждающей силы, навязывает ей свою фазовую модуляцию. Противо-

Рис. 8.9. Профили интенсивности сигнального (2) и возбужденного им суммарного (3) импульсов, имеющих противоположную дисперсию второго порядка,  $D_3 = -D_2$ , на расстоянии  $z = 18 l_{p2}$  при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . В случае одинаковой дисперсии,  $D_3 = D_2$ , суммарный импульс повторял бы форму сигнального



борство двух тенденций приводит к уменьшению фазовой модуляции возбуждаемого импульса и, как следствие, к замедлению его дисперсионного распыливания.

На рис. 8.9 показаны профили интенсивности волновых пакетов на сигнальной и холостой частотах, рассчитанные с помощью численного решения квазиоптических уравнений (8.40) при  $\gamma_2 = 0$  (приближение заданного поля сигнальной волны) и  $D_2 = -D_3$  [7]. Картина взаимодействия показана на расстоянии в несколько длин дисперсионного распыливания,  $z = 4,5 \tau_2^2/D_2$ . Из графиков видно, что сигнальный импульс, распространяясь в линейной среде, увеличивает свою длительность в 18 раз, как в случае (8.47). Импульс суммарной частоты  $\omega_3$  уширяется значительно меньше — в 4,6 раза. Оценка по (8.50) дает близкое значение  $\tau_3 \approx 4,25 \tau_2$ .

**Аномальные дисперсионные эффекты при сильной параметрической связи.** Рассмотрим теперь сильное взаимодействие суммарной и разностной волн, полагая  $\Gamma_0 z \gg 1$  и  $\xi \gg 1$  (см. (8.44)). Более наглядные результаты в этом случае можно получить, исследуя поведение парциальных амплитуд быстрых и медленных мод, интерференция которых дает амплитудный профиль волн:

$$A_j = C_j^{(+)} e^{i\Gamma_0 z} + C_j^{(-)} e^{-i\Gamma_0 z}. \quad (8.51)$$

Считая парциальные амплитуды медленно меняющимися функциями, получим для них из (8.40) уравнение

$$\frac{\partial C_j^{(\pm)}}{\partial z} + i \frac{D_2 + D_3}{2} \nabla^2 C_j^{(\pm)} \pm \frac{(D_2 - D_3)^2}{8\Gamma_0} \nabla^4 C_j^{(\pm)} = \mp \frac{i\eta^2 \Gamma_0 C_j^{(\pm)}}{\tau_1^2}. \quad (8.52)$$

Здесь учтена конечная длительность импульса низкочастотной накачки, имеющего гауссову огибающую.

Сравнение (8.52) с аналогичным уравнением (8.25) для парциальных амплитуд экспоненциально нарастающих волн в параметрическом усилителе показывает их формальное сходство. Поэтому многие выражения, полученные в § 8.3, 8.4 для аномальной дифракции и параметрической диффузии второго порядка, можно использовать (при соответствующей замене коэффициентов, стоящих перед дифференциальными операторами) для анализа аномальных дисперсионных и дифракционных эффектов, развивающихся в поле низкочастотной волны накачки. Следует, однако, заметить, что если в параметрическом усилителе в сильных полях дифракция связан-



ных пучков определяется средней разностью коэффициентов распывания, то в преобразователе частоты — полусуммой этих коэффициентов. Это означает, что суммарные и разностные волны имеют примерно одинаковую фазовую модуляцию (если говорить о пучках, то они имеют одинаковый расходящийся волновой фронт). Длительности импульсов увеличиваются по закону

$$\tau_{2,3}(z) = \tau_2 [1 + (D_2 + D_3)^2 z^2 \tau_2^{-4}]^{1/2}. \quad (8.53)$$

На рис. 8.10 в качестве примера показана картина взаимодействия при  $D_2 = -5D_3$ ,  $l = 20l_{p2}$  и  $\Gamma_0 l = 10$  [7]. Так как средняя дисперсия равна  $D_{ср} = (D_3 + D_2)/2 = -2D_3$ , то импульсы согласно (8.53) должны уширяться в 4 раза; численные расчеты дают  $\tau_2(l) = 5\tau_2$  и  $\tau_3(l) = 3,5\tau_2$ . В линейной среде  $\tau_2(l) = 2\tau_2$  и  $\tau_3(l) = 10\tau_2$ .

Дисперсионное распывание второго порядка наступает при взаимодействии волн, имеющих противоположную дисперсию,  $D_2 \approx -D_3$ . При такой дисперсии гауссов профиль импульсов не сохраняется, более сложной становится фазовая модуляция, причем быстрые и медленные моды имеют разные знаки этой модуляции. В безабберрационном приближении можно получить оценку для длительности импульсов на больших расстояниях:

$$\tau_{2,3}(z) \approx \tau_2 (\pi z / R_{\Pi})^{1/2}, \quad (8.54)$$

где

$$R_{\Pi} = \Gamma_0 \tau_2^4 (D_2 - D_3)^{-2} / 2 \approx \Gamma_0 \tau_2^4 / 8D_3^2 \quad (8.55)$$

— длина параметрического дисперсионного распывания второго порядка (ср. с (8.17)).

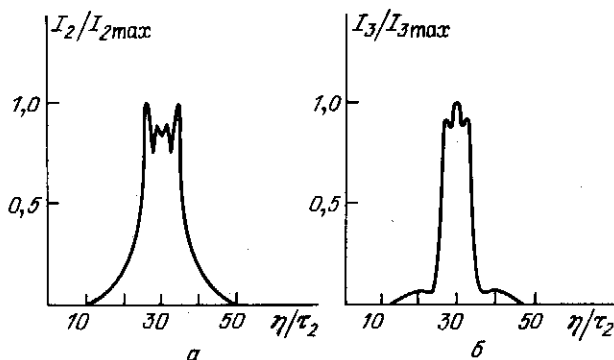


Рис. 8.10. Профили интенсивностей сигнального (а) и суммарного (б) импульсов с  $D_2 = -5D_3$  при усреднении скоростей дисперсионного распывания в поле мощной монохроматической волны накачки

При  $D_2 = -D_3$ ,  $l = 20l_p$  и  $\Gamma_0 l = 10$  длительности импульсов согласно данным численного эксперимента равны  $\tau_2(l) = 4,5\tau_2$  и  $\tau_3(l) = 4,6\tau_2$ . По оценкам (8.54), (8.55)  $\tau_{2,3}(l) = 5\tau_2$ .

С помощью уравнений для парциальных амплитуд можно также исследовать формирование параметрически связанных волноводов в поле ограниченного пучка низкочастотной накачки и их временные аналоги — квази-стационарные импульсы.

## ТРЕХВОЛНОВАЯ ВЗАИМОФОКУСИРОВКА И ВЗАИМОКОМПРЕССИЯ В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Дифракция волн при параметрическом взаимодействии с волной накачки претерпевает существенные изменения. Дифракция волн разных частот принимает аномальный характер: одна из них приобретает сходящийся волновой фронт. Усиление субгармоники сопровождается параметрической диффузией. Схожие эффекты появляются при взаимодействии волновых пакетов в диспергирующей среде.

При сильном энергообмене, когда интенсивности всех волн становятся одного порядка, аномальная дифракция и диффузия приводят к одновременной взаимофокусировке трех пучков. Обсуждению этого интересного механизма трехфотонной самофокусировки на нерезонансной квадратичной нелинейности и посвящена настоящая глава.

Если нелинейная дифракция взаимодействующих пучков сопровождается при превышении определенного порога только взаимофокусировкой, то нелинейно-дисперсионные эффекты более разнообразны. В зависимости от соотношения знаков и абсолютных величин развивается либо взаимокомпрессия, либо декомпрессия волновых пакетов. Взаимокомпрессия представляет, в частности, особый интерес для фемтосекундной нелинейной оптики как эффективный метод формирования сверхкоротких импульсов света в параметрических усилителях и генераторах.

### § 9.1. Взаимофокусировка основной и второй гармоник

Эффект взаимофокусировки в средах с квадратичной нелинейностью мы обсудим сначала для вырожденного по частоте случая трехволнового взаимодействия ограниченных пучков. К этому процессу относится прежде всего генерация второй гармоники  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Взаимодействие дифрагирующих пучков первой и второй гармоник описывается в квазиоптическом приближении системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + iD_1 \Delta_{\perp} A_1 &= -i\gamma A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + iD_2 \Delta_{\perp} A_2 &= -i\gamma A_1^2 e^{+i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где  $\Delta k = k_2 - 2k_1$ ,  $D_j = 1/2k_j$ ,  $\Delta_1$  — оператор Лапласа в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Для простоты в (9.1) положено  $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ .

Система (9.1) обладает интегралами движения  $J_j$ , которые не меняются в процессе распространения и взаимодействия волн,  $dJ_j/dz = 0$ . Первый из них имеет смысл закона сохранения полной энергии пучков:

$$J_1 = \sum_{j=1}^2 \iint dx dy |A_j|^2. \quad (9.2)$$

Важное значение во всей теории имеет третий интеграл движения, несущий информацию о дифракции волн, об амплитудных профилях и волновых фронтах пучков:

$$J_3 = \iint dx dy [2D_1 |\nabla_1 A_1|^2 + D_2 |\nabla_1 A_2|^2 - \Delta k |A_2|^2 - \gamma(A_1^* A_2^* + A_1^*{}^2 A_2)] . \quad (9.3)$$

Инварианты (9.2), (9.3) используются для качественного анализа решений исходных уравнений, а также для различных оценок взаимодействующих полей в нелинейном фокусе и в нелинейных волноводах. Большую ценность они представляют для контроля точности численных решений уравнений генерации второй гармоники.

Аналитическое решение квазилинейных уравнений параболического типа затруднительно. Поэтому на первый план выступают численные эксперименты. В [1] для подобных расчетов были разработаны консервативные разностные методы, построенные с учетом законов сохранения (9.2), (9.3). Точность вычислений была такова, что инварианты  $J_1$ ,  $J_3$  сохранялись вплоть до шестого знака.

Рассмотрим генерацию гармоники гауссовым пучком основного излучения, задавая на входе в нелинейную среду

$$E_1 = E_{10} \exp(-r^2/a_1^2), \quad E_2 = 0. \quad (9.4)$$

Поле второй гармоники, как видно из (9.4), полагается равным нулю. Учет малой конечной амплитуды, возникающей на передней грани среды из-за эффекта нелинейного отражения второй гармоники [2], как показали прямые численные эксперименты, не приводит к существенному изменению результатов, изложенных ниже.

При большой перекачке энергии из основной волны во вторую гармонику амплитуды пучков сравниваются по модулю, наступает режим нелинейного взаимодействия.

В приближении геометрической оптики без учета дифракционных членов ( $D_j = 0$ ) известны точные решения системы (9.1), выражающиеся через эллиптический синус (6.27). При фазовом синхронизме ( $\Delta k = 0$ ) происходит монотонная передача энергии основной волны волне второй гармоники; вблизи оси гауссова пучка этот процесс идет наиболее быстро. По мере увеличения пройденного расстояния в центре первого пучка начинает образовываться провал в профиле интенсивности, в результате чего поперечное сечение основного пучка приобретает вид кольца.

Без участия дифракции это кольцо постепенно исчезло бы, а пучок второй гармоники принял бы гауссову форму. Причем интенсивность второй гармоники в силу закона сохранения (9.2)  $I_1 + I_2 = I_{10}$  никогда не

превышала бы начальную интенсивность основного излучения. Однако чем более глубоким становится провал, тем большую роль играет дифракция. Вследствие дифракции в область образующегося темного пятна основного пучка начинает притекать энергия с его периферийной части. В результате минимальная амплитуда не достигает нуля на оси пучка. Однако дифракция выполняет и другую, может быть, более важную роль.

Как известно, при дифракции волны, в том числе и гауссова пучка, происходит изменение фазовой скорости и искривление волнового фронта (8.10). Это фундаментальное свойство дифрагирующих волн следует из структуры квазиоптических уравнений (9.1). Перед членом, описывающим поперечную диффузию амплитуды волнового пучка, стоит мнимая единица. В результате дифракционное проникновение волны в область тени неизбежно сопровождается изменением ее фазы. Данный эффект и является первопричиной зарождения механизма взаимофокусировки. Так как дифракция пучков первой и второй гармоник протекает по-разному, то различны и искажения волновых фронтов. В итоге развивается дифракционный сбой оптимальных фазовых соотношений, приводящий к обратной перекачке энергии, т.е. к ограничению эффективности преобразования частоты. Вопросы дифракционного предела КПД удвоителя частоты мы рассмотрим в гл. 11, а в этом параграфе остановимся на исследовании амплитудно-фазовых искажений пучков первой и второй гармоник.

Нелинейное взаимодействие ограниченных дифрагирующих волн приводит к сложному изменению фазы в поперечном сечении пучков. Чрезвычайно интересным и важным является то обстоятельство, что при этом формируются сходящиеся волновые фронты, вследствие чего развивается взаимная фокусировка основного излучения и гармоники или внутри слоя нелинейной среды, или за ним. Это хорошо видно из графиков для интенсивностей пучков, представленных на рис. 9.1 [3, 4].

Нелинейный фокус расположен примерно в середине слоя. В зависимости от начальной мощности  $P_{10}$  и конфокального параметра (дифракционной длины  $R_{д1}$  основного пучка) наблюдались три характерные картины взаимной фокусировки — образование одного фокуса на частоте гармоники (а), появление двух фокусов для обеих волн (б) и возникновение многофокусной структуры (в). Интенсивность поля в нелинейном фокусе может превосходить начальную интенсивность падающего на среду излучения в десятки и сотни раз. Это обстоятельство способно объяснить пробой кристаллов при синхронной генерации оптических гармоник, наблюдавшийся в экспериментах [5].

Физической причиной появления взаимофокусировки является, как уже было сказано, дифракционное искажение волновых фронтов на существенно нелинейной стадии взаимодействия гармоник. При этом центральная часть волнового фронта из расходящейся превращается в сходящуюся, что при дальнейшем распространении приводит к нелинейной фокусировке пучков и к увеличению интенсивности поля на оси.

Приведем результаты расчетов зависимостей величин, характеризующих нелинейный фокус — интенсивностей  $I_{jф}$  и положения фокусов  $z_{jф}$ , от параметра  $D_{нл} = D_1 (\Gamma_0 a_1^2)^{-1}$ , характеризующего соотношение между пространственным масштабом нелинейных взаимодействий  $l_{нл} = \Gamma_0^{-1} = (\gamma E_{10})^{-1}$  и дифракционной длиной  $R_{д1} = k_1 a_1^2 / 2$ , рассчитанной для

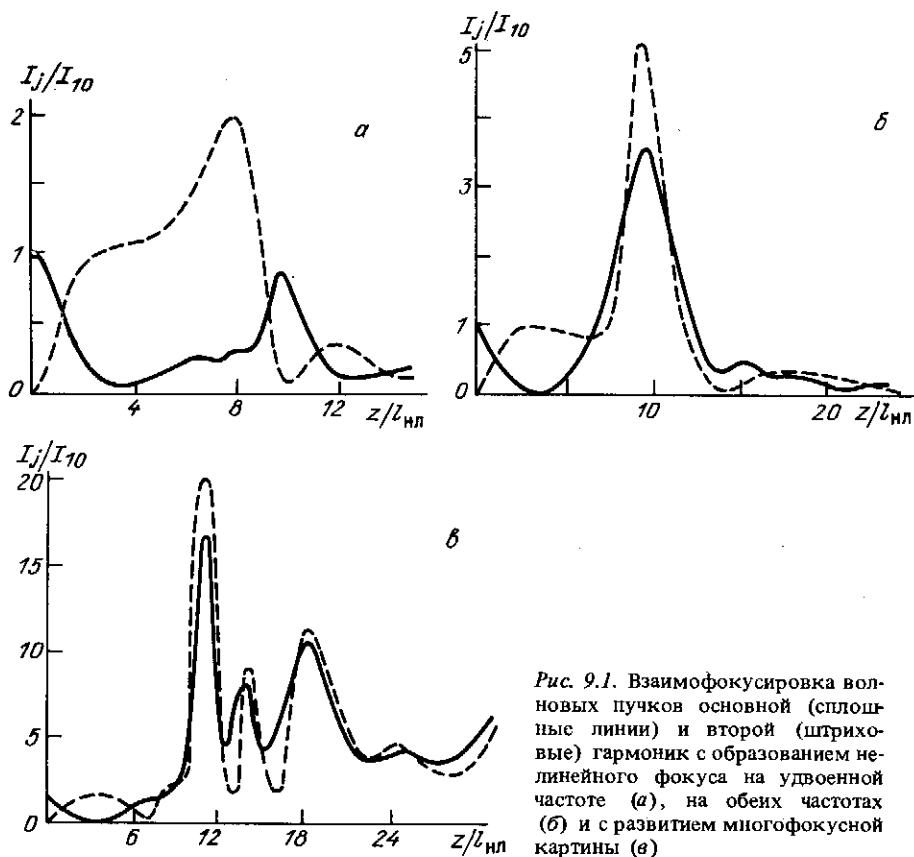


Рис. 9.1. Взаимофокусировка волновых пучков основной (сплошные линии) и второй (штриховые) гармоник с образованием нелинейного фокуса на удвоенной частоте (а), на обеих частотах (б) и с развитием многофокусной картины (в)

исходного пучка. В этих переменных ключевой параметр

$$D_{нл} = l_{нл}/4R_{д1}. \quad (9.5)$$

На рис. 9.2 и 9.3 изображены зависимости  $I_{j\phi}(D_{нл})$ ,  $z_{j\phi}(D_{нл})$ , рассчитанные с помощью большой серии численных экспериментов. Сплошные линии относятся к первой гармонике, штриховые — ко второй. Рис. 9.2 охватывает начальную стадию взаимофокусировки, а рис. 9.3 — процесс сильно развитой фокусировки. Из графиков видно, что при взаимофокусировке интенсивность поля в фокусе при малых  $D_{нл}$ , т.е. при  $l_{нл} \ll R_{д1}$ , может превышать начальную величину падающего пучка почти на три порядка. При этом расстояние до нелинейного фокуса, рассчитанное в нелинейных длинах, увеличивается.

Анализ информации, полученной в численных экспериментах и представленной на рис. 9.2, 9.3, позволяет провести классификацию различных режимов взаимной фокусировки двух гармоник. В зависимости от параметра  $D_{нл}$  существуют три области, поведение пучков в которых сильно различается.

Для области I характерно наличие только одного фокуса второй гармоники. В волне основной гармоники нелинейных фокусов с интенсивностью,

превышающей начальную, не возникает. В этом смысле область I принципиально отличается от областей II, III, в которых возникают фокусы для обоих пучков. На рис. 9.1а приведены характерные для этой области зависимости интенсивностей двух гармоник от расстояния  $z_{нл} = z/l_{нл}$ . Видно, что развитие взаимной фокусировки начинается даже несколько раньше, чем развитие обратной перекачки энергии. Максимальная интенсивность поля в фокусе, принадлежащем области I, как видно из рис. 9.2, равна примерно  $I_{2ф} \approx 2,5I_{10}$ . Изменение положения фокуса второй гармоники при варьировании параметра  $D_{нл}$  описывается почти линейной функцией.

Для области II характерными зависимостями интенсивностей являются изображенные на рис. 9.1б. В этой области помимо фокуса второй гармоники появляется фокус основного излучения. Интенсивность поля в фокусе основного пучка несколько меньше, чем в фокусе для второй гармоники. Интенсивность полей за нелинейными фокусами убывает немонотонно. Максимальная интенсивность второй гармоники возрастает в несколько раз по сравнению с областью I, причем закон изменения положения фокусов  $z_{jф}$  здесь иной. Положения фокусов обеих гармоник практически совпадают  $z_{jф} = z_{ф}$ , и мало меняются при изменении параметра  $D_{нл}$ . Средняя величина фокальной длины  $z_{ф} \approx 10,6l_{нл}$ .

Для области III характерно наличие многофокусной структуры. На рис. 9.1в изображены типичные для этой области зависимости интенсивностей полей на оси пучков. Видно, что за основным, главным возникает целый ряд других фокусов с еще достаточно большой интенсивностью. Перед основным фокусом при малых  $D_{нл}$  существуют очень слабые до-

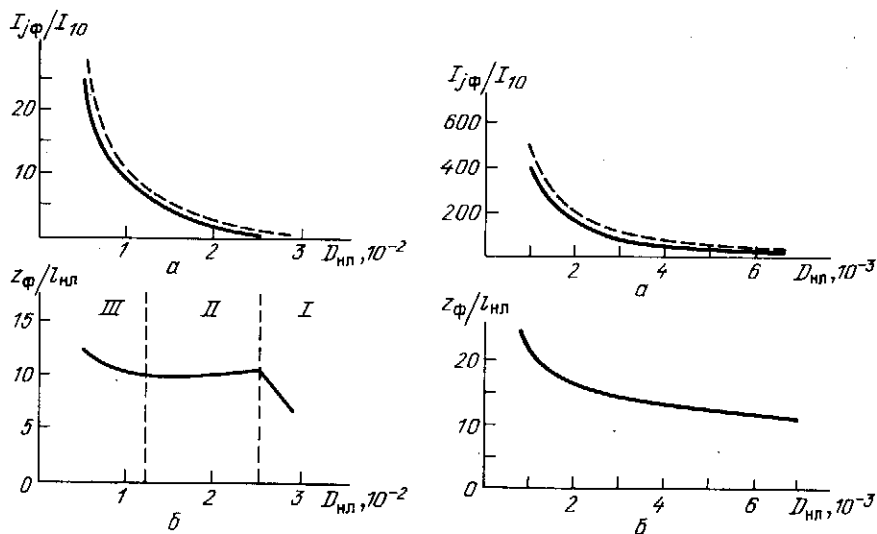


Рис. 9.2. Зависимости фокальных интенсивностей  $I_{jφ}$  основной (сплошные линии) и второй (штриховые) гармоник (а) и положения главного нелинейного фокуса  $z_{ф}$  (б) от нелинейно-дифракционного параметра  $D_{нл}$  при взаимофокусировке гауссовых пучков

Рис. 9.3. Продолжение рис. 9.2 в область меньших значений параметра  $D_{нл}$ , при которых развивается более сильная взаимофокусировка

полнительные фокусы с интенсивностью, превышающей начальную на десятки и сотни доли проценты.

На основе полученных результатов можно определить порог взаимофокусировки гауссовых пучков в удвоителе частоты. Обозначим максимальное значение параметра  $D_{\text{нл}}$ , при котором еще есть взаимофокусировка, через  $D_{\text{кр}}$ , а через  $z_{\text{кр}}$  — нормированную длину, на которой при  $D_{\text{нл}} = D_{\text{кр}}$  появляется фокус. Тогда выражение для пороговой интенсивности, при которой пучки двух гармоник самофокусируются на квадратичной нелинейности, имеет вид

$$E_{\text{кр}}^2 = 1/(4k_1^2 a_1^4 \gamma^2 D_{\text{кр}}^2). \quad (9.6)$$

Расстояние до нелинейного фокуса, возникающего при пороговой интенсивности,

$$z_{\text{ф}} \approx 0,8R_{\text{д}1}. \quad (9.7)$$

Видно, что первый фокус появляется в области дифракции Френеля. Из (9.6), (9.7) следует, что с увеличением радиуса входного пучка пороговая интенсивность и мощность падают, однако положение нелинейного фокуса отодвигается в глубь среды. Следует также отметить более сильную зависимость порога взаимофокусировки от длины волны, чем при самофокусировке на кубичной нелинейности, где пороговая мощность  $P_{\text{кр}} \propto \lambda_1^2/\chi_3$  [6]. Действительно, учитывая соотношение  $\gamma \propto \omega \propto \lambda^{-1}$ , легко показать, что при взаимофокусировке  $P_{\text{кр}} \propto \lambda_1^4/a_1^4 \chi_3^2$ . Из этого следует, что более благоприятные условия для экспериментального наблюдения взаимофокусировки имеют волновые пучки с большими частотами, вследствие уменьшения противодействия со стороны дифракции. Как следует из анализа графиков на рис. 9.2, критические значения параметров взаимофокусировки, входящие в (9.6), (9.7), примерно равны:  $D_{\text{кр}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $z_{\text{кр}} = 6,6$ . Реализация режимов взаимофокусировки II и III достигается, как видно из рис. 9.2, при меньших значениях параметра  $D_{\text{нл}}$  и, следовательно, при больших интенсивности и мощности основного пучка.

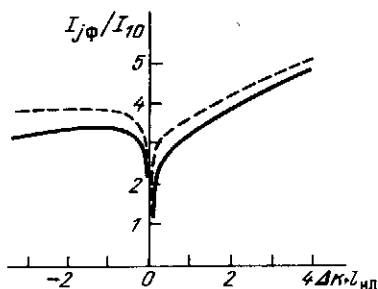
Если протяженность нелинейной среды меньше дифракционной длины пучка, то для образования фокуса необходимо превысить пороговую интенсивность. Потребуем, чтобы в точке  $z = l$  был нелинейный фокус с параметрами  $(z_{\text{ф}}, D_{\text{нл}})$  — см. рис. 9.2. Тогда необходимо подобрать следующие величины поперечного радиуса и интенсивности основного пучка на входе в нелинейную среду:

$$a_1 = [l/(2k_1 z_{\text{ф}} D_{\text{нл}})]^{1/2}, \quad I_{10} = z_{\text{ф}}^2 \gamma^{-2} l^{-2}. \quad (9.8)$$

Вблизи порога, когда  $D_{\text{нл}} = D_{\text{кр}}$ ,  $z_{\text{ф}} = z_{\text{кр}}$ , формулы (9.8) согласуются с (9.6), (9.7).

В рассмотренных примерах волновая расстройка для плоских волн полагалась равной нулю,  $\Delta k = 0$ . Введение небольшой расстройки принципиально не меняет общую картину взаимофокусировки. Однако конкретные параметры пучков (нелинейные фокусы и интенсивность в них, их число) могут измениться достаточно сильно. Так, если взять область I (рис. 9.2), то в отсутствие расстройки наблюдается один фокус гармоники. С появлением расстройки  $\Delta k$  в среде возникает также несколько фокусов и для основного пучка. На рис. 9.4 показаны зависимости интенсивностей в

Рис. 9.4. Зависимости интенсивностей в главных фокусах от расстройки волновых векторов при взаимофокусировке пучков основной (сплошные линии) и второй (штриховые) гармоник



нелинейных фокусах при положительных и отрицательных расстройках. Из графиков видно, что введение определенной расстройки благоприятствует развитию взаимной фокусировки двух пучков: интенсивность может возрасти в несколько раз. При этом фокусы приближаются к началу нелинейной среды.

В механизм некогерентной взаимофокусировки дают вклад эффекты, рассмотренные в [7]. Явление взаимофокусировки в удвоителе частоты мощного лазерного излучения наблюдалось в эксперименте [8].

## § 9.2. Теория подобия и нелинейная геометрическая оптика

Мощным инструментом исследования сложных задач является теория подобия нелинейных волновых процессов (§ 1.7). Напомним, что первый этап развития этого метода заключается в организации или выявлении безразмерных  $\pi$ -комплексов, составленных из физических параметров поставленной задачи. Обратимся к процессу генерации второй гармоники, описываемому квазиоптическими уравнениями (9.1). По существу, при обсуждении в предыдущем параграфе результатов численных экспериментов мы уже оперировали с безразмерными величинами. В частности, переходя к безразмерным переменным в (9.1), нетрудно записать общее представление интенсивностей волн в следующей критериальной форме:

$$I_j = I_{10} F(z/l_{нл}, r/a_1, D_{нл}, \Delta k \cdot l_{нл}). \quad (9.9)$$

Если интересоваться полем на оси пучков ( $r = 0$ ) и задать условие синхронизма для плоских волн  $\Delta k = 0$ , то (9.9) упрощается:

$$I_j(0, z) = I_{10} F(z/l_{нл}, D_{нл}). \quad (9.10)$$

Функция  $F$  рассчитывается численно на ЭВМ или находится аналитическими методами.

Возникновение нелинейного фокуса в (9.10) означает, что на некотором расстоянии  $z = z_\phi$  интенсивность волны превышает начальную в заданное число раз, причем само появление фокуса зависит от параметра  $D_{нл}$ . Как показано в § 9.1, существует критическая величина  $D_{кр}$ , определяющая необходимое условие для наблюдения взаимофокусировки  $D_{нл} \leq D_{кр}$ . Таким образом, можно записать общее выражение для



фокальной длины

$$z_{\Phi} = l_{\text{нл}} f(D_{\text{нл}}). \quad (9.11)$$

Именно эта зависимость представлена на рис. 9.2, 9.3.

До сих пор теория подобия носила достаточно тривиальный характер. Одна простой формулой (9.11) она не исчерпывается. Особую ценность представляет возможность перехода к нелинейной геометрической оптике ( $\lambda \rightarrow 0$ ) в рамках исходных функциональных выражений теории подобия (9.10). Дело заключается в следующем. При переходе к геометрической оптике дифракция волн не учитывается, остается описание хода лучей. В неоднородной среде эти лучи искривляются — эффект рефракции. В нелинейной среде неоднородность возникает под действием модулированной волны и рефракция становится нелинейной. Как и в линейном случае, характеристики нелинейной рефракции не должны зависеть от длины волны. Рассмотрим (9.11) с этих общих позиций. Нелинейная длина  $l_{\text{нл}} = (\gamma E_{10})^{-1}$ , а нелинейно-дифракционный параметр  $D_{\text{нл}} = (2k_1 a_1^2 \gamma E_{10})^{-1}$ , где  $\gamma \propto k_1 \propto \lambda_1^{-1}$ . Единственной комбинацией величин  $l_{\text{нл}}$  и  $D_{\text{нл}}$ , не содержащей длины волны, является

$$z_{\Phi} = C_1 l_{\text{нл}} / D_{\text{нл}}^{1/2}. \quad (9.12)$$

Это и есть характерный пространственный масштаб взаимофокусировки, определенный с точностью до константы  $C_1$ . Сравнение (9.12) с положением нелинейного фокуса на рис. 9.2б и 9.3б при варьировании параметра  $D_{\text{нл}}$  в широком диапазоне от  $2 \cdot 10^{-2}$  до  $10^{-3}$  показывает удовлетворительное соответствие при нормировочной константе  $C_1 \approx 1$ .

Подставляя в (9.12) определения  $l_{\text{нл}}$  и  $D_{\text{нл}}$  через параметры среды и излучения, находим расстояние до нелинейного фокуса при взаимофокусировке:

$$z_{\Phi} = C_2 a_1 (n_1 / \chi_2 E_{10})^{1/2}, \quad (9.13)$$

где  $C_2$  — константа порядка единицы. Эта запись напоминает выражение для длины самофокусировки в кубично-нелинейной среде  $z_{\Phi} \approx a_1 (n_0 / n_2 E_{10}^2)^{1/2}$ , где  $n_2 \propto \chi_3$  — коэффициент нелинейности показателя преломления [9]. Из такого сравнения выявляется общая закономерность взаимофокусировки и самофокусировки. В обоих случаях длина фокусировки определяется нелинейным изменением показателя преломления:  $z_{\Phi} \sim a_1 (n_0 / \Delta n_{\text{нл}})^{1/2}$ , только при самофокусировке  $\Delta n_{\text{нл}} \approx \chi_3 E_{10}^2$ , а при взаимофокусировке  $\Delta n_{\text{нл}} \approx \chi_2 E_{10}$ .

Вторым важным вопросом является величина, которую достигает интенсивность гармоник в нелинейной среде. В отличие от самофокусировки в кубично-нелинейной среде, где происходит коллапс волнового поля (обращение в бесконечность амплитуды в нелинейном фокусе [10, 11]), при взаимофокусировке интенсивности пучков всегда ограничены сверху. Мы далее обсудим эту проблему более подробно, а сейчас укажем, что зависимость максимальной интенсивности в фокусе от нелинейно-дифракционного параметра близка к следующей:

$$I_{1\Phi} = I_{10} D_{\text{кр}}^2 / D_{\text{нл}}^2 = I_{10}^2 / I_{\text{кр}}, \quad (9.14)$$

где в качестве критического параметра можно взять величину  $D_{\text{кр}} =$

$= 2,5 \cdot 10^{-2}$ , при достижении которой начинают фокусироваться обе гармоники (см. границу между областями I и II на рис. 9.2).

Таким образом, применение методов теории подобия позволяет придать результатам численных экспериментов по взаимофокусировке волновых пучков характер общих закономерностей. Это относится к определению положения нелинейного фокуса (9.13) и интенсивности полей в фокусе (9.14).

### § 9.3. Трехволновая взаимофокусировка в параметрическом усилителе

Анализ процесса перехода дифракции пучков в удвоителе частоты во взаимофокусировку показывает, что перед появлением нелинейного фокуса основное излучение и вторая гармоника обмениваются энергией в приосевой части пучков. В области, где вторая гармоника начинает отдавать свою энергию волне основной частоты, происходит, по сути дела, генерация субгармоники. Поэтому, очевидно, явление взаимофокусировки свойственно не только процессу генерации второй гармоники, но и параметрическому возбуждению субгармоники. Более того, взаимофокусировка наблюдается в общем случае распадной неустойчивости волнового пучка, когда на первой, линейной стадии, идет экспоненциальный рост амплитуд пучков сигнальной и холостой частот.

Переход параметрической диффузии субгармоники во взаимофокусировку. При параметрическом усилении слабого сигнала субгармоники на первой стадии экспоненциальный рост ее амплитуды сопровождается существенным подавлением дифракции субгармоники. Обычная дифракция сменяется или параметрической диффузией второго порядка (§8.2), или волноводным распространением (§ 8.3), при этом волновой фронт остается практически плоским. Однако при переходе в нелинейную ста-

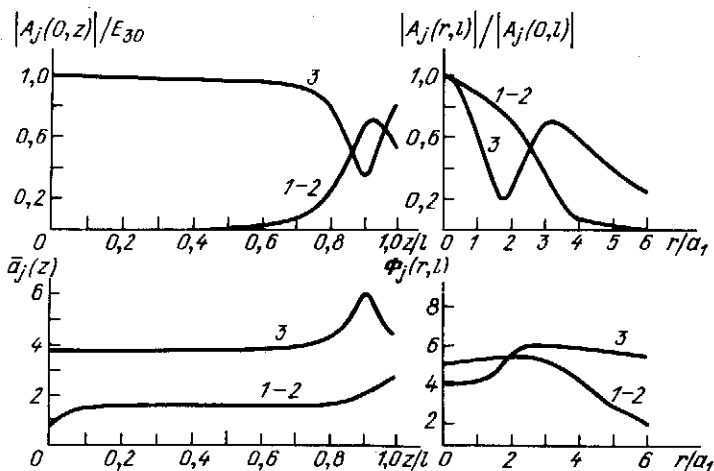


Рис. 9.5. Начальная стадия взаимофокусировки при параметрическом усилении субгармоники:

номера кривых на этом и следующем рисунках соответствуют значениям  $j = 1, 2, 3$

дию взаимодействия пучки накачки и субгармоники разрушают амплитудно-фазовые профили друг друга. В результате нелинейная дифракция проявляет новые качества: волновые фронты становятся сходящимися вблизи оси пучка, что и приводит к взаимофокусировке.

На рис. 9.5 представлены графики результатов численного решения квазиоптических уравнений (9.1) с граничными условиями, отвечающими параметрическому усилению волны субгармоники:

$$E_1 = 10^{-4} E_{20} \exp(-r^2/a_1^2), \quad E_2 = E_{20} \exp(-r^2/a_1^2). \quad (9.15)$$

По графикам можно проследить за изменениями амплитуд на оси двух пучков  $A_j(0, z)$ , их поперечных радиусов  $\bar{a}_j$  и профилей распределения амплитуды  $A_j(r, l)$  и фазы  $\Phi_j(r, l)$  по сечению пучка. Полное усиление в слое составляло  $\Gamma_0 l = 13$ ,  $R_{д1} = l$ ,  $D_{нл} = 1,4 \cdot 10^{-2}$ , т.е. рассматривался вблизипороговый процесс взаимофокусировки. Из рис. 9.5 видно, что сначала пучок субгармоники стабилизируется аналогично тому, как это происходило при формировании параметрического волновода (§ 8.3). Далее вследствие истощения энергии в центре основного пучка начинает образовываться провал интенсивности, который из-за дифракции сглаживается благодаря притоку энергии с периферийной части пучка. Этапы формирования кольцевой структуры можно фиксировать по резкому возрастанию радиуса пучка, который вычислялся в численном эксперименте по уровню половинной интенсивности на оси.

За точкой  $z = 0,9l$  в приосевой области наблюдается обратный переход энергии от мощной субгармоники к ослабленной волне накачки — это, по существу, процесс генерации второй гармоники излучения субгармоники. При таком взаимодействии волновые фронты пучков, как видно из рис. 9.5, становятся сходящимися вблизи оси. Можно ожидать, что в более протяженной среде пучки двух гармоник сфокусировались бы внутри нее. Заметим, что заданному в численном эксперименте параметру  $D_{нл} = 1,4 \cdot 10^{-2}$  соответствует второй тип взаимофокусировки (рис. 9.16, 9.2).

Таким образом, взаимофокусировка волновых пучков проявляется при мощном возбуждении субгармоники.

**Переход аномальной дифракции во взаимофокусировку.** Взаимофокусировка трех пучков при невырожденном взаимодействии показана на рис. 9.6. Здесь два слабых гауссовых пучка  $E_{1,2} = 10^{-4} E_{30} \exp(-r^2/a_1^2)$  усиливаются в широком пучке накачки  $E_3 = E_{30} \exp(-r^2/20a_1^2)$ . Были выбраны следующие соотношения частот:  $\omega_1 = 0,2\omega_3$ ,  $\omega_2 = 0,8\omega_3$ ; в соответствии с этим коэффициенты параметрической связи волн равны:  $\gamma_1 E_{30} l = 6$ ,  $\gamma_2 E_{30} l = 24$ ,  $\gamma_3 E_{30} l = 30$ , дифракционные длины —  $R_{д1} = 1,25l$ ,  $R_{д2} = 3,125l$ .

Из графиков на рис. 9.6 видно, что после аномальной дифракции и стабилизации усиливаемых пучков (ср. с рис. 8.6) развивается сильный энергообмен между всеми пучками, причем пространственные биения амплитуд из-за дифракции перестают быть периодическими, как это имеет место при взаимодействии плоских волн. В процессе образования кольцевых зон амплитуды на оси пучков начинают на расстояниях  $z > 0,4l$  в среднем возрастать и достигают максимальных значений в нелинейном фокусе  $z_{\Phi} = 0,9l$ ; одновременно с этим радиусы пучков стремительно сокращаются. При взаимной фокусировке волновые фронты пучков с большими

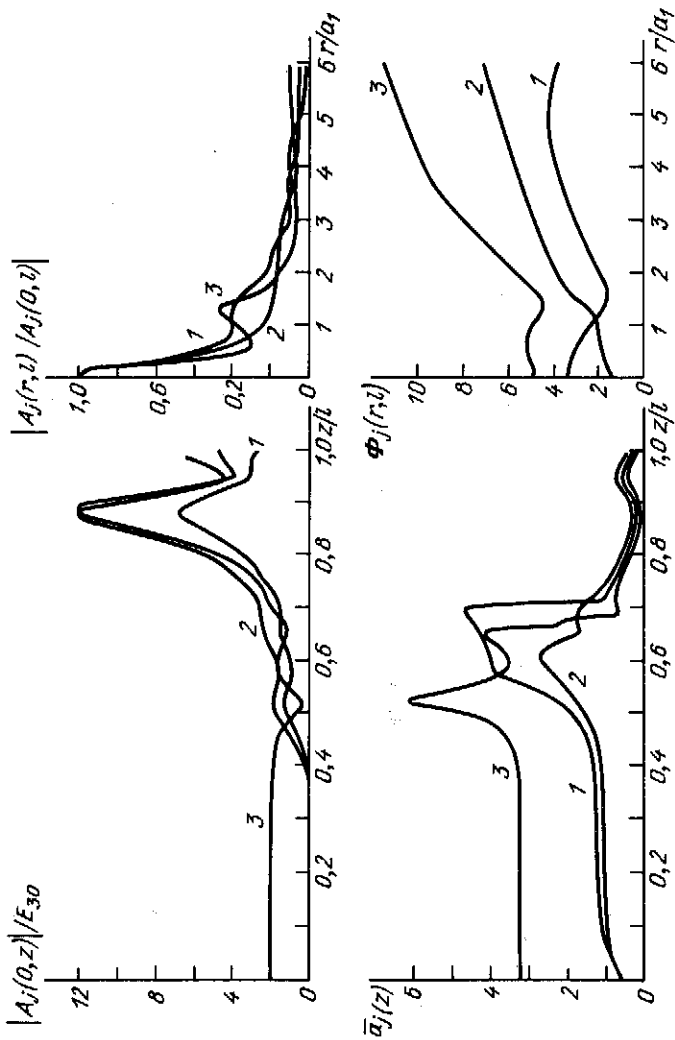


Рис. 9.6. Взаимофокусировка трех пучков разных частот при переходе параметрического усиления волн 1 и 2 в режим сильного энергообмена с волной накачки 3

частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  становятся сходящимися, а с меньшей  $\omega_1$  — расходящимися в присоединенной области (ср. с рис. 8.6).

Численные эксперименты показывают, что поля в нелинейном фокусе ограничены по величине (рис. 9.3, 9.4). Этот важный факт строго доказывается с помощью интегралов движения (9.2), (9.3). Введем две величины, характеризующие амплитуды волн и свойства среды [12],

$$M = \sum_{j=1}^3 A_j(0, z), \quad m = \min_j (D_j/\gamma_j). \quad (9.16)$$

Используя ряд неравенств для оценки интегралов, входящих в (9.3), укажем верхнюю границу амплитуд при взаимофокусировке:

$$M \leq (6J_1)^{1/2} (2J_1/3m^2)^{p/(8-2p)}, \quad (9.17)$$

где  $p = 1$  для одномерных пучков и волновых пакетов,  $p = 2$  для цилиндрических двумерных пучков. Считая все амплитуды в фокусе одного порядка ( $M \approx 3A_\Phi$ ) и учитывая, что наименьшую дифракцию из трех волн испытывает пучок накачки ( $m = D_3/\gamma_3$ ), получим при сильно развитой взаимофокусировке гауссовых пучков ( $J_1 = \pi E_{10}^2 a_1^2/2$ ) верхнюю оценку для интенсивности поля пучка в нелинейном фокусе ( $p = 2$ ):

$$I_\Phi \leq I_{30}/D_{\text{нл}}^2. \quad (9.18)$$

Интересно отметить, что мы получили ту же функциональную зависимость фокальной интенсивности от нелинейно-дифракционного параметра  $D_{\text{нл}}$ , что и с помощью теории подобия (9.14).

#### § 9.4. Самокомпрессия волновых пакетов при взаимодействии двух гармоник

Взаимодействие волновых пакетов в отличие от пучков протекает в диспергирующей среде более разнообразно. Дело в том, что коэффициенты поперечной диффузии при дифракции пучков полностью определяются их волновыми числами,  $D_j = (2k_j)^{-1}$ . Очевидно, что все три коэффициента положительны, причем в силу условия синхронизма ( $k_3 = k_1 + k_2$ ) они связаны между собой соотношением  $D_3^{-1} = D_1^{-1} + D_2^{-1}$ . Физика взаимодействия дифрагирующих пучков такова, что при перечисленных свойствах коэффициентов дифракции волновые пучки испытывают кооперативную самофокусировку. Трехволновая дефокусировка, т.е. нелинейное ускоренное расплывание пучков, в численных экспериментах не зарегистрирована.

Иная картина наблюдается при взаимофокусировке волновых пакетов. Здесь роль коэффициентов поперечной диффузии выполняют коэффициенты дисперсии второго порядка  $D_j = (-1/2)\partial^2 k_j/\partial \omega_j^2$ , которые не связаны столь строгими рамками, как аналогичные им коэффициенты дифракции пучков. Во-первых, дисперсионные коэффициенты могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от свойств среды и значения несущей частоты волнового пакета. Во-вторых, коэффициенты дисперсии второго порядка могут иметь достаточно произвольные абсолютные величины [13]. Все это и определяет более широкую гамму нелинейно-дисперсионных эффектов при взаимодействии волновых пакетов.

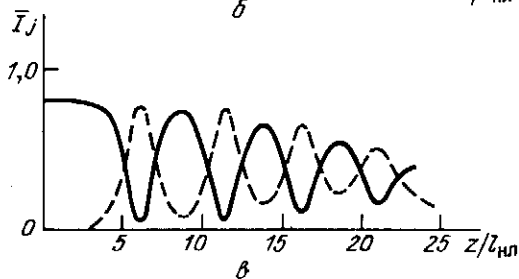
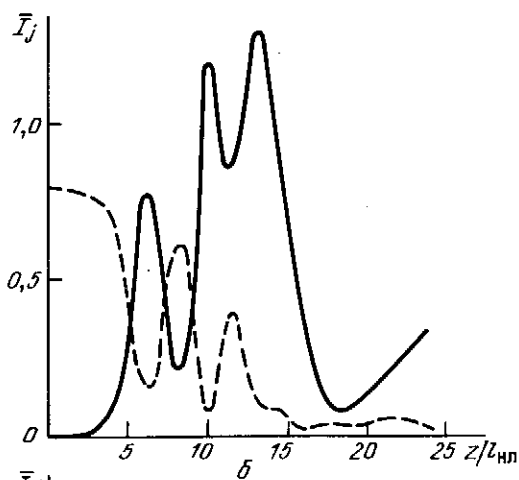
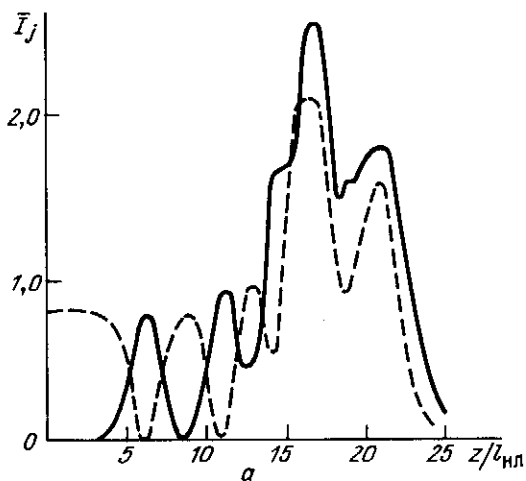


Рис. 9.7. Зависимости интенсивностей основной (штриховые линии) и субгармоники (сплошные) при параметрическом усилении последней:

а — самокомпрессия обоих импульсов; б — самокомпрессия субгармоники и декомпрессия основной гармоники; в — декомпрессия обоих импульсов

Мы ограничимся обсуждением вырожденного по частоте взаимодействия пакетов. В соответствии с постулатами теории подобия интенсивность волновых пакетов можно записать в общем виде через безразмерные  $\pi$ -комплексы:

$$I_f(0, z) = I_{10} F(z/l_{\text{нл}}, D_1/D_2, D_{\text{нл}}), \quad (9.19)$$

где  $D_{\text{нл}}$  имеет тот же вид, что и при описании дифракции пучков (9.5), с заменой  $R_{\text{д1}}$  на длину дисперсионного расплывания пакета  $l_{\text{р1}} = \tau_1^2 (2\partial^2 k_1 / \partial \omega_1^2)^{-1}$ . По сравнению с (9.10) в (9.19) появился новый параметр  $D_1/D_2$ , который может принимать самые различные значения.

**Взаимокомпрессия волновых пакетов с дисперсией  $D_1 D_2 > 0$ .** Если исходить из аналогии с нелинейной дифракцией пучков, при одинаковых знаках дисперсии групповых скоростей ( $D_1 D_2 > 0$ ) следует ожидать при превышении определенного порога в среде с квадратичной нелинейностью возникновение самокомпрессии трех волновых пакетов. Такое явление действительно было обнаружено в численных экспериментах [14, 15]. Причем взаимокомпрессия наступает как в режиме генерации второй гармоники ( $E_{20} = 0$ ), так и на нелинейной стадии параметрического усиления субгармоники ( $E_{10} \ll E_{20}$ ).

На рис. 9.7а представлены графики изменения с расстоянием интенсивностей в центре волновых пакетов ( $\eta = 0$ ) при  $D_{\text{нл}} = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_1 = 2D_2$  при усилении субгармоники с начальной амплитудой  $E_{10} = 10^{-2} E_{20}$ . Видно, что после нескольких взаимных обменов энергией импульсы двух гармоник испытывают самокомпрессию. Зависимости интенсивностей и положений нелинейного фокуса при взаимокомпрессии пакетов от нелинейно-дисперсионного параметра  $D_{\text{нл}}$  показаны на рис. 9.8. Как и в случае взаимофокусировки пучков, эффект самокомпрессии имеет пороговый характер, причем  $D_{\text{кр}} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ . Оценку интенсивности в точке компрессии можно провести с помощью формул (9.16), (9.17), полагая  $p = 1$ . Эту оценку можно уточнить, применив к анализу интегралов движения теоремы вложения [15]:

$$I_{1\text{к}}^2 = 0,25 [J_1 + (J_1^2 + 4 \max\{D_{\text{нл},1}^{-1}, D_{\text{нл},2}^{-1}\} J_1 + 4J_3)^{1/2}]^2, \quad (9.20)$$

$$I_{2\text{к}}^2 = [J_1 + (J_1^2 + \max\{D_{\text{нл},1}^{-1}, D_{\text{нл},2}^{-1}\} J_1 + 4J_3)^{1/2}]^2.$$

Хотя оценки полей в точках самокомпрессии по формулам (9.20) завышены, из них можно получить функциональную связь

$$I_{\text{жк}} = I_{20} D_{\text{кр}} / D_{\text{нл},2}. \quad (9.21)$$

Сопоставление взаимофокусировки (9.14) с компрессией импульсов (9.21) показывает, что переход от двумерного пучка к одномерному пакету снижает степень нелинейного сжатия. Эта закономерность проявляется и в линейных средах при обычной фокусировке пучков сферической и цилиндрической линзами. Значение критического параметра  $D_{\text{кр}}$  в (9.21) зависит от соотношения дисперсий двух волн  $D_1/D_2$ . При  $D_1 = 2D_2$  имеем  $D_{\text{кр}} = 3 \cdot 10^{-2}$  (рис. 9.8).

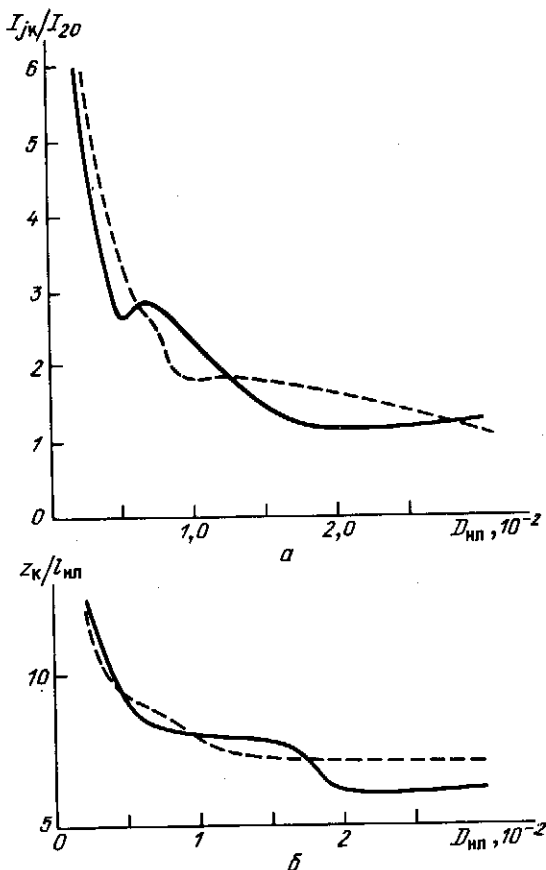


Рис. 9.8. Значения интенсивностей (а) в точках самокомпрессии (б) в зависимости от нелинейно-дисперсионного параметра  $D_{нл}$  при взаимодействии волновых пакетов на основной (сплошные линии) и удвоенной (штриховые) частотах для  $D_1 = 2D_2$

**Взаимокомпрессия импульсов с дисперсией  $D_1 D_2 < 0$ .** Импульсы могут испытывать самокомпрессию и при дисперсии второго порядка разного знака. Однако при этом абсолютные величины коэффициентов дисперсии должны отличаться в несколько раз. Существенным отличием этого случая от предыдущего, где  $D_1 D_2 > 0$ , является то, что компрессии подвергается только один из пакетов — другой испытывает нелинейное дисперсионное распыление. На рис. 9.7б показан комбинированный процесс самокомпрессии-декомпрессии при  $D_{нл,1} = 2 \cdot 10^{-3}$  и  $D_2 = -10D_1$ . Сжатие импульса наблюдается только на частоте субгармоники. Волновой пакет на основной частоте распыляется. Следует подчеркнуть, что моноимпульсная самокомпрессия в среде с  $D_1 D_2 < 0$  менее эффективна, чем одновременное сжатие сразу двух пакетов в средах с  $D_1 D_2 > 0$  [15].



### § 9.5. Нелинейная декомпрессия взаимодействующих импульсов

Как известно, явление самофокусировки имеет своим антиподом нелинейную дефокусировку, а самосжатие — декомпрессию [16, 17]. Так же обстоит дело и при взаимодействии волновых пакетов — самокомпрессия сменяется декомпрессией волновых пакетов, если они имеют разные знаки дисперсии ( $D_1 D_2 < 0$ ), но их абсолютные величины близки друг к другу,

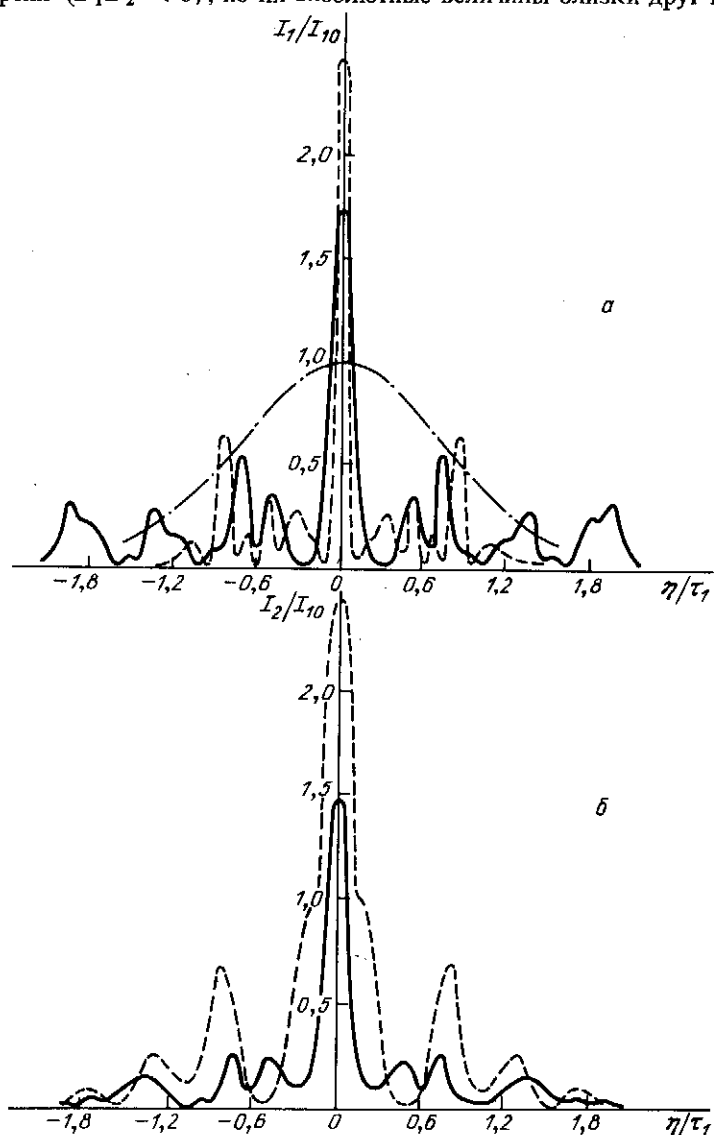


Рис. 9.9. Огибающие импульсов основной (а) и второй (б) гармоник при параметрической самокомпрессии на различных расстояниях:

$z = 0$  (штрихпунктирная линия),  $10l_{\text{нл}}$  (штриховая) и  $20l_{\text{нл}}$  (сплошная),  $D_{\text{нл}} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_1 = 2 D_2$

$|D_1| \approx |D_2|$ . Процесс взаимной декомпрессии двух гармоник хорошо виден на рис. 9.7в. Здесь были выбраны следующие параметры:  $D_{нл,1} = 10^{-2}$ ,  $D_2 = -0,5 D_1$ ,  $E_{10} = 10^{-2} E_{20}$ . При декомпрессии средняя длительность волновых пакетов увеличивается с расстоянием, пиковые значения амплитуд уменьшаются в среднем быстрее, чем это было бы за счет линейного дисперсионного расплывания импульсов.

При нелинейной компрессии и декомпрессии амплитудные профили исходных гауссовых импульсов сильно искажаются. Вслед за нелинейной aberrацией огибающие приобретают сложную структуру. Случай взаимнокомпрессии представлен на рис. 9.9. В центре импульсов формируются узкие выбросы интенсивностей гармоник. Два примера взаимной декомпрессии при возбуждении второй гармоники приведены на рис. 9.10 и при генерации первой субгармоники — на рис. 9.11.

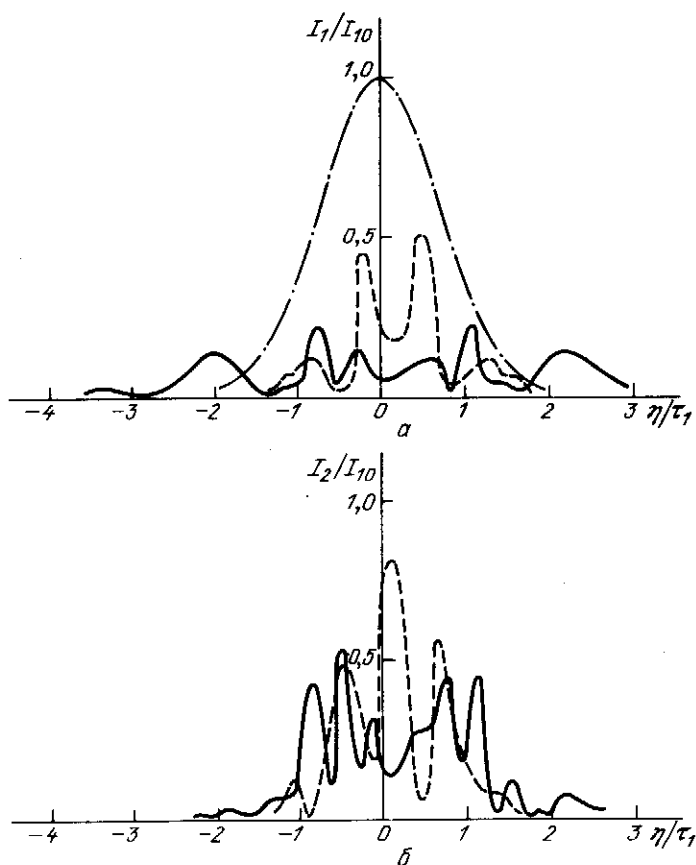


Рис. 9.10. Огибающие импульсов основной (а) и второй (б) гармоник при параметрической декомпрессии на тех же расстояниях, что и на рис. 9.9:

$D_{нл} = 10^{-2}$ ,  $D_1 = -0,2 D_2$ . На начальном этапе взаимодействия идет генерация второй гармоники

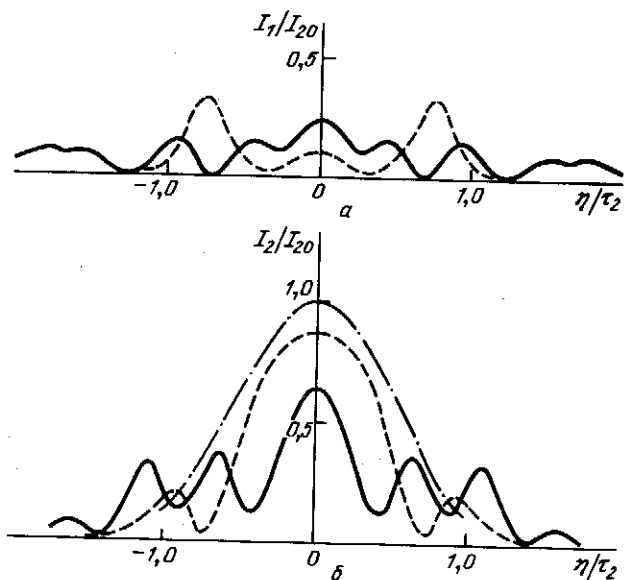


Рис. 9.11. Огибающие импульсов суб- (а) и основной (б) гармоник при параметрической декомпрессии на тех же расстояниях, что и на рис. 9.9:

$D_{\text{НЛ}} = 10^{-2}$ ,  $D_1 = -2D_2$ . На начальном этапе идет генерация субгармоники с уровня  $E_{10} = 10^{-2} \cdot E_{20}$ .

Указанные закономерности были подтверждены в серии последующих работ по численному моделированию взаимокомпрессии и декомпрессии импульсов [18, 19], см. также обзор [15].

## ТРЕХЧАСТОТНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫЕ СОЛИТОНЫ И ВОЛНОВОДЫ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Распыливание волновых пакетов, вызванное дисперсией второго порядка, может быть уравновешено нелинейными эффектами. В средах с кубической нелинейностью формируются одночастотные солитоны огибающей. Новый класс солитонов возникает в средах с квадратичной нерезонансной нелинейностью благодаря реактивному взаимодействию трех волновых частот. В гл. 7 обсуждались свойства параметрически связанных "светлых" и "темных" солитонов при наличии относительной дисперсии первого порядка. Когерентное трехчастотное взаимодействие импульсов способно компенсировать и дисперсию второго порядка. При этом уединенные волны-солитоны огибающих образуются одновременно на всех частотах.

### § 10.1. Уравнения для огибающих связанных солитонов

Взаимодействие трех импульсов в среде с квадратичной нелинейностью и дисперсией второго порядка описывается параболическими уравнениями для медленно меняющихся амплитуд (1.43), имеющими интегралы движения (1.52), (1.53). Так как нас в данной главе интересуют стационарные уединенные волны, ищем решения этих уравнений в виде ( $j = 1, 2, 3$ )

$$A_j = \left( \frac{\gamma_j D_1 D_2 D_3}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 D_j \tau_c^4} \right)^{1/2} E_{jc}(\eta_c) e^{i(\Omega_j \eta_c - q_j z)}, \quad (10.1)$$

где  $E_{jc}$  — нормированные амплитудные профили связанных солитонов,  $\eta_c = t - z/u_c$ ,  $u_c$  — скорость солитонов,  $\tau_c$  — их длительность,  $\Omega_j$  — частотные отстройки относительно несущих частот  $\omega_j$ ,  $q_j$  — поправки к волновым числам  $k_j$ . Подставляя (10.1) в (1.53), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для огибающих солитонов [1–4]:

$$\frac{d^2 E_{jc}}{d\eta_c^2} = p_j E_{jc} - \frac{\partial U_c}{\partial E_{jc}^*},$$

$$U_c = E_{1c}^* E_{2c}^* E_{3c} e^{id_c \eta_c} + \text{к.с.}, \quad (10.2)$$

где  $\bar{\eta}_c = \eta_c/\tau_c$ ,  $p_j > 0$  — параметры солитонов. Поправки к волновым числам и частотные отстройки связаны между собой соотношениями

$$q_j = (p_j/\tau_c^2 - \Omega_j^2)D_j, \quad q_3 = q_1 + q_2 - \Delta k, \quad (10.3)$$

причем сдвиги частот солитонов (10.1) подобраны таким образом, чтобы уравнения (10.2) не содержали первых производных,

$$\Omega_j = \nu_{jc}/2D_j, \quad d_c = \Delta\Omega\tau_c = (\Omega_3 - \Omega_1 - \Omega_2)\tau_c. \quad (10.4)$$

Уравнения (10.2) будем исследовать при условиях, отвечающих уединенным волнам:

$$E_{jc} = 0, \quad dE_{jc}/d\eta_c = 0 \quad \text{при} \quad |\eta_c| \rightarrow \infty. \quad (10.5)$$

Из (10.2) видно, что свойства трехчастотных связанных солитонов зависят от значения параметров  $p_j$  (они связаны между собой в силу соотношений (10.3)) и параметра частотной модуляции  $d_c$  (10.4). Исключая из (10.3), (10.4) величины  $q_j$  и  $\Omega_j$ , находим систему алгебраических уравнений для определения групповой скорости и длительности солитонов, решение которой дает следующие выражения для  $\tau_c$ :

$$\tau_c^2 = \frac{-d_c^2 + (p_1D_1 + p_2D_2 - p_3D_3)(D_1^{-1} + D_2^{-1} - D_3^{-1})}{(D_1^{-1} + D_2^{-1} - D_3^{-1})(\Delta k + \nu_{12}^2 D_2^{-1} - \nu_{13}^2 D_3^{-1}) - (\nu_{12}D_2^{-1} - \nu_{13}D_3^{-1})^2}. \quad (10.6)$$

Анализ (10.6) показывает, что одинаковую длительность и групповую скорость имеет целое семейство связанных солитонов с одной и той же комбинацией параметров  $p_j$ :  $p_1D_1 + p_2D_2 = \text{const}$ , но отличающихся профилями, полной энергией и распределением энергии между ними. Таким образом, соотношения между энергиями солитонов и их длительностями являются неоднозначными. Эта проблема является одной из основных в теории связанных солитонов.

## § 10.2. Свойства солитонов при групповом синхронизме

Если в среде групповые скорости волн согласованы,  $u_1 = u_2 = u_3$ , то естественно положить  $u_c = u_j$ ; при этом  $\nu_{jc} = 0$  и параметр частотной модуляции  $d_c = 0$  (10.4). В этом случае амплитуды солитонов становятся действительными величинами,  $E_{jc} = E_{jc}^*$  (фазовая модуляция отсутствует), и уравнения (10.2) упрощаются:

$$d^2 E_{jc}/d\bar{\eta}_c^2 = p_j E_{jc} - E_{1c} E_{2c} E_{3c} E_{jc}^{-1}. \quad (10.7)$$

Система (10.7) имеет интеграл движения (гамильтониан)

$$H = \sum_{j=1}^3 \{ (dE_{jc}/d\bar{\eta}_c)^2 - p_j E_{jc}^2 \} + 2E_{1c} E_{2c} E_{3c}. \quad (10.8)$$

Из условия уединенности волн (10.5) находим, что  $H = 0$ . Это позволяет получить из (10.8), полагая  $\partial E_{jc}/\partial \bar{\eta}_c = 0$  при  $\bar{\eta}_c = 0$ , связь амплитуд  $E_{j0}$  в центре солитонов колоколообразной формы:

$$p_1 E_{10}^2 + p_2 E_{20}^2 + p_3 E_{30}^2 = 2E_{10} E_{20} E_{30}. \quad (10.9)$$

Последнее соотношение используется для контроля точности расчетов огибающих солитонов при численном решении (10.2).

Среди связанных солитонов с колоколообразными профилями огибающих существует класс уединенных волн с одинаковыми параметрами  $p_j = p$ :

$$E_{jc} = 1,5 p \operatorname{sech}^2(p^{1/2} \bar{\eta}_c/2). \quad (10.10)$$

Нетрудно убедиться, что амплитуды  $E_{j0}$  удовлетворяют соотношению (10.9).

Если один из параметров много больше двух других, например  $p_3 \gg p_1, p_2$ , то в уравнении для  $E_{3c}$  можно в первом приближении пренебречь второй производной, получая  $E_{3c} = E_{1c} E_{2c}/p_3$ . Подставив это соотношение в другие два уравнения (10.7), находим два связанных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{1c}}{\partial \bar{\eta}_c^2} &= p_1 E_{1c} - \frac{1}{p_3} |E_{2c}|^2 E_{1c}, \\ \frac{d^2 E_{2c}}{\partial \bar{\eta}_c^2} &= p_2 E_{2c} - \frac{1}{p_3} |E_{1c}|^2 E_{2c}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

При равенстве параметров ( $p_1 = p_2$ ) решение имеет простой вид

$$\begin{aligned} E_{1c} &= E_{2c} = (2p_3)^{1/2} p_1 \operatorname{sech}(p_1^{1/2} \bar{\eta}_c), \\ E_{3c} &= 2p_1^2 \operatorname{sech}^2(p_1^{1/2} \bar{\eta}_c). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Видно, что солитоны на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обладают более плавным профилем, чем на частоте  $\omega_3$ .

Наконец, если два параметра велики по сравнению с третьим,  $p_3 \gg p_1, p_2 \gg p_1$ , то амплитуды связаны приближенными соотношениями

$$p_2 E_{20}^2 \approx p_3 E_{30}^2, \quad E_{10} \approx (p_2 p_3)^{1/2}. \quad (10.13)$$

Обратимся теперь к результатам численных расчетов огибающих солитонов. В [3, 4] на основе вариационного принципа доказано существование связанных трехчастотных солитонов, описываемых уравнениями (10.2), (10.7). Схема доказательства была затем положена в основу алгоритма численных расчетов структуры основных мод солитонов. В качестве примера на рис. 10.1 приведены профили огибающих солитонов, рассчитанные итерационным методом при различных параметрах  $p_j$  [5, 6]. На рис. 10.1а показаны огибающие при частичном вырождении параметров,  $p_1 = p_2 = 1$  и  $p_3 = 9$ . Сравнение результатов с получаемыми по приближенным формулам (10.12) показывает хорошее соответствие данного случая модели (10.11). На рис. 10.1б параметры всех волн различны (вырождение снято). Этот случай близок, как можно убедиться, к ситуации (10.13).

При равенстве групповых скоростей ( $u_c = u_j$ ) длительность солитонов (10.6) определяется более простой формулой:

$$\tau_c^2 = (p_1 D_1 + p_2 D_2 - p_3 D_3) / \Delta k. \quad (10.14)$$

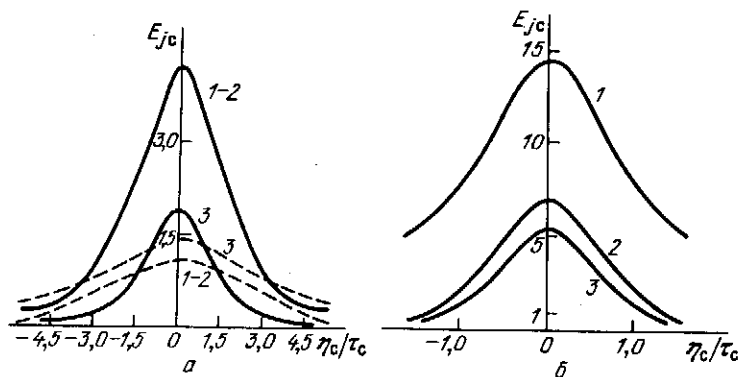


Рис. 10.1. Огибающие параметрически связанных солитонов:

*a* — вырожденное трехчастотное взаимодействие при  $p_1 = p_2 = 1$ ,  $p_3 = 9$  (сплошные линии) и  $p_3 = 0,5$  (штриховые); *б* — невырожденное трехчастотное взаимодействие при  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 9$  и  $p_3 = 16$ . Номера кривых на рисунках этой главы, если не указано противное, соответствуют значениям параметра  $j = 1, 2, 3$

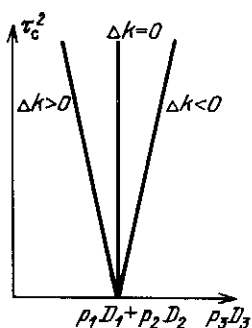


Рис. 10.2. Зависимости длительностей солитонов от соотношения параметров  $p_j$  при различных расстройках волновых чисел  $\Delta k$ , вычисленных для линейной среды

Видно, что при выполнении фазового синхронизма ( $\Delta k = 0$ ) длительность может иметь произвольную величину; но при этом параметры  $p_j$  связаны соотношением

$$p_3 = (p_1 D_1 + p_2 D_2) / D_3. \quad (10.15)$$

Например, если  $p_1 = p_2 = p_3$ , то должно выполняться  $D_1 + D_2 = D_3$ . Если же параметры  $p_j$  не подчиняются условию (10.15), то солитоны образуются только при отстройке от синхронизма ( $\Delta k \neq 0$ ). На рис. 10.2 изображены зависимости длительностей солитонов (10.14) от параметра  $p_3$  при различных фазовых расстройках  $\Delta k$ .

### § 10.3. Специальные солитоны при групповых расстройках

Пусть теперь волновые пакеты имеют в линейном приближении разные групповые скорости  $u_1 \neq u_2 \neq u_3$ . Тогда скорость солитонов оказывается равной некоторой промежуточной величине. Среди солитонов, рождающихся при критическом синхронизме, особое место занимают специальные солитоны без фазовой модуляции. Для этого, как видно из (10.2), необходимо, чтобы параметр частотной модуляции  $d_c = 0$ . При таком условии амплитуды солитонов становятся действительными величинами и из (10.2) вытекают прежние уравнения (10.7), исследованные в предыдущем параграфе.

Условие  $d_c = 0$  накладывает простую связь на сдвиги центральных солитонов

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3, \quad (10.16)$$

где  $\Omega_j$  заданы (10.4). При таких сдвигах частот устанавливается, как нетрудно проверить, групповой синхронизм между волновыми пакетами. Поэтому отличительной чертой специальных солитонов является их жесткая привязка к дисперсионным характеристикам среды  $D_j$  и  $u_j$ . Действительно, полагая в (10.4)  $d_c = 0$ , находим выражение для групповой скорости специальных солитонов

$$u_c = \frac{D_1^{-1} + D_2^{-1} - D_3^{-1}}{(D_1 u_1)^{-1} + (D_2 u_2)^{-1} - (D_3 u_3)^{-1}}. \quad (10.17)$$

Она, как видно, не зависит от интенсивностей волн и нелинейности среды.

Если соотношения между  $D_j$  и  $u_j$  таковы, что скорость специальных солитонов стремится к нулю или к бесконечности, то, как показывают

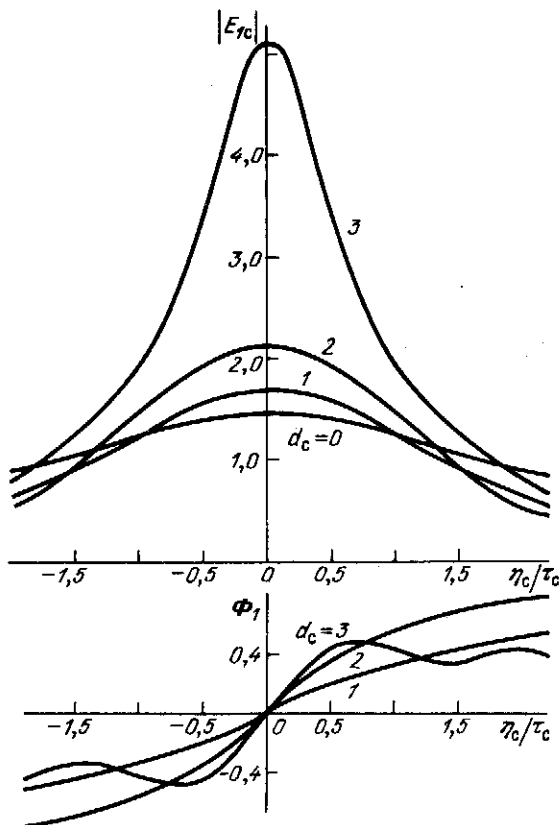


Рис. 10.3. Амплитудные и фазовые профили солитона при вырожденном взаимодействии с  $p_j = 1$  в условиях частотной расстройки при наличии относительной дисперсии первого порядка



численные эксперименты, вместо специальных солитонов при захвате трех импульсов формируются фазово-модулированные солитоны, чья скорость ближе к скоростям волновых пакетов  $u_j$ . На рис. 10.3 представлены амплитудные и фазовые профили связанных солитонов при неравном нулю частотном параметре  $d_c$ .

Следует отметить, что специальные солитоны реализуют строгий минимум абсолютной величины интеграла движения  $J_3$  (1.53) среди солитонов, обладающих той же общей энергией и тем же распределением энергии между ними (выполняются соотношения Мэнли — Роу). Отклонение от специальных солитонов, в частности введение фазовой модуляции, увеличивает абсолютное значение  $|J_3|$ .

#### § 10.4. Солитоны в отсутствие дисперсии одной из волн

В области перехода от аномальной дисперсии к нормальной по крайней мере один из коэффициентов дисперсии второго порядка обращается в нуль, например  $D_3 = 0$ . В этом случае солитоны могут распространяться только со скоростью волны с нулевой дисперсией, т.е.  $u_c = u_3$ . Очевидно, в этих условиях третье уравнение в системе (10.2) заменяется алгебраическим соотношением

$$E_{3c} = E_{1c} E_{2c}, \quad (10.18)$$

причем изменения частоты и волнового числа волны с нулевой дисперсией определяются формулами

$$\Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_2, \quad q_3 = q_1 + q_2 - \Delta k, \quad (10.19)$$

где для характеристик волн с дисперсией остаются в силе прежние выражения (10.3), (10.4). Однако запись амплитуд  $A_j$  с  $j = 1, 2$  претерпевает изменения:

$$A_j = \left( \frac{q_3 D_j}{\gamma_3 \gamma_j \tau_c^2} \right)^{1/2} E_{jc}(\eta_c) e^{i(\Omega_j \eta_c - q_j z)}, \quad (10.20)$$

а для третьей волны запись остается прежней (см. (10.1) при  $j = 3$ ).

Подставляя (10.18) в первые два уравнения (10.2), получаем систему двух уравнений (ср. с (10.11))

$$\frac{d^2 E_{1c}}{d\eta_c^2} = p_1 E_{1c} - |E_{2c}|^2 E_{1c}, \quad (10.21)$$

$$\frac{d^2 E_{2c}}{d\eta_c^2} = p_2 E_{2c} - |E_{1c}|^2 E_{2c}.$$

Из (10.21) видно, что между волнами с дисперсией возникает своеобразное самовоздействие — кроссмодуляция. Нелинейные правые части в (10.21) аналогичны членам, описывающим кроссмодуляцию двух волн, распространяющихся в среде с кубичной нелинейностью.

В вырожденном случае ( $p_1 = p_2$ ,  $E_{1c} = E_{2c}$ ) система (10.20) сводится к уравнению

$$d^2 E_{1c} / d\bar{\eta}_c^2 = p_1 E_{1c} - |E_{1c}|^2 E_{1c}, \quad (10.22)$$

хорошо известному в теории солитонов и двумерных нелинейных волноводов. Оно имеет, в частности, односолитонное решение вида [5, 6]

$$E_{1c} = E_{2c} = \sqrt{2} p_1 \operatorname{sech}(p_1^{1/2} \bar{\eta}_c), \quad E_{3c} = 2 p_1^2 \operatorname{sech}^2(p_1^{1/2} \bar{\eta}_c). \quad (10.23)$$

Примерно такой же структурой обладают связанные солитоны при большом значении параметра  $p_3$  (рис. 10.1а).

### § 10.5. Захват волн в связанные солитоны и волноводы

Многие свойства связанных солитонов, рассмотренные в предыдущих параграфах, характерны и для связанных волноводов. Необходимо иметь в виду, что в волноводах реактивное трехчастотное взаимодействие уравновешивает дифракцию и коэффициенты диффузии лучевых амплитуд  $D_j = 1/2k_j$  всегда положительны. Так как  $D_j > 0$  и, следовательно,  $q_j > 0$  тоже, в связанных волноводах наблюдается замедление волн (уменьшение фазовых скоростей). Этот эффект подобен замедлению волны в нелинейном волноводе, формирующемся в самофокусирующей среде [5, 6]. Замедление волн в связанных волноводах, таким образом, находится в единой концепции с самофокусировкой волн на квадратичной нелинейности.

Благодаря выполнению фазового синхронизма ( $k_3 \approx k_1 + k_2$ ) коэффициенты поперечной диффузии в (10.3) связаны в квазиизотропном приближении соотношением  $D_3^{-1} = D_1^{-1} + D_2^{-1}$ . Безусловно, это сужает разнообразие свойств нелинейных волноводов по сравнению с солитонами. Однако следует подчеркнуть, что при переходе к пучкам, как правило, повышается размерность задачи: вторая производная в уравнениях типа (10.2) заменяется лапласианом по координатам  $x$  и  $y$  или по координате  $r$  в осесимметричном случае. Для трехмерных пучков становятся несправедливы аналитические решения (10.10), (10.23), найденные для волновых пакетов. Поэтому для расчетов амплитудных и фазовых профилей связанных волноводов привлекаются численные методы [7, 8]. Отметим также, что групповой синхронизм для пучков означает коллинеарность всех пучков. Специальные волноводы по аналогии со специальными солитонами возникают при неколлинеарном взаимодействии пучков и имеют плоские волновые фронты, наклоненные к оси волновода под разными углами для разных частот. В общем случае при рассогласовании направлений лучевых векторов связанные волноводы приобретают сложную форму волновых фронтов.

Перейдем теперь к обсуждению главной темы данного параграфа — проблеме формирования связанных солитонов и волноводов при падении на среду с квадратичной нелинейностью трех волн с разными частотами.

Подавление дифракционной расходимости пучков и дисперсионного распыливания пакетов в средах с квадратичной нелинейностью происходит при реактивном характере когерентного трехчастотного взаимодействия,

когда нет существенной перекачки энергии между волнами. Захват волн в солитоны и волноводы означает ограничение снизу максимумов их амплитуд не зависящей от  $z$  константой (в противовес неограниченному уменьшению амплитуды невзаимодействующих волновых пучков или пакетов вследствие, соответственно, дифракционного или дисперсионного распыливания). Поскольку невзаимодействующие волновые пакеты обладают интегралом  $J_3 > 0$  ( $D_j > 0$ ), то отрицательность  $J_3$  означает захват импульсов в солитоны (пучки в волноводах).

Используя свойства интеграла движения  $J_3$  (1.53), можно установить нижнюю и верхнюю границы изменения максимумов амплитуд волн  $M_j = \max |A_j|$ . Эти границы определяются следующими неравенствами (верхний и нижний знаки соответствуют положительным и отрицательным коэффициентам  $D_j$ ) [7, 8]:

$$M_j - \frac{p}{4} \frac{M_j^{4/p} |D_j|}{\gamma_j J_1^{2/p}} > \mp \frac{J_3}{J_1}. \quad (10.24)$$

Здесь  $p = 1$  для импульсов и двумерных пучков,  $p = 2$  для цилиндрических пучков. Для простоты мы положили  $\Delta k = 0$ ,  $\nu_{i3} = 0$ ,  $\beta_j = 0$ .

Из анализа неравенства (10.24) видно, что достаточным условием взаимного захвата волны является положительность его правой части:

$$\mp J_3/J_1 > 0. \quad (10.25)$$

Так как полный запас энергии  $J_1$  всегда положителен, то для осуществления режима захвата должно выполняться условие  $J_3 < 0$  в среде с  $D_j > 0$  и  $J_3 > 0$  при  $D_j < 0$ .

Солитонное распространение гауссовых импульсов

$$E_j = E_{j0} \exp(-t^2/\tau_j^2 + i\varphi_{j0})$$

наступает при условии

$$\pm 2\sqrt{2} E_{10} E_{20} E_{30} \cos \Phi_0 \geq \sum_{j=1}^3 \delta_j E_{j0}^2, \quad (10.26)$$

где

$$\delta_j = |D_j| \left( \sum_{j=1}^3 \tau_j^{-2} \right)^{1/2} / \gamma_j \tau_j, \quad \Phi_0 = \varphi_{30} - \varphi_{10} - \varphi_{20}.$$

Видно, что наиболее благоприятным для захвата соотношением между фазами волн является  $\Phi_0 = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Нетрудно показать, что легче захватываются импульсы без частотной модуляции ( $d_j = 0$ ).

Аналогичные условия захвата в волновод имеют место и для гауссовых пучков.

На основе решения системы квазиоптических уравнений (1.55) были выполнены численные эксперименты по исследованию захвата импульсов в квадратично-нелинейной диспергирующей среде [7, 8].

На рис. 10.4, 10.5 показаны последовательные этапы распространения трех волновых пакетов, имеющих на входе в среду одинаковые гауссовы амплитудные профили  $E_j = E_0 \exp(-t^2/\tau^2)$ . Изображены нормированные профили интенсивности  $I_j$ , фазы связанных импульсов  $\Phi_j$  и траекто-

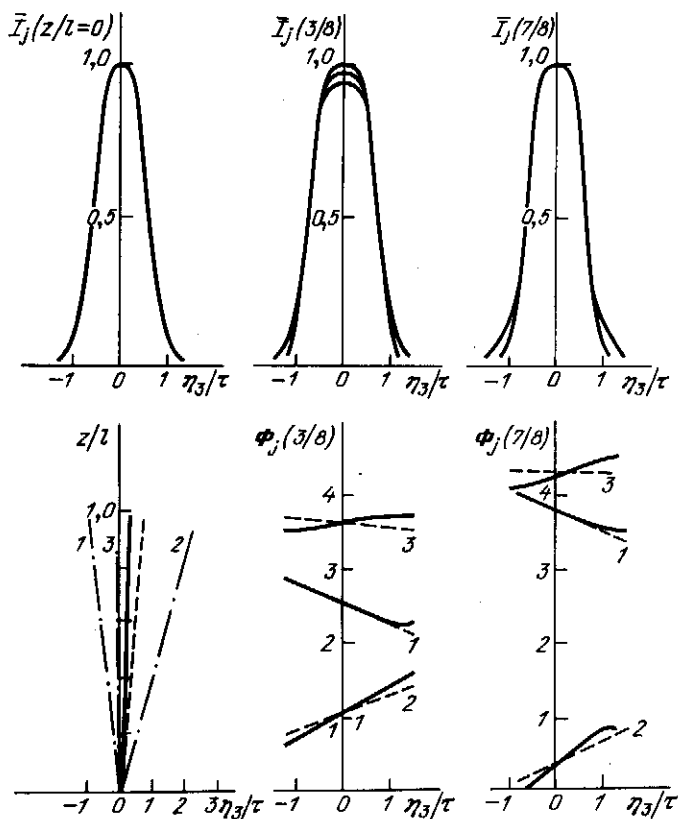


Рис. 10.4. Самозахват трех гауссовых импульсов в параметрически связанные солитоны при  $v_{31} = -\tau/l$ ,  $v_{23} = 3\tau/l$ ,  $l = 8l_{p1} = 12l_{p2} = 20l_{p3}$ ,  $\gamma_1 = 15$ ,  $\gamma_2 = 20$ ,  $\gamma_3 = 35$ :

показаны нормированные профили интенсивности  $\bar{I}_j$ , фазы  $\phi_j$  и смещения центров импульсов (штрихпунктирные линии — линейная среда). Специальным солитонам с  $d_c = 0$  соответствуют штриховые линии

при движения их вершин  $z/l$ . Для сравнения приведены профили интенсивностей импульсов на том же расстоянии при их распространении в линейной среде. Из графиков видно, что общая групповая скорость захваченных импульсов близка к вычисленной по формуле (10.17) скорости специальных солитонов  $u_c$  (им соответствуют траектория и фазовые профили, отмеченные штриховыми линиями).

В общем случае при выполнении условия захвата (10.25) волновые пакеты пульсируют в процессе распространения, имея некоторую единую групповую скорость. На основе численных экспериментов можно сделать важный вывод о том, что групповая скорость и длительности импульсов, вошедших в режим захвата, близки к групповой скорости и длительности солитонов с теми же значениями интеграла  $J_3$  и интегралов Мэнли — Роу  $J_{3j}$  (1.52) (в вырожденном по частоте случае — интеграла  $J_3$  и суммарной плотности энергии  $J_1$ ). Действительно, различным параметрам  $p_j$ ,  $d_c$  в

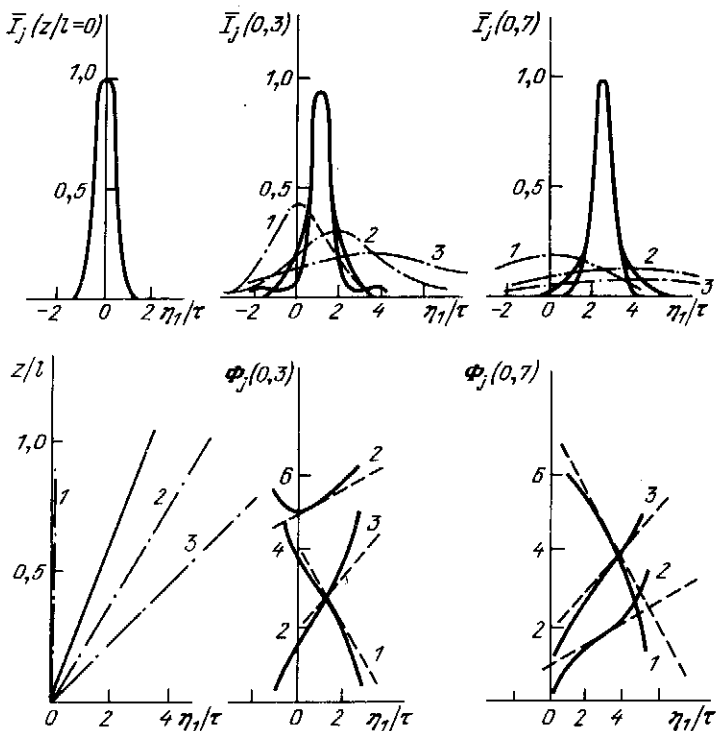


Рис. 10.5. Самозахват трех импульсов в связанные солитоны при  $\nu_{2,1} = 6\tau/l$ ,  $\nu_{3,1} = 10\tau/l$  и тех же остальных параметрах, что и на рис. 10.4

уравнениях (10.2) соответствуют солитоны с разной структурой. При заданном законе дисперсии каждый набор параметров определяет групповую скорость и характерную длительность солитонов (10.6). В то же время солитоны с конкретными профилями обладают вполне определенными значениями интегралов  $J_1$ ,  $J_3$  и  $J_{3j}$ . Таким образом, групповая скорость и длительность формирующихся волновых пакетов должны быть близки к групповой скорости и длительности солитонов с теми же значениями интегралов движения.

Следует отметить, что связь между групповой скоростью и длительностью солитонов с интегралами движения  $J_1$ ,  $J_3$  не однозначна.

Пределы возможных изменений максимумов амплитуд волн (10.24) определяются интегралами  $J_1$ ,  $J_3$  и значениями ряда параметров, входящих в укороченные уравнения (1.55). Ограниченность сверху и снизу этих изменений при выполнении условия захвата (10.25) позволяет в каком-то смысле говорить о глобальной устойчивости волноводов. При возмущениях, не нарушающих выполнения условия взаимного захвата волн, распада на не взаимодействующие волны не происходит, хотя профили волновых пакетов в общем случае не сохраняются.

Задача об устойчивости связанных солитонов и волноводов рассматривалась в [9] с помощью методики, развитой для исследования устой-

чивости волноводных каналов, возникающих при самофокусировке пучков [10]. В [7, 8] устойчивость солитонов анализировалась по критерию Ляпунова [11]. При этом в качестве функции Ляпунова был взят интеграл  $J_3$ . Из теоремы Ляпунова следует, что специальные солитоны устойчивы по отношению к возмущениям произвольного вида, не меняющим энергии импульсов, в частности, по отношению к фазовым возмущениям.

В [12] рассмотрена параметрическая неустойчивость мощного пучка накачки при учете дифракции волн. Методом ВКБ показано, что пучок испытывает тенденцию распада на связанные волноводы (солитоны во временной задаче).

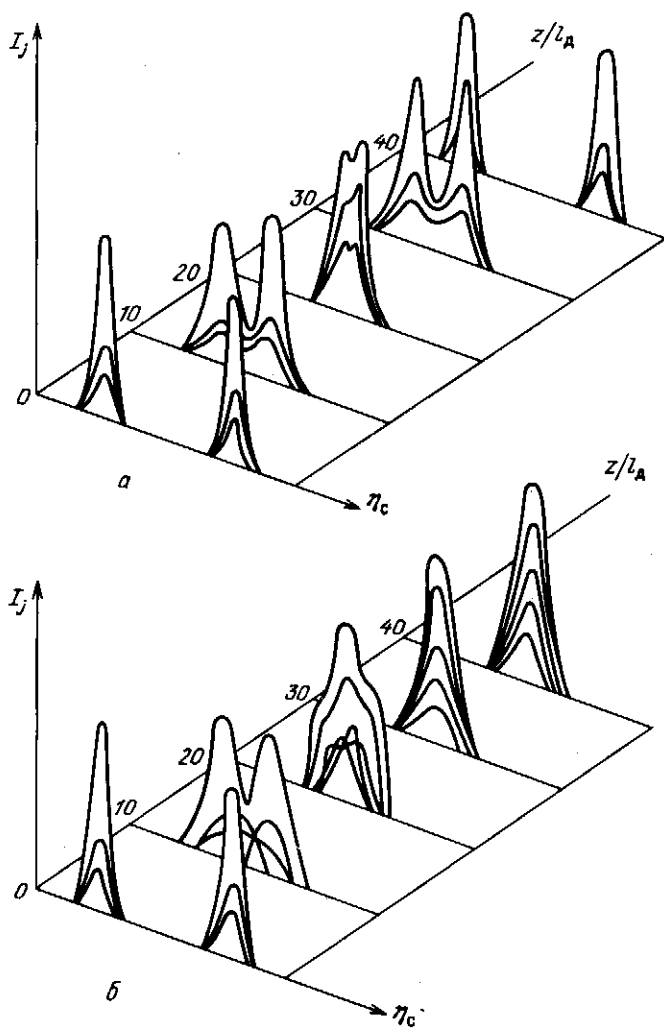


Рис. 10.6. Столкновение трехчастотных солитонов:

а — отталкивание, б — вторичный захват в пятичастотный солитон

Отметим также важное обстоятельство в проблеме устойчивости. Волновые пакеты могут испытывать неустойчивость по отношению к пространственным, а пучки — к временным возмущениям.

### § 10.6. Взаимодействие многочастотных солитонов

Одним из наиболее интересных вопросов в теории солитонов является их поведение при столкновении. Рассмотрим взаимодействия однонаправленных волновых пакетов трехчастотных солитонов, распространяющихся с разными скоростями. Взаимодействие пары солитонов наступает в том случае, если их спектры частично перекрываются. В вырожденном случае все несущие частоты обоих солитонов попарно совпадают.

Численные решения квазиоптических уравнений выявили существование в общем случае солитонных (прохождение импульсов друг сквозь друга) и бумеронных (отталкивание сближающихся импульсов) видов столкновений, а также вторичный захват (объединение двух трехчастотных солитонов в один с общей групповой скоростью) [13, 14].

На рис. 10.6 изображена динамика столкновения двух трехчастотных солитонов — отталкивание в случае полного вырождения по частотам (а) и вторичный захват, приводящий к образованию одного пятичастотного солитона и осколков, не участвующих в захвате (б). По-видимому, при столкновениях возможно образование солитонов и с более сложной частотной структурой.

Наряду со вторичным захватом и отталкиванием в численных экспериментах наблюдался также промежуточный режим: импульсы создают связанную пару солитонов, обладающих общим центром "масс" и совершающих слабые осцилляции относительно этого центра.

В оптике возможность формирования многочастотных солитонов в кристаллах без центра инверсии подтверждается конкретными расчетами. Для оценок возьмем данные из [15]. Для  $\text{LiNbO}_3$  и  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$  при длинах волн, лежащих в диапазоне 1,5–3,5 мкм, для  $\text{AgAsS}_3$  — в диапазоне 3–8 мкм и входных длительностях импульсов  $10^{-12}$  с значения интенсивностей, удовлетворяющие условию захвата в трехчастотный солитон при синхронизме, составляют  $10^6$ – $10^7$  Вт/см<sup>2</sup>, что на один-два порядка ниже критических значений нарушения лучевой прочности кристаллов.

## ДИФРАКЦИОННО-ДИСПЕРСИОННАЯ НЕКОГЕРЕНТНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ

Глава посвящена анализу влияния дифракционных и дисперсионных явлений на энергообмен между модулированными волнами. Эффективность преобразования является важной характеристикой умножителей частоты, генераторов суммарных и разностных волн, параметрических усилителей и генераторов. Создание высокоэффективных преобразователей частоты мощного лазерного излучения продолжает оставаться одной из главных практических задач нелинейной оптики. На пути достижения 100%-ной эффективности приходится преодолевать много препятствий. В гл. 6 было показано, что неоднородное распределение энергии по сечению пучка замедляет темпы преобразования, а при критическом синхронизме взаимодействие гармоник весьма чувствительно к фазовой модуляции волны накачки. В условиях некритического синхронизма (групповые скорости согласованы) фазовая модуляция не влияет на эффективность передачи энергии от волны накачки к гармонике. Однако этот вывод верен в рамках геометрической оптики. При учете дифракционных и дисперсионных эффектов второго порядка возникает новый механизм нарушения когерентности взаимодействия модулированных волн. Дело заключается в том, что дифракция неизбежно приводит к сбою оптимальных фазовых соотношений и тем самым к замедлению процесса перекачки энергии. Более того, дифракционная некогерентность принципиально ограничивает сверху эффективность преобразования частоты в волновых пучках. В волновых пакетах предельную величину КПД устанавливает дисперсионная некогерентность.

### § 11.1. Дифракционная некогерентность и оптимальная фокусировка при слабом возбуждении гармоник

Рассмотрим возбуждение  $N$ -й гармоники волновым пучком основного излучения. Чтобы выявить роль дифракционной некогерентности, будем считать, что в нелинейной среде выполняется касательный синхронизм, т.е. лучевые векторы основной и  $N$ -й гармоник параллельны и равны по величине друг другу. Такие взаимодействия реализуются, во-первых, при умножении частоты в изотропных средах (например, при генерации третьей гармоники в жидкостях [1, 2] и газах [3, 4]), причем необходимое условие для фазового согласования подбирается с помощью специально вводимых



буферных добавок, изменяющих дисперсию волн нужным образом [5]). Во-вторых, в анизотропных одноосных кристаллах при распространении пучков вдоль нормали к оптической оси лучевые векторы гармоник также имеют одинаковое направление — случай  $90^\circ$ -ного синхронизма [6].

Итак, пусть в нелинейную среду протяженностью  $l$  входит сходящийся пучок основного излучения на частоте  $\omega_1$ ; на расстоянии  $z_{\text{п}}$  образуется перетяжка пучка (минимальное поперечное сечение, рис. 11.1). При наличии нелинейной восприимчивости  $N$ -го порядка  $\chi_N$  в среде возбуждается

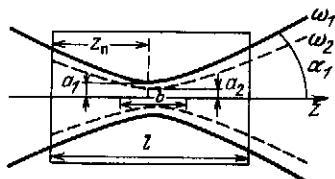


Рис. 11.1. Схема возбуждения второй гармоники при фокусировке гауссова пучка основного излучения внутрь нелинейной среды:

$a_1$  и  $a_2$  — радиусы пучков основной и второй гармоник в плоскости перетяжки, расположенной на расстоянии  $z_{\text{п}}$  от входа в нелинейную среду длиной  $l$ ;  $b$  — конфокальный параметр пучков,  $\alpha_1$  — угловая расходимость

$N$ -я гармоника. Ограничимся пока приближением заданного поля основной волны, но в отличие от геометрической оптики (гл. 6) учтем дифракцию пучков. Тогда в квазиоптическом приближении возбуждение гармоники описывается параболическими уравнениями для лучевых амплитуд

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{1}{2ik_1} \Delta_{\perp} A_1, \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial A_N}{\partial z} = \frac{1}{2iNk_1} \Delta_{\perp} A_N - i\gamma_N A_1^N e^{i\Delta kz},$$

где коэффициент нелинейной связи  $\gamma_N = \pi N \chi_N \omega_1 / (2^{N-2} n_{Nc})$ , волновая расстройка  $\Delta k = k_N - Nk_1$ . В (11.1) мы положили коэффициенты поперечной диффузии  $D_N = (2Nk_1)^{-1}$  т.е. перешли к квазиизотропному приближению (§ 1.3). При наличии расстройки волновых чисел  $\Delta k$  коэффициент  $D_N$ , строго говоря, не равен  $D_1/N$ . Кроме того, в анизотропных средах величины  $D_N$  имеют разные значения вдоль осей  $x$  и  $y$ . Однако учет этих эффектов, как правило, дает поправки второго порядка малости. Дифракционная некогерентность обусловлена тем, что коэффициенты диффузии гармоник  $D_1$  и  $D_N$  отличаются примерно в  $N$  раз.

На передней границе нелинейной среды зададим гауссов пучок основного излучения

$$E_1(r) = E_{10} \exp\left(-\frac{r^2}{a_{10}^2} - i\frac{k_1 r^2}{2R_{10}}\right), \quad (11.2)$$

где  $a_{10}$  — начальный поперечный радиус пучка,  $R_{10}$  — радиус кривизны волнового фронта. Амплитуду гармоники будем считать равной нулю на этой границе. Основные закономерности генерации второй гармоники ( $N=2$ ) такими пучками приведены в [7–10], а третьей гармоники ( $N=3$ ) —

в [4, 11–14] (см. также обзоры и монографии [5, 15–17]). Генерация гармоник пучками со структурой высших поперечных мод открытого резонатора обсуждалась в [18, 19].

Следует отметить, что гармоники с  $N \geq 3$  могут возбуждаться на нелинейностях более низкого порядка ( $\chi_{N-1}, \chi_{N-2}, \dots, \chi_2$ ) каскадным способом. При этом в нелинейной среде идет умножение, сложение и вычитание частот основного излучения и возбужденных промежуточных гармоник. Иными словами, для генерации гармоник можно использовать комбинационные процессы. Каскадная генерация реализуется в двух вариантах. В первой схеме рождение новых гармоник происходит в последовательно расположенных друг за другом нелинейных кристаллах (или кюветах с жидкостью или газом). В каждом из них существует принципиальная возможность подобрать условия фазового синхронизма для того процесса преобразования частоты, который в нем осуществляется. Кроме того, особая ориентация соседних кристаллов и введение воздушных или других промежутков между ними позволяют скомпенсировать рассогласование оптимальных фазовых соотношений между волнами из-за дисперсии или по другим причинам. Во втором варианте, когда используется один нелинейный кристалл, синхронизм вследствие дисперсии выполняется не для всех процессов, входящих в цепочку преобразования частоты [13, 20]. В дальнейшем мы сосредоточим внимание на анализе прямой генерации второй и третьей гармоник.

Решение уравнений (11.1) с граничными условиями (11.2) имеет следующий вид:

$$A_1 = \frac{E_{10}}{\psi(z)} \exp \left[ -\frac{r^2}{a_1^2 \psi(z)} \right], \quad (11.3)$$

$$A_N = -i\gamma_N A_1^N \psi^{N-1}(z) \int_{-z_n}^z d\xi \psi^{1-N}(\xi) e^{i\Delta k \xi},$$

$$\psi(z) = 1 - i \frac{2z}{b},$$

где  $b = 2R_{d1} = k_1 a_1^2$  — конфокальный параметр, одинаковый для пучков основной и  $N$ -й гармоник, начало координат расположено в плоскости перетяжки. Проанализируем полученное решение.

**Дифракционные характеристики пучков.** В плоскости  $z = 0$  ширина основного пучка минимальна, а интенсивность максимальна. При удалении от перетяжки интенсивность на оси падает, на расстоянии  $R_{d1}$  она уменьшается в два раза (рис. 11.2а). Одновременно с изменением сечения пучка искривляется его волновой фронт, и пучок приобретает дополнительную по сравнению с плоской волной той же частоты фазу (рис. 11.2б)

$$\Phi_d(0, z) = \text{arctg}(z/R_{d1}). \quad (11.4)$$

Продифференцировав (11.4) по координате  $z$ , находим локальную диффе-

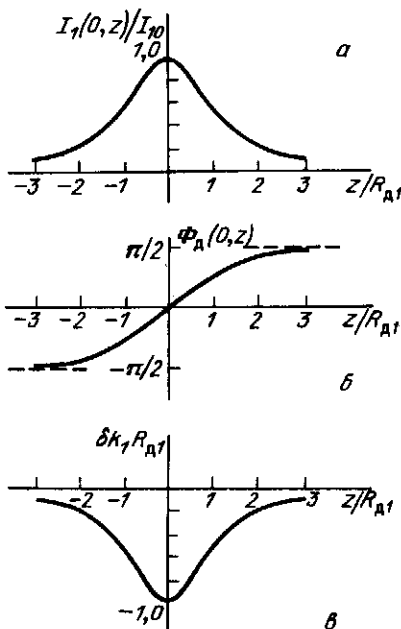


Рис. 11.2. Изменение с расстоянием интенсивности (а), фазового сдвига (б) и локальной поправки к волновому числу (в) на оси дифрагирующего гауссова пучка в области перетяжки

рещиальную поправку к волновому числу  $k_1$  (рис. 11.2в)

$$\begin{aligned} \delta k_1 &= \partial \Phi_{д1} / \partial z = \\ &= -R_{д1} / (z^2 + R_{д1}^2). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Из последних двух выражений следует важное свойство дифрагирующего пучка: при прохождении фокальной области протяженностью  $b$  его фаза сдвигается на  $\pi$ , а фазовая скорость уменьшается [21]. Дифракционное замедление распространения волнового фронта пучка и служит, как будет показано ниже, причиной дифракционной некогерентности взаимодействия гармоник.

Как видно из (11.3), пучок гармоники сохраняет гауссову форму, однако его ширина и угловая расходимость в  $\sqrt{N}$  раз меньше, чем у пучка накачки. Пучок гармоники как бы вложен внутрь пучка основного излучения (рис. 11.1).

**Мощность возбуждаемой гармоники.** Мощность гармоники зависит от волновой расстройки  $\Delta k$  и двух параметров

$$\xi = l/b, \quad \mu = (2z_{п} + l)/l, \quad (11.6)$$

характеризующих остроту фокусировки и положение перетяжки внутри нелинейного слоя соответственно. При фокусировке пучка в середину кристалла ( $z_{п} = -l/2$ ) параметр  $\mu = 0$ , на переднюю грань ( $z_{п} = 0$ ) —  $\mu = 1$  и на заднюю ( $z_{п} = -l$ ) —  $\mu = -1$ .

Интегрируя интенсивность гармоники на выходе из кристалла по поперечному сечению с учетом выражений (11.3) и (11.6), получаем формулу для ее мощности:

$$P_N = K_N P_{10}^N (l/\lambda_1)^{3-N} \xi^{N-1} h_N(\xi, \mu, \Delta k b), \quad (11.7)$$

$$K_N = \frac{N 2^{3N+1} \pi^{N+3} \chi_N^2}{n_1 n_N \lambda_1^{2(N-1)} c^{N-1}},$$

$$\Delta k b = \Delta k \frac{b}{L} = \Delta k L / \xi$$

где апертурная функция

$$h_N = \left| \frac{\int_{-\xi(1-\mu)}^{\xi(1+\mu)} \frac{d\xi e^{i\Delta\Phi_N(\xi)}}{2\xi(1+\xi^2)^{(N-1)/2}} \right|^2 \quad (11.8)$$

учитывает изменение сечения пучков и нарушение фазового синхронизма

$$\Delta\Phi_N(\xi) = (1/2)\Delta kb\xi + (N-1)\arctg\xi. \quad (11.9)$$

Очевидно, что из-за дифракции пучков оптимальное согласование фазовых скоростей не сохраняется и эффективность преобразования снижается.

На рис. 11.3 представлены графики апертурных функций, описывающих зависимости мощности второй и третьей гармоник от нормированной волновой расстройки  $\Delta_N = \Delta kl/2$  при использовании симметричной схемы возбуждения ( $\mu = 0$ ). В поле коллимированного пучка ( $\xi \ll 1$ ) функция

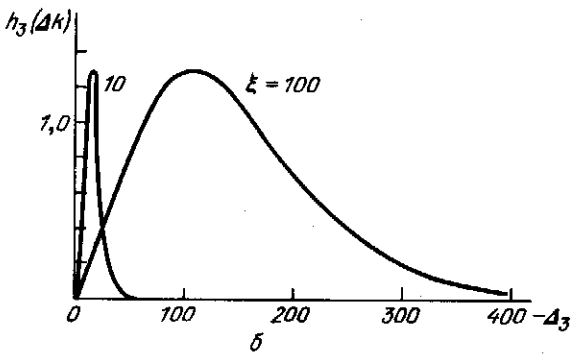
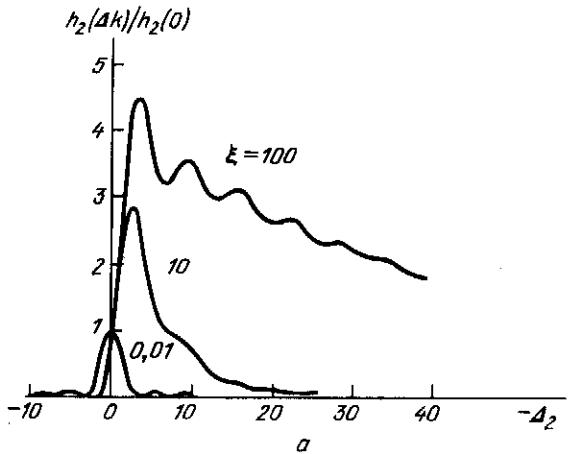


Рис. 11.3. Графики апертурных функций  $h_N$ , характеризующих мощность второй (а) и третьей (б) гармоник, возбуждаемых фокусированным в центр нелинейной среды гауссовым пучком, в зависимости от волновой расстройки  $\Delta_N$

$h_N$  преобразуется к виду

$$h_N = \text{sinc}^2 [\Delta_N + (N-1)l/b]. \quad (11.10)$$

Из (11.10) следует, что вследствие дифракции точный фазовый синхронизм выполняется не при  $\Delta k = 0$ , а при  $\Delta k = \Delta k_{\text{см}} = -2(N-1)/b$ , что в силу принятого условия  $b \gg l$  меньше ширины синхронизма  $\Delta k_{\text{ког}} = \pi/l$  (номер гармоники  $N$  не очень велик) [13]. В сильно сходящемся пучке ( $\xi \gg 1$ ) дифракционная некогерентность проявляется более резко: зависимость мощности от расстройки становится явно несимметричной, максимум смещается в сторону отрицательных  $\Delta k$  (рис. 11.3).

Возникновение дифракционной некогерентности объясняется следующим образом. Пучок накачки в фокальной области меняет свою фазу на  $\pi$ .

Возбуждаемая им в нелинейной среде волна поляризуемости  $\mathcal{P}^{\text{нл}} \sim \chi_N E_1^N$ , очевидно, изменяет свою фазу на  $N\pi$ . В то же время пучок гармоники, имеющий тот же конфокальный параметр, стремится при свободной дифракции изменять свою фазу на такую же величину, что и основная волна, т.е. на  $\pi$ . В результате между пучком гармоники и вынуждающей силой, роль которой выполняет волна нелинейной поляризуемости среды, появляется фазовая расстройка  $(N-1)\pi$ . Если провести подобные рассуждения на языке локальных фазовых скоростей, то можно сказать, что дифракция пучков приводит к расстройке волновых векторов

$$\Delta k_{\text{д}} = (N-1)\delta k_1. \quad (11.11)$$

Дифракционная расстройка частично компенсируется в области отрицательных  $\Delta k$ , а при  $\Delta k > 0$  рассогласование фаз увеличивается. Асимптотическое вычисление интеграла (11.8) приводит к следующим выражениям в области  $\Delta_N < 0$ :

$$h_2 \approx 4\xi^{-2} |\text{si } \Delta_2 + (\pi/2)e^{-|\Delta_2|/\xi}|^2 \quad (11.12)$$

для второй гармоники и

$$h_3 \approx \xi^{-2} |\cos \Delta_3 + |\Delta_3| \text{si } |\Delta_3| + \pi |\Delta_3| e^{-|\Delta_3|/\xi}|^2 \quad (11.13)$$

для третьей гармоники, причем интегральный синус

$$\text{si } \Delta_N = -\int_{\Delta_N}^{\infty} x^{-1} \sin x \, dx, \quad \text{si}(0) = -\frac{\pi}{2}. \quad (11.14)$$

При генерации третьей гармоники тонкая структура с периодом порядка  $l^{-1}$  полностью отсутствует (рис. 11.3 б). В направлении одномерного синхронизма ( $\Delta k = 0$ ) мощность третьей гармоники сильно сходящегося пучка практически равна нулю; максимум приходится на расстройку  $\Delta k \sim -\Delta k_{\text{д}}$ .

**Оптимальная фокусировка основного пучка.** С помощью (11.8) можно решить важную задачу о нахождении параметра фокусировки основного пучка  $\xi$ , при котором мощность гармоники достигает максимальной вели-

чины. Существование оптимальной фокусировки объясняется следующим. При слабой фокусировке широкого пучка ( $\xi \ll 1$ ) его размер практически не меняется, и в процессе преобразования энергии используется вся толща нелинейной среды  $l$ . Однако при этом концентрация поля относительно слабая и возбуждение гармоник недостаточно эффективно. В другом крайнем случае сильной фокусировки ( $\xi \gg 1$ ) концентрация поля велика, однако эффективно используется только часть нелинейной среды, имеющая размер конфокального параметра  $b$ . Оптимальным для генерации гармоник является промежуточный случай ( $\xi \sim 1$ ), когда параметр  $b \sim l$ .

При распространении лазерного пучка вдоль направления одномерного синхронизма ( $\Delta k = 0$ ) мощность второй гармоники равна

$$P_2 = K_2 P_{10}^2 (l/\lambda_1) \xi^{-1} \arctg^2 \xi, \quad \approx \frac{P}{L} \quad (11.15)$$

а мощность третьей гармоники —

$$P_3 = K_3 P_{10}^3 \xi^2 / (1 + \xi^2)^2. \quad (11.16)$$

При условии  $\xi = \xi_{\text{опт}} = 1,4$  ( $l = 2,8b$ ) достигается максимум мощности второй гармоники  $P_{2 \text{ max}} = 0,64 K_2 P_{10}^2 l/\lambda_1$ , а при  $\xi = \xi_{\text{опт}} = 1$  ( $l = b$ ) — третьей  $P_{3 \text{ max}} = 0,25 K_3 P_{10}^3$ .

Из анализа общего интегрального выражения для мощности гармоники (11.7), (11.8) видно, что, хотя дифракционную некогерентность нельзя полностью устранить введением постоянной расстройки  $\Delta k$ , так как  $\delta k_1$  меняется с расстоянием, ее влияние можно в значительной степени скомпенсировать, подбирая начальную расстройку волновых векторов  $b\Delta k_{\text{опт}} \approx \approx -2(N-1)$ . На рис. 11.4 представлена зависимость апертурной функции второй гармоники от параметра фокусировки при оптимальной настройке на синхронизм [14]. Абсолютный максимум эффективности преобразования достигается при одновременной оптимизации фокусировки пучка и волновой расстройки. Расчеты по формулам (11.7), (11.8) дают [15, 16]

$$P_{2 \text{ опт}} = 1,07 K_2 P_{10}^2 l/\lambda_1 \quad \text{при} \quad \xi_{\text{опт}} = 2,84, \quad \Delta k_{\text{опт}} = -3,2/l, \quad (11.17)$$

$$P_{3 \text{ опт}} = 1,5 K_3 P_{10}^3 \quad \text{при} \quad \xi_{\text{опт}} = 4, \quad \Delta k_{\text{опт}} = -8/l.$$

Введение оптимальной волновой расстройки позволяет увеличить мощность второй гармоники на 40%, а третьей — в несколько раз по сравнению со случаем  $\Delta k = 0$  (ср. (11.7) с (11.5), (11.6)). Смещение кристалла из симметричного положения уменьшает мощность второй гармоники (с учетом изменения условий оптимальной фокусировки), а мощность третьей гармоники поддерживается постоянной и при  $\xi > 1$ , если кристалл располагать так, чтобы

$$z_{\text{п}} = \pm \sqrt{1 - \xi^{-2}}.$$

Применение оптимальной фокусировки позволяет получить выигрыш в мощности гармоники по сравнению с генерацией коллимированным пучком в  $(k_1 a_1^2/l)^{N-1}$  раз. В обычных условиях оптического эксперимента,

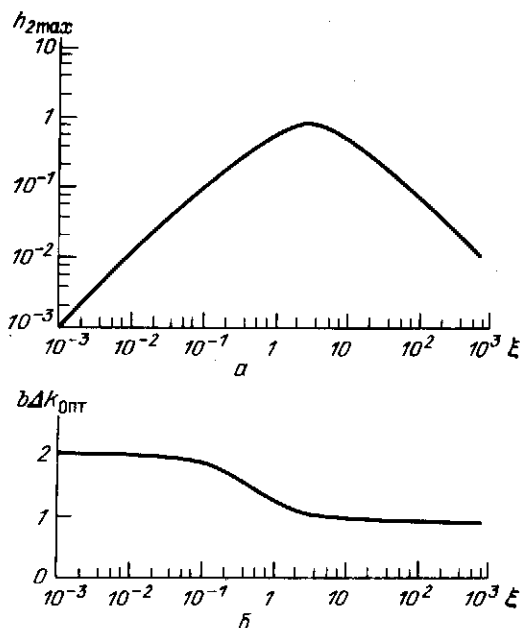


Рис. 11.4. Зависимость нормированной мощности второй гармоники (а), возбуждаемой при оптимальной волновой расстройке (б), от параметра фокусировки гауссова пучка основного излучения в середину нелинейной среды

когда  $l \approx 1$  см,  $a_1 \approx 1$  мм,  $\lambda_1 \approx 1$  мкм, выигрыш может достигать нескольких сот раз (напомним, что речь идет о возбуждении гармоники в заданном поле основного излучения,  $P_N \ll P_{10}$ ). Следует отметить, что при переходе к генерации высших гармоник  $N = 4, 5, 6, \dots$  оптимальной фокусировке соответствует стремление параметра  $\xi \rightarrow \infty$ .

Помимо дифракционной некогерентности на эффективность возбуждения гармоник оказывают влияние различные механизмы, нарушающие фазовые соотношения. Сюда относятся эффекты самовоздействия, связанные с нелинейным изменением показателя преломления (фазовой скорости) [16, 17]. В частности, при генерации третьей гармоники самовоздействие развивается на той же нелинейности  $\chi_3$ . Нелинейное нарушение фазовых соотношений снижает эффективность преобразования частоты [11]. При умножении частоты мощного непрерывного излучения основным препятствующим фактором служит тепловое самовоздействие [16, 17].

### § 11.2. Дифракционный предел эффективности удвоения частоты

Обратимся теперь к анализу предельных возможностей преобразования энергии волнового пучка во вторую гармонику, опираясь на решения квазиоптических уравнений (9.1). В отличие от предыдущего параграфа будем учитывать обратную реакцию гармоники на основной пучок. Сильное взаимодействие гармоник приводит к их взаимофокусировке (§9.1), что

непосредственно связано с нелинейными искажениями волновых фронтов. Нетрудно заметить, что взаимофокусировке предшествует этап обмена энергией между второй гармоникой и основным пучком в приосевой области. Со временем этот процесс затрагивает значительную часть пучка. Иными словами, дифракционная расстройка служит специфическим механизмом, разрушающим когерентность взаимодействия волновых пучков.

Таким образом, еще до образования нелинейного фокуса начинается обратный процесс оттока энергии из пучка второй гармоники. Впервые это явление было обнаружено путем численного моделирования удвоения частоты мощного излучения [22]. Затем оно было исследовано более детально в [23, 24]. Отметим, что дифракционная некогерентность существует и в удвоителях частоты с малыми КПД (§ 11.1). Но там она только замедляет темпы преобразования энергии, а в мощных удвоителях дифракционная некогерентность может привести к обратной перекачке энергии, т.е. устанавливается дифракционный предел КПД удвоителя.

В соответствии с теорией подобия, используя выражение для интенсивности второй гармоники (9.9), представим эффективность преобразования, или КПД удвоителя, в следующем виде:

$$\eta_{вг} = \eta_{вг}(l/l_{нл}, D_{нл}, \Delta k l_{нл}), \quad (11.18)$$

где нелинейно-дифракционный параметр  $D_{нл}$  задан в (9.5). Расчеты многопараметрической функции (11.18) проводились в [23, 24] с помощью численного решения уравнений (9.1).

Одна из типичных картин, иллюстрирующих проявление дифракционной некогерентности в мощных удвоителях, показана на рис. 11.5. Из графика видно, что существует некоторая оптимальная длина  $z_{ког}$ , на которой достигается максимальный коэффициент преобразования. За этой длиной мощность гармоники падает, и при дальнейшем распространении волн коэффициент преобразования осциллирует около среднего значения, примерно равного 50%. Введение оптимальной расстройки волновых векторов (11.17) не только не спасает ситуацию, а наоборот, при больших мощностях ухудшает положение.

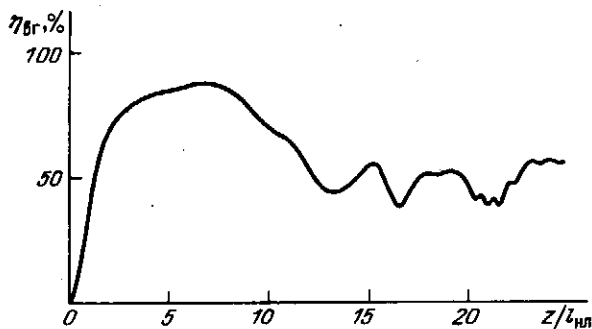


Рис. 11.5. Возникновение обратной перекачки энергии второй гармоникой в основную волну из-за дифракционной некогерентности при  $D_{нл} = 5 \cdot 10^{-3}$ :

приведена зависимость коэффициента преобразования от пройденного в нелинейной среде расстояния



Приближенную оценку длины обратной перекачки энергии за счет дифракционного сбоя фаз можно выполнить, если в формулу для длины когерентного взаимодействия плоских волн (6.28) подставить эффективную дифракционную расстройку (11.11):

$$z_{\text{ког}} = (1/4)I_{\text{нл}} \ln D_{\text{нл}}^{-1}. \quad (11.19)$$

Так как в дальнейшем нас будет интересовать зависимость эффективности от степени фокусировки пучка на переднюю грань нелинейной среды, т.е. от начального радиуса  $a_1$ , при фиксированной мощности  $P_{10}$ , целесообразно представить нелинейно-дифракционный параметр в виде

$$D_{\text{нл}} = (\xi/4P)^{1/2},$$

$$P = P_{10}/P_0, \quad (11.20)$$

где мощность основного излучения нормирована на [23]

$$P_0 = \frac{n_1^2 c \lambda_1^3}{2^{10} \pi^5 \chi_2^2 l}. \quad (11.21)$$

Мощность  $P_0$  характеризует дифракционную некогерентность и для кристаллов KDP составляет  $P_0 = 50$  кВт, а для кристаллов  $\text{LiNbO}_3$   $P_0 = 50$  Вт при  $l = 4$  см,  $\lambda_1 = 1$  мкм. Поэтому на практике весьма типичны ситуации с  $P = 100$  и более.

Анализ полной картины взаимодействия позволяет придать более глубокий физический смысл величине  $P_0$ . Если  $P_{10} \ll P_0$ , то приближение заданного поля остается справедливым при любой степени фокусировки основного пучка, причем величина  $P$  определяет КПД, достигаемый при оптимальной фокусировке (11.17), с точностью до числового коэффициента порядка нескольких единиц. Если мощность основного пучка превышает  $P_0$ , то КПД начинает приближаться к 100%, при этом начинает проявляться дифракционная некогерентность, ограничивающая предельную эффективность.

Определяемый через (11.20) ключевой параметр  $P$  является обобщенной характеристикой мощного удвоителя частоты, поскольку он пропорционален мощности гауссова пучка  $P_{10}$ , квадрату квадратичной восприимчивости среды  $\chi_2$ , длине среды  $l$  и обратно пропорционален кубу длины волны  $\lambda_1$ . То обстоятельство, что в параметр  $P$  длина среды входит в первой степени, а не в квадрате, как в геометрооптическом приближении, отражает дифракционные особенности преобразования частоты в ограниченных волновых пучках. Из (11.19), (11.20) следует, что при  $\xi \approx l$ ,  $l \approx R_d$  (фокусировка близка к оптимальной в заданном поле (11.17)) максимальный КПД мощного ( $P_{10} \gg P_0$ ) удвоителя частоты всегда достигается внутри слоя нелинейной среды. Увеличить длину когерентного взаимодействия можно за счет ослабления фокусировки, т.е. увеличивая поперечный радиус основного пучка на входе в нелинейную среду. Величину оптимального параметра фокусировки при  $P_{10} \gg P_0$  можно оценить, решая относительно  $\xi$

$$(\xi P/4)^{1/2} \approx (1/2) \ln(4P/\xi). \quad (11.22)$$

Численный расчет КПД удвоителя частоты как функции двух параметров  $\xi$  и  $P$  был выполнен в [23, 24]. При этом были использованы преобразования подобия, согласно которым плоскость  $(\xi, P)$  покрывалась не точками, соответствующими одному численному эксперименту, а лучами, исходящими из начала координат. Каждому лучу соответствовало одно решение уравнений (9.1) при переменном расстоянии  $z$ . Использование этого важного свойства решений (9.1) позволило значительно сократить объем вычислений.

На рис. 11.6 изображено полученное таким способом семейство линий равного КПД удвоителя частоты. На нем можно выделить две характерные области. Выше центрального луча, соответствующего  $D_{кр} = 3 \cdot 10^{-2}$ , где порог взаимофокусировки не достигается, возникает достаточно регулярная структура уровней КПД: максимумы сменяются минимумами вследствие дифракционного сбоя фаз. Ниже этого луча нелинейно-дифракционный параметр  $D_{нл} < D_{кр}$  и явление взаимофокусировки сопровождается нерегулярными изменениями КПД вблизи среднего уровня 50%.

Проводя прямые, параллельные координатным осям, можно получить полезные для практики зависимости КПД от параметра фокусировки  $\xi$  при фиксированной мощности или от мощности  $P$  при фиксированном радиусе гауссова пучка основного излучения. Из графиков на рис. 11.6 также определяется очень важная характеристика — оптимальная величина параметра фокусировки  $\xi_{опт}$ , зависящая от входной мощности основного излучения (рис. 11.7б). Видно, что с ростом мощности величина  $\xi_{опт}$  сильно уменьшается. Так, при  $P = 1000$  она уменьшается примерно в 30 раз по сравнению с оптимальным значением  $\xi_{опт} = 2,84$ , рассчитанным в приближении заданного поля (см. (11.17)). Таким образом, при увеличении мощности основного излучения для получения максимального КПД следует уменьшать радиус пучка с целью избежания дифракционного сбоя фаз.

На рис. 11.7б штриховыми линиями показаны границы области, в которых КПД отличается от максимального при заданном  $P$  меньше чем на 10%. Как видно из хода кривых, с ростом мощности требование на точность установки оптимального радиуса пучка резко возрастает. Если для каждого значения входной мощности подбирать оптимальную апертуру (параметр  $\xi_{опт}$ ), то КПД удвоителя будет монотонно расти (рис. 11.7а, кривая 1). Если же оставить фокусировку неизменной (оптимальной в приближении заданного поля,  $\xi_{опт} = 2,84$ ), КПД будет возрастать вплоть до значений параметра  $P \leq 65$  (кривая 2). Именно в этом диапазоне и были выполнены расчеты КПД в работе [25]. При больших величинах входной мощности основного излучения ( $P > 65$ ) фокусировку надо подстраивать в соответствии с графиком на рис. 11.7б. Тогда рост мощности сохраняется до больших уровней мощности накачки ( $P \approx 1000$ ).

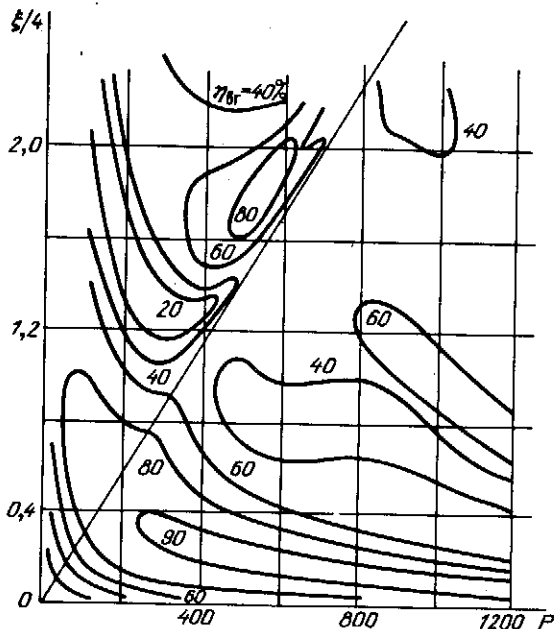


Рис. 11.6. Линии равных КПД удвоителя частоты гауссова пучка с нормированной мощностью  $P$  и параметром фокусировки  $\xi$

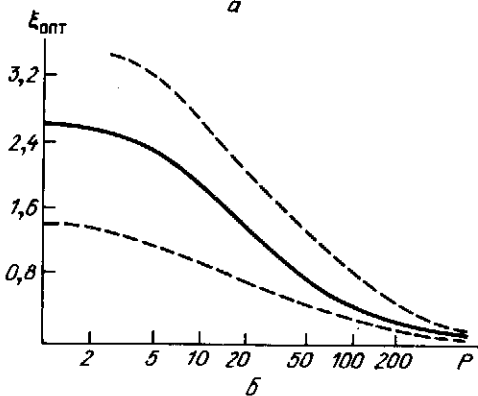
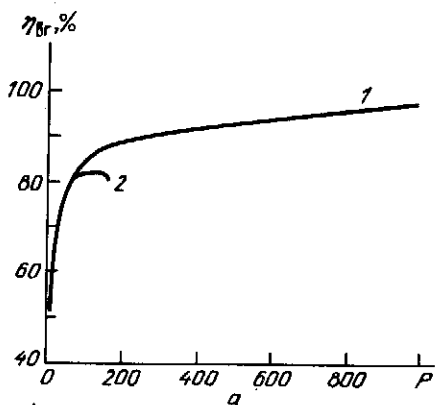


Рис. 11.7. Оптимальная фокусировка гауссова пучка в мощном удвоителе частоты:

$a$  — КПД как функция нормированной мощности накачки при переменной (оптимальной) фокусировке (1) и фиксированной с  $\xi = 2,8$  фокусировке, рассчитанной в приближении заданного поля (2);  $b$  — изменение параметра оптимальной фокусировки с увеличением нормированной мощности (сплошная линия), штриховые линии — границы уменьшения КПД на 10% от максимального значения при заданном  $P$

### § 11.3. Оптимальное профилирование пучков в преобразователях частоты

Увеличить эффективность преобразования частоты можно не только подбирая оптимальную фокусировку пучка накачки, но и оптимизируя распределение интенсивности в его поперечном сечении. В отсутствие дифракции гауссов пучок является далеко не оптимальным, наличие экспоненциально спадающей по амплитуде периферийной части пучка существенно замедляет темпы преобразования энергии. Если оставить максимальную интенсивность в центре пучка неизменной, то наибольший нелинейный эффект при генерации гармоники дает пучок с однородным распределением амплитуды по сечению. Промежуточное положение между гауссовым и однородным распределением занимают гипергауссовы пучки:

$$E_1 = E_{10} \exp(-r^N/a_1^N). \quad (11.23)$$

При  $N = 6$  можно ожидать без учета дифракции повышения КПД в среднем на 15% [26]. Однако при большом числе  $N$  на краях пучка возникают резкие градиенты амплитуды, что значительно ускоряет проявление дифракционной некогерентности. Таким образом, при переходе к гипергауссовым пучкам приходится сталкиваться с проявлением сразу двух процессов, влияние которых на эффективность преобразования носит характер конкуренции. Поэтому возникает задача нахождения оптимального амплитудного профиля пучка накачки.

Проанализируем влияние дифракционных эффектов на КПД удвоения частоты в случае, когда форма излучения на входе является гипергауссовой (11.23), радиусы пучков относительно велики и не используется фокусировка основной волны в кристалл. Приведем данные численных экспериментов, в которых система (9.1) с граничными условиями (11.23) решалась для  $l_{нл} = 1$  см,  $\lambda_1 = 1,06$  мкм ( $k_1 = 8,8 \cdot 10^4$  см $^{-1}$ ),  $a_1 = 0,2$  см. Волновая расстройка полагалась равной нулю,  $\Delta k = 0$ .

На рис. 11.8а представлены зависимости коэффициента преобразования  $\eta_{вг}$  от параметра  $\xi$  при различных плотностях мощности падающего на не-

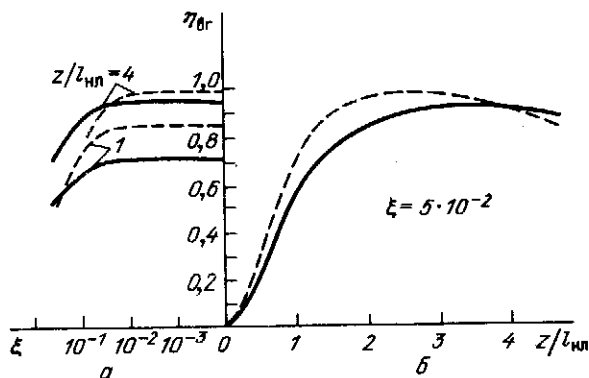


Рис. 11.8. Зависимость КПД удвоителя частоты гауссова (сплошные линии) и гипергауссова с  $N = 6$  (штриховые) пучков от параметра фокусировки ( $a$ ) и от длины нелинейной среды ( $b$ )

линейную среду оптического излучения для гауссовых и гипергауссовых пучков. Как видно из рисунка, дифракция не ограничивает сколько-нибудь существенно КПД при данных плотностях мощностей основной волны до тех пор, пока параметр  $\xi$  не превысит  $10^{-2}$ , что соответствует радиусу входного пучка  $a_1 = 0,034$  см. На рис. 11,8 б показана зависимость КПД от расстояния в нелинейной среде ( $l = 4$  см,  $a_1 = 0,02$  см). Хорошо видно, что при использовании гипергауссовых пучков максимальный КПД достигается на меньших расстояниях и он больше, чем в случае гауссовых пучков.

Переход к гипергауссовым пучкам позволяет увеличить эффективность преобразования частоты и при критическом синхронизме, когда энергия гармоники выходит из основного пучка под углом двулучепреломления [26]. Здесь дифракционная некогерентность приводит дополнительно к сужению угловой ширины синхронизма (см. (6.28) при  $\Delta k = k_1 \beta \Delta \theta_{\text{ког}} l$ ); так, при  $l = 4 l_{\text{нл}}$  угловая ширина синхронизма  $\Delta \theta_{\text{ког}}$  уменьшается в 10 раз по сравнению со случаем слабого возбуждения гармоники.

В общем случае трехчастотного взаимодействия, в том числе при параметрическом усилении, оптимальному профилированию целесообразно подвергать не только пучок накачки, но и сигнал. Помимо управления амплитудным профилем пучок сигнала можно смещать и наклонять относительно пучка накачки для достижения наибольшего КПД преобразователя частоты.

#### § 11.4. Дисперсионная некогерентность при взаимодействии волновых пакетов

При взаимодействии волновых пакетов, имеющих разные групповые скорости, проявляется дисперсионная некогерентность первого порядка. В случае критического по частоте синхронизма некогерентность возникает только при фазовой модуляции волн на входе в нелинейную среду (§ 6.4).

В условиях согласования фазовых и групповых скоростей взаимодействующих импульсов главным фактором становится дисперсионная некогерентность, обусловленная дисперсией групповых скоростей. Дисперсионные эффекты второго порядка имеют много общих черт с дифракцией волновых пучков. Поэтому ясно, что на эффективность преобразования частоты коротких импульсов будет оказывать влияние дисперсионная некогерентность. По сравнению с предыдущим случаем взаимодействия волновых пучков анализ дисперсионных эффектов значительно усложняется, так как соотношение между коэффициентами дисперсии второго порядка  $D_j = (-1/2) \partial^2 k_j / \partial \omega_j^2$  может быть произвольным. При  $D_1 = 2 D_2$  ситуация схожа с удвоением частоты в дифрагирующих пучках. Ряд других частных примеров рассмотрен в [27] для малых КПД удвоителя частоты. Общий вывод заключается в том, что независимо от знаков и абсолютных величин коэффициентов дисперсии  $D_j$  на эффективность взаимодействия, в частности на удвоение частоты, оказывает влияние дисперсионная некогерентность.

Эффективность преобразования энергии короткого импульса в энергию второй гармоники можно представить в общем виде через некоторую

многомерную функцию

$$\eta_{вг} = \eta_{вг}(z/l_{нл}, D_{нл}, D_1/D_2), \quad (11.24)$$

где  $D_{нл} = l_{нл}/4l_{р1}$ ,  $l_{р1} = \tau_1^2/4|D_1|$  — длина дисперсионного расплывания импульса накачки в линейной среде.

При учете дисперсионных эффектов второго порядка зависимость КПД от расстояния  $z$  становится немонотонной: после достижения максимальной величины энергии второй гармоники уменьшается и осциллирует с расстоянием около некоторого среднего значения, близкого к 50% (картина подобна взаимодействию дифрагирующих пучков; см. рис. 11.5).

Таким образом, для эффективной генерации второй гармоники интенсивными короткими импульсами (чтобы избежать обратной перекачки энергии) либо нелинейная среда должна быть выбрана оптимальной длины ( $l = z_{ког}$ ), либо импульс накачки должен иметь оптимальную форму и длительность. В [28] на основе численного решения уравнений второго приближения теории дисперсии (9.1) с помощью критериев подобия (11.24) построены двухпараметрические функции КПД на плоскости  $(z/l_{нл}, W^{2/3})$ .

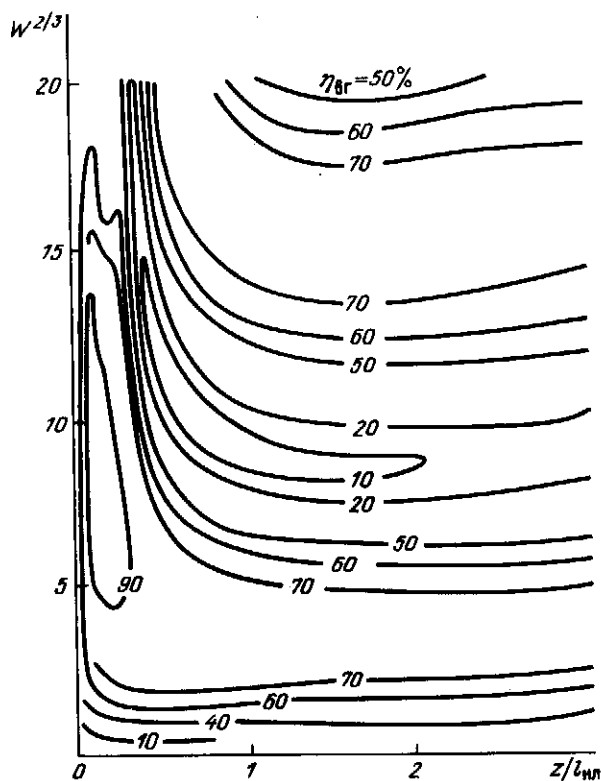


Рис. 11.9. Линии равных КПД удвоителя частоты гауссова импульса с нормированной энергией  $W$  при различной длине нелинейной среды  $z$ :

коэффициенты дисперсионного расплывания связаны соотношением  $D_1 = 2D_2$

где нормированная плотность энергии

$$W = W_{10} \gamma_1^2 z^{3/2} / D_1^{1/2} \quad (11.25)$$

пропорциональна начальной энергии основного импульса. Линии постоянных уровней КПД представлены на рис. 11.9 для случая  $D_1 = 2D_2$ . Зависимость КПД от длительности импульса накачки можно проследить, двигаясь параллельно оси абсцисс на соответствующем уровне  $W$ . Как видно из графиков на рис. 11.9, при малых энергиях  $W$  (выполняется приближение заданного поля) существует только один максимум, соответствующий оптимальной длительности импульса накачки. С ростом энергии основной волны  $W_{10}$  появляются другие локальные максимумы КПД. Расчеты эффективности удвоителя при разных знаках коэффициентов дисперсии  $D_j$  показали, что общие закономерности проявления дисперсионной некогерентности сохраняются, отличаются лишь количественные характеристики процесса.

### § 11.5. Влияние дисперсии нелинейной связи на взаимодействие волновых пакетов

До сих пор мы рассматривали влияние на преобразование частоты волновых пакетов со стороны линейной дисперсии первого и второго порядков (гл. 6, 11). В то же время существует еще один важный механизм, определяющий характер нестационарного взаимодействия коротких импульсов, а именно временная (частотная) дисперсия коэффициентов нелинейной связи огибающих волновых пакетов. При этом этот механизм никак не связан с релаксацией нелинейности.

Как известно, эффективность взаимодействия волн зависит от величины коэффициентов нелинейной связи

$$\gamma_j = 2\pi\chi_2(\omega_1 + \omega_2 = \omega_3) \omega_j / cn_j(\omega_j).$$

Очевидно, что даже без учета дисперсии линейной и квадратичной восприимчивостей ( $n_j, \chi_2 = \text{const}$ ) коэффициенты  $\gamma_j$  линейно зависят от частоты. В этом и заключается дисперсия нелинейной связи. Если обратиться к учету такой дисперсии в укороченных уравнениях для огибающих волновых пакетов, то он сводится к включению в правые части уравнений типа (1.43) временных производных амплитуд волн нелинейной поляризации среды (1.72).

В задачах о самовоздействии оптических импульсов в средах с кубической нелинейностью дисперсия нелинейного коэффициента  $\gamma = 2\pi\chi_3 \omega / cn$  оказывается существенной для пико- и фемтосекундных импульсов [29, 30]. Она приводит к искажению профиля солитонов и ухудшению самокомпрессии волновых пакетов. При взаимодействии коротких импульсов самым ярким проявлением дисперсии нелинейной связи является возникновение специфического механизма сбоя оптимальных фазовых соотношений, т.е. нового типа дисперсионной некогерентности.

Рассмотрим роль дисперсии нелинейной связи при взаимодействии волновых пакетов на примере удвоения частоты [31].

Укороченные уравнения, описывающие генерацию второй гармоники с учетом дисперсии коэффициента нелинейной связи и линейной дисперсии

первого порядка, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -i\gamma_1 A_2 A_1^* - \frac{\gamma_1}{\omega_1} \frac{\partial(A_2 A_2^*)}{\partial \eta_1}, \quad (11.26)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} = -i\gamma_1 A_1^2 - \frac{\gamma_1}{2\omega_1} \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \eta_1}.$$

Граничные условия запишем таким образом:

$$A_1(z=0) = E_{10} \exp(-t^2/\tau_1^2), \quad A_2(z=0) = 0. \quad (11.27)$$

Обсудим сначала случай равенства групповых скоростей взаимодействующих импульсов,  $\nu_{21} = 0$ . Решение системы уравнений (11.26) с граничными условиями (11.27) ищем в виде разложения в ряд по малому параметру  $(\omega_1 \tau_1)^{-1}$ . Включающее в себя первые три члена ряда выражение для интенсивности второй гармоники записывается в виде

$$I_2(\bar{z}, \eta_1) \approx I_{10}(\eta_1) \left\{ \text{th}^2 \bar{z} - \frac{\text{th} \bar{z}}{2(\omega_1 \tau_1)^2 \text{ch}^2 \bar{z}} \times \right. \\ \times \left[ 4\bar{z} \text{ch}^2 \bar{z} + 2 \text{sh}(2\bar{z})(2 \ln \text{ch} \bar{z} - 1) - \right. \\ \left. - \frac{\eta_1^2}{\tau_1^2} \left[ \frac{\bar{z}^2}{2} \left( \text{sh}(2\bar{z}) - \frac{\text{ch}^3 \bar{z}}{\text{sh} \bar{z}} - \frac{\text{sh}^3 \bar{z}}{\text{ch} \bar{z}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 28\bar{z} \text{ch}^2 \bar{z} - \frac{\text{sh}(2\bar{z})}{4} (53 - 9 \text{sh}^2 \bar{z} - 64 \ln \text{ch} \bar{z}) \right] \right\}, \quad (11.28)$$

где введено обозначение  $\bar{z} = z\gamma_1 E_{10}(\eta_1)$ .

Анализ этого выражения показывает, что интенсивность второй гармоники при фиксированном времени  $\eta_1$  достигает на определенном расстоянии максимума, а затем падает. Как следует из численного решения, подоб-

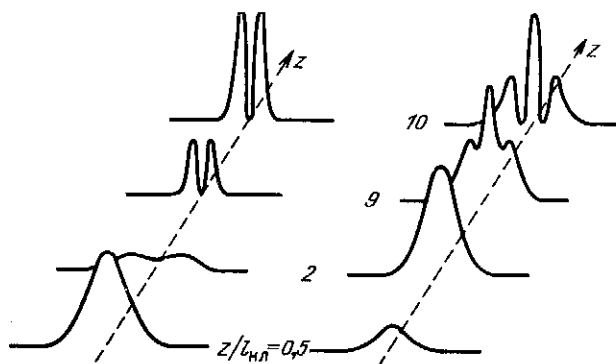


Рис. 11.10. Эволюция огибающих импульсов накачки (слева) и гармоники (справа) в зависимости от расстояния  $z$ , пройденного в нелинейной среде, при  $\omega_1 \tau_1 = 10^3$



ным образом ведет себя и эффективность преобразователя частоты. На расстоянии  $z_{\text{ког}}$  начинается обратная перекачка энергии из волны второй гармоники в основную волну из-за нарушения когерентности взаимодействия вследствие дисперсии нелинейности. При больших  $z$  коэффициент преобразования энергии осциллирует с расстоянием около некоторого среднего значения, а импульсы испытывают сильные искажения, приобретая изрезанную форму (рис. 11.10). Зависимости длины  $z_{\text{ког}}$  от параметров среды и излучения, полученные в большой серии численных экспериментов, хорошо аппроксимируются выражением

$$z_{\text{ког}} = 0,83 I_{\text{нл}} \ln(2,41 \omega_1 \tau_1). \quad (11.29)$$

Эти данные позволяют выбрать длину нелинейного кристалла оптимальным образом, чтобы избежать обратной перекачки энергии и обеспечить тем самым максимальный КПД удвоителя частоты. Так, например, при возбуждении второй гармоники импульсом накачки на длине волны  $\lambda_1 = 1,06$  мкм с длительностью  $\tau_1 = 10^{-13}$  с и интенсивностью  $I_{10} = 10^9$  Вт/см<sup>2</sup> расстояние  $z_{\text{ког}}$  составляет в кристалле KDP 1,25 см, в ADP — 1 см, в LiJO<sub>3</sub> — 0,07 см.

Таким образом, дисперсия нелинейной связи может быть главным фактором, ограничивающим эффективность удвоителей частоты коротких оптических импульсов с длительностью от 50 фс до 5 пс. При меньших длительностях импульсов основную роль в нарушении когерентности взаимодействия играет дисперсионное распыливание волновых пакетов.

При наличии расстройки групповых скоростей расстояние  $z_{\text{ког}}$  оказывается таким же, что и в случае группового синхронизма, но отклонения коэффициента преобразования энергии от его максимального значения гораздо слабее. Для импульсов, длина группового запаздывания которых  $l_{\tau 12} = \tau_1 / |v_{12}|$  меньше  $z_{\text{ког}}$ , обратная перекачка энергии вообще не наступает. Это можно объяснить тем, что импульс второй гармоники выходит из области генерации, прежде чем начнет возвращать энергию основному излучению.

Итак, при оценке предельной эффективности преобразователей частоты субпикосекундных световых импульсов необходимо учитывать возможное снижение КПД вследствие дисперсии нелинейной связи.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЙАНИИ

Когерентные трехчастотные взаимодействия могут происходить между волнами различной физической природы. Например, электромагнитные волны, в том числе и оптические, могут раскачивать (возбуждать) акустические волны, колебания и волны в плазме, молекулярные колебания в различных средах. Последний случай обсуждается в данной главе. Речь идет о вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР) оптического излучения на молекулярных колебаниях, в результате которого в среде рождается смещенная по частоте стоксова компонента.

Комбинационное рассеяние привлекает внимание многих исследователей. Во-первых, это явление широко используется в спектроскопии молекул и кристаллов; в последнее десятилетие бурно развивается активная спектроскопия комбинационного рассеяния (АСКР). Во-вторых, на основе ВКР создаются преобразователи частоты мощного оптического излучения (ВКР-генераторы и усилители). Эффект ВКР применяется также для обращения волнового фронта. Рассмотрение всех этих разнообразных аспектов ВКР в рамках одной главы не представляется возможным. Поэтому мы ограничимся анализом нестационарных эффектов при ВКР коротких оптических импульсов. Большая часть материала посвящена нерезонансному ВКР на дипольнонеактивных переходах.

При ВКР коротких импульсов нестационарные эффекты возникают из-за релаксации молекулярных колебаний и дисперсии волн. Так как скорость распространения колебательного возбуждения молекул равна нулю (или очень мала), то динамика нестационарного ВКР зависит в первом приближении теории дисперсии от величины и знака расстройки групповых скоростей основной волны и стоксовой компоненты. Очевидно, что ВКР можно трактовать как параметрическое усиление стоксовой волны и молекулярных колебаний в интенсивном поле волны накачки. Эта аналогия позволяет использовать многие результаты, относящиеся к нестационарному параметрическому взаимодействию волновых пакетов (гл. 4–7).

В конце главы рассматриваются свойства ВКР-солитонов как при отсутствии, так и при наличии частотных резонансов для основной волны и стоксова излучения.

## § 12.1. Укороченные уравнения нестационарного ВКР

Рассмотрим нерезонансное ВКР на колебательном переходе с альтернативным запретом. Комбинационно-активный переход представим как двухуровневую систему с резонансной частотой  $\omega_0$ . Частота перехода равна разности частот накачки  $\omega_3$  и стоксова излучения  $\omega_2$  (рис. 12.1):

$$\omega_0 = \omega_3 - \omega_2. \quad (12.1)$$

Процесс рассеяния будем исследовать в рамках полуклассического подхода [1–4]. Поля электромагнитного излучения  $E$  описываем уравнениями

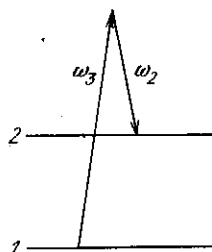


Рис. 12.1. Схема соотношения частот волны накачки  $\omega_3$  и стоксова излучения  $\omega_2$  при ВКР на резонансном переходе между уровнями 1 и 2

Максвелла с нелинейными материальными уравнениями, а поведение вещества — квантовомеханическими уравнениями для элементов матрицы плотности, из которых следуют уравнения для молекулярных колебаний  $Q$  и нормированной разности населенностей уровней 1 и 2 в единице объема  $n = (N_1 - N_2)/N$ , где  $N$  — число осцилляторов в единице объема. Таким образом, исходной является система уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} N \frac{\partial \alpha}{\partial Q} \frac{\partial^2 (Q\mathcal{E})}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{1}{T_2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_0^2 Q = \frac{1}{2M} \frac{\partial \alpha}{\partial Q} n \mathcal{E}^2, \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n-1}{T_1} = \frac{1}{2\hbar\omega_0} \frac{\partial \alpha}{\partial Q} \mathcal{E}^2 \frac{\partial Q}{\partial t},$$

где  $\alpha$  — электронная поляризуемость молекул,  $T_1$  и  $T_2$  — времена продольной и поперечной релаксаций соответственно,  $M$  — приведенная масса.

Упростим (12.2) с помощью перехода к медленно меняющимся амплитудам двух электромагнитных волн и молекулярных колебаний:

$$\mathcal{E} = (1/2) \sum_{j=2}^3 A_j(t, z) \exp i(\omega_j t - k_j z) + \text{к.с.}, \quad (12.3)$$

$$Q = (1/2) \sigma \exp i[\omega_0 t - (k_3 - k_2)z] + \text{к.с.}$$

В таком представлении молекулярные колебания имеют вид бегущей решетки с волновым числом  $k_3 - k_2$ . Подставляя (12.3) в (12.2) и предполагая, что разность населенностей практически не меняется,  $n \approx 1$ , после отбрасывания высших производных получаем в первом приближении

теории дисперсии уравнения для медленно меняющихся амплитуд волны накачки, стоксовой компоненты и молекулярных колебаний [5–8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial z} &= -i\gamma_3 A_2 \sigma, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} - \nu \frac{\partial A_2}{\partial \eta_3} &= -i\gamma_2 A_3 \sigma^*, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_3} + \frac{\sigma}{T_2} &= -i\gamma_Q A_3 A_2^* + F(\eta_3, z), \end{aligned} \quad (12.4)$$

где коэффициенты нелинейной связи  $\gamma_j = (\partial\alpha/\partial Q)\pi N\omega_j/cn_j$  и  $\gamma_Q = (\partial\alpha/\partial Q)/4M\omega_0$ ,  $\nu = \nu_{32} = u_3^{-1} - u_2^{-1}$  – расстройка групповых скоростей волновых пакетов на основной и стоксовой частотах. В (12.4) дополнительно введена внешняя распределенная сила – источник молекулярных флуктуаций, относительно которых сделаем естественное предположение о дельта-коррелированности во времени и пространстве:

$$\langle F(t, z) F(t', z') \rangle = F_0^2 \delta(t - t') \delta(z - z'). \quad (12.5)$$

Входящая сюда константа  $F_0$  связана с сечением комбинационного рассеяния.

Как видно из (12.4), нестационарность ВКР обусловлена двумя причинами. Во-первых, конечным временем релаксации  $T_2$ , которое препятствует установлению колебаний в поле короткого импульса накачки. Во-вторых, расстройкой групповых скоростей  $\nu$ , причем важна не только величина этой расстройки, но и ее знак. В средах с аномальной дисперсией ( $u_2 > u_3$  и  $\nu > 0$ ) импульс на стоксовой частоте отстает от импульса накачки (рис. 12.2а), а при нормальной дисперсии – опережает (рис. 12.2б). В зависимости от вида дисперсии развитие ВКР за групповой длиной  $l_T = \tau_3/|\nu|$  носит различный характер (§ 12.3).

В общем случае уравнения (12.4) требуют численного решения. Однако в приближении заданного поля накачки (амплитудный профиль и энергия накачки сохраняются,  $A_3 = E_3(\eta_3)$ ), второе и третье уравнения в (12.4) решаются методом Римана, подробно изложенным в § 4.1. Результаты этого параграфа, формулы (4.6) – (4.18), нетрудно распространить на описание нестационарного ВКР.

Для нас представляют интерес две задачи. Это собственно ВКР, при котором роль начальной затравки выполняют тепловые флуктуации молекулярных колебаний; здесь перед ВКР развивается спонтанное комбинационное рассеяние (СКР). При этом для интенсивности стоксовой волны с учетом релаксационных и дисперсионных эффектов непосредственно следует интегральное выражение, записанное через функцию Римана  $R$  [9,10]:

$$I_2 = \gamma_2^2 F_0^2 \int_{-\infty}^{\eta_3} d\xi \exp(-2\xi/T_2) \int_0^z d\xi |E_3(\eta_2, \xi)|^2 |R|^2. \quad (12.6)$$

В (12.6) СКР отвечает функции Римана  $R = 1$ . При ВКР вид функции Римана определяется законом амплитудно-фазовой модуляции импульса накачки, относительной дисперсией волн (расстройкой групповых скоростей  $\nu$ )

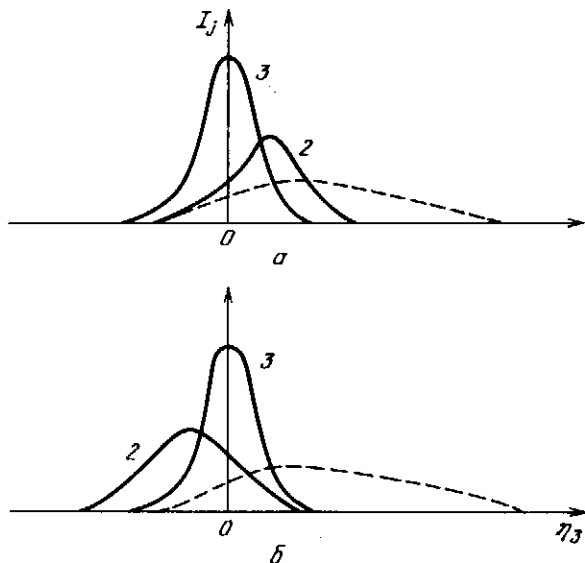


Рис. 12.2. Характерные профили огибающих волновых пакетов накачки (1), стоксова излучения (2) и молекулярных колебаний (штриховая линия) при ВКР в средах с аномальной (а) и нормальной (б) дисперсией

и не зависит от времени релаксации  $T_2$ . Различные режимы ВКР обсуждаются на основе анализа (12.6) в следующих двух параграфах.

Вторая задача связана с усилением когерентного стоксова сигнала, подающегося на вход в среду. Так как общие закономерности протекания этих двух процессов по существу одинаковы, то мы ограничимся анализом первой задачи.

## § 12.2. Влияние молекулярной релаксации на ВКР

Рассмотрим нестационарные явления при ВКР, вызванные конечным временем установления молекулярных колебаний  $T_2$ , предполагая, что дисперсионные эффекты не проявляются,  $\nu = 0$ . Так как в действительности  $\nu \neq 0$ , то, очевидно, речь идет о расстояниях, не превышающих групповую длину ( $z \ll l_T$ ). В этом случае проявляется только локальная нестационарность и функция Римана, входящая в выражение для интенсивности импульса на стоксовой частоте (12.6), приобретает универсальный вид [7, 8, 11–14]

$$R = I_0(G_T), \quad G_T = 2\gamma_1\gamma_Q(z - \xi) \int_{\xi}^{\eta_2} dt |E_3(t)|^2, \quad (12.7)$$

не зависящий от фазовой модуляции волны накачки;  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (ср. с (4.18)). Нечувствительность рассеяния к фазовой модуляции импульса накачки объясняется тем, что она в отсутствие дисперсии полностью перекладывается на стоксов импульс, и, как видно из (12.4), в поле такой бигармонической волны (накач-

ка плюс стокс) молекулярные колебания возбуждаются когерентным образом.

**Установившийся режим ВКР.** При ВКР длинных импульсов в среде устанавливается стационарный режим рассеяния. Интегрирование (12.6) с учетом (12.7) дает следующее выражение для интенсивности стоксовой волны:

$$I_2 = (1/2) \gamma_2^2 F_0^2 T_2 E_{30}^2 z [I_0(G_0) - I_1(G_0)] e^{2G_0}, \quad (12.8)$$

где  $I_0(G_0)$ ,  $I_1(G_0)$  — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента, равного в данном случае коэффициенту стационарного усиления

$$G_0 = \Gamma_0 z, \quad \Gamma_0 = \gamma_1 \gamma_Q T_2 E_{30}^2. \quad (12.9)$$

В слабых полях волны накачки ( $G_0 \ll 1$ ) наблюдается СКР, интенсивность которого

$$I_2 = (1/2) \gamma_2^2 F_0^2 T_2 E_{30}^2 z \quad (12.10)$$

растет пропорционально протяженности нелинейной среды  $z$  (постоянный вклад дают флуктуации молекулярных колебаний). Сопоставление (12.10) с известными выражениями в теории СКР [15] позволяет выразить феноменологическую константу  $F_0$  через интегральное сечение рассеяния.

При рассеянии интенсивного излучения СКР переходит в ВКР: появляется мощная когерентная составляющая молекулярных колебаний, которая совместно с амплитудой стоксовой волны экспоненциально нарастает с увеличением расстояния. Полагая  $G_0 \gg 1$  и заменяя функции Бесселя их асимптотиками, находим из (12.8)

$$I_2 \approx \frac{\gamma_2 F_0^2}{4\gamma_Q (2\pi G_0)^{1/2}} e^{2G_0}. \quad (12.11)$$

Предэкспоненциальный множитель  $G_0^{-1/2}$ , снижающий усиление, объясняется сужением спектральной линии стоксовой компоненты при развитом ВКР. Заметим, что аналогичный результат получен и для вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ) [16].

**Неустановившийся режим ВКР.** На первый взгляд влияние молекулярной релаксации, характеризуемое временем  $T_2$ , сказывается при ВКР коротких импульсов с длительностью  $\tau_3 \lesssim T_2$ . Однако это не совсем так, неустановившийся режим могут испытывать и длинные импульсы. Дело заключается в следующем.

Из-за релаксации фронт импульса накачки практически не возбуждает стоксову компоненту и когерентную составляющую молекулярных колебаний, причем этот дефицит в усилении увеличивается по мере распространения импульса накачки. В результате, как показывает анализ (12.6), (12.7), при больших усилениях ( $G_0 \gg 1$ ) вместо локального времени релаксации  $T_2$  нестационарность ВКР характеризуется временем установления [11, 12, 17]

$$\tau_{уст} = T_2 G_0. \quad (12.12)$$

На практике вполне достижимы коэффициенты стационарного усиления  $G_0 = 20 - 30$ . Следовательно, релаксация сказывается и на ВКР импульсов

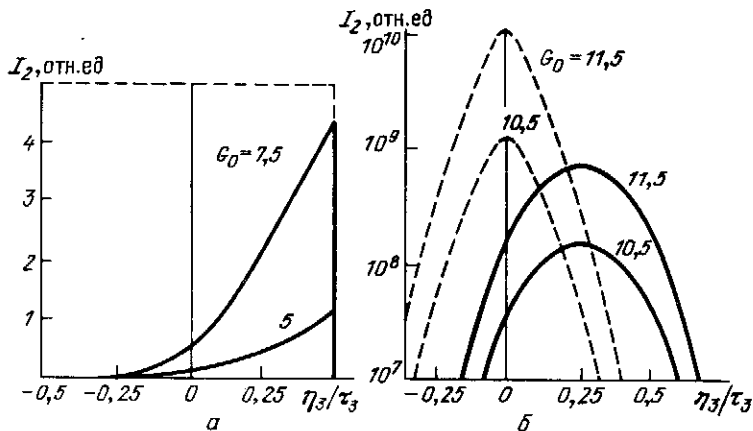


Рис. 12.3. Профили интенсивности стокового сигнала при ВКР прямоугольного импульса накачки длительностью  $\tau_3 = 0,5 T_2$  (а) и гауссова импульса с  $\tau_3 = 17 T_2$  (б) при разных значениях коэффициента стационарного усиления  $G_0$ ; штриховые линии – квазистационарное ВКР

с длительностями, превышающими  $T_2$  в 20–30 раз. Неустановившийся режим ВКР длинных импульсов с  $\tau_3 \gg T_2$  развивается на расстояниях  $z > l_{уст}$ , где

$$l_{уст} = T_2 / \Gamma_0 \tau_3. \quad (12.13)$$

В этой области профиль интенсивности стоковой волны сильно искажается по сравнению с импульсом накачки. Так, при ВКР прямоугольного импульса интенсивность на стоковой частоте меняется, как следует из (12.6), (12.7), по закону [7, 12, 13]

$$I_2 \propto G_T^{-1/2} e^{2G_T}, \quad G_T = 2(\eta/\tau_{уст})^{1/2}. \quad (12.14)$$

Видно, что огибающая стоковой волны принимает экспоненциальную форму: ее вершина смещается к хвосту импульса накачки, где молекулярные колебания раскачиваются наиболее интенсивно (рис. 12.3а). Подобные искажения наблюдаются и в поле гауссова импульса накачки (рис. 12.3б) [18]. Максимум коэффициента усиления стоковой компоненты падает по сравнению со стационарным ВКР (12.9):

$$G_{Tmax} = 2G_0(l_{уст}/z)^{1/2}. \quad (12.15)$$

На рис. 12.4 этот эффект показан для ВКР гауссова импульса накачки [18].

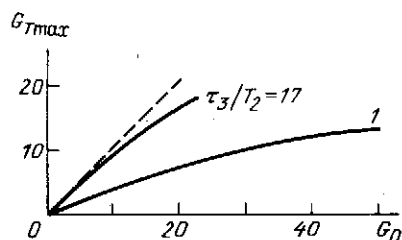


Рис. 12.4. Зависимости максимального коэффициента усиления стоковой волны  $G_{Tmax}$  в неустановившемся режиме от коэффициента стационарного усиления  $G_0$  при различных соотношениях между длительностью гауссова импульса накачки  $\tau_3$  и временем релаксации  $T_2$ ; штриховая линия – стационарное ВКР

Основные закономерности неустановившегося режима ВКР подтверждаются многочисленными экспериментальными данными по снижению коэффициента усиления [18, 19], по задержке вершины стоксова импульса [19, 20], по отсутствию влияния фазовой модуляции импульса накачки на рассеяние в средах с малой дисперсией [21]. На эту тему написано несколько обзоров [22–25].

ВКР в режиме усиления когерентного стоксова сигнала, подающегося на вход в среду, описывается с помощью той же функции Римана, но вместо выражения (12.6) надо воспользоваться формулой типа (4.7), учитывающей ненулевые граничные условия  $A_2(z=0) = E_2(t)$ . Так как комплексные амплитуды накачки и сигнала в этой задаче входят в подынтегральное выражение для интенсивности стоксовой волны, то в отличие от режима рассеяния (12.6) здесь возможно влияние фазовых модуляций накачки и стоксова сигнала на процесс ВКР [7]. В [7] рассмотрены также спектральные характеристики нестационарного рассеяния.

### § 12.3. Комбинированные эффекты молекулярной релаксации и дисперсии волн

Рассеивающие среды обладают дисперсионными свойствами (показатель преломления, фазовая и групповая скорости зависят от частоты). Поэтому импульсы накачки и стоксовой компоненты имеют разные скорости,  $u_3 \neq u_2$ . Расстройка групповых скоростей при ВКР спектрально-ограниченных импульсов начинает играть существенную роль на расстояниях, превышающих длину группового запаздывания  $l_T$ . В области  $z > l_T$  возникают новые нестационарные режимы (рис. 12.5) — модовое усиление при  $\nu < 0$  и насыщение усиления при  $\nu > 0$ . Так как эти режимы в большой степени аналогичны соответствующим режимам параметрического усиления (§ 4.3, 4.4), то ниже приведены лишь основные результаты теории ВКР в диспергирующих средах [8–10].

Ключевым параметром, определяющим коэффициент усиления и другие характеристики ВКР в области  $z > l_T$ , является величина

$$g_{T\nu}^2 = \Gamma_0 \tau_3^2 / \nu T_2 = -\gamma_2 \gamma_Q E_{30}^2 \tau_3^2 / \nu, \quad (12.16)$$

содержащая информацию об амплитуде и длительности импульса накачки, нелинейных и дисперсионных свойствах среды. Абсолютное значение  $|g_{T\nu}|$  имеет ясный физический смысл — это максимум коэффициента неустановившегося усиления (12.15) на групповой длине, т.е. на границе двух режимов ВКР (рис. 12.5).

**Модовый режим ВКР.** Необходимое условие для модового усиления,  $u_2 > u_3$ , реализуется в области нормальной дисперсии. В такой среде стоксов импульс и "волна" молекулярного возбуждения локализуются в импульсе накачки, что благоприятно сказывается на их усилении. Благодаря постоянному притоку энергии экспоненциальный рост амплитуд сохраняется и за групповой длиной, где огибающие приобретают профили, не меняющиеся с расстоянием. Таким образом, в режиме модового усиления ампли-



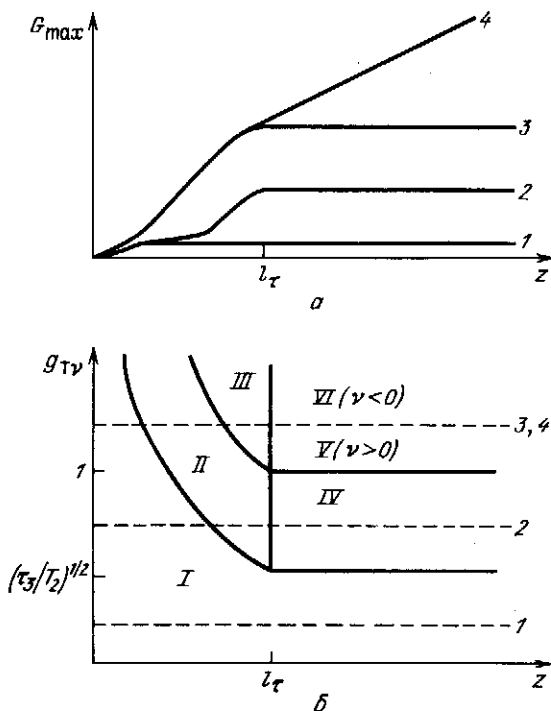


Рис. 12.5. Комбинационное рассеяние импульсов в диспергирующей среде: *a* — зависимости коэффициента усиления от расстояния при различных  $g_{Tv}$ ; *b* — карта режимов:

СКР (I), стационарное рассеяние (II), неустановившееся (III), с насыщением усиления (IV и V), с захватом в стационарные моды (VI) ВКР (ср. с параметрическим усилением; см. рис. 4.7)

туды стока импульса и молекулярных колебаний представляются в следующем виде:

$$A_2 = A_{2M}(\eta_3) e^{\Gamma_M z}, \quad \sigma = \sigma_M(\eta_3) e^{\Gamma_M z}. \quad (12.17)$$

Для нахождения стационарных профилей и инкрементов надо (12.17) подставить в (12.4) и решить получающиеся уравнения для выбранного профиля импульса накачки  $E_3(\eta_3)$  с учетом требования локализации мод,  $A_{2M} = 0$  и  $\sigma_M = 0$  при  $|\eta_3| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим сначала характеристики мод, формирующихся при ВКР колоколообразного импульса накачки (ср. с (4.9) при  $d_3 = 0$ )

$$E_3 = E_{30} \operatorname{sech}(\tilde{\eta}_3/\tau_3). \quad (12.18)$$

Расчеты показывают [9], что существует дискретный спектр мод с инкрементами

$$\Gamma_M^{(p)} = (2g_{Tv} - \tau_3 T_2^{-1} - 1 - 2p)/l_\tau. \quad (12.19)$$

Из (12.19) следует, что с повышением номера моды  $p$  усиление становится меньше. Инкремент падает при сокращении длительности импульса, а также

при сильном изменении дисперсии волн (при  $\nu \rightarrow 0$  модовый режим сменяется неустановившимся (12.14) с  $G_T \propto z^{1/2}$ , а при  $\nu \rightarrow \infty$  уменьшается длина эффективного взаимодействия  $l_T$ ). Оптимальной дисперсии  $\nu_{\text{опт}} = \gamma_2 \gamma_Q E_{30}^2 / [T_2^{-1} + (1 + 2p) \tau_3^{-1}]^2$  соответствует максимум модового усиления  $\Gamma_M^{(p)} = \Gamma_0 / [1 + (1 + 2p) T_2 \tau_3^{-1}]$ . Порог возникновения модового режима ВКР ( $\Gamma_M^{(p)} = 0$ )

$$E_{30\text{пор}}^2 = (\gamma_2 \gamma_Q)^{-1} |\nu| [T_2^{-1} + (1 + 2p) \tau_3^{-1}]^2 \quad (12.20)$$

тем больше, чем больше номер моды  $p$ .

Стационарные амплитудные профили при ВКР схожи с огибающими параметрических мод (§ 4.4). Так, низшая мода ( $p = 0$ ) имеет следующий профиль (рис. 12.6а):

$$A_{2M} = E_{20} \text{ch}^{-g T \nu} (\eta_3 / \tau_3) \exp[(\Gamma_M^{(0)} l_T - \tau_3 T_2^{-1} - 1) \eta_3 / 2 \tau_3]. \quad (12.21)$$

Вблизи порога ( $\Gamma_M^{(0)} \approx 0$ ) стационарный стоксов импульс (12.21) сильно уширяется и смещается к фронту импульса накачки (кривая 1); в этом случае уход энергии стокава сигнала со скоростью  $u_2$  слабо восполняется притоком энергии из импульса накачки. При значительном превышении порога (12.20) стоксов сигнал располагается на хвосте импульса накачки

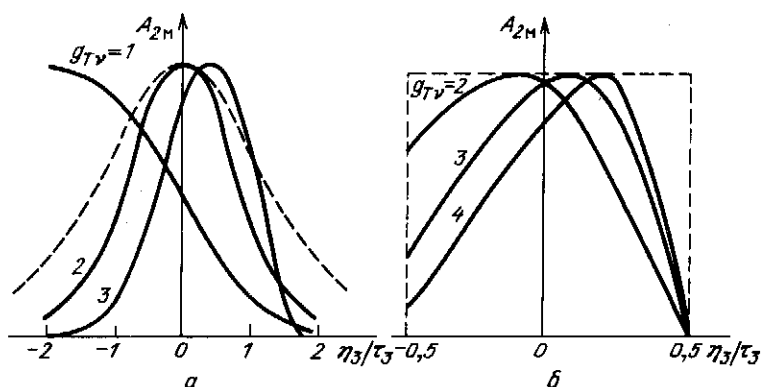
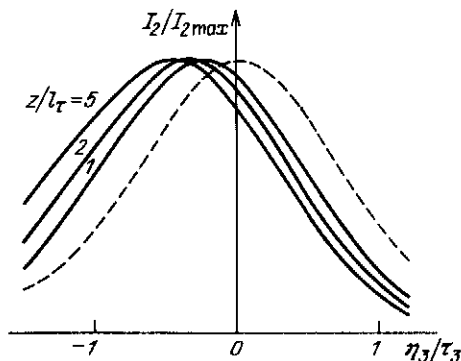


Рис. 12.6. Огибающие основной моды ( $p = 0$ ) стокава импульса (сплошные линии) при ВКР гауссовых (а) и прямоугольных (б) импульсов накачки (штриховые) длительностью  $\tau_3 = T_2$  в среде с аномальной дисперсией

Рис. 12.7. Профили интенсивности стокава импульса (сплошные линии) на различных расстояниях при модовом режиме ВКР колоколообразного импульса (штриховая) в случае  $g T \nu = 1$ ,  $\tau_3 = 0.5 T_2$



(кривая 3), а инкремент стремится к величине

$$\Gamma_M = 2(\gamma_2 \gamma_Q E_{30}^2 |\nu|)^{1/2}. \quad (12.22)$$

Стационарные профили и инкременты при модовом режиме ВКР исследованы также для прямоугольного импульса накачки [8, 9]. На рис. 12.6б приведены модовые профили стоксова излучения при различных уровнях интенсивности накачки. Здесь прослеживаются те же закономерности, что и в поле гауссова импульса.

Динамику перехода нестационарного ВКР в модовый режим усиления (12.17) можно проследить с помощью общей формулы (12.6). Входящая под интеграл функция Римана для импульса накачки с огибающей (12.18) выражается через гипергеометрическую функцию [26] (ср. с § 4.4). При целочисленных значениях ключевого параметра (12.16) ( $g_{T\nu} = 1, 2, 3, \dots$ ) функция Римана представима в виде конечного ряда [26]. Это позволяет проинтегрировать (12.6) и получить аналитические выражения для интенсивности стоксова сигнала. Например, при  $g_{T\nu} = 1$  и  $\tau_3 = T_2/2$  возбуждение стоксова импульса описывается следующим образом:

$$I_2 = (\gamma_2/\gamma_Q) F_0^2 E_{30}^2 e^{-\bar{z}} \operatorname{sh} \bar{z} \operatorname{ch}^{-2} \bar{\eta}_3 \times \\ \times (1 + 2e^{-\bar{\eta}_3} \operatorname{sh} \bar{z} \operatorname{arctg} e^{\bar{z} + \bar{\eta}_3}), \quad (12.23)$$

где  $\bar{z} = z/l_T$ ,  $\bar{\eta}_3 = \eta_3/\tau_3$ . Расчеты профилей интенсивности стоксов сигнала на различных расстояниях, выполненные с помощью (12.23), представлены на рис. 12.7 [9]. На больших расстояниях устанавливается стационарный профиль

$$I_2 = (\pi \gamma_2/4\gamma_Q) F_0^2 E_{30}^2 \operatorname{ch}^{-2} \bar{\eta}_3 e^{-\bar{\eta}_3 + \bar{z}}. \quad (12.24)$$

Сравнение (12.24) с (12.19), (12.21) показывает, что, действительно, усиление стоксова сигнала переходит в модовый режим.

При более общих соотношениях между параметрами интеграл (12.6) вычисляется асимптотическим методом:

$$I_2 = \frac{2^{-2g_{T\nu}} \gamma_2 F_0^2 E_{30}^2}{\gamma_Q (1 + \tau_3/T_2)} \Gamma(2g_{T\nu}) \Gamma(\tau_3/T_2) \Gamma(2g_{T\nu} - 1 - \tau_3/T_2) \times \\ \times \Gamma^{-4}(g_{T\nu}) |A_{2M}^{(0)}(\eta_3)|^2 \exp(2\Gamma_M^{(0)} z), \quad (12.25)$$

где  $\Gamma(g)$  — гамма-функция [26]. Выражение (12.25) позволяет заключить, что и в общем случае ВКР коротких импульсов за групповой длиной выходит на модовый режим.

Полученные выше формулы для модового режима ВКР описывают нестационарные процессы в ВКР-усилителях и генераторах с накачкой пикосекундными импульсами, когда длина нелинейной среды намного превосходит длину группового запаздывания. Представленная теория модового усиления стоксова сигнала позволяет, в частности, объяснить результаты экспериментов по изучению зависимости ширины линии стоксова излучения от длины среды при ВКР пикосекундных импульсов [22]. То обстоятельство, что ширина спектра за групповой длиной ( $z > l_T$ ) практически остается постоянной, говорит о возможной реализации в этих опытах модового усиления.

**Режим насыщения усиления стоксова сигнала.** В среде с аномальной дисперсией и при ВКР назад стоксов импульс вместе с молекулярными колебаниями отстает от импульса накачки. Поэтому усиление развивается на расстояниях, ограниченных групповой длиной  $l_T$ . За ней экспоненциальный рост амплитуд стоксова сигнала и молекулярных колебаний прекращается — наступает режим насыщения экспоненциального усиления (по длине нелинейной среды). С точки зрения теории в среде с аномальной дисперсией  $\nu > 0$  и, как следствие этого, ключевой параметр  $g_{Tv}$  (12.16) — мнимая величина. Это означает, что функция Римана кардинально меняет свои свойства (подобно тому как гиперболический синус мнимого аргумента переходит в тригонометрический синус).

Как показывают расчеты, основанные на вычислении (12.6), уровень насыщения коэффициента усиления равен

$$G_m = (\pi/2) g_{Tv}. \quad (12.26)$$

Эффекты насыщения наиболее резко проявляются при рассеянии назад, так как групповая расстройка  $\nu \approx 2/u_3$  в десятки и сотни раз больше, чем при ВКР вперед. Именно в связи с этим наблюдается сильная асимметрия индикатрисы рассеяния коротких импульсов [27].

#### § 12.4. ВКР фазово-модулированных импульсов

В диспергирующей среде фазовая (частотная) модуляция импульса накачки ухудшает эффективность ВКР. Поясним механизм влияния ФМ с помощью следующих рассуждений. Частотная модуляция волны накачки  $\Omega_3(\eta_3)$  перекладывается на стоксову компоненту ( $\Omega_2 = \Omega_3\eta_2$ ), идущую с другой скоростью. Интерференция этих двух волн раскачивает на разностной частоте когерентную составляющую молекулярных колебаний в соответствии с третьим уравнением системы (12.4) для амплитуды  $\sigma$ . Бигармоническое поле стремится навязать молекулярным колебаниям частотную модуляцию

$$\Delta\Omega = \Omega_3(\eta_3) - \Omega_3(\eta_2) \approx (\partial\Omega/\partial\eta_3)\nu z, \quad (12.27)$$

глубина которой возрастает с пройденным в нелинейной среде расстоянием. Однако из-за инерционности, характеризуемой временем релаксации  $T_2$ , колебания, начиная с определенного расстояния, не успевают отслеживать быстрое изменение частоты, если эффективная отстройка от резонанса превышает ширину линии комбинационного рассеяния. В зависимости от интенсивности волны накачки насыщение усиления стоксова сигнала происходит в квазистационарном или неустановившемся режимах (рис. 12.8).

**Квазистационарный ВКР.** При рассеянии длинных импульсов фазовая модуляция нарушает когерентность взаимодействия, когда уход частоты (12.27) начинает превышать ширину линии спонтанного рассеяния  $\Delta\omega_{сп} = 2/T_2$ . При линейной частотной модуляции ( $\Omega_3 = \Omega_{30}\eta_3/\tau_3$ ) это происходит на длине [10]

$$l_{\Phi 1} = 2l_T/T_2 |\Omega_{30}|. \quad (12.28)$$

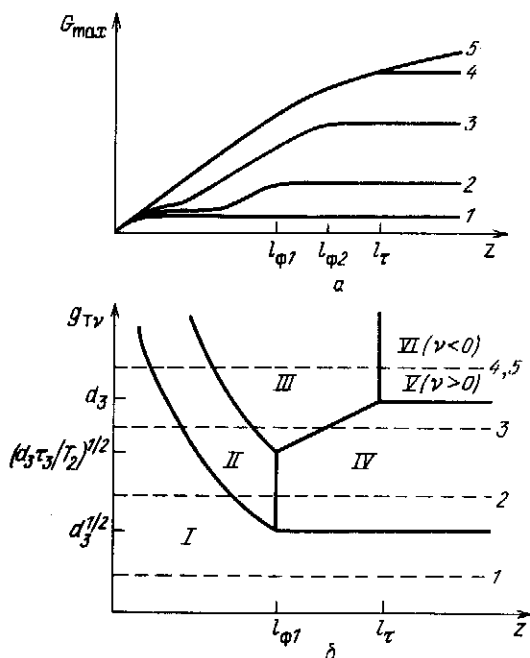


Рис. 12.8. Классификация нестационарных режимов ВКР коротких фазово-модулированных импульсов накачки с параметром частотного заполнения  $d_3$ . Смысл кривых такой же, как на рис. 12.5

Расчеты по формуле (12.6) с функцией Римана для импульса накачки с линейной модуляцией частоты (4.14) дают следующее выражение для интенсивности стоксова сигнала:

$$I_2 \propto \exp [2\Gamma_0 l_{\phi 1} \arcsin (z/l_{\phi 1})]. \quad (12.29)$$

Видно, что коэффициент усиления при  $z \geq l_{\phi 1}$  насыщается на уровне

$$G_{\text{н}} = \pi\Gamma_0 l_{\phi 1}. \quad (12.30)$$

С повышением интенсивности волны накачки уровень насыщения усиления растет. Однако при этом сокращается время установления молекулярных колебаний (процесс становится более инерционным). Поэтому необходимо рассмотреть роль фазовой модуляции и в неустановившемся режиме ВКР.

**Неустановившееся ВКР.** При рассеянии коротких импульсов с  $\tau_3 < \tau_{\text{уст}}$  уход частоты (12.27) снижает эффективность преобразования энергии волны накачки в стоксов сигнал, если  $\Delta\Omega$  сравнивается с шириной линии ВКР  $\Delta\omega_T = (\Gamma_0 z / \tau_3 T_2)^{1/2}$  [7] в неустановившемся режиме. Из условия  $\Delta\Omega = \Delta\omega_T$ , находим, что насыщение экспоненциального усиления происходит теперь на длине

$$l_{\phi 2} = l_{\tau} |g_{T\nu}|^2 / d_3^2. \quad (12.31)$$

Влияние фазовой модуляции на ВКР коротких ФМ импульсов описывается выражением [10]

$$I_2 \approx \exp \{ 2(\Gamma_0 z \tau_3 / T_2)^{1/2} [(1 - z/l_{\Phi 2})^{1/2} + (l_{\Phi 2}/z)^{1/2} \arcsin(z/l_{\Phi 2})^{1/2}] \}. \quad (12.32)$$

Анализ (12.32) показывает, что на малых расстояниях ( $z \ll l_{\Phi 2}$ ) коэффициент усиления соответствует (12.15), а на больших — насыщается на уровне, определяемом прежней формулой (12.30). Только надо иметь в виду, что интенсивность накачки для реализации неустановившегося режима ВКР (12.32) должна быть выше, чем в квазистационарном режиме (12.29); см. рис. 12.8.

**Модовый режим ВКР.** Нестационарные эффекты, сопровождающие ВКР колоколообразного импульса с квазилинейной модуляцией частоты (4.9), (4.10), характеризуются модифицированным ключевым параметром [10]

$$g_{T\nu}^2(d_3) = g_{T\nu}^2 - d_3^2. \quad (12.33)$$

Видно, что при большом параметре частотного заполнения импульса накачки независимо от знака групповой расстройки  $\nu$  величина  $g_{T\nu}(d_3)$  становится мнимой, а это, как уже было отмечено выше при обсуждении ВКР в среде с аномальной дисперсией, ведет к насыщению коэффициента усиления в данном случае на уровне

$$G_H = (\pi/2) |g_{T\nu}(d_3)|. \quad (12.34)$$

Очевидно, условие  $g_{T\nu} > |d_3|$  определяет порог модового усиления при ВКР фазово-модулированных импульсов в среде с нормальной дисперсией.

В среде с аномальной дисперсией и при ВКР назад фазовая модуляция дополнительно снижает уровень насыщения коэффициента усиления (ср. (12.34) с (12.26) при  $\nu > 0$ ).

Таким образом, быстрая фазовая модуляция (или глубокая частотная модуляция) снижает эффективность ВКР коротких импульсов в диспергирующей среде. Вместе с тем следует отметить и другую сторону этого явления. При достаточно большой интенсивности импульса накачки (насыщение из-за ФМ наблюдается в неустановившемся режиме (рис. 12.8), причем длина  $l_{\Phi 2}$ , на которой прекращается экспоненциальный рост амплитуды с расстоянием, увеличивается пропорционально интенсивности накачки (см. 12.31)). Очевидно, чем интенсивнее накачка, тем дальше отодвигается граница насыщения усиления. Если же ее интенсивность такова, что  $g_{T\nu} > |d_3|$ , то ВКР фазово-модулированных импульсов идет так же эффективно, как и спектрально-ограниченных с  $d_3 = 0$ .

Фазовая модуляция импульса накачки может возникнуть в ходе его распространения в среде благодаря наличию эффекта самовоздействия — изменения показателя преломления в присутствии электромагнитного поля,  $n = n_0 + n_{\text{нл}} |E|^2$ . Фазовая самомодуляция импульса накачки ( $\varphi_{\text{нл}} = \omega_3 n_{\text{нл}} |E_3(\eta_3)|^2 z/c$ ) приводит к нарушению когерентности процесса рассеяния и к прекращению усиления стоксова сигнала на длине [28]

$$l_{\Phi 3} = \left( \frac{z l_{\tau}}{\Omega_{\text{нл}}(z) T_2} \right)^{1/2}, \quad (12.35)$$

где  $\Omega_{нл}$  — уширение спектра из-за самовоздействия. Резкое уменьшение интенсивности стоксова сигнала при аномальном уширении спектров в самофокусирующихся световых пучках наблюдалось экспериментально при ВКР в сероуглероде. Оценки по формуле (12.35) дают, что при  $\Omega_{нл} = 50 \text{ см}^{-1}$  эффективное рассеяние происходит на длине  $l_{фз} = 0,3 \text{ см}$ , а при  $\Omega_{нл} = 1000 \text{ см}^{-1}$  — на длине  $l_{фз} = 0,015 \text{ см}$ . Эти цифры и говорят о подавлении ВКР при сильных уширениях спектра.

## § 12.5. Трехчастотные ВКР-солитоны

При исследовании сильных взаимодействий стоксовой компоненты с волной накачки основное внимание уделяется тем же проблемам, что и при анализе параметрических усилителей и преобразователей частоты. Это прежде всего проблема достижения предельных КПД ВКР усилителей и генераторов, компрессия импульсов на стоксовой частоте, формирование солитонов и т.д. Надо сказать, что все перечисленные вопросы исследуются как экспериментально, так и теоретически, причем наряду с аналитическими подходами привлекаются и численные методы решения нелинейных уравнений (см., например, [29, 30]). Основные физические представления о нестационарных процессах при ВКР в условиях сильного энергообмена весьма схожи с общими понятиями, рассмотренными при нестационарном трехчастотном взаимодействии волновых пакетов (гл. 6, 7). Так, например, гигантский параметрический импульс имеет своим аналогом гигантский стоксов импульс при ВКР назад [5, 6, 31–33].

При построении теории сильных взаимодействий стоксовой и основной волн через возбуждение молекулярных колебаний в ряде случаев удается разработать метод обратной задачи рассеяния (ОЗР), позволяющий получать точные решения нелинейных укороченных уравнений ВКР. К этой области тесно примыкает теория ВКР-солитонов. Необходимо сразу подчеркнуть, что при учете других нелинейных процессов (самовоздействие, ангармонизм колебаний, резонансы для накачки и стоксова излучения и т.д.) механизмы образования трехчастотных ВКР-солитонов становятся исключительно разнообразными. Рассмотрим свойства связанных солитонов, делая естественное предположение о том, что релаксационные явления (механизмы диссипации энергии) несущественны и ими можно пренебречь.

**Солитоны в активной среде.** Рассмотрим свойства трехчастотных солитонов в рамках укороченных уравнений (12.4) в отсутствие внешней силы ( $F = 0$ ) и без учета движения населенностей. Полагая, что амплитуды зависят только от бегущей координаты  $\eta_c = t - z/u_c$ , находим стационарные огибающие солитонов (рис. 12.9а):

$$A_{jc} = E_{j0} \operatorname{sech}(\eta_c/\tau_c), \quad \sigma_c = \sigma_0 \operatorname{th}(\eta_c/\tau_c). \quad (12.36)$$

Видно, что солитоны на основной и стоксовой частотах ( $j = 2, 3$ ) распространяются в возбужденной среде,  $|\sigma_c| = \sigma_0$  при  $|\eta_c| \rightarrow \infty$ . На "волне" молекулярных колебаний образуется "темный" солитон. Это явление аналогично параметрическому взаимодействию солитонов на сигнальной и холостой частотах с "темным" солитоном волны накачки (ср. (12.36) с (7.20)). Подставляя (12.36) в (12.4), получаем соотношения между параметрами

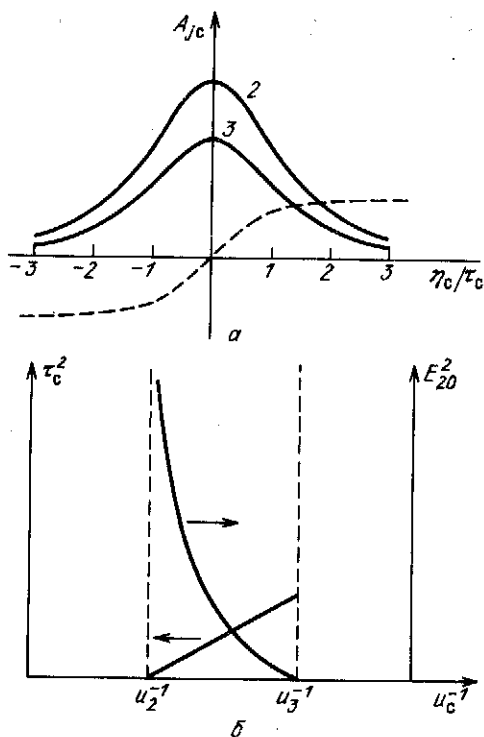


Рис. 12.9. ВКР-солитоны в активной среде:

*а* — огибающие стоковского сигнала (2), волны накачки (3) и молекулярных колебаний (штриховая линия); *б* — зависимости длительности и амплитуды солитона от скорости его распространения

трехчастотных ВКР-солитонов (рис. 12.9б):

$$\gamma_3 E_{20}^2 = \gamma_2 E_{30}^2 \nu_{3c} / \nu_{c2}, \quad \tau_c^2 = \nu_{c2} / \gamma_1 \gamma_2 E_{30}^2. \quad (12.37)$$

Из (12.37) следует, что солитоны (12.36) распространяются с промежуточной скоростью,  $u_3 < u_c < u_2$ . Амплитуда солитонов на стоковской частоте стремительно возрастает при приближении к синхронизму ( $u_c \rightarrow u_2$ ), длительность солитонов при этом существенно уменьшается. Такой трехчастотный солитон можно назвать гигантским стоковым импульсом в активной среде.

Не представляет труда исследовать и другой тип трехчастотного солитона, когда на частоте накачки появляется "темный" солитон, а стоков сигнал и молекулярные колебания формируют "светлые" солитоны (ср. с (7.26)).

**Солитоны при учете кубической нелинейности.** В сильных полях помимо трехчастотного взаимодействия на комбинационно-активном переходе проявляются нерезонансные нелинейности более высокого порядка. Во-первых, во всех средах существует кубическая нелинейность, с которой связана нелинейная добавка к показателю преломления  $n_{\text{НЛ}}$ , пропорциональная



$|A_j|^2$ . Во-вторых, в сильном поле осциллятор становится ангармоническим: в уравнении для амплитуды молекулярных колебаний  $\sigma$  появляется член, пропорциональный  $|\sigma|^2 \sigma$ . При учете этих эффектов трехчастотные солитоны существенно меняют свои характеристики. Теперь уединенные волны формируются на всех частотах одновременно (полная локализация), стационарные профили солитонов принимают лоренцеву форму:

$$|A_{jc}|^2, |\sigma_c|^2 \propto (1 + \eta_c^2/\tau_c^2)^{-1}. \quad (12.38)$$

Теория трехчастотных ВКР-солитонов (12.38) с учетом движения населенностей дана в [34]. Отметим, что и в отсутствие резонанса благодаря самовоздействию формируются трехчастотные связанные солитоны того же типа (§ 4.3). Общим свойством для них является наличие фазовой модуляции в отличие от солитонов (12.36).

**Солитоны в резонансных трехуровневых средах.** Эффективность ВКР коротких импульсов можно повысить, подбирая частотный резонанс для волны накачки и стокова сигнала. Очевидно, по сравнению с обычной схемой ВКР (рис. 12.1) необходимо добавить еще один верхний уровень, т.е. перейти к трехуровневой среде. Укороченные уравнения резонансного ВКР существенно усложняются. Однако при отбрасывании релаксационных членов их можно решить методом ОЗР.

В отсутствие взаимодействия в резонансной среде без изменения огибающей распространяются  $2\pi$ -импульсы (эффект самоиндуцированной прозрачности) [41]. Именно к исследованию этой проблемы и был применен сначала аппарат ОЗР [35, 36]. Затем было показано, что методом ОЗР решается более сложная задача о трехчастотном взаимодействии с трехуровневыми средами [37]. Обзор по этой проблеме дан в [38]. Мы приведем основные результаты, относящиеся к когерентному резонансному ВКР.

В приближении заданного поля основной импульс распространяется в двухуровневой среде в виде  $2\pi$ -импульса (12.18) со скоростью меньшей, чем в линейной среде, поэтому возможен захват накачкой стокова сигнала [39, 40]. Здесь остаются в силе все результаты, изложенные в § 12.3 при анализе модового режима ВКР.

Для изучения предельных возможностей преобразования энергии при нестационарном ВКР необходимо исследовать нелинейную стадию трехчастотного взаимодействия, когда приближение заданного поля накачки несправедливо. Как показывают аналитические и численные расчеты [37, 38], эволюция импульсов накачки и стокова сигнала кардинально зависит от соотношения сил осцилляторов

$$\kappa = \mu_2^2 \omega_2 / \mu_3^2 \omega_3, \quad (12.39)$$

где  $\mu_j$  — дипольные моменты переходов между уровнями 2—3 ( $\mu_2$ ) и 3—1 ( $\mu_3$ ).

При равенстве сил осцилляторов ( $\kappa = 1$ ) нелинейная задача о резонансном ВКР решается точно в аналитической форме методом ОЗР [37]. Характер взаимодействия импульсов можно представить, рассмотрев солитонные решения. С точки зрения прогноза эффективности резонансного

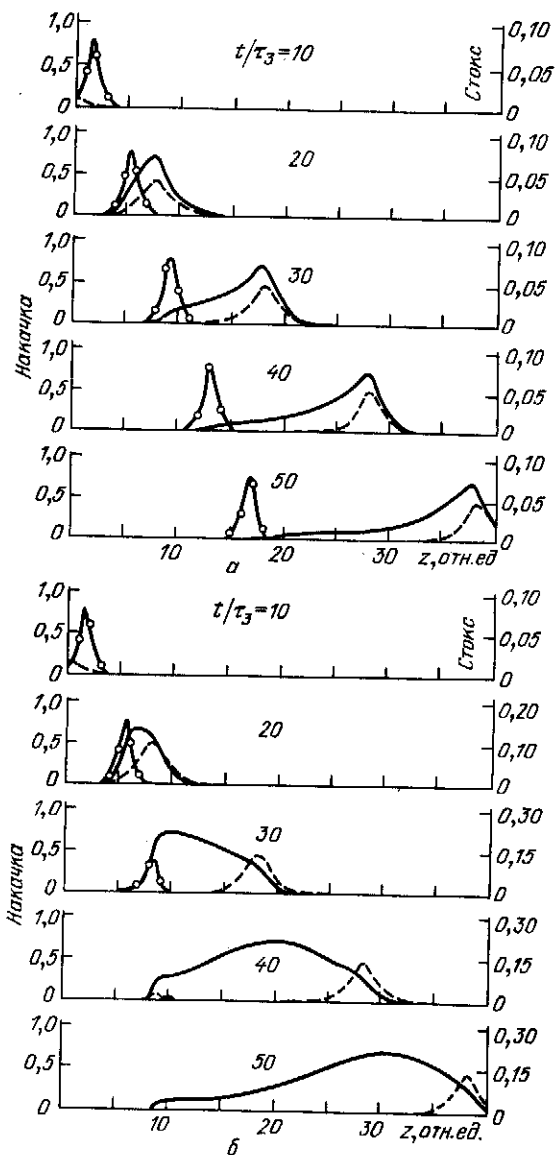


Рис. 12.10. Картина усиления стоковского импульса (сплошные линии) в поле накачки (сплошные с точками) в различные моменты времени  $t$  при соотношении сил осцилляторов:

$a$  – меньше критической величины,  $\kappa_2 = 0,16$ ;  $b$  – больше критической,  $\kappa_2 = 0,36$ ; штриховые линии – стоковский импульс в отсутствие взаимодействия

ВКР наибольший интерес представляет односолитонное решение

$$E_{jc} = \frac{2h}{\mu_j \tau_c} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{\eta_j}{\tau_c} - \varphi_j \right) + \exp \left( \frac{\eta_j}{\tau_c} - \varphi_j \right) \exp \left( \pm \frac{z}{L} \right) \right]^{-1}, \quad (12.40)$$

где скорость распространения основного импульса  $E_3$  равна скорости  $2\pi$ -импульса [41], а скорость стоксова импульса  $E_2$  — скорости света в среде,  $u_2 \approx c$ , константы  $\varphi_j$  определяют смещение максимумов огибающих на входе в нелинейную среду; в последнем экспоненциальном множителе знак "+" соответствует  $j = 3$ , знак "-" —  $j = 2$ . Решение (12.40) имеет две разные асимптотики при  $z \rightarrow \pm \infty$ . Вдали от области взаимодействия ( $z \rightarrow -\infty$ ) энергия сосредоточена в  $2\pi$ -импульсе накачки:

$$E_{3c} = \frac{2h}{\mu_3 \tau_c} \operatorname{sech} \left( \frac{\eta_3}{\tau_c} - \varphi_3 \right), \quad E_{2c} = 0. \quad (12.41)$$

После взаимодействия энергия полностью переходит к стоксову сигналу, распространяющемуся при  $z \rightarrow \infty$  по прозрачной среде без изменения своего профиля:

$$E_{2c} = \frac{2h}{\mu_2 \tau_c} \operatorname{sech} \left( \frac{\eta_2}{\tau_c} - \varphi_2 \right), \quad E_{3c} = 0. \quad (12.42)$$

Характерный пространственный масштаб перекачки энергии равен по порядку величины протяженности основного импульса,  $L \approx u_c \tau_c / 2$ . Таким образом, при равенстве сил осцилляторов резонансное ВКР имеет 100%-ный КПД в когерентном режиме взаимодействия импульсов. Однако критическим условием полного преобразования является не равенство сил осцилляторов, а выполнение условия захвата стоксова импульса в модовый режим рассеяния, который наступает при  $\kappa = 0,25$  [40]. В [37, 38] исследована численными методами нелинейная стадия резонансного когерентного ВКР при различных соотношениях сил осцилляторов (рис. 12.10).

Из графиков на рис. 12.10 следует, что характер взаимодействия существенно различен при  $\kappa < 0,25$  и  $\kappa > 0,25$ . В первом случае (рис. 12.10а) наблюдается слабое усиление стоксова импульса. Поэтому импульс накачки почти не искажается, его площадь остается равной  $2\pi$ . Другая картина развивается при  $\kappa > 0,25$  (рис. 12.10б). Здесь энергия накачки полностью передается стоксову сигналу. При увеличении параметра  $\kappa$  эффективное преобразование происходит на меньших длинах. Итак, 100%-ный КПД достигается как при равенстве сил осцилляторов, так и в области захвата стоксовой волны.

Методом ОЗР построены также двусолитонные решения, описывающие столкновение  $2\pi$ -импульсов [38].

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТРЕХЧАСТОТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
С УЧАСТИЕМ ПОЛЯРИТОНОВ

В нецентросимметричных кристаллах резонансные переходы могут быть дипольно-активными. При возбуждении такого перехода колеблющиеся диполи излучают электромагнитное поле, которое в свою очередь воздействует на диполи. Связанная мода электромагнитного излучения и возбуждений кристалла представляет собой поляритон. В зависимости от возбуждения среды различают фонон-поляритоны и экситон-поляритоны. Для фонон-поляритонов характерны механические колебания диполей в решетке кристалла, а для экситон-поляритонов — электрон-дырочные колебания.

При трехволновом взаимодействии с участием поляритонов протекают два процесса: один на нерезонансной нелинейности через прямое взаимодействие с электромагнитной частью поляритона, а другой на резонансной нелинейности благодаря фононному или экситонному возбуждению кристалла. В общем случае интерференция этих двух процессов дает сложную картину нестационарного взаимодействия.

Поперечно-дипольная связь возбуждения кристалла с электромагнитным полем приводит к сильному поглощению и сложной дисперсии поляритонов в области резонанса. Это обстоятельство кардинально меняет картину трехчастотного взаимодействия двух оптических волн с поляритонной волной. При построении теории возбуждения поляритонного излучения короткими импульсами необходимо учитывать полную дисперсию поляритонов, а не ограничиваться первым или вторым приближением (это можно делать только вдали от резонанса). Это значительно усложняет протекание нестационарных взаимодействий по сравнению с возбуждением дипольно-неактивного резонанса.

В данной главе основное внимание уделено обсуждению трехчастотного взаимодействия волновых пакетов при поляритонном резонансе с акцентом на следующие проблемы: описание поляритонной дисперсии в рамках укороченных уравнений, диссипативный механизм формирования стационарных импульсов на поляритонной частоте в поле бигармонической накачки и проявление обратной дисперсии  $k(\omega)$ , параметрическое просветление двухфотонного резонанса с образованием специфических солитонов и, наконец, генерация параметрических квазичастиц — фоторитонов.

### § 13.1. Укороченные уравнения взаимодействия волновых пакетов при поляритонном резонансе

В области дипольно-активного резонанса электромагнитное поле связано с механическими колебаниями заряженных частиц (ионов, электронов и дырок). Поэтому распространение поляритонной волны описывается системой двух уравнений [1–3]

$$\Delta \mathcal{E} - \frac{\epsilon_\infty}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi N e^*}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_T^2 Q = e^* \mathcal{E},$$
(13.1)

где  $\mathcal{E}$  — напряженность электрического поля,  $Q$  — относительное смещение зарядов,  $N$  — число диполей в единице объема,  $e^*$  — эффективный заряд,  $\omega_T$  — собственная частота поперечных колебаний,  $T_2$  — время релаксации,  $\epsilon_\infty$  — диэлектрическая проницаемость вдали от резонанса при  $\omega/\omega_T \rightarrow \infty$ .

Из (13.1) следует дисперсионное уравнение для поляритонов, связывающее волновое число и частоту [4, 5]:

$$k^2 c^2 / \omega^2 = \epsilon_\infty [1 + \omega_p^2 / (\omega_T^2 - \omega^2 + 2i\omega T_2^{-1})],$$
(13.2)

где  $\omega_p^2 = 4\pi N e^{*2} / \epsilon_\infty$  — квадрат плазменной частоты. Графики зависимости действительной и мнимой частей волнового числа  $k$  от частоты изображены на рис. 13.1. Видно, что наибольшие изменения дисперсия поляритонов претерпевает в области резонанса — пересечения фотонной ветви  $k = \sqrt{\epsilon_\infty} \omega / c$  с ветвью локальных колебаний на частоте  $\omega = \omega_T$ . На больших частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ ) дисперсия поляритонов стремится к дисперсии фотонов в кристалле. В резонансе ( $\omega \approx \omega_T$ ) преобладают механические колебания диполей. На малых частотах ( $\omega \ll \omega_T$ ) снова формируется фотонная ветвь, но со статической диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ .

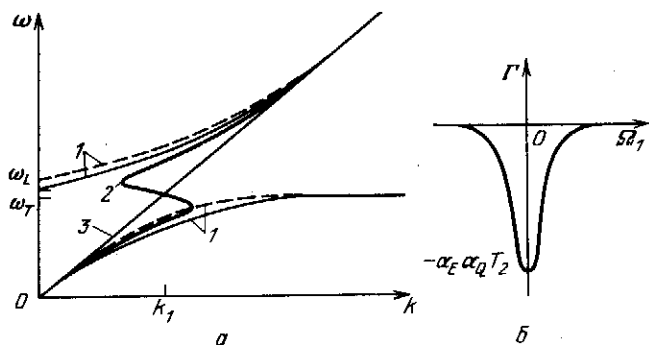


Рис. 13.1. *a* — Дисперсионные кривые поляритонов, полученные из полных (штриховые линии) и укороченных (сплошные) уравнений,  $\omega_L = \sqrt{\omega_T^2 + \omega_p^2}$  — частота продольных фоновых колебаний,  $T_2 \rightarrow \infty$  (1),  $T_2 = 0$  (2),  $T_2$  — конечная величина (3); *б* — зависимость мнимой части волнового числа  $\Gamma$  (коэффициент поглощения  $\delta = -\Gamma$ ) от отстройки от резонанса  $\Delta\Omega_1$

Для описания трехволнового взаимодействия с участием поляритонов в (13.1) вводятся квадратично-нелинейные члены, содержащие  $\mathcal{E}^2$  и  $\mathcal{E}Q$  [6, 7]. Полагая волны и колебания квазимонохроматическими,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j &= (1/2) \sum_j^3 A_j(z, t) \exp [i(\omega_j t - k_j z)] + \text{к.с.}, \\ Q &= (1/2) \sigma(z, t) \exp [i(\omega_1 t - k_1 z)] + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

находим с помощью стандартной процедуры (§ 1.5) укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial z} + v_{31} \frac{\partial A_3}{\partial \eta_1} &= -i\gamma_{E3} A_1 A_2 e^{i\Delta k z} - i\gamma_{Q3} \sigma A_2 e^{i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + v_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \eta_1} &= -i\gamma_{E2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z} - i\gamma_{Q2} A_3 \sigma^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -i\alpha_E \sigma - i\gamma_{E1} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_1} + (T_2^{-1} + i\Omega_1) \sigma &= -i\alpha_Q A_1 - i\gamma_{Q1} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (13.4)$$

где  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$ ,  $\eta_1 = t - z/u_1$ ,  $v_{j1} = u_j^{-1} - u_1^{-1}$ ,  $u_1$  — групповая скорость на частоте  $\omega_1$  в отсутствие возбуждения ( $\alpha = 0$  и  $u_1 \approx c\sqrt{\epsilon_\infty}$ ),  $\alpha_E = 2\pi e^* N \omega_T c^{-1} \sqrt{\epsilon_\infty}$ ,  $\alpha_Q = e^*/2\omega_T$  — коэффициенты связи электромагнитной и фононной частей поляритонной волны ( $\alpha_E \alpha_Q = \omega_p^2/4u_1$ ),  $\gamma_{Ej} = 2\pi \chi_E \omega_j / cn_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\gamma_{Q1} = \chi_Q/2\omega_3$ ,  $\gamma_{Qj} = 2\pi \omega_j N \chi_Q / cn_j$  ( $j = 1, 2$ ) — коэффициенты нелинейной связи ( $\gamma_{Q3} - \gamma_{Q2} = \gamma_{Q1} \alpha_E / \alpha_Q$ ),  $\Omega_1 = \omega_1 - \omega_T$  — отстройка от поляритонного резонанса.

Следует подчеркнуть, что поведение поляритонной волны по-прежнему описывается двумя связанными уравнениями. Именно благодаря этому обстоятельству сохраняется сложная дисперсия поляритонов в рамках укороченных уравнений. Отбрасывая нелинейные члены в (13.4) и полагая  $A_1 \sigma \propto \exp [i(\omega - \omega_1)\eta_1 - i\beta_1 z]$ , нетрудно получить следующее выражение для поправки к волновому числу:

$$\beta_1 = \frac{\omega_p^2}{4u_1(-\Omega + iT_2^{-1})}, \quad (13.5)$$

где  $\Omega = \omega - \omega_T$  — отстройка частоты спектральной компоненты от частоты дипольного перехода  $\omega_T$ . В граничных задачах о возбуждении поляритонной волны задается частотный спектр ( $\Omega$  — действительная величина), а характеристиками распространения являются действительная и мнимая части поправки волнового числа  $\beta_1 = q_1 + i\Gamma$ , которые нетрудно найти из (13.5):

$$q_1 = \frac{-\omega_p^2 T_2^2 \Omega}{4u_1(1 + \Omega^2 T_2^2)}, \quad \Gamma = \frac{-\omega_p^2 T_2}{4u_1(1 + \Omega^2 T_2^2)}. \quad (13.6)$$

Действительная часть приводит к изменению фазовой скорости  $v_1 = c/(k_1 + q_1)$ , а мнимая с точностью до знака равна коэффициенту резонансного поглощения,  $\Gamma = -\delta_1$ . Зависимости (13.6) изображены графически сплошными линиями на рис. 13.1 при различных временах релаксации  $T_2$ . Сравнение их с точными решениями (13.2) показывает не только хорошее качественное, но и удовлетворительное количественное описание сложной дисперсии поляритонов в рамках укороченных уравнений (13.4). Из рис. 13.1а видно, как дисперсионная кривая меняет свою форму в зависимости от времени релаксации  $T_2$ . При  $T_2 \rightarrow 0$  она вырождается в прямую  $k = \sqrt{\epsilon_\infty} \omega/c$ , так как поляритонная волна в этом случае имеет в основном электромагнитную природу, а амплитуда механической составляющей стремится к нулю. При  $T_2 \rightarrow \infty$  кривая распадается на две ветви — нижнюю и верхнюю. Для промежуточных значений  $T_2$  остается одна ветвь с участком аномальной дисперсии.

При возбуждении поляритонных колебаний объемными источниками, например, на комбинационной частоте короткими импульсами бигармонической накачки (§ 13.2) действительной величиной становится волновой вектор  $k$ , а комплексной — частота  $\omega$ . Полагая в (13.5)  $\Omega = \Omega' + i\Omega''$ , находим

$$\Omega' = -\alpha_E \alpha_Q / q_1, \quad \Omega'' = T_2^{-1}. \quad (13.7)$$

Видно, что время затухания или установления объемного возбуждения кристалла равно времени релаксации.

Переход от полных уравнений к укороченным для медленно меняющихся амплитуд позволяет существенно упростить анализ многих нестационарных явлений, возникающих при двухфотонном возбуждении поляритонного резонанса короткими оптическими импульсами.

### § 13.2. Диссипативный механизм формирования стационарных поляритонных импульсов

Поляритонная волна, возбужденная на границе кристалла, быстро затухает при распространении в глубь среды из-за сильного резонансного поглощения, коэффициент которого достигает величины  $\delta_1 \approx 10^2 \text{ см}^{-1}$ . Возбудить поляритонное излучение внутри кристалла можно с помощью нелинейного трехчастотного взаимодействия  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ . При этом фонон-поляритонная волна обычно возбуждается в ИК диапазоне на разностной частоте  $\omega_1$  двух оптических волн, а экситон-поляритоны генерируются на суммарной частоте  $\omega_3$ .

Рассмотрим нестационарное возбуждение поляритонной волны на разностной частоте ( $\omega_1 \approx \omega_T$ ) в приближении заданного поля бигармонической накачки (члены с  $\gamma_{E2}, \gamma_{E3}, \gamma_{Q2}, \gamma_{Q3}$  не учитываем) и в отсутствие относительной дисперсии оптических волн ( $\nu_{13} = \nu_{12} = 0$ ):

$$A_3 = E_3(\eta_1), \quad A_2 = E_2(\eta_1). \quad (13.8)$$

В этом случае генерация поляритонного импульса описывается двумя последними уравнениями в (13.4), в которые надо подставить (13.8) [8–10]. Они допускают точное решение в интегральной форме через функ-

цию Римана, выражающуюся здесь через функцию Бесселя нулевого порядка (гл. 3).

**Спектр поляритонной волны.** Переходя в (13.4) к спектрам комплексных амплитуд, находим огибающую спектральной компоненты на поляритонной частоте

$$S_1(\omega_1 + \Omega) = -iS_2 \otimes S_3[\gamma_{E1} - \alpha_E \gamma_{Q1}/(\Omega - iT_2^{-1})] \times \\ \times [\delta_1 + i(q_1 - \Delta k)]^{-1} [e^{-i\Delta k z} - e^{-iq_1 z - \delta_1 z}], \quad (13.9)$$

где  $S_2 \otimes S_3$  — свертка спектров волн на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Анализ полученного выражения показывает, что спектральная амплитуда поляритонной волны состоит из двух частей: первая, содержащая  $e^{-i\Delta k z}$ , соответствует вынужденной, а вторая с множителем  $e^{-iq_1 z - \delta_1 z}$  — свободной волне. Очевидно, что на больших расстояниях ( $\delta_1 z \gg 1$ ) свободная волна, возбужденная на входной грани кристалла, затухает и вместе с импульсом бигармонической накачки распространяется вынужденная волна, спектр которой не меняется с расстоянием. На временном языке это означает, что в нелинейном кристалле на разностной частоте образуется стационарный импульс поляритонной волны. Длина формирования такого импульса определяется длиной затухания спектральных компонент  $l_{ст} = \delta_1^{-1}$ . Для того чтобы сформировался стационарный импульс, должны затухнуть все спектральные компоненты свободной поляритонной волны, которые задаются спектром бигармонической накачки  $S_2 \otimes S_3$ . Таким образом, длина, за которой импульс на поляритонной частоте принимает стационарный профиль, равна

$$l_{ст} = [1 + (\Delta\omega T_2)^2] / \alpha_E \alpha_Q T_2, \quad (13.10)$$

где  $\Delta\omega$  — ширина спектра накачки.

Максимум спектральной интенсивности  $|S_1|^2$ , как видно из (13.9), зависит от волновой и частотной расстройек. Оптимальная расстройка равна

$$\Delta k = q_1 \approx -\alpha_E \alpha_Q / \Omega. \quad (13.11)$$

Это соотношение нетрудно переписать в виде условия синхронизма  $k_3 = k_2 + (k_1 + q_1)$ , учитывающего дисперсию поляритона  $q_1$ . Так как синхронизм (в общем случае векторный) выполняется в области  $\Delta k > 0$  ( $\Omega < 0$ ), то синхронное возбуждение поляритонной волны на разностной частоте можно практически реализовать на нижней ветви дисперсионной кривой для поляритонов, т.е. на частотах  $\omega < \omega_T$ .

В (13.9) отражена также интерференция резонансной и нерезонансной нелинейностей. Вдали от линии поглощения ( $|\Omega| T_2 \gg 1$ ) при частотной отстройке  $\Omega_{пр} \approx \alpha_E \gamma_{Q1} / \gamma_{E1}$  наблюдается провал в спектре поляритонного излучения [6, 27].

**Стационарная огибающая вынужденной поляритонной волны.** Диссипативный механизм формирования стационарного импульса на разностной частоте, лежащей в области поляритонного резонанса, по своей сути аналогичен процессу образования короткого стационарного импульса второй гармоники, возбуждаемой в диспергирующей диссипативной среде (§ 5.5). Это явление подтверждено серией численных экспериментов [10]. На рис. 13.2 представлены результаты численного решения полной системы



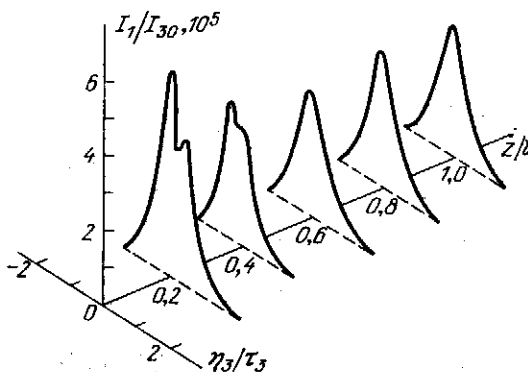


Рис. 13.2. Формирование стационарного профиля поляритонного импульса в заданном поле гауссова импульса накачки

укороченных уравнений (13.4) для случая возбуждения поляритонной волны в кристалле  $\text{CuI}$  длиной  $l = 1$  см гауссовыми импульсами бигармонической накачки длительностью  $\tau_2 = \tau_3 = 10^{-12}$  с и с интенсивностью  $I_{20} = I_{30} = 10^8$  Вт/см<sup>2</sup>. Из графиков видно, что профиль интенсивности поляритонного излучения сначала быстро меняется вследствие проявления дисперсии и интерференции, но затем на расстоянии  $z \approx 0,5$  см принимает стационарную форму. Энергия поляритонной волны остается неизменной (потери полностью компенсируются параметрической накачкой), при этом подавляется дисперсионное расплывание волнового пакета на поляритонной частоте.

Рассмотрим теперь более подробно свойства стационарных импульсов, огибающие которых, найденные в результате решения уравнений (13.4), имеют вид

$$\sigma_{\text{ст}} = -\frac{\Delta k}{\alpha_E} A_{1\text{ст}} - \frac{\gamma_{E1}}{\alpha_E} E_2^*(\eta_1) E_3(\eta_1) e^{-i\Delta k z}, \quad (13.12)$$

$$A_{1\text{ст}} = (\Delta k)^{-1} e^{-i\Delta k z} \int_{-\infty}^{\eta_1} d\xi \exp \left[ \left( \tau_2^{-1} + i\Omega_1 - i \frac{\alpha_E \alpha_Q}{\Delta k} \right) \times \right. \\ \left. \times (\xi - \eta_1) \right] \left\{ [-i\gamma_{Q1} \alpha_E + \gamma_{E1} (\tau_2^{-1} + i\Omega_1)] E_2^*(\xi) E_3(\xi) - \right. \\ \left. - \gamma_{E1} \frac{\partial [E_2^*(\xi) E_3(\xi)]}{\partial \xi} \right\}.$$

Из этих выражений следует, что распределение амплитуды электромагнитной части поляритонной волны  $A_{1\text{ст}}$  всегда отличается от профиля импульса бигармонической накачки  $E_2^*(\eta_1) E_3(\eta_1)$ . Наличие расстройки  $\Delta k$  ведет к дополнительной амплитудной и фазовой модуляции стационарной

поляритонной волны. Наиболее просто показать механизм возникновения такой модуляции можно на примере прямоугольного импульса накачки:  $E_j = E_{j0}$  в интервале  $0 < t < \tau_3$ . В этом случае из (13.12) находим

$$A_{1\text{ст}} = \frac{(\gamma_{E1} + \alpha_E \gamma_{Q1}) E_{20} E_{30}}{T_2^{-1} + i(\Omega_1 - \Omega')} [1 - e^{-\eta_1(\Omega'' + i\Omega_1 - i\Omega')}], \quad (13.13)$$

где  $\Omega'$  и  $\Omega''$  даны в (13.7). Решение (13.13) содержит две компоненты: не затухающую на комбинационной частоте  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$  и затухающую с постоянной времени  $T_2$  на частоте  $\omega_T + \Omega'(\Delta k)$ . Интерференция этих компонент приводит к затухающим биениям интенсивности на вершине стационарного импульса поляритонной волны.

Появление в (13.13) величин  $\Omega'$  и  $\Omega''$ , характеризующих дисперсию поляритонов  $\omega(k)$  (13.7), вполне закономерно. Дело в том, что на больших расстояниях от входной грани нелинейного кристалла ( $z > l_{\text{ст}}$ ) генерация поляритонной волны на разностной частоте  $\omega_1$  производится, по существу, движущимся со скоростью света в среде и локализованным в пространстве источником, в качестве которого выступает импульс бигармонической накачки. Известно, что при возбуждении волн объемными источниками проявляется дисперсия  $\omega(k)$ , как это имеет место в обсуждаемой проблеме.

На рис. 13.3а показан рассчитанный на ЭВМ стационарный профиль поляритонной волны, возбуждаемой гипергауссовым импульсом при точном резонансе ( $\Omega_1 = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_T$ ) и при фазовой расстройке  $\Delta k \neq 0$ . Отчетливо видны осцилляции интенсивности, природа которых та же, что и в случае прямоугольного импульса накачки (13.13). Частота биений в численном эксперименте составляет  $1,5 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , а оценка с помощью (13.13) дает значение  $10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

При точном резонансе ( $\Omega_1 = 0$ ) частота биений возрастает с приближением к синхронизму для электромагнитных волн ( $\Delta k \rightarrow 0$ ). Однако такая зависимость сохраняется только в пределах частотного спектра бигармонической накачки,  $|\Omega'| \leq \Delta\omega_3$ . Биения интенсивности, создающие рябь на вершине стационарного импульса поляритонной волны, пропадают при настройке в частотный синхронизм  $\Omega_1 = \Omega'(\Delta k)$  или

$$\omega_1 = \omega_T + \Omega'(\Delta k). \quad (13.14)$$

Это аналогично тому, как в граничных задачах при пространственном синхронизме  $\Delta k = 0$  не возникает биения амплитуд с увеличением расстояния  $z$  (§ 5.5).

Отдельного обсуждения заслуживает случай фазового синхронизма, установленного без учета поляритонной дисперсии,  $\Delta k = 0$ . Из (13.12) видно, что при  $\Delta k = 0$  профиль волны механических колебаний полностью повторяет профиль бигармонической накачки,  $\sigma_{\text{ст}} \propto E_2^*(\eta_1) E_3(\eta_1)$ , несмотря на релаксационные и дисперсионные эффекты. Последние определяют динамику переходных процессов, развивающихся перед формированием стационарного импульса поляритонной волны на расстояниях  $z < l_{\text{ст}}$  (13.10). Если подставить из (13.12) выражение для  $\sigma_{\text{ст}}$  при  $\Delta k = 0$  в правую часть уравнения для амплитуды  $A_1$  в (13.4), то она обратится в нуль. Это означает, что в установившемся режиме дипольное воздействие механических колебаний на электромагнитную часть полностью гасится нели-

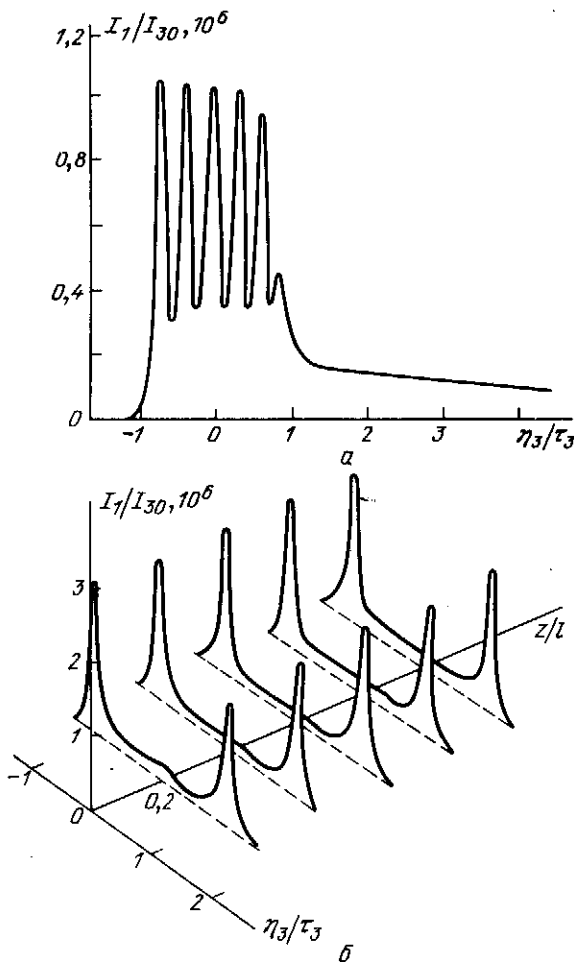


Рис. 13.3. Огибающая стационарного профиля поляритонного импульса, возбуждаемого гипергауссовыми импульсами накачки ( $N = 12$ ) при точном резонансе ( $\Omega_1 = 0$ ):  
 а -  $\Delta kl = 3,5$ ; б -  $\Delta kl = 0$

нейным взаимодействием бигармонической накачки. Именно поэтому и устанавливается стационарный режим генерации короткого импульса на разностной частоте, попадающей в область резонансного поглощения на дипольно-активном переходе.

Если огибающая волны механических колебаний не искажается при  $\Delta k = 0$  по сравнению с импульсом бигармонической накачки, то амплитудный профиль электромагнитной части поляритонной волны имеет более сложную связь с возбуждающим импульсом:

$$A_{1cr} = - \left( \frac{\gamma_{Q1}}{\alpha_Q} + \gamma_{E1} \frac{\Omega_1 - iT_2^{-1}}{\alpha_Q \alpha_E} \right) E_2^* E_3 - i \frac{\gamma_{E1}}{\alpha_Q \alpha_E} \frac{\partial(E_2^* E_3)}{\partial \eta_1}. \quad (13.15)$$

Как видно, стационарный импульс (13.15) состоит как бы из двух частей, одна из них повторяет профиль импульса накачки, а другая пропорциональна производной по времени этого профиля. Эффект дифференцирования профиля накачки проявляется, если его фронт и хвост имеют большую крутизну. Дифференциальный стационарный импульс,  $A_{1\text{ст}} \propto \partial(E_2^* E_3) / \partial \eta_1$ , отчетливо наблюдается в поле гипергауссова импульса накачки (рис. 13.3б). На рисунке видны резко выделяющиеся два пика, расположенные в области фронта и хвоста гипергауссова импульса накачки.

### § 13.3. Дисперсия параметрических квазичастиц — фоторитонов

В предыдущем параграфе рассмотрен случай возбуждения поляритонной волны в заданных полях двух оптических импульсов. Этот метод обладает тем преимуществом, что отсутствует порог поляритонной генерации и легче устанавливаются частотные и фазовые соотношения. Однако во многих экспериментах, например по ВКР и параметрическому усилению и генерации, меняется не только амплитуда поляритонной, но и амплитуда холостой волны. Для описания таких процессов представляет интерес изучение закономерностей взаимодействия волн вблизи поляритонного резонанса в заданном поле одной из оптических волн. Для спектроскопии полупроводников значительный интерес представляют также параметрические процессы, в которых накачкой служит мощная поляритонная волна [11, 12].

В процессах преобразования частоты вверх или вниз в средах с нерезонансной нелинейностью в поле мощной накачки дисперсия слабых волн претерпевает существенные изменения, которые ведут к появлению новых эффектов: параметрической диффузии, параметрического распыливания и компрессии и т. д. (гл. 2, 3). Аналогичные эффекты можно ожидать и для параметрических процессов с участием поляритонной волны. Только теперь, в отличие от бифотонов — элементарных возбуждений, соответствующих двум параметрически-связанным оптическим волнам разной частоты, — следует говорить о фоторитонах — параметрически связанной моде электромагнитной и поляритонной волн, имеющих разные частоты. Свойства фоторитонов зависят от типа параметрической связи, т. е. от соотношения частот накачки и фоторитона. Параметрическая связь поляритона и фона приводит к генерации фоторитонов [11, 12].

**Формирование фоторитонов в параметрическом усилителе [14].** Пусть волна накачки частоты  $\omega_3$  имеет постоянную амплитуду  $A_3 = E_{30}$ . Параметрическое возбуждение оптической и поляритонной волн на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_1$  соответственно в заданном поле накачки описывается тремя уравнениями (13.4), в которых надо положить  $A_3 = E_{30}$ . В однородном поле высокочастотной накачки наиболее просто исследовать усиление спектральных компонент, полагая

$$\begin{aligned} A_2^* &= E_{20}^* \exp [i(\Omega \eta_1 - \beta_{12} z - \Delta k z / z)], \\ A_1 &= E_{10} \exp [i(\Omega \eta_1 - \beta_{12} z + \Delta k z / z)], \\ \sigma &= \sigma_0 \exp [i(\Omega \eta_1 - \beta_{12} z + \Delta k z / 2)], \end{aligned} \quad (13.16)$$

где  $\beta_{12}$  — комплексная поправка к волновым числам  $k_j(\Omega, E_{30}) = k_j(\omega_j) + \beta_{12}(\Omega, E_{30})$ ,  $j = 1, 2$ . Подставляя (13.16) в (13.14), находим дисперсионное уравнение для фотонитонов:

$$\left[ -i\beta_{12} + i\frac{\Delta k}{2} + \frac{\alpha_E \alpha_Q}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_1)} \right] \left[ -i\beta_{12} - i\frac{\Delta k}{2} + i\nu_{12}\Omega - \frac{\gamma_{E1}\gamma_{Q1}E_{30}^2}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_1)} \right] = - \left[ i\gamma_{E2} + \frac{\gamma_{Q2}\alpha_Q}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_1)} \right] \times \\ \times \left[ i\gamma_{E1} + \frac{\gamma_{Q1}\alpha_E}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_1)} \right] E_{30}^2. \quad (13.17)$$

Отметим прежде всего, что в отсутствие накачки ( $E_{30} = 0$ ) (13.17) распадается на две ветви дисперсии, одна из которых описывает дисперсию свободной оптической волны,  $q_2 = \nu_{21}\Omega$ , а другая — свободных поляритонов,  $\beta_{12} = \beta_1$  (13.5). При наличии сильной параметрической связи дисперсионное уравнение (13.17) наиболее просто интерпретируется в области прозрачности (вдали от поляритонного резонанса, где можно положить  $T_2 \rightarrow \infty$ ). Полагая  $\beta_{12} = q_{12} \pm i\Gamma$ , находим из (13.17) поправку к волновому числу —

$$q_{12} = \frac{\nu_{21}\Omega}{2} - \frac{\alpha_E \alpha_Q - \gamma_{Q1}\gamma_{Q2}E_{30}^2}{2(\Omega + \Omega_1)}, \quad (13.18)$$

и коэффициент усиления (затухания) —

$$\Gamma^2 = \gamma_{E1}\gamma_{E2}E_{30}^2 \left( 1 - \frac{\gamma_{Q2}\alpha_Q}{\gamma_{E2}(\Omega + \Omega_1)} \right)^2 - \\ - \frac{1}{4} \left( -\Delta k + \nu_{21}\Omega - \frac{\alpha_E \alpha_Q + \gamma_{Q1}\gamma_{Q2}E_{30}^2}{\Omega + \Omega_1} \right)^2. \quad (13.19)$$

При выводе (13.18), (13.19) мы воспользовались соотношением  $\gamma_{Q2}\alpha_Q/\gamma_{E2} = \gamma_{Q1}\alpha_E/\gamma_{E1} = N\alpha_Q e^*/2\omega_T \alpha_E$ , которое следует из определения коэффициентов нелинейности.

В отсутствие фоновго возбуждения ( $\alpha_E = \alpha_Q = 0$ ,  $\gamma_{Q1} = \gamma_{Q2} = 0$ ) или вдали от резонанса ( $\Omega_1 \rightarrow \infty$ ) формулы (13.18) и (13.19) переходят в выражения (2.15), (2.16), соответствующие нерезонансному параметрическому усилению. Эффективное возбуждение фононов приводит к появлению резонансной нелинейности, при этом, как видно из (13.18), изменение волнового числа происходит не только за счет дипольной связи в поляритонной волне (коэффициенты  $\alpha_E$  и  $\alpha_Q$ ), но и благодаря параметрической связи фононов частоты  $\omega_1$  с фотонами стоксовой волны частоты  $\omega_2$ , степень которой определяется коэффициентом  $\gamma_{Q1}\gamma_{Q2}E_{30}^2$ .

Формула (13.19) описывает контур параметрического усиления. Если следить за отдельной монохроматической компонентой с фиксированной

частотой  $\Omega$ , то максимум ее усиления достигается при фазовой расстройке

$$\Delta k = \nu_{12} \Omega - \frac{\alpha_E \alpha_Q - \gamma_{Q1} \gamma_{Q2} E_{30}^2}{\Omega + \Omega_1}. \quad (13.20)$$

Видно, что измеряемая с помощью такой методики дисперсия фоторитона складывается из дисперсии первого порядка в отсутствие возбуждения среды  $\nu_{12} \Omega$ , дисперсии свободного поляритона (13.6) и дисперсии параметрического или смешанного поляритона  $\gamma_{Q1} \gamma_{Q2} E_{30}^2 / (\Omega + \Omega_1)$ .

При резонансном параметрическом усилении сигнала с конечной шириной спектра на изменение его огибающей будут оказывать влияние как дисперсия волнового числа  $q_{12}(\Omega)$ , так и дисперсия коэффициента усиления  $\Gamma(\Omega)$ . Расчет полной дисперсии фоторитонов, включая область поляритонного резонанса, был выполнен с помощью численного решения (13.17) для кристалла CuI длиной 1 см с поляритонным резонансом  $\omega_T = 131 \text{ см}^{-1}$ . Интенсивность волны накачки достигала  $10^{12} \text{ Вт/см}^2$  [14] (рис. 13.4).

В отсутствие внешнего поля дисперсионные характеристики волн на поляритонной и стоксовой частотах независимы и определяются только свойствами среды на этих частотах. Стоксова волна распространяется в области прозрачности с постоянной групповой скоростью без поглощения. При облучении кристалла мощной накачкой возникает связанное распространение двух волн с общей дисперсией, т.е. формируется фоторитон. Ему соответствуют две ветви дисперсии, имеющие поляритонно-

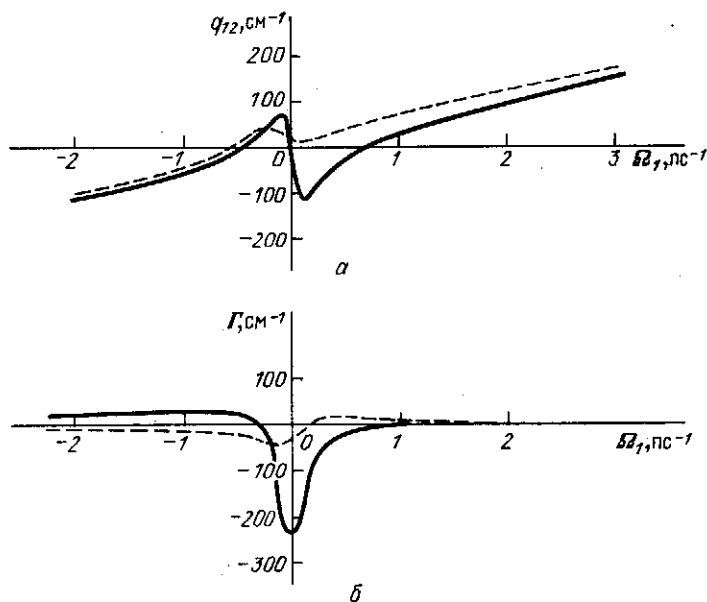


Рис. 13.4. Дисперсионные кривые фоторитонов, формирующихся в интенсивном поле высокочастотной накачки:

*а* — волновые числа; *б* — коэффициенты поглощения (усиления) сильно- (сплошные линии) и слабосвязанных (штриховые) мод

подобный вид (рис. 13.4а). Существенно меняется и контур линии поглощения, появляются участки спектра, где возможно усиление (рис. 13.4б).

Изменение дисперсионных свойств приводит к изменению скорости распространения волновых пакетов. Как показывает численное решение укороченных уравнений (13.4), для рассматриваемого случая в кристалле CuI при накачке с  $I_{30} = 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup> параметрическое замедление фоторитонной волны приводит к задержке прихода пикосекундного стока импульса на 50 пс. Одновременно с задержкой происходит его расплывание. Следует подчеркнуть, что дисперсия фоторитонов меняется при варьировании волновой расстройки  $\Delta k$ .

**Формирование фоторитонов при экситонном резонансе [14].** Пусть теперь волна накачки постоянной амплитуды  $A_1 = E_{10}$  имеет частоту  $\omega_1$ , а суммарная частота  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  попадает на экситон-поляритонный резонанс,  $\omega_3 \approx \omega_T$ . Этот случай соответствует резонансному преобразованию частоты вверх. Спектр фоторитонной моды состоит из трех компонент:

$$\begin{aligned} A_2 &= E_{20} \exp [i(\Omega \eta_1 - \beta_{23} z + \Delta k z / 2)], \\ A_3 &= E_{30} \exp [i(\Omega \eta_1 - \beta_{23} z - \Delta k z / 2)], \\ \sigma &= \sigma_0 \exp [i(\Omega \eta_1 - \beta_{23} z - \Delta k z / 2)]. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Подставляя (13.21) в уравнения типа (13.4) с учетом перехода резонанса на суммарную частоту, получаем дисперсионное уравнение (ср. с (13.17))

$$\begin{aligned} & \left[ -i\beta_{23} - i\frac{\Delta k}{2} + \frac{\alpha_E \alpha_Q}{T_2^{-1} - i(\Omega + \Omega_3)} \right] \left[ -i\beta_{23} + i\frac{\Delta k}{2} + i\nu_{21}\Omega + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_{Q2}\gamma_{Q3}E_{10}^2}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_3)} \right] = \left[ i\gamma_{E2} + \frac{\gamma_{Q2}\alpha_Q}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_3)} \right] \times \\ & \times \left[ i\gamma_{E3} + \frac{\gamma_{E3}\alpha_E}{T_2^{-1} + i(\Omega + \Omega_3)} \right] E_{10}^2. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Описание дисперсии фоторитона в области прозрачности  $((\Omega + \Omega_3)T_2 \gg 1)$  упрощается. Здесь образуются две ветви дисперсии волнового числа (показателя преломления):

$$\begin{aligned} \beta_{23} &= \frac{\nu_{21}\Omega}{2} - \frac{\alpha_E \alpha_Q + \gamma_{Q2}\gamma_{Q3}E_{10}^2}{2(\Omega + \Omega_3)} \pm \\ & \pm \left[ \gamma_{E2}\gamma_{E3}E_{10}^2 \left( 1 - \frac{\gamma_{Q2}\alpha_Q}{\gamma_{E2}(\Omega + \Omega_3)} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \Delta k + \nu_{21}\Omega - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha_E \alpha_Q - \gamma_{Q2}\gamma_{Q3}E_{10}^2}{\Omega + \Omega_3} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Вклад в дисперсию фоторитона (13.23) дают относительная дисперсия групповых скоростей, дисперсия свободного экситон-поляритона, дисперсия параметрического поляритона и дисперсия резонансной нелинейности. Вдали от резонанса ( $\Omega_3 \rightarrow \infty$ ) дисперсия фоторитонов переходит в дисперсию бифотонов в параметрическом преобразователе частоты (3.10).

Таким образом, в поле мощной низкочастотной накачки формируются две ветви дисперсии фоторитонов. Одна из них включает быстрые спектральные компоненты, а другая — медленные. Интерференция полей двух этих фоторитонов определяет процесс распространения и взаимодействия коротких импульсов. В области резонанса возникает сильное двухфотонное поглощение, которое вносит дополнительные искажения огибающей импульса фоторитонной моды.

Дисперсионные кривые экситон-поляритонного фоторитона, рассчитанные с помощью численного решения (13.23), представлены на рис. 13.5а. Расчеты проводились для кристалла  $\text{CuCl}$  длиной  $l = 100$  мкм.

На рис. 13.5б показаны контуры поглощения. Видно, что фоторитоны, в которых фотоны частоты  $\omega_2$  имеют более сильную параметрическую связь с экситон-поляритонами частоты  $\omega_3$  (сплошная линия на рис. 13.5а), имеют коэффициент затухания (сплошная линия на рис. 13.5б) больший, чем слабо связанный фоторитон (штриховая линия).

Дисперсия фоторитонов проявляется как в области поляритонного резонанса, так и на холостой частоте. Это позволяет проводить спектроскопические исследования поляритонного резонанса, изучая дисперсию

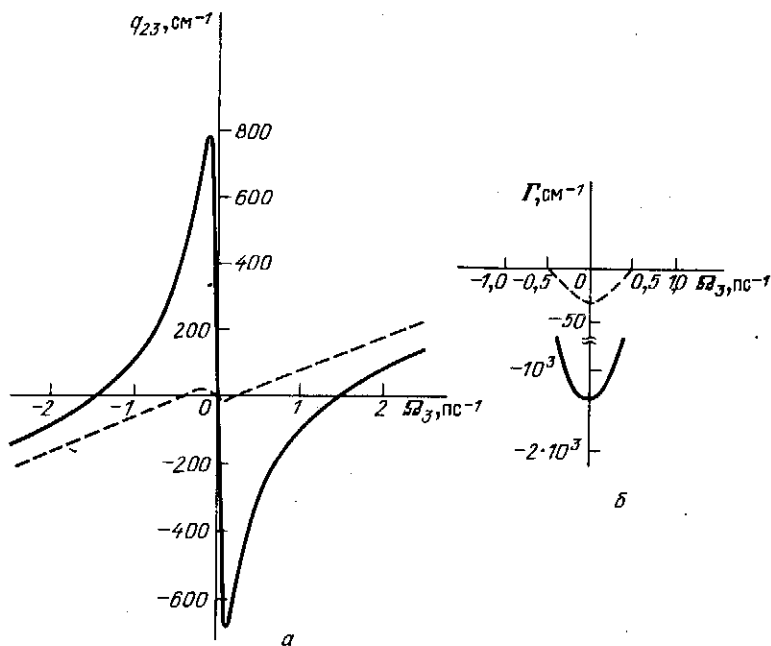


Рис. 13.5. Дисперсионные кривые фоторитонов в поле низкочастотной волны накачки: а — волновые числа; б — коэффициенты поглощения сильно- (сплошные линии) и слабосвязанных (штриховые) мод



оптического сигнала на стоксовой или холостой частотах. Метод, основанный на анализе дисперсии фотонитонов, служит хорошим дополнением к прямым измерениям дисперсии поляритонов по времени прохождения импульса через образец. Зная зависимость групповой скорости от частотной отстройки от резонанса, можно получить дисперсионную кривую [15–20]. Дальнейшее развитие теории резонансных трехчастотных взаимодействий заключается в рассмотрении нестационарных параметрических процессов в поле короткого импульса волны накачки.

Вдали от резонанса механическая компонента поляритонной волны практически не возбуждается ( $\sigma \approx 0$ ) и теория параметрического усиления и ВКР на поляритонах сводится к результатам, полученным в гл. 4. Наоборот, при резонансном возбуждении фононов часто можно пренебречь электромагнитной компонентой поляритонов ( $A_1 \approx 0$ ). В таком приближении нестационарные эффекты при резонансном ВКР аналогичны рассмотренным в гл. 12 [21–26]. Комбинационное рассеяние на поляритонах представляет большой интерес для физики полупроводников [27] и для нелинейной оптики сверхкоротких световых импульсов [28, 29].

### § 13.4. Динамика двухфотонного параметрического просветления экситон-поляритонного резонанса

В кристаллах без центра симметрии экситонные резонансы можно возбуждать с помощью параметрических процессов на квадратичной нелинейности. Обычно резонансные частоты экситонной линии  $\omega_T$  лежат в УФ диапазоне и поэтому генерацию осуществляют на суммарной частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Трехчастотное взаимодействие волновых пакетов с участием экситон-поляритонов описывается системой укороченных уравнений, подобной (13.4) с учетом изменившегося положения резонанса,  $\omega_3 \approx \omega_T$  (в (13.4) надо поменять местами индексы  $1 \leftrightarrow 3$  и заменить  $A_2$  на  $A_2^*$  и наоборот).

Возбуждение экситон-поляритонной волны в заданном поле двух импульсов  $A_1 = E_1(\eta_1)$  и  $A_2 = E_2(\eta_1)$  имеет те же закономерности, что и нестационарная генерация фонон-поляритонов (§ 13.2). Как было установлено, в общем случае возникает интерференция резонансного и нерезонансного процессов. Численное моделирование показало, что нерезонансное взаимодействие нарушает фазовые соотношения, благоприятные для резонансных процессов. В результате этого взаимодействие трех волн с участием поляритонов при высоких уровнях интенсивностей всегда сопровождается пространственными биениями их амплитуд и энергий.

Для многих экситонных резонансов, однако, существуют такие условия, что вклад нерезонансных эффектов на один-два порядка ниже, чем резонансных, т.е. ими практически можно пренебречь ( $\gamma_{Ej} \approx 0$ ). Будем также считать, что без учета дисперсии, обусловленной наличием поляритонного резонанса, фазовые и групповые скорости волн согласованы:  $\Delta k = 0$  и  $\nu_{13} = \nu_{23} = 0$ . При сделанных предположениях трехчастотное взаимодействие на экситонном резонансе описывается следующей системой

уравнений [30]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\gamma_{Q1} \sigma A_1^*, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = -\gamma_{Q2} \sigma A_1^*, \quad \frac{\partial A_3}{\partial z} = \alpha_E \sigma, \quad (13.24)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta_3} + (T_2^{-1} + i\Omega_3)\sigma = -\alpha_Q A_3 + \gamma_{Q3} A_1 A_2,$$

где смысл обозначений такой же, как в (13.4); а между резонансными коэффициентами нелинейности существует связь:  $\gamma_{Q1} + \gamma_{Q2} = \gamma_{Q3} \alpha_E / \alpha_Q$ .

При точном резонансе и задании на границе кристалла спектрально-ограниченных импульсов (без фазовой модуляции) амплитуды в (13.24) являются действительными величинами,  $A_j = A_j^*$ . Система (13.24) имеет интегралы движения, связывающие амплитуды волн  $A_{1,2}$  с  $A_3$  при любых расстояниях  $z$ :

$$A_1 = E_1(\eta_3) \operatorname{ch} \bar{A}_3 + (\gamma_{Q1} / \gamma_{Q2})^{1/2} E_2(\eta_3) \operatorname{sh} \bar{A}_3, \quad (13.25)$$

$$A_2 = E_2(\eta_3) \operatorname{ch} \bar{A}_3 + (\gamma_{Q2} / \gamma_{Q1})^{1/2} E_1(\eta_3) \operatorname{sh} \bar{A}_3,$$

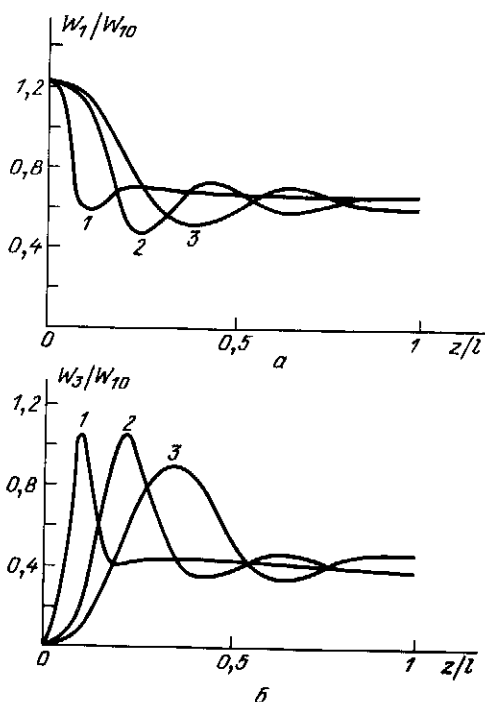
где  $\bar{A}_3 = (\gamma_{Q1} \gamma_{Q2})^{1/2} \alpha_E^{-1} A_3(\eta_3, z)$ ; при  $z = 0$  сигнал на поляритонной частоте отсутствует. Интегралы движения (13.25) позволяют свести систему четырех уравнений к одному уравнению второго порядка для  $A_3$ .

Двухфотонное возбуждение экситон-поляритонного резонанса моделировалось с помощью численного решения системы (13.24). Вычисления проводились для кристалла CuCl длиной  $l = 100$  мкм с энергией кванта на резонансной частоте  $\hbar\omega_T = 3,2025$  эВ и  $\hbar\omega_L = 3,2080$  эВ при времени релаксации  $T_2 = 10$  пс [30]. Рассматривался режим генерации второй гармоники ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ ) пикосекундным импульсом накачки. В серии численных экспериментов наблюдалось явление параметрического просветления экситонного резонанса с образованием специфических солитонов.

На рис. 13.6 показаны изменения энергии накачки и электрромагнитной компоненты поляритонной волны. Наиболее быстро стационарный режим

Рис. 13.6. Изменение энергии импульса накачки (а) и поляритонной волны (б) при параметрическом просветлении поляритонного резонанса для различных частотных отстройек:

$$\Omega_3 T_2 = 0(1), 1(2), 3(3)$$



распространения, при котором энергии волн не меняются с расстоянием, устанавливается при точном резонансе ( $\Omega_3 = 0$ , кривая 1), здесь длина  $l_{ст} = 0,25l$ . При отстройке от резонанса просветление среды наступает на больших расстояниях (кривые 2 и 3). Анализ графиков на рис. 13.6 показывает, что импульс накачки теряет энергию, вдвое превышающую энергию экситонной волны. Иными словами, в переходной области  $0 < z < l_{ст}$  в тепло обращается равно столько энергии, сколько ее получает поляритонная волна.

Динамика формирования стационарных волн (солитонов) при параметрическом просветлении экситон-поляритонного резонанса представлена на рис. 13.7 при точном резонансе (а) и при отстройке от резонанса,  $\Omega_3 T_2 = 1$ , (б). Видно, что при отстройке увеличивается длина формирования солитонов, однако их профили не чувствительны к наличию  $\Omega_3$ , так как в режиме просветления механические колебания не раскачиваются,  $\sigma_{ст} = 0$ .

В случае генерации экситона на суммарной частоте двумя волнами накачки с отличающимися в несколько раз частотами ( $\omega_2/\omega_1 > 1$ ) перераспределение энергии между взаимодействующими импульсами идет иначе. Основные потери испытывает высокочастотная накачка  $\omega_2$ , энергия

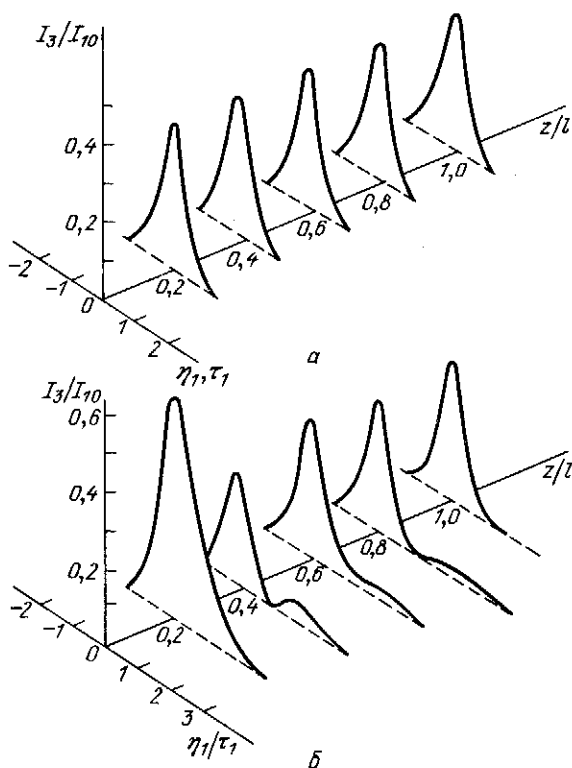


Рис. 13.7. Изменение формы поляритонного импульса в процессе параметрического просветления:

а — при точном резонансе,  $\Omega_3 = 0$ ; б — при отстройке от резонанса,  $\Omega_3 T_2 = 1$

импульса стационарной экситон-поляритонной волны несколько меньше, чем в вырожденном случае. Увеличивается и длина, на которой формируются солитоны.

Рассмотрим свойства солитонов при параметрическом просветлении экситонного резонанса, полагая в (13.24) амплитуду механических колебаний равной нулю ( $\sigma = 0$ ). Тогда из последнего уравнения следует условие взаимной компенсации параметрической накачки и дипольной связи:

$$A_{3\text{ст}} = -(\gamma_{Q3}/\alpha_Q) A_{1\text{ст}} A_{2\text{ст}}. \quad (13.26)$$

Вместе с интегралами движения (13.25) соотношение (13.26) позволяет найти в аналитической форме выражения для амплитудных профилей солитонов через начальные распределения амплитуд волн на нерезонансных частотах  $E_1(\eta_3)$  и  $E_2(\eta_3)$ . Напомним, что  $\sigma_{\text{ст}} = 0$ .

Взаимодействия волн при поляритонном резонансе можно разделить на слабые и сильные в зависимости от соотношения интенсивностей падающих на кристалл волн и критического поля

$$E_{\text{кр}}^2 = \frac{\alpha_E \alpha_Q}{\gamma_{Q3} (\gamma_{Q1} \gamma_{Q2})^{1/2}}. \quad (13.27)$$

При слабом взаимодействии ( $E_{10} E_{20} \ll E_{\text{кр}}^2$ ) огибающие импульсов накачки искажаются незначительно:

$$A_{1\text{ст}} = E_1(\eta_3) \left[ 1 - \frac{\gamma_{Q1} \gamma_{Q3}}{\alpha_E \alpha_Q} E_2^2(\eta_3) \right],$$

$$A_{2\text{ст}} = E_2(\eta_3) \left[ 1 - \frac{\gamma_{Q2} \gamma_{Q3}}{\alpha_E \alpha_Q} E_1^2(\eta_3) \right], \quad (13.28)$$

$$A_{3\text{ст}} = -\frac{\gamma_{Q3}}{\alpha_Q} E_1(\eta_3) E_2(\eta_3).$$

Видно, что профиль солитона на резонансной частоте повторяет профиль накачки.

Из (13.24) следует, что полная энергия импульсов в процессе формирования солитонов уменьшается:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\alpha_E}{T_2 \alpha_Q} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_3 |\sigma|^2 \leq 0. \quad (13.29)$$

В режиме просветления  $\sigma = 0$  и энергия волн не меняется. Интегрируя (13.28), нетрудно найти важное соотношение

$$\Delta W_{12} = 2W_{3\text{ст}}, \quad (13.30)$$

которое связывает потери энергии импульса накачки  $\Delta W_{12} = W_{10} + W_{20} - W_1(z) - W_2(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  с энергией солитона на резонансной частоте экситонного перехода  $W_{3\text{ст}}$ . Из (13.30) следует, что в процессе формирования солитонов при выходе на режим параметрического просветления в тепло переходит энергия, равная  $W_{3\text{ст}}$ . Это подтверждают результаты численного эксперимента (рис. 13.6).

При сильном взаимодействии ( $E_{10}E_{20} \gg E_{кр}^2$ ) из (13.25), (13.26) можно получить асимптотические выражения для амплитудных профилей солитонов. Отметим, что в данном случае полная энергия солитонов меньше начального запаса примерно в  $E_{10}E_{20}/E_{кр}^2$  раз.

Солитоны при параметрическом просветлении экситонного резонанса представляют лишь один из возможных вариантов генерации стационарных импульсов при двухфотонном возбуждении поляритонных колебаний. Другой класс солитонов возникает при учете самовоздействия электромагнитных волн и ангармонизма колебаний [31, 32] (ср. с § 7.4, 12.5). При учете движения населенностей солитоны связаны с явлением самоиндуцированной прозрачности [33–38].

Необходимо отметить, что эффект параметрического просветления впервые рассмотрен в случае резонансной генерации второй гармоники [39]. Исчезновение резонансного поглощения объяснялось нелинейной интерференцией полей второй гармоники и основной волны. Подробный анализ параметрического просветления в газовых средах дан в [40]. В частности, при четырехволновом взаимодействии двухфотонное возбуждение перехода подавляется комбинационным воздействием другой пары волн, действующей в противофазе. Эффект параметрического просветления исследован экспериментально в [41].

## К главе 1

1. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1964.
2. Бломберген Н. Нелинейная оптика: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Ахманова и Р.В. Хохлова. — М.: Мир, 1966.
3. Шуберт Я., Вильгельми Б. Введение в нелинейную оптику: Пер. с нем. — М.: Мир, 1973, ч. I; 1975, ч. II.
4. Цершике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Ахманова. — М.: Мир, 1976.
5. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. Прикладная нелинейная оптика. — М.: Радио и связь, 1982.
6. Данелюс Р., Пискарскас А., Сируткайтис В., Стабинис А., Ясевичюте Я. Параметрические генераторы света и пикосекундная спектроскопия / Под ред. А.Пискарскаса. — Вильнюс: Мокспас, 1983.
7. Суцник М.М., Фортус В.М., Фрейдман Г.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1970. Т. 13. С. 631.
8. Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1970. Т. 13. С. 164.
9. Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
10. Райнтжес Дж. Нелинейные параметрические процессы в жидкостях и газах: Пер. с англ. / Под ред. Г.В. Скродского. — М.: Мир, 1987.
11. Бахрамов С.А., Тартаковский Г.Х., Хабибуллаев П.К. Нелинейные резонансные процессы и преобразование частоты в газах / Под ред. С.А. Ахманова. — Ташкент: Фан, 1981.
12. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. // УФН. 1967. Т. 93. С. 19.
13. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. // Нелинейная оптика. — Новосибирск: Наука, 1968. С. 428.
14. Marburger J.H. // Progress in Quantum Electronics. 1975. V. 5. Part 1. P. 35.
15. Луговой В.Н., Прохоров А.М. // УФН. 1973. Т. 111. С. 203.
16. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. / Под ред. А.Б. Шабата. — М.: Мир, 1977.
17. Хохлов Р.В. // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. С. 917.
18. Катаев И.Г. Ударные электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1963.
19. Гапонов А.В., Островский Л.А., Фрейдман Г.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1967. Т. 10. С. 1376.
20. Остон Д. Пикосекундная нелинейная оптика // Сверхкороткие световые импульсы / Под ред. С. Шапиро: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
21. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
22. Леонтович М.А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1944. Т. 8. С. 16.
23. Леонтович М.А., Фок В.А. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 557.
24. Малюжинец Г.Д. // УФН. 1959. Т. 69. С. 321.

25. Карлов Н.В. Лекции по квантовой электронике. — 2-е изд. — М.: Наука, 1987.
26. Хаус Х. Волны и поля в оптоэлектронике: Пер. с англ. / Под ред. К.Ф. Шипилова. — М.: Мир, 1988.
27. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г.П. Мотулевич. — М.: Наука, 1973.
28. Федоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. — Минск: Изд-во АН БССР, 1958.
29. Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астроном. 1966. Т. 7, № 1. С. 95.
30. Сухоруков А.П. Волновые пучки и импульсы в нелинейных средах: Докт. дис. — М., 1973.
31. Апанасевич П.А. Основы теории взаимодействия света с веществом. — Минск: Наука и техника, 1977.
32. Марчевский Ф.Н., Стрижевский В.Л. // Укр. физ. ж. 1982. Т. 27. С. 781.
33. Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме: Пер. с англ. — М.: Энергоиздат, 1981.
34. Вопросы теории плазмы: Сб. статей. Вып. 7 / Под ред. М.А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1973.
35. Кадомацв Б.Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.
36. Должанский Ф.В., Кляцкин В.И., Обухов А.М., Чусов М.А. Нелинейные системы гидродинамического типа. — М.: Наука, 1974.
37. Нелинейная теория распространения волн / Под ред. М. Лайтхилла: Пер. с англ. / Под ред. Г.И. Баренблата. — М.: Мир, 1970.
38. McComas C.H., Bretherton F.P. // J. Geophys. Res. 1977. V. 82. P. 1397.
39. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. — Л.: Судостроение, 1981.
40. Зарембо Л.К. // УФН. 1979. Т. 128. С. 713.
41. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Чиркин А.С. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 1480.
42. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — 10-е изд. — М.: Наука, 1987.
43. Клайн С.Дж. Подобие и приближенные методы: Пер. с англ. / Под ред. И.Т.Аладьева и К.Д.Воскресенского. — М.: Мир, 1968.
44. Веников В.А. Теория подобия и моделирование. — М.: Высшая школа, 1976.
45. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К., Чернега П.И. // ДАН СССР. 1977. Т. 235. С. 564.
46. Karatzin Yu.N., Sukhorukov A.P., Sukhorukova A.K., Chernega P.I. // Quantum electrop. and Nonlinear opt. Invaited papers of the 8-th Conf. EKON. — Poznan, 1980. P. 255.
47. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний. — М.: Наука, 1983.
48. Marcuse D. // Appl. Optics. 1981. V. 20. P. 3573.
49. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. // УФН. 1986. Т. 149. С. 449.
50. Дианов Е.М., Прохоров А.М. // Там же. Т. 148. С. 289.
51. Пирогова И.Ю., Сухоруков А.П. // Опт. и спектроскоп. 1985. Т. 59. С. 694.
52. Литвак А.Г., Таланов В.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1967. т. 10. с. 539.

## К главе 2

1. Сушик М.М., Фортус В.М., Фрейдман Г.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1970. Т. 13. С. 631.
2. Сухоруков А.П., Щеднова А.К. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1251.
3. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. — М.: Наука, 1966. Т. II.
4. Фрейдман Г.И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1959.
5. Sukhorukov A.P. // Proc. Fourth International School of Coherent Optics. — Bechyne, 1983. P. 86.
6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
7. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
8. Сухоруков А.П., Щеднова А.К. // Нелинейные процессы в оптике. Вып. 2. — Новосибирск, 1972. С. 17.

9. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. — М.: Наука, 1965. Т. 1.
10. Пискарскас А., Стабинис А., Янкаускас А. // Квант. электрон. 1985. Т. 12. С.1781.
11. Пискарскас А., Стабинис А., Умбрасас А., Янкаускас А. // Там же. С. 2335.
12. Krenz F.H., Kino G.S. // J. Appl. Phys. 1965. V. 36. P. 2168.
13. Ромазашвили Р.Р. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2168.
14. Perkins F., Flick T. // Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 2012.
15. Сухоруков А.П., Щеднова А.К. // Опт. и спектроск. 1973. Т. 35. С. 929.

### К главе 3

1. Warner I. // Quantum Electron. / Ed. H. Rabin, C.L. Tang. — New York etc.: Academic Press. V. 1, Nonlinear optics. Part B. 1975. P. 703.
2. Воронин Э.С., Стрижевский В.Л. // УФН. 1979. Т. 127. С. 99.
3. Веденов А.А., Мыльников Г.Д., Соболенко Д.Н. // УФН. 1982. Т. 138. С. 477.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер. с англ. / Под ред. О.А.Олейник. — М.: Мир, 1964.
5. Азимов Б.С., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 81.
6. Люисселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
7. Пирс Дж. Почти все о волнах: Пер. с англ. / Под ред. М.Д. Карасева. — М.: Мир, 1976.
8. Пинскер З.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. — М.: Наука, 1974.
9. Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 34. С. 200; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1982. Т. 46. С. 2017.
10. Азимов Б.С., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // Квант. электрон. 1979. Т. 6. С. 2642.
11. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
12. Выслоух В.А. // УФН. 1982. Т. 136. С. 519.
13. Азимов Б.С., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. Т. 45. С. 1398.

### К главе 4

1. Оравский В.Н., Сагдеев Р.З. // ЖТФ. 1962. Т. 32. С. 1291.
2. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973.
3. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. — М.: Атомиздат, 1970. Т. 1; 1971. Т. 2.
4. Линейные уравнения математической физики / Под ред. С.Г. Михлина. — М.: Наука, 1964.
5. Клышко Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
6. Сухоруков А.П., Щеднова А.К. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1251.
7. Сухоруков А.П., Щеднова А.К. // Нелинейные процессы в оптике. Вып. 2. — Новосибирск, 1972. С. 17.
8. Вильгельми Б. Лазеры сверхкоротких световых импульсов: Пер. с нем. / Под ред. Н.Г. Крюкова — М.: Мир, 1986.
9. Аллен А., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы: Пер. с англ. / Под ред. В.Л. Стрижевского. — М.: Мир, 1978.
10. Богданова М.В., Ильинова Т.М., Хохлов Р.В. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 469.
11. Большов Л.А., Лыханский В.В. // Квант. электрон. 1985. Т. 12. С. 1339.
12. Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 565.
13. Chan V.S., Seshadri S.R. // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. P. 1868.
14. Дьяков Ю.Е. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 487; 1970. Т. 11. С. 362.
15. Wang C.S. // Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 482.
16. Akhmanov S.A. // Mater. Res. Bull. 1969. V. 4. P. 455.
17. Горбунов Л.М. // ЖЭТФ, 1972. Т. 62. С. 2144.



18. Сушик М.М., Фортус В.М., Фрейдман Г.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1969. Т. 12. С. 293.
19. Papadopoulos K., Ko K., Thiripathi V. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 66. P. 6.
20. Сушик М.М., Фрейдман Г.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1970. Т. 13. С. 1354.
21. Сушик М.М., Фортус В.М., Фрейдман Г.И. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1970. Т. 13. С. 251.
22. Беляев Ю.Н., Фрейдман Г.И. // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15. С. 237.
23. Фрейдман Г.И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1959.
24. Kroll N.M., Kelley P.L. // Phys. Rev. 1971. V. 4. P. 763.
25. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. - М.: Наука, 1980.

### К главе 5

1. Азимов Б.С., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // ЖЭТФ. 1980. Т. 75. С. 82.
2. Ахманов С.А., Чиркин А.С. Статистические явления в нелинейной оптике. - М.: Изд-во МГУ, 1971.
3. Гандельман Г.М., Ицкович О.Ю., Кондратенко П.С., Соболев С.С., Степанов Б.М., Чалкин С.Ф. // Квант. электрон. 1984. Т. 11. С. 1348.
4. Comly J., Garmire E. // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 12. P. 7.
5. Glenn W.H. // IEEE J. Quantum Electron. 1969. V. QE-5. P. 284.
6. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Чиркин А.С. // ЖЭТФ. 1969. Т. 10. С. 1069.
7. Азимов Б.С., Карамзин Ю.Н., Сухорукова А.К. Влияние фазовой модуляции накачки и сигнала на параметрическое преобразование частоты вверх: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. № 36. - М., 1981.
8. Franken P., Hill A., Peters C., Weinreich G. // Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. P. 118.
9. Miller R.C. // Phys. Lett. 1968. V. A-26. P. 177.
10. Shapiro S.L. // Appl. Phys. Lett. 1969. V. 13. P. 19.
11. Божуль Б.В., Хаткевич А.Г. // Ж. прикл. спектроскоп. 1964. Т. 1. С. 97.
12. Boyd G.D., Kleinman D.A. // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 3597.
13. Моисеев С.С. // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 5.
14. Мельник Л.П., Филоненко Н.Н. // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 458.
15. Akhmanov S.A., Kovrigin A.I., Sukhorukov A.P. // Quantum Electronics / Ed. H. Rabin, C.L. Tang. - N. Y. etc.: Academic Press. V. 1. Part B. 1975. P. 522.
16. Пустовой В.И., Сухорукова А.К. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1988. Т. 52. С. 564.
17. Матвеев А.Н., Пирогова И.Ю., Телегин Л.С., Чиркин А.С. // Квант. электрон. 1987. Т. 14. С. 754.

### К главе 6

1. Захаров В.Е., Манаков С.В. // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 413; ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 1654.
2. Каур D.J. // Stud. Appl. Math. 1976. V. 55. P. 9.
3. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980.
4. Буллаф Р., Кодри Ф. // Солитоны: Пер. с англ. / Под ред. С.П. Новикова. - М.: Мир, 1983. С. 11.
5. Карамзин Ю.Н. // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15. С. 439.
6. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. // Квант. электрон. 1975. Т. 5. С. 912.
7. Erccardt R.C., Reintjes J. // IEEE J. Quantum Electron. 1984. V. QE-20. P. 1178.
8. Данилюс Р., Пискарская А., Сируткяйтис В., Стабинис А., Ясевичюте Я. Параметрические генераторы света и пикосекундная спектроскопия / Под ред. А. Пискарская. - Вильнюс: Мокспас, 1983.
9. Ахманов С.А., Ковригин А.И., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В., Чиркин А.С. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7. С. 237.
10. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Чиркин А.С. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1967. Т. 12. С. 1639.

11. *Akhmanov S.A., Chirkin A.S., Drabovich K.N., Kovrigin A.I., Khokhlov R.V., Sukhorukov A.P.* // IEEE J. Quantum Electron. 1968. V. QE-4. P. 598.
12. *Тагиев Э.А., Чиркин А.С.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 1271.
13. *Ибрагимов Э.Ф., Усманов Т.* // ДАН СССР. 1981. Т. 261. С. 846.
14. *Кривошеков Г.В., Никулин Н.Г., Соколовский Р.И.* // Нелинейные процессы в оптике. Вып. 2 (Труды II Вавиловской конференции по нелинейной оптике). – Новосибирск, 1972. С. 35. // Опт. и спектроск. 1971. Т. 31. С. 448.
15. *Хохлов Р.В.* // Радиотехника и электрон. 1961. Т. 6. С. 1116.
16. Солитоны в действии: Пер. с англ. / Под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. Гл.1.
17. *Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Филиппчук Т.С.* // Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. № 106. – М., 1981.
18. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. – Изд. 2-е, доп. и перераб. – М.: Наука, 1973.
19. *Ораевский А.Н., Крюков П.Г., Летохов В.С.* // УФН. 1969. Т. 99. С. 169.
20. *Maier M., Kaizer W., Giordmaine J.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 1275.
21. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика: Пер. с англ. / Под ред. С.А.Ахманова и Р.В. Хохлова. – М.: Мир, 1966.
22. *Ибрагимов Э.Ф., Редкоречев В.И., Сухоруков А.П., Усманов Т.* // Квант. электрон. 1982. Т. 9. С. 1131.
23. *Волосов В.Д.* // ЖТФ. 1969. Т. 39. С. 2188.
24. *Данелюс Р., Пискарскас А., Сируткайтис В., Стабинис А., Ясевичюте Я.* Параметрические генераторы света и пикосекундная спектроскопия / Под ред. А. Пискарскаса. – Вильнюс: Мокспас, 1983.
25. *Морозов С.Ф., Пискунова Л.В., Сущик М.М., Фрейдман Г.И.* // Квант. электрон. 1976. Т. 3. С. 548.

### К главе 7

1. Солитоны в действии / Под ред. К.Лонгрена и Э. Скотта: Пер. с англ. / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова и Л.А.Островского. – М.: Мир, 1981.
2. *Neugebauer G., Meinel R.* // Phys. Lett. 1984. V. A-100. P. 467.
3. *Stuedel H., Meinel R.* // Physica. 1986. V. D-21. P. 155.
4. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
5. *Каур D.J.* // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. P. 25.
6. *Хохлов Р.В.* Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений и его применение к некоторым проблемам радиофизики: Докт. дис. – М., 1961.
7. *Akhmanov S.A., Chirkin A.S., Drabovich K.N., Kovrigin A.I., Khokhlov R.V., Sukhorukov A.P.* // IEEE J. Quantum Electron. 1968. V. QE-4. P. 598.
8. *Сухоруков А.П.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51. С. 1361.
9. *Пекара А.* Новый облик оптики: Пер. с польск. / Под ред. Р.В. Хохлова. – М.: Сов. радио. 1973.
10. *Махвиладзе Т.М., Сарычев М.Е.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 896.
11. *Марчевский Ф.Н., Стрижевский В.Л., Фещенко В.П.* // Квант. электрон. 1984. Т.11. С. 277.

### К главе 8

1. *Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 834.
2. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – М.: Наука, 1979.
3. *Asby R.* // Phys. Rev. 1969. V. 187. P. 1062.
4. *Zubairy M.S., McIver J.K.* // Phys. Rev. 1985. V. A-31. P. 856.
5. *Ахманов С.А., Фадеев В.В., Хохлов Р.В., Чунаев О.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 575.
6. *Клышко Д.Н., Криндач Д.П.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 54. С. 697.
7. *Азимов Б.С.* // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1983. Т. 26. С. 1535.

### К главе 9

1. *Карамзин Ю.Н.* // ЖВМиМФ. 1974. Т. 14. С. 1058.
2. *Bloembergen N., Pershan P.S.* // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 606.

3. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 734.
4. Гринь Ю.Г., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. Нелинейная дифракционная теория мощных удвоителей частоты света; взаимофокусировка пучков, предельные КПД: Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. № 136. — М., 1976.
5. Webb R. // Damage in Laser Materials. — NBS Special Pub, 1971. V. 356. P. 98.
6. Chiao R., Garmire E., Townes C. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479; 1965. V. 14. P. 1056.
7. Островский Л.А. // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 5. С. 331.
8. Дьяков Ю.Е., Жданов Б.В., Ковригин А.И., Першин С.М. // Квант. электрон. 1975. Т. 2. С. 1828.
9. Kelley P. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 1005.
10. Власов С.Н., Пискунова Л.В., Таланов В.И. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 1602.
11. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Сагдеев Р.З., Соловьев Г.И., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 1221.
12. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 834.
13. Бирмонтас А., Василюскас В., Пискаускас А., Стабинис А. // Квант. электрон. 1985. Т. 12. С. 1191.
14. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Филипчук Т.С. Теория генерации второй гармоники короткими импульсами с учетом дисперсионных эффектов второго порядка: Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. № 106. — М., 1981.
15. Пискаускас А., Стабинис А., Янкаускас А. // УФН. 1986. Т. 150. С. 128.
16. Ахтанов С.А., Khokhlov R.V., Sukhorukov A.P. // Laser Handbook/Eds F.T. Arecchi, E.O. Schulz-Dubois. — Amsterdam: North-Holland, 1972. V. 2. P. 1151.
17. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. // УФН. 1986. Т. 149. С. 449.
18. Василюскас В., Стабинис А. // Квант. электрон. 1985. Т. 12. С. 1881.
19. Becker M.F., Kim Y.C., Gautam S.R., Powers E.I. // IEEE J. Quantum Electron. 1982. V. QE-18. P. 113.

#### К главе 10

1. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 1. С. 737.
2. Сухоруков А.П. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51. С. 1361.
3. Карамзин Ю.Н., Филипчук Т.С. // ПМТФ. 1977. № 1. С. 47.
4. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Филипчук Т.С. // Изв. вузов Сер. "Радиофизика". 1978. Т. 21. С. 456.
5. Таланов В.И. // Там же. 1964. Т. 7. С. 564.
6. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479.
7. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Филипчук Т.С. О солитонном режиме трехчастотных когерентных взаимодействий импульсов при дисперсии групповых скоростей: Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. № 101. — М., 1977.
8. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Филипчук Т.С. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ. астрон. 1978. Т. 19. С. 91.
9. Канашов А.А., Рубенчик А.М. О взаимофокусировке волн в средах с квадратичной нелинейностью: Препринт ИАЭ СО АН СССР. № 67. — Новосибирск, 1977.
10. Захаров В.Е., Рубенчик А.М. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 997.
11. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966.
12. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 2060.
13. Азимов Б.С., Трухов Д.В. // Радиотехн. и электрон. 1986. Т. 31. С. 1709.
14. Азимов Б.С., Сухоруков А.П., Трухов Д.В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51. С. 229.
15. Никогосян Д.Н. // Квант. электрон. 1977. Т. 4. С. 5.

#### К главе 11

1. Bey P.P., Guillani J.E., Rabin H. // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 14; 1968. V. A-26. P. 128.
2. Chang R.R., Galbraith L.K. // Phys. Rev. 1958. V. 171. P. 993.
3. New J.F., Ward G.H.G. // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 556; Phys. Rev. 1969. V. 85. P. 97.

4. Rado W.G. // Appl. Phys. Lett. 1967. V. 11. P. 123.
5. Райнжес Дж. Нелинейные оптические параметрические процессы в газах и жидкостях: Пер. с англ./Под ред. Г.В. Скродкокого. — М.: Мир. 1987.
6. Miller R.C., Boyd G.D., Savadge A. // Appl. Phys. Lett. 1965. V. 6. P. 73.
7. Сухоруков А.П. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика". 1966. Т. 9. С. 765.
8. Bjorkholm I.E. // Phys. Rev. 1966. V. 142. P. 126.
9. Kleiman D.A., Ashkin A., Boyd G.D. // Phys. Rev. 1966. V. 145. P. 338.
10. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 474.
11. Сухоруков А.П., Томов И.В. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1626.
12. Bjorklund G.C. // IEEE J. Quant. Electron. 1975. V. QE-11. P. 287.
13. Puell H., Spanner K., Falkenstein W., Kaizer W., Vidal C.R. // Phys. Rev. 1976. V. A-14. P. 2240.
14. Fisher R., Weiczorek L.W. // Ann. Phys. (Leipzig). 1978. V. 35. P. 389.
15. Kleinman D.A. // Laser Handbook/Eds F.T. Arecchi, E.O. Schulz-Dubois. — Amsterdam.: North-Holland, 1972. V. 2. P. 1229.
16. Akhmanov S.A., Kovrigin A.I., Sukhorukov A.P. // Quantum Electronics/Eds H. Rabin, C.L. Tang. — N.Y.: Academic Press, 1975. V. 1, Part B. P. 522.
17. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. Прикладная нелинейная оптика. — М.: Радио и связь, 1982.
18. Asby R. // Phys. Rev. 1969. V. 187. P. 1062, 1070.
19. Yiu Y.M., Mc Ibrath T.J., Mahon R. // Ibidem. 1979. V. A-20. P. 2470.
20. Rostovtzeva V.V., Sukhorukov A.P., Tunkin V.G., Satiel S.M. // Opt. commun. 1977. V. 22. P. 56.
21. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ./Под ред. Г.П. Матулевич. — М.: Наука. 1973.
22. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 734.
23. Гринь Ю.Г., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. Об эффективности удвоения частоты мощного оптического излучения: Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. № 100. — М., 1977.
24. Гринь Ю.Г., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. // Квант. электрон. 1978. Т. 5. С. 460.
25. White D.R., Dawes E.L., Marburger J.H. // J. Quant. Electron. 1970. V. QE-6. P. 793.
26. Ибрагимов Э.Ф., Редкоречев В.И., Сухоруков А.П., Усманов Т. // Квант. электрон. 1982. Т. 9. С. 1131.
27. Тагиев З.А., Чиркин А.С. // Там же. 1980. Т. 7. С. 1337.
28. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Филичук Т.С. // Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. № 106. — М., 1981.
29. Tzoar N., Jain M. // Phys. Rev. 1981. V. A-23. P. 1266.
30. Anderson D., Lisak M. // Ibidem. 1983. V. A-27. P. 1393.
31. Пирогова И.Ю., Сухоруков А.П. // Опт. и спектроск. 1985. Т. 59. С. 694.

## К главе 12

1. Garmire E., Pandarese F., Townes C.H. // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 160.
2. Hellwarth R.W. // Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1850.
3. Платоненко В.Т., Хохлов Р.В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 555.
4. Shen Y.R., Bloembergen N. // Phys. Rev. 1965. V. A-137. P. 1787.
5. Akhmanov S.A., Chirkin A.S., Drabovich K.N., Kovrigin A.I., Khokhlov R.V., Sukhorukov A.P. // IEEE J. Quant. Electron. 1968. V. QE-4. P. 598.
6. Maier M., Kaizer W., Giordmaine J. // Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 580.
7. Ахманов С.А., Драбович К.Н., Сухоруков А.П., Чиркин А.С. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 485.
8. Ахманов С.А., Драбович К.Н., Сухоруков А.П., Шеднова А.К. // Нелинейные процессы в оптике: Труды II Всесоюз. конф. по нелинейной оптике. Вып. 2. — Новосибирск, 1972. С. 3.
9. Ахманов С.А., Драбович К.Н., Сухоруков А.П., Шеднова А.К. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 525.
10. Сухоруков А.П., Шеднова А.К. // Опт. и спектроск. 1973. Т. 34. С. 351.
11. Крой Н. // J. Appl. Phys. 1965. V. 36. P. 34.
12. Wang C.S. // Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 482.
13. Дьяков Ю.Е. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 489; 1970. Т. 11. С. 362.

14. *Carman R.L., Shimizu F., Wang C.S., Bloembergen N.* // Phys. Rev. 1970. V. A-2. P. 60.
15. *Сущинский М.М.* Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов. — М.: Наука, 1969.
16. *Tang C.* // J. Appl. Phys. 1966. V. 37. P. 2945.
17. *Зельдович Б.Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15. С. 226.
18. *Maier M., Renner G.* // Optics comm. 1971. V. 3. P. 301.
19. *Maier M., Renner G.* // Phys. Lett. 1971. V. A-34. P. 299.
20. *Carman R.L., Mack M.E.* // Phys. Rev. 1972. V. A-5. P. 341.
21. *Бочаров В.В., Грасюк А.З., Зубарев И.Г., Муликов В.Ф.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 430.
22. *Бломберген Н.* // УФН. 1969. Т. 97. С. 307.
23. *Kaizer W., Maier M.* // Laser Handbook / Eds F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois. — Amsterdam: North-Holland, 1972. V. 2. P. 1075.
24. *Wang C.S.* // Quantum Electronics / Eds H. Rabin, C. L. Tang. — N.Y.: Academic Press, 1975. V. 1, Part A.
25. *Остон Д.* Пикосекундная нелинейная оптика // Сверхкороткие световые импульсы / Под ред. С. Шапиро: Пер. сангл. С.А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
26. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Пер. с англ. — М.: Наука, 1965.
27. *Большов М.А., Голяев Ю.И., Днепровский В.С., Нурминский И.И.* // ЖЭТФ, 1969. Т. 57. С. 346.
28. *Ахманов С.А., Большов М.А., Драбович К.Н., Сухоруков А.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 547.
29. *Бабенко В.А., Малышев В.И., Соков А.А.* // Квант. электрон. 1978. Т. 5. С. 431.
30. *Морозов С.Ф., Пискунова Л.В., Суцук М.М., Фрейдман Г.И.* // Там же. С. 1005.
31. *Maier M., Kaizer W., Giordmaine J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 125.
32. *Луговой В.Н., Прохоров А.М., Стрельцов В.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10. С. 564.
33. *Драбович К.Н.* // Ж. прикл. спектроскоп. 1970. Т. 12. С. 411.
34. *Махвеладзе Т.М., Сарычев М.Е.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 896.
35. *Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A.C.* // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 1852.
36. *Лэм Дж., Маклафлин Д.* // Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодра: Пер. сангл. / Под ред. С.П. Новикова. — М.: Мир. 1981. С. 78.
37. *Большов Л.А., Лиханский В.В., Персианцев М.И.* // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 903.
38. *Большов Л.А., Лиханский В.В.* // Квант. электрон. 1985. Т. 12. С. 1339.
39. *Медведев Б.А., Паршков О.М., Горшенин В.А., Дмитриев А.Е.* // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 70.
40. *Большов Л.А., Елкин Н.Н., Лиханский В.В., Персианцев М.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 360.
41. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы: Пер. с англ. / Под ред. В.Л. Стрижевского. — М.: Мир. 1978.

### К главе 13

1. *Hopfield J. J.* // Phys. Rev. 1958. V. 112. P. 1555.
2. *Пекар С.И.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1022.
3. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1965.
4. *Агранович В.М.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 430.
5. *Claus R.* // Phys. Stat. Sol. 1978. V. B-88. P. 683.
6. *Лоудон Р.* // Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Ахманова. — М.: Мир, 1979. С. 390.
7. *Де Мартини Ф.* // Там же. С. 417.
8. *Гора В.Д., Пустовой В.И., Сухорукова А.К.* // Квант. электрон. 1982. Т. 9. С. 1871.
9. *Гора В.Д., Карамзин Ю.Н., Пустовой В.И., Сухорукова А.К.* О вынужденном нестационарном рассеянии на поляритонах: Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, № 16. — М., 1982; О возбуждении поляритонов короткими импульсами и сфокусированными пучками: Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, № 172. — М., 1982.

10. Гора В.Д., Пустовой В.И., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1983. Т. 47. С. 1622.
11. Иванов А.Л., Келдыш Л.В. // ДАН СССР. 1982. Т. 264. С. 1363.
12. Иванов А.Л., Келдыш Л.В. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 404.
13. Во Ханг Ань. Теория параметрического воздействия электромагнитного излучения большой мощности на твердое тело. — М.: Наука, 1985.
14. Пустовой В.И., Сухорукова А.К. // Квант. электрон. 1987. Т. 14. С. 2050.
15. Ulbrich R.G., Fehrenbach G.W. // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 963.
16. Masamoto Y., Unuma Y., Tanaka Y., Shionoya S. // J. Phys. Soc. Jap. 1979. V. 47. P. 1844.
17. Segawa Y., Aoyagi Y., Azuma K., Namba S. // Sol. St. Comm. 1978. V. 28. P. 853.
18. Segawa Y., Aoyagi Y., Namba S. // Ibidem. 1979. V. 32. P. 229.
19. Itoh T., Lavallard P., Reydellet J., Benoit a la Guillaume // Ibidem. 1981. V. 37. P. 925.
20. Duong P.H., Itoh T., Lavallard P. // Ibidem. 1982. V. 43. P. 879.
21. Marchevskii F.N., Strizhevskii V.L. // J. Raman Spectrosc. 1975. V. 3. P. 7; Ibidem. P. 15.
22. Стрижевский В.Л. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1446.
23. Бабин А.А., Беляев Ю.Н., Сущик М.М., Фортус В.М., Фрейдман Г.И., Щелоков А.Н. // Изв. вузов. Сер. "Радиофизика", 1978. Т. 21. С. 1443.
24. Henry C.H., Hopfield J. J. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 964.
25. Henry C.H., Garret C.G. // Phys. Rev. 1968. V. 171. P. 1058.
26. Holz L., Kneipp R., Lau A., Werncke W. // Phys. Stat. Sol. 1976. V. A-36. P. 5.
27. Поливанов Ю.Н. // УФН. 1978. Т. 126. С. 185.
28. Карменян К.В., Чилингарян Ю.С. // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17. С. 106.
29. Laubereau A., Greiter L., Kaizer W. // Appl. Phys. Lett. 1974. V. 25. P. 87.
30. Гора В.Д., Пустовой В.И., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. // Вестн. Моск. ун-та Сер. физ. астрон. 1983. Т. 24, № 5. С. 83.
31. Махвеладзе Т.М., Сарычев М.Е. // ФТТ. 1978. Т. 20. С. 1062; ФТТ. 1983. Т. 25. С. 1777.
32. Марчевский Ф.Н., Стрижевский В.Л. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1984. Т. 48. С. 540.
33. Москаленко С.А., Хаджи П.И., Ротару А.Х. Солитоны и нутация в экситонной области спектра. — Кишинев: Штиинца, 1980.
34. Давыдов А.С. // УФН. 1982. Т. 138. С. 603.
35. Москаленко С.А., Хаджи П.И., Ротару А.Х., Кисилева Е.С. // Экситоны и биэкситоны в полупроводниках. — Кишинев: Штиинца, 1982. С. 3.
36. Днепровский В.С., Зименко Е.В., Чумаш В.Н. // Там же. С. 84.
37. Адамашвили Г.Т. // Опт. и спектроск. 1983. Т. 54. С. 668.
38. Хакем Х. // Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1979. С. 452.
39. Гуревич Г.Л., Хронопуло Ю.Г. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1449.
40. Маныкин Э.А., Афанасьев А.М. // ЖЭТФ. 1967. Т. 52. С. 1246.
41. Красников В.В., Пшеничников Н.С., Соломатин В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 115.