Р.Л.Стратонович

УСЛОВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Книга является первой монографией, посвященной теории условных марковских процессов. Данная теория относится к новому разделу математической статистики и находит многочисленные применения в теории оптимальной нелинейной фильтрации, теории обнаружения процессов при неполном их наблюдении, статистической теории оптимального управления и .др.

В книге систематически излагается ряд оригинальных результатов автора как по общей теории, так и (в меньшей степени) по решению отдельных задач.

Книга написана как математическая монография с привлечением понятий и аппарата современной теории вероятностей и рассчитана в первую очередь на специалистов в этой области.

Ввиду большого прикладного значения теории условных марковских процессов книга представляет интерес также для научных работников, аспирантов и инженеров, работающих в области радиоэлектроники и., кибернетики. Опуская математические детали, они могут пользоваться ею как справочным руководством для ознакомления с методами и результатами, отсутствующими в других книгах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

Часть III

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ках теории марковских процессов, мы будем иметь усложнение решения, адекватное усложнению задачи.

Согласно сказанному выше выглядит совершенно естественным тот факт, что в настоящее время проявляется большой интерес к марковским процессам. Свидетельством тому является выход в свет ряда монографий, которые посвящены им. Однако, к сожалению, монографии, в которых рассматривалась бы статистика марковских процессов (т. е. изучались бы те случаи, когда наблюдается некоторая функция от марковского процесса), полностью отсутствуют. Настоящая книга призвана в посильной степени заполнить этот пробел.

Если наблюдается некоторая функция $y_t=f(x_t)$ от марковского процесса x_t, то соответствующие этому наблюдению апостериорные вероятности, скажем $\mathbf{P}(dx_t \mid y_\tau, \tau \leqslant t)$, отличаются от априорных. Исследование этих апостериорных вероятностей и их эволюции во времени составляет предмет теории условных марковских процессов.

Первые результаты этой теории и основывающейся на ней нелинейной оптимальной фильтрации были доложены автором на Всесоюзной конференции по статистической радиофизике в г. Горьком (1958 г.) и на семинаре при кафедре теории вероятностей МГУ (Стратонович [1]). Результаты указанного периода опубликованы в работе автора [2].

К ним относится дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial w_t(x)}{\partial t} = (Bw_t)(x) - w(x) \int (Bw_t)(x')\, dx'$$

для апостериорной плотности (по мере Лебега) распределения вероятностей

$$w_t(x) = \mathbf{P}(dx_t \mid y_\tau, \tau \leqslant t)/dx_t.$$

Здесь x_t — точка многомерного фазового пространства; B — основной апостериорный оператор, зависящий от наблюдаемого процесса y_t и от априорных статистических данных.

Приведенное уравнение замечательно тем, что оно является нелинейным относительно w_t. По-видимому, впервые в теории вероятностей встречается уравнение, нелинейное относительно вероятностей.

Позже была введена специфическая, ненормированная (т. е. не вероятностная) основная апостериорная мера $V_s^t(x_s, \Gamma)$, которая обладает марковскими свойствами (удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова). Ее плотность

$$v(x_s, s;\ x_t, t) = V_s^t(x_s, dx_t)/dx_t$$

удовлетворяет уже линейному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv$$

с тем же самым оператором. Различные апостериорные вероятности могут быть выражены через эту меру.

В тривиальном и практически мало интересном частном случае, когда наблюдаемый процесс y_t является марковским сам по себе, указанное вначале уравнение оказывается линейным и надобность в введении вспомогательной меры V отпадает. Именно к этому случаю относятся результаты, приведенные без доказательства в заметке Лян Чжи-Шуена [1]. В ней, помимо предположения о существовании условных распределений, вводятся топологические ограничения фазового пространства (предположена его сепарабельность). По нашему мнению, введение топологии в фазовом пространстве не является необходимым для теории.

Лицом марковского процесса является его инфинитезимальный оператор. Априорно марковский процесс характеризуется априорным оператором. Основная апостериорная мера описывается основным апостериорным оператором (B в приведенном уравнении). Через него можно выразить другие апостериорные операторы. Вид основного апостериорного оператора зависит от априорного, а также от способа наблюдения. Получение вида апостериорного оператора для различных конкретных случаев является центральной задачей теории условных марковских процессов. В настоящей книге эта задача решается для нескольких важных частных случаев, соответствующих диффузионным процессам. Для дискретного времени вместо дифференциальных уравнений выступают рекуррентные преобразования.

Нелинейная фильтрующая система в главной своей части реализует указанные уравнения или преобразования. Вместо апостериорных вероятностей можно рассматривать также заменяющие их параметры. Если найден апостериорный оператор, то алгоритм рекуррентных преобразований определяется без особого труда. Результирующее сложное преобразование является следствием более простых поэтапных преобразований. Таким образом, синтез фильтрующей системы не требует трудоемких вычислений.

Задачи, связанные с решением или моделированием уравнений (рекуррентных преобразований) для апостериорных вероятностей или параметров, их заменяющих, мы называем *первичными*, а соответствующие уравнения — первичными апостериорными уравнениями.

Теория условных процессов Маркова позволяет решать также *вторичные* задачи, в которых рассматриваются функции от апостериорных вероятностей или заменяющих их параметров. Для этих функций можно записать дифференциальные уравнения (вторичные уравнения), оператор которых можно назвать *вторичным* апостериорным оператором. Его получение также является важной задачей теории.

Функцией, зависящей от достаточных координат, т. е., помимо прочих переменных, от апостериорных вероятностей или заменяющих параметров, в теории оптимального управления является условный риск. Оптимальное управление сопровождается минимизацией этого риска. Отыскание оптимальных решений и оптимальных условных рисков происходит одновременно. Более того, нахождение условных рисков помогает отыскать оптимальное решение, и отсюда видна большая роль, которую играют условные риски в теории оптимального управления.

Зная вторичный апостериорный оператор, мы легко можем записать уравнение для урезанных условных рисков — основное уравнение теории. Установление этого уравнения и его решение — в этом заключается стандартный путь, рекомендуемый теорией оптимального управления.

При обобщении теории на случай непрерывного времени удобно использовать понятие оптимальных условных рисков (определенных при помощи условных минимизаций и усреднений функции штрафов) как более первичное, чем даже понятие оптимального решения. Переходу к непрерывному времени помогает введение ступенчатого индекса. Случай непрерывного времени и ступенчатого индекса (когда время меняется непрерывно, а информация приходит в дискретные моменты) занимает промежуточное положение между случаем дискретного времени и случаем непрерывного времени и непрерывного индекса (непрерывного притока информации). В последнем (вдвойне непрерывном) случае трудно продуктивным образом определить оптимальные решения, но не представляет труда дать определение «оптимальных» условных рисков. После того как это определение дано, берется ступенчатая аппроксимация непрерывного индекса и для нее строятся оптимальные решения. Риски этих решений могут быть сделаны сколь угодно близкими к «оптимальным» рискам, соответствующим непрерывному индексу. В этом смысле данные решения являются ε-оптимальными для непрерывного индекса. Описанным путем обходятся чисто логические трудности обобщения теории на случай непрерывного времени, и строится работоспособная теория.

Излагаемая в книге формулировка теории оптимального управления возникла путем обобщения в процессе работы автора над различными конкретными задачами. Возможность распространения применяемых методов на новые задачи, привела к абстрактной форме теории. Адекватным языком для такой степени общности является язык измеримых функций и теории меры. Поэтому мы выбрали здесь изложение на этом языке, хотя с педагогической точки зрения этот способ изложения можно считать наименее целесообразным. Мы предполагаем, что читатель будет осваивать основной материал, параллельно знакомясь с конкретными задачами и примерами, чтобы понять, что скрывается за абстрактными формулировками. При этом от читателя требуется встречная личная активность. Полезно помнить, что при чтении книги листать ее страницы справа налево требуется так же часто, как и в обратном направлении.

Поскольку теоретическая значимость различных мест книги обратно пропорциональна их доступности, мы не делаем попыток выделять часть материала в петит, предоставляя различным категориям читателей выбрать свой собственный способ чтения. Читатель, владеющий языком теории меры и имеющий опыт работы в близких областях, может сразу начинать с абстрактных формулировок. Менее подготовленный читатель должен больше внимания уделить примерам, которых немало в книге. Лица, интересующиеся приложениями, могут переносить методы решения с излагаемых задач на свои собственные, минуя абстрактные формулировки и тем более доказательства. Широкий круг читателей, специалистов по приложениям, может, кроме того, использовать книгу для повышения уровня своей математической подготовки. Наконец, лицам, занимающимся самостоятельной работой, книга может принести бо́льшую пользу в качестве справочника, содержащего те или иные формулы и результаты, отсутствующие в книжной литературе.

Читатель без труда заметит, что указание источников и список литературы в книге весьма неполны. В оправдание автор может сказать, что он не проводил сколько-нибудь подробного библиографического анализа и считает исторический обзор данных вопросов преждевременным.

В заключение автор хотел бы поблагодарить Ю. Л. Климонтовича, М. С. Пинскера, В. И. Тихонова, С. В. Фомина, Э. М. Хазен и Р. З. Хасьминского, которые познакомились с книгой в рукописи и сделали ряд полезных замечаний.

Часть I

НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Глава 1

СХОДИМОСТЬ НЕМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА К МАРКОВСКОМУ

§ 1.1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Аппарат марковских процессов является весьма эффективным главным образом по той причине, что он связан с аппаратом дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют вероятности марковских процессов в случае непрерывного времени. В дискретном времени этим уравнениям соответствуют определенные рекуррентные соотношения. Описанное обстоятельство способствует получению разнообразных результатов.

Между тем применение результатов теории к физическим и техническим задачам часто сопровождается затруднениями. В указанных приложениях функции времени обычно обладают рядом «хороших» свойств: гладкостью и даже аналитичностью, что, как известно, несовместимо с марковскими свойствами процесса. Поэтому применение теории точных марковских процессов необходимо связано с некоторыми приближениями.

Возникает практически важная и принципиально интересная проблема исследования близости марковского и немарковского процессов, изучения условий их взаимозаменяемости и связанных с этим погрешностей. Эта проблема в настоящее время почти не изучена, если не говорить о некоторых тривиальных частных случаях. Предварительные общие исследования по данному вопросу содержатся в § 4 монографии Стратоновича [8].

Утверждение факта сходимости немарковского процесса к марковскому до известной степени напоминает центральную предельную теорему, касающуюся сходимости негауссового закона распределения к гауссовому. Из этой аналогии видна обширность данной проблемы. Конкретизация понятия «близости» марковского и немарковского процесса, исследование условий сходимости и быстроты сходимости может составить содержание отдельной главы теории вероятностей.

Здесь мы рассмотрим лишь один частный результат по указанной проблеме. Именно при некоторых предположениях мы докажем самый факт сходимости распределения немарковского процесса к распределению диффузионного марковского процесса. Вообще говоря, этот результат содержится в результатах указанной монографии, изложенных с более общих позиций, но здесь он будет разобран и доказан более подробно.

Пусть немарковский процесс $\{x(t)\} = \{x(t), t, \omega, \mu\}$ определяется, как это часто бывает в приложениях, дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(x(t), t, \omega, \mu). \tag{1.1}$$

Здесь ω — точка основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$. Для простоты будем считать процесс $\{x(t)\}$ одномерным, т. е. полагать, что его фазовое пространство есть интервал I. Без дальнейшего ограничения общности можно считать $I = (-a, a)$. Кроме этого интервала мы будем рассматривать также круг $R = \{|x| \leqslant a\}$ в комплексной плоскости. Время t пусть является точкой действительной оси, а μ — положительное число. Сформулируем ряд предположений относительно функции, стоящей в правой части:

1\. A_1. При фиксированных t, μ, $x (\in R)$ она является $\mathcal{M}$-измеримой ω-функцией, причем моменты

$$\mathbf{M}G(x_1, t_1, \omega) \ldots G(x_r, t_r, \omega) \tag{1.2}$$

всевозможных порядков $r = 1, 2, \ldots$ конечны.

1\. A_2. При фиксированных ω, t, μ она с вероятностью 1 представляет собой регулярную аналитическую функцию от x в круге R. Аналогично ее моменты (1.2) регулярны в $R \times \ldots \times R$.

1\. A_3. При фиксированных x, ω, μ она с вероятностью 1 является непрерывной функцией от t.

1\. A_4. При фиксированных x, μ она является стационарной случайной функцией (в узком смысле).

Если задать начальное условие

$$x(s) = y \in I, \tag{1.3}$$

то уравнение (1.1) почти всюду будет определять процесс

$$x(t) = f(s, y; t, \omega, \mu) \equiv f_s^t(y) \tag{1.4}$$

на тех временных интервалах $s<t<\Theta(s, y, \omega, \mu)\equiv\Theta(\omega)$, т. е. на тех множествах

$$\Omega'(s, y, t, \mu)=\{\omega : t<\Theta(s, y, \omega, \mu)\},$$

где этот процесс не выходит из I. Здесь $\Theta(s, y, \omega, \mu)$ — первое время выхода из I траектории, начинающейся в y. Это следует из известных положений теории дифференциальных уравнений, если учесть 1.A_3. Очевидно, что функция (1.4) будет $\mathcal{M}$-измерима при фиксированных прочих аргументах. $\mathcal{M}$-измеримость сохранится, если в начальном условии (1.3) значение $y=y(\omega)$ считать $\mathcal{M}$-измеримой ω-функцией. Итак, описанным способом сконструирован вероятностный процесс $x(t, \omega, \mu)$.

Дифференциальное уравнение (1.1) можно заменить на интегральное

$$x(t)=y+\int_s^t G(x(\tau), \tau, \omega, \mu)\,d\tau.$$

Последнее можно решать методом последовательных приближений по формуле

$$x^{(j+1)}(t)=y+\int_s^t G(x^{(j)}(\tau), \tau, \omega, \mu)\,d\tau,$$

$$j=0, 1, \ldots; \quad x^{(0)}(t)=y. \tag{1.5}$$

Как следует из теории дифференциальных уравнений (см., например, Смирнов [1], стр. 152—156), эти приближения заведомо будут сходиться для точек ω, соответствующих непрерывным по t функциям G (т. е. почти всюду), на отрезке $[s, \theta'(\omega)]$. Здесь

$$\theta'(\omega)=M_G^{-1}\min(a-y, a+y); \tag{1.6}$$

$$M_G=\sup\{|G|; x\in I, s\leqslant t\leqslant\theta(\omega)\}.$$

На указанном интервале ни одно приближение (1.5) не выходит из $[-a, a]$.

Для разностей $x^j=x^{(j)}-x^{(j-1)}$ согласно (1.5) имеем рекурентные соотношения

$$x^{j+1}(t)=\int_s^t[G(y+x^1+\ldots+x^{j-1}+x^j, \tau, \omega, \mu)-$$

$$-G(y+x^1+\ldots+x^{j-1}, \tau, \omega, \mu)]\,d\tau.$$

Пользуясь аналитичностью функции G по x, разлагаем подынтегральные функции в ряд Тейлора

$$x^{j+1}(t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\limits_s^t\frac{\partial^l G}{\partial y^l}(y,\tau,\omega,\mu)\,[(x^1+\ldots+x^{j-1}+x^j)^l-$$
$$-(x^1+\ldots+x^{j-1})^l]\,d\tau,$$

который сходится на $[s,\ \theta'(\omega)]$.

Пользуясь этими соотношениями, можно явно выразить все x^j через функцию G и ее производные. Так, младшие формулы имеют вид

$$x^1(t)=\int\limits_s^t G(y,\tau,\omega,\mu)\,d\tau;$$

$$x^2(t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\limits_s^t\frac{\partial^l G}{\partial y^l}(y,\tau,\omega,\mu)\left[\int\limits_s^{\tau}G(y,\tau_1,\omega,\mu)\,d\tau_1\right]^l d\tau,\qquad(1.7)$$

. . . .

Точное значение $x(t)$ представляется сходящимся п. н. (почти наверное) рядом

$$x(t)=f_s^t(y)=y+\sum_{j=1}^{\infty}x^j(t).\qquad(1.8)$$

Легко понять, что подстановка выражений типа (1.7) в (1.8) приводит к сумме полилинейных выражений от функции G и от ее производных вида

$$x(t)=\sum_{q\rho_1\ldots\rho_q}\frac{\partial^{\rho_1+\ldots+\rho_q}}{\partial y_1^{\rho_1}\ldots\partial y_q^{\rho_q}}\int\limits_s^t\ldots\int\limits_s^t G(y_1,\tau_1,\omega,\mu)\ldots G(y_q,\tau_q,\omega,\mu)\times$$
$$\times\,Q_{q\rho_1\ldots\rho_q}(\tau_1,\ldots,\tau_q)\,d\tau_1\ldots d\tau_q\qquad(1.9)$$

(после дифференцирования нужно положить $y_1=\ldots=y_q=y$), где $Q_{q\rho_1\ldots\rho_q}$ $(\tau_1,\ldots,\tau_q)$ — некоторые ограниченные положительные функции от $\tau_1,\ldots,\tau_q$, не зависящие от y, ω или μ. Это будет принято во внимание в дальнейшем.

«Близость» процесса $x(t)$ к марковскому будет обеспечиваться малым параметром μ при специальном выборе зависимости G от μ. Имея в виду рассмотреть сходимость процесса к диффузионному, положим

$$G(x,t,\omega,\mu)=\mu^2 m(x)+\mu g(x,t,\omega),\qquad(1.10)$$

где

$$\mu^2 m(x)=\mathbf{M}G(x,t,\omega,\mu),$$

т. е.

$$\mathbf{M}\, g(x, t, \omega) = 0. \tag{1.11}$$

Функции m, g уже не зависят от μ.

Вводя новый масштаб времени, положим $\tilde{t}=\mu^2 t$. Если обозначить

$$x\left(\frac{\tilde{t}}{\mu^2}\right) = \tilde{x}(\tilde{t}); \quad g(x, t, \omega) = \tilde{g}(x, \tilde{t}, \omega),$$

то будем иметь

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = m(\tilde{x}) + \frac{1}{\mu}\tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}, \omega), \ \tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{f}_{\tilde{s}}^{\tilde{t}}(y). \tag{1.12}$$

Подстановка (1.10) в (1.9) увеличит число членов. Выписывая для примера типичный член, в который r раз входит g и $q—r$ раз входит $m(y)$, будем иметь

$$\tilde{f}_{\tilde{s}}^{\tilde{t}}(y) = \sum_{qr\rho_1\ldots\rho_q} \frac{\partial^{\rho_1+\cdots+\rho_q}}{\partial y_1^{\rho_1}\ldots\partial y_q^{\rho_q}} \int\limits_{\tilde{s}}^{\tilde{t}}\cdots\int\limits_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} \frac{1}{\mu}\tilde{g}(y_{i_1}, \sigma_{i_1})\ldots$$

$$\ldots\frac{1}{\mu}\tilde{g}(y_{i_r}, \sigma_{i_r})\, m(y_{i_{r+1}})\ldots m(y_{i_q})\, Q_{q\rho_1\ldots\rho_q}(\sigma_1, \ldots, \sigma_q)\, d\sigma_1\ldots d\sigma_q. \tag{1.13}$$

Мы использовали соотношения

$$Q_{q\rho_1\ldots\rho_q}\left(\frac{\sigma_1}{\mu^2}, \ldots, \frac{\sigma_q}{\mu^2}\right) = Q_{q\rho_1\ldots\rho_q}(\sigma_1, \ldots, \sigma_q).$$

В том, что они справедливы, и в том, что μ входит в (1.13) лишь в комбинации g/μ, можно убедиться, составляя выражения (1.8), (1.9) непосредственно во времени t при помощи уравнения (1.12). Оценим длину гарантированного интервала сходимости, применяя (1.6). Согласно (1.10) имеем $M_G=\mu M_g + O(\mu^2)$, $M_g=\sup|g|$. Поэтому длина интервала сходимости на оси $\tilde{t}$, равная $[M_g+O(\mu)]^{-1}\mu\min(a—y,\ a+y)$, сокращается при $\mu\to 0$, в то время как длина на оси t, равная $[\mu M_g+O(\mu^2)]^{-1}\min(a—y,\ a+y)$, неограниченно увеличивается. В действительности длина фактического интервала сходимости еще больше. Функция $g(x, t, \omega)$ как стационарная функция времени является знакопеременной величиной, поэтому время пребывания функции $x(t)$ в I и время пребывания всех ее приближений есть $O(\mu^{-2})$ (или $O(1)$ в масштабах $\tilde{t}$). Не проводя строго обоснования этого факта, мы сформулируем условие сходимости рассматриваемого в дальнейшем ряда как дополнительное предположение.

§ 1.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Зафиксировав начальное условие x_0, рассмотрим процесс $\widetilde{x}(\widetilde{t})=\widetilde{f}_0^{\widetilde{t}}(x_0)$. Основное утверждение будет заключаться в том, что этот процесс при $\mu\to 0$ стремится «по распределению» к диффузионному марковскому процессу.

Теорема 1.1. *Пусть $g(x, t, \omega)$ есть описанная выше функция. Предположим, что 1) ее семиинварианты*

$$\mathbf{K}[g(x_1, t_1, \omega), \ldots, g(x_r, t_r, \omega)] \equiv k_r(x_1, t_1, \ldots, x_r, t_r) \equiv$$
$$\equiv k_r'(t_2-t_1, \ldots, t_r-t_1) \tag{1.14}$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{L\to\infty} L^{-\frac{r}{2}} \int_0^L (L-\tau)\,d\tau \int_0^\tau \ldots \int_0^\tau \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_r}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_r^{\nu_r}} k_r'(\tau, -\pi_1, \ldots, -\pi_{r-2}) \right| \cdot$$
$$d\pi_1 \ldots d\pi_{r-2} \equiv N_r < \infty; \tag{1.15}$$

$$\lim_{L\to\infty} L^{-\frac{r}{2}} \int_0^{2L} \tau d\tau \int_0^L \ldots \int_0^L \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_r}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_r^{\nu_r}} k_r'(-\zeta_1, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, -\zeta_{u-1}, \tau, \tau+\pi_1, \ldots, \tau+\pi_{r-u-1}) \right|$$
$$d\zeta_1 \ldots d\zeta_{u-1} d\pi_1 \ldots d\pi_{r-u-1} = 0 \tag{1.16}$$

при всех $r\geqslant 2$; $u\geqslant 1$, $r-u\geqslant 1$; $\nu_1\geqslant 0, \ldots, \nu_r\geqslant 0$,

2) распределение случайных величин (1.23) однозначно определяется своими моментами и 3) что ряд (1.29) сходится. Тогда

1.1.А. *Любое конечномерное распределение процесса $\widetilde{x}(\widetilde{t})$, определенного уравнением (1.12), при $\mu\to 0$ вполне сходится к соответствующему распределению некоторого марковского процесса $x_\text{м}(t)$;*

1.1.Б. *Последний является диффузионным:* $\lim \mathbf{M}\dfrac{\Delta x_\text{м}^q}{\Delta}=0$, *$q\geqslant 3$ и характеризуется следующими параметрами сноса и локальной дисперсии*

$$\lim_{\Delta\to 0} \mathbf{M}\frac{\Delta x_\text{м}}{\Delta} = m(x_\text{м}) + \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-\infty}^0 k_2'(x', x_\text{м}, \tau)\,d\tau \qquad (x'=x_\text{м});$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \mathbf{M}\frac{\Delta x_\text{м}^2}{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} k_2'(x_\text{м}, x_\text{м}, \tau)\,d\tau, \tag{1.17}$$

$$\text{если } N_r = 0 \text{ при } r \geqslant 3. \tag{1.18}$$

При доказательстве теоремы будет использована

Лемма 1.1. *Пусть заданы две группы случайных величин* $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\omega, \mu)$, $\alpha = 1, \ldots, p$ *и* $\xi_\beta = \xi_\beta(\omega, \mu)$, $\beta = p+1, \ldots, p+s$ *таких, что существуют и конечны как все моменты*

$$\mathbf{M}\,\xi_{\gamma_1} \ldots \xi_{\gamma_v} \ (\gamma_1, \ldots, \gamma_v = 1, \ldots, p+s;\ v = 1, 2, \ldots),$$

так и соответствующие им пределы

$$\lim_{\mu \to 0} \mathbf{M}\,\xi_{\gamma_1} \ldots \xi_{\gamma_v}. \tag{1.19}$$

Тогда, если при любых $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$ *парные корреляции исчезают:*

$$\lim_{\mu \to 0} \mathbf{K}\,[\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k}, \xi_{\beta_1} \ldots \xi_{\beta_l}] = 0 \tag{1.20}$$

$$(\alpha_i = 1, \ldots, p;\ \beta_i = p+1, \ldots, p+s),$$

то указанные группы становятся независимыми, то есть функция распределения стремится к произведению функций распределения

$$\mathbf{P}\,[\xi_1 < z_1, \ldots, \xi_{p+s} < z_{p+s}] \xrightarrow{\text{вп.}} F_1(z_1, \ldots, z_p)\, F_2(z_{p+1}, \ldots, z_{p+s}).$$

Сходимость «вполне» (вп.) определена в книге Лоэва [1], стр. 191.

Доказательство леммы 1.1. Примем во внимание известное решение «проблемы сходимости моментов» (Лоэв [1], стр. 198), которое гарантирует существование полного предела функции распределения $\mathbf{P}\,[\xi_1 < z_1, \ldots, \xi_{p+s} < z_{p+s}]$. Этот предел однозначно (с точностью до постоянного слагаемого) определяется соответствующей характеристической функцией и предельными моментами (1.19). Поэтому

$$\mathbf{P}\,[\xi_1 < z_1, \ldots, \xi_{p+s} < z_{p+s}] \xrightarrow{\text{вп.}} F(z_1, \ldots, z_{p+s}),$$

где $F(z_1, \ldots, z_{p+s})$ обычным образом выражается через характеристическую функцию $\Theta(u_1, \ldots, u_{p+s})$. Для доказательства леммы остается показать, что эта характеристическая функция, определяемая пределами (1.19), распадается на произведение:

$$\Theta(u_1, \ldots, u_{p+s}) = \Theta_1(u_1, \ldots, u_p)\, \Theta_2(u_{p+1}, \ldots, u_{p+s}). \tag{1.21}$$

Из (1.20) вытекает, что стремятся к нулю все смешанные семиинварианты

$$\lim_{\mu \to 0} k_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \beta_1 \ldots \beta_l} = 0,\ k \geqslant 1,\ l \geqslant 1$$

$$(k_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \beta_1 \ldots \beta_l} = \mathbf{K}\,[\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_k}, \xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_l}]). \tag{1.22}$$

В самом деле, предположим противное и возьмем младший не стремящийся к нулю семиинвариант (с наименьшей суммой $k+l$), скажем $k_{\alpha_1\ldots\alpha_\varkappa\beta_1\ldots\beta_\lambda}$. Момент $\mathbf{M}\,\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_\varkappa}\xi_{\beta_1}\ldots\xi_{\beta_\lambda}$ представляется через семиинварианты по известным формулам (Стратонович [8]). Вычитая из этого выражения произведение соответствующих аналогичных выражений для $\mathbf{M}\,\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_\varkappa}$ и $\mathbf{M}\,\xi_{\beta_1}\ldots\xi_{\beta_\lambda}$, найдем парную корреляцию $\mathbf{K}\,[\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_\varkappa},\ \xi_{\beta_1}\ldots\xi_{\beta_\lambda}]$. Она не стремится к нулю при $\mu\to 0$, если $k_{\alpha_1\ldots\alpha_\varkappa\beta_1\ldots\beta_\lambda}$ не стремится к нулю, а более младшие семиинварианты стремятся. Это противоречит формуле (1.20) и доказывает, что данный семиинвариант также стремится к нулю. Выражая $\ln\Theta(u_1,\ldots,u_{p+s})$ через семиинварианты по известным формулам, убеждаемся, что из (1.22) следует (1.21). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство утверждения 1.1.A проведем в два этапа. На первом этапе докажем, что к случайным величинам

$$\xi_1=\widetilde{f}_0^{t_1}(x_0),\ \ldots,\ \xi_p=\widetilde{f}_0^{t_p}(x_0),\ \ \xi_{p+1}=\widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(y), \tag{1.23}$$

$$\left[\text{где } t_1<\ldots<t_p<t_{p+1};\ \ \omega\in\Omega'\left(0,\ x_0,\ \frac{t_p}{\mu^2},\ \mu\right)\cap\right.$$

$$\left.\cap\,\Omega'\left(\frac{t_p}{\mu^2},\ y,\ \frac{t_{p+1}}{\mu^2},\ \mu\right)\right]$$

можно применить лемму 1.1 (при $s=1$) и доказать, следовательно, что эти величины сходятся к независимым. На втором этапе будет доказано, что из этой независимости вытекает 1.1.A.

1) Используя (1.13), получаем разложение

$$\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_k}\xi_{p+1}^l=\sum_{mn\lambda_1\ldots\lambda_{m+n}}\frac{\partial^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{m+n}}}{\partial y_1^{\lambda_1}\ldots\partial y_{m+n}^{\lambda_{m+n}}}\int\limits_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\leqslant t_p}\!\!\cdots\!\int\ \int\limits_{[t_p,\,t_{p+1}]}\!\!\cdots\!\int\mu^{-m-n}\times$$

$$\times\,\widetilde{g}(y_1,\sigma_1)\ldots\widetilde{g}(y_{m+n},\sigma_{m+n})\,\mathbf{Q}'_{mn\lambda_1\ldots\lambda_{mn}}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{m+n})\,d\sigma_1\ldots d\sigma_{m+n} \tag{1.24}$$

(после дифференцирования полагается $y_1=\ldots=y_m=x_0$; $y_{m+1}=\ldots=y_{m+n}=y$). Здесь $\mathbf{Q}'_{mn\lambda_1\ldots\lambda_{m+n}}$ — новые функции, выражающиеся интегрально через $Q_{q\rho_1\ldots\rho_q}$ и производные от $m(x)$. Поэтому они зависят от x_0 и y, но не зависят от ω и μ (а также от $y_1,\ldots,y_{m+n}$). Усредним равенство (1.24) и выразим моменты $\mathbf{M}\,\widetilde{g}(y_1,\sigma_1)\ldots\widetilde{g}(y_{m+n},\sigma_{m+n})$ через семиинварианты (1.14):

$$\mathbf{M}\,\widetilde{g}(y_1, \sigma_1) \ldots \widetilde{g}(y_{m+n}, \sigma_{m+n}) = \sum_{\sum\limits_i r_i = m+n}^{*} \prod \widetilde{k}_{r_i} (r_i \text{ пар из } y_1, \sigma_1, \ldots$$

$$\ldots, y_{m+n}, \sigma_{m+n}), \tag{1.25}$$

где Σ^* — известная (Кузнецов, Стратонович, Тихонов [1], Леонов, Ширяев [1]) симметричная конечная сумма по различным разбиениям и перестановкам аргументов. Если теперь от момента $\mathbf{M}\,\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k} \xi^l_{p+1}$ перейти к семиинварианту

$$\mathbf{K}\,[\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k}, \xi^l_{p+1}] = \mathbf{M}\,\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k} \xi^l_{p+1} - \mathbf{M}\,\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k} \mathbf{M}\,\xi^l_{p+1}, \tag{1.26}$$

то число членов суммы Σ^* в выражении для $\mathbf{M}\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha k} \xi^l_{p+1}$ уменьшится: останутся лишь «неразложимые» произведения (по терминологии Леонова и Ширяева). Произведение называется «неразложимым» (в данном случае), если в нем есть хотя бы один «смешанный» сомножитель. Сомножитель $k_r(y_{i_1}, \sigma_{i_1}, \ldots, y_{i_r}, \sigma_{i_r})$ мы называем «смешанным», если в числе его аргументов есть хотя бы один аргумент из группы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ и в то же время хотя бы один аргумент из $\sigma_{m+1}, \ldots$ $\ldots, \sigma_{m+n}$. Обозначим символом Σ^{**} сумму только неразложимых членов суммы Σ^*. Тогда будем иметь

$$\mathbf{K}\,[\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k}, \xi^l_{p+1}] = \sum_{mn\lambda_1 \ldots \lambda_{m+n}} \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{m+n}}}{\partial y_1^{\lambda_1} \ldots \partial y_{m+n}^{\lambda_{m+n}}} \mu^{-m-n} \times \tag{1.27}$$

$$\times \int \ldots \int_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m \leqslant t_p} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \ldots \int \sum_{\Sigma r_i = m+n}^{**} \prod_i \widetilde{k}_{r_i} (r_i \text{ пар из } y_1, \sigma_1, \ldots, y_{m+n}, \sigma_{m+n}) \times$$

$$\times\, \mathbf{Q}'_{mn\lambda_1 \ldots \lambda_{m+n}} (\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+n})\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{m+n}.$$

Мажорирующий ряд

$$\sum_{mn\lambda_1 \ldots \lambda_{m+n}} \overline{\mathbf{Q}}'_{mn\lambda_1 \ldots \lambda_{m+n}} \sum^{**} \int_0^{t_p} \ldots \int \int_{t_p}^{t_{p+1}} \ldots \int \mu^{-m-n} \times$$

$$\times \left| \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{m+n}}}{\partial y_1^{\lambda_1} \ldots \partial y_{m+n}^{\lambda_{m+n}}} \prod_i \widetilde{k}_{r_i} \right| d\sigma_1 \ldots d\sigma_{m+n}, \tag{1.28}$$

очевидно, превосходит $|\,\mathbf{K}\,[\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k}, \xi^l_{p+1}]\,|$. Здесь

$$\overline{\mathbf{Q}}'_{mn\lambda_1 \ldots \lambda_{m+n}} = \sup \{\mathbf{Q}'_{mn\lambda_1 \ldots \lambda_{m+n}} (\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+n}) : \sigma_1, \ldots, \sigma_m \in [0, t_p];$$

$$\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+n} \in [t_p, t_{p+1}]\} < \infty.$$

Будем предполагать сходимость ряда

$$\sum_{mn\lambda_1\ldots\lambda_{m+n}} \overline{Q}'_{mn\lambda_1\ldots\lambda_{m+n}} \sum^{**} \sup_{\mu_1\leqslant\mu} \int_0^{t_p}\ldots\int$$

$$\int_{t_p}^{t_{p+1}}\ldots\int \mu_1^{-m-n} \left| \frac{\partial^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{m+n}}}{\partial y_1^{\lambda_1}\ldots\partial y_{m+n}^{\lambda_{m+n}}} \prod_i \widetilde{k}_{r_i} \right| d\sigma_1\ldots d\sigma_{m+n} < \infty. \quad (1.29)$$

При этом суммы (1.27), (1.28) будут стремиться к нулю при $\mu\to 0$, если стремится к нулю каждый член ряда. В самом деле, легко показать, что сумма сходящегося ряда стремится к нулю при $\mu\to 0$, если все члены этого ряда положительны, убывают при $\mu\to 0$ и стремятся к нулю.

Докажем, что каждый член ряда (1.28) (а следовательно, и (1.27)), стремится к нулю при $\mu\to 0$. Рассмотрим типичный такой член

$\overline{Q}'_{mn\lambda_1\ldots\lambda_{m+n}} S$, где

$$S = \int_0^{t_p}\ldots\int \int_{t_p}^{t_{p+1}}\ldots\int \left| \frac{\partial^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{m+n}}}{\partial y_1^{\lambda_1}\ldots\partial y_{m+n}^{\lambda_{m+n}}} \prod_i \widetilde{k}_{r_i} \right| \mu^{-m-n}\, d\sigma_1\ldots d\sigma_{m+n}.$$

Это выражение распадается на произведение интегралов

$$S = \prod_i S_i,$$

$$S_i = \int\ldots\int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_{r_i}}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_{r_i}^{\nu_{r_i}}} \widetilde{k}_{r_i}(x_1, \sigma_1', \ldots, x_{r_i}, \sigma_{r_i}') \right| \times$$

$$\times\, \mu^{-r_i}\, d\sigma_1'\ldots d\sigma_{r_i}', \quad (1.30)$$

где $x_1, \sigma_1', \ldots, x_{r_i}, \sigma_{r_i}'$ представляют собой r_i пар из $y_1, \sigma_1, \ldots$ $\ldots, y_{m+n}, \sigma_{m+n}$. После дифференцирования по x_j нужно положить $x_j = x_0$, если $x_j \in \{y_1, \ldots, y_m\}$ и $x_j = y$, если $x_j \in \{y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}\}$. Интегрирование проводится по интервалу $\sigma_j' \in [0, t_p]$, если $\sigma_j' \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, и по интервалу $[t_p, t_{p+1}]$, если $\sigma_j' \in \{\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+n}\}$. Сомножитель является несмешанным, если все его аргументы $\sigma_1', \ldots, \sigma_{r_i}'$ принадлежат одной группе $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ или $\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+n}$. Скажем, они принадлежат первой группе, тогда интегрирование в (1.29) проводится по области $[0, t_p]\times\ldots\times[0, t_p]$.

Сделав замену переменных $\tau_j = \mu^2\sigma_j$, имеем

$$S_i = \mu^{r_i} \int\limits_0^{t_p/\mu^2} \cdots \int\limits_0^{t_p/\mu^2} \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_{r_i}}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_{r_i}^{\nu_{r_i}}} k_{r_i} \right| d\tau_1 \ldots d\tau_{r_i}.$$

Разобьем область интегрирования $[0, \mu^{-2}t_p] \times \ldots \times [0, \mu^{-2}t_p]$ на $r_i(r_i-1)$ подобластей, фиксируя максимальный и второй по величине из аргументов. Тогда

$$S_i = \sum \mu^{r_i} \int\limits_0^{t_p/\mu^2} d\tau' \int\limits_0^{\tau'} d\tau'' \int\limits_0^{\tau''} \cdots \int\limits_0^{\tau''} \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_{r_i}}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_{r_i}^{\nu_{r_i}}} k_{r_i} \right| d\tau_1' \ldots d\tau_{r_i-2}',$$

где сумма содержит $r_i(r_i-1)$ членов. Используя свойство стационарности и тождество

$$\int\limits_0^t d\tau' \int\limits_0^{\tau'} \varphi(\tau' - \tau'')\, d\tau'' = \int\limits_0^t d\tau' \int\limits_0^{\tau'} \varphi(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t (t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau,$$

получаем

$$S_i = \sum \mu^{r_i} \int\limits_0^{t_p/\mu^2} \left(\frac{t_p}{\mu^2} - \tau\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^{\tau} \cdots \int\limits_0^{\tau} \left| \frac{\partial^{\nu_1'+\ldots+\nu_{r_i}'}}{\partial x_1^{\nu_1'} \ldots \partial x_{r_i}^{\nu_{r_i}'}} k_{r_i}'(\tau, -\pi_1, \ldots, -\pi_{r_i-2}) \right| d\pi_1 \ldots d\pi_{r_i-2}. \tag{1.31}$$

$$(\tau = \tau' - \tau'', \ \pi_j = \tau'' - \tau_j').$$

Согласно (1.15) это выражение стремится к конечному пределу при $\mu \to 0$.

Среди сомножителей ΠS_i, как отмечалось ранее, заведомо имеется хотя бы один «смешанный» сомножитель. Среди его аргументов имеется $u>0$ аргументов из группы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ и $r_i - u > 0$ аргументов из $\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+n}$. Для такого сомножителя после замены переменных $\tau_j = \mu^2\sigma_j$ будем иметь

$$S_i = \mu^{r_i} \int\limits_0^{\mu^{-2}t_p} \cdots \int \int\limits_{\mu^{-2}t_p}^{\mu^{-2}t_{p+1}} \cdots \int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_{r_i}}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_{r_i}^{\nu_{r_i}}} k_{r_i}(x_1, \tau_1, \ldots, x_{r_i}, \tau_{r_i}) \right| \times$$

$$\times d\tau_1 \ldots d\tau_{r_i}$$

или, если обозначить $L = \mu^{-2} \max(t_p, t_{p+1} - t_p) = \mu^{-2} L_0$ и использовать свойство стационарности,

$$S_i \leqslant \mu^{r_i} \int\limits_{-L}^{0} \cdots \int \int\limits_{0}^{L} \cdots \int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots} k_{r_i}(x_1, \tau_1, \ldots, x_{r_i}, \tau_{r_i}) \right| \times$$

$$\times \, d\tau_1 \ldots d\tau_{r_i}.$$

Пусть

$$\tau' = \max(\tau_1, \ldots, \tau_u); \ \tau'' = \min(\tau_{u+1}, \ldots, \tau_{r_i}),$$

тогда

$$S_i \leqslant \sum \mu^{r_i} \int\limits_{-L}^{0} d\tau' \int\limits_{-L}^{\tau'} \cdots \int d\tau_1' \ldots$$

$$\ldots d\tau_{u-1}' \int\limits_{0}^{L} d\tau'' \int\limits_{\tau''}^{L} \cdots \int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots} k_{r_i} \right| d\tau_1'' \ldots d\tau_{r_i-u-1}'' \leqslant$$

$$\leqslant \sum \mu^{r_i} \int\limits_{-L}^{0} d\tau' \int\limits_{\tau'-L}^{\tau'} \cdots \int d\tau_1' \ldots$$

$$\ldots d\tau_{u-1}' \int\limits_{0}^{L} d\tau'' \int\limits_{\tau''}^{\tau''+L} \cdots \int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots} k_{r_i} \right| d\tau_1'' \ldots d\tau_{r_i-u-1}'' . \quad (1.32)$$

Здесь сумма содержит $u(r_i - u)$ членов, соответствующих областям $\tau' = \tau_j$, $\tau'' = \tau_k$; $j = 1, \ldots, u$; $k = u+1, \ldots, r_i$.

Легко видеть, что для всякой интегрируемой неотрицательной функции $\varphi(\tau', \tau'')$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{-L}^{0} d\tau' \int\limits_{0}^{L} \varphi(\tau', \tau'')\, d\tau'' \leqslant \int\limits_{0}^{2L} d\tau \int\limits_{0}^{\tau} \varphi(\tau'' - \tau, \tau'')\, d\tau'', \quad (1.33)$$

поскольку справа область интегрирования шире. В нашем случае

$$\varphi(\tau', \tau'') = \int\limits_{\tau'-L}^{\tau'} \cdots \int d\tau_1' \ldots d\tau_{u-1}' \int\limits_{\tau''}^{\tau''+L} \cdots \int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots} k_{r_i}(\tau', \tau_1', \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \tau_{u-1}', \tau'', \tau_1'', \ldots, \tau_{r_i-u-1}'') \right| d\tau_1'' \ldots d\tau_{r_i-u-1}'' =$$

$$= \int\limits_{0}^{L} \cdots \int d\zeta_1 \ldots d\zeta_{u-1} \int\limits_{0}^{L} \cdots \int \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots} k_{r_i}(\tau', \tau' - \zeta_1, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \tau' - \zeta_{u-1}, \tau'', \tau'' + \pi_1, \ldots, \tau'' + \pi_{r_i-u-1}) \right| d\pi_1 \ldots d\pi_{r_i-u-1}.$$

Эта функция зависит лишь от разности $\tau''-\tau'=\tau$, поэтому интегрирование по τ'' в правой части (1.33) сводится к умножению на τ. Применяя (1.33) к (1.32), имеем

$$S_i \leqslant \sum \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{r_i}{2}} \int\limits_0^{2L} \tau d\tau \int \ldots \int\limits_0^L \left| \frac{\partial^{\nu_1+\ldots}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots} k'_{r_i}(-\zeta_1, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, -\zeta_{u-1}, \tau, \tau+\pi_1, \ldots, \tau+\pi_{r_i-u-1}) \right| d\zeta_1 \ldots$$

$$\ldots d\zeta_{u-1} d\pi_1 \ldots d\pi_{r_i-u-1}.$$

Вследствие (1.16) это выражение стремится к нулю при $L\to\infty$, $\mu\to 0$.

Итак, среди сомножителей ΠS_i есть хотя бы один, стремящийся к нулю при $\mu\to 0$, в то время как остальные стремятся по меньшей мере к ограниченным пределам. Это доказывает стремление к нулю каждого члена суммы (1.28) и, следовательно, всей суммы. Поэтому семиинвариант (1.26) стремится к нулю. Тем самым оказывается выполненным условие (1.20) леммы 1.1. Применение этой леммы доказывает, что распределение случайных величин (1.23) вполне сходится к такому распределению, в котором величина $\xi_{p+1} = \tilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(y)$ оказывается независимой от остальных.

2) До сих пор значение y в $\tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{f}_{t_p}^{\tilde{t}}(y)$, $\tilde{t} > t_p$ у нас было независимой переменной. Между тем, если мы интересуемся непрерывной траекторией $\tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{f}_0^{\tilde{t}}(x_0)$, следует распорядиться этим значением так, чтобы $y = \tilde{f}_0^{t_p}(x_0)$.

Пусть точки $\{Y_\alpha\}$ образуют Δ-разбиение интервала I и пусть $I^\Delta(\xi_p) = [Y_{\alpha(\xi_p)}, Y_{\alpha(\xi_p)+1}]$ есть тот из элементарных интервалов, который содержит точку $\xi_p = \tilde{f}_0^{t_p}(x_0)$.

Очевидно, что функция, совпадающая с $\tilde{f}_0^{\tilde{t}}(x_0)$ при $\tilde{t} \leqslant t_p$ и с $\tilde{f}_{t_p}^{\tilde{t}}(Y_{\alpha(\xi_p)})$ при $\tilde{t} > t_p$, имеет единственный разрыв в точке t_p, по величине не превосходящий Δ. В процессе предельного перехода $\Delta\to 0$ эта функция будет с вероятностью 1 стремиться к непрерывной функции $\tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{f}_0^{\tilde{t}}(x_0)$, $\tilde{t} \leqslant t_{p+1}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\Lambda, \tilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(\xi_p) < z_{p+1} \mid I^\Delta(\xi_p)\} =$$

$$\mathbf{P}\{\Lambda, \tilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(Y_{\alpha(\xi_p)}) < z_{p+1} \mid I^\Delta(\xi_p)\} + o(1) \text{ п. н.} \qquad (1.34)$$

Здесь

$$\Lambda = \{\omega : \xi_1 < z_1, \ldots, \xi_{p-1} < z_{p-1}\},$$

а $z_1, \ldots, z_{p-1}, z_{p+1}$ — действительные числа.

Рассмотрим условную вероятность

$$\mathbf{P}_{\text{усл}}(y) = \mathbf{P}\,\{\Lambda, \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(\xi_p) < z_{p+1} \mid \xi_p = y\} =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \mathbf{P}\,\{\Lambda, \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(\xi_p) < z_{p+1} \mid I^{\Delta}(y)\},$$

которая в силу (1.34) равна

$$\mathbf{P}_{\text{усл}}(y) = \lim_{\Delta \to 0} \mathbf{P}\,\{\Lambda, \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(Y_{\alpha(y)}) < z_{p+1} \mid I^{\Delta}(y)\}. \qquad (1.35)$$

Введем функцию

$$\pi(\xi_p, y) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbf{P}\,\{\Lambda, I^{\Delta}(\xi_p), \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(y) < z_{p+1}\}}{\mathbf{P}\,\{I^{\Delta}(\xi_p)\}}. \qquad (1.36)$$

Там, где знаменатель обращается в нуль, ее можно доопределить произвольно, например, положить равной нулю.

Используя 1. A_2 и условия 2) — 3) теоремы 1.1, можно доказать, что при любых Λ, z_p вероятность $\mathbf{P}\,\{\Lambda, \xi_p < z_p, \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(y) < z_{p+1}\}$ непрерывно зависит от y. Отсюда вытекает, что функция (1.36) с вероятностью 1 непрерывна по y.

Поскольку

$$\mathbf{P}\,\{\Lambda, \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(Y_{\alpha(y)}) < z_{p+1} \mid I^{\Delta}(y)\} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}\,\{I^{\Delta}(y)\}} \int\limits_{I^{\Delta}(y)} \pi(\xi_p, Y_{\alpha(y)})\, \mathbf{P}(d\,\xi_p),$$

то из (1.35), учитывая указанную непрерывность функции π по второму аргументу, получаем

$$\mathbf{P}_{\text{усл}}(y) = \pi(y, y) \quad \text{п. н.} \qquad (1.37)$$

Рассмотрим теперь предельный переход $\mu \to 0$, пользуясь леммой 1.1 (при $\xi_{p+1} = \widetilde{f}_{t_p}^{t_{p+1}}(y)$). Поскольку согласно этой лемме

$$\mathbf{P}\,\{\Lambda, \xi_p < z_p, \xi_{p+1} < z_{p+1}\} \xrightarrow{\text{вп.}} F_1(z_1, \ldots, z_p)\, F_2(z_{p+1}),$$

то

$$\pi(\xi_p, y) \equiv \mathbf{P}\,\{\Lambda, \xi_{p+1} < z_{p+1} \mid \xi_p\} \xrightarrow{\text{вп.}}$$

$$\to F_1(z_1, \ldots, z_{p-1} \mid \xi_p)\, F_2(z_{p+1})$$

п. н. при $\mu \to 0$. Здесь $F_2(z_{p+1}) \equiv F_2(z_{p+1} \mid y)$, поэтому условная вероятность (1.37) в пределе распадается на произведение

$$\mathbf{P}\,\{\Lambda, \widetilde{x}(t_{p+1}) < z_{p+1} \mid \xi_p = y\} \xrightarrow{\text{вп.}} F_1(z_1, \ldots, z_{p-1} \mid y)\, F_2(z_{p+1} \mid y)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\tilde{x}(t_{p+1}) < z_{p+1} \mid \tilde{x}(t_1) = z_1, \ \ldots, \ \tilde{x}(t_p) = z_p\} \xrightarrow{\text{вп.}}$$
$$\to F_2(z_{p+1} \mid z_p). \tag{1.38}$$

Это завершает доказательство утверждения 1.1.А теоремы. Многомерная вероятность

$$\mathbf{P}[\tilde{x}(t_1) < z_1, \ \ldots, \ \tilde{x}(t_n) < z_n] = \int\limits_{z'_1 < z_1} \ldots \int\limits_{z'_n < z_n} d\mathbf{P}[\tilde{x}(t_1) < z'_1] \times$$
$$\times \, d\mathbf{P}[\tilde{x}(t_2) < z'_2 \mid z'_1] \ldots d\mathbf{P}[\tilde{x}(t_n) < z'_n \mid z'_1, \ \ldots, \ z'_{n-1}]$$
$$(t_1 < \ldots < t_n)$$

согласно (1.38) будет вполне стремиться к

$$\int\limits_{z'_1 < z_1} \ldots \int\limits_{z'_n < z_n} d\mathbf{P}[\tilde{x}(t_1) < z'_1] \, dF_2(z'_2 \mid z'_1) \ldots dF_2(z'_n \mid z'_{n-1}).$$

Отсюда легко вывести, что функция $F_2(z \mid y)$ удовлетворяет уравнению Маркова

$$F_2(z_3 \mid z_1) = \int dF_2(z_2 \mid z_1) \, F_2(z_3 \mid z_2).$$

Для этого нужно учесть, что

$$\int d\mathbf{P}[\tilde{x}(t_2) < z_2 \mid \ldots, z_1] \, \mathbf{P}[\tilde{x}(t_3) < z_3 \mid \ \ldots \ , z_1, z_2] \xrightarrow{\text{вп.}}$$
$$\to \int dF_2(z_2 \mid z_1) \ F_2(z_3 \mid z_2),$$

когда

$$\mathbf{P}[\tilde{x}(t_2) < z_2 \mid \ldots, z_1] \xrightarrow{\text{вп.}} F_2(z_2 \mid z_1),$$
$$\mathbf{P}[\tilde{x}(t_3) < z_3 \mid \ \ldots \ , z_1, z_2] \xrightarrow{\text{вп.}} F_2(z_3 \mid z_2).$$

3) Перейдем к доказательству утверждения 1.1 Б.

Согласно утверждению 1.1 А для вычисления вероятностей перехода $\mathbf{P}[x_{\text{м}}(t_{p+1}) < z_{p+1} \mid z_1, \ \ldots, \ z_p] = F_2(z_{p+1} \mid z_p)$ можно в (1.23) полагать $p = 0$, $t_p = 0$, $y = x_0$, то есть рассматривать лишь одну случайную величину $\xi_1 = \tilde{f}_0^{t_1}(x_0)$. При вычислении ее моментов в формуле (1.24) положим $k = 0$, $m = 0$. Делая замену $\mu^{-2}\sigma_i = \tau_i$, будем иметь

$$\mathbf{M}\,\xi_1^l = \sum_{n\lambda_1 \ldots \lambda_n} \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}}{\partial y_1^{\lambda_1} \ldots \partial y_n^{\lambda_n}} \int\limits_0^{\mu^{-2} t_1} \ldots \int \mu^n \, \mathbf{M} g(y_1, \tau_1) \ldots g(y_n, \tau_n)$$
$$\mathbf{Q}'_{0n\lambda_1 \ldots \lambda_n}(\mu^2\tau_1, \ \ldots, \ \mu^2\tau_n) \, d\tau_1 \ \ldots \ d\tau_n.$$

Используя (1.25), члены этого разложения можно представить в виде произведения сомножителей (1.31). Согласно условиям (1.15)—(1.18) члены с $n \geqslant 3$ стремятся к нулю при $\mu \to 0$. Поскольку согласно (1.11) член с первым моментом отсутствует, в сумме по n остаются лишь члены с $n=0$ и $n=2$:

$$\lim_{\mu\to 0} \mathbf{M}\, \xi_1^s = \mathbf{Q}_{00}' + \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2}}{\partial y_1^{\lambda_1}\, \partial y_2^{\lambda_2}} \lim_{\mu\to 0} \int\limits_0^{\mu^{-2}t_1} \int\limits_0^{\mu^{-2}t_1} k_2(y_1, \tau_1, y_2, \tau_2) \times$$
$$\times\, \mathbf{Q}_{02\lambda_1\lambda_2}'(\mu^2\tau_1,\ \mu^2\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Для завершения доказательства нужно учесть явный вид функций $\mathbf{Q}_{00}'$, $\mathbf{Q}_{02\lambda_1\lambda_2}'$. Для этого следует обратиться к соотношениям (1.7), (1.8). Подставляя в них (1.10) и принимая во внимание, что в пределе остаются лишь члены, совсем не содержащие моментов от g, и члены, содержащие моменты второго порядка, получаем

$$\lim_{\mu\to 0} \mathbf{M}\,[\widetilde{x}(t_1) - y] = \int (z-y)\, dF_2(z \mid y) = m(y)\, t_1 +$$
$$+ t_1 \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int\limits_0^L d\tau \int\limits_0^\tau \mathbf{M}\, \frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y}\, g(y,\tau')\, d\tau' + O(t_1^2) \qquad (L = \mu^{-2} t_1). \tag{1.39}$$

Здесь через $O(t_1^2)$ обозначена сумма других членов, остающихся при $\mu\to 0$. Каждый из них зависит от t_1 по крайней мере квадратично, условие сходимости этой суммы является значительно более слабым условием, чем условие сходимости (1.29).

Аналогично находим

$$\lim_{\mu\to 0} \mathbf{M}\,[\widetilde{x}(t_1) - y]^2 = \int (z-y)^2\, dF_2(z \mid y) =$$
$$= t_1 \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int\limits_0^L \int\limits_0^L \mathbf{M}\, g(y,\tau)\, g(y,\tau')\, d\tau\, d\tau' + O(t_1^2); \tag{1.40}$$

$$\lim_{\mu\to 0} \mathbf{M}\,[\widetilde{x}(t_1) - y]^q = \int (z-y)^q\, dF_2(z \mid y) = O(t_1^2), \qquad q \geqslant 3.$$

Доказательство закончено, поскольку пределы (при $L\to\infty$) в правых частях (1.39), (1.40) существуют в силу (1.15) и соответственно равны выражениям, входящим в (1.17).

§ 1.3. ПРИМЕРЫ

1. Пусть уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu x^3(t)\,\xi^3(t) + \mu x(t)\,\xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный гауссов процесс с нулевым средним значением и с корреляционной функцией $\mathbf{M}\xi(t)\xi(t+\tau) = e^{-\tau^2}$. При этом, как легко видеть, предположения A_1—A_4 оказываются выполненными в любом конечном интервале I. Кроме того, выполняются условия (1.15), (1.16). Сходимость ряда (1.29) труднее проверить; избегая детального рассмотрения, будем предполагать, что она имеет место.

Применяя теорему 1.1, получаем, что процесс $x(\mu^{-2}\widetilde{t})$ при $\mu\to 0$ сходится по распределению к диффузионному марковскому процессу $x_{\text{м}}(\widetilde{t})$, который характеризуется параметрами

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}[\Delta x_{\text{м}}\,|\,x] \equiv a(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\mathbf{M}[3x^2\xi^3(0) + \xi(0)][x^3\xi^3(\tau) + x\xi(\tau)]\,d\tau;$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}[\Delta x_{\text{м}}^2\,|\,x] \equiv b(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{M}[x^3\xi^3(0) + x\xi(0)][x^3\xi^3(\tau) + x\xi(\tau)]\,d\tau;$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}[\Delta x_{\text{м}}^q\,|\,x] = 0, \quad q \geqslant 3.$$

После вычислений имеем

$$a(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}[x + 12x^3 + 3(9 + 2\sqrt{3})x^5];$$

$$b(x) = \sqrt{\pi}\,[x^2 + 6x^4 + (9 + 2\sqrt{3})x^6].$$

2. Второй пример возьмем из теории детектирования случайных сигналов (Стратонович [8], стр. 240). Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = \beta e^{\xi(t) - x}, \tag{1.41}$$

где α, β — положительные постоянные, а $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс. Будем предполагать, что он гауссов и имеет корреляционную функцию $\sigma^2 R(\tau)$ $(R(0)=1)$ и нулевое среднее значение. Тогда

$$\mathbf{M}\, e^{\xi(t)} = e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

При определенных условиях процесс $x(t)$ близок к марковскому. Чтобы сформулировать это утверждение точнее, заменим уравнение (1.41) на уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\mu^2\alpha_0 x + \beta_0 e^{-x}\left[\mu^2\gamma_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}} + \mu\left(e^{\xi(t)} - e^{\frac{\sigma^2}{2}}\right)\right], \qquad (1.42)$$

т. е.

$$g(x, t) = \beta_0 e^{-x}\left[e^{\xi} - \mathbf{M} e^{\xi}\right]$$

(α_0, β_0, γ_0 от μ не зависят). Очевидно, что последнее уравнение совпадает с (1.41) при частном значении параметра $\mu=\mu_0$, если $\mu_0^2\alpha_0=\alpha$; $\mu_0\beta_0=\beta$; $\mu_0\gamma_0=1$. Вид правой части (1.42) подобран так, чтобы удовлетворялось (1.11).

При достаточно быстром исчезновении коэффициента корреляции $R(\tau)$ при $\tau\to\infty$ условия (1.15), (1.16) будут выполнены. Применение теоремы 1.1. к данному случаю дает следующие выражения для параметров сноса и локальной дисперсии

$$a(x) = -\alpha_0 x + \beta_0\gamma_0 e^{\frac{\sigma^2}{2} - x} - \frac{1}{2} K e^{-2x};$$

$$b(x) = K e^{-2x};$$

$$K = 2\beta_0^2 e^{\sigma^2} \int\limits_0^\infty \left[e^{\sigma^2 R(\tau)} - 1\right] d\tau$$

(предполагается, что $K<\infty$).

Записав соответствующее уравнение Фоккера—Планка, можно получить, в частности, его стационарное решение — предельную плотность распределения вероятностей

$$p(x) = \mathrm{const}\exp\left[-\frac{\alpha_0}{K}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + \frac{2\gamma_0\beta_0}{K} e^{\frac{\sigma^2}{2}+x} + x\right]. \qquad (1.43)$$

Удобно с самого начала в (1.42) произвести замену переменной $y=e^x$ и потом уже применить теорему 1.1. Разумеется, это не повлияет на результаты и в частности на (1.43).

В заключение сделаем несколько замечаний относительно возможных обобщений. Во-первых, можно произвести обобщение результатов на многомерный и нестационарный случай. Первое обобщение тривиально. Для второго можно, например, рассматривать функцию $G = \mu^2 m(x, \mu^2 t) + \mu g(x, t, \mu^2 t, \omega)$, где $g(x, t, \tilde{t}, \omega)$ — стационарная функция от t при фиксированных $\tilde{t}$, x, ω. Во-вторых, при выборе более сложной зависимости G от μ можно получить предельный марковский процесс, не являющийся диффузионным. Некоторые предварительные идеи, касающиеся вычисления членов с более высокими производными в операторе марковского процесса, содержатся в монографии Стратоновича [8], § 4, п. 8. Наконец, особого исследования заслуживает вопрос о величине отклонения немарковского процесса от марковского, т. е. вопрос о быстроте сходимости.

Глава 2

НОВАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И УРАВНЕНИЙ

Стохастические интегралы и уравнения являются важным инструментом исследования диффузионных марковских процессов и будут широко нами использоваться в дальнейшем. Мы предполагаем, что читатель знаком с этими понятиями, например, в объеме монографий Дуба [1] и Дынкина [3].

Как известно, стохастические уравнения, записанные для диффузионных процессов, впервые встречаются в физических работах по броуновскому движению (Ланжевен [1], см. также Чандрасекар [1]). Строгая математическая теория этих уравнений была дана впоследствии К. Ито [1—3]. Способ определения стохастических интегралов и уравнений, который был предложен последним, является общим и удовлетворительным во многих отношениях. Однако ему не свойственно одно важное качество — симметрия во времени. Стохастический интеграл Ито, определенный для прямого времени, не совпадает с таким же интегралом, определенным для обратного времени.

В настоящей главе будет изложен другой способ определения стохастических интегралов и уравнений, который характеризуется определенной симметрией по отношению к прошлому и будущему. Этот способ до известной степени эквивалентен способу Ито, но в некоторых отношениях имеет ряд преимуществ. Существенно упрощается техника преобразований стохастических интегралов. Как известно, интегралы в смысле Ито требуют осторожного обращения. Их нельзя при замене переменных преобразовывать по обычным правилам, пригодным для гладких функций, нельзя просто интегрировать по частям и т. п. Для интегралов в новом смысле дело обстоит проще. С ними можно обращаться по обычным правилам, как если бы диффузионные процессы были гладкими функциями. С этим связаны ковариантные свойства стохастических уравнений. Преимущества симметризованного стохастического интеграла проявляются также при исследовании «функционалов вероятности» (Стратонович [5]).

Стохастические дифференциальные уравнения, записанные в новой (симметризованной) форме, можно интерпретировать как предел уравнений, записанных для немарковских (но близких к марковским) процессов. Из результатов гл. 1 следует, что при этом аналитический вид допредельных уравнений и предельных, взятых в симметризованной форме, совпадает. При технической реализации (моделировании) стохастических уравнений всегда приходится иметь дело не с точными, а допредельными (приближенно марковскими) процессами. Поэтому нужно осуществлять моделирование уравнений, например, уравнений оптимальной нелинейной фильтрации, взятых в симметризованной форме, а не в форме Ито.

Автор пришел к симметризованной форме записи стохастических выражений в результате практической работы со сглаженными (не вполне марковскими) процессами [8] и с условными процессами Маркова [2, 15]. В последних статьях стохастические уравнения понимаются в симметризованном смысле, а не в смысле Ито. Непонимание соотношений между различными определениями стохастических интегралов приводило к необоснованным обвинениям в ошибочности результатов указанных работ, а также к путанице в собственных работах некоторых авторов (Кушнер [1, 2]).

В некоторых случаях более удобным оказывается рассматривать интеграл в смысле Ито. Поэтому мы не устраняем интеграл Ито из данной монографии, а используем оба интеграла. Чтобы не возникало путаницы, интегральные и дифференциальные выражения в смысле Ито мы отмечаем звездочкой при дифференциале. Там, где указанные два вида интегралов совпадают, звездочку можно писать или не писать; мы выбираем последнюю возможность.

§ 2.1. СИММЕТРИЗОВАННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛОМ ИТО

1. Начнем с одномерного случая. Пусть на интервале $T=[a, b]$ задан действительный диффузионный процесс $\{x(t)\}$, для которого

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{M}\left\{\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\,\middle|\, x(t)=\xi\right\}=a(\xi, t);$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{M}\{h^{-1}[x(t+h)-x(t)]^2 \mid \xi\}=b(\xi, t); \qquad (2.1)$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{P}\{|x(t+h)-x(t)|>\delta \mid \xi\}=0, \qquad \delta>0.$$

Функции $a(x, t)$, $b(x, t)$ предполагаем непрерывными по обоим аргументам. В § 2.2, § 2.3 потребуется, кроме того, условие дифференцируемости функции $b(x, t)$.

Далее, пусть на T задана функция $\Phi(x, t)$, непрерывно дифференцируемая по обоим аргументам. Такая функция удовлетворяет условиям (Дынкин [3], стр. 293) существования стохастического интеграла Ито ($\Phi \in K$ в обозначениях Дынкина).

Будем рассматривать Δ-разбиение S_Δ подынтервала $[s, u] \subset T$:

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = u, \quad \max_i (t_{i+1} - t_i) = \Delta.$$

Определение 2.1. *В рассматриваемом случае стохастический интеграл Ито определяется формулой*

$$\int_s^u \Phi(x(t), t)\, d^* x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(x(t_i), t_i)[x(t_{i+1}) - x(t_i)]. \tag{2.2}$$

Здесь предел понимается в среднем (l. i. m.), если выполнено условие

$$\mathbf{M} \int_a^b |\Phi(x(t), t)|^2\, dt < \infty. \tag{2.3}$$

В противном случае предварительно, вместо Φ, следует ввести ограниченную функцию и в предельный переход (2.2) включить также стремление к бесконечности уровня ограничения. Соответствующая довольно сложная техника изложена в книге Дынкина [3]. Мы не будем ее рассматривать, принимая, если угодно, условие (2.3).

Определение 2.2. *Симметризованный стохастический интеграл определяется формулой*

$$\int_s^u \Phi(x(t), t)\, dx(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i+1})}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \times \tag{2.4}$$
$$\times [x(t_{i+1}) - x(t_i)],$$

где предел имеет тот же смысл, что и в (2.2).

Вследствие упомянутой дифференцируемости функции Φ по t в правой части (2.4) можно взять

$$\Phi\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i+1})}{2}, t_i\right) \text{ или } \Phi\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i+1})}{2}, t_{i+1}\right).$$

Теорема 2.1. *При указанных предположениях интеграл* (2.4) *существует и связан с интегралом Ито формулой*

$$\int_s^u \Phi(x(t), t)\, dx(t) =$$

$$= \int_s^u \Phi(x(t), t)\, d^* x(t) + \frac{1}{2} \int_s^u \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t), t)\, b(x(t), t)\, dt$$

(*почти наверное*).

При доказательстве этой теоремы будет использована

Лемма 2.1. *Для описанного выше диффузионного процесса почти наверное существует предел*

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{[s, u]} [x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 = \int_s^u b(x(t), t)\, dt.$$

Эта лемма является некоторой модификацией теоремы 2.3 из гл. VIII монографии Дуба [1].

Доказательство теоремы 2.1. Выбрав Δ-разбиение $S_\Delta = \{t_i^{(\Delta)}\}$, рассмотрим разность $-D^\Delta$ допредельных выражений в правых частях (2.2) и (2.4). Пользуясь дифференцируемостью функции $\Phi(x, t)$ по x, имеем

$$D^\Delta \equiv \sum_i \left[\Phi\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, t_i \right) - \Phi(x_i, t_i) \right] (x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\left(1 - \frac{\Theta_i}{2}\right) x_i + \frac{\Theta_i}{2} x_{i+1}, t_i \right) (x_{i+1} - x_i)^2,$$

$$(0 \leqslant \Theta_i \leqslant 1, \quad x_i = x(t_i)).$$

Нетрудно понять, что последнее выражение при $\Delta \to 0$ с вероятностью 1 имеет своим пределом интеграл $\frac{1}{2} \int_s^u \partial\Phi/\partial x\, b\, dt$ в соответствии с леммой 2.1. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим более крупное ε-разбиение

$$\{t_k^{(\varepsilon)}\} \subset \{t_i^{(\Delta)}\}, \qquad \varepsilon > \Delta$$

и заменим $\dfrac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}$ на функции

$$\bar{f}_\varepsilon(t) = \sup \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(\tau), \tau),\ \tau \in [t_k^{(\varepsilon)}, t_{k+1}^{(\varepsilon)}] \right\} \quad \text{при } t \in [t_k^{(\varepsilon)}, t_{k+1}^{(\varepsilon)}],$$

$$\underline{f}_\varepsilon(t) = \inf \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(\tau), \tau),\ \tau \in [t_k^{(\varepsilon)}, t_{k+1}^{(\varepsilon)}] \right\} \quad \text{при } t \in [t_k^{(\varepsilon)}, t_{k+1}^{(\varepsilon)}].$$

Обозначая

$$\overline{D}_\varepsilon^\Delta = \frac{1}{2}\sum_i \bar{f}_\varepsilon(t_i^{(\Delta)})\,[x(t_{i+1}^{(\Delta)}) - x(t_i^{(\Delta)})]^2,$$

$$\underline{D}_\varepsilon^\Delta = \frac{1}{2}\sum_i \underline{f}_\varepsilon(t_i^{(\Delta)})\,[x(t_{i+1}^{(\Delta)}) - x(t_i^{(\Delta)})]^2,$$

очевидно, имеем

$$\underline{D}_\varepsilon^\Delta < D^\Delta < \overline{D}_\varepsilon^\Delta. \tag{2.5}$$

Согласно лемме 2.1

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{[t_k^{(\varepsilon)},\, t_{k+1}^{(\varepsilon)}]}[x(t_{i+1}^{(\Delta)}) - x(t_i^{(\Delta)})]^2 = \int\limits_{t_k^{(\varepsilon)}}^{t_{k+1}^{(\varepsilon)}} b(x(t), t)\,dt,$$

поэтому

$$\overline{D}_\varepsilon^0 \equiv \lim_{\Delta\to 0}\overline{D}_\varepsilon^\Delta = \frac{1}{2}\int\limits_s^u \bar{f}_\varepsilon(x(t), t)\,b(x(t), t)\,dt,$$

$$\underline{D}_\varepsilon^0 = \frac{1}{2}\int\limits_s^u \underline{f}_\varepsilon(x(t), t)\,b(x(t), t)\,dt \tag{2.6}$$

(здесь в процессе предельного перехода ε остается фиксированным).

Но вследствие непрерывности $\frac{\partial\Phi}{dx}$ и b разность $\bar{f}_\varepsilon - \underline{f}_\varepsilon$ и $\overline{D}_\varepsilon^0 - \underline{D}_\varepsilon^0$ уменьшением ε может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому из (2.5), (2.6) вытекает существование предела с вероятностью 1:

$$\lim_{\Delta\to 0} D^\Delta = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{D}_\varepsilon^0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\underline{D}_\varepsilon^0 = \frac{1}{2}\int\limits_s^u \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x(t), t)\,b(x(t), t)\,dt.$$

Доказательство закончено.

Пример. Рассмотрим пример, приведенный Дубом [1] на стр. 398. Пусть $x(t)$ — процесс броуновского движения с локальной дисперсией $b \equiv 1$. Тогда вместо формулы

$$\int\limits_s^u [x(t) - x(s)]\,d^*x(t) = \frac{1}{2}[x(u) - x(s)]^2 - \frac{1}{2}(u - s)$$

для симметризованного интеграла будем иметь более простую формулу

$$\int_s^u [x(t) - x(s)]\, dx(t) = \frac{1}{2}[x(u) - x(s)]^2.$$

Она согласуется с правилами интегрирования, которые пригодны для обычных интегралов.

2. Перейдем к многомерному обобщению. Пусть имеется многомерный диффузионный процесс $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_m(t)\}$, описываемый вектором сноса $\{a_\alpha(x, t)\}$ и матрицей локальных дисперсий $\{b_{\alpha,\beta}(x, t), \alpha, \beta = 1, \ldots, m\}$. Кроме того, пусть заданы функции $\{\Phi_\alpha(x, t), \alpha = 1, \ldots, m\}$, непрерывно дифференцируемые по всем аргументам.

Тогда можно определить многомерный стохастический интеграл

$$\int_s^u \Phi_\alpha(x(t), t)\, dx_\alpha(t) =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_\alpha\left(\frac{x(t_{i+1}) + x(t_i)}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)[x_\alpha(t_{i+1}) - x_\alpha(t_i)]. \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по дважды встречающимся индексам.

Теорема 2.2. *Предел в правой части (2.7) существует почти наверное и связан с итовским интегралом соотношением*

$$\int_s^u \Phi_\alpha(x(t), t)\, dx_\alpha(t) =$$

$$= \int_s^u \Phi_\alpha(x(t), t)\, d^* x_\alpha(t) + \frac{1}{2}\int_s^u \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}(x(t), t)\, b_{\alpha\beta}(x(t), t)\, dt. \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству в одномерном случае и мы не будем на нем останавливаться. Ему помогает

Лемма 2.2. *Если $\psi(t)$ — непрерывная функция (не зависящая от ω), а $x(t, \omega)$ — описанный выше диффузионный процесс, то почти наверное*

$$\sum_{[s,u]} \psi(t_i)\, [x_\alpha(t_{i+1}) - x_\alpha(t_i)]\, [x_\beta(t_{i+1}) - x_\beta(t_i)] \to$$

$$\to \int_s^u \psi(t)\, b_{\alpha_\beta}(x(t), t)\, dt \qquad \text{при } \Delta \to 0.$$

3. Стохастический интеграл иногда удобно рассматривать как функцию переменного верхнего предела. Задавшись системой функций $\Phi_{\lambda\alpha}(x, t)$; $\lambda=1, \ldots, k$; $\alpha=1, \ldots, m$ указанного ранее вида и непрерывными функциями $\Psi_\lambda(x, t)$, $\lambda=1, \ldots, k$, рассмотрим выражения

$$z_\lambda(t) = \int_s^t \Psi_\lambda(x(t), t)\, dt + \int_s^t \Phi_{\lambda\alpha}(x(t), t)\, dx_\alpha(t). \tag{2.9}$$

Представляет интерес вычисление пределов типа (2.1) для указанных выражений как функций от t. При этом будем фиксировать условие $x(t)=\xi$.

Нетрудно убедиться, что с вероятностью 1 выполняются условия непрерывности типа третьего равенства (2.1). Кроме того, справедлива

Теорема 2.3. *В принятых предположениях функции* (2.9) *почти наверное характеризуются локальными параметрами*

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{M}\left\{\frac{z_\lambda(t+h)-z_\lambda(t)}{h} \,\middle|\, x(t)=\xi\right\} =$$

$$= \Psi_\lambda(\xi, t) + \Phi_{\lambda\alpha}(\xi, t)\, a_\alpha(\xi, t) + \frac{1}{2}\, \frac{\partial \Phi_{\lambda\alpha}}{\partial x_\beta}(\xi, t)\, b_{\alpha\beta}(\xi, t);$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{M}\left\{\frac{1}{h}\, [z_\lambda(t+h)-z_\lambda(t)]\, [z_\mu(t+h)-z_\mu(t)] \mid \xi\right\} =$$

$$= \Phi_{\lambda\alpha}(\xi, t)\, \Phi_{\mu\beta}(\xi, t)\, b_{\alpha\beta}(\xi, t); \tag{2.10}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{M}\left\{\frac{1}{h}\, [z_\lambda(t+h)-z_\lambda]\, [x_\beta(t+h)-x_\beta(t)] \mid \xi\right\} =$$

$$= \Phi_{\lambda\alpha}(\xi, t)\, b_{\alpha\beta}(\xi, t).$$

Эти соотношения можно доказать, воспользовавшись теорией интегралов Ито (например, Дынкин [3]), а затем формулой связи (2.8). Как видно из (2.10), формула вычисления средних приращений $\mathbf{M}\{dz_\lambda/dt \mid x\}$ не является тривиальной. Усложняющий член $\frac{1}{2}\, \frac{\partial \Phi_{\lambda\alpha}}{\partial x_\beta} b_{\alpha\beta}$ вызван наличием корреляций между процессами $x_\alpha(t)$, имеющимися в числе аргументов функции Φ, и приращениями dx_α.

Аналогичным путем можно обосновать следующие несложные, но часто используемые в дальнейшем леммы.

Лемма 2.3. *Если* $v(t) = \int_s^t \varphi_\alpha(x(\tau), \tau)\, d^* x_\alpha(\tau)$ *и* φ_α, χ —

непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_s^u \chi(x(t), t)\, d^* v(t) = \int_s^u \chi(x(t), t)\, \varphi_\alpha(x(t), t)\, d^* x_\alpha(t),$$

т. е.

$$\lim_{\Delta - 0} \sum_i \chi(x_i, t_i)\, [v(t_{i+1}) - v(t_i)] =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_i \chi(x_i, t_i)\, \varphi_\alpha(x_i, t_i)\, [x_\alpha(t_{i+1}) - x_\alpha(t_i)].$$

Аналогичная лемма справедлива и для интеграла в симметризованном смысле.

Лемма 2.4. *Если* $v(t) = \int_s^t \varphi_\alpha(x(\tau), \tau)\, dx_\alpha(\tau)$ и φ_α, χ—*функции описанного типа, то*

$$\int_s^u \chi(x(t), t)\, dv(t) = \int_s^u \chi(x(t), t)\, \varphi_\alpha(x(t), t)\, dx_{\bar{\alpha}}(t).$$

Пользуясь вместо интегральных равенств дифференциальными, легко видеть, что согласно указанной лемме 2.3. из $dv = \varphi_\alpha d^* x_\alpha$ вытекает $\chi d^* v = \chi\varphi_\alpha\, d^* x_\alpha$ и наоборот. Аналогично

$$dv = \varphi_\alpha\, dx_\alpha \Longleftrightarrow \chi\, dv = \chi\varphi_\alpha\, dx_\alpha \quad (\chi \neq 0).$$

Таким образом, дифференциальные стохастические равенства можно умножать на непрерывные функции, и они имеют, следовательно, абсолютный смысл безотносительно к тому или иному интегральному равенству.

Записывая в дальнейшем какое-либо равенство для дифференциалов, мы всегда будем его понимать в смысле справедливости некоторого соответствующего равенства для интегралов.

4. Помимо стохастического интеграла

$$\int_s^u \Phi_\alpha(x(t), t)\, d^* x_\alpha(t) =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_\alpha(x(t_i), t_i)\, [x_\alpha(t_{i+1}) - x_\alpha(t_i)] \qquad (2.11)$$

можно ввести итовский интеграл, соответствующий обратному времени:

$$\int_s^u d^* x_\alpha(t)\, \Phi_\alpha(x(t), t) =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} [x_\alpha(t_{i+1}) - x_\alpha(t_i)]\, \Phi_\alpha(x(t_{i+1}),\ t_{i+1}), \qquad (2.12)$$

а также смешанный интеграл

$$\int_s^u \Phi'_\alpha(x(t), t)\, d^* x_\alpha(t)\, \Phi''_\alpha(x(t), t) =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi'_\alpha(x(t_i), t_i)\, [x_\alpha(t_{i+1}) - x_\alpha(t_i)]\, \Phi''_\alpha(x(t_{i+1}), t_{i+1}). \qquad (2.13)$$

Формула связи интегралов (2.7), (2.12), аналогичная (2.8), как легко видеть, имеет вид

$$\int_s^u \Phi_\alpha(x(t), t)\, dx_\alpha(t) =$$

$$= \int_s^u d^* x_\alpha(t)\, \Phi_\alpha(x(t), t) - \frac{1}{2}\int_s^u \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}(x(t), t)\, b_{\alpha\beta}(x(t), t)\, dt. \qquad (2.14)$$

В то же время для интеграла (2.13) имеем

$$\int_s^u \Phi'_\alpha\, d^* x_\alpha \Phi''_\alpha = \int_s^u \Phi'_\alpha\, \Phi''_\alpha\, dx_\alpha - \frac{1}{2}\int_s^u \left[\frac{\partial \Phi'_\alpha}{\partial x_\beta}\, \Phi''_\alpha - \Phi'_\alpha \frac{\partial \Phi''_\alpha}{\partial x_\beta}\right] b_{\alpha\beta}\, dt.$$

Из (2.8), (2.14) вытекает формула связи интегралов (2.11) и (2.12)

$$\int_s^u d^* x_\alpha\, \Phi_\alpha - \int_s^u \Phi_\alpha\, d^* x_\alpha = \int_s^u \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}\, b_{\alpha\beta}\, dt. \qquad (2.15)$$

Таким образом, различные интегралы легко преобразуются один в другой. Симметризованный интеграл (2.7) занимает в точности промежуточное положение между (2.11) и (2.12). Он равен их полусумме.

§ 2.2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. В некоторых частных случаях процесс $\{x_\alpha(t)\}$, который мы в этом параграфе обозначаем $\{\widetilde{x}_\alpha\}$, и функции $\Psi_\lambda(\widetilde{x}, t)$, $\Phi_{\lambda\alpha}(\widetilde{x}, t)$ таковы, что процессы (2.9) тождественно равны нулю с вероятностью 1: $z_\lambda(t) \equiv 0$, $t \in [s, u]$, $\lambda = 1, \ldots, k$. В этом случае мы будем говорить, что выполняются стохастические уравнения

$$\int_s^t \Psi_\lambda(\widetilde{x}(\tau), \tau)\, d\tau + \int_s^t \Phi_{\lambda\alpha}(\widetilde{x}(\tau), \tau)\, d\widetilde{x}_\alpha(\tau) = 0, \; \lambda = 1, \ldots, k. \quad (2.16)$$

Представляет интерес исследовать те связи между процессами $\widetilde{x}_1(t), \ldots, \widetilde{x}_m(t)$, при которых это имеет место. Обычно оказывается, что часть из указанных компонентов, скажем $\widetilde{x}_1 \equiv x_1, \ldots, \widetilde{x}_k \equiv x_k$ $(m-k=l>0)$, однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется остальными компонентами $\widetilde{x}_{k+1} \equiv y_1, \ldots, \widetilde{x}_m \equiv y_{m-k}$. В этом случае говорят, что функции $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ являются решением стохастических уравнений (2.16).

Существующая в настоящее время теория стохастических уравнений основана на работах Ито [2, 3] и изложена в монографиях Дуба [1] и Дынкина [3]. В ней изучаются стохастические уравнения более частного вида

$$x_\lambda(t) = \int_s^t a_\lambda(x_1, \ldots, x_k, \tau)\, d\tau + \sum_{\rho=1}^{l} \sigma_{\lambda\rho}(x_1, \ldots, x_k, \tau)\, d^* y_\rho(\tau) \quad (2.17)$$

($\lambda = 1, \ldots, k$; $y_\rho(t)$ — винеровские процессы) и рассматриваются достаточные условия для существования решения $x_1(t), \ldots, x_k(t)$. По нашему мнению, эти условия (особенно условие типа $|\sigma_{\lambda\rho}(x, t) - \sigma_{\lambda\rho}(x', t)| \leqslant c\,|x - x'|$ и т. п.) могут быть существенно ослаблены. Поэтому мы не будем их перечислять и проверять их выполнение. Однако всегда, когда в тексте встретится стохастическое уравнение, будет подразумеваться, что выполнены соответствующие (может быть, более слабые) условия существования их решения.

2. Уравнение (2.17) может быть получено специализацией уравнения (2.16). Рассмотрим сначала одномерный случай, когда $k=1$. Пусть $m=2$ и имеются два процесса $\widetilde{x}_1(t) = x(t)$, $\widetilde{x}_2(t) = y(t)$. Пусть далее функции Φ_1, Φ_2, Ψ имеют следующий специальный вид:

$$\Phi_1(x, y, t) = -1; \quad \Phi_2(x, y, t) = \sigma(x, t); \quad \Psi(x, y, t) = m(x, t).$$

Тогда уравнение (2.16) принимает форму

$$x(t) = x(s) + \int_s^t m(x(t'), t')\, dt' + \int_s^t \sigma(x(t'), t')\, dy(t'). \quad (2.18)$$

Это соотношение можно назвать стохастическим преобразованием процесса $y(t)$ в $x(t)$. Запишем для данного случая равенство (2.10), учитывая при этом, что процесс $z(t)$, а следовательно, и пределы в левых частях равны нулю. Это дает

$$m(x, t) - a_1 + \sigma(x, t)\,a_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, t)\,b_{12} = 0;$$

$$b_{11} - 2\sigma(x, t)\,b_{12} + \sigma^2(x, t)\,b_{22} = 0;$$

$$-b_{11} + \sigma(x, t)\,b_{12} = 0; \quad -b_{21} + \sigma(x, t)\,b_{22} = 0.$$

Отсюда находим

$$a_1 = \sigma(x, t)\,a_2 + m(x, t) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma(x, t)}{\partial x}\,\sigma(x, t)\,b_{22}; \qquad (2.19)$$

$$b_{11} = \sigma^2(x, t)\,b_{22}; \quad b_{12} = \sigma(x, t)\,b_{22}$$

почти наверное.

Переходя к еще более специальному случаю, возьмем в качестве $y(t)$ винеровский процесс, т. е. положим $a_2=0$; $b_{22}=1$. Тогда из (2.19) будем иметь

$$a_1 = m(x, t) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma(x, t)}{\partial x}\,\sigma(x, t); \qquad (2.20)$$

$$b_{11} = \sigma^2(x, t)$$

или, разрешая относительно m, σ,

$$m(x, t) = a_1(x, t) - \frac{1}{4}\,\frac{\partial b_{11}}{\partial x}(x, t);$$

$$\sigma(x, t) = \sqrt{b_{11}(x, t)}.$$

Итак, *если функции* $a(x, t)$, $b(x, t)$ *являются сносом и локальной дисперсией диффузионного процесса* $x(t)$ *(и удовлетворяют сформулированным ранее условиям дифференцируемости), то процесс* $x(t)$ *описывается стохастическим уравнением*

$$dx(t) = \left[a(x, t) - \frac{1}{4}\,\frac{\partial b(x, t)}{\partial x}\right]dt + \sqrt{b(x, t)}\,dy(t).$$

Обратно, если процесс $x(t)$ определен стохастическим уравнением (2.18), то ему соответствуют локальные параметры (2.20).

Покажем, что этот результат правильно согласуется с результатами первой главы, что (2.20) соответствуют формулам (1.17), а (2.18)—(1.12). Возьмем уравнения (1.1), (1.12) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mu^2 m(x) + \mu\sigma(x)\,\xi(t); \tag{2.21}$$

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\widetilde{t}} = m(\widetilde{x}) + \sigma(\widetilde{x})\,\frac{1}{\mu}\,\xi\left(\frac{\widetilde{t}}{\mu^2}\right), \quad (g(x, t, \omega) = \sigma(x)\,\xi(t)),$$

где $\xi(t)$ — гауссов процесс с нулевым средним значением и конечной дисперсией, удовлетворяющий условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\,d\tau = 1 \quad (r(\tau) = \mathbf{M}\xi(t)\,\xi(t+\tau)). \tag{2.22}$$

Тогда, согласно (1.14), имеем

$$k_2'(x, x', \tau) = \sigma(x)\,\sigma(x')\,r(\tau); \qquad \frac{\partial}{\partial x'}\int_{-\infty}^{0} k_2'(x', x, \tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma(x')}{\partial x'}\,\sigma(x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_2'(x, x, \tau)\,d\tau = \sigma^2(x),$$

и формулы (1.17) дают предельные параметры

$$a(x, t) = m(x) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}\,\sigma(x),$$

$$b(x, t) = \sigma^2(x).$$

Этот результат совпадает с результатом формул (2.20), если считать, что предельный диффузионный процесс удовлетворяет уравнению

$$dx = m(x) + \sigma(x)\,dy(t). \tag{2.23}$$

Введем процесс

$$\widetilde{y}(\widetilde{t}) = \int_{t' < \widetilde{t}} \frac{1}{\mu}\,\xi\left(\frac{t'}{\mu^2}\right) dt'.$$

Учитывая (2.22), нетрудно убедиться, что он при $\mu \to 0$ стремится (по распределению) к винеровскому процессу. При помощи $\widetilde{y}(\widetilde{t})$ второе уравнение (2.21) записывается в виде

$$d\widetilde{x} = m(\widetilde{x})\,d\widetilde{t} + \sigma(\widetilde{x})\,d\,\widetilde{y}(\widetilde{t}). \tag{2.24}$$

Определенный этим процесс $\widetilde{x}(\widetilde{t})$, как утверждает теорема 1.1, стремится (по распределению) при $\mu \to 0$ к предельному диффузионному процессу. Последний, как мы уже выяснили, удовлетворяет уравнению (2.23) точно такого же вида.

Итак, *вид уравнения, связывающего друг с другом допредельные процессы* $\widetilde{x}(\widetilde{t})$, $y(\widetilde{t})$, *совпадает с видом уравнения, связывающего предельные процессы* $x(t)$, $y(t)$. Такого важного совпадения не будет, если пользоваться итовской записью стохастических уравнений.

3. Перейдем к многомерному обобщению формул (2.20).

Теорема 2.4. *Если многомерный процесс* $x(t) = \{x_1(t), ..., x_k(t)\}$ *описывается уравнением*

$$dx_\lambda(t) = m_\lambda(x, t)\,dt + \sum_{r=1}^{l} \sigma_{\lambda r}(x, t)\,dy_r(t), \tag{2.25}$$

где $m_\lambda(x, t)$ — *непрерывные и* $\sigma_{\lambda r}(x, t)$ — *непрерывно дифференцируемые функции, а* $y_1(t), ..., y_l(t)$ — *система винеровских процессов с единичной матрицей локальных дисперсий, то он имеет следующие сносы и локальные дисперсии*:

$$a_\lambda(x, t) = m_\lambda(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{\lambda r}(x, t)}{\partial x_\mu}\sigma_{\mu r}(x, t);$$

$$b_{\lambda\mu}(x, t) = \sigma_{\lambda r}(x, t)\,\sigma_{\mu r}(x, t). \tag{2.26}$$

Как и в одномерном случае, этот результат можно получить из теоремы 2.3.

Таким образом, кроме параметров a_λ, $b_{\lambda\mu}$, определяющих итовскую форму стохастического уравнения (2.17), удобно рассматривать параметры m_λ, $\sigma_{\lambda r}$, определяющие симметризованную форму (2.25).

Параметры m_λ, $\sigma_{\lambda r}$ имеют перед a_λ, $b_{\lambda\mu}$ также трансформационные преимущества. В одномерном случае при замене переменной $x \to \int \varphi(x)dx$ эти параметры преобразуются тривиальио:

$$m \to \varphi m; \quad \sigma \to \varphi\sigma$$

($\varphi(x)$ — непрерывная положительная функция). Аналогичное положение имеет место и в многомерном случае.

Теорема 2.5. *При замене переменных* $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x)$ *вектора*

$$\vec{\sigma}_1 = \{\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{k1}\}, \ldots, \vec{\sigma}_l = \{\sigma_{1l}, \ldots, \sigma_{kl}\}, \ \vec{m} = \{m_1, \ldots, m_k\}$$

преобразуются ковариантно с вектором $\vec{dx}$:

$$\widetilde{\sigma}_{\lambda r} = \frac{\partial\widetilde{x}_\lambda}{\partial x_\mu}\sigma_{\mu r}; \quad \widetilde{m}_\lambda = \frac{\partial\widetilde{x}_\lambda}{\partial x_\mu} m_\mu. \tag{2.27}$$

Следовательно, уравнение (2.25) преобразуется при этом так, как если бы процессы $x_1(t), ..., x_k(t)$ были гладкими функциями времени.

Утверждение теоремы относительно векторов $\vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_l$ непосредственно следует из тензорного характера параметров $b_{\lambda\mu}$ и определения этих векторов. Чтобы доказать ковариантность вектора

$$m_\lambda = a_\lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\lambda r}}{\partial x_\mu} \sigma_{\mu r}, \tag{2.28}$$

примем во внимание известные формулы преобразования параметров сноса:

$$\tilde{a}_\lambda = \frac{\partial \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\mu} a_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} b_{\mu\nu}. \tag{2.29}$$

Подставляя $\tilde{\sigma}_{\mu r} = \dfrac{\partial \tilde{x}_\mu}{\partial x_\nu} \sigma_{\nu r}$, находим

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\lambda r}}{\partial \tilde{x}_\mu} \tilde{\sigma}_{\mu r} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{\lambda r}}{\partial \tilde{x}_\mu} \frac{\partial \tilde{x}_\mu}{\partial x_\nu} \sigma_{\nu r} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{\lambda r}}{\partial x_\nu} \sigma_{\nu r}.$$

Вторично делая эту подстановку, получаем

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\lambda r}}{\partial x_\nu} \sigma_{\nu r} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\varkappa} \sigma_{\varkappa r} \right) \sigma_{\nu r} = \frac{\partial \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \sigma_{\varkappa r}}{\partial x_\nu} \sigma_{\nu r} + \frac{\partial^2 \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\varkappa} \sigma_{\varkappa r} \sigma_{\nu r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\lambda r}}{\partial \tilde{x}_\mu} \tilde{\sigma}_{\mu r} = \frac{\partial \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \sigma_{\varkappa r}}{\partial x_\nu} \sigma_{\nu r} + \frac{\partial^2 \tilde{x}_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\varkappa} b_{\varkappa\nu}. \tag{2.30}$$

Вычитая из (2.29) половину выражения (2.30) (в соответствии с (2.28)), убеждаемся в справедливости последней формулы (2.27). Доказательство закончено.

Отметим, что вследствие симметричности и неотрицательной определенности матрицы локальных дисперсий всегда существует хотя бы одна подходящая система действительных векторов $\vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_l$. Именно, если $\|u_{\lambda r}\|$ — ортогональное преобразование, приводящее эту матрицу к диагональному виду: $b_{\lambda\mu} u_{\lambda r} u_{\mu s} = \overset{0}{b}_r \delta_{rs}$, то $b_{\lambda\mu} = u_{\lambda r} u_{\mu r} \overset{0}{b}_r$ и, очевидно, можно положить $\sigma_{\lambda r} = u_{\lambda r} \sqrt{b_r^0}$ ($l = \mathrm{Rang}\|b_{\lambda\mu}\|$).

§ 2.3. ИНВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Инвариантная запись уравнений Колмогорова в произвольных криволинейных координатах предлагалась в работах Колмогорова [1] и Яглома [1]. В первой из них рассмотрение было ограничено случаем невырожденной матрицы локальных дисперсий, которая выбиралась в качестве метрического тензора. Во второй работе метрический тензор предполагался независимым, но были введены существенные ограничения по другой линии. Именно, метрическим пространством предполагалось не все фазовое пространство марковского процесса, а лишь пространство, соответствующее половине его переменных (координатам). Матрица локальных дисперсий, напротив, соответствовала лишь второй половине переменных (скоростям) и опять-таки предполагалась невырожденной (в пространстве скоростей).

Введенные выше вектора $\vec{m}$, $\vec{\sigma}_r$ позволяют получить инвариантную запись уравнений Колмогорова в общем случае для произвольного метрического фазового пространства. В специальных случаях, отмеченных выше, эта форма записи не совпадает с предложенными ранее формами, а является более простой.

Начиная с этого места будем предполагать фазовые переменные контравариантными компонентами вектора и записывать их дифференциал dx^λ. В соответствии с теоремой 2.5 рассматриваемые в ней вектора, следовательно, также являются контравариантными, поэтому будем записывать их m^λ, $\sigma^\lambda(r)$ (индекс r пишем в скобках, поскольку он не имеет тензорного характера).

Рассмотрим марковскую плотность вероятности перехода $p(x, t; x', t')$ из x в x' за время от t до t'. Уравнение Колмогорова первого рода

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = a^\lambda \frac{\partial p}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} b_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^\lambda \partial x_\mu}$$

при учете (2.26) преобразуется к инвариантному виду

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = m^\lambda \frac{\partial p}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \sigma^\lambda(r) \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left[\sigma^\mu(r) \frac{\partial p}{\partial x^\mu}\right]. \qquad (2.31)$$

В самом деле, вероятность перехода $p(x, t; x', t')$ как функция от x является скаляром. Поэтому скалярами являются и выражения $m^\lambda \frac{\partial p}{\partial x^\lambda}$, $\sigma^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} = v$, а следовательно, и $\sigma^\lambda \frac{\partial v}{\partial x^\lambda}$. Таким образом, в правой части (2.31), как и в левой, стоит скаляр.

Аналогично подстановкой формул (2.26) уравнение второго рода (Фоккера—Планка)

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}[a^\lambda p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu} [b^{\lambda\mu} p]$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}[m^\lambda p] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left[\sigma^\lambda(r) \frac{\partial}{\partial x'^\mu}(\sigma^\mu(r)\, p)\right]. \quad (2.32)$$

Рассматриваемая как функция от x', вероятность перехода $p(x, t; x', t')$ является скалярной плотностью, т. е. преобразуется как $\sqrt{g} = \det^{\frac{1}{2}} \| g_{\alpha\beta} \|$. Поэтому $m^\alpha p$, $\sigma^\mu p$ являются векторными плотностями. Но, если $\mathfrak{A}^\lambda$ векторная плотность, то, как известно, дивергенция $\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \mathfrak{A}^\lambda$ снова является скалярной плотностью. Поэтому $\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}(m^\lambda p)$, $\frac{\partial}{\partial x'^\mu}(\sigma^\mu p) = \mathfrak{B}$, а также $\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}(\sigma^\lambda \mathfrak{B})$ являются скалярными плотностями, подобно величине, стоящей в левой части (2.32).

Можно ввести поток вероятности

$$\mathfrak{S}^\lambda = m^\lambda p - \frac{1}{2} \sigma^\lambda(r) \frac{\partial}{\partial x'^\mu} [\sigma^\mu(r) p],$$

являющийся векторной плотностью. Тогда уравнение (2.32) примет вид уравнения сохранения

$$\frac{\partial p}{\partial t'} + \frac{\partial \mathfrak{S}^\lambda}{\partial x'^\lambda} = 0.$$

Указанные уравнения (2.31), (2.32) соответствуют одному и тому же инвариантному инфинитезимальному оператору

$$dL = \left\{ m^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \sum_r \left[\sigma^\lambda(r) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right]^2 \right\} dt.$$

В уравнении (2.32) он подвергается транспонированию.

§ 2.4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Будем предполагать здесь, что в формуле (2.16) функции Ψ_λ, $\Phi_{\lambda\rho}$, $\lambda = 1, \ldots, k$; $\rho = k+1, \ldots, k+l$ линейно зависят от $x_1, \ldots, x_k$:

$$\Psi_\lambda = A_{\mu\lambda}(y, t)\, x_\mu; \quad \Phi_{\lambda, k+\sigma} = A_{\mu\lambda\sigma}(y, t)\, x_\mu$$

и что

$$\Phi_{\lambda\mu} = \begin{cases} -1 \text{ при } \lambda = \mu; \\ \;\;\,0 \text{ при } \lambda \neq \mu; \end{cases} \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, k; \sigma = 1, \ldots, l).$$

Тогда уравнение (2.16) принимает вид

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(s) + \int_s^t [A_{\mu\lambda}(y(\tau), \tau)\, d\tau + A_{\mu\lambda\sigma}(y(\tau), \tau)\, dy_\sigma(\tau)]\, x_\mu(\tau). \tag{2.33}$$

Мы предполагаем существование решения этого уравнения. Применяя теорему 2.2, последнее уравнение можно записать также при помощи интегралов в смысле Ито.

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(s) + \int_s^t x_\mu(\tau)\,[A^*_{\mu\lambda}(y(\tau), \tau)\,d\tau + A_{\mu\lambda\sigma}(y(\tau), \tau)\,d^* y_\sigma(\tau)], \tag{2.34}$$

где

$$x_\mu A^*_{\mu\lambda} = x_\mu A_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} A_{\mu\lambda\sigma} b_{\mu\sigma} + \frac{1}{2} x_\mu \frac{\partial A_{\mu\lambda\sigma}}{\partial y_\pi} b_{\sigma\pi},\ b_{\mu\sigma} = x_\nu A_{\nu\mu\pi} b_{\pi\sigma},$$

и следовательно,

$$A^*_{\mu\lambda} = A_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} A_{\mu\nu\pi} A_{\nu\lambda\sigma} b_{\sigma\pi} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\mu\lambda\sigma}}{\partial y_\pi} b_{\sigma\pi}. \tag{2.35}$$

Введем два семейства операторов $L(t)$, $L^*(t)$ с матричными элементами

$$\begin{aligned} [L(t)]_{\mu\lambda} &= [L(s)]_{\mu\lambda} + \int_s^t [A_{\mu\lambda}(y, \tau)\,d\tau + A_{\mu\lambda\sigma}(y, \tau)\,dy_\sigma(\tau)]; \\ [L^*(t)]_{\mu\lambda} &= [L^*(s)]_{\mu\lambda} + \int_s^t [A^*_{\mu\lambda}(y, \tau)\,d\tau + A_{\mu\lambda\sigma}(y, \tau)\,d^* y_\sigma(\tau)]. \end{aligned} \tag{2.35a}$$

При помощи них формулы (2.33) (2.34) записываются в виде

$$x(t) - x(s) = \int_s^t x(t')\,dL(t');$$

$$x(t) - x(s) = \int_s^t x(t')\,d^* L^*(t').$$

При фиксированном t определяемые указанными формулами значения $x(t)$ можно представить как результат линейного преобразования начальных значений $x(s)$. Обозначая через T_{st} соответствующий оператор, имеем

$$x(t) = x(s)\,T_{st}.$$

Вид оператора T_{st} полностью определяется операторами $L(\tau) - L(s)$, $\tau \in [s, t]$.

Найдем явное выражение для указанного оператора в том случае, когда процесс $x(t)$ одномерный.

Записав (2.33) при $k=1$ в дифференциальной форме

$$dx = x\,[A(y, t)\,dt + A_\sigma(y, t)\,dy_\sigma],$$

поделим обе части равенства на x и проинтегрируем от s до t. Воспользуемся тем, что при новом определении стохастического интеграла справедлива обычная формула

$$\int_s^t \frac{dx(\tau)}{x(\tau)} = \ln \frac{x(t)}{x(s)}$$

(для интеграла Ито $\int d^*x/x$ она была бы несправедлива). Это дает

$$\ln \frac{x(t)}{x(s)} = \int_s^t [A(y, \tau)\, d\tau + A_\sigma(y, \tau)\, dy_\sigma], \tag{2.36}$$

т. е.

$$x(t) = e^{L(t)-L(s)}\, x(s). \tag{2.37}$$

Если в (2.36) перейти к итовскому интегралу и рассматривать уравнение (2.34) при $k=1$, то согласно (2.35), (2.8) будем иметь нижеприведенный результат.

Следствие 2.1. *Уравнение*

$$dx = x\,[A^*(y, t)\, dt + A_\sigma(y, t)\, d^*y_\sigma]$$

имеет решение

$$x(t) = x(s) \exp\left\{ \int_s^t \left(A^* - \frac{1}{2} A_\sigma A_\pi b_{\sigma\pi} \right) d\tau + \int_s^t A_\sigma\, d^*y_\sigma \right\}. \tag{2.38}$$

В многомерном случае вследствие некоммутативности операторов $L(\tau) - L(s)$, $\tau \in [s, t]$ простая формула (2.37), вообще говоря, не имеет места. Если, однако, указанные операторы коммутируют между собой, то операторная формула, аналогичная (2.37), сохраняет свое значение и в многомерном случае. В этом можно убедиться, например, приведя операторы $L(\tau) - L(s)$ к диагональному виду и применяя одномерную формулу (2.37) для каждой компоненты.

Стохастические линейные операторы более общего вида будут рассмотрены в следующей главе.

Глава 3

МАРКОВСКАЯ СИСТЕМА МЕР И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основным содержанием настоящей главы будет определение двух семейств производящих операторов, порождающих инфинитезимальные операторы данной неоднородной марковской системы мер, а также изложение ряда результатов, касающихся этих операторов.

Марковские меры, удовлетворяющие уравнению Чепмена—Колмогорова, определяют, как известно, двухпараметрическую (в общем случае) полугруппу операторов в сопряженных банаховых пространствах функций и обобщенных мер. Рассмотрение, проводимое в этой главе, применимо не только к априорным мерам исходного марковского процесса, но и к ненормированной (невероятностной) апостериорной мере, зависящей от наблюдаемого процесса, которая вводится в теории условных марковских процессов.

В настоящее время наиболее полно изучен случай стационарного марковского процесса, которому соответствует однопараметрическая полугруппа (Хилл [1], Иосида [1, 2], Дынкин [1, 3], см. также Лоэв [1]). Для наших целей, однако, эта теория является недостаточной ввиду того, что апостериорные марковские меры являются существенно нестационарными вследствие зависимости от наблюдаемого процесса. Более того, в самых интересных для нас случаях, когда наблюдается диффузионный процесс или функция от него, полугруппа операторов T_{st} является недифференцируемой. Именно, предел

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-1} [T_{t,t+\Delta} g - g] = Ag$$

не существует для достаточно широкого множества функций g (множества, всюду плотного в упомянутом банаховом пространстве). Это вызвано тем, что $T_{t,\, t+\Delta}\, g - g = O(\Delta^{1/2})$. Сказанное побуждает к существенному обобщению теории.

Один из путей обобщения заключается в том, что вводится однопараметрическое семейство $L^*(t)$ производящих операторов. Дифференциал $dL^*(t)$ называется инфинитезимальным оператором. В том частном случае, когда выписанный выше предел существует, имеет место простое соотношение $dL^*(t) = Adt$.

Указанное семейство полностью определяет полугруппу, и наоборот. По аналогии с прежней теорией здесь также можно рассматривать сильные и слабые замыкания области определения, доказывать теоремы единственности и т. п. Конечно, мы не имеем возможности в данной главе сколько-нибудь подробно разбирать относящийся сюда обширный материал. Наше изложение будет носить несколько отрывочный и конспективный характер.

§ 3.1. ОПЕРАТОРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЕ МЕР

1. Пусть задано измеримое фазовое пространство $(E, \mathscr{E})$ и двухпараметрическая система мер $\mu_{st}(x, \Lambda)$, где $x \in E$, $\Lambda \in \mathscr{E}$; s, $t \in T$. При фиксированных x, s, t функции $\mu_{st}(x, \Lambda)$ образуют меру в указанном пространстве, а при фиксированных Λ, s, t они являются $\mathscr{E}$-измеримыми x-функциями.

Обозначим через G пространство ограниченных борелевских функций на E. Оно является банаховым пространством с естественными линейными операциями и нормой

$$\| g \| = \sup_{x \in E} | g(x) |, \quad g \in G.$$

Определим на этом пространстве операторы

$$(T_{st} g)(x) = \int \mu_{st}(x, dx') \, g(x'), \quad s < t.$$

Кроме того, можно рассматривать преобразование счетно-аддитивных функций

$$(\varphi T_{st})(\Lambda) = \int \varphi(dx) \, \mu_{st}(x, \Lambda)$$

из банахового пространства $\Phi \ni \varphi$ (с нормой $\|\varphi\| = \mathrm{Var}_E \varphi$).

Будем предполагать, что рассматриваемая система мер является марковской, т. е. выполняется уравнение Чепмена—Колмогорова

$$\int \mu_{st}(x, dx') \, \mu_{tu}(x', \Lambda) = \mu_{su}(x, \Lambda), \quad s < t < u,$$

которое в операторной форме имеет вид

$$T_{st} T_{tu} = T_{su}.$$

Введем для данной марковской системы мер однопараметрическое семейство операторов $L^*(t)$, $t \in T$ (определенное с точностью до постоянного аддитивного оператора).

Определение 3.1. *Семейство операторов* $L^*(u) - L^*(s)$, $u > s$ *задается предельным переходом*

$$[L^*(u) - L^*(s)]\,g = \lim_{\Delta \to 0} [T_{t_1 t_2} - I + \ldots + T_{t_{N-1}, t_N} - I]\,g, \quad (3.1)$$

где $t_1, \ldots, t_N$ есть Δ-разбиение интервала $[s, u]$; I — единичный оператор.

Пространство функций $D_{L^*} \subset G$, для которых сходимость (3.1) имеет место и пределы не зависят от специального способа разбиения, является областью определения указанного семейства операторов (предполагается, что D_{L^*} не завнсит от s и u).

Нетрудно показать, что в случае однородной марковской системы мер (в случае однопараметрической полугруппы) вышеприведенные операторы соотношением

$$L^*(u) - L^*(s) = (u - s)\,A$$

связаны с инфинитезимальным оператором A, определяемым обычным способом, и что $D_{L^*} = D_A$.

Приведем без доказательства ряд утверждений, касающихся введенных операторов.

Пусть при любой $g \in G_0 \subset G$ функция $f(t) = T_{tu}g$ принадлежит области D_{L^*}. Тогда она как функция от t удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(t) - g = \int_t^u d^*L^*(\tau)\,f(\tau), \quad t < u. \quad (3.2)$$

Здесь интеграл понимается в смысле предела (см. § 2.1)

$$\int_t^u d^*L^*(\tau)\,f(\tau) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{[t,u]} [L^*(t_{j+1}) - L^*(t_j)]\,f(t_{j+1}).$$

Аналогичное уравнение имеет место для меры $\varphi \in \Phi$:

$$\varphi(t) - \varphi = \int_s^t \varphi(\tau)\,d^*L^*(\tau), \quad s < t, \quad (3.3)$$

где интеграл имеет следующий смысл:

$$\int_s^t \varphi(\tau)\,d^*L^*(\tau) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{[s,t]} \varphi(t_j)\,[L^*(t_{j+1}) - L^*(t_j)].$$

Опуская g и φ, подобные уравнения можно писать также непосредственно для операторов T_{su}. При этом возможны несколько интегральных форм записи, например

$$T_{su} = I + \int_s^u T_{s\tau}\, d^*L^*(\tau) = T_{st} + \int_t^u T_{s\tau}\, d^*L^*(\tau);$$
$$T_{su} = I + \int_s^u d^*L^*(\tau)\, T_{\tau u} = T_{tu} + \int_s^t d^*L^*(\tau)\, T_{\tau u} \tag{3.4}$$
$$(s < t < u),$$

а также дифференциальные формы записи:

$$d_u T_{su} = T_{su}\, d^*L^*(u); \quad d_s T_{su} = d^*L^*(s)\, T_{su}. \tag{3.5}$$

Итак, полугруппа T_{su} определяет семейство производящих операторов. При помощи последних записываются интегральные или дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют полугрупповые преобразования.

Справедливо и обратное утверждение: семейство производящих операторов определяет полугруппу. Если задано семейство операторов $L(t)$, то можно записать дифференциальное или интегральное уравнение, например (3.2). Его решение $f(t)$ можно интерпретировать как результат некоего преобразования T_{tu} функции g в функцию $f(t)$. Докажем, что *подобные преобразования образуют полугруппу.* Кроме (3.2) рассмотрим второе уравнение

$$f(s) - f(t) = \int_s^t d^*L^*(\tau)\, f(\tau), \quad s < t.$$

Первое из них (3.2) определяет $f(t)$ как результат преобразования $T_{tu}g$, а второе определяет $f(s)$ как результат преобразования $T_{st}f(t)$. Складывая эти два уравнения, получаем уравнение

$$f(s) - g = \int_s^u d^*L^*(\tau)\, f(\tau),$$

которое определяет $f(s)$ как $T_{su}g$. Поскольку в этих уравнениях $f(s)$ есть одна и та же функция, имеем

$$T_{st}T_{tu}g = T_{su}g.$$

Тем самым полугрупповое свойство доказано.

Отыскивая для этой полугруппы операторы $L^*(u) - L^*(s)$ по формуле (3.1), мы придем к исходным операторам.

Семейство операторов $L^*(t)$ будем называть *производящим*, поскольку оно определяет полугруппу. Будем употреблять также термин *инфинитезимальный оператор* для соответствующего дифференциала $dL^*(t)$.

Теория операторов (3.1) призвана обобщить существующую теорию однородной полугруппы. Для последней полугруппы теория упрощается и уравнения (3.2) обращаются в известные уравнения (Дынкин [3], стр. 48).

Помимо обобщения на неоднородный случай для дальнейшего необходимо еще одно обобщение — обобщение на тот случай, когда система мер $\mu_{st}(x, \Lambda)$ является случайной, т. е. зависит от точки $\omega \in \Omega$ некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$. При этом все условия и утверждения теории нужно формулировать (в отличие от теории неслучайных мер μ_{st}) как выполняющиеся с вероятностью единица или в среднем. Из последующей теоремы 3.1 видно, что предел (3.1) удобно понимать в среднем ($l.\ i.\ m$). Соответствующие уточнения довольно стандартны, и мы не будем каждый раз их оговаривать в дальнейшем.

2. Утверждения, высказанные в предыдущем пункте, удобно проиллюстрировать и обосновать на следующем примере.

Пусть E является конечным множеством из m точек. Тогда функциональное пространство G будет совпадать с m-мерным вещественным пространством R_m, элементами g которого являются вектора: $g = (g_1, \ldots, g_m)$. В G можно определить норму

$$\|g\| = \max(g_1, \ldots, g_m).$$

Операторы в этом пространстве являются $m \times m$-матрицами.

Возьмем семейство производящих операторов диффузионного вида

$$L^*(t)_{\alpha\beta} = \int^t [\overset{*}{A}_{\alpha\beta}(y, \tau)\, d\tau + A_{\alpha\beta\sigma}(y, \tau)\, d^*y_\sigma(\tau)], \qquad (3.6)$$

аналогичных (2.35а). Здесь $y = \{y_\sigma(t),\ \sigma = 1, 2, \ldots\}$ — диффузионные процессы с параметрами $a_\sigma(y, t)$, $b_{\sigma\rho}(y, t)$. Функции $\overset{*}{A}_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta\sigma}$, a_σ, $b_{\sigma\rho}$ предполагаются ограниченными и непрерывными. Функции $A_{\alpha\beta\tau}$ удобно считать дифференцируемыми по y_ρ.

Уравнение (3.2) при этом имеет вид системы стохастических уравнений

$$f_\alpha(t) - g_\alpha = \int_t^u \overset{*}{A}_{\alpha\beta}(\tau) f_\beta(\tau)\, d\tau + \int_t^u A_{\alpha\beta\sigma}(\tau)\, d^*y_\sigma(\tau) f_\beta(\tau),$$

или

$$f_\alpha(f) - g_\alpha = \int_t^u {}^*A_{\alpha\beta}(\tau) f_\beta(\tau)\, d\tau + \int_t^u d^*y_\sigma(\tau) A_{\alpha\beta\sigma}(\tau) f_\beta(\tau)$$

$$(\alpha = 1, \ldots, M),$$

где

$$^*A_{\alpha\beta} = \overset{*}{A}_{\alpha\beta} - \frac{\partial A_{\alpha\beta\sigma}}{\partial y_\rho} b_{\sigma\rho}$$

согласно формуле (2.15), примененной к интегралу (3.6).

Как доказывается в теории стохастических уравнений, указанные уравнения однозначно (с точностью до эквивалентности) определяют решение $f(t)$. Это решение интерпретируется как $T_{tu}g$, т. е. как результат преобразования T_{tu}. Выше было показано, что подобные преобразования образуют полугруппу. Элементы матрицы $(T_{su})_{\alpha\beta}$, соответствующей этому преобразованию, как легко понять, удовлетворяют уравнению

$$(T_{tu})_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \int_t^u {}^*A_{\alpha\gamma}(\tau)\,(T_{\tau u})_{\gamma\beta}\,d\tau + \int_t^u d^*y_\sigma(\tau)\,A_{\alpha\gamma\sigma}(\tau)\,(T_{\tau u})_{\gamma\beta} \qquad (3.7)$$

или

$$(T_{st})_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \int_s^t (T_{s\tau})_{\alpha\gamma}\,\overset{*}{A}_{\gamma\beta}(\tau)\,d\tau + \int_s^t (T_{s\tau})_{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta\sigma}(\tau)\,d^*y_\sigma. \qquad (3.8)$$

Последние являются конкретизацией уравнений (3.4).

Рассмотрим предел (3.1) для построенной таким способом полугруппы.

Теорема 3.1. *Предел* (3.1) *для описанной полугруппы существует в среднем и приводит к исходным операторам* (3.6).

Доказательство использует приемы, обычные в теории стохастических интегралов и уравнений. Чтобы избежать громоздких выражений, будем полагать, что $\overset{*}{A}_{\alpha\beta} = 0$, $a_\sigma = 0$. Это упрощение не связано с принципиальными изменениями доказательства.

Возьмем Δ-разбиение $t_1, \ldots, t_N$ интервала $[s, u]$ и применим формулу (3.8) к каждому элементарному интервалу $(t_i, t_{i+1}]$:

$$(T_{t_i t_{i+1}})_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma}\,\overset{*}{A}_{\gamma\beta\sigma}(\tau)\,d^*y_\sigma(\tau). \qquad (3.8a)$$

Пользуясь этими равенствами, образуем выражение

$$Z \equiv \sum_{i=1}^{N-1} \left[(T_{t_i t_{i+1}})_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{\alpha\beta\sigma}(\tau)\,d^*y_\sigma(\tau)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [(T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}]\,A_{\gamma\beta\sigma}(\tau)\,d^*y_\sigma(\tau) \qquad (3.9)$$

(второе равенство справедливо в силу (3.8a)) и рассмотрим его средний квадрат. Согласно обычному (например, Дуб [1], стр. 400 и др.) правилу усреднения стохастических интегралов имеем

$$\mathbf{M}Z^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}\{[(T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}][(T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma'} - \delta_{\alpha\gamma'}] A_{\gamma\beta\sigma}(\tau) A_{\gamma'\beta\sigma'}(\tau) b_{\sigma\sigma'}(\tau)\} d\tau. \tag{3.10}$$

Используем теперь формулу (3.7), которая соответствует интегралу Ито, записанному для обратного времени:

$$(T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} = \int_{t_i}^{\tau} d^*y_\sigma(\tau') A_{\alpha\delta\sigma}(\tau')(T_{\tau'\tau})_{\delta\gamma}.$$

Применяя теперь указанное правило усреднения для обратного времени, получаем

$$\mathbf{M}\{[(T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}][(T_{t_i\tau})_{\alpha\gamma'} - \delta_{\alpha\gamma'}] A_{\gamma\beta\sigma}A_{\gamma'\beta\sigma'}b_{\sigma\sigma'}(y(\tau), \tau)\} =$$

$$= \int_{t_i}^{\tau} \mathbf{M}\{b_{\rho\rho'}(y(\tau'), \tau') A_{\alpha\delta\rho}(\tau') A_{\alpha\delta'\rho'}(T_{\tau'\tau})_{\delta\gamma}(T_{\tau'\tau})_{\delta'\gamma'} \times$$

$$\times A_{\gamma\beta\sigma}(\tau) A_{\gamma'\beta\sigma'}(\tau) b_{\sigma\sigma'}(\tau)\} d\tau'.$$

Это выражение, как легко видеть, имеет порядок $O(\tau - t_i)$ (т. е. $O(\Delta)$) в предположении, что соответствующие моменты ограниченны. Оно является подынтегральным выражением в (3.10), и, следовательно,

$$\lim_{\Delta\to 0} \mathbf{M}Z^2 = 0; \qquad \text{l. i. m. } Z = 0$$

при любых α и β. Учитывая определение (3.9) выражения Z, имеем

$$\text{l. i. m.} \sum_{i=1}^{N-1} [(T_{t_i t_{i+1}})_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}] - \text{l. i. m.} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{\alpha\beta\sigma}(\tau) d^*y_\sigma(\tau) = 0.$$

Но второй предел есть не что иное, как стохастический интеграл

$$\int_s^u A_{\alpha\beta\sigma}(\tau) d^*y_\sigma(\tau) = L^*(u)_{\alpha\beta} - L^*(s)_{\alpha\beta}.$$

Доказательство закончено.

Аналогичная теорема с соответствующими усложнениями может быть сформулирована и доказана также для более общего диффузионного случая, который рассматривается в дальнейшем в § 3.4.

3. Введенное выше семейство производящих операторов $L^*(t)$ является достаточным для построения теории неоднородной полугруппы и теории условных марковских процессов. Кроме него, однако, для некоторых целей полезно также рассматривать другое семейство, играющее в теории аналогичную роль.

Определим новое семейство производящих операторов $L(t)$, $t \in T$ при помощи предельного перехода

$$[L(u)-L(s)]\,g=\lim_{\Delta\to 0}[\ln T_{t_1t_2}+\ldots+\ln T_{t_{N-1},\,t_N}]\,g \tag{3.11}$$

$$(g \in D_L).$$

Входящую сюда логарифмическую функцию от оператора следует понимать в каком-либо подходящем смысле. Ее можно определить, например, естественным образом после приведения оператора к диагональному виду (если это возможно), или определить при помощи разложения

$$(\ln T_{t_it_{i+1}})\,g=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}(T_{t_it_{i+1}}-I)^n g. \tag{3.12}$$

Последним целесообразно пользоваться, если это не связано с существенным ограничением области определения $D_L \subset G$ производящих операторов $L(t)$.

В случае полугруппы, однородной во времени, различные семейства производящих операторов совпадают:

$$L(u)-L(s)=L^*(u)-L^*(s)=(u-s)\,A.$$

Распространяя на неоднородный случай известные положения однородной теории (Лоэв [1], Дынкин [3]), будем предполагать, что пространство D_L является всюду плотным в банаховом пространстве $G_0 \subset G$. Представляет интерес обобщение на этот случай теоремы единственности (Дынкин [3], стр. 47). Не проводя соответствующего доказательства, будем предполагать, что единственность имеет место. Если предположить, кроме того, что уравнение

$$\lambda f-[L(u)-L(s)]\,f=g$$

имеет решение $f \in D_L$ для любой $g \in G_0$ и любого $\lambda>0$, $u>s$, то отсюда по аналогии с известной теорией (Дынкин [3], стр. 51—53) можно вывести, что операторы $L(u)-L(s)$ однозначным образом определяют* операторы $\exp[L(u)-L(s)]$ над пространством G_0. Можно доказать также, что при этом

$$\exp[L(u)-L(s)]\,g \in D_L \text{ при } g \in G_0,\ u > s.$$

Для фиксированного Δ-разбиения рассмотрим теперь операторы

$$T_{tu}^{\Delta} = \exp\left\{\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}[L(t_{i+1})-L(t_i)]\right\}\exp\{L(t_{i+2})-$$

$$-L(t_{i+1})\}\ldots\exp\{L(t_N)-L(t_{N-1})\},\quad t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (3.13)$$

и соответствующую им функцию

$$f^{\Delta}(t) = T_{tu}^{\Delta}g,\ g \in G_0. \quad (3.14)$$

Из этого определения легко получить, что

$$f^{\Delta}(t_i) - f^{\Delta}(t_{i+1}) = \{\exp[L(t_{i+1})-L(t_i)] - I\}\,f^{\Delta}(t_{i+1})$$

и, следовательно,

$$f^{\Delta}(t_i) - g = \sum_{j=i}^{N-1}\{e^{L(t_{j+1})-L(t_j)} - I\}\,f^{\Delta}(t_{j+1}). \quad (3.15)$$

Предположим, что для всякой $g \in G_0$ и всякого t существует предел

$$f(t) = \lim_{\Delta\to 0} f^{\Delta}(t).$$

Этот предел будем интерпретировать как результат преобразования $T_{tu}g$, так что

$$T_{tu} = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ t_i\to t}} e^{L(t_{i+1})-L(t_i)}\ldots e^{L(t_N)-L(t_{N-1})}. \quad (3.16)$$

---

* В указанной теории рассматривается также условие

$$\|\lambda f - Bf\| \geqslant \|\lambda f\|,\ B = L(u)-L(s),\ \lambda > 0,$$

связанное со сжимаемостью полугруппы. Мы не концентрируем на нем внимания, так как может быть проведено обобщение теории на несжимающиеся полугруппы. В частности, тривиально обобщение на тот случай, когда $\|T_t\| < e^{Kt}$ (K — конечная константа).

Уравнение (3.15) при этом обращается в уравнение *

$$f(t) - g = \int_t^u \overline{d}L(\tau) f(\tau), \tag{3.17}$$

где интеграл понимается в смысле

$$\int_t^u \overline{d}L(t) f(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{[t,u]} \{e^{L(t_{j+1})-L(t_j)} - I\} f(t_{j+1}). \tag{3.18}$$

В вышеизложенном смысле можно утверждать, что семейство производящих операторов $L(t)$ однозначно определяет функцию $f(t)$ как решение уравнения (3.17) и тем самым определяет $\mathbf{T}_{tu}$ как преобразование g в $f(t)$. Из (3.16), (3.17) следуют полугрупповые свойства этих преобразований.

Уравнение (3.17) можно писать в дифференциальной форме

$$df(t) = -\overline{d}L(t) f(t).$$

Аналогичное уравнение можно вывести и для $\varphi \in \Phi$, оно имеет вид

$$\varphi(t) - \varphi(s) = \int_s^t \varphi(\tau)\, \overline{d}L(\tau), \quad \varphi(s) \equiv \varphi, \tag{3.19}$$

где, подобно (3.18), интеграл понимается в смысле

$$\int_s^t \varphi(\tau)\, \overline{d}L(\tau) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{[s,t]} \varphi(t_j) \{e^{L(t_{j+1})-L(t_j)} - I\}. \tag{3.19.a}$$

Уравнения (3.17), (3.19) аналогичны уравнениям (3.2), (3.3), но соответствуют другому определению интеграла и другим производящим операторам. Нетрудно также записать аналоги уравнений (3.4), (3.5). Для этого следует лишь сделать в них подстановку

$$d^*L^*(t) = \overline{d}L(t). \tag{3.20}$$

4. В справедливости предположений, принятых выше, можно убедиться в результате специального рассмотрения при более или менее общих условиях. Мы не имеем возможности разбирать здесь обширный круг связанных с этим во-

---

* В самом деле, из свойства $\int_\alpha^\beta \overline{d}L(t) F(t) \to 0$ при $\max_{t\in[\alpha,\beta]} \|F(t)\| \to 0$ интеграла (3.18) вытекает, что

$$\sum [e^{L(t_i)-L(t_{i-1})} - I] f^\Delta(t_i) = \int \overline{d}L(\tau) f^\Delta(\tau) \to \int \overline{d}L(\tau) f(\tau).$$

просов. Ограничимся тем, что укажем на принципиальную важность условия коммутативности операторов $L(t_{i+1})-L(t_i)$, $L(t_i)-L(t_{i-1})$, соответствующих близким интервалам. Если на некотором интервале $[a, b]$ подобные операторы коммутируют, то предельного перехода (3.11) совершать не приходится и имеет место строгое равенство $T_{tt'}^{\Delta}=T_{tt'}$ $(t, t'\in[a, b])$, так что предельный переход (3.16) является излишним. Теория, соответствующая этому случаю, является не очень существенным обобщением теории однородной (однопараметрической) полугруппы.

Часто, однако, строгая коммутативность не имеет места. Для справедливости ряда результатов оказывается достаточным более слабое условие

$$[L(t_i)-L(t_{i-1})][L(t_{i+1})-L(t_i)]-[L(t_{i+1})-L(t_i)]\times$$
$$\times[L(t_i)-L(t_{i-1})]=o(\Delta).$$

Не рассматривая этого вопроса подробно, приведем один важный результат.

Теорема 3.2. *Пусть операторы* $S_{st}=e^{L(t)-L(s)}$, $s<t$, *т. е. операторы, удовлетворяющие условию*

$$\ln S_{st}g=[L(t)-L(s)]g, \tag{3.21}$$
$$g\in D_L,$$

являются ограниченными:

$$\|S_{st}\|\leqslant e^{(t-s)K} \tag{3.22}$$

(K *не зависит от* s *и* t) *и пусть выполняются соотношения*

$$\lim_{(t-s)\downarrow 0} S_{st}=I; \tag{3.23}$$

$$S_{t_{i-1}t_{i+1}}=S_{t_{i-1}t_i}S_{t_it_{i+1}}[1+O(\Delta^{1+\gamma})],\quad \gamma>0 \tag{3.24}$$

(оценка $O(\Delta^{1+\gamma})$ понимается в смысле нормы и является равномерной по $t_i\in T$). *Тогда*:

3.2.А. *Предел* (3.16) *существует и не зависит от способа разбиения.*

3.2.Б. *Он определяет полугруппу операторов.*

3.2.В. *Эта полугруппа имеет операторы* (3.11), *совпадающие с* $L(t)$.

Доказательство. Выбирая разбиения $\{t_i^{(\Delta)}\}\subset\{t_j^{\left(\frac{\Delta}{2}\right)}\}$, $j=2i,\ 2i+1$, согласно (3.24), (3.22), имеем

$$\left|\prod_i S_{t_i^{(\Delta)} t_{i+1}^{(\Delta)}} - \prod_j S_{t_j^{\left(\frac{\Delta}{2}\right)} t_{j+1}^{\left(\frac{\Delta}{2}\right)}}\right| \leqslant e^{(u-s)K} \times$$

$$\times \{[1 + \Delta O(\Delta^{\gamma})]^N - 1\} = (u-s)\, e^{(u-s)K} O(\Delta^{\gamma})). \qquad (3.25)$$

Будем рассматривать далее Δ_k-разбиения с интервалами длиной $\Delta_k = \Delta \cdot 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Суммируя разности (3.25), будем иметь равномерно по всем k

$$\left|\prod_i S_{t_i^{(\Delta)} t_{i+1}^{(\Delta)}} - \prod_l S_{t_l^{(\Delta_k)} t_{l+1}^{(\Delta_k)}}\right| \leqslant (u-s)\, e^{(u-s)}\, O(\Delta^{\gamma}), \quad (3.26)$$

поскольку $\sum\limits_{k'=0}^{k-1} O((\Delta \cdot 2^{-k'})^{\gamma}) = O(\Delta^{\gamma})$.

Это доказывает сходимость (3.16). Аналогичное рассмотрение можно провести и для других видов разбиений.

Утверждение 3.2.Б с очевидностью вытекает из (3.16), если учесть 3.2.А и условие (3.23).

Перейдем к доказательству 3.2.В. Для этого обратимся к (3.11) (3.12). В эти равенства входит $\ln T_{t_i t_{i+1}}$, тогда как условиями теоремы 3.2 задан $\ln S_{t_i t_{i+1}}$ (3.21). Найдем разницу между этими логарифмами. Из (3.26) получаем

$$\left|\prod_i S_{t_i t_{i+1}} - T_{su}\right| \leqslant (u-s)\, e^{(u-s)K} O(\Delta^{\gamma})$$

и, следовательно,

$$T_{t_i t_{i+1}} = S^{t}_{t_i t_{i+1}} + o(\Delta). \qquad (3.27)$$

Путем разложения в двойной ряд функции

$$\ln(I + A + B) \quad (A = S_{t_i t_{i+1}} - I,\ A + B = T_{t_i t_{i+1}} - I)$$

и использования известных соотношений типа $\|CD\| \leqslant \|C\|\,\|D\|$, легко убедиться в справедливости неравенства

$$\|\ln(I + A + B) - \ln(I + A)\| \leqslant \ln(1 - \|A\|) -$$

$$- \ln(1 - \|A\| - \|B\|) \leqslant \frac{\|B\|}{1 - \|A\| - \|B\|}.$$

Применяя его к (3.27), получаем

$$\ln T_{t_i t_{i+1}} - \ln S_{t_i t_{i+1}} = \frac{o(\Delta)}{1 - \|S_{t_i t_{i+1}} - I\| - o(\Delta)} = o(\Delta).$$

Здесь использовано, что $\|S_{t_i t_{i+1}} - I\| = o(1)$ в соответствии с условием (3.23). Отсюда следует, что оба оператора имеют одинаковую область определения D_L, а также, что предел (3.11) существует и совпадает с исходным выражением (3.21). Доказательство закончено.

§ 3.2. ОДНА ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ СИСТЕМЫ МЕР

1. В соответствии с формулами (3.16), (3.19а), определяющими дифференциал $\overline{d}$, мы понимаем в более общем случае выражение

$$\sum_q \int G_q(\tau)\,\overline{d}R_q(\tau)\,H_q(\tau) \tag{3.28}$$

в смысле

$$\sum_q \lim_{\Delta\to 0} \sum_i G_q(t_i)\,[e^{R_q(t_{i+1})-R_q(t_i)}-I]\,H_q(t_{i+1})$$

(если предел существует). G_q, H_q есть операторы или функции. Сказанное относится и к тому случаю, когда оператор (или операторы) R_q соответствуют умножению на некоторую функцию. Операторы или функции R_q не обязаны иметь ограниченную вариацию или быть непрерывными.

Учитывая определение (3.28), нетрудно получить, что этот интеграл обладает рядом своеобразных свойств. Например, выполняются равенства

$$\int_s^u e^{R(\tau)}\,\overline{d}R(\tau) = e^{R(u)} - e^{R(s)},$$

$$\int_s^u \overline{d}R(\tau)\,e^{-R(\tau)} = e^{-R(s)} - e^{-R(u)}, \tag{3.29}$$

т. е.

$$e^{R(t)}\,\overline{d}R(t) = de^{R(t)};\quad \overline{d}R(t)\,e^{-R(t)} = -de^{-R(t)},$$

тогда как равенства

$$\overline{d}R(t)\,e^{R(t)} = de^{R(t)};\quad e^{-R(t)}\,\overline{d}R(t) = -de^{-R(t)};$$

$$-\overline{d}R(t) = \overline{d}\,[-R(t)]$$

в общем случае являются несправедливыми.

Вместо $\overline{d}R$ можно писать $e^{-R}d^*e^R$, где дифференциал d^* определяется формулой

$$\int G(d^*Q)H = \lim_{\Delta\to 0}\sum_i G(t_i)\,[Q(t_{i+1}) - Q(t_i)]\cdot H(t_{i+1}) \tag{3.30}$$

Интегралы в (3.2), (3.3) являются частными случаями определения (3.30). Как видно из (3.20), иногда удобно заменять дифференциал $\overline{d}$ от одной функции дифференциалом d^* от другой.

2. Перейдем к рассмотрению одной важной теоремы.

Для решения ряда задач полезно совершать замену марковской системы мер при помощи формулы

$$\mu'_{st}(x, \Lambda) = e^{-F_s(x)} \int_{\Lambda} \mu_{st}(x, dx') e^{F_t(x')}, \tag{3.31}$$

где $F_t(x)$ — соответствующим образом подобранная функция на $T \times E$, измеримая по Борелю на $\mathscr{B}_T \times \mathscr{E}$.

Представляет интерес вопрос, как при такой замене мер преобразуются производящие операторы. Пусть $L(t)$ — операторы исходной системы $\mu_{st}(x, \Lambda)$. Введем операторы

$$L'(t) - L'(s) = \int_s^t e^{-F_\tau} dL(\tau) e^{F_\tau} + F_t - F_s, \tag{3.32}$$

где интеграл понимается в смысле

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_i e^{-F_i} [L(t_{i+1}) - L(t_i)] e^{F_i} g, \qquad F_i = \frac{1}{2} (F_{t_i} + F_{t_{i+1}}),$$

$$g \in \widetilde{D}_L \subset D_L.$$

Здесь и в дальнейшем, рассматривая Δ-разбиение $\{t_i\}$ интервала $[s, t]$, будем пользоваться обозначениями

$$\Delta L_i = L(t_{i+1}) - L(t_i); \; \Delta F_i = F_{t_{i+1}} - F_{t_i},$$

$$\Delta L'_i = L'(t_{i+1}) - L'(t_i).$$

Кроме того, обозначим

$$\Delta L''_i = e^{-F_i} (\Delta L_i + \Delta F_i) e^{F_i}, \tag{3.33}$$

тогда согласно (3.33), (3.32) будем иметь

$$\lim_{\Delta \to 0} (\Delta L''_1 + \ldots + \Delta L''_N) = L'(t) - L'(s). \tag{3.34}$$

Условие (3.37) следующей теоремы отличается от этого соотношения утверждением некоторых коммутационных свойств операторов $\Delta L''_i$.

Теорема 3.3. *Если*

$$\| e^{\Delta L_i} \| \leqslant e^{K\Delta}, \tag{3.35}$$

а также выполняются коммутационные условия

$$e^{-\frac{1}{2}\Delta F_i} e^{\Delta L_i + \Delta F_i} e^{-\frac{1}{2}\Delta F_i} = e^{\Delta L_i} [I + o(\Delta)], \tag{3.36}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} e^{\Delta L''_1} \ldots e^{\Delta L''_N} = e^{L'(t) - L'(s)} [I + o(t - s)] \tag{3.37}$$

(оценка $o(t-s)$ берется по норме и является равномерной по всем t), *то преобразованию мер* (3.31) *соответствует преобразование производящих операторов* (3.32). *Кроме того,*

$$\overline{d}L'(t) = e^{-F_t}\overline{d}L(t)\,e^{F_t} + \overline{d}F_t = e^{-F_t}[\overline{d}L(t)\,e^{F_t} + d^*e^{F_t}] =$$
$$= [e^{-F_t}\overline{d}L(t) - d^*e^{-F_t}]\,e^{F_t}. \qquad (3.38)$$

Доказательство. Из (3.36) имеем

$$e^{\Delta L_i + \Delta F_i} = e^{\frac{1}{2}\Delta F_i} e^{\Delta L_i}[1 + o(\Delta)]\, e^{\frac{1}{2}\Delta F_i}.$$

Поэтому из равенства

$$\exp\{e^{-F_i}(\Delta L_i + \Delta F_i)\,e^{F_i}\} = e^{-F_i}e^{\Delta L_i + \Delta F_i}e^{F_i}$$

получаем

$$e^{\Delta L_i''} = e^{-F_i + \frac{1}{2}\Delta F_i} e^{\Delta L_i}[1 + o(\Delta)]\, e^{F_i + \frac{1}{2}\Delta F_i} =$$
$$= e^{-F_{t_i}} e^{\Delta L_i}[1 + o(\Delta)]\, e^{F_{t_{i+1}}}.$$

Произведение подобных операторов, следовательно, можно записать

$$e^{\Delta L_1''} \ldots e^{\Delta L_{N-1}''} = e^{-F_{t_1}} e^{\Delta L_1}[1 + o(\Delta)]\, e^{\Delta L_2} \ldots$$
$$\ldots e^{\Delta L_{N-1}}[1 + o(\Delta)]\, e^{F_{t_N}}.$$

Учитывая (3.35), отсюда имеем

$$e^{\Delta L_1''} \ldots e^{\Delta L_{N-1}''} = e^{-F_{t_1}} e^{\Delta L_1} e^{\Delta L_2} \ldots e^{\Delta L_{N-1}} e^{F_{t_N}} +$$
$$+ e^{(t-s)K}\{[1 + o(\Delta)]^N - 1\},$$

т. е.

$$\lim_{\Delta\to 0} e^{\Delta L_1''} \ldots e^{\Delta L_{N-1}''} = e^{-F_s} T_{st} e^{F_t}. \qquad (3.39)$$

Полагая $s = t_i$, $t = t_{i+1}$ в (3.37) и в (3.39), получаем в результате сравнения этих равенств

$$e^{\Delta L_i'} = e^{-F_{t_i}} T_{t_i t_{i+1}} e^{F_{t_{i+1}}}[I + o(\Delta)]. \qquad (3.40)$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta\to 0} e^{\Delta L_1'} \ldots e^{\Delta L_N'} = e^{-F_s} T_{st} e^{F_t} \equiv T_{st}',$$

т. е. операторы $L'(t)$ действительно служат для полугруппы T'_{st} производящими операторами. В соответствии с теоремой 3.2 (3.2.B) имеем также

$$\lim_{\Delta\to 0}[\ln T'_{t_1t_2}+\ldots+\ln T'_{t_{N-1}t_N}]\,g=[L'(t)-L'(s)]\,g,$$

$$g\in D_L.$$

Перейдем к доказательству (3.38). Эквивалентность всех трех равенств (3.38) следует из (3.29) (при $R=F$). Согласно определению интеграла (3.28) первое равенство (3.38) означает

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_i (e^{\Delta L'_i}-I)\,f(t_{i+1})=\lim_{\Delta\to 0}\sum_i [e^{-F_{t_i}}$$

$$(e^{\Delta L_i}-I)\,e^{F_{t_{i+1}}}f(t_{i+1})+(e^{\Delta F_i}-1)\,f(t_{i+1})]. \tag{3.41}$$

Примем во внимание, что в соответствии с (3.40), (3.27)

$$e^{\Delta L'_i}=e^{-F_{t_i}}e^{\Delta L_i}e^{F_{t_{i+1}}}[I+o(\Delta)].$$

$$e^{\Delta L'_i}-I=[e^{-F_{t_i}}\,(e^{\Delta L_i}-I)\,e^{F_{t_{i+1}}}+e^{\Delta F_i}-I]\,[I+o(\Delta)],$$

откуда следует (3.41). Доказательство закончено.

§ 3.3. ПЕРЕХОД К СПЕЦИАЛЬНОМУ СЛУЧАЮ

1. Пусть операторы $L(t)$, $L^*(t)$ имеют следующий специальный вид:

$$L(t)-L(s)=\int_s^t [A(y(\tau),\tau)\,d\tau+A_\rho(y(\tau),\tau)\,dy_\rho(\tau)]; \tag{3.42}$$

$$L^*(t)-L^*(s)=\int_s^t [d\tau\ {}^*A(y(\tau),\tau)+d^*y_\rho(\tau)\,{}^*A_\rho(y(\tau),\tau)] \tag{3.43}$$

Здесь при фиксированных $\tau\in T$ и $y\equiv\{y_1,\ldots,y_l\}\in R_l$ операторы A, A_ρ представляют собой линейные операторы на D_L, а ${}^*A$, ${}^*A_\rho$ — операторы на $D_L{}^*$. Функции $\{y_1(t),\ldots,y_l(t)\}$ являются компонентами диффузионного процесса с параметрами $a_\rho(y,t)$, $b_{\rho\sigma}(y,t)$, $\rho,\sigma=1,\ldots,l$.

Стохастические интегралы (3.42), (3.43) понимаются в смысле, описанном в гл. 2 после того, как операторы подействовали на функцию g_*. Предполагается, что на A, A_ρ,

$^*A$, $^*A_\rho$ (или на $Ag, \ldots, {}^*A_\rho g$), а также на a_ρ, $b_{\rho\sigma}$ наложены определенные условия, необходимые для существования интегралов (3.42), (3.43), а также для существования решения стохастических уравнений, встречающихся в дальнейшем.

Уравнение (3.2) обращается в стохастическое уравнение типа уравнений, рассмотренных в § 2.2. В силу (3.43) и леммы 2.3 оно имеет вид

$$f(t) - g = \int_t^u [dt\ {}^*A(y(\tau), \tau) f(\tau) + d^*y_\rho(\tau)\ {}^*A_\rho(y(\tau), \tau) f(\tau)] \quad (3.44)$$

(при обратном течении времени). Согласно сказанному в § 3.1 решение этого уравнения, когда оно существует и единственно, определяет полугруппу T_{tu}.

2. Рассмотрим теперь уравнение (3.17). Учитывая, что

$$e^{\Delta L_i} - I = \Delta L_i \left[I + \frac{1}{2} \Delta L_i + \frac{1}{6} \Delta L_i^2 + \ldots \right] =$$

$$= \Delta L_i \left[I + \frac{1}{24} \Delta L_i^2 + \ldots \right] e^{\frac{1}{2} \Delta L_i},$$

из (3.15) находим

$$f^\Delta(t_i) - g = \sum_{j=i}^{N-1} \left[\Delta L_j + \frac{1}{24} \Delta L_j^3 + \ldots \right] e^{\frac{1}{2} \Delta L_j} f^\Delta(t_{j+1}).$$

Но в силу (3.13) и (3.15) имеем

$$e^{\frac{1}{2} \Delta L_j} f^\Delta(t_{j+1}) = f^\Delta\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2} \right).$$

Поэтому

$$f^\Delta(t_i) - g = \sum_{j=i}^{N-1} \left[\Delta L_j + \frac{1}{24} \Delta L_j^3 + \ldots \right] f^\Delta\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2} \right). \quad (3.45)$$

Из (3.42) можно получить оценку

$$\frac{1}{24} \Delta L_j^3 + \ldots = O(\Delta^{3/2})$$

(которая, вообще говоря, неравномерна по $\omega \in \Omega'$ и $g \in D_L$). Отсюда следует, что предел в (3.45) совпадает с симметризованным стохастическим интегралом, определенным в § 2.1. Используя, кроме того, лемму 2.4, имеем

$$f(t) - g = \int\limits_t^u dL(\tau) f(\tau) = \int\limits_t^u [d\tau\, A(y(\tau), \tau) f(\tau) +$$
$$+ dy_\rho(\tau) A_\rho(y(\tau), \tau) f(\tau)]. \qquad (3.46)$$

Аналогичное рассмотрение можно провести и для других уравнений (3.19), (3.4). В результате интегральные выражения с $\bar{d}L$ заменяются на симметризованные интегралы того же вида с dL в смысле § 2.1. В частности,

$$\varphi(t) - \varphi(s) = \int\limits_s^t \varphi(\tau)\, dL(\tau). \qquad (3.47)$$

Пусть операторы (3.42), (3.43) соответствуют одной и той же полугруппе. Тогда решение уравнения (3.44) совпадает с решением уравнения (3.46). Приравнивая выражения в правых частях и учитывая формулу связи (2.14) стохастических интегралов, получаем отсюда связь между операторами A, A_ρ, с одной стороны, и $^*A$, $^*A_\rho$, с другой. Именно, из (2.14) при $\{x_\alpha\} = \{y_\rho, f\}$ имеем

$$^*A_\rho f\, dy_\rho = d^*y_\rho {}^*A_\rho f - \frac{1}{2} \frac{\partial^* A_\rho}{\partial y_\sigma} f b_{\rho\sigma}\, dt - \frac{1}{2}\, {}^*A_\rho b_{\rho f}\, dt,$$

где

$$b_{\rho f} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} [y_\rho(t+h) - y_\rho(t)][f(t+h) - f(t)].$$

В силу (3.44) $b_{\rho f} = -b_{\rho\sigma}{}^*A_\sigma f$. В итоге получаем

$$A_\rho = A_\rho^*;\ \ A = {}^*A + \frac{1}{2} \frac{\partial^* A_\rho}{\partial y_\sigma} b_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\, {}^*A_\rho {}^*A_\sigma b_{\rho\sigma}. \qquad (3.48)$$

Будем предполагать, что операторы $^*A_\rho {}^*A_\sigma$, $\frac{\partial A_\rho^*}{\partial y_\sigma}$ являются определенными на D_{L^*}, тогда операторы $L(t)$, $L^*(t)$ имеют одинаковую область определения: $D_L = D_{L^*}$.

3. Введем пространство D_L^2, представляющее собой пространство функций g, таких, что $\Delta L g \in D_L$. Для этого пространства можно рассматривать разложение

$$e^{\Delta L} g = \left(I + \Delta L + \frac{1}{2} \Delta L^2 + H\right) g, \qquad (3.49)$$

причем

$$Hg = O(\Delta^{3/2}).$$

Разлагая так каждый сомножитель произведения $e^{\Delta L_1} \ldots$ $\ldots e^{\Delta L_{N-1}}$ имеем

$$e^{\Delta L_1} \ldots e^{\Delta L_{N-1}} g = \Big[I + \sum_i \Delta L_i + \frac{1}{2} \sum_i \Delta L_i^2 + \\ + \sum_{i<j} \Delta L_i \Delta L_j \Big] g + O((u-t)^{3/2}). \tag{3.50}$$

Если здесь совершить предельный переход (3.16), то будем иметь

$$T_{tu} g = \Big\{ I + L(u) - L(t) + \int_t^u dL(\tau) [L(u) - L(\tau)] \Big\} g + \\ + O((u-t)^{3/2}). \tag{3.51}$$

Операторы T_{tu} в данном случае удовлетворяют уравнению

$$d_t T_{tu} = I + \int_t^u dL(\tau) T_{\tau u}.$$

Если искать решение этого уравнения при помощи последовательных приближений

$$d_t T_{tu}^{(n+1)} = I + \int_t^u dL(\tau) T_{\tau u}^{(n)} \quad (T_u^{(0)} = 1),$$

то мы получим некоторое формальное разложение, первые члены которого выписаны в (3.51). Укажем, кроме того, следующую формальную запись решения указанного уравнения в виде упорядоченного экспоненциального оператора:

$$T_{tu} = N \exp \Big[\int_s^t dL(\tau) \Big].$$

Здесь символ N обозначает хронологическое упорядочение стоящих за ним операторов.

Сравним (3.50) с разложением

$$e^{L(u) - L(t)} g = \Big\{ I + L(u) - L(t) + \frac{1}{2} \Big[L(u) - L(t) \Big]^2 \Big\} g + \\ + O((u-t)^{3/2}).$$

Их разность оказывается равной

$$e^{\Delta L_1} \ldots e^{\Delta L_{N-1}} - e^{L(u) - L(t)} = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \Big[\Delta L_i \Delta L_j - \Delta L_j \Delta L_i \Big] + \\ + O((u-t)^{3/2}). \tag{3.52}$$

Можно показать, что сумма коммутаторов

$$\sum \equiv \sum_{i<j} [\Delta L_i \Delta L_j - \Delta L_j \Delta L_i] =$$

$$= \sum_j \{[L(t_j) - L(t_1)]\Delta L_j - \Delta L_j [L(t_j) - L(t_1)]\} \qquad (3.53)$$

есть

$$O((u-t)^{3/2}).$$

В самом деле, подставляя (3.42) в (3.53) и пользуясь разложением

$$A_\rho(\tau) = A_\rho(t) + \frac{\partial A_\rho}{\partial y_\sigma}(t)[y_\sigma(\tau) - y_\sigma(t)] + O(t-\tau), \qquad (3.54)$$

убеждаемся, что

$$\sum = \left[A_\rho(t)\frac{\partial A_\pi}{\partial y_\sigma}(t) - \frac{\partial A_\pi}{\partial y_\sigma}(t) A_\rho(t)\right] \times$$

$$\times \sum_{i,j} \operatorname{sign}(j-i)[y_\sigma(t_j) - y_\sigma(t)]\Delta y_{\rho i}\Delta y_{\pi j} +$$

$$+ O((u-t)^{3/2}) = O((u-t)^{3/2}). \qquad (3.55)$$

Следовательно, из (3.52) согласно (3.16) имеем

$$T_{tu} = e^{L(u)-L(t)} + O((u-t)^{3/2}) = I + L(u) - L(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}[L(u) - L(t)]^2 + O((u-t)^{3/2}).$$

Отсюда легко получить одно выражение для T_{tu}, которым удобно пользоваться при малых $u-t=\Delta$. Учитывая (3.42) и соотношение (3.54), получаем

$$L(u) - L(t) = A(t)\Delta + A_\rho(t)\Delta y_\rho +$$

$$+ \frac{\partial A_\rho}{\partial y_\sigma}(t)\int_t^u [y_\sigma(\tau) - y_\sigma(t)]\, dy_\rho(\tau) + O(\Delta^{3/2}) \qquad (3.56)$$

и, следовательно,

$$T_{tu} = I + A(t)\Delta + A_\rho(t)\Delta y_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial y_\sigma}(t) Y_{\sigma\rho} +$$

$$+ \frac{1}{2} A_\rho(t) A_\sigma(t)\Delta y_\rho \Delta y_\sigma + O(\Delta^{3/2}), \qquad (3.57)$$

где

$$\Delta y_\rho = y_\rho(u) - y_\rho(t);$$

$$Y_{\sigma\rho} = \int_t^u [y_\sigma(\tau) - y_\sigma(t)]\, dy_\rho(\tau).$$

4. Проверим выполнение в рассматриваемом случае использованных в § 3.1 и § 3.2 условий (3.24), (3.36), (3.37), носящих коммутационный характер.

В соответствии с (3.21) и (3.49) имеем

$$S_{t_i t_{i+1}} = I + \Delta L_i + \frac{1}{2}\Delta L_i^2 + O(\Delta^{3/2});$$

$$S_{t_{i-1} t_i} = I + \Delta L_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta L_{i-1}^2 + O(\Delta^{3/2});$$

$$S_{t_{i-1} t_{i+1}} = I + \Delta L_{i-1} + \Delta L_i + \frac{1}{2}(\Delta L_{i-1} + \Delta L_i)^2 + O(\Delta^{3/2}).$$

Отсюда получаем

$$S_{ti-1ti+1} - S_{t_{i-1} t_i} S_{t_i t_{i+1}} = \frac{1}{2}[\Delta L_i \Delta L_{i-1} - \Delta L_{i-1}\Delta L_i] + O(\Delta^{3/2}).$$

Производя разложение (3.54) в одной и той же точке $t = t_i$ для обоих операторов, легко убедиться, что

$$\Delta L_i \Delta L_{i-1} - \Delta L_{i-1}\Delta L_i = O(\Delta^{3/2}).$$

Следовательно,

$$S_{t_{i-1} t_{i+1}} - S_{t_{i-1} t_i} S_{t_i t_{i-1}} = O(\Delta^{3/2}). \tag{3.58}$$

Перейдем к (3.36). Учитывая (3.49), а также аналогичное разложение для $e^{-\frac{1}{2}\Delta F_i}$ и $e^{\Delta L_i + \Delta F_i}$, непосредственно получаем

$$e^{-\frac{1}{2}\Delta F_i} e^{\Delta L_i + \Delta F_i} e^{-\frac{1}{2}\Delta F_i} - e^{\Delta L_i} = O(\Delta^{3/2}). \tag{3.59}$$

Несколько сложнее проверка последнего условия (3.37). Составим для операторов $\Delta L_i''$ разность

$$\begin{gathered} e^{\Delta L_1''} \ldots e^{\Delta L_{N-1}''} - [I + \Delta L_1'' + \ldots + \Delta L_{N-1}' + \\ + \frac{1}{2}(\Delta L_1'' + \ldots \Delta L_{N-1}'')^2 + \ldots] = \frac{1}{2}\sum{}'' + O((u-t)^{3/2}), \end{gathered} \tag{3.60}$$

аналогичную (3.52). При этом согласно (3.34) имеем

$$\sum{}'' = \sum_{i<j}[\Delta L_i'' \Delta L_j'' - \Delta L_j'' \Delta L_i''] =$$

$$= \sum_j \{[L'(t_j) - L'(t)]\,\Delta L''_j - \Delta L''_j\,[L'(t_j) - L'(t)]\} + o_\Delta(1).$$

Подставим сюда (3.33) и явные выражения для оператора

$$L'(t_j) - L'(t) = \int_t^{t_j} [A'\,d\tau + A'_\rho\,dy_\rho(\tau)];$$

$$(A'(\tau) = e^{-F_\tau} A(\tau)\,e^{F_\tau} + f(\tau);\ A'_\rho(\tau) = e^{-F_\tau} A_\rho(\tau)\,e^{F_\tau} + f_\rho(\tau);$$
$$dF_\tau = f(\tau)\,d\tau + f_\rho(\tau)\,dy_\rho(\tau)).$$

После этого по аналогии с (3.55) получим, что

$$\sum'' = O((u-t)^{3/2}) + o_\Delta(1).$$

Совершая предельный переход, из (3.60) при учете (3.34) поэтому будем иметь

$$\lim_{\Delta\to 0} e^{\Delta L''_1} \ldots e^{\Delta L''_{N-1}} - e^{L'(u) - L'(t)} = O((u-t)^{3/2}). \qquad (3.61)$$

Выведенные соотношения (3.58), (3.59), (3.61) согласуются с условиями (3.24), (3.36), (3.37), но в отличие от этих условий нами здесь не доказано, что оценки $O(\Delta^{3/2})$ выполняются равномерно по всем $g \in D_L^2$, поэтому из (3.58), (3.59), (3.61) еще непосредственно не следует справедливость этих соотношений для замыкания пространства D_L^2. Мы не будем проводить более сложного и полного обоснования указанных условий, а приведем независимый от этих условий вывод главного результата, используемого в дальнейшем, — теоремы 3.3.

5. Для краткого вывода формулы (3.32) воспользуемся тем, что симметризованные стохастические интегралы, как отмечалось в § 2.1, допускают простые правила преобразования.

Функция

$$f(t) = \int_t^u \mu_{tu}(x, dx')\,g(x'),$$

как указывалось, удовлетворяет уравнению (3.46), т. е.

$$-df(t) = dL(t)\,f(t). \qquad (3.62)$$

Согласно формуле (3.31) преобразования мер, имеем

$$f'(t) \equiv \int_t^u \mu'_{tu}(x, dx')\,g'(x') = e^{-F_t} f(t), \qquad (3.63)$$

если

$$e^{F_{u(x)}} g'(x) = g(x).$$

Применяя к (3.63) обычные простые правила дифференцирования, получаем

$$df'(t) = e^{-F_t}\, df(t) - dF_t e^{-F_t} f(t).$$

Подставляя сюда (3.62) и снова учитывая (3.63), находим

$$df'(t) = -[e^{-F_t}\, dL(t) + dF_t e^{-F_t}]\, f(t) =$$

$$= -[e^{-F_t}\, dL(t)\, e^{F_t} + dF_t]\, f'(t).$$

Сравнивая этот результат с уравнением

$$df'(t) = -dL'(t)\, f'(t),$$

имеем

$$dL'(t) = e^{-F_t}\, dL(t)\, e^{F_t} + dF_t,$$

что совпадает с (3.32).

Дадим также вывод формулы (3.38), которую можно записать

$$dL'^*(t) = e^{-F_t}\, d^*L^*(t)\, e^{F_t} - d^*(e^{-F_t})\, e^{F_t}. \tag{3.64}$$

Преобразуя правую часть равенства

$$f'(t_i) - f'(t_{i+1}) = e^{-F_{t_i}} f(t_i) - e^{-F_{t_{i+1}}} f(t_{i+1})$$

к виду

$$e^{-F_{t_i}} [f(t_i) - f(t_{i+1})] - [e^{-F_{t_{i+1}}} - e^{-F_{t_i}}]\, f(t_{i+1})$$

и суммируя по i, имеем

$$f'(t_1) - f'(t_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \{e^{-F_{t_i}} [f(t_i) - f(t_{i+1})] -$$

$$- [e^{-F_{t_{i+1}}} - e^{-F_{t_i}}]\, f(t_{i+1})\}.$$

Подставим сюда

$$f(t_i) - f(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dL(\tau)\, f(\tau) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} d^*L^*(\tau)\, f(\tau)$$

и совершим предельный переход $\Delta \to 0$. Используя определение стохастического интеграла Ито и лемму 2.3, получаем

$$f'(t) - f'(u) = \int_t^u e^{-F_\tau} d^*L^*(\tau) f(\tau) - \int_t^u d^*(e^{-F_\tau}) f(\tau),$$

т. е. формулу (3.64), поскольку $f(\tau) = e^{F_\tau} f'(\tau)$ и

$$f'(t) - f'(u) = \int_t^u d^*L'^*(\tau) f'(\tau).$$

§ 3.4. ДИФФУЗИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СТАТИСТИКА ПРИРАЩЕНИЙ

1. Сделаем еще несколько предположений относительно специального вида операторов $L(t)$ и фазового пространства E. Пусть E — m-мерное вещественное пространство R_m с определенными на нем борелевскими множествами. Координаты этого пространства будем обозначать $x = \{x_1, ..., x_m\}$. Операторы $L(t)$ будем предполагать диффузионными, т. е. примем следующий конкретный вид входящих в (3.42) операторов:

$$A(y, t) = c^0(x, y, t) + a^0_\alpha(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b^0_{\alpha\beta}(x, y, t)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta};$$

$$A_\rho(y, t) = c^0_\rho(x, y, t) + a^0_{\rho\alpha}(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \tag{3.65}$$

Здесь предполагается суммирование по индексам α, β, пробегающим значения $1, ..., m$. Функции c^0, $\overset{0}{a_\alpha}$ и др. удовлетворяют условиям ограниченности и однократной дифференцируемости по всем аргументам.

В соответствии с формулами связи (3.48) тем самым определены аналогичные выражения для второго семейства операторов:

$${}^*A(y, t) = {}^*c^0(x, y, t) + {}^*a^0_\alpha(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\,{}^*b^0_{\alpha\beta}(x, y, t)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}; \tag{3.66}$$

$${}^*A_\rho(y, t) = c^0_\rho(x, y, t) + a^0_{\rho\alpha}(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

где

$${}^*c^0 = c^0 + \frac{1}{2}\left(c^0_\rho c^0_\sigma + a^0_{\rho\alpha}\frac{\partial c^0_\sigma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial c^0_\rho}{\partial y_\sigma}\right) b_{\rho\sigma};$$

$$^*a^0_\alpha = a^0_\alpha + \left(c^0_\rho a^0_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2} a^0_{\rho\beta} \frac{\partial a^0_{\sigma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial a^0_{\rho\alpha}}{\partial y_\sigma} \right) b_{\rho\sigma}; \qquad (3.67)$$

$$^*b^0_{\alpha\beta} = b^0_{\alpha\beta} + a^0_{\rho\alpha} a^0_{\sigma\beta} b_{\rho\sigma}.$$

Уравнения (3.46), (3.44) теперь принимают вид

$$-df = \left[c^0 f + a^0_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b^0_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] dt + \left[c^0_\rho f + a^0_{\rho\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \right] dy_\rho; \qquad (3.68)$$

$$-df = \left[{}^*c^0 f + {}^*a^0_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} {}^*b^0_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] dt + \\ + d^* y_\rho \left[c^0_\rho f + a^0_{\rho\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \right].$$

Кроме них, можно также рассматривать уравнение

$$-df = \left[c^{0*} f + a^{0*}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b^{0*}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] dt + c^0_\rho d^* y_\rho f + \\ + a^0_{\rho\alpha} d^* y_\rho \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad (3.69)$$

коэффициенты которого нетрудно связать с коэффициентами (3.67). Пользуясь формулой (2.15), где $\{x_\alpha\}$ заменяются на $\{y_\rho\}$, имеем

$$a^0_{\rho\alpha} d^* y_\rho = d^* y_\rho a^0_{\rho\alpha} - \frac{\partial a^0_{\rho\alpha}}{\partial y_\sigma} b_{\rho\sigma} dt;$$

$$c^0_\rho d^* y_\rho = d^* y_\rho c^0_\rho - \frac{\partial c^0_\rho}{\partial y_\sigma} b_{\rho\sigma} dt.$$

Подставляя эти выражения в правую часть (3.69) и приравнивая ее правой части второго уравнения (3.68), находим

$$c^{0*} = {}^*c^0 + \frac{\partial c^0_\rho}{\partial y_\sigma} b_{\rho\sigma}; \quad a^{0*}_\alpha = {}^*a^0_\alpha + \frac{\partial a^0_{\rho\alpha}}{\partial y_\sigma} b_{\rho\sigma}; \quad b^{0*}_{\alpha\beta} = {}^*b^0_{\alpha\beta}$$

и в силу (3.67)

$$c^{0*} = c^0 + \frac{1}{2} \left(c^0_\rho c^0_\sigma + a^0_{\rho\alpha} \frac{\partial c^0_\sigma}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial c^0_\rho}{\partial y_\sigma} \right) b_{\rho\sigma}; \qquad (3.70)$$

$$a^{0*}_\alpha = a^0_\alpha + \left(c^0_\rho a^0_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2} a^0_{\rho\beta} \frac{\partial a^0_{\sigma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial a^0_{\rho\alpha}}{\partial y_\sigma} \right) b_{\rho\sigma};$$

$$b^{0*}_{\alpha\beta} = b^0_{\alpha\beta} + a^0_{\rho\alpha} a^0_{\sigma\beta} b_{\rho\sigma}.$$

По аналогии с (3.65), (3.66) удобно обозначить

$$A^* = c^{0*} + a^{0*}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b^{0*}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Тогда (3.69) можно записать

$$-df = A^* f\, dt + A_\rho\, d^* y_\rho f.$$

Сравнение этого равенства с (3.2) показывает, что

$$dL^* = A^*\, dt + A^*_\rho\, d^* y_\rho$$

(аналог (3.43)). Соотношения (3.70) эквивалентны формулам связи

$$A^* = A + \frac{1}{2}\left[A_\rho A_\sigma + \frac{\partial A_\rho}{\partial y_\sigma}\right] b_{\rho\sigma} \quad (A^*_\rho = A_\rho) \tag{3.71}$$

Последние являются аналогами формул (3.48) и, кроме того, непосредственно согласуются с формулой (2.35).

2. В настоящем параграфе мы исследуем связь между операторами данного процесса и статистикой приращений $\Delta x = x(u) - x(t) = \{x_1(u) - x_1(t), \ldots, x_m(u) - x_m(t)\}$. Мера, описывающая эти приращения, получается из меры $\mu_{tu}(x, dx')$ простым сдвигом в R_m. Рассмотрим функцию

$$\Theta(q \mid x(t)) = \int \exp\{q_\alpha [x_\alpha(u) - x_\alpha(t)]\}\, \mu_{tu}(x(t), dx(u)).$$

Ввиду того что мера μ_{tu} не обязательно нормирована, указанная функция не обладает свойством $\Theta(0 | x(t)) = 1$. Если, однако, добавить условие $x(u) \in E$, то соответствующая функция

$$\Theta(q \mid x(t), x(u) \in E) = \frac{\Theta(q \mid x(t))}{\mu_{tu}(x(t), E)} \tag{3.72}$$

уже будет обладать (при $q_\alpha = iv_\alpha$) всеми свойствами характеристической функции.

При помощи операторов T_{tu} равенство (3.72) можно записать

$$\Theta(q \mid x(t), E) = \frac{e^{-q_\alpha x_\alpha} T_{tu} e^{q_\alpha x_\alpha}}{T_{tu} 1}. \tag{3.73}$$

Подставляя сюда (3.57) (см. также (3.56)), получаем следующий результат.

Теорема 3.4. *Для марковских мер, рассмотренных в § 3.3, характеристическая функция приращений при малых $u - t = \Delta$ определяется формулой*

$$\Theta(q \mid x(t), E) = \frac{1 + e^{-q_\alpha x_\alpha}\left[\Delta L + \frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma A_\rho A_\sigma\right] e^{q_\alpha x_\alpha}}{1 + \left[\Delta L + \frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma A_\rho A_\sigma\right] 1} + O(\Delta^{3/2}). \tag{3.74}$$

$$(A_\rho = A_\rho(x, y(t)\,t)).$$

Конкретизируем эту формулу применительно к операторам (3.65). Подставляя (3.56), (3.65) в (3.74), а также в формулу

$$\mu_{tu}(x, E) = 1 + \left[\Delta L + \frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma A_\rho A_\sigma\right] 1 + O(\Delta^{3/2})$$

(см. (3.57)), находим после несложных вычислений

$$\Theta(q \mid x, E) = 1 + \left(a^0_\alpha q_\alpha + \frac{1}{2} b^0_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta\right)\Delta + a^0_{\rho\alpha} q_\alpha \Delta y_\rho +$$
$$+ \frac{\partial a^0_{\rho\alpha}}{\partial y_\sigma} q_\alpha Y_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma \left[a^0_{\rho\alpha} a^0_{\sigma\beta} \cdot q_\alpha q_\beta + a^0_{\rho\alpha}\frac{\partial a^0_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} q_\beta\right] + O(\Delta^{3/2}); \tag{3.75}$$

$$\mu_{tu}(x, E) = 1 + c^0\Delta + c^0_\rho \Delta y_\rho + \frac{\partial c^0_\rho}{\partial y_\sigma} Y_{\sigma\rho} +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma \cdot \left(c^0_\rho c^0_\sigma + a^0_{\rho\beta}\frac{\partial c^0_\sigma}{\partial x_\beta}\right) + O(\Delta^{3/2}),$$

где

$$Y_{\sigma\rho} = \int_t^u [y_\sigma(\tau) - y_\sigma(t)]\, dy_\rho(\tau); \qquad Y_{\sigma\rho} + Y_{\rho\sigma} = \Delta y_\sigma \Delta y_\rho.$$

Обозначая в соответствии с (П. 1.1)*

$$\mathbf{M}_\mu[\xi \mid x] = [\mu_{tu}(x, E)]^{-1}\int \xi(x')\,\mu_{tu}(x, dx'), \tag{3.76}$$

найдем условные моменты приращений Δx. Пользуясь очевидной формулой

$$\mathbf{M}_\mu[\Delta x_\alpha \ldots \Delta x_\omega \mid x] = \left[\frac{\partial}{\partial q_\alpha} \ldots \frac{\partial}{\partial q_\omega}\Theta(q \mid x, E)\right]_{q=0},$$

из (3.75) легко получить

$$\mathbf{M}_\mu[\Delta x_\alpha \mid x] = a^0_\alpha \Delta + a^0_{\rho\alpha}\Delta y_\rho + \frac{\partial a^0_{\rho\alpha}}{\partial y_\sigma} Y_{\sigma\rho} +$$

---

* См. приложение 1.

$$+\frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma a^0_{\rho\beta}\frac{\partial a^0_{\sigma\alpha}}{\partial x_\beta}+O(\Delta^{3/2}); \tag{3.77}$$

$$\mathbf{M}_\mu[\Delta x_\alpha \Delta x_\beta \mid x] = b^0_{\alpha\beta}\Delta + \frac{1}{2}\Delta y_\rho \Delta y_\sigma a^0_{\rho\alpha}a^0_{\sigma\beta}+O(\Delta^{3/2});$$

$$\mathbf{M}_\mu[\Delta x_\alpha \Delta x_\beta \Delta x_\gamma \mid x] = O(\Delta^{3/2}).$$

3. Наряду с указанными приближенными формулами можно привести ряд точных результатов.

Произведем замену мер

$$\mu'_{tu}(x, dx') = e^{-q_\alpha x_\alpha}\mu_{tu}(x, dx')\, e^{q_\alpha x'_\alpha}, \tag{3.78}$$

тогда формула (3.73) примет вид

$$\Theta(q \mid x, E) = \frac{\mu'_{tu}(x, E)}{\mu_{tu}(x, E)} = \frac{T'_{tu}1}{T_{tu}1}\ . \tag{3.79}$$

Пользуясь теоремой 3.3 и учитывая 3.42, находим инфинитезимальный оператор новой системы мер

$$dL' = e^{-q_\alpha x_\alpha}dL e^{q_\alpha x_\alpha} = A'\,dt + A'_\rho\, dy_\rho;$$

$$A' = e^{-q_\alpha x_\alpha}Ae^{q_\alpha x_\alpha};\quad A'_\rho = e^{-q_\alpha x_\alpha}A_\rho e^{q_\alpha x_\alpha},$$

т. е. в силу (3.65)

$$dL' = c'^0\,dt + c'^0_\rho dy_\rho + (a'^0_\alpha\,dt + a^0_{\rho\alpha}\,dy_\rho)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}b^0_{\alpha\beta}\,dt\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\ , \tag{3.80}$$

где

$$c'^0 = c^0 + a^0_\alpha q_\alpha + \frac{1}{2}b^0_{\alpha\beta}q_\alpha b_\beta;$$

$$c'^0_\rho = c^0_\rho + a^0_{\rho\alpha}q_\alpha;\quad a'^0_\alpha = a^0_\alpha + b^0_{\alpha\beta}q_\beta. \tag{3.81}$$

Если принять во внимание формулы связи (3.71), то нетрудно убедиться, что аналогичным образом преобразуется и второй инфинитезимальный оператор:

$$dL'^* = e^{-q_\alpha x_\alpha}dL^* e^{q_\alpha x_\alpha} = A'^*\,dt + A'_\rho\, dy_\rho; \tag{3.82}$$

$$A'^* = e^{-q_\alpha x_\alpha}A^* e^{q_\alpha x_\alpha} = c^{0*} + a^{0*}_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+q_\alpha\right)+$$

$$+\frac{1}{2}b^{0*}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+q_\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}+q_\beta\right) = c'^{0*} + a'^{0*}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}b^{0*}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\ ; \tag{3.83}$$

$$A'_\rho = c'^0_\rho + a^0_{\rho\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

где

$$c'^{0*} = c^{0*} + a^{0*}_\alpha q_\alpha + \frac{1}{2} b^{0*}_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta; \qquad (3.84)$$

$$a'^{0*}_\alpha = a^{0*}_\alpha + b^{0*}_{\alpha\beta} q_\beta.$$

Обратимся к первой формуле (3.4). Применяя этот оператор к единице, получаем равенство, которое при помощи мер μ_{tu} можно записать

$$\mu_{tu}(x, E) = 1 + \int_t^u \int_E \mu_{t\tau}(x, dx') (d^* L^*(\tau) 1)(x').$$

Используя обозначение (3.76) условного математического ожидания, последнему равенству можно придать вид

$$\mu_{tu}(x, E) = 1 + \int_t^u \mu_{t\tau}(x, E) \mathbf{M}_\mu [d^* L^*(\tau) 1 \mid x].$$

Аналогичное стохастическое уравнение, конечно, можно записать и для другой меры

$$\mu'_{tu}(x, E) = 1 + \int_t^u \mu'_{t\tau}(x, E) \mathbf{M}_{\mu'} [d^* L'^*(\tau) 1 \mid x].$$

Подставляя сюда (3.82), (3.83), получаем

$$\mu'_{tu}(x, E) = 1 + \int_t^u \mu'_{t\tau}(x, E) \{\mathbf{M}_{\mu'} [c'^{0*}(\tau) \mid x] d\tau + \mathbf{M}_{\mu'} [c'^0_\rho(\tau) \mid x] d^* y_\rho\}.$$

Найденное уравнение является частным случаем уравнения (2.34) прн $k=1$. Пользуясь формулой (2.38), можно записать его решение

$$\mu'_{tu}(x, E) = \exp\left\{\int_t^u \left\{\mathbf{M}_{\mu'} [c'^{0*}(\tau) \mid x] d\tau + \mathbf{M}_{\mu'} [c'^0_\rho(\tau) \mid x] d^* y_\rho(\tau) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} \mathbf{M}_{\mu'} [c'^0_\rho(\tau) \mid x] \mathbf{M}_{\mu'} [c'^0_\sigma(\tau) \mid x] . b_{\rho\sigma} d\tau\right\}\right\} \equiv e^{\Phi(q)}. \qquad (3.85)$$

Существенно, что стоящее в экспоненте выражение является функцией от q. Эту функцию обозначаем $\Phi(q)$. Подставляя (3.84), (3.81) в (3.85), находим

$$\Phi(q)=\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[c^{0*}\,dt+c^0_\rho d^*y_\rho\,|\,x]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[c^0_\rho\,|\,x]\,\mathbf{M}_{\mu'}[c^0_\sigma\,|\,x]\,b_{\rho\sigma}\,d\tau+q_\alpha\left\{\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[a^{0*}_\alpha d\tau+a^0_{\rho\alpha}d^*y_\rho\,|\,x]-\right.$$

$$\left.-\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[c^0_\rho\,|\,x]\cdot\mathbf{M}_{\mu'}[a^0_{\sigma\alpha}\,|\,x]\,b_{\rho\sigma}\,d\tau\right\}+\frac{1}{2}q_\alpha q_\beta\left\{\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[b^{0*}_{\alpha\beta}\,|\,x]\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[a^0_{\rho\alpha}\,|\,x]\,\mathbf{M}_{\mu'}[a^0_{\sigma\beta}\,|\,x]\,b_{\rho\sigma}\,d\tau\right\}. \qquad (3.86)$$

Из полученных результатов, если принять во внимание формулу (3.79), будет вытекать, в частности, следующая

Теорема 3.5. *В рассматриваемом случае характеристическая функция приращений равна*

$$\Theta(q\,|\,x,E)=e^{\Phi(q)-\Phi(0)},$$

где функция $\Phi(q)$ *определяется формулой* (3.86).

В приведенном выше рассмотрении мы пользовались интегралами и уравнениями, определенными в смысле Ито. Разумеется, аналогичные выкладки, используя (3.80), (3.81), (2.36), можно провести и с интегралами в симметризованном смысле. Некоторые формулы при этом будут записываться короче. Так, выражение (3.86) будет иметь вид

$$\Phi(q)=\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[c^0\,d\tau+c^0_\rho dy_\rho\,|\,x]+q_\alpha\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[a^0_\alpha\,d\tau+a^0_{\rho\alpha}\,dy_\rho\,|\,x]+$$

$$+\frac{1}{2}q_\alpha q_\beta\int_t^u \mathbf{M}_{\mu'}[b^0_{\alpha\beta}\,|\,x]\,d\tau.$$

4. В заключение сформулируем теорему, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mu_{tu}(x,\Lambda)$, $\mu'_{tu}(x,\Lambda)$ — *марковские системы мер, связанные соотношением* (3.78) (*вторая из них зависит от* q, *а первая нет*) *и при любых* (*комплексных*) q *выполняется равенство*

$$\mu'_{tu}(x,E)=1+\int_s^u \mu'_{t\tau}(x,E)\,\mathbf{M}_{\mu'}[d^*N'(\tau)\,1\,|\,x], \qquad (3.87)$$

где $dN'(\tau)$ — *некоторый оператор, такой, что*

$$e^{q_\alpha x_\alpha} dN'(\tau) e^{-q_\alpha x_\alpha} \equiv dN(\tau) \tag{3.88}$$

не зависит от q. *Тогда* $dN(\tau) = dL^*(\tau)$ *есть инфинитезимальный оператор системы мер* μ_{tu}.

Доказательство. Учитывая (3.76), нетрудно видеть, что (3.87) эквивалентно равенству

$$\mu'_{tu}(x, E) = 1 + \int_t^u \mu'_{t\tau}(x, dx')(d^*N'1)(x')$$

или, вследствие (3.78),

$$\int \mu_{tu}(x, dx') e^{q_\alpha x'_\alpha} = e^{q_\alpha x_\alpha} + \int_t^u \int_E \mu_{t\tau}(x, dx') e^{q_\alpha x'_\alpha}(d^*N'1)(x').$$

Учитывая обозначение (3.88), получаем

$$\int \mu_{tu}(x, dx') e^{q_\alpha x'_\alpha} = e^{q_\alpha x_\alpha} + \int_t^u \mu_{t\tau}(x, dx')(d^*Ne^{q_\alpha x_\alpha})(x') =$$

$$= e^{q_\alpha x_\alpha} + \int_t^u (\mu_{t\tau} d^*N)(x, dx'') e^{q_\alpha x''_\alpha}$$

при любом q. Применение несколько обобщенной (на случай ненормированной меры) теоремы обращения (Лоэв [1], стр. 199) приводит к равенству

$$\mu_{tu}(x, \Lambda) = I(x, \Lambda) + \int_t^u (\mu_{t\tau} d^*N(\tau))(x, \Lambda)$$

($I(x, \Lambda)$ — индикатор множества Λ). Это равенство эквивалентно первому равенству (3.4) или (3.3) и вследствие единственности инфинитезимального оператора dL^* имеем $dL^* = dN$. Доказательство закончено. Вследствие (3.82) dN' совпадает с другим инфинитезимальным оператором dL'^* мер μ'_{tu}.

Глава 4

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДИФФУЗИОННЫХ МАРКОВСКИХ МЕР И ПРОИЗВОДНЫЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Материал этой главы нужен нам для применения общих результатов по условным марковским процессам, излагаемых в гл. 5, к важным частным случаям диффузионных процессов. Такая конкретизация проводится в главах 6 и 7, поэтому результаты указанных глав существенно основываются на материале настоящей главы.

По вопросу об абсолютной непрерывности мер диффузионных процессов в функциональном пространстве и о виде соответствующих производных имеется большое число работ: работы Камерона и Мартина [1], Прохорова [1], Скорохода [1], Гирсанова [1]. Результаты этих работ в основном были получены при помощи преобразования меры Винера. Теорема 4.1 этой главы в сущности повторяет указанные результаты. При этом приводится другой способ доказательства — такой способ, который удобен для обоснования следующей теоремы 4.2. Последняя теорема касается производной в функциональном пространстве, соответствующем части компонентов многомерного диффузионного процесса. По остальным компонентам как бы производится усреднение. Возможность получения каких-либо точных формул при такой постановке вопроса, насколько нам известно, еще не была отмечена. Теорема 4.2. удобна для обоснования результатов гл. 7.

Рассмотрение, проводимое в настоящей главе, упростилось бы, если бы мы потребовали невырожденности матрицы локальных дисперсий. Однако мы не идем на такое ограничение общности. Это вызывает некоторое усложнение формул, к которому, впрочем, легко привыкнуть. Вместо матрицы, обратной к матрице локальных дисперсий, в выражение для производной входит матрица, обратная к невырожденной подматрице матрицы локальных дисперсий. Кроме того, как необходимое условие абсолютной непрерывности мер появляется добавочное условие, наложенное на составляющую вектора сноса в дополнительном подпространстве. Понятия и обозначения, связанные с вырожденностью матрицы локальных дисперсий, приводятся в § 4.1.

Этот параграф несколько выпадает из общего строя настоящей главы, поскольку в нем не рассматриваются функциональные пространства. Однако он является необходимым для дальнейшего, поэтому мы его помещаем как вводный.

§ 4.1. НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ ДЛЯ МЕР С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ДИСПЕРСИЙ

1. Рассмотрение вырожденной матрицы дисперсий помогает распространить результаты § 4.3, § 4.4 и глав 6, 7 на случаи вырожденной матрицы локальных дисперсий.

Лемма 4.1. *Пусть матрица*

$$\hat{b} = \left\| \begin{matrix} b & \bar{b}^{+} \\ \bar{b} & \bar{\bar{b}} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$b = \| b_{\rho'\sigma'} \|; \quad \bar{b} = \| b_{\rho''\sigma'} \|; \quad \bar{b}^{+} = \| b_{\rho'\sigma''} \|; \quad \bar{\bar{b}} = \| b_{\rho''\sigma''} \|;$$
$$\rho', \sigma' = 1, \ldots, l'; \quad \rho'', \sigma'' = l' + 1, \ldots, l,$$

(крестик означает транспонирование)
является симметрической матрицей ранга l', причем $l' \times l$-матрица $\|b, \bar{b}^{+}\|$ также имеет ранг l', тогда

$$\det b \neq 0; \tag{4.1}$$

$$\bar{\bar{b}} = \bar{b} b^{-1} \bar{b}^{+}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Согласно условиям леммы можно подобрать такие коэффициенты $\alpha_{\rho''\tau'}$, что

$$b_{\rho''\sigma'} = \alpha_{\rho''\tau'} b_{\tau'\sigma'}; \quad b_{\rho''\sigma''} = \alpha_{\rho''\tau'} b_{\tau'\sigma''}, \tag{4.3}$$

или в матричной форме

$$\bar{b} = \alpha b; \quad \bar{\bar{b}} = \alpha \bar{b}^{+}$$

(индексы с одним штрихом пробегают значения $1, \ldots, l'$, а с двумя штрихами — значения $l'+1, \ldots, l$). Очевидно, что ранг матрицы не изменится, если из столбцов матрицы $\|b, \bar{b}^{+}\|$ вычитать линейные комбинации ее первых столбцов, т. е. если от $\|b, \bar{b}^{+}\|$ перейти к $\|b, \bar{b}^{+} - b\alpha^{+}\|$, где $b\alpha^{+} = \|b_{\rho'\tau'} \alpha_{\sigma''\tau'}\|$. Поэтому $\mathrm{Rang}\,\|b,\ \bar{b}^{+}-b\alpha^{+}\|=l'$, но в силу (4.3) и симметрии матрицы b имеем

$$\bar{b}^{+}-b\alpha^{+}=0. \tag{4.4}$$

Следовательно, $\mathrm{Rang}\,\|b,\ 0\|=l'$, что доказывает утверждение (4.1). Чтобы вывести (4.2), получим $\alpha^{+}=\bar{b}^{-1}\bar{b}^{+}$ из (4.4), транспонируем эту матрицу и подставим во второе равенство (4.3). Доказательство закончено.

Лемма 4.2. *Пусть $\hat{b}$ — матрица, рассмотренная в предыдущей лемме и являющаяся, кроме того, неотрицательно определенной, тогда существует $l\times l'$-матрица $\hat{\sigma}=\left\|\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right\|$, такая, что* $\det\sigma\neq 0$ и $\hat{b}=\hat{\sigma}\hat{\sigma}^{+}$, т. е.

$$\sigma\sigma^{+}=b\ (4.5);\quad \sigma\bar{\sigma}^{+}=\bar{b}^{+}\ (4.6);\quad \bar{\sigma}\bar{\sigma}^{+}=\bar{\bar{b}}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Формула $\det\sigma\neq 0$ и (4.5) вытекают из (4.1), поскольку из невырожденной положительно определенной матрицы всегда можно извлечь квадратный корень (можно даже подобрать симметричную матрицу σ). Подставляя (4.5) в (4.4) и обозначая $\sigma^{+}\alpha^{+}=\bar{\sigma}^{+}$, доказываем (4.6). Наконец, подстановка (4.5), (4.6) в (4.2) приводит к (4.7).

Лемма 4.3. *Пусть гауссовы случайные величины $(y_1, \ldots, y_l)$ имеют корреляционную матрицу $\hat{k}$ ранга l' со свойствами, указанными в предыдущих леммах, а также средние значения m_ρ, $\rho=1, \ldots, l$. Тогда соответствующая им мера $\nu(\Lambda)$ в l-мерном эвклидовом пространстве R_l определяется следующим выражением:*

$$\nu(\Lambda)=\int\limits_{\Gamma\Lambda}(2\pi)^{-\frac{l'}{2}}\det^{-\frac{1}{2}}k\ \times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}(y_{\rho'}-m_{\rho'})k^{-1}_{\rho'\tau'}(y_{\tau'}-m_{\tau'})\right]\ dy_1\ldots dy_{l'}, \tag{4.8}$$

где

$$\Gamma=\{y: y_{\rho''}-m_{\rho''}=k_{\rho''\tau'}\,k^{-1}_{\tau'\pi'}(y_{\pi'}-m_{\pi'}),\ \rho''=l'+1, \ldots, l\}$$

есть l'-мерная гиперплоскость.

Для доказательства применим лемму 4.2 к матрице $\hat{k}(=\hat{b})$ и запишем исходные случайные величины в виде

$$y_\rho=m_\rho+\sigma_{\rho\tau'}\xi_{\tau'},\qquad \rho=1, \ldots, l, \tag{4.9}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{l'}$ — независимые гауссовы случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Разрешая первые l' уравнений из (4.9) и подставляя результат в остальные $l—l'$ уравнений, получаем

$$\xi_{\tau'} = \sigma^{-1}_{\tau'\rho'} (y_{\rho'} - m_{\rho'}); \tag{4.10}$$

$$y_{\rho''} - m_{\rho''} = \sigma_{\rho''\tau'} \sigma^{-1}_{\tau'\pi'} (y_{\pi'} - m_{\pi'}). \tag{4.11}$$

Согласно (4.5), (4.6) имеем $\bar{k}k^{-1} = \bar{\sigma}\sigma^{-1}$, поэтому (4.11) эквивалентно равенству

$$y_{\rho''} - m_{\rho''} = k_{\rho''\tau'} k^{-1}_{\tau'\pi'} (y_{\pi'} - m_{\pi'}). \tag{4.12}$$

Оно доказывает, что мера ν действительно сосредоточена на гиперплоскости Г. Равенство (4.10) представляет собой невырожденное преобразование случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_{l'}$, имеющих плотность распределения

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_{l'}) = (2\pi)^{-\frac{l'}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\rho'} \xi^2_{\rho'}\right].$$

Преобразование этой плотности по обычным правилам и учет соотношения $\sigma^{+-1}\sigma^{-1} = k^{-1}$ обосновывает экспоненциальное выражение в (4.8). Доказательство закончено.

2. Приведем в заключение этого параграфа одну полезную лемму, касающуюся более сложного объекта — диффузионного марковского процесса, но тесно связанную с предыдущими леммами.

Лемма 4.4. *Пусть $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_{l'}(t)\}$ — диффузионный процесс с параметрами сноса $a_\rho(y, t)$ и матрицей локальных дисперсий $\hat{b}(y, t) = \|b_{\sigma\rho}(y, t)\|$. Предполагается, что все эти функции непрерывны по y и t и что при всех y, t из областей определения матрица $\hat{b}(y, t)$ удовлетворяет условиям лемм 4.1, 4.2. Тогда с вероятностью 1*

$$\int_\alpha^\beta (dy_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b^{-1}_{\tau'\pi'} d^* y_{\pi'}) = \int_\alpha^\beta (a_{\rho''} - b_{\rho''\pi'} b^{-1}_{\tau'\pi'} a_{\pi'})\, dt. \tag{4.13}$$

Для доказательства, в сущности, можно применить тот же прием, что и при доказательстве предыдущей леммы, но соотношения (4.10)—(4.12) записывать для дифференциалов. Поясним сказанное подробнее. Введем матрицы σ, $\bar{\sigma}$, определяемые леммой 4.2 ($\hat{\sigma}\hat{\sigma}^+ = \hat{b}$), и рассмотрим уравнения

$$y_\rho(\beta) - y_\rho(\alpha) = \int_\alpha^\beta [a_\rho\, dt + \sigma_{\rho\pi'} d^* \xi_{\pi'}(t)], \tag{4.14}$$

где $\xi_1(t), \ldots, \xi_{l'}(t)$ — независимые винеровские процессы.

Как известно (§ 2.2), эти уравнения определяют диффузионный процесс с параметрами сноса a_ρ и локальными дисперсиями $\sigma_{\rho\pi'}\sigma_{\tau\pi'} = b_{\rho\tau}$, т. е. процесс, определенный в условии леммы 4.4.

Взяв из (4.14) l' уравнений

$$\int_\alpha^\beta [dy_{\rho'} - a_{\rho'}\, dt] = \int_\alpha^\beta \sigma_{\rho'\pi'}\, d^*\xi_{\pi'}$$

и пользуясь леммой 2.3, имеем

$$\int_\alpha^\beta \sigma_{\pi'\rho'}^{-1} [d^* y_{\rho'} - a_{\rho'}\, dt] = \xi_{\pi'}(\beta) - \xi_{\pi'}(\alpha). \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в остальные уравнения

$$\int_\alpha^\beta [dy_{\rho''} - a_{\rho''}\, dt] = \int_\alpha^\beta \sigma_{\rho''\pi'}\, d^*\xi_{\pi'}$$

и снова используя лемму 2.3, получаем

$$\int_\alpha^\beta [dy_{\rho''} - a_{\rho''}\, dt] = \int_\alpha^\beta \sigma_{\rho''\pi'}\, \sigma_{\pi'\rho'}^{-1} [d^* y_{\rho'} - a_{\rho'}\, dt], \tag{4.16}$$

что доказывает (4.13).

Следствие 4.1. *Для диффузионного процесса, рассмотренного в лемме 4.4, с вероятностью 1 существует предел*

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} (dy_{\rho''} - b_{\rho''\tau'}\, b_{\tau'\pi'}^{-1}\, d^* y_{\pi'}) = a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'}\, b_{\tau'\pi'}^{-1}\, a_{\pi'}. \tag{4.17}$$

§ 4.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ σ-АЛГЕБР В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Двухпараметрическая марковская система мер $\mu_{st}(z, \Lambda)$, $z \in E$, $\Lambda \in \mathscr{E}$ в измеримом пространстве $(E, \mathscr{E})$ порождает меры в функциональном пространстве $E^T = \prod_{t\in T} E_t$, где E_t — копии пространства E. Точки этого пространства будем обозначать $z(\cdot) = \{z(t),\ t \in T\}$.

Для однозначного задания меры в функциональном пространстве нужно ввести «начальное» распределение или вместо этого, добавить условие

$$z(s) = e,$$

где $e \in E$. Меру в функциональном пространстве, соответствующую этому последнему случаю, будем обозначать $\mu_{z(s)}$.

Введем обозначения для σ-алгебр в функциональном пространстве. Пусть $\mathscr{N}_t$, $t\in T$ есть σ-алгебра, порожденная множествами $\{z(\cdot):z(t)\in\Lambda\}$, $\Lambda\in\mathscr{E}$. Более обще пусть $\mathscr{N}_{\widetilde{T}}$ обозначает минимальную σ-алгебру, порожденную множествами $\{z(\cdot):z(t)\in\Lambda\}$, $t\in\widetilde{T}$, $\Lambda\in\mathscr{E}$, т. е.

$$\mathscr{N}_{\widetilde{T}}=\sigma\Big(\bigcup_{t\in\widetilde{T}}\mathscr{N}_t\Big).$$

Далее, σ-алгебру, порожденную множествами

$$\{z(\cdot):z(t)\in\Lambda,\ t\in\widetilde{\widetilde{T}}\},\quad \widetilde{\widetilde{T}}\subset\widetilde{T},\quad \Lambda\in\mathscr{E},$$

будем обозначать $\mathscr{M}_{\widetilde{T}}$.

Как известно (например, Дынкин [2], стр. 32), при некоторых топологических условиях (которые мы предполагаем выполняющимися) согласованные меры для конечного числа моментов времени, в данном случае меры

$$\int\limits_{\Lambda_1}\ldots\int\limits_{\Lambda_{n-1}}\mu_{st_1}(e,dx_1)\ldots\mu_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1},\Lambda_n),\quad \Lambda_1,\ \ldots,\ \Lambda_n\in\mathscr{E},$$

единственным образом определяют меру $\mu_{z(s)}$ в измеримом пространстве $(E^T,\mathscr{N}_{\widetilde{T}})$ при любом $\widetilde{T}\subset T$.

Кроме того, для сепарабельной модификации процесса $z(\cdot)$ мера $\mu_{z(s)}$ на $\mathscr{N}_T$ однозначно определяет меру на σ-алгебрах $\mathscr{M}_{\widetilde{T}}\subset\mathscr{M}_T$ (например, Лоэв [1], стр. 529). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением сепарабельных процессов (относительно $\mathscr{E}$). Для них существует счетное множество S (множество сепарабельности) такое, что множество

$$\{z(\cdot):z(t)\in\Lambda,\ t\in\widetilde{T}\}\in\mathscr{M}_{\widetilde{T}}$$

отличается от

$$\{z(\cdot):z(t)\in\Lambda,\ t\in\widetilde{T}S\}\in\mathscr{N}_{\widetilde{T}S}$$

самое большее на подмножество множества $\Gamma\in\mathscr{M}_{\widetilde{T}}$ меры нуль.

Таким образом, если пополнить σ-алгебру $\mathscr{N}_{\widetilde{T}S}$ подмножествами нулевой $\mu_{z(s)}$-меры из $\mathscr{M}_{\widetilde{T}}$ и соответствующую пополненную σ-алгебру обозначить $\overline{\mathscr{N}}_{\widetilde{T}S}$, то будем иметь

$$\mathscr{M}_{\widetilde{T}}\subset\overline{\mathscr{N}}_{\widetilde{T}S}.$$

В соответствии с этим для сепарабельных процессов наиболее широкой σ-алгеброй можно считать σ-алгебру $\overline{\mathscr{N}}_{TS}$. Пространство с мерой $(E^T,\overline{\mathscr{N}}_{TS},\mu_{z(s)})$ можно выбрать за исходное. При таком подходе процесс $z(\cdot)$ по терминологии Дуба ([1], стр. 67) является непосредственно заданным процессом.

Другой подход, как известно, заключается в том, что рассматривается абстрактное измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{B})$, а процесс $z(\cdot)=z(\cdot, \omega)$ вводится как $\mathscr{B}$-измеримая функция на нем. При этом нужно постулировать, что прообразы всех описанных выше σ-алгебр содержатся в $\mathscr{B}$. Все утверждения относительно σ-алгебр $\mathscr{N}^0_{\widetilde{T}}, \mathscr{M}_{\widetilde{T}}, \overline{\mathscr{N}^0}_{\widetilde{T}}$ и др. в E^T, как правило, можно перенести на их прообразы в Ω. Мы на этом не будем останавливаться и не будем вводить специальных обозначений для σ-алгебр в Ω, обозначая их, если понадобится, теми же буквами.

В том частном случае, когда $\widetilde{T}$ есть интервал $[\alpha, \beta]$, будем употреблять обозначение $\mathscr{N}^0_{[\alpha,\beta]}=\mathscr{N}^{0\beta}_{\alpha}$ и аналогично для других σ-алгебр.

2. Рассмотрим диффузионный процесс $z(\cdot)=y(\cdot)$, определяемый уравнением (4.14). В этом случае мера $\mu_{z(s)}$ является вероятностной и при любых s и $z(s)$ она сосредоточена на множестве непрерывных функций. Множеству остальных функций можно приписать меру нуль (или с самого начала рассматривать только множество непрерывных функций). Тогда процесс будет сепарабельным, причем множеством сепарабельности S будет любое всюду плотное в T множество. (В пространстве непрерывных функций σ-алгебры $\mathscr{N}^0_T$ и $\mathscr{M}_T$ будут попросту совпадать.)

Если винеровские процессы $\xi_{\rho'}(t)$ в (4.14) считать $\mathscr{B}$-измеримыми функциями от $\omega\in\Omega$, то интегральное уравнение (4.14), как известно, определяет процесс $y(\cdot) = \{y(t,\omega)\}$ как $\mathscr{B}$-измеримую ω-функцию.

В дальнейшем для получения различных результатов мы будем рассматривать Δ-разбиение $S_\Delta=\{t_1, ..., t_N\}$ интервала $[s, t]\in T$. При этом подразумевается, что $S_\Delta\subset S_{\Delta'}$ при $\Delta'<\Delta$. Будет использоваться то обстоятельство, что предельное множество $S^t_s=\lim\limits_{\Delta\to 0} S_\Delta$ является множеством сепарабельности и, следовательно,

$$\overline{\mathscr{N}^0}_{S^t_s}\supset\mathscr{M}^t_s.$$

Наряду с точным уравнением (4.14) иногда полезно рассматривать соответствующее уравнение в конечных разностях

$$\widetilde{z}_{\rho k}-z_\rho(s)=\sum_{i=0}^{k-1}\{a_\rho(\widetilde{z}_i,\ t_i)(t_{i+1}-t_i)+$$

$$+\sigma_{\rho\pi'}(\widetilde{z}_i,\ t_i)[\xi_{\pi'}(t_{i+1})-\xi_{\pi'}(t_i)]\}. \tag{4.18}$$

$$(\widetilde{z}_{\rho i}=\widetilde{z}_\rho(t_i),\quad t_0=s).$$

Получающийся при этом приближенный процесс $\{\widetilde{z}(t_1), ...$ $..., \widetilde{z}(t_N)\}$ в некотором смысле близок к точному процессу

$z(\cdot)$ и соответствующая ему мера $\widetilde{\mu}_{z(s)}$ на $\mathcal{N}'_{s_\Delta}$ близка к мере $\mu_{z(s)}$. Сформулируем соответствующее утверждение в виде леммы, которая нам пригодится в дальнейшем.

Будем предполагать, что на всем интервале $[s, t]$ ранг l' матрицы $\|b_{\rho\sigma}\|$ не изменяется и не нарушается линейная независимость ее l' первых строк. Тогда вместо всех компонентов процесса $z(\cdot)$ можно рассматривать l' первых его компонентов $z(\cdot) = \{z_{\rho'}(\cdot),\ \rho' = 1, \ldots, l'\}$. σ-алгебры в пространстве E^T, соответствующие этим компонентам, будем отмечать штрихом.

Лемма 4.5. *Мера $\mu_{z(s)}$ точного процесса и мера $\widetilde{\mu}_{z(s)}$ приближенного процесса* (4.18) *абсолютно непрерывны на σ-алгебре $\mathcal{N}'_{s_\Delta}$, причем производная Радона—Никодима*

$$\frac{\widetilde{\mu}_{z(s)}(dz'_1 \ldots dz'_N)}{\mu_{z(s)}(dz'_1 \ldots dz'_N)} = \widetilde{f}(z(\cdot)) \tag{4.19}$$

стремится к 1 при $\Delta \to 0$ почти всюду относительно $\mu_{z(s)}$.

Доказательство. Сравним меры $\widetilde{\mu}_{z_k}(dz'_{k+1})$ и $\mu_{z_k}(dz'_{k+1})$, соответствующие одному элементарному интервалу $[t_k, t_{k+1}]$. Мера $\widetilde{\mu}_{z_k}(dz'_{k+1})$, как видно из (4.18), соответствует гауссовому распределению для разности $\zeta_{\rho'} = z_{\rho',k+1} - z_{\rho',k}$ со средним значением $a_{\rho'}(z_k, t_k)(t_{k+1} - t_k)$ и матрицей дисперсий $b_{\rho'\sigma'}(z_k, t_k) \times$ $\times (t_{k+1} - t_k)$. Мера $\mu_{z_k}(dz'_{k+1})$ имеет плотность распределения $p_{z_k}(\zeta, t) \equiv p$, которая удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_{\rho'}}[a_{\rho'}(z_k + \zeta, t)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_{\rho'}\partial z_{\sigma'}}[b_{\rho'\sigma'}(z_k + \zeta, t)p].$$

Приближенное решение этого уравнения при малых $t - t_k$ удобно находить при помощи преобразования Фурье, т. е. рассматривая характеристическую функцию

$$\Theta_{z_k}(v, t) \equiv \Theta = \int e^{iv_{\rho'}\zeta_{\rho'}} p_{z_k}(\zeta, t)\, d\zeta.$$

Диффузионное уравнение эквивалентно следующему уравнению для нее:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \left[iv_{\rho'} a_{\rho'}\left(z_k - i\frac{\partial}{\partial v}, t\right) - \frac{1}{2} v_{\rho'} v_{\sigma'} b_{\rho'\sigma'}\left(z_k - i\frac{\partial}{\partial v}, t\right)\right]\Theta \tag{4.20}$$

$$(\Theta_{z_k}(v, t_k) = 1),$$

где введено обозначение операторов

$$f\left(-i\frac{\partial}{\partial v}\right)\Theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iv\zeta}f(\zeta)\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-iu\zeta}}{iu}\,\Theta(u)\,du. \qquad (4.21)$$

Функции $a_{\rho'}$, $b_{\rho'\sigma'}$, Θ, по нашему предположению, таковы, что соответствующие интегралы в (4.21) сходятся.

Уравнение (4.20) будем решать методом последовательных приближений: $\Theta_n=e^{\varphi_n}$;

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=e^{-\varphi_{n-1}}\left[iv_{\rho'}a_{\rho'}\left(z_k-i\frac{\partial}{\partial v},\,t\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}v_{\rho'}v_{\sigma'}b_{\rho'\sigma'}\left(z_k-i\frac{\partial}{\partial v},\,t\right)\right]e^{\varphi_{n-1}}\quad(\varphi_0=0).$$

Это приводит к результату

$$\Theta(v,t)=\exp\left\{\left[iv_{\rho'}a_{\rho'}(z_k,t_k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}v_{\rho'}v_{\sigma'}b_{\rho'\sigma'}(z_k,t_k)\right](t-t_k)+O((t-t_k)^2)\right\}. \qquad (4.22)$$

Но характеристическая функция

$$\exp\left\{\left[iv_{\rho'}a_{\rho'}-\frac{1}{2}v_{\rho'}v_{\sigma'}b_{\rho'\sigma'}\right](t-t_k)\right\}=\widetilde{\Theta}.$$

при $t=t_{k+1}$ в точности соответствует мере $\widetilde{\mu}_{z_k}(dz'_{k+1})$. Из равенства $\Theta(v,t_{k+1})=\widetilde{\Theta}(v,t_{k+1})\,e^{O(\Delta^2)}$ имеем

$$p_{z_k}(\zeta,t_{k+1})=\widetilde{p}_{z_k}(\zeta,t_{k+1})\,e^{O(\Delta^2)}. \qquad (4.23)$$

Если взять теперь не совпадающие, но близкие значения z_k и $\widetilde{z}_k$, то из (4.22) в силу дифференцируемости по z_k параметров $a_{\rho'}$, $b_{\rho'\sigma'}$ будем иметь

$$\Theta_{z_k}(v,t_{k+1})=\widetilde{\Theta}_{\widetilde{z}_k}(v,t_{k+1})\exp[O(z_k-\widetilde{z}_k)\,\Delta+O(\Delta^2)].$$

Следовательно, при $z_k-\widetilde{z}_k=o(1)$ имеем

$$\Theta_{z_k}(v,t_{k+1})=\widetilde{\Theta}_{\widetilde{z}_k}(v,t_{k+1})\,e^{o(\Delta)};\quad p_{z_k}(\zeta,t_{k+1})=\widetilde{p}_{\widetilde{z}_k}(\zeta,t_{k+1})\,e^{o(\Delta)}. \qquad (4.24)$$

Перейдем теперь к рассмотрению многомерных распределений, входящих в (4.19). Согласно уравнению (4.16) компоненты $z'(\cdot)=\{z_{\rho'}\}$ однозначно определяют прочие компоненты $z''(\cdot)=\{z_{\rho''}\}$. То же самое справедливо и для приближенного процесса (4.18), причем $\lim\limits_{\Delta\to 0}\widetilde{z}_\rho \to z_\rho$, т. е. $z_\rho - \widetilde{z}_\rho = o(1)$. Запишем (4.19) в виде

$$\frac{1}{\widetilde{f}\,(\widetilde{z}\,(\cdot))} =$$

$$= \frac{\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[p_{z_0}\,(z_1' - z_0') \ldots p_{z_{N-1}}(z_N' - z_{N-1}') \mid z_1' = \widetilde{z}_1', \ldots, z_{N-1}' = \widetilde{z}_{N-1}']}{\widetilde{p}_{\widetilde{z}_0}\,(\widetilde{z}_1' - \widetilde{z}_0') \ldots \widetilde{p}_{\widetilde{z}_{N-1}}\,(\widetilde{z}_N' - \widetilde{z}_{N-1}')}$$

и внесем знаменатель в правой части под знак математического ожидания. Учитывая при этом (4.24), получаем

$$\frac{1}{\widetilde{f}(z\,(\cdot))} = \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}\{e^{\sum\limits_{k=0}^{N-1} o(\Delta)} \mid \mathcal{N}'_{s_\Delta}\} = e^{o(1)},$$

что завершает доказательство.

Очевидно, что вышеприведенная лемма справедлива и для пополненной последовательности σ-алгебр $\{\overline{\mathcal{N}'_{s_\Delta}}\}$.

§ 4.3. ПРОИЗВОДНАЯ РАДОНА—НИКОДИМА ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

В настоящей главе мы будем рассматривать диффузионную марковскую систему мер в n-мерном эвклидовом пространстве R_n, но более частного вида, нежели меры, определяемые операторами (3.42), (3.65). Именно, не вводя дополнительного диффузионного процесса $\{y(t)\}$, будем полагать

$$dL = \left(c + a_\rho \frac{\partial}{\partial z_\rho} + \frac{1}{2}\, b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial z_\rho\, \partial z_\sigma}\right) dt. \qquad (4.25)$$

По сравнению с (3.42), (3.65) здесь изменено обозначение: x заменено на z, m на n и положено $A_\rho \equiv 0$. Функции c, a_ρ, $b_{\rho\sigma}$ предполагаются непрерывными функциями от $z_1, \ldots, z_n$, t и (если нужно для перехода от одного стохастического интеграла к другому) дифференцируемыми по $z_1, \ldots, z_n$.

Как указывалось в предыдущем параграфе, данная система мер определяет меры $\mu_{z(s)}$ в функциональном пространстве $(R_n^T, \overline{\mathcal{N}}_T)$, $R_n^T = R_n \times \ldots \times R_n$, а также на других, менее широких σ-алгебрах.

Кроме данной меры μ введем другую меру ν аналогичного же типа и рассмотрим вопрос об абсолютной непрерывности этих мер на $(R_n^T, \overline{\mathcal{N}^u_s})$.

Если матрица локальных дисперсий $\|b_{\rho\sigma}\|$ невырождена, то, как известно (это следует из леммы 2.1) для абсолютной непрерывности мер $\mu_{z(s)}$ и $\nu_{z(s)}$ на $\overline{\mathcal{N}^u_s}$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы локальных дисперсий обоих мер совпадали на всем интервале $[s, u]$. Параметры сноса a^{ρ} обоих процессов могут быть различными.

Положение осложняется для вырожденных матриц локальных дисперсий. Совпадение матриц локальных дисперсий в этом случае недостаточно для абсолютной непрерывности. Как видно из (4.17), необходимо также совпадение выражений (4.17) для обоих процессов во всех внутренних точках рассматриваемого интервала.

В нижеследующей теореме мы возьмем в качестве меры $\nu_{z(s)}$ из всех мер, абсолютно непрерывных относительно заданной, такую меру, которая в некотором смысле является простейшей. Именно, пусть она имеет наименьшее необходимое число отличных от нуля членов в соответствующем ей выражении

$$dL^{\nu} = \left(c^{\nu} + a_{\rho}^{\nu} \frac{\partial}{\partial z_{\rho}} + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma}^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial z_{\rho}\, \partial z_{\sigma}}\right) dt,$$

аналогичном (4.25). Поскольку должно выполняться равенство

$$a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b_{\tau'\pi'}^{-1} a_{\pi'} = a_{\rho''}^{\nu} - b_{\rho''\tau'}^{\nu} b_{\tau'\pi'}^{\nu-1} a_{\pi'}^{\nu}, \quad \rho'' > l',$$

то, очевидно, нельзя положить $a_{\rho}^{\nu} = 0$, но можно положить

$$a_{\rho'}^{\nu} = 0; \quad a_{\rho''}^{\nu} = a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b_{\tau'\pi'}^{-1} a_{\pi'}. \tag{4.26a}$$

Теорема 4.1. *Пусть мера $\mu_{z(s)}$ в пространстве E^T определяется инфинитезимальным оператором* (4.25), *а мера $\nu_{z(s)}$ — оператором*

$$dL^{\nu} = \left[(a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b_{\tau'\pi'}^{-1} a_{\pi'}) \frac{\partial}{\partial z_{\rho''}} + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial z_{\rho}\, \partial z_{\sigma}}\right] dt. \tag{4.26}$$

Тогда эти меры абсолютно непрерывны на σ-алгебре $\mathcal{N}_s^u$ или $\overline{\mathcal{N}}_s^u$, причем производная Радона—Никодима имеет вид

$$\frac{d\mu_{z(s)}}{d\nu_{z(s)}} (z(\cdot)) = \exp\left\{\int_s^u \left[c\, dt + a_{\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* z_{\sigma'} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} a_{\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'}\, dt\right]\right\} \quad (\text{п. н.}), \tag{4.27}$$

если выполнены условия существования этого стохастического интеграла.

Смысл обозначений ρ', σ', $b_{\rho',\sigma'}^{-1}$, такой же, что и в леммах 4.2, 4.4.

Утверждение теоремы, если не говорить о членах с c, содержится в результатах работы Гирсанова [1] и др. Тем не менее мы приведем здесь краткое доказательство, чтобы проиллюстрировать метод доказательства, применяемый в дальнейшем (§ 4.4) для получения более сложных результатов.

Будет использована

Лемма 4. 6. *Пусть имеется последовательность расширяющихся σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}$, сходящаяся к $\mathcal{F}$, и две меры μ и ν на $\mathcal{F}$. Тогда, если эти меры абсолютно непрерывны на каждой $\mathcal{F}_n$ и производная Радона—Никодима f_n сходится почти всюду к конечной и почти нигде не равной нулю функции f, то меры μ, ν абсолютно непрерывны на $\mathcal{F}$ и производная Радона—Никодима равна f.*

Эта лемма относится к основаниям теории меры и мы не будем останавливаться на ее доказательстве.

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим меру $\mu'_{z(s)}$, соответствующую инфинитезимальному оператору

$$dL' = a_\rho \frac{\partial}{\partial z_\rho} + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial z_\rho \, \partial z_\sigma},$$

т. е. диффузионному процессу с параметрами a_ρ, $b_{\rho\sigma}$. К этому процессу относится лемма 4.4 и для него справедливы стохастические уравнения (4.14)—(4.16). Приближенно эти уравнения можно заменить на конечноразностные уравнения и воспользоваться леммой 4.5.

Пусть $S_\Delta = \{t_i\}$ есть Δ-разбиение интервала $[s, u]$. Предел $S_s^u = \lim\limits_{\Delta\to 0} S_\Delta$ будет множеством сепарабельности, поэтому $\overline{\mathcal{N}}_{S_s^u} = \overline{\mathcal{N}}_s^u \supset \mathcal{M}_s^u$.

Если доказать, что меры $\mu_{z(s)}$, $\mu'_{z(s)}$, $\nu_{z(s)}$ абсолютно непрерывны на $\mathcal{N}_{S_\Delta}$, причем производная Радона—Никодима имеет предел при $\Delta\to 0$, то согласно лемме 4.6 отсюда будет следовать абсолютная непрерывность этих мер на $\mathcal{N}_{S_s^u}$. Абсолютная непрерывность $\mu_{z(s)} \ll \nu_{z(s)}$, очевидно, не нарушится и при пополнении σ-алгебры $\mathcal{N}_{S_s^u}$ μ-нулевыми множествами. Таким образом, доказательство теоремы 4.1 сводится к исследованию производных Радона—Никодима конечных разбиений S_Δ, к доказательству их сходимости при $\Delta\to 0$.

Для разбиения S_Δ меру $\mu'_{z(s)}$ представим в виде

$$\mu'_{z(s)}(dz_1 \ldots dz_N) = \tilde{f}\, \tilde{\mu}_{z(s)}(dz_1)\, \tilde{\mu}_{z_1}(dz_2) \ldots \tilde{\mu}_{z_{N-1}}(dz_N), \qquad (4.28)$$

где

$$z_i = z(t_i) \quad \text{и} \quad \tilde{\mu}_{z_i}(dz_{i+1})$$

гауссова мера со средними значениями $z_{\rho i} + a_\rho(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$ и дисперсиями $b_{\rho\sigma}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$. Согласно изложенному в лемме 4.5, $\widetilde{f}$ стремится к 1 п. н. при $\Delta \to 0$. Нетрудно доказать, что

$$\mu_{z(s)}(dz_1 \ldots dz_N) = f^{\Delta} \exp [c(z(s), s)(t_1 - s) + \ldots + c(z_{N-1}, t_{N-1})(t_N - t_{N-1})] \mu'_{z(s)}(dz_1 \ldots dz_N), \qquad (4.29)$$

где

$$f^{\Delta} \to 1 \quad \text{п. н.} \quad \text{при } \Delta \to 0.$$

Запишем для меры $\nu_{z(s)}$ равенство, аналогичное (4.28):

$$\nu_{z(s)}(dz_1 \ldots dz_N) = \widetilde{f}^{\nu} \widetilde{\nu}_{z(s)}(dz_1) \widetilde{\nu}_{z_1}(dz_2) \ldots \widetilde{\nu}_{z_{N-1}}(dz_N). \qquad (4.30)$$

Здесь $\widetilde{\nu}_{z_i}(dz_{i+1})$ — гауссова мера со средними значениями $z_{\rho i} + a_{\rho}^{\nu}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$ (см. (4.26.a)) и дисперсиями

$$b_{\rho\sigma}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i); \quad \widetilde{f}^{\nu} \to 1 \quad \text{п. н. при } \Delta \to 0.$$

Учитывая (4.28)—(4.30), получаем, что меры (4.29), (4.30) абсолютно непрерывны, если абсолютно непрерывны элементарные гауссовы меры $\widetilde{\mu}_{z_i}(dz_{i+1})$ и $\widetilde{\nu}_{z_i}(dz_{i+1})$. Применение леммы 4.3 позволяет доказать последнее и найти соответствующую производную

$$\frac{\widetilde{\mu}_{z_i}(dz_{i+1})}{\widetilde{\nu}_{z_i}(dz_{i+1})} = \exp \Big\{ a_{\rho'}(z_i, t_i) b^{-1}_{\rho'\tau'}(i) [z_{\tau'}(t_{i+1}) - z_{\tau'}(t_i)] - \frac{1}{2} a_{\rho'}(i) b^{-1}_{\rho'\tau'}(i) a_{\tau'}(i)(t_{i+1} - t_i) \Big\}. \qquad (4.31)$$

Подставляя (4.28) в (4.29) и поделив (4.29) на (4.30), получаем при учете (4.31)

$$\frac{\mu_{z(s)}(dz_1 \ldots dz_N)}{\nu_{z(s)}(dz_1 \ldots dz_N)} = \frac{f^{\Delta} \widetilde{f}}{\widetilde{f}^{\nu}} \exp \Big\{ \sum_i \Big[c(i)(t_{i+1} - t_i) + a_{\rho'}(i) b^{-1}_{\rho'\tau'}(i) [z_{\tau'}(t_{i+1}) - z_{\tau'}(t_i)] - \frac{1}{2} a_{\rho'}(i) b^{-1}_{\rho'\tau'}(i) a_{\tau'}(i)(t_{i+1} - t_i) \Big] \Big\}. \qquad (4.32)$$

Если выполнены условия существования стохастического интеграла, сумма в (4.32) при $\Delta \to 0$ имеет своим пределом интеграл. Эта сходимость, а также вышеупомянутая сходимость f^{Δ}, $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}^{\nu}$ к 1 доказывает абсолютную непрерывность мер на $\mathcal{N}^{\rho} S^u_s$ и равенство (4.27).

§ 4.4. ПРОИЗВОДНАЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УСРЕДНЕНИИ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

Разобьем компоненты $z_1, \ldots, z_n$ рассмотренного ранее диффузионного процесса на две группы, обозначая

$$z_\alpha = x_\alpha; \quad \alpha = 1, \ldots, m; \quad z_\rho = y_\rho, \quad \rho = m+1, \ldots, m+l = n.$$

Индексы $\alpha, \beta, \ldots$ здесь и в дальнейшем пробегают значения $1, \ldots, m$, а индексы $\rho, \sigma, \ldots$ — значения $m+1, \ldots, m+l$. Пусть

$$l' = \operatorname{Rang} \| b_{\rho\sigma} \|.$$

Будем, как и в § 4.1, употреблять штрихованные индексы, условившись, что $\rho', \sigma', \ldots$ пробегают значения $m+1, \ldots, m+l'$, а $\rho'', \sigma'', \ldots$ — значения $m+l'+1, \ldots, m+l$. Предполагается, что $\det \| b_{\rho'\sigma'} \| \neq 0$. Эта система обозначений, которой мы будем придерживаться также в гл. 7, позволяет не указывать каждый раз область пробегаемых значений.

Компоненты $\{y_\rho\}$ в совокупности образуют точку в l-мерном борелевском пространстве $(R_l, \mathscr{B}_l)$. Условия типа $\{y_\rho(t) \in \Lambda\}$, $\Lambda \in \mathscr{B}_l$ (t фиксировано) выделяют σ-алгебру в пространстве R_n^T, которую мы будем обозначать $\mathscr{A}_t$. Кроме того, мы будем употреблять обозначения $\mathscr{A}_{\widetilde{T}} = \sigma(\bigcup_{t \in \widetilde{T}} \mathscr{A}_t)$, $\overline{\mathscr{A}}_{\widetilde{T}}$. Они имеют смысл, аналогичный смыслу обозначений $\mathscr{N}_{\widetilde{T}}$, $\overline{\mathscr{N}}_{\widetilde{T}}$, поясненных в § 4.2.

Марковская мера $\mu_{z(s)}$ на $\overline{\mathscr{N}}_s^t$ определяет меру $\mu_{z(s)}$ на $\overline{\mathscr{A}}_s^t \subset \overline{\mathscr{N}}_s^t$, но при этом существенно, что на $\overline{\mathscr{A}}_s^t$ (т. е. при фазовом пространстве R_l) мера уже не обладает марковскими свойствами. Теорема 4.1 к этому случаю будет неприменима, тем не менее в некотором смысле она допускает обобщение и на этот случай.

Если взять две абсолютно непрерывные на $\mathscr{F}$ меры μ, ν и их производную Радона—Никодима f на $\mathscr{F}$ и рассмотреть интеграл

$$\mu(\Lambda) = \int_\Lambda f \, d\nu$$

по множеству $\Lambda \in \mathscr{A} \subset \mathscr{F}$, то, очевидно, получаем, что указанные меры абсолютно непрерывны также на $\mathscr{A}$. Производная Радона—Никодима на $\mathscr{A}$ при этом получается усреднением первоначальной производной:

$$\bar{f} = \mathbf{M}_\nu [f \mid \mathscr{A}], \tag{4.33}$$

где обозначение $\mathbf{M}_\nu[\,\cdot\,|\,A]$ соответствует (П.1.4), (П.1.2):

$$\mathbf{M}_\nu[f\,|\,\mathcal{A}] = [\nu(d\omega)]^{-1}\int\limits_{d\omega} f\,d\nu,\quad d\omega\in\mathcal{A}.$$

Конечно, в формулу (4.33) можно подставить, скажем, (4.27) и получить функциональную производную на $\overline{\mathcal{A}}_s^t$. Однако такой результат еще не очень продуктивный. Чтобы получить более полезные результаты, мы пойдем по другому пути.

Теорема 4.2. *Пусть мера* $\mu_{z(s)}$ *на* $\overline{\mathcal{N}}_s^u$ *соответствует диффузионному процессу в* n*-мерном пространстве* $(R_n,\ \mathcal{B}_n)$ *с инфинитезимальным оператором*

$$dL = \left(c + \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial z_k}\right)dt,$$

причем $b_{\rho\sigma}$ *и* $a_{\rho''} - b_{\rho''\sigma'}\,b^{-1}_{\sigma'\pi'}\,a_{\pi'}$ *не зависят от* x_α ($\mathcal{B}_l$*-измеримы*). *Тогда мера* $\mu_{z(s)}$ *на* $\overline{\mathcal{A}}_s^u$ *абсолютно непрерывна по мере* $\nu_{y(s)}$ $(=\nu_{z(s)})$, *соответствующей диффузионному процессу в* l*-мерном пространстве* $(R_l,\ \mathcal{B}_l)$ *с инфинитезимальным оператором*

$$dL^\nu = \left[(a_{\rho''} - b_{\rho''\sigma'}\,b^{-1}_{\sigma'\pi'}\,a_{\pi'})\frac{\partial}{\partial y_{\rho''}} + \frac{1}{2}\,b_{\rho\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y_\rho\partial y_\sigma}\right]dt.$$

Производная Радона — Никодима на $\overline{\mathcal{A}}_s^u$ *имеет вид*

$$\vartheta_s^u(x(s),\,y(\cdot)) \equiv \frac{\mu_{z(s)}(dy(\cdot))}{\nu_{y(s)}(dy(\cdot))} = \exp\left\{\int\limits_s^u\left[\mathbf{M}_\mu(c\,|\,\overline{\mathcal{A}}_s^t)\,dt + \right.\right.$$
$$+\,\mathbf{M}_\mu(a_{\rho'}\,|\,\overline{\mathcal{A}}_s^t)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}\,d^*y_{\sigma'}(t) - \tag{4.34}$$
$$\left.\left.-\,\frac{1}{2}\,\mathbf{M}_\mu(a_{\rho'}\,|\,\overline{\mathcal{A}}_s^t)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}\,\mathbf{M}_\mu(a_{\sigma'}\,|\,\overline{\mathcal{A}}_s^t)\ dt\right]\right\}.$$

Предполагается, что выполнены условия существования этих стохастических интегралов.

Доказательство. Выбирая Δ-разбиение S_Δ интервала $[s,\,u]$ и записывая для $\mu_{z(s)}$ формулы, аналогичные (4.29), (4.28), имеем

$$\mu_{z(s)}(dz_1\ldots dz_N) = f^\Delta\widetilde{f}\,e^{c(z(s),s)(t_1-s)}\times \tag{4.35}$$
$$\times\,\widetilde{\mu}_{z(s)}(dz_1)\ \ldots\ e^{c(N-1)\,(t_N-t_{N-1})}\,\widetilde{\mu}_{z_{N-1}}(dz_N),$$

где $\widetilde{\mu}_{z_i}(dz_{i+1})$ — гауссова мера со средними значениями $z_j(t_i) + a_j(z(t_i),\,t_i)\,(t_{i+1}-t_i)$ и матрицей дисперсий

$$b_{jk}(z(t_i),\ t_i)\,(t_{i+1}-t_i).$$

Вследствие марковских свойств процесса, входящие в (4.35) функции f^{Δ}, $\widetilde{f}$ распадаются на сомножители:

$$f^{\Delta} = \prod_i f_i^{\Delta}(z_i, z_{i+1}); \quad \widetilde{f} = \prod_i \widetilde{f}_i(z_i, z_{i+1}). \tag{4.36}$$

Поскольку, как отмечалось ранее, $f^{\Delta} \to 1$, $\widetilde{f} \to 1$ п. н. при $\Delta \to 0$, то

$$f_i^{\Delta}(z_i, z_{i+1}) = e^{o(\Delta)}; \quad \widetilde{f}_i(z_i, z_{i+1}) = e^{o(\Delta)}. \tag{4.37}$$

Перейдем к рассмотрению меры $\mu_{z(s)}(dy_1 \ldots dy_N)$ на σ-алгебре $\mathcal{A}_{S_\Delta}$, т. е. проинтегрируем (4.35) по $\Lambda \in \mathcal{A}_{S_\Delta}$.

Из определения условных мер (Приложение 1) следует тождество

$$\mu_{z(s)}(dy_1 \ldots dy_N) = \mu_{z(s)}(dy_1)\,\mu_{z(s)}(dy_2 \mid y_1) \ldots$$
$$\ldots \mu_{z(s)}(dy_N \mid y_1, \ldots, y_{N-1}) \tag{4.38}$$

(справедливое почти наверное). При этом, если использовать формулу

$$\mu_{z(s)}(dy_{i+1} \mid y_1, \ldots, y_i) = \int \mu_{z(s)}(dy_{i+1} \mid y_1, \ldots, y_i, x_i) \times$$
$$\times\, \mu_{z(s)}(dx_i \mid y_1, \ldots, y_i)$$

и учесть марковское свойство $\mu_{z(s)}(dy_{i+1} \mid y_1, \ldots y_i, x_i) = \mu_{x_i y_i}(dy_{i+1})$, будем иметь

$$\mu_{z(s)}(dy_{i+1} \mid y_1, \ldots, y_i) = \int \mu_{x_i y_i}(dy_{i+1})\,\mu_{z(s)}(dx_i \mid y_1, \ldots, y_i) \equiv$$
$$\equiv \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[\mu_{x_i y_i}(dy_{i+1}) \mid y_1, \ldots, y_i] \tag{4.39}$$

(см. (П. 1.4)).

Примем во внимание, что согласно (4.35), (4.36), (4.37)

$$\mu_{x_i y_i}(dy_{i+1}) = \int_{R_m} \exp\left[c(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i) + o(\Delta)\right] \widetilde{\mu}_{z_i}(dx_{i+1}\,dy_{i+1}), \tag{4.40}$$

и используем равенство

$$\int_{R_m} e^{o(\Delta)}\,\widetilde{\mu}_{z_i}(dx_{i+1}\,dy_{i+1}) = e^{o(\Delta)} \int_{R_m} \widetilde{\mu}_{z_i}(dx_{i+1}\,dy_{i+1}) =$$
$$= e^{o(\Delta)}\,\widetilde{\mu}_{z_i}(dy_{i+1}). \tag{4.41}$$

Интегрирование в (4.40), (4.41) проводится по m-мерному пространству значений x_{i+1}. Как отмечалось, $\widetilde{\mu}_{z_i}(dz_{i+1})$ есть гауссова мера со средними значениями

$$z_j(t_i) + a_j(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

и матрицей дисперсий $b_{jk}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$. Поэтому $\widetilde{\mu}_{z_i}(dy_{i+1})$ есть гауссова мера со средними значениями

$$y_\rho(t_i) + a_\rho(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

и матрицей дисперсий $b_{\rho\sigma}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$. Вид этой меры определяется леммой 4.3. Применяя лемму, легко получить, что мера $\widetilde{\mu}_{z_i}(dy_{i+1})$ абсолютно непрерывна относительно гауссовой меры $\widetilde{\nu}_{z_i}(dy_{i+1})$, имеющей средние значения

$$y_\rho(t_i) + a^\nu_\rho(y_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$(a^\nu_{\rho'} = 0; \quad a^\nu_{\rho''} = a_{\rho''} - b_{\rho''\sigma'} b^{-1}_{\sigma'\pi'} a_{\pi'})$$

и те же самые дисперсии. Таким образом,

$$\widetilde{\mu}_{z_i}(dy_{i+1}) = \widetilde{\nu}_{z_i}(dy_{i+1}) \exp\{a_{\rho'}(z_i, t_i) b^{-1}_{\rho'\sigma'}(z_i, t_i) \times$$

$$\times [y_{\sigma'}(t_{i+1}) - y_{\sigma'}(t_i)] - \frac{1}{2} a_{\rho'}(z_i, t_i) b^{-1}_{\rho'\sigma'}(z_i, t_i) \times \tag{4.42}$$

$$\times a_{\sigma'}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)\}.$$

Используем теперь, что по условиям теоремы 4.2 функции $b_{\rho\sigma}(z, t)\,(= b_{\rho\sigma}(y, t))$, $a^\nu_\rho(z, t)\,(= a^\nu_\rho(y, t))$ не зависят от x ($\mathscr{B}_t$-измеримы). Это позволяет при вычислении условного математического ожидания $\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[\cdot \mid y_1, \ldots, y_i]$ от (4.42) вынести $\widetilde{\nu}_{z_i}(dy_{j+1}) = \widetilde{\nu}_{y_i}(dy_{i+1})$ за знак математического ожидания и получить, подставляя (4.42) в (4.41) и (4.40),

$$\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[\mu_{z_i}(dy_{i+1}) \mid y_1, \ldots, y_i] =$$

$$= \widetilde{\nu}_{y_i}(dy_{i+1}) \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_i + o(\Delta)} \mid y_1, \ldots, y_i], \tag{4.43}$$

где обозначено

$$H_i = c(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i) + a_{\rho'}(z_i, t_i) b^{-1}_{\rho'\sigma'}(z_i t_i) \times$$

$$\times \left[y_{\sigma'}(t_{i+1}) - y_{\sigma'}(t_i) - \frac{1}{2} a_{\sigma'}(z_i, t_i)(t_{i+1} - t_i)\right]. \tag{4.44}$$

Подставляя теперь (4.43) в (4.39) и (4.38), находим

$$\mu_{z(s)}(dy_1 \ldots dy_N) = \widetilde{\nu}_{y(s)}(dy_1) \ldots \widetilde{\nu}_{y_{N-1}}(dy_N)\, \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_0+o(\Delta)}].$$

$$\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_1+o(\Delta)} \mid y_1] \ldots \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_{N-1}+o(\Delta)} \mid y_1, \ldots, y_{N-1}]. \quad (4.45)$$

Сравнение этого равенства с равенством

$$\nu_{y(s)}(dy_1 \ldots dy_N) = \widetilde{f}^{\nu}\widetilde{\nu}_{y(s)}(dy_1) \ldots \widetilde{\nu}_{y_{N-1}}(dy_N), \quad (4.46)$$

аналогичным (4.30), приводит к заключению, что меры (4.45), (4.46) абсолютно непрерывны, причем производная Радона—Никодима имеет вид

$$\frac{1}{\widetilde{f}^{\nu}}\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_0+o(\Delta)}]\,\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_1+o(\Delta)} \mid y_1] \ldots$$

$$\ldots \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_{N-1}+o(\Delta)} \mid y_1, \ldots, y_{N-1}]. \quad (4.47)$$

Совершая предельный переход $\Delta \to 0$, доказываем абсолютную непрерывность этих мер на $\mathscr{A}_s^u$ и формулу для производной Радона—Никодима

$$\vartheta_s^u(x(s), y(\cdot)) = \lim_{\Delta \to 0} \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_0+o(\Delta)}]\,\mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_1+o(\Delta)} \mid y_1] \ldots$$

$$\ldots \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[e^{H_{N-1}+o(\Delta)} \mid y_1, \ldots, y_{N-1}] \quad (4.48)$$

при условии, что этот предел существует почти всюду.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что указанный предел совпадает с выражением в правой части (4.34).

Рассмотрим типичный сомножитель в (4.47), учитывая (4.44). Из (4.44) легко видеть, что $H_i = O(\Delta^{1/2})$. Разлагая экспоненту, а затем логарифм в ряд, получаем

$$\widetilde{\mathbf{M}}e^{H_i+o(\Delta)} = 1 + \widetilde{\mathbf{M}}\left[H_i + \frac{1}{2}H_i^2 + o(\Delta)\right] =$$

$$= \exp\left\{\widetilde{\mathbf{M}}\left[H_i + \frac{1}{2}H_i^2\right] - \frac{1}{2}[\widetilde{\mathbf{M}}H_i]^2 + o(\Delta)\right\}$$

$$(\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{\mu_{z(s)}}[\cdot \mid y_1, \ldots, y_i]). \quad (4.49)$$

Поэтому выражение (4.47) преобразуется к виду

$$\exp\left\{\sum_i\left[\mathbf{M}_{\mu}\left(H_i + \frac{1}{2}H_i^2 \mid y_1, \ldots, y_i\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}[\mathbf{M}_{\mu}(H_i \mid y_1, \ldots, y_i)]^2 + o(\Delta)\right]\right\}. \quad (4.50)$$

Принимая во внимание (4.44), получаем в экспоненте сумму, которая в силу леммы 2.3 стремится к интегралу, стоящему в экспоненте (4.34), если выполнены условия его существования. При этом мы учитываем, что σ-алгебра $\subset \mathcal{A}_{S_\Delta}$, стоящая в условии математического ожидания в (4.50), стремится в пределе к $\mathcal{A}_{S_s^t}$ (где $S_s^t = [s, t] \cap S$ — множество сепарабельности, $s < t \leqslant u$). Производная Радона—Никодима оказалась определенной на $\mathcal{A}_{S_s^u}$. Вследствие сепарабельности процесса указанные σ-алгебры можно заменить на $\mathcal{A}_s^t$ и даже на $\overline{\mathcal{A}}_s^t$. Доказательство закончено.

В заключение отметим, что функциональная производная (4.34), (4.48) удовлетворяет п. н. уравнению

$$d_t \vartheta_s^t = \vartheta_s^t \cdot \{\mathbf{M}_\mu [c(y(t), t) \mid \overline{\mathcal{A}}_s^t]\, dt + \\ + \mathbf{M}_\mu [a_{\rho'}(y(t), t) \mid \overline{\mathcal{A}}_s^t]\, b_{\rho'\sigma'}^{-1}(y(t), t)\, d^* y_{\sigma'}(t)\}. \tag{4.51}$$

Чтобы в этом убедиться, нужно принять во внимание следствие 2.1.

Поскольку $\vartheta_s^s = 1$ (в силу (4.34)), последнее уравнение можно записать в интегральной форме

$$\vartheta_s^t = 1 + \int_s^t \vartheta_s^\tau \{\mathbf{M}_\mu [c(y(\tau), \tau) \mid \overline{\mathcal{A}}_s^\tau]\, dt + \\ + \mathbf{M}_\mu [a_{\rho'}(y(\tau), \tau) \mid \overline{\mathcal{A}}_s^\tau]\, b_{\rho'\sigma'}^{-1}(y(\tau), \tau)\, d^* y_{\sigma'}(\tau), \tag{4.52}$$

которая будет использована в § 7.1.

Часть II

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

Глава 5

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 5.1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА И ПЕРВЫЕ ТЕОРЕМЫ

Результаты, излагаемые в настоящей главе, не требуют конкретизации фазового пространства и переходных вероятностей марковского процесса. Для данной теории оказываются излишними какие-либо метрические и даже топологические представления. Область T значений параметра t должна быть упорядоченным множеством. Для определенности будем полагать, что это отрезок прямой или его подмножество. Остановимся на первом случае: $T=[a, b]$.

Существенно, чтобы фазовое пространство, соответствующее параметру $t\in T$, было измеримым пространством $(E_t, \mathscr{E}_t)$. Будем предполагать (хотя это не является необходимым для теории), что всем моментам времени (значениям параметра) соответствует одно и то же фазовое пространство $(E, \mathscr{E})$.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ и $\mathscr{B}$-измеримый процесс $\{z_t(\omega), t\in T\}$ со значениями из $(E, \mathscr{E})$. Введем σ-алгебры

$$\mathscr{Z}_t = \sigma(\{\omega: z_t(\omega)\in\Lambda\}, \Lambda\in\mathscr{E}) = z_t^{-1}(\mathscr{E}),$$

принадлежащие $\mathscr{B}$, а также расширяющееся семейство σ-алгебр $\mathscr{N}_a^t\subset\mathscr{B}$. Каждая σ-алгебра $\mathscr{N}_a^t=\sigma(\bigcup\limits_{\tau\in[a,t]}\mathscr{Z}_\tau)$ есть совокупность событий, касающихся поведения процесса $\{z_t(\omega)\}$ на интервале $[a, t]$. Более общие σ-алгебры $\mathscr{Z}_{\widetilde{T}}\equiv\mathscr{M}_{\widetilde{T}}, \widetilde{T}\subset T$ могут быть определены, как и в § 4.2. Именно, $\mathscr{Z}_{\widetilde{T}}$ есть минимальная σ-алгебра, содержащая все множества вида

$$\{\omega: z_t(\omega)\in\Lambda, t\in\widetilde{\widetilde{T}}\}, \quad \widetilde{\widetilde{T}}\subset\widetilde{T}, \quad \Lambda\in\mathscr{E}.$$

В дальнейшем будут рассматриваться различные условные вероятности, соответствующие указанным σ-алгебрам, а также σ-алгебрам, вводимым ниже. Удобно раз навсегда предположить, что вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ является *регулярным* в том смысле, что для любой σ-алгебры $\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$ условная вероятность $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{Y})$ является *регулярной* в смысле Лоева [1], стр. 371. Это значит, что внутри класса эквивалентности можно выбрать такую функцию $\mathbf{P}(\Lambda \mid \mathcal{Y})$, определенную на $\mathcal{B} \times \Omega$ ($\mathcal{Y}$ — измеримую при фиксированном $\Lambda \in \mathcal{B}$), что при каждой $\omega \in \Omega$ она является вероятностной мерой на $\mathcal{B}$.

Для теории фундаментальными условиями являются условия Маркова, существо которых в том, что при фиксированном настоящем будущее процесса не зависит от его прошлого. Этим условиям, как известно, можно дать несколько эквивалентных формулировок. Одна из них такова:

$$\mathbf{P}(\Gamma_б \mid \mathcal{F}_{пр}\mathcal{Z}_t\mathcal{F}_б) = \mathbf{P}(\Gamma_б \mid \mathcal{Z}_t\mathcal{F}_б) \text{ почти наверное,} \tag{5.1}$$

где $\Gamma_б \in \mathcal{Z}_t^b$, $\mathcal{F}_б \subset \mathcal{Z}_t^b$, $\mathcal{F}_{пр} \subset \mathcal{Z}_a^t$.

Оговорка «почти наверное» (п. н.) нужна по той причине, что сами условные вероятности определены лишь почти всюду. Мы не будем приводить здесь различные формулировки условия Маркова и доказывать их эквивалентность. В дальнейшем при ссылке на это условие мы будем пользоваться той его формулировкой, которая в данном конкретном случае будет самой удобной.

Условные процессы Маркова появляются в том случае, когда имеется некоторый наблюдаемый процесс $\{y_t(\omega) = f_t(z)\}$, зависящий от исходного процесса. Будем предполагать (хотя возможны обобщения), что $t \in T$ и что при каждом t функция $f_t = f_t(e)$ является известной функцией от от $e \in E$, принимающей значения из $(Y, \mathcal{Y}')$ и $\mathcal{E}$-измеримой:

$$f_t^{-1}(\mathcal{Y}') \subset \mathcal{E}.$$

Тогда σ-алгебры процесса $\{y_t(\omega) = f_t(z_t(\omega))\}$ будут включаться в соответствующие σ-алгебры процесса $\{z_t(\omega)\}$.

Обозначим через $\mathcal{Y}_t$ (аналог $\mathcal{Z}_t$) минимальную σ-алгебру, содержащую множества

$$\{\omega : y_t(\omega) \in \Lambda\}, \quad \Lambda \in \mathcal{Y}',$$

а через $\mathcal{Y}_s^t$ (аналог $\mathcal{Z}_s^t$) — σ-алгебру, построенную на множествах

$$\{\omega : y_t(\omega) \in \Lambda,\ t \in \tilde{\tilde{T}}\},\ \Lambda \in \mathcal{Y}',\ \tilde{\tilde{T}} \subset [s, t].$$

Тогда очевидно,

$$\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{Z}_t, \quad \mathcal{Y}_s^t \subset \mathcal{Z}_s^t.$$

Определение 5.1. *Пусть заданы*

А) *марковский процесс* $(\Omega, \mathscr{X}_t, t \in T, \mathbf{P})$;

Б) *наблюдаемый процесс* $(\Omega, \mathscr{Y}_t, t \in T, \mathbf{P})$ *такой, что*

$$\mathscr{Y}_t \subset \mathscr{X}_t;$$

тогда семейство

$$(\Omega, \mathscr{X}_t, t \in T, \mathbf{P}(\cdot \mid \mathscr{Y}_a^u), u \in T)$$

случайных величин и условных вероятностей образует условный марковский процесс (первичный).

Как видно из нижеследующей теоремы 5.1, процесс $(\Omega, \mathscr{X}_t, t \in T, \mathbf{P}(\cdot \mid \mathscr{Y}_a^u))$ при фиксированном $u \in T$ оказывается марковским. Однако если менять u $(\in T)$, то соответствующее двухпараметрическое семейство случайных величин будет значительно более сложным.

В дальнейшем мы, как и в (5.1), для σ-алгебр будем пользоваться записью $\mathscr{A}\mathscr{B}$ вместо с $\sigma(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Равенства, вытекающие из определения условных вероятностей и условных математических ожиданий, мы будем приводить обычно без всяких комментариев. В силу определения эти равенства справедливы почти всюду, однако в целях краткости мы не всегда это будем оговаривать.

В целях наглядности при записи условных вероятностей и условных математических ожиданий в условии будем иногда писать y_t^s вместо $\mathscr{Y}_s^t$ и, соответственно, скажем, z_u, y_s^t вместо $\sigma(\mathscr{X}_u, \mathscr{Y}_s^t)$.

Рассмотрим сначала одну общую предварительную теорему.

Теорема 5.1. *Пусть имеется марковский процесс и σ-алгебра* $\widetilde{\mathscr{Y}}\ (\subset \mathscr{X}_a^b)$, *которая при любом* $t \in T$ *представима в виде*

$$\widetilde{\mathscr{Y}} = \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{пр}} \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{б}},$$

где

$$\widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{пр}} = \widetilde{\mathscr{Y}} \bigcap \mathscr{X}_a^t, \quad \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{б}} = \widetilde{\mathscr{Y}} \bigcap \mathscr{X}_t^b.$$

Тогда условный процесс, описываемый мерой $\mathbf{P}(\cdot \mid \widetilde{\mathscr{Y}})$,

п. н. является марковским, т. е.

$$\mathbf{P}(\Gamma_{\text{б}} \mid \mathscr{F}_{\text{пр}} \mathscr{X}_t \widetilde{\mathscr{Y}}) = \mathbf{P}(\Gamma_{\text{б}} \mid \mathscr{X}_t \widetilde{\mathscr{Y}}) \quad (\Gamma_{\text{б}} \in \mathscr{X}_t^b, \mathscr{F}_{\text{пр}} \subset \mathscr{X}_a^t). \text{ п. н.} \tag{5.2}$$

Доказательство. Вследствие условия Маркова имеем

$$\mathbf{P}(\Gamma_{\text{б}} \Lambda_{\text{пр}} \Lambda_{\text{б}} \mid \mathscr{F}_{\text{пр}} \mathscr{X}_t) = \mathbf{P}(\Lambda_{\text{пр}} \mid \mathscr{F}_{\text{пр}} \mathscr{X}_t) \mathbf{P}(\Gamma_{\text{б}} \Lambda_{\text{б}} \mid \mathscr{X}_t) =$$

$$= \mathbf{P}(\Lambda_{\text{пр}} \mid \mathscr{F}_{\text{пр}} \mathscr{X}_t \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{б}}) \mathbf{P}(\Gamma_{\text{б}} \Lambda_{\text{б}} \mid \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{пр}} \mathscr{X}_t),$$

где $\Lambda_{\text{пр}} \in \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{пр}}; \quad \Lambda_{\text{б}} \in \widetilde{\mathscr{Y}}_{\text{б}}$.

Взяв производную Радона—Никодима этой меры по мере

$$\mathbf{P}(\Lambda_б|\mathcal{F}_{пр}\mathcal{Z}_t)=\mathbf{P}(\Lambda_б|\mathcal{Z}_t)=\mathbf{P}(\Lambda_б|\tilde{\mathcal{Y}}_{пр}\mathcal{Z}_t)$$

(здесь опять использовано марковское свойство), находим

$$\mathbf{P}(\Gamma_б\Lambda_{пр}|\mathcal{F}_{пр}\mathcal{Z}_t\tilde{\mathcal{Y}}_б)=\mathbf{P}(\Lambda_{пр}|\mathcal{F}_{пр}\mathcal{Z}_t\tilde{\mathcal{Y}}_б)\,\mathbf{P}(\Gamma_б|\mathcal{Z}_t\tilde{\mathcal{Y}}).$$

Если рассмотреть теперь производную последней меры по мере $\mathbf{P}(\Lambda_{пр}|\mathcal{F}_{пр}\mathcal{Z}_t\tilde{\mathcal{Y}}_б)$, то получим уравнение (5.2). Доказательство закончено.

В дальнейшем основным объектом исследования будут условные вероятности вида $\mathbf{P}(\Gamma_u|\mathcal{Z}_s\mathcal{Y}_s^t)$, где $\Gamma_u\in\mathcal{Z}_u$. Из условия Маркова немедленно следует, что п. н.

$$\mathbf{P}(\Gamma_u|\mathcal{Z}_s\mathcal{Y}_r^t)=\mathbf{P}(\Gamma_u|\mathcal{Z}_s\mathcal{Y}_s^t) \text{ при } r<s<t,\ s<u. \tag{5.3}$$

Таким образом, достаточно ограничиться лишь вероятностями, стоящими справа. Введем для них особое обозначение

$$\mathbf{P}(\Gamma_u|z_s,y_s^t)=W_s^{ut}(z_s,\Gamma_u),\quad s<t;\quad s<u \tag{5.4}$$

и установим уравнение, которому они удовлетворяют.

Теорема 5.2. *Почти наверное удовлетворяется уравнение*

$$W_s^{vu}(z_s,\Gamma_v)=\int W_s^{tu}(z_s,dz_t)\,W_t^{vu}(z_t,\Gamma_v), \tag{5.5}$$

$$s\leqslant t\leqslant v;\quad s<u;\quad t<u.$$

Для доказательства рассмотрим очевидное равенство

$$\mathbf{P}(\Gamma_v|z_s,y_s^u)=\int\mathbf{P}(\Gamma_v|z_s,z_t,y_s^u)\,\mathbf{P}(dz_t|z_s,y_s^u). \tag{5.6}$$

Но в силу условия Маркова

$$\mathbf{P}(\Gamma_v|z_s,z_t,y_s^u)=\mathbf{P}(\Gamma_v|z_t,y_t^u) \text{ при } s<t<v;\ t<u,$$

поэтому из (5.6) вытекает (5.5).

§ 5.2. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ИНФОРМАЦИОННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ

Для получения более далеко идущих результатов ограничимся рассмотрением условных процессов несколько более узкого класса, а именно процессов, которым свойственна информационная непрерывность *.

Определение 5.2. *Условный марковский процесс назовем процессом с информационной непрерывностью, если условные меры* $\mathbf{P}(\Gamma_s|y_r^s)$, $\mathbf{P}(\Gamma_s|y_r^u)$ *п. н. абсолютно непрерыв-*

* Термин «информационная» понимается здесь не в шенноновском смысле.

ны относительно друг друга при любых (если надо, достаточно близких друг к другу) значениях $r<s\leqslant u$.

Приведенное определение утверждает непрерывную зависимость вероятностей от длины информационного интервала. Такая непрерывность имеет место в большинстве практически интересных случаев и проверяется на конкретных примерах.

Для процессов с информационной непрерывностью можно ввести в рассмотрение соответствующую производную Радона—Никодима, для которой введем обозначение

$$h_{rs}^{u}(z_s)=\frac{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^u)}{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^s)},\quad r<s\leqslant u. \tag{5.7}$$

По определению она является $\mathscr{Z}_s\,\mathscr{Y}_r^u$-измеримой функцией.

Теорема 5.3. *Меры $W_s^{tu}(z_s,\Gamma_t)$ $W_s^{tt}(t_s,\Gamma_t)$, $s<t\leqslant u$ в случае информационной непрерывности являются абсолютно непрерывными, причем соответствующая производная Радона—Никодима (обозначаемая f_s^{tu}) равна*

$$f_s^{tu}(z_s,z_t)\equiv\frac{W_s^{tu}(z_s,dz_t)}{W_s^{tt}(z_s,dz_t)}=\frac{h_{rt}^{u}(z_t)\,h_{rs}^{t}(z_s)}{h_{rs}^{u}(z_s)}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Учитывая (5.7), имеем

$$\frac{h_{rs}^{t}(z_s)}{h_{rs}^{u}(z_s)}=\frac{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^t)}{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^u)},\quad r<s\leqslant t,\quad s\leqslant u. \tag{5.9}$$

Рассмотрим выражение

$$B=\frac{h_{rs}^{t}(z_s)}{h_{rs}^{u}(z_s)}\mathbf{P}(\Gamma_t\mid z_s,y_r^t). \tag{5.10}$$

Подставляя (5.9) в правую часть, находим

$$B=\frac{\mathbf{P}(\Gamma_t dz_s\mid y_r^t)}{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^u)}=\int_{\Gamma_t}\frac{\mathbf{P}(dz_s\mid z_t,y_r^t)}{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^u)}\mathbf{P}(dz_t\mid y_r^t).$$

Но в силу условия Маркова (в обратном времени)

$$\mathbf{P}(dz_s\mid z_t,y_r^t)=\mathbf{P}(dz_s\mid z_t,y_r^u).$$

Поэтому

$$B=\int_{\Gamma_t}\frac{\mathbf{P}(dz_s\mid z_t,y_r^u)}{\mathbf{P}(dz_s\mid y_r^u)}\,\mathbf{P}(dz_t\mid y_r^u)\,\frac{\mathbf{P}(dz_t\mid y_r^t)}{\mathbf{P}(dz_t\mid y_r^u)}$$

или, если принять во внимание (5.7),

$$B = \int\limits_{\Gamma_t} \frac{\mathbf{P}(dz_s dz_t \mid y_r^u)}{\mathbf{P}(dz_s \mid y_r^u)} \frac{1}{h_{rt}^u(z_t)} = \int\limits_{\Gamma_t} \frac{\mathbf{P}(dz_t \mid z_s, y_r^u)}{h_{rt}^u(z_t)}.$$

Сравнивая выражение в правой части этого равенства с (5.10), убеждаемся в абсолютной непрерывности мер $\mathbf{P}(\Gamma_t \mid z_s, y_r^t)$ и $\mathbf{P}(\Gamma_t \mid z_s, y_r^u)$, т. е., в силу (5.3), (5.4), мер, рассматриваемых в теореме. Это сравнение дает также выражение (5.8) для соответствующей производной Радона—Никодима. Доказательство закончено.

В дальнейшем мы будем пользоваться сокращенным обозначением

$$W_s^{tt}(z_s, \Gamma_t) = W_s^t(z_s, \Gamma_t).$$

Теорема 5.4. *Для процессов с информационной непрерывностью п. н. справедливо уравнение*

$$W_s^u(z_s, \Gamma_u) = \int W_s^t(z_s, dz_t)\, W_t^u(z_t, \Gamma_u)\, f_s^{tu}(z_s, z_t), \qquad (5.11)$$

$$s \leqslant t \leqslant u.$$

Этот результат непосредственно следует из (5.5), если положить $u=v$ и использовать теорему 5.3.

Полагая в (5.5) $u \neq v$, снова используя теорему 5.3 и сравнивая результат с (5.11), мы убеждаемся в справедливости тождества

$$f_s^{tv}(z_s, z_t) = \frac{f_s^{tu}(z_s, z_t)\, f_t^{vu}(z_t, z_v)}{f_s^{vu}(z_s, z_v)},$$

которое, впрочем, можно получить и из (5.8), (5.7).

Удобно ввести новую (невероятностную) меру

$$V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t) = h_{rs}^t(z_s)\, W_s^t(z_s, \Gamma_t) \qquad (5.12)$$

$$(r < s \leqslant t),$$

которая определяется этим равенством почти всюду.

Тогда после подстановки (5.8) в (5.11) будем иметь следующий результат:

Теорема 5.5. *Для процессов с информационной непрерывностью п. н. выполняется уравнение*

$$V_{rs}^u(z_s, \Gamma_u) = \int V_{rs}^t(z_s, dz_t)\, V_{rt}^u(z_t, \Gamma_u), \quad r < s \leqslant t \leqslant u. \qquad (5.13)$$

Ввиду того что мера $W_s^t(z_s, \Gamma_t)$ вероятностная ($W_s^t(z_s, \Omega) = 1$), из (5.12) имеем

$$V_{ri}^t(z_s, \Omega) = h_{rs}^t(z_s). \tag{5.14}$$

Полагая $\Gamma_u = \Omega$ в (5.13), получаем, следовательно,

$$h_{rs}^u(z_s) = \int V_{rs}^t(z_s, dz_t)\, h_{rt}^u(z_t).$$

Если мера V_{rs}^t является известной, то по ней можно найти функцию h_{rs}^t согласно (5.14), а затем и вероятностные меры

$$W_s^t(z_s, \Gamma_t) = \frac{V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t)}{V_{rs}^t(z_s, \Omega)}; \tag{5.15}$$

$$W_s^{tu}(z_s, \Gamma_t) = \frac{1}{V_{rs}^u(z_s, \Omega)} \int_{\Gamma_t} V_{rs}^t(z_s, dz_t)\, V_{rt}^u(z_t, \Omega). \tag{5.16}$$

При выводе последних формул мы использовали (5.12), (5.14) и теорему 5.3.

Нам будет полезна

Лемма 5.1. *Для марковских процессов взаимная абсолютная непрерывность мер*

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) \sim \mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^s), \quad \Gamma_s \in \mathscr{Z}_s \tag{5.17}$$

влечет за собой абсолютную непрерывность мер

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s) \sim \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s), \quad \Lambda_s^t \in \mathscr{Y}_s^t \tag{5.18}$$

и наоборот, причем производные Радона—Никодима совпадают.

Доказательство. Используя (5.17) и подставляя (5.7) в равенство

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int_{\Lambda_s^t} \mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t)\, \mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s),$$

получаем по теореме Фубини

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int_{\Lambda_s^t} \left[\int_{\Gamma_s} h_{rs}^t(z_s)\, \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s)\right] \mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s) =$$

$$= \int_{\Gamma_s} \left[\int_{\Lambda_s^t} h_{rs}^t(z_s)\, \mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)\right] \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s). \tag{5.19}$$

В то же время справедливо равенство

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s, y_r^s)\, \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s),$$

которое в силу условия Маркова можно записать

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s)\, \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s). \tag{5.20}$$

При сопоставлении (5.19) и (5.20) зафиксируем Λ_s^t, а Γ_s пусть пробегает различные множества из $\mathscr{Z}_s$.

При этом будем иметь

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s) = \int_{\Lambda_s^t} h_{rs}^t(z_s)\, \mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s) \text{ п. н.} \tag{5.21}$$

Отсюда следует (5.18) и равенство

$$h_{rs}^t(z_s) = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \mid z_s)}{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)}. \tag{5.22}$$

Для доказательства обратного утверждения теоремы равенства (5.19), (5.21) нужно рассматривать в обратном порядке. Доказательство закончено.

Подставляя (5.22) в (5.12), получаем

$$V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t) = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \mid z_s)\, \mathbf{P}(\Gamma_t \mid z_s, y_s^t)}{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)} = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)}. \tag{5.23}$$

Таким образом, $V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t)$ можно рассматривать как производную Радона — Никодима мер $\mathbf{P}(\Lambda_s^t \Gamma_t \mid z_s)$, $\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s)$ на σ-алгебре $\mathscr{Y}_s^t$. Информационная непрерывность (определение 5.2) приводит к абсолютной непрерывности этих мер.

Теорема 5.6. *В случае процессов с информационной непрерывностью отношение*

$$\frac{h_{r's}^t(z_s)}{h_{rs}^t(z_s)} \equiv g_{rr'}^{st}, \quad r < s < t; \quad r' < s \tag{5.24}$$

(*здесь для определенности* $r < r'$) *является* $\mathscr{Y}_r^t$-*измеримой функцией* (*т. е. не зависит от* z_s).

Доказательство. Из определения 5.2 и леммы 5.1 вытекает абсолютная непрерывность

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s) \sim \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s);$$

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s) \sim \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_{r'}^s), \quad \Lambda_s^t \in \mathscr{Y}_s^t$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s) \sim \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_{r'}^s).$$

Взяв отношение двух выражений типа (5.22), получаем (5.24), причем оказывается, что

$$g_{rr'}^{st} = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_{r'}^s)}{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)}.$$

Доказательство закончено.

Согласно (5.12) следствием теоремы 5.6 является формула

$$V_{r's}^t(z_s, \Gamma_t) = g_{rr'}^{st} V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t), \quad r < r' < s < t. \tag{5.25}$$

§ 5.3. ВВЕДЕНИЕ ОСНОВНОЙ АПОСТЕРИОРНОЙ МЕРЫ

Как видно из сравнения (5.11) и (5.13), мера $V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t)$ имеет перед $W_s^t(z_s, \Gamma_t)$ то преимущество, что удовлетворяет более простому уравнению, не содержащему никаких других функций. Правда, она имеет перед $W_s^t(z_s, \Gamma_t)$ тот недостаток, что не является $\mathscr{Z}_s\mathscr{Y}_s^t$-измеримой, так как зависит еще от $\overset{s}{y_r}$. Из формулы (5.25) видно, однако, что эта зависимость носит не очень существенный характер. Именно, при изменении r мера $V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t)$ умножается на постоянную, т. е. не зависящую от z_s и Γ_t (но зависящую от $\overset{s}{y_r}$) величину. Желательным является вовсе устранить произвол в выборе r и зависимость меры от $\overset{s}{y_r}$.

Возникает вопрос, можно ли ввести такую меру (обозначим ее $V_s^t(z_s, \Gamma_t)$), которая сочетала бы отмеченные преимущества мер V_{rs}^t, W_s^t и не имела бы их недостатков. Дадим более точное описание свойств этой меры:

1°. $V_s^t(z_s, \Gamma_t)$ $\mathscr{Z}_s\mathscr{Y}_s^t$-*измерима;*

2°. $$V_s^t(z_s, \Gamma_t) = g_{rs}^t V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t), \tag{5.26}$$

т. е. отличается от V_{rs}^t *множителем* g_{rs}^t, *не зависящим* от z_s *и* Γ_t;

3°. *удовлетворяет уравнению*

$$V_s^u(z_s, \Gamma_u) = \int V_s^t(z_s, dz_t) V_t^u(z_t, \Gamma_u), \; s \leqslant t \leqslant u. \tag{5.27}$$

Перечисленные свойства дают дескриптивное определение основной системы мер $V_s^t(z_s, \Gamma_t)$.

Нетрудно видеть, что из (5.26) и равенств (5.15), (5.16) (при учете (5.13)) немедленно вытекает справедливость аналогичных равенств для основной меры, а именно:

$$W_s^t(z_s, \Gamma_t) = \frac{V_s^t(z_s, \Gamma_t)}{V_s^t(z_s, \Omega)}; \tag{5.28}$$

$$W_s^{tu}(z_s, \Gamma_t) = \frac{1}{V_s^u(z_s, \Omega)} \int\limits_{\Gamma_t} V_s^t(z_s, dz_t) V_t^u(z_t, \Omega). \qquad (5.29)$$

Свойство 2° можно считать эквивалентным равенству (5.28).

Приведенные выше свойства 1°—3° определяют систему мер $V_s^t(z_s, \Gamma_t)$ не вполне однозначно. В самом деле, если $V_s^t(z_s, \Gamma_t)$ есть мера с указанными свойствами, то эти свойства, как легко видеть, будет иметь также мера

$$V_s'^t(z_s, \Gamma_t) = \vartheta_s^t V_s^t(z_s, \Gamma_t), \qquad (5.30)$$

где ϑ_s^t — $\mathcal{Y}_s^t$-измеримый мультипликативный функционал, т. е. семейство функций, удовлетворяющих уравнению

$$\vartheta_s^u = \vartheta_s^t \vartheta_t^u, \quad s \leqslant t \leqslant u.$$

Если описанная выше основная апостериорная мера существует, то ее, очевидно, можно получить предельным переходом

$$V_s^t(z_s, \Gamma_t) = \lim_{r \uparrow s} G_r V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t)$$

при подходящем выборе $\mathcal{Y}_r^t$-измеримого множителя G_r.

Приведем здесь один конкретный конструктивный способ введения основной меры. Рассмотрим Δ-разбиение $S_\Delta = \{t_1, \ldots, t_N\}$ множества T, такое, что с уменьшением Δ множество S_Δ расширяется и имеет своим пределом (при $\Delta \to 0$) множество S, всюду плотное в T. Образуем ступенчатую функцию

$$\varphi(t) = \max\{t_i : t_i < t\},$$

(следовательно, $\varphi(t_j) = t_{j-1}$). При фиксированном Δ определим семейство мер $\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)$ следующим образом. Если s и $t > s$ принадлежат одному интервалу $(t_i, t_{i+1}]$, то положим

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = V_{\varphi(s),s}^t(z_s, \Gamma_t).$$

Если они принадлежат соседним интервалам: $t_i < s \leqslant t_{i+1} < t \leqslant t_{i+2}$, то пусть

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = \int V_{t_i s}^{t_{i+1}}(z_s, dz_{t_{i+1}}) V_{t_i t_{i+1}}^t(z_{t_{i+1}}, \Gamma_t) = V_{t_i s}^t(z_s, \Gamma_t). \qquad (5.31)$$

Если $t_i < s \leqslant t_{i+1}$, $t_{i+2} < t \leqslant t_{i+3}$, то положим

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = \int \overline{V}_s^{t_{i+2}}(z_s, dz_{t_{i+2}}) V_{t_{i+1} t_{i+2}}^t(z_{t_{i+2}}, \Gamma_t).$$

Используя (5.31), (5.25), (5.13), можно выразить эту меру через $V_{\varphi(s),s}^t$:

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = g_{\varphi(s),t_{i+1}}^{t_{i+2},t} \int V_{\varphi(s),s}^{t_{i+2}}(z_s, dz_{t_{i+2}})\, V_{\varphi(s),t_{i+2}}^t(z_{t_{i+2}}, \Gamma_t) =$$

$$= g_{\varphi(s),t_{i+1}}^{t_{i+2},t}\, V_{\varphi(s),s}^t(z_s, \Gamma_t). \tag{5.32}$$

Для следующего интервала, когда $t_{i+3} < t \leqslant t_{i+4}$, пусть

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = \int \overline{V}_s^{\varphi(t)}(z_s, dz_{\varphi(t)})\, V_{t_{i+2},\varphi(t)}^t(z_{\varphi(t)}, \Gamma_t).$$

Используя (5.32), а также равенство

$$V_{t_{i+2},\varphi(t)}^t(z_{\varphi(t)}, \Gamma_t) = g_{\varphi(s),t_{i+2}}^{\varphi(t),t}\, V_{\varphi(s),\varphi(t)}^t(z_{\varphi(t)}, \Gamma_t),$$

и (5.13), имеем

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = g_{\varphi(s),t_{i+1}}^{t_{i+2},t_{i+3}}\, g_{\varphi(s),t_{i+2}}^{t_{i+3},t}\, V_{\varphi(s),s}^t(z_s, \Gamma_t). \tag{5.33}$$

Аналогичным образом процесс определения мер $\overline{V}_s^t$ продолжается при более далеких друг от друга значениях s и t. Он соответствует рекуррентной формуле

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = \int \overline{V}_s^{\varphi(t)}(z_s, dz_{\varphi(t)}) V_{\varphi(\varphi(t)),\varphi(t)}^t(z_{\varphi(t)}, \Gamma_t).$$

Аналогично тому, как были выведены равенства (5.32), (5.33), отсюда, используя (5.25), (5.13), можно получить

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = \prod_{t_{j-1}=\varphi(s)}^{t_{j+2}=\varphi(t)} g_{\varphi(s),t_j}^{t_{j+1},t_{j+2}}\, g_{\varphi(s),\varphi(\varphi(t))}^{\varphi(t),t}\, V_{\varphi(s),s}^t(z_s, \Gamma_t).$$

Если учесть к тому же, что

$$V_{\varphi(s),s}^t(z_s, \Gamma_t) = g_{r,\varphi(t)}^{st}\, V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t),$$

то будем иметь

$$\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = g_{r,\varphi(t)}^{st}\, g_{\varphi(s),t_{i+1}}^{t_{i+2},t_{i+3}} \dots g_{\varphi(s),\varphi(\varphi(t))}^{\varphi(t),t}\, V_{rs}^t(z_s, \Gamma_t). \tag{5.34}$$

Это равенство является для $\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)$ аналогом равенства (5.26). Из определения мер $\overline{V}_s^t$ следует, что они удовлетворяют уравнению (5.27), если $t \notin S_\Delta$. Кроме того, очевидно, что $\overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)$ есть $\mathscr{X}_s\mathscr{Y}_{\varphi(s)}^t$-измеримая функция, причем $s-\varphi(s) \leqslant \Delta$.

Совершим теперь предельный переход $\Delta \to 0$. Если σ-алгебры $\mathscr{Y}_s^t$ обладают по s свойством непрерывности слева

$$\lim_{\tau \uparrow s} \mathscr{Y}_\tau^t = \mathscr{Y}_s^t,$$

то предел

$$\lim_{\Delta\to 0} \overline{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = V_s^t(z_s, \Gamma_t), \tag{5.35}$$

если он существует, является $\mathscr{Z}_s\mathscr{Y}_s^t$-измеримой функцией. Условие 1° для предельных мер тем самым оказывается выполненным. Далее, равенство (5.34) при существовании предела (5.35) обращается в пределе в (5.26). Остается проверить последнее условие 3°. Как отмечалось, допредельные меры удовлетворяют уравнению (5.27) при $t \in S_\Delta$. Предельные меры (5.35) будут поэтому удовлетворять указанному уравнению на предельном множестве S, всюду плотном в T. Отсюда вытекает справедливость уравнения (5.27) на всем множестве T при некоторых дополнительных предположениях непрерывности.

§ 5.4. ДРУГОЙ СПОСОБ ВВЕДЕНИЯ ОСНОВНОЙ АПОСТЕРИОРНОЙ МЕРЫ

Для практических целей более полезным может оказаться другой способ введения основной меры, к описанию которого мы переходим. Именно этот способ будет использован нами в двух последующих главах.

Новый способ не обусловлен явно предположением об информационной непрерывности, но зато требует выполнения другого предположения, которое мы формулируем ниже.

Гипотеза 5.1. *Существует вероятностная марковская мера* $\mathbf{Q}(\Lambda)$ *в пространстве* $(\Omega, \mathscr{Y}_T)$, *такая, что меры*

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \Gamma_t \mid z_s), \quad \Lambda_s^t \in \mathscr{Y}_s^t,$$

почти всюду абсолютно непрерывны относительно меры $\mathbf{Q}(\Lambda_s^t \mid y_s)$ *на σ-алгебре* $\mathscr{Y}_s^t$. Здесь s, $t(>s)$, Γ_t — любые (из T и из $\mathscr{Z}_t$ соответственно), но фиксированные.

Соответствующая указанным мерам производная Радона—Никодима

$$V_s^t(z_s, \Gamma_t) = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)} \tag{5.36}$$

образует искомую меру (ненормированную) в пространстве $(\Omega, \mathscr{Z}_t)$. Меняя s и t, мы получаем двухпараметрическое семейство мер. Приведем две теоремы.

Теорема 5.7. *Из гипотезы* 5.1 *вытекает информационная непрерывность условного процесса.*

Теорема 5.8. *Семейство мер* (5.36) *удовлетворяет требованиям* 1°—3°, *т. е. представляет собой один из вариантов основной апостериорной меры.*

Доказательство теоремы 5.7. Согласно лемме 5.1

достаточно доказать абсолютную непрерывность

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s) \sim \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s), \quad \Lambda_s^t \in \mathcal{Y}_s^t.$$

Поскольку в силу гипотезы 5.1

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s) \sim \mathbf{Q}(\Lambda_s^t \mid y_s),$$

то, следовательно, для доказательства теоремы 5.7 достаточно доказать абсолютную непрерывность

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s) \sim \mathbf{Q}(\Lambda_s^t \mid y_s). \tag{5.37}$$

Из равенства

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s, y_r^s)\,\mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s)$$

вследствие условия Маркова имеем

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int \mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid z_s)\,\mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s).$$

Отсюда, используя гипотезу 5.1 и (5.36), находим

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int \left[\int_{\Lambda_s^t} V_s^t(z_s, \Omega)\,\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)\right]\mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s).$$

Меняя порядок интегрирования (теорема Фубини), получаем

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t \mid y_r^s) = \int_{\Lambda_s^t} \left[\int V_s^t(z_s, \Omega)\,\mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s)\right]\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s). \tag{5.38}$$

Функция $V_s^t(z_s, \Omega)$ ограничена и отлична от нуля на $\mathcal{Z}_t\mathcal{Y}_s^t$ почти всюду по мере $\mathbf{P}$ вследствие гипотезы 5.1. Поэтому почти всюду ограничен и отличен от нуля интеграл

$$\int V_s^t(z_s, \Omega)\,\mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s),$$

входящий в (5.38). Отсюда вытекает абсолютная непрерывность (5.37), которая, как было отмечено, достаточна для доказательства теоремы 5.7.

Доказательство теоремы 5.8. Выполнение 1° с очевидностью следует из (5.36) и не требует дальнейшей аргументации. Для проверки 2° следует сравнить выражения (5.36) и (5.23) и доказать, что они отличаются лишь множителем, не зависящим от z_s и Γ_t. Но в силу гипотезы 5.1 и абсолютной непрерывности (5.37) имеем

$$\frac{\mathbf{P}(dy_s^t\Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)} = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t\Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)}\,\frac{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)}{\mathbf{P}(dy_s^t \mid y_r^s)}.$$

Отсюда следует указанное утверждение, а также вид упомянутого множителя

$$g_{rs}^{t}=\frac{\mathbf{P}(dy_{s}^{t}\mid y_{r}^{s})}{\mathbf{Q}(dy_{s}^{t}\mid y_{s})}.$$

Перейдем к проверке требования 3°, причем используем марковские свойства обеих мер.

Возьмем множества $\Lambda_s^t \in \mathcal{Y}_s^t$, $\Lambda_t^u \in \mathcal{Y}_t^u$, $\Gamma_u \in \mathcal{Z}_u$, $(s<t<u)$ и рассмотрим равенство

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t\Lambda_t^u\Gamma_u\mid z_s)=\int\limits_{\Lambda_s^t}\mathbf{P}(\Lambda_t^u\Gamma_u\mid z_s,\ z_t,\ y_s^t)\,\mathbf{P}(dy_s^t\,dz_t\mid z_s),$$

которое в силу условия Маркова можно записать

$$\mathbf{P}(\Lambda_s^t\Lambda_t^u\Gamma_u\mid z_s)=\int\limits_{\Lambda_s^t}\mathbf{P}(\Lambda_t^u\Gamma_u\mid z_t)\,\mathbf{P}(dy_s^t\,dz_t\mid z_s). \tag{5.39}$$

Аналогично в силу марковских свойств второй меры

$$\mathbf{Q}(\Lambda_s^t\Lambda_t^u\mid y_s)=\int\limits_{\Lambda_s^t}\mathbf{Q}(\Lambda_t^u\mid y_t)\,\mathbf{Q}(dy_s^t\mid y_s). \tag{5.40}$$

Запишем все три меры, входящие в (5.39), при помощи мер V_σ^τ, например

$$\mathbf{P}(\Lambda_t^u\Gamma_u\mid z_t)=\int\limits_{\Lambda_t^u}V_t^u(z_t,\Gamma_u)\,\mathbf{Q}(dy_t^u\mid y_t).$$

После этого (5.39) примет вид

$$\int\limits_{\Lambda_s^t\Lambda_t^u}V_s^u(z_s,\Gamma_u)\,\mathbf{Q}(dy_s^u\mid y_s)=$$

$$=\int\limits_{\Lambda_s^t}\Big[\int\limits_{\Lambda_t^u}V_t^u(z_t,\Gamma_u)\,\mathbf{Q}(dy_t^u\mid y_t)\Big]V_s^t(z_s,dz_t)\,\mathbf{Q}(dy_s^t\mid y_s).$$

Пользуясь теоремой Фубини, изменим порядок интегрирования в правой части и учтем (5.40). Это приведет к равенству

$$\int\limits_{\Lambda_s^t\Lambda_t^u}V_s^t(z_s,\Gamma_u)\,\mathbf{Q}(dy_s^u\mid y_s)=\int\limits_{\Lambda_s^t\Lambda_t^u}\Big[\int V_s^t(z_s,dz_t)\,V_t^u(z_t,\Gamma_u)\Big]\mathbf{Q}(dy_s^u\mid y_s).$$

По теореме Радона—Никодима отсюда получаем (5.27). Доказательство закончено.

§ 5.5. АПОСТЕРИОРНЫЕ МЕРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НАЧАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Через основную апостериорную меру V_s^t можно выразить некоторые апостериорные вероятности, но не все. В общем случае для определения апостериорных вероятностей указанной меры оказывается недостаточно, требуется задать еще некоторое начальное распределение. В настоящем параграфе мы приведем формулы, позволяющие отыскать различные апостериорные вероятности, когда известны и основная апостериорная мера, и начальное распределение.

1. Используя (5.7), а затем (5.14), имеем

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) = \int_{\Gamma_s} h_{rs}^t(z_s)\, \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s) = \int_{\Gamma_s} V_{rs}^t(z_s, \Omega)\, \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s) \quad (r < s < t)$$

и вследствие (5.26)

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) = \frac{1}{g_{rs}^t} \int_{\Gamma_s} \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s)\, V_s^t(z_s, \Omega). \tag{5.41}$$

Введем обозначение

$$V_{rst}(\Gamma_t) = \int \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s)\, V_s^t(z_s, \Gamma_t). \tag{5.42}$$

Поскольку условная мера $\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t)$ является вероятностной ($\mathbf{P}(\Omega \mid y_r^t) = 1$), из (5.41), (5.42) имеем

$$g_{rs}^t = V_{rst}(\Omega); \tag{5.43}$$

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) = \frac{1}{V_{rst}(\Omega)} \int_{\Gamma_s} \mathbf{P}(dz_s \mid y_r^s)\, V_s^t(z_s, \Omega). \tag{5.44}$$

Подставляя (5.43) в (5.26) и учитывая (5.14), можно выразить через V_s^t и $\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^s)$ также функцию h_{rs}^t:

$$h_{rs}^t(z_s) = \frac{V_s^t(z_s, \Omega)}{V_{rst}(\Omega)}.$$

2. Введем еще один момент времени r', промежуточный между r и s, и выразим рассмотренные выше вероятности и функции через V_s^t и $V_{rr's}$.

В силу условия Маркова имеем

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) = \int \mathbf{P}(\Gamma_s \mid z_{r'}, y_r^t)\, \mathbf{P}(dz_{r'} \mid y_r^t) = \int W_{r'}^{st}(z_{r'}, \Gamma_s)\, \mathbf{P}(dz_{r'} \mid y_r^t).$$

Подставляя сюда (5.29) и (5.44), получаем

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) = \frac{1}{V_{rr't}(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_s} \mathbf{P}(dz_{r'} \mid y_r^{r'})\, V_{r'}^s(z_{r'}, dz_s)\, V_s^t(z_s, \Omega)$$

или, если учесть (5.42),

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^t) = \frac{1}{V_{rr't}(\Omega)} \int_{\Gamma_s} V_{rr's}(dz_s)\, V_s^t(z_s, \Omega). \qquad (5.45)$$

В частности, если в этом равенстве положить $s=t$, то будем иметь

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^s) = \frac{V_{rr's}(\Gamma_s)}{V_{rr's}(\Omega)}. \qquad (5.46)$$

Использование двух последних равенств в соответствии с (5.7) приводит к результату

$$h_{rs}^t(z_s) = \frac{V_{rr's}(\Omega)}{V_{rr't}(\Omega)} V_s^t(z_s, \Omega).$$

3. Пусть область определения процесса есть интервал $T=[a, b]$, причем $a<0$; $b=T_0$. Будем полагать в предыдущих формулах $r=a$, $r'=0$ и брать точки s, t и др. из интервала $[0, T_0]$. Введем сокращенное обозначение

$$V_{a0t}(\Gamma_t) \equiv V_t(\Gamma_t); \quad \mathbf{P}(\Gamma_t \mid y_a^t) \equiv W_t(\Gamma_t).$$

Тогда, очевидно, формулы (5.46), (5.45) примут вид

$$W_t(\Gamma_t) = \frac{V_t(\Gamma_t)}{V_t(\Omega)}; \qquad (5.47)$$

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_a^t) = \frac{1}{V_t(\Omega)} \int_{\Gamma_s} V_s(dz_s)\, V_s^t(z_s, \Omega), \; s<t. \qquad (5.48)$$

Если совершить преобразование мер

$$\widetilde{V}_s^t(z_s, \Gamma_t) = V_s(\Omega)\, V_s^t(z_s, \Gamma_t) \frac{1}{V_t(\Omega)}, \qquad (5.49)$$

то согласно (5.47) формула (5.48) при помощи новой меры запишется так:

$$\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_a^t) = \int_{\Gamma_s} W_s(dz_s)\, \widetilde{V}_s^t(z_s, \Omega), \; s<t. \qquad (5.50)$$

Используя (5.27) и определение семейства мер V_t, легко получить, что эти меры удовлетворяют уравнению

$$V_t(\Gamma_t) = \int V_s(dz_s)\, V_s^t(z_s, \Gamma_t), \quad s \leqslant t. \qquad (5.51)$$

Переходя к мерам (5.47), (5.49), это уравнение можно записать

$$W_t(\Gamma_t) = \int W_s(dz_s)\, \widetilde{V}_s^t(z_s, \Gamma_t). \qquad (5.52)$$

Рассмотрим моменты времени $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots t_n \leqslant u \leqslant b$ и соответствующее им многомерное апостериорное распределение $\mathbf{P}(\Gamma_{t_1} \ldots \Gamma_{t_n} | y_a^u)$, $\Gamma_{t_i} \in \mathscr{X}_{t_i}$. Вследствие теоремы 5.1 (при $\widetilde{\mathscr{Y}} = \mathscr{Y}_a^u$) условный процесс является процессом Маркова. Ему, очевидно, соответствуют переходные вероятности $\mathbf{P}(\Gamma_t | z_s, y_a^u) = W_s^{tu}(z_s, \Gamma_t)$ и начальное распределение $\mathbf{P}(\Gamma_{t_1} | y_a^u)$, поэтому

$$\mathbf{P}(\Gamma_{t_1} \ldots \Gamma_{t_n} | y_a^u) = \int\limits_{\Gamma_{t_1}} \ldots \int\limits_{\Gamma_{t_n}} \mathbf{P}(dz_1 | y_a^u)\, W_{t_1}^{t_2 u}(z_1, dz_2) \ldots$$

$$\ldots W_{t_{n-1}}^{t_n, u}(z_{n-1}, dz_n). \tag{5.53}$$

Если подставить сюда (5.29) и (5.48), то это выражение преобразуется к виду

$$\mathbf{P}(\Gamma_{t_1} \ldots \Gamma_{t_n} | y_a^u) = \frac{1}{V_u(\Omega)} \int\limits_{\Gamma_{t_1}} \ldots \int\limits_{\Gamma_{t_n}} V_{t_1}(dz_1)\, V_{t_1}^{t_2}(z_1, dz_2) \ldots$$

$$\ldots V_{t_{n-1}}^{t_n}(z_{n-1}, dz_n)\, V_{t_n}^u(z_n, \Omega). \tag{5.54}$$

Перейдем, наконец, к мерам (5.49). Подставляя

$$V_s^t(z_s, \Gamma_t) = \frac{1}{V_s(\Omega)} \widetilde{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)\, V_t(\Omega)$$

в (5.54), получаем

$$\mathbf{P}(\Gamma_{t_1} \ldots \Gamma_{t_n} | y_a^u) = \int\limits_{\Gamma_{t_1}} \ldots \int\limits_{\Gamma_{t_n}} W_{t_1}(dz_1)\, \widetilde{V}_{t_1}^{t_2}(z_1, dz_2) \ldots$$

$$\ldots \widetilde{V}_{t_{n-1}}^{t_n}(z_{n-1}, dz_n)\, \widetilde{V}_{t_n}^u(z_n, \Omega). \tag{5.55}$$

4. Формулы (5.29), (5.49) можно рассматривать как замену марковской системы мер (3.31). Семейство мер $\widetilde{V}_s^t$ или семейство W_s^{tu} (u фиксировано), рассматриваемые в соответствии с (5.55), (5.53) как марковская система мер, имеют перед основной системой V_s^t тот недостаток, что каждая мера: $\widetilde{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)$ или $W_s^{tu}(z_s, \Gamma_t)$ не является $\mathscr{X}_s\mathscr{Y}_s^t$-измеримой (в отличие от V_s^t). Кроме того, $\widetilde{V}_s^t$ зависит от начального распределения, а W_s^{tu} — от произвола в выборе конечной точки u.

Указанные семейства мер, как всякая марковская система мер, описываются инфинитезимальными операторами (гл. 3). Пусть $L(t)$ — операторы семейства мер V_s^t, $\widetilde{L}(t)$ — операторы семейства $\widetilde{V}_s^t$, а $\widetilde{\widetilde{L}}(t)$ — операторы семейства W_s^{tu}.

Вследствие свойства 1° мер V_s^t операторы $L(t)$ обладают тем свойством, что разность $L(t)-L(s)$ является $\mathcal{Y}_s^t$-измеримой. Операторы $\widetilde{L}(t)$, $\widetilde{\widetilde{L}}(t)$, конечно, таким свойством не обладают.

Выполнение уравнений (5.27), (5.51), как указывалось в § 3.1, приводит к выполнению следующего дифференциального уравнения:

$$dV_t = V_t \overline{d}L(t). \tag{5.56}$$

Аналогично из (5.52) вытекает уравнение

$$dW_t = W_t \overline{d}\widetilde{L}(t). \tag{5.57}$$

Функция $V_t^u(z_t, \Omega)$, имеющая смысл функции правдоподобия, которая входит в (5.48), (5.49), (5.54), как легко понять, удовлетворяет уравнению

$$d_t V_t^u(z, \Omega) = -(\overline{d}L(t) V_t^u)(z, \Omega), \tag{5.58}$$

тогда как другая функция $\widetilde{V}_t^u(z, \Omega)$, входящая в (5.50), (5.55), удовлетворяет аналогичному уравнению с другим инфинитезимальным оператором

$$d_t \widetilde{V}_t^u(z, \Omega) = -(\overline{d}\widetilde{L}(t) \widetilde{V}_t^u)(z, \Omega). \tag{5.59}$$

Инфинитезимальный оператор $d\widetilde{L}$ можно выразить через основной оператор dL, используя теорему 3.3. Применяя формулу (3.38) к замене мер (5.49), получаем

$$\overline{d}\widetilde{L}(t) = [V_t(\Omega)\overline{d}L(t) - d^* V_t(\Omega)] \frac{1}{V_t(\Omega)}. \tag{5.60}$$

Но в силу (5.56), (5.47)

$$dV_t(\Omega) = (V_t \overline{d}L(t))(\Omega) = V_t(\Omega)(W_t \overline{d}L(t))(\Omega).$$

Поэтому (5.60) можно записать

$$\overline{d}\widetilde{L}(t) = V_t(\Omega)[\overline{d}L(t) - (W_t \overline{d}L(t))(\Omega)] \frac{1}{V_t(\Omega)} =$$

$$= dL_1(t) - (W_t d^* L_1(t))(\Omega), \tag{5.60а}$$

где

$$dL_1(t) = V_t(\Omega)\overline{d}L(t) \frac{1}{V_t(\Omega)} = V_t(\Omega) d^* L^*(t) \frac{1}{V_t(\Omega)} \tag{5.60б}$$

(использовано (3.20)).

Уравнения (5.57), (5.59), следовательно, примут вид

$$dW_t(\Gamma) = (W_t d^* L_1(t))(\Gamma) - W_t(\Gamma)(W_t d^* L_1(t))(\Omega), \tag{5.61}$$

$$-d\widetilde{V}_t^u(z, \Omega) = (d^* L_1(t) \widetilde{V}_t^u)(z, \Omega) - (W_t d^* L_1(t))(\Omega) \widetilde{V}_t^u(z, \Omega). \tag{5.62}$$

Аналогичным образом можно выразить оператор $d\tilde{\tilde{L}}(t)$ через $dL(t)$. Применение формулы (3.38) к преобразованию (5.29) дает

$$\overline{d}\tilde{\tilde{L}}(t) = \frac{1}{V_t^u(z, \Omega)} [\overline{d}L(t) V_t^u(z, \Omega) + d^* V_t^u(z, \Omega)]$$

и в силу (5.58)

$$\overline{d}\tilde{\tilde{L}}(t) = \frac{1}{V_t^u(z, \Omega)} [\overline{d}L(t) V_t^u(z, \Omega) - (\overline{d}L(t) V_t^u)(z, \Omega)]. \quad (5.63)$$

Как легко видеть из (5.61), (5.63), выполняются соотношения

$$dW_t(\Omega) = 0; \quad \overline{d}\tilde{\tilde{L}}(t) 1 = 0,$$

которые, конечно, являются необходимыми для сохранения нормировки вероятностных мер (например, из $W_t(\Omega) = 1$ следует $dW_t(\Omega) = 0$).

Остановимся в заключение на том частном случае, когда система мер V_s^u обладает свойствами мер, рассмотренных в § 3.3. В этом случае в дополнение к (5.56), (5.63) можно привести ряд более простых формул. Так, в соответствии с (3.47) кроме (5.56), (5.58) можно рассматривать уравнения

$$dV_t = V_t dL(t); \quad -d_t V_t^u(z, \Omega) = (dL(t) V_t^u)(z, \Omega). \quad (5.64)$$

где стохастические выражения понимаются в симметризованном смысле (§ 2.1). Аналогично можно снять черту над дифференциалом в формулах (5.57), (5.59).

Применим простые правила преобразования стохастических выражений в симметризованном смысле, чтобы вывести аналоги уравнений (5.61), (5.62). Согласно (3.32) для замены мер (5.49) имеем

$$d\tilde{L}(t) = V_t(\Omega) dL(t) \frac{1}{V_t(\Omega)} - d \ln V_t(\Omega) = dL(t) - \frac{dV_t(\Omega)}{V_t(\Omega)}.$$

Подставляя сюда первое уравнение (5.64), получаем

$$d\tilde{L}(t) = dL(t) - (W_t dL)(\Omega). \quad (5.65)$$

Следовательно,

$$dW_t(\Gamma) = (W_t dL(t))(\Gamma) - W_t(\Gamma)(W_t dL(t))(\Omega); \quad (5.66)$$

$$-d\tilde{V}_t^u(z, \Omega) = (dL(t) \tilde{V}_t^u)(z, \Omega) - (W_t dL(t))(\Omega) \tilde{V}_t^u)(z, \Omega). \quad (5.67)$$

Далее, если применить (3.32) к (5.29), то будем иметь

$$d\tilde{\tilde{L}}(t) = \frac{1}{V_t^u(z, \Omega)} [dL(t) V_t^u(z, \Omega) - (dL(t) V_t^u)(z, \Omega)]. \quad (5.68)$$

Примеры выведенных формул будут рассмотрены в дальнейшем.

Таблица 5.1

Сводка апостериорных мер и их инфинитезимальных операторов $(a<s<t<u)$

Мера	Оператор
Основная апостериорная мера:	
$V_s^t(z_s, dz_t)$	$dL(s),\ dL(t)$
$V_t(dz_t)$	$dL(t)$
Вспомогательная апостериорная мера:	
$\widetilde{V}_s^t(z_s, dz_t)=\dfrac{V_s(\Omega)}{V_t(\Omega)}V_s^t(z_s, dz_t)$	$d\widetilde{L}(s),\ d\widetilde{L}(t)$
Финальная апостериорная вероятность:	
$W_t(dz_t)=\mathbf{P}(dz_t\mid y_a^t)=\dfrac{V_t(dz_t)}{V_t(\Omega)}$	$d\widetilde{L}(t)$
Внутренняя апостериорная вероятность:	
$W_s^{tu}(z_s, dz_t)=\mathbf{P}(dz_t\mid z_s, y_a^u)=\dfrac{V_t^u(z_t,\Omega)}{V_s^u(z_s,\Omega)}V_s^t(z_s, dz_t)$	$d\widetilde{\widetilde{L}}(s),\ d\widetilde{\widetilde{L}}(t)$
$\mathbf{P}(dz_t\mid y_a^u)=\dfrac{V_t^u(z_t,\Omega)}{V_u(\Omega)}V_t(dz_t)$	$d\widetilde{\widetilde{L}}(t)$

§ 5.6. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА АПОСТЕРИОРНЫХ МЕР

1. Рассмотрим сначала свойства апостериорных мер, связанные с усреднением по значениям наблюдаемого процесса $\{y_t\}$ на том или ином интервале. Непосредственно из определения условных вероятностей следует ряд соотношений типа

$$\mathbf{M}[\mathbf{P}(\Gamma_s\mid y_a^t)\mid y_a^s]=\mathbf{P}(\Gamma_s\mid y_a^s); \tag{5.69}$$

$$\mathbf{M}[W_s^{tu}(z_s, \Gamma_t)\mid z_s]=\mathbf{P}(\Gamma_t\mid z_s),\quad s<t\leqslant u. \tag{5.70}$$

Если положить в последнем равенстве $u=t$ и подставить (5.28), то получим

$$\mathbf{M}\left[\frac{V_s^t(z_s,\Gamma_t)}{V_s^t(z_s,\Omega)}\,\middle|\, z_s\right]=\mathbf{P}(\Gamma_t\mid z_s),\quad s<t. \tag{5.71}$$

Далее, подставляя (5.50) в (5.69) и учитывая, что $W_s(\Gamma_s)$ при фиксированном Γ_s есть $\mathcal{Y}_a^s$-измеримая функция, так что ее можно вынести из-под знака условного математического ожидания, находим

$$\int_{\Gamma_s} W_s(dz_s)\,\mathbf{M}\,[\widetilde{V}_s^t(z_s, \Omega)\,|\,y_a^s] = W_s(\Gamma_s). \tag{5.72}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M}\,[\widetilde{V}_s^t(z_s, \Omega)\,|\,y_a^s] = 1, \quad a < s < t.$$

Можно утверждать большее. Вследствие условия Маркова имеем

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(\Gamma_s\Gamma_t\,|\,y_a^t)\,|\,y_a^s] = \mathbf{P}(\Gamma_s\Gamma_t\,|\,y_a^s) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{P}(dz_s\,|\,y_a^s)\,\mathbf{P}(\Gamma_t\,|\,z_s).$$

Выразим $\mathbf{P}(\Gamma_s\Gamma_t\,|\,y_a^t)$ через W_s и $\widetilde{V}_s^t$, пользуясь формулой (5.55), тогда

$$\mathbf{M}\left[\int_{\Gamma_s} W_s(dz_s)\,\widetilde{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)\,|\,y_a^s\right] = \int_{\Gamma_s} W_s(dz_s)\,\mathbf{P}(\Gamma_t\,|\,z_s).$$

Вынося, как и в (5.72), $W_s(dz_s)$ из-под знака математического ожидания и используя произвольность $\Gamma_s \in \mathscr{Z}_s$ (по теореме Радона—Никодима), получаем

$$\mathbf{M}\,[\widetilde{V}_s^t(z_s, \Gamma_t)\,|\,y_a^s] = \mathbf{P}(\Gamma_t\,|\,z_s). \tag{5.73}$$

Из найденных формул (5.71), (5.73), (5.70) видно, что апостериорные вероятности перехода при усреднении превращаются в априорные вероятности перехода. Соответствующее утверждение можно перенести и на инфинитезимальные операторы указанных вероятностей перехода. Без особой аргументации приведем здесь соотношение

$$\mathbf{M}\,[d\widetilde{L}^*(t)]\,y_a^s] = dL_{pr}^*(t) \tag{5.74}$$

(L_{pr} — априорный инфинитезимальный оператор), вытекающее из (5.73). Эти соотношения будут подтверждены для частных случаев, рассматриваемых в главах 6 и 7.

2. Другая группа свойств апостериорных мер — это их марковские свойства, если эти меры рассматривать как протекающий во времени случайный процесс. Возьмем процесс $\{V_t(\Gamma_t),\ \Gamma_t \in \mathscr{Z}_t\}$. Интервал $[0, T_0]$ есть для него область определения параметра, а фазовое пространство есть множество всех мер на $\mathscr{Z}_t$ (t фиксировано). Условия, наложенные на меру V_t, определяют при фиксированном t некоторую σ-алгебру $\mathscr{V}_t$ в пространстве Ω. Поскольку $V_t(\Gamma)$ при любом $\Gamma \in \mathscr{Z}_t$ есть $\mathscr{Y}_a^t$-измеримая функция, то $\mathscr{V}_t \subset \mathscr{Y}_a^t$.

Определение 5.3. *Пусть заданы*

А) *марковский процесс* $(\Omega, \mathscr{Z}_t, t \in T, \mathbf{P})$;

Б) *наблюдаемый процесс* $(\Omega, \mathscr{Y}_t, t \in T, \mathbf{P})$, *такой что*

$$\mathscr{Y}_t \subset \mathscr{Z}_t,$$

и В) *выбран какой-либо вариант основной апостериорной меры* V_t *и, следовательно, заданы соответствующие ей σ-алгебры* $\mathscr{V}_t$. *Тогда процесс* $(\Omega, \mathscr{V}_t, t \in T, \mathbf{P})$ *называется вторичным апостериорным* V-*процессом.*

Кроме указанного процесса вторичным процессом является процесс W_t. Фазовым пространством последнего служит множество вероятностных мер на $\mathscr{Z}_t$. Для этого процесса моменту времени t соответствует σ-алгебра $\mathscr{W}_t \subset \mathscr{Y}_a^t$, которая аналогична $\mathscr{V}_t$ и определяется условиями, наложенными на W_t.

Определение 5.4. *Пусть заданы*

А) *марковский процесс* $(\Omega, \mathscr{Z}_t, t \in T, \mathbf{P})$;

Б) *наблюдаемый процесс* $(\Omega, \mathscr{Y}_t, t \in T, \mathbf{P})$, $\mathscr{Y}_t \subset \mathscr{Z}_t$;

В) *условные вероятности* $W_t(\cdot) = \mathbf{P}(\cdot \mid \mathscr{Y}_a^t)$

и соответствующие им σ-алгебры $\mathscr{W}_t$. *Тогда процесс* $(\Omega, \mathscr{W}_t, t \in T, \mathbf{P})$ *называется вторичным апостериорным* W-*процессом.*

Теорема 5.8. *Вторичный апостериорный* V-*процесс* $\{V_t\}$ *почти наверное является марковским.*

Доказательство. Докажем, что при любых $t_1 < \ldots < t_{n+1}$ (из $[0, T_0]$) почти наверное выполняется равенство

$$\mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_1} \ldots \mathscr{V}_{t_n}) = \mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_n}), \; B \in \mathscr{V}_{t_{n+1}}. \tag{5.75}$$

В соответствии с (5.51) имеем

$$V_{t_{n+1}}(\Gamma) = \int V_{t_n}(dz)\, V_{t_n}^{t_n+1}(z, \Gamma), \tag{5.76}$$

где $V_{t_n}^{t_n+1}$ в силу 1° есть $\mathscr{Z}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1}$-измеримая функция. Отсюда следует, что $V_{t_{n+1}}(\Gamma)$ есть $\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1}$-измеримая функция при любом $\Gamma \in \mathscr{Z}_t$. Поэтому индикатор множества $B \in \mathscr{V}_{t_{n+1}}$ также есть $\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1}$-измеримая функция, и

$$\mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_1} \ldots \mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1}) = \mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1});$$

$$\mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_1} \ldots \mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1}) = \mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_n+1}). \tag{5.77}$$

Возьмем равенство

$$\mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_1} \ldots \mathscr{V}_{t_n}) = \int \mathbf{P}(B \mid \mathscr{V}_{t_1} \ldots \mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n})\, \mathbf{P}(dz_{t_n} \mid \mathscr{V}_{t_1} \ldots \mathscr{V}_{t_n}) \tag{5.78}$$

и рассмотрим вероятности, стоящие в его правой части.

Покажем сначала, что
$$\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n})=\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}). \tag{5.79}$$
Из определения условных вероятностей и условных математических ожиданий следуют очевидные равенства
$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)\,|\,\mathscr{F}'_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t]=\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)\ \text{при}\ \mathscr{F}_{\text{пр}}\subset\mathscr{F}'_{\text{пр}};$$
$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})\,|\,\mathscr{Z}_t]=\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{Z}_t)\ \text{п. н. } (B \text{ любое}).$$
Комбинация этих равенств, вообще говоря, не верна. Однако, если принять во внимание условие Маркова (независимость прошлого от будущего при фиксированном $\mathscr{Z}_t$), то будем иметь *
$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})\,|\,\mathscr{F}'_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t]=\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t),\ (\mathscr{F}_{\text{пр}}\subset\mathscr{F}'_{\text{пр}},\ B\in\mathscr{Z}_a^b). \tag{5.80}$$
Положим здесь $t=t_n$; $\mathscr{F}_{\text{пр}}=\mathscr{V}_{t_n}$; $\mathscr{F}'_{\text{пр}}=\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n}$; $\mathscr{F}_{\text{б}}=\mathscr{Y}_{t_n}^{t_{n+1}}$; $B\in\mathscr{V}_{t_{n+1}}$, тогда
$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_{n+1}})\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}]=\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}). \tag{5.81}$$
Подставляя (5.77) в правую часть равенства
$$\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n})=\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}\mathscr{Y}_{t_n}^{t_{n-1}})\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\ldots\mathscr{V}_{t_n}\mathscr{Z}_{t_n}]$$
и учитывая (5.81), доказываем (5.79).

Перейдем к другой вероятности $\mathbf{P}(dz_{t_n}\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n})$, входящей в (5.78). Поскольку $\mathscr{V}_{t_i}\subset\mathscr{Y}_a^{t_n}$, $i=1,\ldots,n$, то
$$\mathbf{P}(\Gamma_{t_n}\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n})=\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(\Gamma_{t_n}\,|\,\mathscr{Y}_a^{t_n})\,|\,\mathscr{V}_{t_1}\ldots\mathscr{V}_{t_n}].$$

---

* Приведем формальное доказательство равенства (5.80). Поскольку $\mathscr{Z}_a^b=\sigma(\mathscr{Z}_a^t,\mathscr{Z}_t^b)$, то любое множество $B\in\mathscr{Z}_a^b$ может быть представлено не более чем счетной суммой множеств вида $B_{\text{пр}}B_{\text{б}}$, $B_{\text{пр}}\in\mathscr{Z}_a^t$, $B_{\text{б}}\in\mathscr{Z}_t^b$. Достаточно доказать (5.80) для одного такого слагаемого. Вследствие марковского условия имеем
$$\mathbf{P}(B_{\text{пр}}B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})=\mathbf{P}(B_{\text{пр}}\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)\,\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}}).$$
Подставляя это выражение в левую часть (5.80), учтем, что
$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B_{\text{пр}}\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)\,\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})\,|\,\mathscr{F}'_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t]=$$
$$=\mathbf{P}(B_{\text{пр}}\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)\,\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})\,|\,\mathscr{F}'_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t]\ \ (\text{т. к. } \mathscr{F}_{\text{пр}}\subset\mathscr{F}'_{\text{пр}}),$$
но
$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})\,|\,\mathscr{F}'_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t]=\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t\mathscr{F}_{\text{б}})\,|\,\mathscr{Z}_t]\ (=\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t))$$
и
$$\mathbf{P}(B_{\text{пр}}\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)\,\mathbf{P}(B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{Z}_t)=\mathbf{P}(B_{\text{пр}}B_{\text{б}}\,|\,\mathscr{F}_{\text{пр}}\mathscr{Z}_t)$$
опять-таки в силу условия Маркова.

Но согласно (5.47)

$$\mathbf{P}(\Gamma_{t_n}|\mathcal{Y}_a^{t_n}) = \frac{V_{t_n}(\Gamma_{t_n})}{V_{t_n}(\Omega)}, \quad \Gamma_{t_n} \in \mathcal{Z}_{t_n},$$

причем V_{t_n} есть $\mathcal{V}_{t_n}$-измеримая функция. Поэтому

$$\mathbf{P}(\Gamma_{t_n}|\mathcal{V}_{t_1}\ldots\mathcal{V}_{t_n}) = \mathbf{M}\left[\frac{V_{t_n}(\Gamma_{t_n})}{V_{t_n}(\Omega)}\,|\mathcal{V}_{t_1}\ldots\mathcal{V}_{t_n}\right] = \frac{V_{t_n}(\Gamma_{t_n})}{V_{t_n}(\Omega)}. \quad (5.82)$$

Равенство (5.78) согласно (5.79), (5.82) принимает вид

$$\mathbf{P}(B|\mathcal{V}_{t_1}\ldots\mathcal{V}_{t_n}) = \int \mathbf{P}(B|\mathcal{V}_{t_n}\mathcal{Z}_{t_n})\frac{V_{t_n}(dz_{t_n})}{V_{t_n}(\Omega)}.$$

Это доказывает, что $\mathbf{P}(B|\mathcal{V}_{t_1}\ldots\mathcal{V}_{t_n})$ есть $\mathcal{V}_{t_n}$-измеримая функция и, следовательно, выполняется (5.75). Доказательство закончено.

Аналогичная теорема имеет место и для другого вторичного апостериорного процесса.

Теорема 5.9. *Процесс* $\{W_t\}$ *почти наверное является марковским.*

Доказательство аналогично предыдущему. Разница заключается в том, что теперь для доказательства включения $\mathcal{W}_{t_{n+1}} \subset \mathcal{W}_{t_n}\mathcal{Y}_{t_n}^{t_{n+1}}$ нельзя использовать (5.76), а следует обратиться к равенству

$$W_{t_{n+1}}(\Gamma) = \left[\int W_{t_n}(dz)\,V_{t_n}^{t_{n+1}}(z, \Omega)\right]^{-1} \int W_{t_n}(dz)\,V_{t_n}^{t_{n+1}}(z, \Gamma), \tag{5.83}$$

вытекающему из (5.52), (5.49) и условия нормировки $W_t(\Omega) = 1$. Кроме того, вместо (5.82) теперь достаточно воспользоваться более простым равенством $\mathbf{P}(\Gamma_{t_n}|\mathcal{W}_{t_1}\ldots\mathcal{W}_{t_n}) = W_{t_n}(\Gamma_{t_n})$. Прочие изменения не требуют пояснений.

Следствием из приведенных теорем является тот факт, что вероятности перехода вторичных процессов удовлетворяют уравнению Чепмена—Колмогорова. Эти вероятности мы будем называть вторичными апостериорными вероятностями перехода в отличие от (первичных) апостериорных мер V_s^t, $\widetilde{V}_s^t$, W_s^{tu}. Инфинитезимальные операторы, соответствующие вторичным апостериорным вероятностям, будем называть вторичными апостериорными операторами и обозначать $\mathcal{L}(t)$.

Доказательство последних теорем, как и ряд других результатов, изложенных в настоящей главе, основаны на предположении о существовании системы мер V_s^t, удовлетворяющей требованиям 1°—3°. По интуитивным соображениям не вызывает сомнений тот факт, что эта система мер, определенная в том или ином (может быть, обобщенном) смысле, существует во всех без исключения случаях условных марковских процессов. Для ее существования не являются совершенно необходимыми предположения типа «информационной непрерывности» или типа гипотезы 5.1. Правда, в более сложных случаях указанные меры могут иметь весьма «экзотический» вид, выходящий, возможно, за рамки существующей теории меры. Для их рассмотрения может потребоваться обобщение обычных понятий.

Обратимся для примера к формуле (5.7). Когда мера $\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^u)$ не является абсолютно непрерывной относительно $\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^s)$, нельзя пользоваться теоремой Радона—Никодима для определения функции (5.7). Однако если включить в рассмотрение обобщенные функции, то меры $\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^u)$, $\mathbf{P}(\Gamma_s \mid y_r^s)$ будут определять функцию (5.7) как обобщенную функцию в достаточной степени однозначно. В обобщенном смысле могут быть определены и другие объекты теории. Основные утверждения теории, касающиеся соотношения между ними и вопросов их измеримости, после соответствующего обобщения этих объектов останутся по-прежнему справедливыми. Конечно, строгое доказательство этих утверждений сильно усложнится.

Глава 6

СКАЧКООБРАЗНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ НАБЛЮДАЕМОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

В настоящей главе будет рассмотрен один из важных частных случаев условных марковских процессов. Будет предполагаться, что имеется конечное число m различных диффузионных процессов, между которыми априори возможны марковские переходы. Наблюдатель имеет в своем распоряжении реализацию диффузионного процесса, но не знает, к какому из диффузионных процессов она относится. Таким образом, исходный марковский процесс в данном случае есть комбинация процесса с m состояниями и диффузионного процесса, а апостериорный процесс есть процесс с m состояниями. Данная задача является естественным обобщением известных задач математической статистики, в которых априорные переходы между состояниями предполагаются невозможными (см. дополнение).

К числу рассматриваемых здесь задач относится задача оценки марковского процесса с несколькими состояниями, наблюдаемого в сумме с белым шумом. Она была решена автором в работах [1, 2]. Взятый в § 6.5 в качестве примера процесс с двумя состояниями многократно рассматривался автором [1, 2, 15, 19]. Уравнение этого процесса записывается в двух формах: как в форме Ито, так и в симметризованной форме. Уравнения для частного случая аддитивного белого шума, не упрощенные до конца, позже выводились также Кушнером [1, 2], причем различные формы записи уравнения и связанные с этим возможности его моделирования оставались невыясненными.

§ 6.1. МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС С m СОСТОЯНИЯМИ

1. Начнем с конкретизации ряда формул из главы 3 применительно к марковскому процессу с m состояниями. Фазовое пространство $E=E_m$ такого процесса состоит из m точек.

Без ограничения общности эти точки можно считать числами $1, \ldots, m$. Мера μ в таком пространстве полностью определяется значениями $\mu(1), \ldots, \mu(m)$, поэтому μ можно мыслить как точку в m-мерном пространстве, а пространство мер представлять себе как область этого пространства. В качестве марковской системы мер $\{\mu_{st}(x, \Lambda)\}$ можно рассматривать $\{\mu_{st}(\alpha, \beta)\}$, где $\mu_{st}(\alpha, \beta)$ при фиксированных $s, t \in T$; $\alpha, \beta \in E_m$ представляет собой $m \times m$-матрицу. Оператор T_{st} в $T_{st}g$ и в φT_{st} (§ 3.1) будем представлять себе в данном случае как операторы в m-мерном линейном пространстве. Всякое операторное равенство будем понимать как поэлементное равенство соответствующих $m \times m$-матриц.

Пусть задана марковская система мер $\{\mu_{st}(\alpha, \beta)\}$, такая, что существуют пределы (3.1), (3.11):

$$L(t) - L(s) = \lim_{\Delta \to 0} [\ln \mu_{t_1 t_2} + \ldots + \ln \mu_{t_{N-1}\, t_N}]; \tag{6.1}$$

$$[L^*(t) - L^*(s)]_{\alpha\beta} = \lim_{\Delta \to 0} [\mu_{t_1 t_2}(\alpha, \beta) - \delta_{\alpha\beta} + \ldots$$
$$\ldots + \mu_{t_{N-1}, t_N}(\alpha, \beta) - \delta_{\alpha\beta}] \tag{6.2}$$

($\|\delta_{\alpha\beta}\| = I$; $\{t_i\}$ — Δ-разбиение интервала $[s, t]$; $\ln \mu_{t_i t_{i+1}}$ — матричный логарифм).

Будем предполагать, что элементы указанных матриц представляют собой диффузионные процессы, именно, что оператор, определенный равенством (6.2), имеет вид

$$L^*(t) - L^*(s) = \int_s^t [A^*(y(\tau), \tau)\, d\tau + A_\sigma(y(\tau), \tau)\, d^* y_\sigma]. \tag{6.3}$$

Здесь A^*, A_σ — матрицы с элементами $\overset{*}{A}_{\alpha\beta}(y, \tau)$, $A_{\alpha\beta\sigma}(y, \tau)$ которые мы считаем ограниченными и непрерывными функциями от $y_1, \ldots, y_l, t$ (кроме того, выполняется условие их дифференцируемости). Далее, $\{y(t)\} = \{y_1(t), \ldots, y_l(t)\}$ — есть диффузионный процесс с параметрами сноса $a_\sigma(y, t)$ с матрицей локальных дисперсий $b_{\sigma\rho}(y, t)$. Эти параметры есть функции от y и t, обладающие такими же свойствами, что и $\overset{*}{A}_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta\sigma}$.

Первая формула (3.4) в данном случае принимает вид

$$\mu_{st}(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} + \int_s^t \mu_{s\tau}(\alpha, \gamma) [\overset{*}{A}_{\gamma\beta}(y(\tau), \tau)\, d\tau +$$
$$+ A_{\gamma\beta\sigma}(y(\tau), \tau)\, d^* y_\sigma(\tau), \tag{6.4}$$

аналогичный (2.34). Это уравнение есть стохастическое уравнение (см. гл. 2) и определяет систему мер $\mu_{st}(\alpha, \beta)$ как функцию от $y(t, \omega)$ (и следовательно от ω), т. е. как диффузионный случайный процесс.

Если воспользоваться симметризованным стохастическим интегралом, определенным в § 2.1., то в соответствии с (2.33), (2.35) будем иметь

$$\mu_{st}(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} + \int_s^t \mu_{s\tau}(\alpha, \gamma)\,[A_{\gamma\beta}(y(\tau), \tau)\,d\tau +$$

$$+ A_{\gamma\beta\sigma}(y(\tau), \tau)\,dy_\sigma(\tau)], \tag{6.5}$$

$$A_{\alpha\beta} = \overset{*}{A}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left[A_{\alpha\gamma\sigma}A_{\gamma\beta\rho} + \frac{\partial A_{\alpha\beta\sigma}}{\partial y_\rho}\right] b_{\sigma\rho}. \tag{6.6}$$

Пусть уравнения (6.4) или (6.5) определяют систему мер μ_{st}. Можно доказать, что она удовлетворяет равенствам (6.1), (6.2) и, обратно, (6.4) вытекает из (6.2) и уравнения Чепмена—Колмогорова. Поэтому мера (6.4) определяется оператором (6.3) с той степенью однозначности, с какой определяется решение стохастического уравнения (исходная мера принадлежит тому же классу однозначности).

Для доказательства удобно ввести норму $m\times m$-матриц, например

$$\|B\| = m \max\{|B_{\alpha\beta}|,\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m\}.$$

Тогда пространство матриц будет банаховым пространством, причем будет выполняться неравенство

$$\|BC\| \leqslant \|B\|\ \|C\|.$$

Конкретизируя формулы (3.57), (3.56), имеем

$$\mu_{st}(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} + \int_s^t [A_{\alpha\beta}d\tau + A_{\alpha\beta\sigma}dy_\sigma] +$$

$$+ \frac{1}{2} A_{\alpha\gamma\rho}(y(s), s)\,A_{\gamma\beta\sigma}(y(s), s)\,[y_\rho(t) -$$

$$- y_\rho(s)]\,[y_\sigma(t) - y_\sigma(s)] + O((t-s)^{3/2}). \tag{6.7}$$

Здесь оценка $O((t-s)^{3/2})$ понимается в смысле нормы.

Пользуясь равенством (6.7) и выводимым из него равенством

$$(\ln \mu_{st})_{\alpha\beta} = \int_s^t [A_{\alpha\beta}(y(\tau), \tau)\,d\tau +$$

$$+ A_{\alpha\beta\sigma}(y(\tau), \tau)\,dy_\sigma(\tau)] + O((t-s)^{3/2}),$$

нетрудно доказать сходимость (6.1), (6.2), если принять во внимание лемму 2.2. Не останавливаясь на этом подробнее, перейдем к рассмотрению случайного процесса $\{x(t)\}$ в E_m, описываемого указанной системой мер.

2. Как отмечалось в § 4.2, система мер $\{\mu_{st}(\alpha, \beta)\}$ задает меру в функциональном пространстве. Элементами его в данном случае являются скачкообразно меняющиеся функции $x(\cdot)$ со значениями из E_m. Будем рассматривать сепарабельный вариант процесса. Пусть S — множество определения сепарабельности (всюду плотное в T), а S_Δ есть Δ-разбиение интервала $[s, u] \subset T$, монотонно сходящееся к $[s, u] \cap S$. Как указывалось в § 4.2, при рассмотрении функциональных производных Радона—Никодима, достаточно рассматривать σ-алгебры

$$\mathscr{N}_s^u = \lim_{\Delta \to 0} \mathscr{N}_{S_\Delta} \text{ и } \overline{\mathscr{N}_s^u}. \tag{6.8}$$

Будем предполагать, что мера сосредоточена на множестве X функций, имеющих конечное число скачков на каждом конечном интервале (остальные функции образуют подмножество множества нулевой меры). Тогда каждая интересующая нас функция из X задается указанием точек $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ (из $T=[a, b]$), в которых происходят скачки, а также значениями функции до (β_j) и после (β_{j+1}) скачка. Функция $x(\cdot) \in X$ может быть заменена на параметры n, β_1, τ_1, $\beta_2, \ldots, \ldots, \beta_n$, τ_n, β_{n+1}, а условия $\tau_1' \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_1''$, $\ldots$, $\tau_n' \leqslant \tau_n \leqslant \tau_n''$ выделяют подмножество

$$\Lambda = \{x(\cdot): \beta_1, \tau_1' \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_1'', \ldots, \beta_n, \tau_n' \leqslant \tau_n \leqslant \tau_n'', \beta_{n+1}\}$$

из X.

Возьмем интервал $[s, u]$ и найдем меру множества Λ_α функций, тождественно равных α на этом интервале:

$$\Lambda_\alpha = \{x(\cdot): x(t) = \alpha,\ t \in [s, u] \cap S\}.$$

Это множество принадлежит $\mathscr{N}_s^u$ и в силу сходимости (6.8) его меру можно записать:

$$\mu(\Lambda_\alpha \mid x(s) = \alpha) = \lim_{\Delta \to 0} \mu\{x(t_1) = \alpha, \ldots, x(t_N) = \alpha \mid x(s) = \alpha\} =$$
$$= \lim_{\Delta \to 0} \mu_{st_1}(\alpha, \alpha)\, \mu_{t_1 t_2}(\alpha, \alpha) \ldots \mu_{t_N u}(\alpha, \alpha). \tag{6.9}$$

Чтобы явно вычислить эту меру, подставим (6.7) в (6.9). Учитывая, что

$$\ln[\mu_{t_i t_{i+1}}(\alpha, \alpha)] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A_{\alpha\alpha} d\tau + A_{\alpha\alpha\sigma} dy_\sigma] + \frac{1}{2} A_{\alpha\gamma\rho}(i)\, A_{\gamma\alpha\sigma}(i)\, \Delta y_\rho \Delta y_\sigma -$$
$$- \frac{1}{2}[A_{\alpha\alpha\sigma}(i)\, \Delta y_\sigma]^2 + O(\Delta^{3/2}),$$

$$(A_{\alpha\gamma\rho}(i) = A_{\alpha\gamma\rho}(y(t_i), t_i);\ \Delta y_\sigma = y_\sigma(t_{i+1}) - y_\sigma(t_i)),$$

в силу леммы 2.2, получаем

$$\mu(\Lambda_\alpha | x(s) = \alpha) = \varphi_s^u(\alpha),$$

где

$$\ln \varphi_s^u(\alpha) = \int_s^u [A_{\alpha\alpha} d\tau + A_{\alpha\alpha\sigma} dy_\sigma] +$$

$$\frac{1}{2}\int_s^u [A_{\alpha\gamma\rho} A_{\gamma\alpha\sigma} - A_{\alpha\alpha\rho} A_{\alpha\alpha\sigma}] b_{\rho\sigma} d\tau =$$

$$= \int_s^u [A^*_{\alpha\alpha} d\tau + A_{\alpha\alpha\sigma} d^* y_\sigma] - \frac{1}{2}\int_s^u A_{\alpha\alpha\rho} A_{\alpha\alpha\sigma} b_{\rho\sigma} d\tau. \tag{6.10}$$

(использованы формулы (2.8) и (6.6)). Отметим, что $\varphi_s^t(\alpha)$ удовлетворяет простому стохастическому уравнению

$$d_t \varphi_s^t(\alpha) = \varphi_s^t(\alpha) [A^*_{\alpha\alpha} dt + A_{\alpha\alpha\sigma} d^* y_\sigma] \equiv \varphi_s^t(\alpha) d^* L^*(t)_{\alpha\alpha}, \tag{6.11}$$

которое эквивалентно (6.10) согласно следствию 2.1.

Рассмотрим теперь функции ($\in \Lambda_{\alpha\beta}$), которые имеют единственный скачок в точке τ интервала $[\tau_1', \tau_1''] \subset [s, u]$, равны α на интервале $[s, \tau)$ и равны β на $(\tau, u]$. По аналогии с (6.9) меру этих функций можно записать

$$\mu(\Lambda_{\alpha\beta} | x(s) = \alpha) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{\tau_1' \leqslant t_k < \tau_1''} \mu\{x(t_1) = \alpha, \ldots$$

$$\ldots, x(t_k) = \alpha,\ x(t_{k+1}) = \beta, \ldots, x(t_N) = \beta \,|\, x(s) = \alpha\}.$$

Вследствие условия Маркова

$$\mu(\Lambda_{\alpha\beta} | x(s) = \alpha) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{\tau_1' \leqslant t_k < \tau_1''} \mu_{st_1}(\alpha, \alpha) \ldots$$

$$\ldots \mu_{t_k, t_{k+1}}(\alpha, \beta) \ldots \mu_{t_{N-1}, t_N}(\beta, \beta).$$

Как и раньше, подставим сюда (6.7) и перейдем к пределу $\Delta\to 0$. Снова используя лемму 2.2, получаем формулу, которая записывается особенно коротко, если по формуле (6.6) перейти к оператору (6.3). Этот результат имеет вид

$$\mu(\Lambda_{\alpha\beta} | x(s) = \alpha) = \int_{\tau_1'}^{\tau_1''} \varphi_s^\tau(\alpha)\, d^* L^*(\tau)_{\alpha\beta}\, \varphi_\tau^u(\beta).$$

3. Аналогичное рассмотрение можно провести и для большего числа скачков. В итоге получим следующий результат:

Теорема 6.1. *Пусть* $\Lambda = \Lambda(\nu, \alpha, \tau_1', \tau_1'', \beta_1, \ldots, \beta_{\nu-1}, \tau_\nu', \tau_\nu'', \beta_\nu)$ *есть множество функций:*

$$x(t) = \begin{cases} \alpha & \text{при } s < t < \tau_1; \\ \beta_1 & \text{при } \tau_1 < t < \tau_2; \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \beta_\nu & \text{при } \tau_\nu < t < u, \end{cases}$$

причем

$$\tau_1 \in [\tau_1', \tau_1''], \ldots, \tau_\nu \in [\tau_\nu', \tau_\nu''] \ (s \leqslant \tau_1' < \tau_1'' < \ldots < \tau_\nu' < \tau_\nu'' \leqslant u).$$

Мера этого множества определяется формулой

$$\mu(\Lambda | x(s) = \alpha) = \int_{\tau_1'}^{\tau_1''} \ldots \int_{\tau_\nu'}^{\tau_\nu''} \varphi_s^{\tau_1}(\alpha)\, d^*L^*(\tau_1)_{\alpha\beta_1} \varphi_{\tau_1}^{\tau_2}(\beta_1)\, d^*L^*(\tau_2)_{\beta_1\beta_2} \varphi_{\tau_2}^{\tau_3}(\beta_2) \ldots$$

$$\ldots d^*L^*(\tau_\nu)_{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} \varphi_{\tau_\nu}^{u}(\beta_\nu), \tag{6.12}$$

где $\varphi_\tau^\sigma(\beta)$ *определяется из* (6.10) *или* (6.11).

Следствием этой теоремы является

Теорема 6.2. *Пусть имеются две меры* μ *и* ν, *причем их инфинитезимальные операторы связаны соотношением*

$$dL^*(t)_{\alpha\beta} - dL^*(t)_{\alpha\beta}^{\nu} = [g_\alpha^*(y(t), t)\, dt + g_{\alpha\sigma}(y(t), t)\, d^*y_\sigma(t)]\, \delta_{\alpha\beta}. \tag{6.13}$$

$$(t \in [s, u]).$$

Тогда эти меры в пространстве $(X, \mathscr{N}_s^u)$ *абсолютно непрерывны и производная Радона—Никодима равна*

$$\frac{\mu(dx(\cdot) | x(s) = \alpha)}{\nu(dx(\cdot) | x(s) = \alpha)} = \chi_s^u(x(\cdot)) = \exp\left\{\int_s^u [g_{x(t)}^*(y(t), t)\, dt + \right.$$

$$\left. + g_{x(t)\sigma} d^*y_\sigma] - \frac{1}{2}\int_s^u g_{x(t)\sigma} g_{x(t)\rho} b_{\sigma\rho}\, dt\right\}, \tag{6.14}$$

т. е. $\chi_s^u(x(\cdot))$ *есть решение уравнения*

$$d_t\chi_s^t = \chi_s^t [g_{x(t)}^*(y(t), t)\, dt + g_{x(t)\sigma}(y(t), t)\, d^*y_\sigma(t)] \equiv$$

$$\equiv \chi_s^t (dL^* - dL^{*\nu})_{x(t), x(t)}.$$

Для доказательства теоремы сначала следует доказать аналогичное утверждение для пространства $(X_n, \mathscr{N}_s^u \cap X_n)$, где $X_n \subset X$ — множество функций, имеющих на интервале $[s, u]$ в точности n скачков. Рассматривая интеграл

$$\int\limits_{\Lambda} \chi_s^u \nu(dx(\cdot) \mid x(s) = \alpha), \quad \Lambda \in \mathcal{N}_s^t \cap X_n, \tag{6.15}$$

где $\nu(\Lambda)$ определяется по формуле (6.12), а также используя непрерывность функции χ_s^u и свойства стохастических интегралов, типа свойств, формулируемых в лемме 2.3, получим такое же выражение (6.12), но уже для другого оператора dL^*. Следовательно, интеграл (6.15) равен $\mu(\Lambda \mid x(s) = \alpha)$, что доказывает утверждение для $(X_n, \mathcal{N}_s^u \cap X_n)$. Чтобы завершить доказательство, остается составить соединение этих подпространств, совпадающее с $(X, \mathcal{N}_s^u)$.

В дальнейшем нам понадобится обратная теорема:

Теорема 6.3. *Пусть имеются две марковские меры, абсолютно непрерывные на* $(X, \mathcal{N}_s^u)$, *причем производная имеет вид* (6.14). *Тогда на* $[s, u]$ *инфинитезимальные операторы этих мер связаны соотношением* (6.13).

Для доказательства следует рассмотреть инфинитезимальный оператор

$$dL^*(t)^{\bar{\mu}}_{\alpha\beta} = dL^*(t)^{\nu}_{\alpha\beta} + [\overset{*}{g}_\alpha dt + g_{\alpha\sigma} d^* y_\sigma]\, \delta_{\alpha\beta}$$

и соответствующую ему меру $\bar{\mu}$. Пользуясь прямой теоремой, имеем $\bar{\mu} = \mu$. Но инфинитезимальный оператор однозначно определяется системой мер (см. формулу (6.2)), следовательно $dL^{*\bar{\mu}} = dL^*$.

§ 6.2. НЕСКОЛЬКО ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И МАРКОВСКИЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ НИМИ

1. Пусть имеется m диффузионных процессов $\{y(t)\}$ в l-мерном пространстве R_l, и каждый из них описывается инфинитезимальным оператором

$$dL_\alpha(t) = d\overset{*}{L}_\alpha(t) = \Big[c(\alpha, y, t) + a_\rho(\alpha, y, t)\frac{\partial}{\partial y_\rho} + \\ + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma}(\alpha, y, t)\frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial y_\sigma}\Big]\, dt, \ \alpha = 1, \dots, m. \tag{6.16}$$

Здесь $c(\alpha, y, t)$, $a_\rho(\alpha, y, t)$, ... — функции от y и t, обладающие свойствами, отмеченными в начале предыдущего параграфа. Они зависят, кроме того, еще от номера $\alpha \in E_m = \{1, \dots, m\}$. Каждому номеру соответствует мера $\mathbf{P}_\alpha$ в функциональном пространстве $(Y, \mathcal{Y})$. Элементами последнего являются функции $y(t)$ со значениями из R_l. Подобные функциональные пространства, σ-алгебры в нем и меры рассматривались в § 4.2, § 4.3. Мы будем пользоваться здесь этими результатами.

Предположим, что наблюдается процесс $\{y(t)\}$ на интервале $[s, u]$. Этому наблюдению соответствует σ-алгебра $\mathcal{Y}_s^u$ (совпадающая с $\mathcal{N}_s^u$ или $\mathcal{M}_s^u$ в обозначениях § 4.2). Наблюдатель интересуется вопросом, какой процесс из m возможных осуществлялся в действительности. В общем случае он не может ответить на этот вопрос точно, а может лишь указать *допустимое множество* $H \subset E_m$, к которому заведомо принадлежит наблюденный процесс. Это множество есть множество тех процессов, меры которых на $\mathcal{Y}_s^u$ взаимно абсолютно непрерывны с мерой истинного процесса. Это множество непусто с вероятностью 1, так как истинный процесс заведомо принадлежит ему. Если допустимое множество содержит лишь один элемент, то статистическая задача решается полностью: наблюдатель безошибочно (с вероятностью 1) указывает номер истинного процесса. При бо́льшем числе элементов допустимого множества возникает задача, типичная для математической статистики.

Как видно из вышеизложенного, для данного вопроса фундаментальное значение имеет рассмотренный в главе 4 вопрос об абсолютной непрерывности мер диффузионного процесса. Как следует из леммы 2.2 и 4.4, можно считать, что, помимо процесса $\{y(t)\}$ на интервале $[s, u]$, наблюдаются также процессы

$$q_{\rho\sigma}(t) = b_{\rho\sigma}(\alpha, y(t), t); \;\; r_{\rho''}(t) = a_{\rho''}(\alpha, y(t), t) -$$
$$- b_{\rho''\sigma'}(\alpha, y(t), t)\, b^{-1}_{\sigma'\pi'}(\alpha, y(t), t)\, a_{\pi'}(\alpha, y(t), t) \qquad (6.17)$$
$$(\rho, \sigma = 1, \ldots l; \;\; \rho'' = l' + 1, \ldots l).$$

Допустимое множество есть поэтому множество процессов, которые имеют такие же функции (6.17), что и функции истинного процесса:

$$H = \{\alpha : b_{\rho\sigma}(\alpha, y(t), t) = q_{\rho\sigma}(t); \;\; a_{\rho''}(\alpha, y(t), t) -$$
$$- b_{\rho''\sigma'} b^{-1}_{\sigma'\pi'} a_{\pi'} = r_{\rho''}(t);$$
$$t \in [s, u]; \;\; \rho, \sigma = 1, \ldots, l; \;\; \rho'' = l' + 1, \ldots, l\}.$$

Таким образом, статистическая задача нетривиальна, если имеется по меньшей мере два процесса, для которых имеет место тождественное совпадение

$$b_{\rho\sigma}(\alpha, y(t), t) \equiv b_{\rho\sigma}(\alpha', y(t), t), \ldots \quad \text{при } t \in [s, u].$$

Теорема 4.1 дает выражение для производной Радона—Никодима мер допустимого множества.

2. Перейдем к рассмотрению скачкообразных изменений номера диффузионного процесса. Номер процесса теперь является функцией времени $x(t)$ со значениями из E_m. Пусть $x(\cdot)$ имеет конечное число скачков на интервале $[s, t]$. Наблюдаемый диффузионный процесс $\{ y(t) \}$ теперь соответствует инфинитезимальному оператору

$$dL_{x(\cdot)}(t) = \left[c(x(t), y, t) + a_\rho(x(t), y, t) \frac{\partial}{\partial y_\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma}(x(t), y, t) \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial y_\sigma} \right] dt,$$

вместо (6.16). Меру этого процесса в функциональном пространстве $(Y, \mathcal{Y})$ удобно обозначить $\mathbf{P}(\Lambda \mid x(\cdot)), \Lambda \in \mathcal{Y}$.

Вместо номера α, независимой переменной теперь является функция $x(\cdot)$. На этот случай непосредственно переносится все сказанное выше относительно решения статистической задачи. Допустимое множество H есть множество $H \subset X$ функций, которые могут конкурировать с функцией, осуществляющейся фактически. Именно

$$H = \{x(\cdot) : b_{\rho\sigma}(x(t), y(t), t) = q_{\rho\sigma}(t),\ a_{\rho''}(x(t), y(t), t) -$$

$$- b_{\rho''\sigma'} b^{-1}_{\sigma'\pi'} a_{\pi'} = r_{\rho''}(t);$$

$$t \in [s, u];\ \rho, \sigma = 1, \ldots, l;\ \rho'' = l' + 1, \ldots, l\}. \tag{6.18}$$

Применим теорему 4.1 к мере $\mathbf{P}(\Lambda \mid x(\cdot))$, соответствующей допустимому множеству. Вследствие (6.18) инфинитезимальный оператор (4.26) (где положим $\nu = \mathbf{Q}$) можно заменить на оператор

$$dL^{\mathbf{Q}}(t) = \left[r_{\rho''}(t) \frac{\partial}{\partial y_{\rho''}} + \frac{1}{2} q_{\rho\sigma}(t) \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial y_\sigma} \right] dt.$$

Меру, соответствующую этому оператору, обозначим $\mathbf{Q}(\Lambda), \Lambda \in \mathcal{Y}$. Теорема 4.1 дает следующее выражение для производной Радона — Никодима мер $\mathbf{P}(\Lambda \mid x(\cdot))$ и $\mathbf{Q}(\Lambda)$ на σ-алгебре $\mathcal{Y}_s^u$:

$$\frac{\mathbf{P}(dy(\cdot) \mid x(\cdot), y(s))}{\mathbf{Q}(dy(\cdot) \mid y(s))} = \chi_s^u(x(\cdot), y(\cdot)), \tag{6.19}$$

где

$$\chi_s^u = \exp\left\{ \int_s^u \left[c(x(t), y(t), t)\, dt + \right. \right.$$

$$+ a_{\rho'}(x(t), y(t), t)\, q^{-1}_{\rho'\sigma'}(t)\, d^* y_{\sigma'}(t) -$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} a_{\rho'}(x(t), y(t), t)\, q^{-1}_{\rho'\sigma'}(t)\, a_{\sigma'}(x(t), y(t), t)\, dt \right] \right\}. \tag{6.20}$$

Переходя к бейесовской статистической задаче, зададим меру $\mathbf{R}(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathscr{X}$ в функциональном пространстве $X \ni x(\cdot)$. Пусть эта мера является марковской и описывается (априорным) инфинитезимальным оператором: $d\overset{*}{L}_{pr}(t)_{\alpha\beta}$.

Комбинация мер $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}(\cdot | x(\cdot))$ определяет меру в комбинированном пространстве $(Z, \mathscr{Z}) = (X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y})$. В самом деле, можно положить

$$\mathbf{P}(\Gamma\Lambda) = \int_{\Gamma} \mathbf{P}(\Lambda | x(\cdot)) \mathbf{R}(dx(\cdot)), \quad \Gamma \in \mathscr{X}, \quad \Lambda \in \mathscr{Y}. \tag{6.21}$$

Легко понять, что мера в комбинированном пространстве будет марковской вследствие марковских свойств исходных мер $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}(\cdot | x(\cdot))$.

§ 6.3. АПОСТЕРИОРНЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Возьмем равенство

$$\mathbf{P}(\Lambda | x(\cdot), y(s)) = \int_{\Lambda} \chi_s^u \mathbf{Q}(dy(\cdot) | y(s)),$$

эквивалентное (6.19), и проинтегрируем его с мерой $\mathbf{R}(\cdot | x(s))$ по множеству $\Gamma \in \mathscr{X}$. Согласно (6.21) будем иметь

$$\mathbf{P}(\Gamma\Lambda | x(s), y(s)) = \int_{\Gamma} \left[\int_{\Lambda} \chi_s^u \mathbf{Q}(dy(\cdot) | y(s)) \right] \mathbf{R}(dx(\cdot) | x(s)).$$

Используя теорему Фубини, отсюда получаем

$$\mathbf{P}(\Gamma\Lambda | x(s), y(s)) = \int_{\Lambda} \left[\int_{\Gamma} \chi_s^u \mathbf{R}(dx(\cdot) | x(s)) \right] \mathbf{Q}(dy(\cdot) | y(s))$$

Следовательно, при фиксированном $\Gamma \in \mathscr{X}$ мера $\mathbf{P}(\Gamma\Lambda | x(s), y(s))$ является абсолютно непрерывной относительно $\mathbf{Q}(\Lambda | y(s))$ на $\mathscr{Y}_s^u \ni \Lambda$ и соответствующая производная равна

$$\frac{\mathbf{P}(\Gamma dy(\cdot) | x(s), y(s))}{\mathbf{Q}(dy(\cdot) | y(s))} = \int_{\Gamma} \chi_s^u \mathbf{R}(dx(\cdot) | x(s)). \tag{6.22}$$

Положим здесь $\Gamma = \Gamma_u \in \mathscr{X}_u$, $u > s$ и обозначим

$$V_s^u(x(s), y(s), \Gamma_u) \equiv V_s^u(x(s), \Gamma_u) = \frac{\mathbf{P}(\Gamma_u dy(\cdot) | x(s), y(s))}{\mathbf{Q}(dy(\cdot) | y(s))}. \tag{6.23}$$

Сопоставим сказанное с гипотезой 5.1. При таком сопоставлении, естественно, следует полагать

$$E = E_m \times R_l; \quad \mathscr{Z}_t = \mathscr{X}_t \times \mathscr{Y}_t;$$

$$\mathscr{X}_t \equiv \mathscr{X}_t \times \mathscr{Y}^\circ; \quad \mathscr{Y}_t = \mathscr{X}^\circ \times \mathscr{Y}_t,$$

где $\mathscr{X}^\circ$, $\mathscr{Y}^\circ$ — тривиальные σ-алгебры, состоящие из всего пространства X или Y и пустого множества. Гипотеза 5.1 оказывается выполненной, причем мера (6.23) представляет собой основную апостериорную меру (5.36).

Найдем инфинитезимальный оператор, соответствующий этой апостериорной мере.

В § 5.4 было доказано (теорема 5.8, свойство 3°, формула (5.27)), что система мер (6.23), а следовательно и мера (6.22), т. е. мера $V(\Gamma \mid x(s)) = \frac{\mathbf{P}(\Gamma\, dy(\cdot) \mid x(s),\ y(s))}{\mathbf{Q}(dy(\cdot) \mid y(s))}$, $\Gamma \in \mathcal{X}_s^u$, является марковской. Меры $V(\Gamma|x(s))$ и $\mathbf{R}(\Gamma|x(s))$, как видно из (6.22), являются абсолютно непрерывными на $\mathcal{X}_s^u$, причем соответствующая производная χ_s^u имеет вид, аналогичный (6.14). Поэтому к этим мерам можно применить теорему 6.3. Как видно из сравнения (6.14) и (6.20), имеем

$$g^*_{x(t)}(y, t)\,dt + g_{x(t)\sigma'}(y, t)\,d^*y_{\sigma'} = c(x(t), y, t)\,dt + \\ + a_{\rho'}(x(t), y, t)\,q^{-1}_{\rho'\sigma'}(t)\,d^*y_{\sigma'},$$

так что формула (6.13) принимает вид

$$dL^*(t)_{\alpha\beta} = dL^*(t)^R_{\alpha\beta} + [c(\alpha, y(t), t)\,dt + \\ + a_{\rho'}(\alpha, y(t), t)\,q^{-1}_{\rho'\sigma'}(t)\,d^*y_{\sigma'}(t)]\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{6.24}$$

Итак, мы получили следующий результат:

Теорема 6.4. *В рассматриваемом случае основная апостериорная мера* (6.22), (6.23) *сосредоточена на допустимом множестве* (6.18) *и имеет инфинитезимальные операторы* (6.24), *где* $dL^{*R} = dL^*_{pr}$ — *априорный инфинитезимальный оператор, соответствующий априорным переходам между состояниями.*

Обычно для таких априорных переходов $(dL^*_{pr})_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}(t)\,dt$, поэтому сравнение (6.24) с (6.3) дает

$$A^*_{\alpha\beta}(y, t) = p_{\alpha\beta}(t) + c(\alpha, y, t)\,\delta_{\alpha\beta};$$

$$A_{\alpha\beta\sigma'}(y, t) = a_{\rho'}(\alpha, y, t)\,q^{-1}_{\rho'\sigma'}(t)\,\delta_{\alpha\beta};\ \ A_{\alpha\beta\sigma''} = 0. \tag{6.25}$$

2. Найдем теперь для апостериорной системы мер V_s^t другой инфинитезимальный оператор $dL(t)$, определенный посредством (6.2). Применяя формулу связи (6.6) к (6.24), нетрудно получить

$$A_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \Big\{c(\alpha) - \frac{1}{2}\,a_{\rho'}(\alpha)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}a_{\sigma'}(\alpha) - \\ - \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[a_{\rho'}(\alpha)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}]}{\partial y_\pi(t)}\,b_{\sigma'\pi}\Big\}\,\delta_{\alpha\beta},$$

т. е.

$$dL(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}dt + \Big\{c(\alpha)\,dt + a_{\rho'}(\alpha)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}\Big[dy_{\sigma'} - \\ - \frac{1}{2}a_{\sigma'}(\alpha)\,dt\Big] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_\pi}[a_{\rho'}(\alpha)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}]\,b_{\sigma'\pi}dt\Big\}\delta_{\alpha\beta}, \quad (6.26)$$

где

$$a_{\rho'}(\alpha) = a_{\rho'}(\alpha, y(t), t); \;\; b_{\rho'\sigma'} = b_{\rho'\sigma'}(\alpha, y(t), t) = q_{\rho'\sigma'}(t).$$

Последнему члену можно также придать вид

$$\frac{\partial}{\partial y_\pi}[a_{\rho'}(\alpha)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}]\,b_{\sigma'\pi} = \frac{\partial a_{\rho'}(\alpha)}{\partial y_\pi}b^{-1}_{\rho'\sigma'}b_{\sigma'\pi} + a_{\rho'}(\alpha)\,\frac{\partial b^{-1}_{\rho'\sigma'}}{\partial y_\pi}b_{\sigma'\pi} = \\ = \frac{\partial a_{\rho'}(\alpha)}{\partial y_\pi}b^{-1}_{\rho'\sigma'}b_{\sigma'\pi} - a_{\rho'}(\alpha)\,b^{-1}_{\rho'\tau'}\,\frac{\partial b_{\tau'\pi'}}{\partial y_\pi}b^{-1}_{\pi'\sigma'}b_{\sigma'\pi}. \quad (6.27)$$

Докажем, что выражение

$$\frac{\partial b^{-1}_{\rho'\sigma'}}{\partial y_\pi}b_{\pi\sigma'} = -b^{-1}_{\rho'\tau'}\left(\frac{\partial b_{\tau'\pi'}}{\partial y_\pi}b_{\pi\sigma'}\right)b^{-1}_{\sigma'\pi'} \quad (6.28)$$

не зависит от α на допустимом множестве (6.18). Для этого рассмотрим приращение

$$\Delta q_{\rho\sigma}(t) = \Delta b_{\rho\sigma}(x(t), y(t), t) \quad (\Delta f \equiv f(t+\Delta) - f(t)).$$

Если в окрестности точки t функция $x(t)$ не испытывает скачка, то очевидно

$$\Delta q_{\rho\sigma}(t) = \frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial y_\pi}(x(t), y(t), t)\,\Delta y_\pi + O(\Delta).$$

Умножая обе части этого равенства на Δy_τ и пользуясь леммой 2.2, имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum \Delta q_{\rho\sigma}\Delta y_\tau = \int \frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial y_\pi}\,b_{\pi\tau}dt. \quad (6.29)$$

Но в левой части стоит величина, которая на допустимом множестве (6.18) не зависит от α. Следовательно, и выражение $\dfrac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial y_\pi}b_{\pi\tau}$ (ρ, σ, τ любые), стоящее в правой части, не зависит от α. Этим свойством поэтому обладает и (6.28). Словом, все функции, входящие в (6.26), (6.27), кроме $c(\alpha)$, $a_{\rho'}(\alpha), \dfrac{\partial a_{\rho'}(\alpha)}{\partial y_\pi}$ не зависят от α.

3. Выразим оператор (6.26) через параметры m_ρ, $\sigma_{\rho r'}$ ($\rho = 1, \ldots, l$; $r' = 1, \ldots, l'$), имеющие тензорно-инвариантный характер (теорема 2.5). Для этого используем формулы (2.26). Поскольку $b_{\rho\sigma}$ на допустимом множестве (6.18) не зависит от

α, то, очевидно, можно так подобрать $\sigma_{\rho r'}$, чтобы они также не зависели от α. Кроме того, взяв приращение

$$\Delta\sigma_{\rho r'} = \frac{\partial\sigma_{\rho r'}}{\partial y_\pi}\Delta y_\pi + O(\Delta)$$

и записав равенство, аналогичное (6.29), нетрудно убедиться, что $\frac{\partial\sigma_{\rho r'}}{\partial y_\pi} b_{\pi\tau'} = \frac{\partial\sigma_{\rho r'}}{\partial y_\pi}\sigma_{\pi s'}\sigma_{\tau' s'}$ не зависит от α. Применяя к этим величинам преобразование $\sigma^{-1}_{q'\tau'}$, получаем, что $\frac{\partial\sigma_{\rho r'}}{\partial y_\pi}\sigma_{\pi q'}$ и $\frac{\partial\sigma_{\rho r'}}{\partial y_\pi}\sigma_{\pi r'} = 2a_\rho - 2m_\rho$ не зависит от α. Отсюда имеем

$$a_{\rho'} b^{-1}_{\rho'\tau'} dy_{\tau'} = m_{\rho'}\sigma^{-1}_{\rho' r'}\sigma^{-1}_{\tau' r'} dy_{\tau'} + \ldots;$$

$$a_{\rho'} b^{-1}_{\rho'\tau'} a_{\tau'} = m_{\rho'}\sigma^{-1}_{\rho' r'}\sigma^{-1}_{\tau' r'} m_{\tau'} + m_{\rho'}\sigma^{-1}_{\rho' r'}\sigma^{-1}_{\tau' r'}\frac{\partial\sigma_{\tau' s'}}{\partial y_\pi}\sigma_{\pi s'} + \ldots;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\pi}[a_{\rho'} b^{-1}_{\rho'\tau'}]\, b_{\tau'\pi} = \frac{\partial}{\partial y_\pi}[m_{\rho'}\sigma^{-1}_{\rho' r'}\sigma^{-1}_{\tau' r'}]\,\sigma_{\tau' s'}\sigma_{\pi s'} + \ldots,$$

где точками обозначены члены, не зависящие от α. Если подставить эти равенства в (6.26) и учесть тождество

$$\frac{\partial}{\partial y_\pi}[m_{\rho'}\sigma^{-1}_{\rho' r'}\sigma^{-1}_{\tau' r'}\sigma_{\tau' s'}] = \frac{\partial}{\partial y_\pi}[m_{\rho'}\sigma^{-1}_{\rho' s'}],$$

то будем иметь

$$dL(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}dt + \Big\{c(\alpha)\,dt + m_{\rho'}(\alpha)\,\sigma^{-1}_{r'\rho'}\sigma^{-1}_{r'\tau'}\Big[dy_{\tau'} - \\ - \frac{1}{2}m_{\tau'}(\alpha)\,dt\Big] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_\pi}[m_{\rho'}(\alpha)\,\sigma^{-1}_{r'\rho'}]\,\sigma_{\pi r'}dt\Big\}\delta_{\alpha\beta}. \qquad (6.30)$$

Здесь нами опущены члены, не зависящие от α, что связано с преобразованием эквивалентности (5.30). Операторы (6.26), (6.30) совпадают с точностью до эквивалентности.

4. Помимо найденных инфинитезимальных операторов, можно получить выражения для операторов $d\widetilde{L}(t)$, $d\widetilde{\widetilde{L}}(t)$ систем мер (5.49) и (5.29). Формулы перехода к этим мерам от V_s^t являются частными случаями преобразования мер (3.31). Для вычисления соответствующих инфинитезимальных операторов можно применить теорему 3.3. Как указывалось в гл. 5, это приводит к формулам (5.65), (5.68).

Чтобы конкретизировать выражение (5.65) для данного случая, учтем вид оператора (6.26). Для сокращения записи введем обозначения

$$w_\alpha(t) = W_t[x(t) = \alpha]; \quad v_\alpha(t) = V_t[x(t) = \alpha];$$

$$\mathbf{M}_{ps}\psi = \sum \psi(\alpha)\,\mathbf{P}\,[x(t) = \alpha \mid y_a^t] = \sum_{\alpha=1}^{m} \psi(\alpha)\, w_\alpha(t).$$

Тогда (5.65) примет форму

$$d\widetilde{L}(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}dt + \Big\{[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}dy_{\sigma'} -$$

$$- \frac{dt}{2}[a_{\rho'}(\alpha)\,a_{\sigma'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}a_{\sigma'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} -$$

$$- \frac{dt}{2}\left[\frac{\partial a_{\rho'(\alpha)}}{\partial y_\pi} - \mathbf{M}_{ps}\frac{\partial a_{\rho'}}{\partial y_\pi}\right] b^{-1}_{\rho'\sigma'}b_{\sigma'\pi} -$$

$$- \frac{dt}{2}[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\,\frac{\partial b^{-1}_{\rho'\sigma'}}{\partial y_\pi}\, b_{\sigma'\pi}\Big\}\,\delta_{\alpha\beta}$$

(начиная с этого места, полагаем $c=0$; $\sum\limits_\beta p_{\alpha\beta}=0$). В соответствии с этим основное уравнение (5.66) для апостериорных вероятностей будет иметь вид

$$dw_\alpha = w_\gamma p_{\gamma\alpha}dt + w_\alpha[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}dy_{\sigma'} -$$

$$- \frac{1}{2}w_\alpha\Big\{[a_{\rho'}(\alpha)\,a_{\sigma'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}a_{\sigma'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} +$$

$$+ \left[\frac{\partial a_{\rho'}}{\partial y_\pi}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}\frac{\partial a_{\rho'}}{\partial y_\pi}\right] b^{-1}_{\rho'\sigma'}b_{\sigma'\pi} +$$

$$+ [a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\,\frac{\partial b^{-1}_{\rho'\sigma'}}{\partial y_\pi}\, b_{\sigma'\pi}\Big\}\,dt. \tag{6.31}$$

Это уравнение будет выглядеть несколько короче, если перейти к записи уравнения в смысле Ито. Чтобы это сделать, можно воспользоваться уравнением (5.61), которое задано инфинитезимальным оператором

$$d\widetilde{L}^*(t) = dL_1(t) - [W_t d^* L_1(t)](\Omega) \tag{6.32}$$

(см. (5.60.а) или (3.64)). Здесь согласно (5.60.б)

$$dL_1(t) = V_t(\Omega)\, d^*L^*(t)\,\frac{1}{V_t(\Omega)} \qquad \Big(V_t(\Omega) = \sum_\alpha v_\alpha(t)\Big).$$

Подставляя сюда (6.24), имеем

$$dL_1(t)_{\alpha\beta} = V_t(\Omega)\{p_{\alpha\beta}dt + [a_{\rho'}(\alpha)\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}d^* y_{\sigma'}]\,\delta_{\alpha\beta}\}\,\frac{1}{V_t(\Omega)}. \quad (6.33)$$

Это равенство позволяет вычислить окончательный вид оператора dL_1 в данном случае. Применяя формулу (2.15), совершаем преобразование

$$d^* y_{\sigma'}\,\frac{1}{V_t(\Omega)} = \frac{1}{V_t(\Omega)}\,d^* y_{\sigma'} - \frac{1}{[V_t(\Omega)]^2}\,b_{V\sigma'}dt. \quad (6.34)$$

Здесь

$$b_{V\sigma'} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\,\mathbf{M}\Delta V_t(\Omega)\,\Delta y_{\sigma'} = \sum_{\alpha} b_{\alpha\sigma'};$$

$$b_{\alpha\sigma'} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\,\mathbf{M}\,\Delta v_\alpha \Delta y_{\sigma'}$$

— параметры, которые легко вычислить при помощи уравнения $dV_t = V_t d^* L^*$ (5.56), т. е. уравнения

$$dv_\alpha = v_\gamma p_{\gamma\alpha}dt + v_\alpha a_{\rho'}(\alpha)\, b^{-1}_{\rho'\tau'}d^* y_{\tau'}. \quad (6.35)$$

Они оказываются равными

$$b_{\alpha\sigma'} = v_\alpha a_{\sigma'}(\alpha);\ b_{V\sigma'} = \sum_{\alpha} v_\alpha a_{\sigma'}(\alpha) = V_t(\Omega)\,\mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'}. \quad (6.36)$$

Подставляя (6.34), (6.36) в (6.33), получаем

$$dL_1(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}dt + a_{\rho'}(\alpha)\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}(d^* y_{\sigma'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'}dt)\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Далее, подстановка этого результата в (6.32) дает

$$d\widetilde{L}^*(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}dt + [a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}(d^* y_{\sigma'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'}dt)\,\delta_{\alpha\beta}. \quad (6.37)$$

Уравнение (5.61), следовательно, принимает вид

$$dw_\alpha = w_\gamma p_{\gamma\alpha} + w_\alpha [a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}(d^* y_{\sigma'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'}dt). \quad (6.38)$$

Оно эквивалентно уравнению (6.31).

Принимая во внимание найденную формулу (6.37), нетрудно проверить выполнение соотношения (5.74).

Продолжая приведенное рассмотрение, можно конкретизировать применительно к данному случаю также уравнение (5.62). Кроме того, можно найти другой инфинитезимальный оператор $d\widetilde{\widetilde{L}}$ и записать соответствующие ему уравнения. Не останавливаясь на этом, ограничимся тем, что приведем выражение для указанного оператора:

$$d\widetilde{\widetilde{L}}(t)_{\alpha\beta} = d^{*}\widetilde{\widetilde{L}}(t)_{\alpha\beta} = dt \begin{cases} p_{\alpha\beta}\dfrac{V_t^u(\beta, \Omega)}{V_t^u(\alpha, \Omega)} & \text{при } \alpha \neq \beta; \\ -\sum\limits_{\gamma\neq\alpha} p_{\alpha\gamma}\dfrac{V_t^u(\gamma, \Omega)}{V_t^u(\alpha, \Omega)}, & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{6.39}$$

В нем оказались отсутствующими члены с $dy_{\sigma'}$. Причиной этого является то обстоятельство, что в данном частном случае в выражении (6.24) для dL^* члены с $d^*y_{\sigma'}$ стоят лишь на главной диагонали. В других примерах (скажем, в примере гл. 7) положение может оказаться иным.

§ 6.4. ВТОРИЧНЫЙ АПОСТЕРИОРНЫЙ ОПЕРАТОР

Любая мера V в пространстве E_m определяется значениями $v_\alpha = V(\alpha)$, $\alpha = 1, ..., m$. Поэтому процесс $\{V_t(\Gamma), \Gamma \subset E_m\}$, образованный апостериорной мерой V_t на E_m, сводится в данном случае к m-компонентному процессу $\{v_1(t), ..., v_m(t)\}$. То же самое можно сказать и о другом вторичном процессе $\{W_t\} = \{w_\alpha(t)\}$, его компоненты, кроме того, связаны соотношением $\sum\limits_\alpha w_\alpha = 1$. Уравнения (6.31), (6.38) есть стохастические уравнения (см. § 2.2), определяющие процесс $\{w_\alpha(t)\}$. Аналогичные уравнения, например (6.35), для $\{v_\alpha(t)\}$ получаются, если конкретизировать уравнение (5.58), (5.64).

Применяя теорему 2.3, где нужно положить $\{x_\alpha\} = \{w_\alpha, y_{\sigma'}\}$ $z_\lambda = 0$, к уравнению (6.31), или (еще короче) исходя из (6.38), получаем следующий результат:

Теорема 6.5. *В рассматриваемом случае процесс $\{w_\alpha(t)\}$ как диффузионный процесс характеризуется параметрами сноса и локальными дисперсиями:*

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}\{w_\alpha(t+\Delta) - w_\alpha(t) \mid w(t) = w,\ y(t) = y\} = w_\gamma p_{\gamma\alpha};$$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}\{[w_\alpha(t+\Delta) - w_\alpha(t)][w_\beta(t+\Delta) - w_\beta(t)] \mid w, y\} =$$

$$= w_\alpha[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}[a_{\sigma'}(\beta) - \mathbf{M}_{ps}a_{\sigma'}]\, w_\beta; \tag{6.40}$$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}\{[w_\alpha(t+\Delta) - w_\alpha(t)][y_{\rho'}(t+\Delta) - y_{\rho'}(t)] \mid w, y\} =$$
$$= w_\alpha[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}];$$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{M}\{[w_\alpha(t+\Delta) - w_\alpha(t)][y_{\rho''}(t+\Delta) - y_{\rho''}(t)] \mid w, y\} =$$

$$= w_\alpha[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} b_{\sigma'\rho''} = w_\alpha[a_{\rho''}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho''}].$$

В совпадении выражений $[a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}(\alpha)]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} b_{\sigma'\rho''}$ и $a_{\rho''}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}a_{\rho''}$ можно убедиться, учитывая, что разность $a_{\rho''} - a_{\rho'}\, b^{-1}_{\rho'\sigma'}\, b_{\sigma'\rho''} = r_{\rho''}$ на допустимом множестве (6.18) не зависит от α, так что $r_{\rho''} - \mathbf{M}_{ps} r_{\rho''} = 0$.

Определенный в § 5.6 вторичный апостериорный процесс $\{W_t(\Gamma),\ \Gamma \in \mathscr{Z}_t\}$ (см. определение 5,4), в рассматриваемом случае сводится к комбинированному процессу $\{w_\alpha,\ y_\rho\}$. В самом деле, апостериорная мера W_t в комбинированном фазовом пространстве $E = E_m \times R_l$ будет полностью определена, если задать меру W_t на E_m (т. е. на σ-алгебре $\mathscr{X}_t \times \mathscr{Y}^\circ$) и точку $y \in R_l$. В соответствии с теоремой 5.9 процесс $\{w_\alpha,\ y_\rho\}$ является марковским. Из уравнений (6.31), (6.38) и из теоремы 6.5 следует, кроме того, что он является диффузионным и описывается вторичным инфинитезимальным оператором

$$d\mathscr{L}(t) = \Big\{ w_\beta p_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial w_\alpha} + \mathbf{M}_{ps} a_\rho \frac{\partial}{\partial y_\rho} +$$

$$+ \frac{1}{2} w_\alpha [a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} [a_{\sigma'}(\beta) - \mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'}]\, w_\beta \frac{\partial^2}{\partial w_\alpha \partial w_\beta} +$$

$$+ w_\alpha [a_\rho(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_\rho] \frac{\partial^2}{\partial w_\alpha \partial y_\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{M}_{ps}\, b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial y_\sigma} \Big\} dt. \quad (6.41)$$

Апостериорный процесс $\{v_\alpha,\ y_\rho\}$ в свою очередь также является диффузионным и для него аналогичным образом легко может быть найден вторичный инфинитезимальный оператор, например, при помощи формулы (6.35).

§ 6.5. ПРИМЕР. ПРОЦЕСС С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Рассмотрим частный случай двух диффузионных процессов ($m=2$). Априорные марковские переходы между ними пусть описываются оператором $p_{\alpha\beta} dt$, где

$$\| p_{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} -\mu & \mu \\ \nu & -\nu \end{Vmatrix}$$

($\mu = \mu(t)$, $\nu = \nu(t)$ — непрерывные функции времени).

Будем для простоты предполагать, что оба диффузионных процесса имеют одинаковую невырожденную матрицу локальных дисперсий следующего простого вида

$$b_{\rho\sigma} = N\delta_{\rho\sigma},$$

причем N постоянная (тогда $l' = l$ и индексы с одним штрихом можно отождествить с нештрихованными индексами).

Согласно формулам (6.26), (6.37) апостериорные инфинитезимальные операторы в данном случае имеют вид

$$dL(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}\,dt + \frac{1}{N}\left\{a_\rho(\alpha)\left[dy_\rho - \frac{1}{2}a_\rho(\alpha)\,dt\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial a_\rho(\alpha)}{\partial y_\rho}\,dt\right\}\delta_{\alpha\beta}; \qquad (6.42)$$
$$d\widetilde{L}^*(t)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}\,dt + \frac{1}{N}\left[a_\rho(\alpha) - \mathbf{M}_{ps}\,a_\rho\right]\left[d^*y_\rho - \mathbf{M}_{ps}\,a_\rho\,dt\right]\delta_{\alpha\beta}.$$

Поскольку

$$f(1) - \mathbf{M}_{ps} f = w_2\,[f(1) - f(2)],$$

основное уравнение (5.61), (5.66) можно записать в любой из двух форм

$$dw_1 = -dw_2 = (-\mu w_1 + \nu w_2)\,dt + \frac{w_1 w_2}{N}\,[a_\rho(1) - a_\rho(2)] \times$$
$$\times\left[dy_\rho - \frac{a_\rho(1) + a_\rho(2)}{2}\,dt\right] - \frac{w_1 w_2}{2N}\left[\frac{\partial a_\rho(1)}{\partial y_\rho} - \frac{\partial a_\rho(2)}{\partial y_\rho}\right]dt; \qquad (6.43)$$
$$dw_1 = (-\mu w_1 + \nu w_2)\,dt + \frac{w_1 w_2}{N}\,[a_\rho(1) - a_\rho(2)] \times$$
$$\times\,[d^*y_\rho - w_1 a_\rho(1) - w_2 a_\rho(2)],$$

вытекающих из (6.31), (6.38).

Далее, уравнение (5.67) для $\widetilde{V}_t^u(\alpha, \Omega)$ $(\equiv \widetilde{V}(\alpha))$ как функции от t и α принимает вид

$$-d\widetilde{V}(1) = -\mu\,[\widetilde{V}(1) - \widetilde{V}(2)]\,dt +$$
$$+ \frac{1}{N}\widetilde{V}(1)\,w_2\left\{[a_\rho(1) - a_\rho(2)]\left[dy_\rho - \frac{a_\rho(1) + a_\rho(2)}{2}\,dt\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{dt}{2}\left[\frac{\partial a_\rho(1)}{\partial y_\rho} - \frac{\partial a_\rho(2)}{\partial y_\rho}\right]\right\}; \qquad (6.44)$$
$$-d\widetilde{V}(2) = \nu\,[\widetilde{V}(1) - \widetilde{V}(2)]\,dt -$$
$$- \frac{1}{N}\widetilde{V}(2)\,w_1\left\{[a_\rho(1) - a_\rho(2)]\left[dy_\rho - \frac{a_\rho(1) + a_\rho(2)}{2}\,dt\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{dt}{2}\left[\frac{\partial a_\rho(1)}{\partial y_\rho} - \frac{\partial a_\rho(2)}{\partial y_\rho}\right]\right\}.$$

Приведем также инфинитезимальный оператор $d\widetilde{\widetilde{L}}(t)$, соответствующий данному случаю. Подставляя (6.42) в (5.68), находим

$$\| d\tilde{\tilde{L}} \| = \begin{Vmatrix} -\mu \dfrac{V(2,\Omega)}{V(1,\Omega)} & \mu \dfrac{V(2,\Omega)}{V(1,\Omega)} \\ \nu \dfrac{V(1,\Omega)}{V(2,\Omega)} & -\nu \dfrac{V(1,\Omega)}{V(2,\Omega)} \end{Vmatrix} dt$$

в соответствии с (6.39). Здесь согласно (5.58) функция $V(\alpha, \Omega) \equiv V_t^u(\alpha, \Omega)$ как функция от t удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} -dV(1,\Omega) = -\mu\,[V(1,\Omega) - V(2,\Omega)]\,dt + \\ + \frac{1}{N} V(1,\Omega) \left\{ a_\rho(1) \left[dy_\rho - \frac{1}{2} a_\rho(1)\,dt \right] - \frac{dt}{2} \frac{\partial a_\rho(1)}{\partial y_\rho} \right\}; \\ -dV(2,\Omega) = \nu\,[V(1,\Omega) - V(2,\Omega)]\,dt + \\ + \frac{1}{N} V(2,\Omega) \left\{ a_\rho(2) \left[dy_\rho - \frac{1}{2} a_\rho(2)\,dt \right] - \frac{dt}{2} \frac{\partial a_\rho(2)}{\partial y_\rho} \right\}. \end{gathered} \tag{6.45}$$

В заключение остановимся на вторичном процессе и его инфинитезимальном операторе. Вследствие соотношения $w_1 + w_2 = 1$ в случае $m = 2$ можно ограничиться рассмотрением лишь одной вероятности, скажем w_1. Процесс $\{w_1, y_\rho\}$ представляет собой диффузионный марковский процесс, и согласно (6.41) его оператор имеет вид

$$\begin{gathered} d\mathscr{L}(t) = \left\{ (-\mu w_1 + \nu w_2) \frac{\partial}{\partial w_1} + \mathbf{M}_{ps} a_\rho \frac{\partial}{\partial y_\rho} + \right. \\ + \frac{1}{2N} w_1^2 w_2^2 \sum_\rho [a_\rho(1) - a_\rho(2)]^2 \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} + \\ \left. + w_1 w_2 [a_\rho(1) - a_\rho(2)] \frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial y_\rho} + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial y_\rho\,\partial y_\sigma} \right\} dt. \end{gathered} \tag{6.46}$$

Результаты настоящей главы допускают обобщение и на тот случай, когда число различных диффузионных процессов не является конечным, т. е. когда марковски меняющийся параметр α диффузионного процесса принимает значения из более сложного множества E^x, нежели E_m. Простое обобщение равенства (6.24) имеет вид

$$dL^*(t) = d\overset{*}{L}_{pr}(t) + df(\alpha, t), \tag{6.47}$$

где $dL^*(t)$ — оператор апостериорного процесса в E^x, $d\overset{*}{L}_{pr}$ — оператор априорного процесса, а $df(\alpha, t)$ — оператор, соответствующий умножению на функцию

$$df(\alpha, t) = c(\alpha, y(t), t)\,dt + a_{\rho'}(a, y(t), t)\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}(t)\,d^* y_{\sigma'}(t), \qquad (6.48)$$

$$\alpha \in E^x.$$

Для справедливости указанного результата существенно лишь, чтобы априорный процесс в E^x был марковским и чтобы мера процесса в комбинированном фазовом пространстве $E = E^x \times R_l$ определялась формулой (6.21). Ограничившись данным замечанием, мы не будем здесь подробнее рассматривать описанное обобщение.

Глава 7

НЕПОЛНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

§ 7.1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в этой главе другой частный случай условных марковских процессов. Отличительной особенностью этого случая является то, что он является не комбинированным. Если в предыдущей главе исходным процессом был комбинированный процесс в произведении пространств, то здесь исходным будет единый процесс в $(m+l)$-мерном пространстве R_{m+l}. Наблюдаемыми будут l координат этого пространства. Мы остановимся здесь на случае диффузионного процесса в R_{m+l}, потому что этот случай важен с практической точки зрения. Он представляет также бесспорный теоретический интерес, поскольку диффузионные процессы являются важнейшими среди марковских процессов и тесно связаны с аппаратом дифференциальных уравнений. Естественно ожидать, что апостериорные инфинитезимальные операторы, как и априорные, будут иметь вид дифференциальных операторов. В главах первой части нами уже подготовлен материал, который можно применить для быстрого получения основных результатов.

В предыдущей главе частью комбинированного марковского процесса также был диффузионный процесс, поэтому рассматриваемый здесь случай по математическому аппарату не очень далек от предыдущего. Если параметр α из гл. 6 априори меняется диффузионным образом, т. е. $\{\alpha(t)\}$ есть диффузионный процесс, то тогда результаты, полученные на основе теории главы 6, будут являться частным случаем результатов настоящей главы. Другим частным случаем общей теории данной главы является простой случай, рассматривавшийся Вентцелем [1]. В этом случае наблюдаемые компоненты совокупного процесса образуют марковский процесс сами по себе, что, правда, редко бывает в практических задачах.

1. Пусть z_j, $j=1, \ldots, m+l$ — координаты точки в $(m+l)$-мерном пространстве R_{m+l}, $m+l=n$. Исходный диффузионный процесс в нем, соответствующий мере $\mathbf{P}$, описывается параметрами $c(z,t)$, $a_j(z,t)$, $b_{jk}(z,t)$, т. е. имеет инфинитезимальный оператор

$$dL_{pr}(t) = \left(c + a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2} b_{jk} \frac{\partial}{\partial z_j \partial z_k}\right) dt. \qquad (7.1)$$

Функции c, a_j, b_{jk}, как обычно, мы предполагаем непрерывными по всем аргументам и непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам, кроме времени.

Пусть наблюдается часть компонент исходного процесса, скажем $z_{m+1}(t), \ldots, z_{m+l}(t)$. Для наглядности, как и в § 4.4, наблюдаемые компоненты обозначаем другой буквой: $y_\rho(t) = z_\rho(t)$, $\rho = m+1, \ldots, m+l$, в то же время остальные ненаблюдаемые компоненты обозначаем: $x_\alpha(t) = z_\alpha(t)$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Выбор индекса указывает область его изменения: $j, k, \ldots$ пробегают значения $1, \ldots, m+l$; $\alpha, \beta, \ldots$ — значения $1, \ldots, m$, а $\rho, \sigma, \ldots$ — значения $m+1, \ldots, m+l$; $\rho', \sigma', \ldots$ — значения $m+1, \ldots$ $\ldots, m+l'$, и, наконец, $\rho'', \sigma'', \ldots$ — значения $m+l'+1, \ldots, m+l$.

Процесс $\{x_\alpha(t), y_\rho(t)\}$, или, что в сущности то же самое, процесс $\{x_\alpha(t)\}$ с условными мерами $\mathbf{P}(\cdot \mid y_s^u)$ является в данном случае условным марковским процессом, подлежащим изучению. Применение теоремы 4.1 приводит к следующему утверждению.

Теорема 7.1. *Если* $b_{\rho\sigma}$ и $a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b^{-1}_{\tau'\pi'} a_{\pi'}$ *не зависят от* x *, то для рассматриваемого процесса выполняется гипотеза* 5.1, *причем мера* $\mathbf{Q}$ *задается инфинитезимальным оператором*

$$dL^{\mathbf{Q}}(t) = \left[(a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b^{-1}_{\tau'\pi''} a_{\pi''}) \frac{\partial}{\partial y_{\rho''}} + \frac{1}{2} b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial y_\sigma}\right] dt. \quad (7.2)$$

В самом деле, вследствие теоремы 4.1, производная Радона—Никодима (5.36) может быть получена усреднением (4.33) производной (4.27):

$$\frac{\mathbf{P}(dy_s^t \Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)} = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid z_s)} =$$

$$= \mathbf{M}_{\mathbf{Q}}\left[\exp\left\{\int_s^t \left[c\,d\tau + a_{j'} b^{-1}_{j'k'} d^* z_{k'} - \frac{1}{2} a_{j'} b^{-1}_{j'k'} a_{k'}\, d\tau\right]\right\} \Big|\, z_s, y_s^t\right].$$

Мы воспользовались соотношением $\mathcal{Y}_s^t \subset \mathcal{N}_s^t$ и равенством $\mathbf{Q}(dy_s^t \mid x_s, y_s) = \mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)$, вытекающим из того факта, что оператор (7.2) не зависит от x_α в силу условия теоремы. По этой же причине мера $\mathbf{Q}$ является марковской на σ-алгебрах $\{\mathcal{Y}_t\}$. В дальнейшем под σ-алгебрами $\mathcal{Y}_t$ можно понимать не только σ-алгебры в пространстве R_{m+l}, но и σ-алгебры в пространстве R_l.

Теорема 7.2. *При выполнении условий теоремы 7.1 марковская система мер*

$$V_s^t(z_s, \Gamma_t) = \frac{\mathbf{P}(dy_s^t \Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)} \tag{7.3}$$

имеет инфинитезимальный оператор

$$dL^*(t) = c\,dt + a_{\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'} + (a_\alpha dt + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + $$
$$+ \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\, dt \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Кроме меры $\mathbf{P}$ с инфинитезимальным оператором (7.1) введем в рассмотрение меру $\mathbf{P}'$, определенную преобразованием мер

$$\mathbf{P}'(\Gamma_t \mid z(s)) = e^{-q_\alpha x_\alpha(s)} \int_{\Gamma_t} \mathbf{P}(dz \mid z(s))\, e^{q_\alpha x_\alpha}. \tag{7.5}$$

В соответствии с теоремой 3.3, все условия которой в данном случае выполнены, указанной мере соответствует инфинитезимальный оператор

$$dL'_{pr} = e^{-q_\alpha x_\alpha} dL_{pr}\, e^{q_\alpha x_\alpha} = \left(c' + a'_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2} b_{jk} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k}\right) dt; \tag{7.6}$$

$$c' = c + a_\alpha q_\alpha + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta; \quad a'_j = a_j + b_{j\alpha} q_\alpha.$$

Применим теперь теорему 4.2 к мерам $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{Q}$. Это возможно, поскольку $b_{\rho\sigma}$, $a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b_{\tau'\pi'}^{-1} a_{\pi'}$ не зависят от x_α. В соответствии с формулами (4.34), (4.51), (4.52) имеем

$$\frac{\mathbf{P}'(dy_s^t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)} = \Theta_s^t(z_s, y_s^t), \tag{7.7}$$

где Θ_s^t — решение уравнения

$$\Theta_s^t = 1 + \int_s^t \Theta_s^\tau \{\mathbf{M}_{\mathbf{P}'}[c'(z_\tau, \tau) \mid z_s, y_s^\tau] + $$
$$+ \mathbf{M}_{\mathbf{P}'}[a'_{\rho'}(z_\tau, \tau) \mid z_s, y_s^\tau]\, b_{\rho'\sigma'}^{-1}(y_\tau, \tau)\, d^* y_{\sigma'}(\tau)\}. \tag{7.8}$$

Учитывая (7.5), легко найти формулу связи

$$V_s'^t(z, \Gamma_t) = e^{-q_\alpha x_\alpha} \int_{\Gamma_t} V_s^t(z, dz')\, e^{q_\alpha x'_\alpha} \tag{7.9}$$

между производной (7.3) и производной

$$V_s'^t(z_s, \Gamma_t) \equiv \frac{\mathbf{P}'(dy_s^t \Gamma_t \mid z_s)}{\mathbf{Q}(dy_s^t \mid y_s)}. \tag{7.10}$$

Формулу (7.7), очевидно, можно записать

$$V_s'^t(z_s, \Omega) = \Theta_s^t. \tag{7.11}$$

Обратимся к теореме 3.6. Нетрудно убедиться, что вследствие (7.11) уравнение (7.8) совпадает с (3.87), если положить $\mu_{st}' = V_s'^t$. Согласно (П. 1.4), (П. 1.2) условное математическое ожидание в (7.8) есть интеграл по мере

$$\mathbf{P}'(dz_t \mid z_s, y_s^t) = \frac{\mathbf{P}'(dz_t\, dy_s^t \mid z_s)}{\mathbf{P}'(dy_s^t \mid z_s)}. \tag{7.12}$$

Математическое ожидание $\mathbf{M}_{V_s'^t}[\cdot \mid z_s]$ в силу (П. 1.1.) есть интеграл по мере $V_s'^t(z_s, dz_t)/V_s'^t(z_s, \Omega)$. Вследствие (7.10) последняя совпадает с (7.12), так что

$$\mathbf{M}_{\mathbf{P}'}[\cdot \mid z_s\, y_s^t] = \mathbf{M}_{V_s'^t}[\cdot \mid z_s].$$

Это окончательно убеждает в совпадении уравнений (7.8) и (3.87), причем

$$dN'1 = c'\,dt + a_{\rho'}' b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'} = \left(c + a_\alpha q_\alpha + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\, q_\alpha q_\beta\right) dt + $$
$$+ (a_{\rho'} + b_{\rho'\alpha}\, q_\alpha)\, b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'} \tag{7.13}$$

(использованы (7.6)).
Положим

$$dN' = \left(c + a_\alpha q_\alpha + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\, q_\alpha q_\beta\right) dt + (a_{\rho'} + b_{\rho'\alpha}\, q_\alpha)\, b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'} +$$
$$+ (a_\alpha\, dt + b_{\alpha\beta} q_\beta\, dt + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\, dt \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

тогда, очевидно, (7.13) будет выполняться и, кроме того, оператор (3.88)

$$e^{q_\alpha x_\alpha} dN' e^{-q_\alpha x_\alpha} = c\,dt + a_{\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'} +$$
$$+ (a_\alpha\, dt + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} d^* y_{\sigma'}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\, dt \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \tag{7.14}$$

не будет зависеть от q_α в соответствии с условием теоремы 3.6.

Связь (7.9) между мерами V_s^t, $V_s'^t$, рассматриваемыми (при фиксированном процессе y_s^t) как меры в R_m, совпадает с (3.78). Тем самым выполнены все условия теоремы 3,6; применяя ее, получаем, что (7.14) является инфинитезимальным оператором системы мер (7.3). Это завершает доказательство теоремы.

2. Найденный оператор (7.4) относится к типу операторов, изучавшихся в § 3.3 и § 3.4, поэтому на этот случай непосредственно переносятся изложенные там результаты. Чтобы найти симметризованный апостериорный оператор dL, следует воспользоваться формулами (3.70) или (3.71). В данном случае

$$c^{0*} = c; \quad a_\alpha^{0*} = a_\alpha; \quad b_{\alpha\beta}^{0*} = b_{\alpha\beta};$$

$$c_{\sigma'}^0 = b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\rho'}; \quad a_{\sigma'\alpha}^0 = b_{\sigma'\rho'}^{-1} b_{\rho'\alpha}; \quad c_{\sigma''}^0 = 0; \quad a_{\sigma''\alpha}^0 = 0,$$

поэтому согласно (3.70)

$$c^0 = c - \frac{1}{2}\left[a_{\rho'}\, b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'} + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} \frac{\partial a_{\sigma'}}{\partial x_\alpha} + b_{\pi\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'})}{\partial y_\pi}\right];$$

$$a_\alpha^0 = a_\alpha - \left[a_{\rho'}\, b_{\rho'\sigma'}^{-1} b_{\sigma'\alpha} + \frac{1}{2} b_{\beta\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} \frac{\partial b_{\sigma'\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} b_{\pi\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} b_{\sigma'\alpha})}{\partial y_\pi}\right]; \tag{7.15}$$

$$b_{\alpha\beta}^0 = b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\sigma'} b_{\sigma'\rho'}^{-1} b_{\rho'\beta}.$$

Таким образом, в соответствии с (3.42), (3,65) имеем

$$dL = c\,dt + a_{\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1}\left(dy_{\sigma'} - \frac{1}{2} a_{\sigma'}\,dt\right) - \frac{1}{2} b_{j\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'})}{\partial z_j}\,dt +$$
$$+ \left[a_\alpha\,dt + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} (dy_{\sigma'} - a_{\sigma'}\,dt) - \frac{1}{2} b_{j\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} b_{\sigma'\alpha})}{\partial z_j}\,dt\right]\frac{\partial}{\partial x_\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\sigma'} b_{\sigma'\rho'}^{-1} b_{\rho'\beta})\,dt\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \tag{7.16}$$

Нетрудно получить также выражения для других инфинитезимальных операторов (5.65), (5.68). Они имеют вид

$$d\widetilde{L} = (c - \mathbf{M}_{ps}\, c)\,dt + (a_{\rho'} - \mathbf{M}_{ps}\, a_{\rho'})\, b_{\rho'\sigma'}^{-1} dy_{\sigma'} -$$
$$- \frac{1}{2}(a_{\rho'} a_{\sigma'} - \mathbf{M}_{ps}\, a_{\rho'} a_{\sigma'})\, b_{\rho'\sigma'}^{-1}\,dt -$$
$$- \frac{1}{2}\left[b_{j\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'})}{\partial z_j} - \mathbf{M}_{ps}\, b_{j\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'})}{\partial z_j}\right] dt +$$
$$+ \left[a_\alpha\,dt + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} (dy_{\sigma'} - a_{\sigma'}\,dt) - \frac{1}{2} b_{j\rho'} \frac{\partial (b_{\rho'\sigma'}^{-1} b_{\sigma'\alpha})}{\partial z_j}\,dt\right]\frac{\partial}{\partial x_\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{2}\widetilde{b}_{\alpha\beta}\,dt\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}, \tag{7.17}$$

где

$$\mathbf{M}_{ps} \ldots = \int \ldots W_t(dx); \quad \widetilde{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} b_{\sigma'\beta},$$

и далее

$$d\widetilde{\widetilde{L}}(t) = \left[a_\alpha dt + b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} (dy_{\sigma'} - a_{\sigma'} dt) - \frac{1}{2} b_{j\rho'} \frac{\partial (b^{-1}_{\rho'\sigma'} b_{\sigma'\alpha})}{\partial z_j} dt + \right.$$

$$\left. + \widetilde{b}_{\alpha\beta} \frac{\partial \ln V^u_t(z_t, \Omega)}{\partial x_\beta} dt \right] \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \widetilde{b}_{\alpha\beta} dt \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (7.18)$$

В соответствии с (7.17) основное уравнение (5.66) записывается для плотности $w_t(x) = W_t(dx)/dx$ в виде

$$dw_t = \Bigg\{ (c - \mathbf{M}_{ps} c)\, dt + (a_{\rho'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'})\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} dy_{\sigma'} -$$

$$- \frac{1}{2} (a_{\rho'} a_{\sigma'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'} a_{\sigma'})\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} dt - \frac{1}{2} \left[b_{j\rho'} \frac{\partial (b^{-1}_{\rho'\sigma'} a_{\sigma'})}{\partial z_j} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{M}_{ps} b_{j\rho'} \frac{\partial (b^{-1}_{\rho'\sigma'} a_{\sigma'})}{\partial z_j} \right] dt \Bigg\} w_t - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \left[a_\alpha dt + \right. \right.$$

$$\left. \left. + b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} (dy_{\sigma'} - a_{\sigma'} dt) - \frac{1}{2} b_{j\rho'} \frac{\partial (b^{-1}_{\rho'\sigma'} b_{\sigma'\alpha})}{\partial z_j} dt \right] w_t \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} [\widetilde{b}_{\alpha\beta} w_t]. \quad (7.19)$$

Выражения (7.17)—(7.19) принимают несколько более короткий вид, если рассматривать несимметризованные дифференциальные выражения, определенные в смысле Ито (§ 2.1).

Аналогично тому, как в § 6.3 была выведена формула (6.37), в данном случае можно получить

$$d\widetilde{L}^* = (c - \mathbf{M}_{ps} c)\, dt + (d^* y_{\rho'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'} dt)\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} \times$$

$$\times \left[a_{\sigma'} - \mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'} + b_{\sigma'\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right] + \left[a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] dt. \quad (7.20)$$

Найдем также соответствующий аналог формулы (7.18). Согласно (5.63) имеем

$$d\widetilde{\widetilde{L}}^*(t) = \frac{1}{V^u_t(z, \Omega)} [d^* L^*(t) V^u_t(z, \Omega) - (d^* L^*(t) V^u_t)(z, \Omega)]$$

или, если подставить (7.4),

$$d\tilde{\tilde{L}}^* (t) = \frac{1}{V_t^u (z, \Omega)} \left[\left(a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) V_t^u (z, \Omega) - \right.$$

$$\left. - a_\alpha \frac{\partial V_t^u (z, \Omega)}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \frac{\partial V_t^u (z, \Omega)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] dt +$$

$$+ b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} \frac{1}{V_t^u(z, \Omega)} d^* y_{\sigma'} V_t^u (z, \Omega) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Используя уравнение $d_t V_t^u = - d^* L^* V_t^u$ (5.58), нетрудно получить

$$d^* y_{\sigma'} V_t^u = V_t^u d^* y_{\sigma'} + b_{V\sigma'} dt = V_t^u d^* y_{\sigma'} - V_t^u a_{\sigma'} dt - b_{\alpha\sigma'} \frac{\partial V_t^u}{\partial x_\alpha} dt.$$

Благодаря этому указанная формула принимает вид

$$d\tilde{\tilde{L}}^* (t) = \left[a_\alpha dt + b_{\alpha\rho'} b_{\rho'\sigma'}^{-1} (d^* y_{\sigma'} - a_{\sigma'} dt) + \right.$$

$$\left. + \tilde{b}_{\alpha\beta} \frac{\partial \ln V_t^u (z_t, \Omega)}{\partial x_\beta} dt \right] \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} dt \frac{[\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

ср. с (7.18)).

3. Приведем еще одно следствие из полученных в этом параграфе результатов. Именно, найдем апостериорную статистику приращений $\Delta x_\alpha = x_\alpha (t+\Delta) - x_\alpha (t)$, рассмотренную в § 3.4. Подставляя выражения (7.15) в (3.75) и (3.77), получаем для данного случая

$$\mathbf{M_P} [\Delta x_\alpha | x_t, y_\alpha^{t+\Delta}] = a_\alpha (z_t, t) \Delta + b_{\alpha\rho'} (z_t, t) \times$$

$$\times b_{\rho'\sigma'}^{-1} (\Delta y_{\sigma'} - a_{\sigma'} \Delta) + b_{j\rho'} b_{\rho'\pi'}^{-1} \left(Y_{\pi'\tau'} - \frac{1}{2} b_{\pi'\tau'} \Delta \right) \times$$

$$\times \frac{\partial (b_{\tau'\sigma'}^{-1} b_{\sigma'\alpha})}{\partial z_j} + O(\Delta^{3/2}); \qquad (7.21)$$

$$\mathbf{M_P} [\Delta x_\alpha \Delta x_\beta | x_t, y_\alpha^{t+\Delta}] = b_{\alpha\beta} \Delta + b_{\alpha\rho'} (b_{\rho'\pi'}^{-1} \Delta y_{\pi'} \Delta y_{\tau'} b_{\tau'\sigma'}^{-1} -$$

$$- b_{\rho'\sigma'}^{-1} \Delta) b_{\sigma'\beta} + O(\Delta^{3/2});$$

а также

$$V_t^{t+\Delta} (x_t, R_m) = 1 + a_{\rho'} (z_t, t) b_{\rho'\sigma'}^{-1} \Delta y_{\sigma'} + c\Delta +$$

$$+ a_{\rho'} \left(b_{\rho'\pi'}^{-1} Y_{\pi'\tau'} b_{\tau'\sigma'}^{-1} - \frac{1}{2} b_{\rho'\sigma'}^{-1} \Delta \right) a_{\sigma'} +$$

$$+ b_{j\rho'} b_{\rho'\pi'}^{-1} \left(Y_{\pi'\tau'} - \frac{\Delta}{2} b_{\pi'\tau'} \right) \frac{\partial (b_{\tau'\sigma'}^{-1} a_{\sigma'})}{\partial z_j} + O(\Delta^{3/2}).$$

В заключении параграфа отметим, что специальная проверка показывает инвариантный характер найденных выражений относительно преобразований вида

$$x' = x'(x, y); \quad y' = y.$$

Потребность в таких преобразованиях может появиться при рассмотрении практических задач. Однако мы не будем приводить выкладок, подтверждающих эту инвариантность.

§ 7.2. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Результаты предыдущего параграфа были получены при одном существенном ограничении. Именно, предполагалось, что $b_{\rho\sigma}$, $a_{\rho''} - b_{\rho''\tau'} b^{-1}_{\tau'\pi'} a_{\pi'}$ не зависят от x_α. В настоящем параграфе мы укажем пути решения задачи в более общем случае, когда это предположение не выполняется. Оказывается, что для решения более общей задачи не требуется вывода новых формул и выражений, а достаточно расширить (добавить новые компоненты) исходный марковский процесс и наблюдаемый процесс.

Вместе с тем мы проведем здесь другое менее существенное обобщение: будем предполагать, что наблюдаются не компоненты исходного марковского процесса, а некоторые функции, определенные в его фазовом пространстве.

Трудности, связанные с указанными обобщениями, преодолеваются путем увеличения числа фактически наблюдаемых функций. В ходе наблюдения в общем случае наблюдатель с достоверностью узнает не только наблюдаемые функции, указанные в условии задачи, но и их локальные дисперсии (а также локальные дисперсии этих дисперсий и т. д.). Поэтому число фактически наблюдаемых функций оказывается больше, чем первоначально указано. В § 6.2 уже отмечалось, что, в дополнение к процессу $\{y(t)\}$, можно считать наблюдаемыми также функции (6.17). Их можно включить в число наблюдаемых компонент. При таком увеличении числа наблюдаемых функций сильно помогает то обстоятельство, что основные формулы нечувствительны к вырождению матрицы локальных дисперсий, так что любое число функций можно присоединить к исходному процессу, рассматривая их как компоненты совокупного диффузионного процесса. Этим окупаются усилия, затраченные ранее в гл. 4 на рассмотрение случая вырожденной матрицы локальных дисперсий.

Пусть $z = \{z_\alpha, \alpha = 1, \ldots, m\}$ — диффузионный процесс в R_m, и пусть заданы наблюдаемые функции

$$y_\rho = F_\rho(z, t), \quad \rho = 1, \ldots, l. \tag{7.22}$$

Эти функции, а также параметры исходного процесса мы предполагаем дифференцируемыми достаточно большое число раз. Процесс $\{z_\alpha\}$ и процесс $\{y_\rho\}$ можно объединить в единый диффузионный марковский процесс, определенный в R_{m+l}. Найдем параметры этого единого процесса. Нетрудно понять, что матрица локальных дисперсий будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} b_{\alpha\beta} & b_{\alpha\sigma} \\ b_{\rho\beta} & b_{\rho\sigma} \end{pmatrix},$$

где

$$b_{\rho\sigma} = \frac{\partial F_\rho}{\partial z_\gamma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial z_\delta} b_{\gamma\delta}; \qquad b_{\rho\alpha} = b_{\alpha\rho} = \frac{\partial F_\rho}{\partial z_\beta} b_{\alpha\beta}.$$

Далее, вектор сноса будет (a_α, a_ρ), где

$$a_\rho = \frac{\partial F_\rho}{\partial t} + \frac{\partial F_\rho}{\partial z_\alpha} a_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_\rho}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} b_{\alpha\beta}.$$

Параметр c (если его нужно рассматривать) остается без изменения. После описанного объединения процессов z_α и y_ρ данная задача свелась к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе (при очевидной замене x_α на z_α n на $m+l$ и т. п.).

Выделяя из $\|b_{\rho\sigma}\|$ невырожденную подматрицу $\|b_{\rho'\sigma'}\|$, будем рассматривать $(l-l')$ — компонентный подвектор $g_{\rho''} = a_{\rho''} - b_{\rho''\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} a_{\sigma'}$.

Для применения результатов § 7.1 нужно проверить условие независимости функций $b_{\rho\sigma}(z, t)$, $a_{\rho''}(z, t) - b_{\rho''\rho'}(z, t) b^{-1}_{\rho'\sigma'}(z, t) a_{\sigma'}(z, t)$ от z. Если оно не выполнено, следует провести дальнейшее расширение процесса $\{z_\alpha, y_\rho\}$, присоединив к его компонентам те из указанных функций, которые зависят от z. Обозначим такие функции $F_{\tilde\rho}(z, t)$, $\tilde\rho = l+1, \ldots, l+\tilde l$ $(\tilde l \leqslant l^2 + l - l')$. Как отмечалось, функции $F_{\tilde\rho}$ можно присоединить к числу наблюдаемых функций (7.22), считая, что наблюдаются также процессы

$$y_{\tilde\rho} = F_{\tilde\rho}(z, t). \tag{7.23}$$

Подобно тому, как раньше мы пополнили процесс $\{z_\alpha\}$ компонентами $\{y_\rho\}$, пополним теперь его компонентами $\{y_\rho, y_{\tilde\rho}\}$. Для процесса $\{z_\alpha, y_\rho, y_{\tilde\rho}\}$ снова проверим условие независимости (теперь уже новых) параметров $b_{\tilde\rho\tilde\sigma}$, $b_{\tilde\rho\sigma}$, $g_{\tilde\rho''}$ от z. Если раньше, скажем, функция $b_{\rho_1\sigma_1}(z, t)$ зависела от z, то теперь она превратилась в $y_{\tilde\rho_1}$ и тем самым потеряла явную зависимость от z. В случае, если все требуемые параметры зависят только от $\{y_\rho, y_{\tilde\rho}, t\}$, к задаче можно применять результаты § 7.1, если нет, то следует произвести дальнейшее пополнение наблюдаемого процесса $\{y_\rho, y_{\tilde{\rho}}\}$ и основного марковского процесса.

Очевидно, что описанный процесс пополнения или закончится (и тогда мы будем иметь конечный наблюдаемый и основной процесс), или не закончится (тогда будем иметь счетный наблюдаемый и счетный основной процесс). В обоих случаях апостериорная мера будет сосредоточена на допустимом множестве

$$\{z(\cdot): F_\rho(z(t), t) \equiv y_\rho(t), \quad F_{\tilde{\rho}}(z(t), t) \equiv y_{\tilde{\rho}}(t), \ \ldots\},$$

которое с вероятностью 1 не пусто (разумеется, нетривиальная задача имеется только в том случае, когда допустимое множество состоит более чем из одной точки).

В случае конечного процесса, когда расширение заканчивается через конечное число шагов, к задаче непосредственно могут быть применены результаты предыдущего параграфа. При бесконечном процессе требуется обобщение результатов § 7.1 на случай счетного диффузионного процесса. Мы не будем рассматривать этого обобщения, а ограничимся замечанием, что для практически интересных случаев все основные формулы из § 7.1 и в этом случае сохранят свой вид и не будут содержать бесконечных сумм. Причина этого в том, что в формулы входят лишь невырожденные компоненты $y_{\rho'}$, а в процессе $\{y_\rho, y_{\tilde{\rho}}, \ldots\}$ имеется лишь конечное число невырожденных компонентов (ранг матрицы локальных дисперсий не может превосходить m). Таким образом, формулы предыдущего параграфа дают решение общей задачи, хотя вопрос обоснования в бесконечном случае осложняется.

В следующем параграфе будет рассмотрен пример, для которого описанное расширение процесса быстро заканчивается.

§ 7.3. ДВА ПРИМЕРА

1. Рассмотрим сначала пример, к которому непосредственно приложимы результаты § 7.1. Пусть наблюдается сумма $y(t) = x(t) + \xi(t)$ двух независимых однокомпонентных диффузионных процессов $x(t)$ и $\xi(t)$. Первый из них пусть характеризуется параметрами $a(x, t)$, $b(x, t)$, а второй — $a'(\xi, t)$, $b'(\xi, t)$. (пусть эти функции непрерывны, а также дифференцируемы по x и ξ соответственно). Требуется исследовать апостериорный процесс $x(t)$.

Рассмотрим двумерный диффузионный процесс $\{x(t), y(t)\}$, Он характеризуется параметрами сноса $a_\alpha = a_1 = a(x, t)$, $a_\rho = a_2 = a(x, t) + a'(y-x, t)$ и матрицей локальных дисперсий

$$\|b_{jk}\| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b(x, t) & b(x, t) \\ b(x, t) & b(x, t) + b'(y-x, t) \end{matrix} \right\|.$$

Будем предполагать, что $b+b' \neq 0$ и $\frac{\partial b}{\partial x}(x, t) \equiv 0$. $\frac{\partial b'}{\partial \xi}(\xi, t) = 0$. Тогда условия теорем 7.1 и 7.2 оказываются выполненными ($l=l'=1$, параметры $a_{\rho''} - b_{\rho''\sigma'} b^{-1}_{\sigma'\pi'} a_{\pi'}$ при этом не приходится рассматривать). Применяя теорему 7.2 и конкретизируя (7.4), получаем апостериорный инфинитезимальный оператор

$$dL^* = \frac{a+a'}{b+b'} d^*y + \left(a\,dt + \frac{b}{b+b'} d^*y\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b \quad t \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{7.24}$$

Симметризованный оператор (7.16) имеет вид

$$dL = \frac{a+a'}{b+b'}\left[dy - \frac{1}{2}(a+a')\,dt\right] - \\ - \frac{1}{2}\left[\frac{b}{b+b'} \frac{\partial(a+a')}{\partial x} + \frac{\partial a'}{\partial y}\right] dt + \\ + \left\{a\,dt + \frac{b}{b+b'}[dy - (a+a')\,dt]\right\}\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2}\widetilde{b}\,dt\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \widetilde{b} = \frac{bb'}{b+b'}.$$

Далее, формулы (7.17), (7.18) записываются в виде

$$d\widetilde{L} = \frac{dy}{b+b'}[a + a' - \mathbf{M}_{ps}(a+a')] - \\ - \frac{1}{2}\frac{dt}{b+b'}[(a+a')^2 - \mathbf{M}_{ps}(a+a')^2] - \\ - \frac{dt}{2}\left\{\frac{b}{b+b'}\left[\frac{\partial(a+a')}{\partial x} - \mathbf{M}_{ps}\frac{\partial(a+a')}{\partial x}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial a'}{\partial y} - M_{ps}\frac{\partial a'}{\partial y}\right\} + \left[\frac{b}{b+b'}dy + \frac{ab'-ba'}{b+b'}dt\right]\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2}\widetilde{b}dt\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}; \tag{7.25}$$

$$d\widetilde{\widetilde{L}} = \left[\frac{b}{b+b'}dy + \frac{ab'-ba'}{b+b'}dt + \widetilde{b}\,\frac{\partial \ln V_t^u(x, R_1)}{\partial x}\,dt\right]\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{1}{2}\widetilde{b}dt\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{7.26}$$

В (7.25)

$$\mathbf{M}_{ps} \ldots = \int \ldots W_t(dx) = \int \ldots w_t(x)\,dx,$$

если апостериорная вероятность $W_t(dx)$ имеет плотность $w_t(x)$. Принимая во внимание (7.25), запишем уравнение (7.19) для апостериорной плотности распределения

$$dw_t = \frac{1}{2}\widetilde{b}dt\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{b}{b+b'}dy + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{ab'-ba'}{b+b'}dt\right]w_t\right\} + w_t[dF - \mathbf{M}_{ps}dF],$$

$$dF = \frac{a+a'}{b+b'}\left[dy - \frac{1}{2}(a+a')\,dt\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{b}{b+b'}\frac{\partial(a+a')}{\partial x} + \frac{\partial a'}{\partial y}\right]dt.$$

Наконец, приведем уравнения (5.58), (5.64), которому удовлетворяет функция $V_t^u(x, R_1)$, входящая в (7.26). Оно имеет вид

$$-d_t V_t^u(x, R_1) = \frac{1}{2}\widetilde{b}dt\frac{\partial^2 V_t^u(x, R_1)}{\partial x^2} +$$

$$+ \left[\frac{b}{b+b'}dy - \frac{ab'-ba'}{b+b'}dt\right]\frac{\partial V_t^u(x, R_1)}{\partial x} + dF\cdot V_t^u(x, R_1)\cdot$$

При необходимости могут быть выписаны и другие уравнения, соответствующие данному случаю.

2. В качестве второго примера рассмотрим изотропную диффузию в трехмерном пространстве с координатами x_1, x_2, x_3, где имеется центрально симметричное силовое поле, описываемое потенциальной функцией $U(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Выражаясь иначе, принимаем следующий вид априорного инфинитезимального оператора:

$$dL_{pr} = \sum_{i=1}^{3}\left[-\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right]. \qquad (7.27)$$

Пусть наблюдаемой функцией является полярный угол

$$y_3(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_2(t)}{x_3(t)}. \qquad (7.28)$$

Требуется исследовать апостериорный процесс.

Данную задачу удобно рассматривать в координатах

$(z_1, z_2, z_3) = (r, \rho, y_3)$, где $\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, так что

$$x_1 = \sqrt{r^2 - \rho^2}; \quad x_2 = \rho\sin y_3; \quad x_3 = \rho\cos y_3.$$

Легко получить в этих переменных параметры сноса

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(-U' + \frac{D}{r}, \quad -\frac{\rho}{r} U', 0\right), \quad U' = \frac{dU(r)}{dr},$$

и матрицу локальных дисперсий

$$\| b_{jk} \| = D \begin{Vmatrix} 1 & \frac{\rho}{r} & 0 \\ \frac{\rho}{r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{Vmatrix}. \tag{7.29}$$

Когда наблюдается координата $y_3(t)$, условие теоремы 7.1 не выполнено, так как локальная дисперсия $b_{33}=\rho^{-2}$ зависит от других координат (именно от координаты $z_2=\rho$). В соответствии со сказанным в § 7.2 можно расширить наблюдаемый процесс, добавив к y_3 функцию b_{33} или, что эквивалентно, функцию $y_2(t)=\rho$. Таким образом, наблюдение одной координаты $y_3(t)$ эквивалентно наблюдению двух координат $\{y_2(t),\ y_3(t)\}$. Матрица локальных дисперсий

$$D \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} \end{Vmatrix},$$

соответствующая этим наблюдаемым процессам, является невырожденной и ее элементы не зависят от прочих (ненаблюдаемых) координат. Поэтому дальнейшего расширения наблюдаемого процесса проводить не следует.

Остается лишь одна ненаблюдаемая координата $z_1=r$ и апостериорные операторы, следовательно, будут соответствовать однокомпонентному процессу.

Применение теоремы 7.2 и формулы (7.4) к двухкомпонентному наблюдаемому процессу $\{\rho,\ y_3\}$ дает следующее выражение для апостериорного инфинитезимального оператора

$$dL^* = -\frac{1}{D}\frac{\rho}{r} U' d^*\rho + \left[\left(-U' + \frac{D}{r}\right) dt + \frac{\rho}{r} d^*\rho\right]\frac{\partial}{\partial r} + \\ + \frac{D}{2} dt \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \tag{7.29}$$

Далее, в соответствии с (7.16) имеем

$$dL(t) = dF + \left[\left(-U' + \frac{D}{r}\right)dt + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{r}\left(d\rho + \frac{\rho}{r} U' dt\right) - \frac{D}{2}\frac{r^2-\rho^2}{r^3} dt\right]\frac{\partial}{\partial r} + \\ + \frac{D}{2}\frac{r^2-\rho^2}{r^2} dt \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \tag{7.30}$$

где

$$dF = -\frac{1}{D}\frac{\rho}{r}U'\left(d\rho + \frac{1}{2}\frac{\rho}{r}U'\,dt\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}U'\right) + \frac{1}{2r}U'\,dt.$$

Следовательно, уравнение (7.19) для апостериорной плотности распределения вероятностей $w_t(r)$ принимает вид

$$dw_t(r) = \frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{r^2-\rho^2}{r^2}w_t\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[\left(-U' + \frac{D}{r}\right)dt + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\rho}{r}(d\rho + \frac{\rho}{r}U'\,dt) - \frac{D}{2}\frac{r^2-\rho^2}{r^3}dt\right]w_t\right\} + [dF - \mathbf{M}_{ps}\,dF]\,w_t.$$

Любопытно отметить, что, если бы наблюдались оба сферических угла, то статистическая задача была бы вырожденной, так как по ним можно было бы безошибочно определить радиус $r(t)$. Допустимое множество свелось бы к единственной точке.

В заключение этой главы отметим один частный случай, при котором полученные здесь результаты перекликаются с результатами гл. 6. Предположим, что в формулах § 7.1 обращается в нуль перекрестные дисперсионные коэффициенты: $b_{\alpha\rho} \equiv 0$ и a_α, $b_{\alpha\beta}$ не зависят от y_ρ. Тогда из (7.4) имеем

$$dL^* = c\,dt + a_{\rho'}\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}\,d^*y_{\sigma'} + \left(a_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)dt. \tag{7.31}$$

Но

$$\left(a_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)dt$$

есть не что иное, как априорный инфинитезимальный оператор $d\overset{*}{L}_{pr}$ в пространстве $R_m \ni x$. Поэтому формула (7.31) совпадает с (6.47), (6.48), если отождествить между собой α и x $(=\{x_1, \ldots, x_m\} \in R_m)$.

Часть III

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Глава 8

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Прежде чем рассматривать применение теории условных марковских процессов, изложим ряд положений общей теории оптимального управления. Эта теория не является безусловно необходимой для понимания конкретных результатов по решаемым в дальнейшем частным задачам. Однако она позволяет рассматривать разнообразные задачи, в которых требуется принимать те или иные оптимальные решения с единой точки зрения. Конечно, приводимая здесь общая постановка задачи на оптимальное управление, несмотря на ее общность, является не самой общей. К ее ограничениям относится бейесовский подход, а также условие, чтобы информация, находящаяся в распоряжении наблюдателя-оператора, принимающего решения, не убывала с течением времени. Все конкретные примеры, рассматриваемые в дальнейшем, являются частными случаями указанной общей задачи, хотя возможны и интересны также примеры, выходящие за рамки данной теории. Небейесовские задачи можно решать, как известно, путем сведения их к бейесовским. Задачи с убывающей информацией в настоящее время мало изучены, и мы на них не будем останавливаться.

Существо теории заключается в том, что рассматривается цепочка чередующихся условных минимизаций и усреднений в едином абстрактном измеримом пространстве, в котором определено семейство монотонных σ-алгебр. Чередующиеся минимизации и усреднения использовались автором в работе [13], а монотонные σ-алгебры, связанные с теорией оптимального управления, — в работе [14]. Указанная цепочка минимизаций и усреднений и соответствующие ей рекуррентные преобразования воплощают в действительность в самом абстрактном виде известный «принцип оптимальности» Беллмана [1]. Однако если в работах Беллмана рассматривается и подвергается минимизациям функция конечного числа каких-то фазовых переменных, то здесь имеем дело с функцией, определенной в абстрактном, в общем случае функциональном пространстве. Переход к конечному числу переменных осуществляется в дальнейших параграфах (начиная с § 8.5) в результате введения достаточных координат.

При описанном подходе для получения основных результатов не требуется не только метрических понятий, но даже и введения топологии в исходном измеримом пространстве.

Кроме Беллмана, рекуррентные соотношения для рисков применительно к статистическим задачам (преимущественно типа последовательного анализа) рассматривали: Вальд и Вольфовиц [1], Блеквелл и Гиршик [1], Михалевич [2]. Последний после перехода к пределу исследовал также случай непрерывного времени, когда рекуррентные соотношения обращаются в дифференциальные уравнения.

Большинство работ по динамическому программированию соответствует дискретному времени. В то же время есть ряд работ (Беллман [1], Беллман, Гликсберг, Гросс [1], Стратонович и Шмальгаузен [1], Стратонович [18], [19] и др.), в которых рассматриваются рекуррентные соотношения (дифференциальные уравнения) для непрерывного времени. Соответствующий предельный переход совершается без специального обоснования.

Обоснование перехода к непрерывному времени может быть произведено в рамках общей теории, излагаемой в гл. 8.

Исследование этих вопросов оказывается тесно связанным с исследованием инфинитезимальной коммутативности операции условного усреднения и минимизации.

Для теории, излагаемой в настоящей главе, характерно то, что явно можно не рассматривать решающие правила (стратегии), а концентрировать внимание непосредственно на оптимальных стратегиях. Предполагается, что условиями задачи никаких ограничений на выбор стратегий не налагается (не следует путать эти ограничения с ограничениями, наложенными на функции управления, учитываемыми теорией).

Другой характерной особенностью теории является отсутствие каких-либо требований положительности или выпуклости, накладываемых на функции штрафов. Не исключено, что для получения каких-либо других специальных результатов подобные требования могут понадобиться.

Затронем вопрос о рандомизированных решениях. В данной теории рандомизация оказывается не очень существенной. Если нижняя грань достигается в одной или нескольких точках, то с одинаковым успехом может быть выбрана любая из этих точек, а также указано любое рандомизированное правило выбора между ними. Поэтому среди оптимальных решений существует равноценное нерандомизированное решение. Если нижняя грань не достигается на рассматриваемом множестве, то может быть выбрано сколь угодно близкое к оптимальному нерандомизированное решение, которое не хуже рандомизированного. Это положение типично для теории. Для удобства и общности изложения в тексте этой главы будут, однако, рассматриваться рандомизированные решения, причем будет выбран один специальный согласованный способ рандомизации, который порождается некоторой дополнительной мерой — «фундаментом рандомизации» $\nu(\cdot)$. Нужно иметь в виду, что качество решения (величина среднего риска) не зависит от выбора фундамента рандомизации. Оно остается таким же, даже если ограничиться нерандомизированными решениями.

Рандомизация становится существенной при обобщении теории на игровую ситуацию (§ 8.8). Распространение теории на случай антагонистических игр не связано с принципиальными трудностями и не требует привлечения новых идей. Единственное изменение в том, что одно управление заменяется на пару, а условная минимизация — на условный минимакс. В итоге получаем далеко идущее развитие одного раздела теории игр.

Для фактического решения задач оптимального управления важным является понятие достаточных координат, которое позволяет переходить от абстрактного (функционального) пространства к конечномерному пространству, рассматривая в нем функции и рекуррентные преобразования. Это понятие является видоизменением (применительно к теории оптимального управления) известного в математической статистике понятия достаточных статистик (см., например, Ван-дер-Варден [1]). Важность этого понятия для развития теории динамического программирования была отмечена Беллманом и Калабой [1]. Общее определение достаточных координат дано автором в работах [16, 17, 14].

В случае, когда основным управляемым процессом является процесс Маркова, среди достаточных координат важнейшими являются апостериорные вероятности или заменяющие их параметры, т. е. «вторичный апостериорный процесс». Поэтому для таких задач большую роль играет теория условных марковских процессов. Она дает аналитическую основу для записи и решения рекуррентных уравнений, т. е. основных уравнений теории оптимального управления. Вид этих уравнений в основной своей части определяется «вторичным» инфинитезимальным оператором, который рассматривался выше (§ 5.6 и § 6.4).

В некоторых частных случаях «вторичный апостериорный процесс» представляет собой диффузионный процесс, причем его параметры и инфинитезимальный оператор зависят от управления. В этих случаях определение риска (как функции координат указанного диффузионного процесса) производится (при обратном течении времени) совместно с его минимизацией, т. е. с выбором оптимального управления. Такие задачи рассматривались как самостоятельные задачи Дынкиным [4] и Гирсановым [2]. Диффузионный процесс для них являлся исходным, тогда как для нас этот процесс является вторичным, представляя собой достаточные координаты (апостериорные вероятности) некоторой более сложной задачи на оптимальное управление с неполным наблюдением. Попутно отметим, что замена функции штрафов, рекомендуемая в указанной работе Дынкина, обычно непригодна в случае необрывающихся процессов (так как нарушается условие $\mathbf{M}_x \varphi_{\overset{\circ}{\zeta}} < \infty$). Поэтому результаты этой работы неприменимы непосредственно даже к простейшим задачам последовательного анализа Вальда.

Ряд результатов по условным марковским процессам в применении к нелинейной фильтрации был доложен автором [3] на VI Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 1960 г.) и на I конгрессе Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК) (Москва, 1960 г.). После этого автором велась работа по применению теории к задачам радиотехнического характера [6, 7, 10—12] и по расширению области ее приложений. Именно, был решен ряд задач математической статистики и динамического программирования (Стратонович [15—19]). В процессе работы над этими задачами выкристаллизовывались основные формулировки и результаты излагаемой в гл. 8 общей теории оптимального управления. Эти вопросы нашли отражение в докладе автора на IV Всесоюзном математическом съезде (Ленинград, 1961 г.), а также в статьях [13, 17]. Результаты, полученные автором в 1960 г. и частично прореферированные в [15], составили содержание *Дополнения* (стр. 290).

§ 8.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФУНКЦИЯ РИСКОВ В ИЗМЕРИМОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Излагаемой ниже теории оптимального управления свойствен последовательный во времени характер. Пусть множество значений параметра (времени) t представляет собой интервал $T=[a, b]$ или его подмножество, для определенности остановимся на первом случае.

Процесс управления. Пусть процесс управления u образует точку в измеримом пространстве $(U, \mathcal{U}')$. В нем имеется монотонное семейство σ-алгебр $\mathcal{U}'^t$, $t \in T$ ($\mathcal{U}'^s \subset \mathcal{U}'^t \subset \mathcal{U}'^b \equiv \mathcal{U}'$, $s \leqslant t$). Для наглядности удобно представлять себе, что u есть функция $u(\cdot) = \{u(t),\ t \in T\}$, а σ-алгебра $\mathcal{U}'^t$ выделена условиями, наложенными на ее «предыдущие» значения, т. е. на $u_a^t = \{u(\tau), \tau \in [a, t]\}$. При такой интерпретации, кроме U, можно ввести в рассмотрение пространства $U^s \ni u_a^s$, $s \in T$, а также пространства $U_s^t(u_a^s)$, $s < t$ всевозможных $u_s^t = \{u(\tau), \tau \in [s, t]\}$. Последние пространства берутся при фиксированных u_a^s, поэтому в общем случае оказываются зависящими от u_a^s. В указанных пространствах естественным образом можно определить σ-алгебры: $\mathcal{U}''^s$ в U^s и $\mathcal{U}_s''^t(u_a^s)$ в $U_s^t(u_a^t)$. Прообразы этих σ-алгебр в общем пространстве $(U, \mathcal{U}')$ обозначаем $\mathcal{U}'^s$, $\mathcal{U}_s'^t(u_a^s) \equiv \mathcal{U}_s'^t(\mathcal{U}'^s)$ (последние можно рассматривать как $\mathcal{U}'^s$-измеримые функции от u).

В некоторых частных случаях пространства $(U_s^t(u_a^s), \mathcal{U}_s''^t(u_a^s))$ не зависят от u_a^s. Тогда, очевидно,

$$U^t = U^s \times U_s^t,\ \mathcal{U}''^t = \mathcal{U}''^s \times \mathcal{U}_s''^t;\ \mathcal{U}'^t = \sigma(\mathcal{U}'^s \cup \mathcal{U}_s'^t);$$

$$U_r^t = U_r^s \times U_s^t,\ \mathcal{U}_r''^t = \mathcal{U}_r''^s \times \mathcal{U}_s''^t \quad (r < s < t),$$

Эти случаи мы назовем случаем независимого выбора управления или случаем *несвязанного управления*.

В общем случае, когда $U_s^t(u_a^s)$, $\mathcal{U}_s'^t(u_a^s)$ существенно зависят от u_a^s, дело обстоит сложнее. Тем не менее и в этом случае мы будем полагать

$$U^t = U^s \times U_s^t(u_a^s);\ \mathcal{U}''^t = \mathcal{U}''^s \times \mathcal{U}_s''^t(\mathcal{U}''^s),$$

а также

$$\mathcal{U}'^t = \sigma(\mathcal{U}'^s \cup \mathcal{U}_s'^t(\mathcal{U}'^s)). \tag{8.1}$$

В общем случае эти соотношения можно понимать как определение операции декартового произведения «×» и определение условной σ-алгебры* $\mathcal{U}_s'^t(\mathcal{U}'^s)$. Вместо (8.1), будем пользоваться также более короткой формой записи:

$$\mathcal{U}'^t = \mathcal{U}'^s\mathcal{U}_s'^t(\mathcal{U}'^s),\ s < t.$$

---

* Немного поясним понятие условной σ-алгебры. Пусть имеется измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{B})$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Условной σ-алгеброй мы называем зависящее от $\omega \in \Omega$ семейство σ-алгебр $\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{G}(\omega)\ (\subset \mathcal{B})$, которое как функция от ω является $\mathcal{F}$-измеримым (если фиксирована σ-алгебра $\mathcal{G}_0$, то $\{\omega : \mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}_0\} \in \mathcal{F}$).

Выберем множество $\Lambda \in \mathcal{F}$, точку $\omega_0 \in \Lambda$, и множество $\Gamma \in \mathcal{G}(\omega_0)$ и возьмем пересечение $\Gamma\Lambda$. Минимальную σ-алгебру, содержащую любые подобные множества $\Gamma\Lambda$ при всевозможных Λ, ω_0, Γ, обозначаем

$$\sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}(\mathcal{F})) \equiv \mathcal{F}\mathcal{G}(\mathcal{F}).$$

Если $(\mathcal{B} \supset)\ \mathcal{H} \supset \mathcal{F}$, то существует такая условная σ-алгебра $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, что $\mathcal{F}\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$.

Условную меру $\mathbf{P}(A|\mathcal{F})$, заданную на $\mathcal{H} \ni A$, с одинаковым успехом можно считать определенной на условной σ-алгебре $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, и наоборот.

Более общим, чем случай несвязанного управления, является случай *марковски связанного управления.*

Определение 8.1. *Управление называем марковски связанным, если существуют такие функции* $\widetilde{u}_s=\widetilde{u}_s(u_a^s)$, $s\in T$, *что*

$$U_s^t(u_a^s)=U_s^t(\widetilde{u}_s),\ \mathcal{U}_s'^t(u_a^s)=\mathcal{U}_s'^t(\widetilde{u}_s).$$

При этом $\widetilde{u}_s$ будем называть *марковской координатой процесса.* Если $\widetilde{\mathcal{U}}_s'(\subset\mathcal{U}'^s)$ — σ-алгебра, определенная условиями, наложенными на $\widetilde{u}_s(u_a^s)$, то очевидно

$$\mathcal{U}_s'^t(\mathcal{U}'^s)=\mathcal{U}_s'^t(\widetilde{\mathcal{U}}_s').$$

Хотя это не очень существенно, σ-алгебру $\mathcal{U}'^a$ будем предполагать тривиальной, т. е. состоящей из пустого множества и всего пространства.

2. *Основной процесс.* Выбор управления указывает вероятностное поведение некоторого основного процесса. Точнее, фиксация управления u_a^t, предшествующего моменту t, задает вероятностную меру $\mathbf{P}(\cdot|u_a^t)$ на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}''^t(u_a^t)$ некоторого пространства $\Omega^t(u_a^t)\ni\zeta$ (в общем случае это пространство и σ-алгебра зависят от u_a^t). Пара (u_a^t,ζ) образует точку пространства $U^t\times\Omega^t(u_a^t)$, в котором определена σ-алгебра

$$\mathcal{B}''^t=\mathcal{U}''^t\times\mathcal{A}''^t(\mathcal{U}''^t).$$

Будем предполагать, что $\Omega^t(u_a^t)=\Omega^s(u_a^s)\times\Omega_s^t$ при $s<t$, где Ω_s^t — некоторое дополнительное пространство.

Удобно ввести единое измеримое пространство элементарных событий

$$(\Omega,\mathcal{B})=(U^b\times\Omega^b(u_a^b),\mathcal{U}''^b\times\mathcal{A}''^b(\mathcal{U}''^b))$$

(т. е. $\mathcal{B}=\mathcal{B}''^b$) и, вместо σ-алгебр (например, $\mathcal{U}'^t$, $\mathcal{A}''^t(u_a^t)$, $\mathcal{B}''^t$) в различных пространствах, рассматривать соответствующие σ-алгебры в $(\Omega,\mathcal{B})$. Так, накладывая условие $u\in\Lambda\in\mathcal{U}'^t$ на первую точку пары (u,ζ), $u\in U$, $\zeta\in\Omega^b(u)$, мы определяем σ-алгебру $\mathcal{U}^t\subset\mathcal{B}$, являющуюся прообразом σ-алгебры $\mathcal{U}'^t$ (σ-алгебру в $(\Omega,\mathcal{B})$ мы обозначаем той же самой буквой, но без штриха).

Подобно тому, как в обозначениях предыдущего пункта $\mathcal{U}''^b$ совпадает с $\mathcal{U}'^b$, обозначим $\mathcal{A}'^b=\mathcal{A}''^b$. В пространстве $\Omega^b(u)$ σ-алгебрам $\mathcal{A}''^t(u_a^t)$ соответствуют σ-алгебры $\mathcal{A}'^t(u_a^t)\subset\mathcal{A}'^b(u)$. Это семейство является монотонным:

$$\mathcal{A}'^s(u_a^s)\subset\mathcal{A}'^t(u_a^t). \tag{8.2}$$

В комбинированном пространстве $\Omega = U \times \Omega^b(u)$ можно рассматривать семейство σ-алгебр $\mathscr{B}^t = \mathscr{U}'^t \times \mathscr{A}'^t(\mathscr{U}'^t)$. При помощи $\mathscr{U}^t (\subset \mathscr{B})$ последние можно записать: $\mathscr{B}^t = \mathscr{U}^t \mathscr{A}^t(\mathscr{U}^t)$. Вследствие (8.2) входящие сюда условные σ-алгебры являются монотонными: $\mathscr{A}^s(u_a^s) \subset \mathscr{A}^t(u_a^t)$, $s \leqslant t$.

Итак, в пространстве элементарных событий кроме монотонного семейства σ-алгебр управления $\mathscr{U}^t$ имеется монотонное семейство $\mathscr{B}^t$, $(\mathscr{B}^s \subset \mathscr{B}^t,\ s \leqslant t)$, причем

$$\mathscr{B}^t \supset \mathscr{U}^t,\ t \in T.$$

При каждом $t \in T$ задана вероятностная мера $\mathbf{P}(\Lambda \mid \mathscr{U}^t)$, $\Lambda \in \mathscr{A}^t(\mathscr{U}^t)$. Она является (при фиксированном Λ) $\mathscr{U}^t$-измеримой функцией точки $\omega \in \Omega$. Можно считать также, что мера $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathscr{U}^t)$ задана на $\mathscr{B}^t$. σ-алгебра $\mathscr{B}^t$ имеет смысл совокупности событий, вероятности которых уже определены управлением u_a^t.

Иногда по условиям задачи имеется последовательно протекающий случайный процесс $z = \{z_t,\ t \in T\}$. По аналогии с u для такого процесса можно ввести пространства и σ-алгебры Z^t, $Z_s^t(z_a^s)$, $\mathscr{Z}''^t$, $\mathscr{Z}'^t$, $\mathscr{Z}_s'^t(z_a^s)$ и т. д. (разница в обозначениях по сравнению с п. 1 здесь лишь в том, что буква u заменена на z). Обычно процесс $\{z_t\}$ таков, что его прошлое и настоящее является определенным в вероятностном смысле, если фиксировано прошлое и настоящее управление. В соответствии с введенными выше понятиями это коротко можно записать

$$\mathscr{Z}^t(u_a^t) \subset \mathscr{A}^t(u_a^t),\quad \mathscr{U}^t \mathscr{Z}^t(\mathscr{U}^t) \subset \mathscr{B}^t.$$

Мы не исключаем, следовательно, те случаи, когда фазовое пространство процесса z определяется управлением.

При фиксированном управлении $\overset{t}{u_a}$, естественно, определена мера на $\mathscr{Z}^t$, коль скоро задана мера $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathscr{U}^t)$ на $\mathscr{B}^t$.

3. *Наблюдаемый процесс.* В каждый момент времени t наблюдатель-оператор имеет в своем распоряжении некоторые наблюденные данные l^t, не убывающие с течением времени. Условия, наложенные на эти данные (для фиксированного момента t), определяют σ-алгебру в пространстве элементарных событий, которую мы обозначим $\mathscr{L}^t$. Наблюденные данные в момент t должны быть определены в вероятностном смысле управлением $\overset{t}{u_a}$, т. е.

$$\mathscr{L}^t \subset \mathscr{B}^t. \tag{8.3}$$

Будем предполагать, что наблюдатель-оператор помнит выбранное им предыдущее управление:

$$\mathscr{U}^t \subset \mathscr{L}^t.$$

Обозначим через $y^{\varphi(t)}$ те данные, которые и входят в l^t, но не содержатся в u_a^t. Соответствующую условную σ-алгебру обозначим $\mathcal{Y}^{\varphi(t)}(\mathcal{U}^t)$. Иначе говоря, $\mathcal{Y}^{\varphi(t)}(\mathcal{U}^t)$ есть σ-алгебра, определенная соотношением

$$\mathcal{L}^t = \mathcal{U}^t \mathcal{Y}^{\varphi(t)}(\mathcal{U}^t).$$

Очевидно, из (8.3) имеем

$$\mathcal{Y}^{\varphi(t)}(\mathcal{U}^t) \subset \mathcal{A}^t(\mathcal{U}^t). \tag{8.4}$$

Введенные выше «информационные» σ-алгебры обладают свойствами монотонности

$$\mathcal{L}^s \subset \mathcal{L}^t; \ \mathcal{Y}^{\varphi(s)}(u) \subset \mathcal{Y}^{\varphi(t)}(u) \text{ при } s < t \tag{8.5}$$

в соответствии с отмеченным ранее условием неубывания информации.

Удобно представлять себе, что наблюденные данные l^t складываются из последовательно выбираемого управления и некоторого последовательно наблюдаемого процесса $\{ y_t(\omega) \}$, $\omega \in \Omega$. При этом пусть в момент t известны значения этого процесса на интервале $[a, \varphi(t)]$, так что

$$l^t = (u_a^t, y_a^{\varphi(t)}).$$

Будем предполагать, что $\mathcal{Y}^t(\mathcal{U}^t) \subset \mathcal{A}^t(\mathcal{U}^t)$, где $\mathcal{Y}^t(\mathcal{U}^t)$ есть σ-алгебра, выделенная условиями, наложенными на y_a^t. Тогда условие (8.4) будет выполнено, если $\varphi(t) \leqslant t$. Чтобы выполнялось соотношение монотонности (8.5), функция $\varphi(t)$ должна быть неубывающей. Для удобства дальнейшего изложения будем предполагать ее непрерывной справа. *Функцию* $\varphi(t)$ *с описанными свойствами, определенную на* T *и принимающую значения из* T, *мы будем называть индексом решения.*

В большинстве задач с непрерывным временем можно полагать $\varphi(t) = t$.

Задача о выборе оптимального управления будет решаться методами обратной вероятности (формула Бейеса). При этом основную роль будет играть апостериорная вероятность $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{L}^t)$, соответствующая данным l^t в момент $t \in T$. Эту вероятность получаем из введенной ранее вероятности $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{U}^t)$, поскольку $\mathcal{L}^t \supset \mathcal{U}^t$.

4. *Решающие меры.* Основываясь на имеющихся у него данных, наблюдатель-оператор последовательно выбирает управление. Задача теории — указать оптимальный рецепт выбора этого управления. В общем случае этот рецепт носит вероятностный характер (рандомизированное решение), т. е. указываются лишь вероятности множеств процессов управления.

Назовем *решением* δ двухпараметрическое семейство условных вероятностных мер

$$\mu_s^t(\Lambda \mid \mathscr{L}^s),\ s < t;\ s,\ t \in T,$$

$$\text{т. е. мер } \mu_s^t(\Lambda \mid u_a^s,\ y_a^{\varphi(s)}) \equiv \mu_s^t(\Lambda \mid \mathscr{U}^s \mathscr{Y}^{\varphi(s)})$$

на σ-алгебре $\mathscr{U}_s^{"t}(\mathscr{U}^s)$ или (что эквивалентно) на σ-алгебре $\mathscr{U}_s^t(\mathscr{U}^s)$ или $\mathscr{U}^t$. Каждую меру семейства δ назовем *решающей мерой*.

Решающая мера $\mu_s^t(\Lambda \in \mathscr{U}_s^t \mid \mathscr{U}^s \mathscr{Y}^{\varphi(s)})$ в комбинации с мерой $\mathbf{P}(\Gamma \in \mathscr{B}^t \mid \mathscr{U}^t)$ определяет условную меру $\mathbf{Q}(\Gamma \mid \mathscr{L}^s)$ на σ-алгебре $\mathscr{B}^t \ni \Gamma$ согласно формуле

$$\mathbf{Q}(\Gamma \mid \mathscr{L}^s) = \int \mathbf{P}(\Gamma \mid \mathscr{L}^s \mathscr{U}_s^t(\mathscr{U}^s))\, \mu_s^t(d\omega \in \mathscr{U}_s^t(\mathscr{U}^s) \mid \mathscr{L}^s),\ \ s < t,$$

или при другом способе записи

$$\mathbf{Q}(\Gamma \mid \mathscr{L}^s) = \int \mathbf{P}(\Gamma \mid \mathscr{U}^t \mathscr{L}^s)\, \mu_s^t(d\omega \in \mathscr{U}_s^t \mid \mathscr{L}^s).$$

Решающие меры должны удовлетворять соотношениям согласованности

$$\mu_r^t(\Gamma_1\Gamma_2 \mid \mathscr{U}^r \mathscr{Y}^{\varphi(r)}) = \int\limits_{du_r^s \subset \Gamma_1} \mu_s^t(\Gamma_2 \mid \mathscr{U}^s \mathscr{Y}^{\varphi(s)})\, \mathbf{Q}(du_r^s\, dy_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} \mid \mathscr{U}^r \mathscr{Y}^{\varphi(r)}),$$

$$(\Gamma_1 \in \mathscr{U}_r^s,\ \Gamma_2 \in \mathscr{U}_s^t,\ \ r < s < t), \text{ или, короче,}$$

$$\mu_r^t(\Gamma \in \mathscr{U}^t \mid \mathscr{L}^r) = \int \mu_s^t(\Gamma \mid \mathscr{L}^s)\, \mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{L}^s \mid \mathscr{L}^r).$$

Решающие меры можно рассматривать как условные вероятности: $\mu_s^t(\Gamma \mid \mathscr{L}^s) = \mu(\Gamma \mid \mathscr{L}^s)$, $\Gamma \in \mathscr{U}^t$, образованные обычным способом из единой решающей меры $\mu(\Delta) = \mu_a^b(\Delta \mid \mathscr{U}^a)$, $\Delta \in \mathscr{U}^b$. Более того, все меры $\mu_s^t(\Gamma \in \mathscr{U}^t \mid \mathscr{L}^s)$, $\mathbf{P}(A \in \mathscr{B}^t \mid \mathscr{U}^t)$, $\mathbf{Q}(A \in \mathscr{B}^t \mid \mathscr{L}^s)$ можно рассматривать как условные вероятности, образованные из единой комбинированной вероятностной меры $\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{L}^a) \equiv \mathbf{Q}(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathscr{B}^b \equiv \mathscr{B}$ в соответствии с формулами

$$\mu_s^t(\Gamma \in \mathscr{U}^t \mid \mathscr{L}^s) = \mathbf{Q}(\Gamma \mid \mathscr{L}^s);\ \mathbf{P}(A \in \mathscr{B}^t \mid \mathscr{U}^t) = \mathbf{Q}(A \mid \mathscr{U}^t);$$

$$\mathbf{Q}(A \in \mathscr{B}^t \mid \mathscr{L}^s) = \mathbf{Q}(A \mid \mathscr{L}^s),\ s < t\ \ (\text{п. н. } \mathbf{Q}).$$

Решение δ определяет, следовательно, единую меру $\mathbf{Q}$ в пространстве $(\Omega, \mathscr{B})$, и наоборот.

5. *Функция штрафа и условные риски.* Качество решения определяется величиной *риска*. Под последним мы понимаем математическое ожидание *функции штрафа* $c(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Эта функция, которую мы предполагаем $\mathscr{B}$-измеримой и $\mathbf{Q}$-сум-

мируемой, задается в условии задачи. Поскольку мера $\mathbf{Q}$ определяется решением δ, то риск

$$R^{\delta} = \int c(\omega)\, \mathbf{Q}(d\omega) \tag{8.6}$$

является характеристикой решения δ. Наряду с указанным риском можно рассматривать условные риски

$$R^{\delta}(\mathscr{L}^t) \equiv R^{\delta}(\omega \mid \mathscr{L}^t) = \int c(\omega)\, \mathbf{Q}(d\omega \mid \mathscr{L}^t). \tag{8.7}$$

Эти риски образуют однопараметрическое семейство с условием согласования

$$R^{\delta}(\mathscr{L}^s) = \int R^{\delta}(\mathscr{L}^t)\, \mathbf{Q}(d\omega \mid \mathscr{L}^s),\ s < t.$$

Последний элемент семейства совпадает с (8.6): $R^{\delta}(\mathscr{L}^a) = R^{\delta}$, поскольку σ-алгебра $\mathscr{L}^a$ предполагается тривиальной.

§ 8.2. СЛУЧАЙ СТУПЕНЧАТОГО ИНДЕКСА. ОПТИМАЛЬНЫЕ УСЛОВНЫЕ РИСКИ

1. Предположим, что индекс $\varphi(t)$ является ступенчатой функцией с конечным числом скачков в точках $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N < b$. Следовательно,

$$\varphi(t) = \varphi_k \text{ при } t \in [t_k, t_{k+1}),\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$(\varphi_k \leqslant t_k;\ t_i < t_k \text{ при } i < k)$$

если обозначить $\varphi(t_k) = \varphi_k$.

В данном случае семейство δ решающих мер, а следовательно и мера $\mathbf{Q}$, полностью определяется конечной системой мер:

$$\mu_{t_k}^{t_{k+1}}(\Lambda \in \mathscr{U}^{t_{k+1}} \mid \mathscr{U}^{t_k}\mathscr{Y}^{\varphi_k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Покажем это. Используя $\mathbf{P}(\Lambda \in \mathscr{B}^b \mid \mathscr{U}^b)$, можно найти $\mathbf{P}(\Lambda \mid \mathscr{U}^b\mathscr{Y}^{\varphi_N})$. Принимая во внимание, кроме того, меру $\mu_{t_N}^b(\Gamma \mid \mathscr{U}^{t_N}\mathscr{Y}^{\varphi_N})$, можно вычислить меру

$$\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{U}^{t_N}\mathscr{Y}^{\varphi_N}) = \int \mathbf{P}(\Lambda \mid \mathscr{U}^b\mathscr{Y}^{\varphi_N})\, \mu_{t_N}^b(d\omega \in \mathscr{U}^b \mid \mathscr{U}^{t_N}\mathscr{Y}^{\varphi_N}),$$

$$\Lambda \in \mathscr{B}^b.$$

Далее, поскольку

$$\mathscr{U}^{t_N}\mathscr{Y}^{\varphi_N} \subset \mathscr{B}^{t_N},$$

можно определить $\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{U}^{t_N}\mathscr{Y}^{\varphi_{N-1}})$ при помощи интеграла

$$\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) = \int \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})\,\mathbf{P}(d\omega \in \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N} \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}). \tag{8.8}$$

В самом деле, мера $\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})$ уже определена, а $\mathbf{P}(d\omega \subset \mathcal{B}^{t_N} \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})$ задана в условии (п. 2, § 8.1).

Аналогично, используя решающую меру $\mu_{t_{N-1}}^{t_N}(\Gamma \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})$, вычисляем

$$\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) = \int \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})\,\mu_{t_{N-1}}^{t_N}(d\omega \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}). \tag{8.9}$$

Продолжая описанный процесс интегрирования попеременно с весом $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$ и с весом $\mu_{t_k}^{t_{k+1}}(\cdot \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$, определяем различные меры $\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$, $\Lambda \in \mathcal{B}$. Последней будет вычислена единая комбинированная мера $\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathcal{L}^a) = \mathbf{Q}(\Lambda)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для нее справедливы все утверждения п. 4 § 8.1.

Принимая во внимание формулы типа (8.8), (8.9), получаем, что условные риски (8.7) удовлетворяют в данном случае рекуррентным соотношениям

$$R^\delta(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \int R^\delta(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}})\,\mathbf{P}(d\omega \mid \mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}); \tag{8.10}$$

$$R^\delta(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \int R^\delta(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k})\,\mu_{t_k}^{t_{k+1}}(d\omega \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}). \tag{8.11}$$

В этих соотношениях роль «начального» условия играет функция $R^\delta(\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi(b)})$, а заключительная функция $R^\delta(\mathcal{U}^a\mathcal{Y}^{\varphi(a)})$ совпадает с риском (8.6).

2. Введем в рассмотрение *оптимальные условные риски* $R(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$. Пусть они определяются аналогичными рекуррентными соотношениями (8.10), (8.11) с тем же самым «начальным» условием, но в отличие от предыдущих рекуррентных соотношений усреднение (8.11) с весом $\mu_{t_k}^{t_{k+1}}(\cdot \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$ заменяется на условную минимизацию:

$$R(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \inf_{\omega \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} R(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}). \tag{8.12}$$

Условный минимум

$$\inf_{\omega \mid \mathcal{F}_1} f(\omega)$$

$\mathcal{F}_2$-измеримой функции $f(\omega)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ как определено в *Приложении* 2, есть $\mathcal{F}_1$-измеримая функция, удовлетворяющая условиям П. 2. 1. А—Б. В *Приложении* 2 доказано, что условный минимум обладает следующим свойством (теорема П. 2. 3): при любой вероятностной мере $\mu(\Lambda\in\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1)$ (определенной на $\mathcal{F}_2\times\Omega$ и $\mathcal{F}_1$-измеримой по второму аргументу) выполняется неравенство

$$\inf_{\omega|\mathcal{F}_1} f(\omega)\leqslant\int f(\omega)\,\mu(d\omega|\mathcal{F}_1).$$

Сравнение преобразований (8.11) и (8.12) на каждом этапе рекуррентных преобразований в силу этого показывает, что преобразованию (8.12) соответствует меньшая (точнее, не большая) результирующая функция. При сравнении функций на заключительном этапе преобразований имеем $R^\delta\geqslant R$.

Таким образом, мы получили следующий результат:

Теорема 8.1. *Оптимальные риски не превосходят рисков любого решения* δ, *имеющего тот же ступенчатый индекс* $\varphi(t)$:

$$R(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})\leqslant R^\delta(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N.$$

В следующей теореме сравниваются оптимальные риски, соответствующие различным ступенчатым индексам.

Теорема 8.2. *Оптимальный риск* R_φ *для ступенчатого индекса* $\varphi(t)$ *не превосходит оптимального риска, соответствующего не большему ступенчатому индексу* $\varphi'(t)\leqslant\varphi(t)$.

Доказательство. От любой ступенчатой функции с конечным числом ступенек можно перейти к другой ступенчатой функции через конечную последовательность ступенчатых функций, в которой соседние функции различаются лишь одной ступенькой. Поэтому достаточно доказать теорему 8.2 для функции $\varphi(\cdot)$, имеющей по сравнению с $\varphi'(\cdot)$ одну лишнюю ступеньку, причем остальные ступеньки совпадают. Положим, например, $\varphi'(t)=\varphi(t)$ при $t<t_k$ и $t>t_{k+1}$, а также $\varphi(t)=\varphi_k$, $\varphi'(t)=\varphi'_k<\varphi_k$ при $t_k<t<t_{k+1}$.

Согласно (8.10), (8.12) для $\varphi(t)$ имеем

$$R_\varphi(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k})=\int[\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)]\,\mathbf{P}(d\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}).$$

Для $\varphi'(t)$ в то же время

$$R_{\varphi'}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k})=\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}}\int g(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega|\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}),$$

где

$$g(\omega)=R_\varphi(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k})=R_{\varphi'}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}).$$

Поскольку

$$\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)\leqslant g(\omega)$$

(см. теорему П.2.2), то, очевидно,

$$\mathbf{M}\Big[\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\Big] \leqslant \mathbf{M}\big[g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\big]. \qquad (8.13)$$

Выражение в левой части совпадает с $\mathbf{M}\Big[\inf\limits_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\Big]$ вследствие $\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}$-измеримости функции $\inf\limits_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)$.

Взяв условную нижнюю грань по $\omega\,|\,\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}$ от (8.13), получаем

$$\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}} \mathbf{M}\Big[\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\Big] \leqslant \inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}} \mathbf{M}\big[g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\big].$$

Повторная минимизация в левой части излишня, поскольку подлежащая минимизации функция уже $\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}$-измерима. Итак,

$$\mathbf{M}\Big[\inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\Big] \leqslant \inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}} \mathbf{M}\big[g(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}\big],$$

т. е.

$$R_{\varphi}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}) \leqslant R_{\varphi'}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi'_k}).$$

Дальнейшие рекуррентные преобразования для обоих индексов совпадают вследствие совпадения $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ при $t<t_k$. Поэтому выведенное неравенство сохраняется при всех $t_i<t_k$, включая $t_0=a$. Доказательство закончено.

Комбинируя теоремы 8.1 и 8.2, легко получить, что *оптимальный риск для ступенчатого индекса $\varphi(t)$ не превосходит риска любого решения, соответствующего непревосходящему ступенчатому индексу $\varphi'(t)\leqslant\varphi(t)$.*

3. Перейдем к рассмотрению рисков для непрерывного индекса. Чтобы определить их, будем рассматривать последовательность ступенчатых индексов $\{\varphi^N(t)\}$, всюду сходящихся к $\varphi(t)$ при $N\to\infty$. Для ступенчатого индекса можно использовать данные выше определения. Если существует предел соответствующих рисков при $N\to\infty$, то его примем за определение риска в случае непрерывного индекса.

Определение 8.2. *Пусть некоторая последовательность ступенчатых индексов $\{\varphi^N(t)\}$ сходится к $\varphi(t)$ снизу и пусть каждому N соответствует решение δ^N, причем $\delta^N\to\delta$ при $N\to\infty$, т. е. $\mu_{t_k}^{t_l}(\,\cdot\,|\mathcal{L}^{t_k})\to\mu_s^t(\,\cdot\,|\mathcal{L}^s)$ при $N\to\infty$, $t_k\to s$, $t_l\to t$. Тогда, если $\lim\limits_{N\to\infty,\,t_k\to t} R^{\delta^N}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi^N(t_k)}) = R^{\delta}(\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t)})$, то решение δ называется регулярным.*

В этом определении подразумевается существование хотя бы одной специальной последовательности допредельных индексов φ^N и решений δ^N.

Определим также оптимальные риски для непрерывного индекса. Пусть $S_N=\{\tau_1, ..., \tau_N\}$ множество точек из T. Располагая эти точки в порядке неубывания ($t_i=\tau_{k_i}$, $t_i<t_j$ при $i<j$), получаем некоторое разбиение интервала T. Для этого разбиения образуем аппроксимацию $\varphi(S_N)$ индекса φ. Именно, положим

$$\varphi(t, S_N)=\varphi(t_i) \text{ при } t_i\leqslant t<t_{i+1}.$$

Очевидно, что при таком определении $\varphi(t, S_N)\leqslant\varphi(t)$, а также $\varphi(t, S')\leqslant\varphi(t, S'')$, если $S'\subset S''$.

Определение 8.3. *Пусть $R_{\varphi(S_N)}$ — оптимальный риск аппроксимации $\varphi(S_N)$. Оптимальный риск непрерывного индекса $\varphi(t)$ определяем как нижнюю грань*

$$R_\varphi=\inf_{N, S_N} R_{\varphi(S_N)} \tag{8.14}$$

по всевозможным конечным разбиениям интервала T.

Теорема 8.3. *Существует такая последовательность S (назовем ее последовательностью определения риска), что*

$$R_\varphi=\lim_{N\to\infty} R_{\varphi(S_N)}, \tag{8.15}$$

где S_N — множество из N первых элементов последовательности S.

Докажем теорему в том наиболее интересном случае, когда нижняя грань (8.14) конечна. Согласно (8.14) при любом $\varepsilon_1>0$ существует множество S^1, такое, что

$$R_{\varphi(S^1)}-R_\varphi<\varepsilon_1.$$

Взяв далее $\varepsilon_2=\varepsilon_1/2$, аналогично аргументируем существование такого множества S^2, что $R_{\varphi(S^2)}-R_\varphi<\varepsilon_2$. Подобные множества можно указать и для $\varepsilon_3=\varepsilon_1/4$ и т. д. Если образовать последовательность $S=(S^1, S^2, ...)$, то в соответствии с теоремой 8.2 будем иметь

$$R_{\varphi(S^k)}\geqslant R_{\varphi(S^1,..., S^k)}\ (\geqslant R_\varphi).$$

Следовательно, из сходимости $R_{\varphi(S^k)}\to R_\varphi$ вытекает сходимость $R_{\varphi(S^1,...,S^k)}\to R_\varphi$ при $k\to\infty$. Доказательство закончено.

В соответствии с теоремой 8.2 последовательность определения риска S останется такой же, если в любом месте к ней присоединить любые точки из T.

Наряду с риском (8.15) можно определить условные оптимальные риски

$$R_\varphi(\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t)})=\lim_{N\to\infty}(R_{\varphi(S_N)}(\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t,S_N)}),$$

где аппроксимация $\varphi(t, S_N)$ та же, что и в теореме 8.3.

Предел всегда существует вследствие монотонной зависимости риска в правой части от N (теорема 8.2).

Обычно последовательностью определения риска является всякое множество, включающее точки скачков индекса и всюду плотное на участках непрерывного возрастания (см. § 8.4).

4. Продолжим сравнение рисков для различных индексов, начатое в п. 2.

Теорема 8.4. *Оптимальный риск R_φ для любого индекса $\varphi(t)$ не больше риска любого решения (оптимального или неоптимального), соответствующего непревосходящему ступенчатому индексу $\varphi'(t) \leqslant \varphi(t)$.*

Эта теорема является следствием теорем 8.1 и 8.2, а также определения 8.3 (если индекс $\varphi(t)$ не ступенчатый).

В следующей теореме в число сравниваемых индексов включаются также неступенчатые индексы $\varphi'(t)$ $(\leqslant \varphi(t))$.

Теорема 8.5. *Оптимальный риск R_φ для индекса $\varphi(t)$ не превосходит любого другого риска регулярного решения, соответствующего любому не большему индексу $\varphi'(t) \leqslant \varphi(t)$.*

Эта теорема включает в себя как частные случаи теоремы 8.1, 8.2, 8.4. Новое утверждение относится к тому случаю, когда индекс $\varphi'(t)$ не является ступенчатым.

Пусть $R_{\varphi'}$ — оптимальный риск для индекса $\varphi'(t)$. Используя определение 8.3 и теорему 8.3, возьмем множество S' определения риска $R_{\varphi'}$. Очевидно, что для каждого $S'_N \subset S'$ вследствие условия $\varphi'(t) \leqslant \varphi(t)$ будем иметь

$$\varphi'(t, S'_N) \leqslant \varphi(t, S'_N).$$

Применяя теорему 8.2, получаем

$$R_{\varphi(S'_N)} \leqslant R_{\varphi'(S'_N)}.$$

Но левая часть не превосходит $\inf\limits_{S_N} R_{\varphi(S_N)} = R_\varphi$, следовательно,

$$R_\varphi \leqslant R_{\varphi'(S'_N)}.$$

Переходя к пределу $N \to \infty$, получаем $R_\varphi \leqslant R_{\varphi'}$.

Рассмотрим теперь неоптимальный риск $R^\delta_{\varphi'}$ для индекса φ'. Примем во внимание определение 8.2. В соответствии с теоремой 8.1 и 8.2 имеем

$$R_{\varphi'(S_N)} \leqslant R_{\varphi' N} \leqslant R^{\delta^N}_{\varphi' N},$$

где S_N—точки скачков допредельного индекса $\varphi'^N(t)$ $(\leqslant \varphi'(t))$, фигурирующего в определении 8.2 (следовательно, $\varphi'^N(t) \leqslant \varphi'(t, S_N)$). Переходя к пределу $N \to \infty$ и учитывая также определение 8.3, получаем $R_{\varphi'} \leqslant R^\delta_{\varphi'}$. Но, как уже доказано, $R_\varphi \leqslant R_{\varphi'}$. Следовательно, $R_\varphi \leqslant R^\delta_{\varphi'}$, что завершает доказательство теоремы 8.5.

Согласно вышеизложенному, оптимальное решение является наилучшим среди всех регулярных решений не большего индекса.

1. В предыдущем параграфе при рассмотрении оптимальных рисков $R_\varphi(\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t)})$ ничего не говорилось о решениях, которым эти риски соответствуют. Если существует решение, риск которого совпадает с оптимальным риском, то такое решение естественно назвать *оптимальным*.

Проведенное ранее рассмотрение показывает, что всегда существуют оптимальные риски. Возникает вопрос, всегда ли существует оптимальное решение. Утвердительного ответа на этот вопрос в общем случае, по-видимому, дать нельзя. Для доказательства существования в точности оптимального решения требуются некоторые ограничения, например, предположения топологического характера.

Проще (не требует дополнительных предположений) доказательство существования решений, сколь угодно близких к оптимальности, риски которых сколь угодно близки к R_φ.

Рассмотрим сначала случай скачкообразного индекса $\varphi^N(t)$, имеющего N скачков, и сконструируем для него решение δ_ε, риск $R^{\delta_\varepsilon}_{\varphi N}$ которого отличается от оптимального R_{φ^N} меньше чем на ε ($\varepsilon>0$ произвольно). Вычисление оптимального риска R_{φ^N} производится при помощи рекуррентных соотношений (8.10), (8.12), причем $N+1$ раз приходится производить условную минимизацию (8.12). Первый раз вычисляется условный минимум

$$R_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) = \inf_{\omega|\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}} R_{\varphi^N}(\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N}).$$

Как показано в приложении (теорема П.2.4), при произвольном $\varepsilon_0\left(=\dfrac{\varepsilon}{N+1}\right)$ для каждой точки ω можно указать такую точку $\omega^*(\omega)$, что

$$R_{\varphi^N}(\omega^*(\omega)\,|\,\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N}) - R_{\varphi^N}(\omega\,|\,\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) < \varepsilon_0.$$

Пусть Γ_ω есть множество

$$\Gamma_\omega = \{\omega' \colon u^b_{t_N}(\omega') = u^b_{t_N}(\omega^*(\omega))\} \in \mathcal{U}^b_{t_N}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}),$$

а $\mu^b_{t_N}(\Gamma \in \mathcal{U}^b_{t_N}\,|\,\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})$ — мера, сосредоточенная на этом множестве. Тогда, очевидно,

$$R_{\varphi^N}(\omega^*(\omega)\,|\,\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N}) = \int R_{\varphi^N}(\omega'\,|\,\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N})\,\mu^b_{t_N}(d\omega'\,|\,\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}),$$

т. е. $R_{\varphi^N}(\omega^*\,|\,\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N})$ есть условный риск $R^{\delta}_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})$, соответствующий решающей мере $\mu^b_{t_N}$. Итак, сконструирована решающая мера $\mu^{b}_{t_N}(\Gamma \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})$, которая дает условный риск, отличающийся от оптимального меньше чем на $\frac{\varepsilon}{N+1}$.

В соответствии с (8.10) произведем условное усреднение $\mathbf{M}[\cdot \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}]$ этих рисков и на следующем этапе будем искать условный минимум

$$\inf_{\omega \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}} R^{\delta}_{\varphi^N}(\omega \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) =$$

$$= \inf_{\omega \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}} R_{\varphi^N}(\omega \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) + O\left(\frac{\varepsilon}{N+1}\right). \qquad (8.16)$$

Теорема П.2.4 гарантирует существование такой точки $\omega^*(\omega)$, что

$$R_{\varphi^N}(\omega^*(\omega) \mid \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) - R_{\varphi^N}(\omega \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) < \frac{\varepsilon}{N+1}. \qquad (8.17)$$

В качестве решающей меры $\mu^{t_N}_{t_{N-1}}(\Gamma \in \mathcal{U}^{t_N}_{t_{N-1}} \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})$ возьмем меру, сосредоточенную на множестве

$$\Gamma_\omega = \{\omega' : u^{t_N}_{t_{N-1}}(\omega') = u^{t_N}_{t_{N-1}}(\omega^*(\omega))\} \in \mathcal{U}^{t_N}_{t_{N-1}}(\mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}).$$

Тогда в соответствии с (8.16), (8.17) решающим мерам $\mu^{t_N}_{t_{N-1}}$, $\mu^{b}_{t_N}$ будет соответствовать условный риск, отличающийся от оптимального меньше, чем на $2\varepsilon/(N+1)$.

Продолжая описанный процесс, используя теорему П.2.5, сконструируем решающие меры $\mu^{t_1}_{a}$, $\mu^{t_2}_{t_1}$, ... $\mu^{b}_{t_N}$. Каждая из них соответствует приблизительной (с точностью до $\varepsilon/(N+1)$) минимизации оптимального условного риска. Риск этого решения в итоге будет отличаться от оптимального риска не больше, чем на ε. Это доказывает существование решения, сколь угодно близкого к оптимальности в случае скачкообразного индекса.

При произвольном индексе $\varphi(t)$ можно рассмотреть его скачкообразную аппроксимацию $\varphi^N(t) \leqslant \varphi(t)$, такую, что $R_{\varphi^N} - R_\varphi > \frac{\varepsilon_1}{2}$. Затем, используя предыдущее рассуждение, следует подобрать решение δ, для которого $R^{\delta}_{\varphi^N} - R_{\varphi^N} < \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon$.

В итоге $R^{\delta}_{\varphi^N}$ будет отличаться от R_φ не больше, чем на ε_1. Это доказывает утверждение в случае произвольного индекса.

Итак, доказательство существования решения, сколь угодно близкого к оптимальности, сводится к использованию теоремы П.2.5 (*Приложение* 2) на каждом этапе.

2. Построенные в предыдущем пункте решения, близкие к оптимальному, имеют не обязательно рандомизированный характер. Рассмотрим теперь рандомизированные решения. Для этого удобно ввести новое понятие — меру ν в пространстве $(\Omega, \mathcal{U}^b)$, помогающую производить рандомизацию. Поэтому будем называть ее *фундаментом рандомизации*. В отличие от теории, изложенной в предыдущем пункте, данное рассмотрение будем называть *вариантом II*.

Комбинируя меру $\nu(\Lambda)$, заданную на $\mathcal{U}^b \ni \Lambda$, с мерой $\mathbf{P}(\Gamma \in \mathscr{B} \mid \mathcal{U}^b)$, можно получить меру (обозначим ее также ν) в измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{B})$ согласно формуле

$$\nu(\Gamma) = \int \mathbf{P}(\Gamma \mid \mathcal{U}^b)\, \nu(d\omega \in \mathcal{U}^b), \quad \Gamma \in \mathscr{B}.$$

Теория выигрывает в некоторых отношениях, если при ее изложении систематически использовать существование меры ν в пространстве $(\Omega, \mathscr{B})$, заданной условиями задачи. Ряд понятий, определенных выше, при этом следует подвергнуть естественной модификации. Так, можно считать, что вероятностные меры $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{U}^t)$ являются определенными и $\mathcal{U}^t$-измеримыми почти всюду (с точностью до ν-нулевых множеств). Также и решающие меры $\mu_s^t(\cdot \mid \mathscr{L}^t)$ можно считать определенными с точностью до ν-эквивалентности. Далее, условный минимум в формулах (8.12), (8.13) и др. естественно заменить на существенный минимум (относительно ν) (см. *Приложение* 2, *вариант* II). Так, (8.12) примет вид

$$R(\omega \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \underset{\omega \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}}{\operatorname{vrai\,inf}}\; R(\omega \mid \mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}).$$

Важно, что в варианте II при соответствующей модификации (при замене равенств «всюду» на равенства «почти всюду» относительно ν) сохраняют свою справедливость все результаты, изложенные выше (§ 8.2).

В новом варианте теории также можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего пункта, и доказать существование ε-оптимального решения. В дополнение к этому теперь удобно рассматривать одно конкретное специальное рандомизированное ε-оптимальное решение, которое будет указано ниже.

При доказательстве теоремы П.2.5 указывалось, что существует непустое множество

$$A_k = \{\omega : \inf_{\omega \mid \mathscr{F}_1} f(\omega) \in [c_k, c_{k+1})\} \cap \{\omega : f(\omega) \in [c_k, c_{k+1})\} \in \mathscr{F}_2,$$

если $\Gamma_k = \{\omega : \inf\limits_{\omega|\mathcal{F}_1} f(\omega) \in [c_k, c_{k+1})\}$ непусто $(c_{k+1} - c_k < \varepsilon)$. Фиксация любой вероятностной меры, сосредоточенной на A_k, дает ε-оптимальную решающую меру. Конкретный выбор этой меры, однако, не указывается. В новом варианте гарантируется, что аналогичное множество имеет ненулевую меру:

$$\nu(A_k) > 0, \quad \text{если} \quad \nu(\Gamma_k) > 0$$

$$(A_k = \{\omega : f(\omega) \in [c_k, c_{k+1}), \ \underset{\omega|\mathcal{F}_1}{\operatorname{vrai\,inf}} f(\omega) \in [c_k, c_{k+1})\}).$$

Поэтому в качестве решающей меры $\mu(\Lambda \in \mathcal{F}_2 | \mathcal{F}_1)$ теперь можно выбрать меру:

$$\mu(\Lambda | \mathcal{F}_1) = \mu(\Lambda | \sigma(\ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots)) = \frac{\nu(\Lambda A_k)}{\nu(A_k)} = \nu(\Lambda | A_k)$$

$$\text{при } \omega \in \Gamma_k.$$

Очевидно, что данная специальная мера относится к числу подходящих мер, так как

$$0 \leqslant \int f(\omega') \mu(d\omega' | \mathcal{F}_1) - \underset{\omega'|\mathcal{F}_1}{\operatorname{vrai\,inf}} f(\omega') < \varepsilon$$

в соответствии с теоремами П.2.8 и П.2.9.

Подобный специальный выбор следует произвести на каждом этапе рекуррентных преобразований.

Пусть индекс $\varphi(t)$ ступенчатый со скачками в точках $a = t_0 < t_1 < \ldots, < t_N$ и пусть точки c_j, $j = \ldots, 1, 2, \ldots$ $(c_{j+1} > c_j)$ осуществляют ε_0-разбиение действительной оси $\left(\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{N+1}\right)$. Согласно сказанному выше выбираем следующую решающую меру:

$$\mu^b_{t_N}(\Lambda \in \mathcal{U}^b_{t_N} | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) = \frac{\nu(\Lambda A^N_{k(\omega)} | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})}{\nu(A^N_{k(\omega)} | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N})} = \nu(\Lambda | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N} A^N_{k(\omega)}).$$

Здесь

$$A^N_k = \{\omega : R(\mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N}) \in [c_k, c_{k+1})\} \cap \{\omega : R(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) \in [c_k, c_{k+1})\}.$$

Далее, $k(\omega) = k^N(\omega) = \{k : R(\omega | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) \in [c_k, c_{k+1})\}$.

Легко видеть, что в силу теорем П.2.8, П.2.9 для указанной решающей меры

$$0 \leqslant R^{\delta}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) - R(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) < \varepsilon_0$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant R^{\delta}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) - R(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) < \varepsilon_0. \qquad (8.18)$$

Перейдем к следующему этапу рекуррентных преобразований. Положим

$$\mu_{t_{N-1}}^{t_N}(\Lambda \in \mathcal{U}_{t_{N-1}}^{t_N} \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) = \nu(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}, \ A_{k(\omega)}^{N-1}),$$

где, как и раньше,

$$k(\omega) = k^{N-1}(\omega) = \{k : R(\mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) \in [c_k, c_{k+1})\};$$

$$A_k^{N-1} = \{\omega : R(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) \in [c_k, c_{k+1})\} \cap$$

$$\cap \{\omega : R(\mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) \in [c_k\, c_{k+1})\}.$$

Поскольку

$$0 \leqslant \int R(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})\, \mu_{t_{N-1}}^{t_N}(d\omega \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) - R(\mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) < \varepsilon_0,$$

то в силу (8.18)

$$0 \leqslant \int R^{\delta}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})\, \mu_{t_{N-1}}^{t_N}(d\omega \mid \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) -$$
$$- R(\mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) < 2\varepsilon_0.$$

Продолжая описанный процесс, получим решение δ, образованное решающими мерами

$$\mu_{t_i}^{t_{i+1}}(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_i}\mathcal{Y}^{\varphi_i}) = \nu(\Lambda \mid \mathcal{U}^{t_i}\mathcal{Y}^{\varphi_i}, A_{k(\omega)}^i),$$

$$A_k^i = \{\omega : R(\mathcal{U}^{t_{i+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_i}) \in [c_k, c_{k+1})\} \cap \{\omega : R(\mathcal{U}^{t_i}\mathcal{Y}^{\varphi_i}) \in [c_k\, c_{k+1})\},$$
$$i = 0, 1, \ldots, N.$$

Легко понять, что для этого решения

$$0 \leqslant R^{\delta} - R < (N+1)\varepsilon_0 = \varepsilon,$$

т. е. оно является ε-оптимальным.

Нетрудно построить также ε-оптимальное решение для неступенчатого индекса, рассматривая его ступенчатую аппроксимацию φ^N. При этом, чтобы получить в точности оптимальное решение, следует совершить двойной предельный переход $N\to\infty$, $\varepsilon\to 0$.

§ 8.4. ПОЛУГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ РЕШЕНИЮ. РЕГУЛЯРНОСТЬ

1. Решающие меры $\mu_s^t(\Lambda \mid \mathcal{U}^s\mathcal{Y}^{\varphi(s)})$ определяют полугруппу преобразований T_{st} в подпространствах G_t банахового пространства $G_b\mathcal{L}^b$-измеримых ω-функций. Банахово пространство G_b определено при помощи естественных линейных операций и нормы

$$\|f\| = \inf_{\omega} f(\omega), \quad f \in G_b \tag{8.19}$$

в варианте I и

$$\|f\| = \operatorname{vrai} \inf_{\omega} f(\omega) \quad (\text{относительно } \nu) \tag{8.20}$$

в варианте II. Подпространства $G_t (\subset G_b)$, определенные как множества $\mathcal{L}^t$-измеримых функций, сами образуют банаховы пространства.

Для фиксированного индекса φ и решения δ преобразование T_{st} определяется формулой

$$T_{st}f = \int f(\omega)\,\mathbf{Q}\,(d\omega \in \mathcal{U}^t\,\mathcal{Y}^{\varphi(t)} \mid \mathcal{U}^s\mathcal{Y}^{\varphi(s)}) \in G_s, \; f \in G_t. \tag{8.21}$$

Это преобразование можно рассматривать как условное математическое ожидание

$$T_{st}f(\omega) = \mathbf{M}_{\mathrm{Q}}\,[f(\omega) \mid \mathcal{U}^s\mathcal{Y}^{\varphi(s)}], \tag{8.22}$$

соответствующее единой мере $\mathbf{Q}(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathcal{B}$ (см. пункт 4 § 8.1). Взяв известную формулу П.1.А (*Приложение* 1) для повторного математического ожидания

$$\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}\,[f \mid \mathcal{U}^r\mathcal{Y}^{\varphi(r)}] = \mathbf{M}_{\mathrm{Q}}\,\{\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}\,[f \mid \mathcal{U}^s\mathcal{Y}^{\varphi(s)}] \mid \mathcal{U}^r\mathcal{Y}^{\varphi(r)}\},$$

где

$$r < s < t, \; f \in G_t, \; \mathbf{M}_{\mathrm{Q}}\,[f \mid \mathcal{U}^s\mathcal{Y}^{\varphi(s)}] \in G_s,$$

согласно (8.22) получаем

$$T_{rt}f = T_{rs}T_{st}f \in G_r \tag{8.23}$$

$$(f \in G_t, \; T_{st}f \in G_s).$$

При помощи преобразования (8.21) легко записать рекуррентные формулы для условных рисков:

$$R^{\delta}(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}) = T_{st}R^{\delta}(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)});$$

$$R^{\delta} = T_{at}R^{\delta}(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)}) = T_{ab}R^{\delta}(\mathcal{U}^{b}\mathcal{Y}^{\varphi(b)}).$$

2. Ограничимся теперь рассмотрением оптимальных и близких к ним решений. Будем предполагать, что индекс $\varphi(t)$ имеет ограниченную производную по t во всех точках интервала T, кроме (самое большее) конечного числа точек («точек недифференцируемости»).

Определение 8.4. *Назовем управляемый процесс регулярным, если любое всюду плотное в T счетное множество Σ, содержащее точки недифференцируемости индекса, является множеством определения оптимального риска, т. е., если*

$$\lim_{N\to\infty} R_{\varphi(\Sigma_N)} = R_{\varphi}. \tag{8.24}$$

Процесс называется регулярным на интервале $[s, b]$, если

$$\lim_{N\to\infty} R_{\varphi(\Sigma_N)}(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s,\Sigma_N)}) = R_{\varphi}(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}).$$

Рассмотрим признаки регулярности, которые удобно проверять при исследовании конкретных задач. Пусть

8.4.А. *для любого интервала $[s, t]$, не содержащего точек недифференцируемости индекса и для любого $\tau \in (s, t)$ справедливо соотношение*

$$\min_{\omega|\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}} \mathbf{M}_{\mathbf{P}}[R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)}) \mid \mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}] -$$

$$-\min_{\omega|\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}} \mathbf{M}_{\mathbf{P}}\{\min_{\omega|\mathcal{U}^{\tau}\mathcal{Y}^{\varphi(\tau)}} \mathbf{M}_{\mathbf{P}}[R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)}) \mid \mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(\tau)}] \mid \mathcal{U}^{\tau}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}\} =$$

$$= (t-s)\,o(1). \tag{8.25}$$

Вместо этого условия, удобно проверять несколько более сильное условие инфинитезимальной коммутативности двух операций: минимизации и усреднения —

8.4.Б. *для любого интервала $[t-\Delta, t]$ указанного типа и всякого $\varphi' = \varphi(t-\Delta) - c\Delta$ $(0 < c < \infty)$ справедливо равенство*

$$\min_{\omega|\mathcal{U}^{t-\Delta}\mathcal{Y}^{\varphi'}} \mathbf{M}[R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}) \mid \mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi'}] -$$

$$-\mathbf{M}[\min_{\omega|\mathcal{U}^{t-\Delta}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}} R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}) \mid \mathcal{U}^{t-\Delta}\mathcal{Y}^{\varphi'}] = o(1)\,\Delta, \tag{8.26}$$

где

$$R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}) = \mathbf{M}[R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)}) \mid \mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}],$$

есть $\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}$-измеримая функция.

Оценка $o(1)$ ($\to 0$ при $t-s\to 0$, $\Delta\to 0$) в приведенных равенствах предполагается равномерной по всем t и ω. Под min в них (а также в дальнейших формулах) следует понимать inf в случае варианта I и vrai inf в случае варианта II.

Нетрудно проверить, что 8.4.А вытекает из 8.4.Б. Для этого нужно положить

$$\tau = t - \Delta; \quad \varphi' = \varphi(s).$$

Чтобы получить (8.25), остается произвести условную минимизацию по $u_s^\tau | \mathcal{U}^s \mathcal{Y}^{\varphi(s)}$ выражений, входящих в (8.26). Поскольку эта минимизация является непрерывной операцией относительно метрики (8.19) (или соответственно (8.20)), то оценка $o(1)\Delta = o(1)(t-s)$ не изменяется, и (8.25) оказывается выполненным.

Указанные условия удобны в том отношении, что в них не используются понятия оптимального решения, и, следовательно, их можно проверять до того, как найдены решения. Следующая теорема утверждает, что они действительно являются признаками регулярности.

Теорема 8.6. Из 8.4.А *вытекает регулярность процесса.*

Доказательство достаточно провести в предположении, что индекс имеет конечную производную на всем интервале T (в противном случае аналогичное рассмотрение проводится для каждого интервала дифференцируемости индекса последовательно, начиная с самого правого интервала).

Пусть Σ — произвольная всюду плотная в T последовательность точек, а S — последовательность определения оптимального риска (теорема 8.3); Σ_N, S_N — множества их N первых элементов.

Оптимальный риск $R_{\varphi(\Sigma_N)}$ ступенчатого индекса вследствие монотонности (невозрастания) при $N \to \infty$ имеет предел, который мы обозначим $\widetilde{R}_\varphi$. Из определения 8.3 оптимального риска R_φ имеем

$$\widetilde{R}_\varphi \geqslant R_\varphi. \tag{8.27}$$

Требуется доказать, что

$$\widetilde{R}_\varphi = R_\varphi. \tag{8.28}$$

Без ограничения общности можно считать, что в последовательности S каждая точка встречается только один раз. Обозначим через Δ_N (>0) длину минимального элементарного интервала разбиения, производимого множеством S_N, и возьмем $\Delta < \Delta_N$. Выберем теперь конечную совокупность Σ_Δ точек из Σ, дающих Δ-разбиение интервала T (это можно сделать, поскольку Σ всюду плотно). Разбиение $\Sigma_\Delta \cup S_N$ очевидно, будет отличаться от Σ_Δ тем, что некоторые элементарные интервалы разбиения Σ_Δ будут разделены на две части точкой (τ) из S_N. По теореме 8.2 имеем

$$R_{\varphi(S_N)} \geqslant R_{\varphi(\Sigma_\Delta, S_N)} \ (\geqslant R_\varphi). \tag{8.29}$$

В то же время из (8.25) можно вывести, что

$$0 \leqslant R_{\varphi(\Sigma_\Delta)} - R_{\varphi(\Sigma_\Delta, S_N)} \leqslant (b-a)\, o(1). \tag{8.30}$$

В самом деле, для каждого элементарного интервала $[t_k, t_{k+1}) \ni \tau$ разбиения Σ_Δ, который разделен точкой $\tau \in S_N$, согласно (8.25) имеем

$$R_{\varphi(\Sigma_\Delta)}(\mathcal{U}^\tau \mathcal{Y}^{\varphi(t_k)}) - R_{\varphi(\Sigma_\Delta \cup \tau)}(\mathcal{U}^\tau \mathcal{Y}^{\varphi(t_k)}) = (t_{k+1} - t_k)\, o(1).$$

Эта оценка разности не меняется при последующих усреднениях и минимизациях. Суммируя подобные разности, обусловленные различными точками из $S_N = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$, получаем

$$R_{\varphi(\Sigma_\Delta)} - R_{\varphi(\Sigma_\Delta, S_N)} = \sum_{i=1}^{N} [R_{\varphi(\Sigma_\Delta \tau_1, \dots, \tau_{i-1})} - R_{\varphi(\Sigma_\Delta, \tau_1, \dots, \tau_i)}] \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)\, o(1).$$

Сопоставляя (8.29) и (8.30), находим

$$|R_{\varphi(S_N)} - R_{\varphi(\Sigma_\Delta)}| \leqslant R_{\varphi(S_N)} - R_\varphi + (b-a)\, o(1).$$

Уменьшением Δ и увеличением N разность $|R_{\varphi(S_N)} - R_{\varphi(\Sigma_\Delta)}|$ согласно полученной формуле может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно,

$$\lim_{\Delta \to 0} R_{\varphi(\Sigma_\Delta)} = \lim_{N \to \infty} R_{\varphi(S_N)} \equiv R_\varphi. \tag{8.31}$$

Но

$$\lim_{\Delta \to 0} R_{\varphi(\Sigma_\Delta)} \geqslant \lim_{M \to \infty} R_{\varphi(\Sigma_M)} \ (\equiv \tilde{R}_\varphi), \tag{8.32}$$

так как при каждом Δ можно выбрать такое M, что $\sum_M \supset \sum_\Delta$ и значит $R_{\varphi(\Sigma_\Delta)} \geqslant R_{\varphi(\Sigma_M)}$ (теорема 8.2). Сопоставление соотношений (8.27), (8.31), (8.32) доказывает равенство (8.28). Доказательство закончено.

В случае регулярного управляемого процесса риск R_φ есть равномерно непрерывный функционал от φ на множестве $H \ni \varphi$ ступенчатых индексов при подходящем выборе метрики в H. Это свойство можно принять за первоначальное определение регулярности. Однако данное выше определение 8.4 регулярного процесса удобнее в том отношении, что его легче проверять в конкретных примерах.

После введения метрики в H рассмотрение непрерывных индексов φ соответствует рассмотрению точек замыкания $\overline{H}$ пространства H. Коль скоро функция R_φ равномерно непрерывна на H, то на точки замыкания $\varphi\in\overline{H}$, естественно, она доопределяется по непрерывности.

§ 8.5. ДОСТАТОЧНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Отыскание оптимальных рисков и оптимальных решений облегчается введением достаточных координат.

Определение 8.5. *Пусть существуют:*

1) *такое семейство* $\{c^t(\omega),\ t\in T\}$ $\mathscr{B}^t$*-измеримых функций* $c^t(\omega)$;

2) *такое семейство* $\mathscr{U}^t\mathscr{Y}^{\varphi(t)}$*-измеримых функций* $x_t(\omega)$, $t\in T$ *со значениями из некоторого измеримого пространства* $(X,\ \mathscr{X})$ *что разность*

$$R(\omega\,|\,\mathscr{U}^t\mathscr{Y}^{\varphi(t)})-\mathbf{M}_Q\,[c^t(\omega)\,|\,\mathscr{U}^t\mathscr{Y}^{\varphi(t)}]\equiv S_t(\omega\,|\,\mathscr{U}^t\mathscr{Y}^{\varphi(t)}) \quad (8.33)$$

является $\mathscr{X}_t$*-измеримой. Здесь* $\mathscr{X}_t=\overset{-1}{x_t}(\mathscr{X})\subset\mathscr{U}^t\mathscr{Y}^{\varphi(t)}$. *Указанную разность обозначаем* $S_t(\omega|\mathscr{X}_t)$ *и называем урезанным условным риском. Пространство* $(X,\ \mathscr{X})$ *называем пространством достаточных координат, а его точки — достаточными координатами.*

Урезанный условный риск можно представить как

$$S_t(\omega\,|\,\mathscr{X}_t)=S_t(x_t(\omega)) \quad (t\in T \text{ фиксировано}),$$

т. е. рассматривать $\mathscr{X}$-измеримую функцию $S_t(x)$ от достаточных координат. Таким образом, урезанный условный риск зависит от ω (от u, y) не иначе, как через посредство достаточных координат $x=x_t(\omega)$. Удобство использования достаточных координат в том и заключается, что вместо функций, заданных в сложном и не наглядном пространстве элементарных событий или функциональном пространстве, рассматриваются функции значительно более простого аргумента — достаточных координат.

Функции $c^t(\omega)$ можно назвать функциями прошлых штрафов, а $c(\omega)-c^t(\omega)$ — функцией будущих штрафов. При такой интерпретации урезанный условный риск является условным математическим ожиданием будущих штрафов.

Удобно наложить на достаточные координаты несколько более сильные требования, чем сформулированные в определении.

Определение 8.6. *Пусть задано семейство прошлых штрафов* $c^t(\omega)$, $t\in T$ ($c^t(\omega)$ *является* $\mathscr{B}^t$*-измеримой*). *Достаточные координаты* $x_t(\omega)$ *это такое семейство* $\mathscr{U}^t\mathscr{Y}^{\varphi(t)}$*-измеримых функций, что*

8.6.А. *они достаточны для определения средних штрафов*:

$$\mathbf{M}_Q\,[c^t(\omega)-c^s(\omega)\,|\,\mathscr{U}^s\mathscr{Y}^{\varphi(s)}]=\mathbf{M}_Q\,[c^t(\omega)-c^s(\omega)\,|\,\mathscr{X}_s],\quad s<t;$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[c(\omega)-c^{b}(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{b}\mathcal{Y}^{\varphi(b)}]=\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[c(\omega)-c^{b}(\omega)\,|\,\mathcal{X}_{b}];$$

8.6.Б. *они достаточны для определения собственной будущей эволюции*:

$$\mathbf{Q}(\Lambda\in\mathcal{X}_{t}\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})=\mathbf{Q}(\Lambda\,|\,\mathcal{X}_{s}). \tag{8.34}$$

Покажем, что достаточные координаты, определенные в соответствии с определением 8.6, удовлетворяют условиям определения 8.5 (т. е. 8.5 вытекает из 8.6). Записывая (8.33) для t и для $s<t$, из формулы

$$R(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})=\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[R(\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)})\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}]$$

имеем

$$S_{s}(\omega\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})=\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[c^{t}(\omega)-c^{s}(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}]+$$
$$+\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[S_{t}(\omega\,|\,\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(t)})\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}]. \tag{8.35}$$

Полагая здесь $t=b$, получаем

$$S_{s}(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})=\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[c^{b}-c^{s}\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}]+\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[S_{b}(\mathcal{U}^{b}\mathcal{Y}^{\varphi(b)})\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}].$$

Но

$$S_{b}(\mathcal{U}^{b}\mathcal{Y}^{\varphi(b)})=\mathbf{M}[c-c^{b}\,|\,\mathcal{U}^{b}\mathcal{Y}^{\varphi(b)}]=\mathbf{M}[c-c^{b}\,|\,\mathcal{X}_{b}];$$
$$\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[c^{b}-c^{s}\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}]=\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}\,\mathcal{U}^{s}[c^{b}-c^{s}\,|\,\mathcal{X}_{s}]$$

согласно 8.6.А, поэтому

$$S_{s}(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})=\mathbf{M}_{\mathrm{Q}}[c^{b}-c^{s}\,|\,\mathcal{X}_{s}]+$$
$$+\int\mathbf{M}[c-c^{b}\,|\,\mathcal{X}_{b}]\,\mathbf{Q}(d\omega\in\mathcal{X}_{b}\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}).$$

Согласно 8.6.Б сюда вместо $\mathbf{Q}(\Lambda\,|\,\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})$ можно подставить $\mathbf{Q}(\Lambda\,|\,\mathcal{X}_{s})$, что окончательно доказывает $\mathcal{X}_{s}$-измеримость функции $S_{s}(\mathcal{U}^{s}\mathcal{Y}^{\varphi(s)})$.

2. Приведенные выше определения достаточных координат относились к фиксированному индексу и фиксированному решению. При рассмотрении практических задач, однако, вопрос о выборе достаточных координат решается до того, как найдено само решение. Поэтому удобнее иметь дело с такими признаками достаточных координат, которые не требуют знания решения и даже не требуют фиксации индекса. Сформулируем их:

Определение 8.7. *Признаки достаточных координат*:

8.7.А. *Координаты* $x_{t}(\omega)$ *достаточны для определения средних штрафов*:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{P}}[c^{t}(\omega)-c^{s}(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{t}\mathcal{Y}^{\varphi(s)}]=\mathbf{M}_{\mathrm{P}}[c^{t}(\omega)-c^{s}(\omega)\,|\,\mathcal{U}_{s}^{t}\mathcal{X}_{s}]; \tag{8.36}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{P}}[c(\omega)-c^{b}(\omega)\,|\,\mathcal{U}^{b}\mathcal{Y}^{\varphi(b)}]=\mathbf{M}_{\mathrm{P}}[c(\omega)-c^{b}(\omega)\,|\,\mathcal{X}_{b}] \tag{8.37}$$

(s, t любые из T, но $s<t$).

Это значит, что при фиксированном управлении u_s^t условные средние штрафы $\mathbf{M}[c^t - c^s | \mathcal{U}_s^t \mathcal{Y}^{\varphi(t)}]$ зависят от u_a^s, $y_a^{\varphi(s)}$ не иначе, как через посредство $x_s(\omega)$.

8.7.Б. *Они достаточны для вероятностного определения собственной будущей эволюции*:

$$\mathbf{P}[x_t(\omega) \in \Gamma | \mathcal{U}^t \mathcal{Y}^{\varphi(s)}] = \mathbf{P}(\Gamma | \mathcal{U}_s^t \mathcal{X}_s), \ \Gamma \in \mathcal{X}.$$

Это значит, что при фиксированном управлении u_s^t указанные условные вероятности, а значит и условные математические ожидания, зависят от u_a^s, $y_a^{\varphi(s)}$ только через посредство $x_s(\omega)$.

8.7.В. *Они достаточны для указания ограничений выбора управления на каждом отдельном интервале*. Используя обозначения, введенные в п. 1 § 8.1, это требование можно записать

$$\mathcal{U}_s''^t(\mathcal{U}^s) = \mathcal{U}_s''^t(\mathcal{X}_s) \quad (U_s^t(u_a^s) = U_s^t(x_s))$$

или

$$\mathcal{U}_s^t(\mathcal{U}^s) = \mathcal{U}_s^t(\mathcal{X}_s), \ (s < t).$$

Если избегать использования понятий условной σ-алгебры, то данное требование можно выразить в терминах условной минимизации:

$$\min_{\omega | \mathcal{U}^s \mathcal{Y}^{\varphi(s)}} f(\omega) = \min_{\omega | \mathcal{X}_s} f(\omega),$$

какова бы ни была $\mathcal{U}_s^t \mathcal{X}_s$-измеримая функция $f(\omega)$.

Покажем, что из приведенных признаков достаточных координат вытекает $\mathcal{X}_t$-измеримость функции (8.33), т. е. вытекает, что они являются достаточными координатами в смысле определения 8.5.

Пусть разбиение $\{t_1, \ldots, t_N\}$ порождает ступенчатую аппроксимацию φ^N индекса φ ($\varphi_k = \varphi(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$). Для φ^N и функции (8.33) рекуррентные преобразования (8.12) записываются в виде

$$S_{t_k}(\omega | \mathcal{U}^{t_k} \mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \min_{\omega | \mathcal{U}^{t_k} \mathcal{Y}^{\varphi_k}} \mathbf{M}_{\mathbf{P}} [c^{t_{k+1}}(\omega) - c^{t_k}(\omega) +$$

$$+ S_{t_{k+1}}(\omega | \mathcal{U}^{t_{k+1}} \mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}}) | \mathcal{U}^{t_{k+1}} \mathcal{Y}^{\varphi_k}]. \qquad (8.38)$$

Если $S_{t_{k+1}}(\omega | \mathcal{U}^{t_{k+1}} \mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}})$ есть $\mathcal{X}_{k+1}$-измеримая функция, то, как нетрудно вывести из 8.7. А — В ($t = t_{k+1}$, $s = t_k$), функция $S_{t_k}(\omega | \mathcal{U}^{t_k} \mathcal{Y}^{\varphi_k})$ также является $\mathcal{X}_k$-измеримой, причем

$$S_{t_k}(x_{t_k}(\omega)) = \min_{\omega|\mathcal{X}_{t_k}} \{\mathbf{M}_{\mathrm{P}}[c^{t_{k+1}}(\omega) - c^{t_k}(\omega) +$$

$$+ S_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}}(\omega)) \mid \mathcal{U}_{t_k}^{t_{k+1}}\mathcal{X}_{t_k}]\}. \qquad (8.39)$$

Таким образом, рекуррентные преобразования не приводят к нарушению $\mathcal{X}_{t_k}$-измеримости урезанных условных рисков. Остается только проверить $\mathcal{X}_b$-измеримость «начальной» функции

$$S_b(\omega \mid \mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi(b)}) = \mathbf{M}_{\mathrm{P}}[c(\nu) - c^b(\omega) \mid \mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi(b)}].$$

Она имеет место согласно (8.37). Следовательно, $\mathcal{X}_{t_k}$-измеримость функции S_{t_k} при любом $k=0, 1, 2, ..., N$ является доказанной для ступенчатого индекса φ^N. Если теперь совершить предельный переход $N\to\infty$, $\varphi^N \uparrow \varphi$, то предельная функция S_t будет $\mathcal{X}_t$-измеримой при любом t из множества определения риска.

§ 8.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ОТ ДОСТАТОЧНЫХ КООРДИНАТ. УРАВНЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ

1. Рассмотрим банахово пространство $G^x\,\mathcal{X}$-измеримых функций в пространстве достаточных координат $(X, \mathcal{X})$. В нем определены естественные линейные операции и норма, аналогичная (8.19) или (8.20) (в последнем случае предварительно фиксируется некоторая мера $\nu(\Lambda)$, $\Lambda\in\mathcal{X}$, порождаемая, если угодно, мерой $\nu(\Gamma)$, $\Gamma\in\mathcal{U}^b$).

Введенное ранее преобразование (8.21) определяет преобразование T_{st} в пространстве G^x. В самом деле, для любой $g(x)\in G^x$ функция $g(x_t(\omega)) = f(\omega)$ является $\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t)}$-измеримой, т. е. $\in G_t$. Следовательно, может быть определена функция

$$f'(\omega) = T_{st}f(\omega) = \int f(\omega)\,\mathbf{Q}(d\omega \in \mathcal{X}_t \mid \mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t)}) \in G_s, \qquad (8.40)$$

которая оказывается $\mathcal{X}_s$-измеримой согласно 8.6.Б. Записывая ее в форме $f'(\omega) = g'(x_s(\omega))$, мы можем рассматривать преобразование T_{st} любой функции $g(x)$ в функцию $g'(x)\in G^x$.

При помощи условной меры $\mathbf{Q}_{st}(\Gamma\in\mathcal{X} \mid \mathcal{X})$ в пространстве достаточных координат, связанной с мерой (8.34) соотношением

$$\mathbf{Q}(x_t^{-1}(\Gamma) \mid \mathcal{X}_s) = \mathbf{Q}_{st}(\Gamma \mid x_s(\omega)), \quad \Gamma\in\mathcal{X},$$

указанное преобразование $g' = T_{st}g$ можно записать

$$(T_{st}g)(x) = \int \mathbf{Q}_{st}(dx' \mid x)\, g(x'). \qquad (8.41)$$

Вследствие полугруппового свойства (8.23) преобразования (8.40) рассмотренное здесь преобразование (8.41) образует полугруппу:

$$T_{rs}T_{st} = T_{rt}, \quad r < s < t.$$

Урезанный условный риск $S_t(x)$ можно рассматривать как элемент пространства G^x. При этом формулу преобразования (8.35) урезанных рисков можно записать при помощи T_{st}. Именно, учитывая 8.6.А—Б, получаем

$$S_s(x) = \mathbf{M}_Q[c^t - c^s \mid x] + T_{st}S_t(x). \tag{8.42}$$

2. Существование полугруппы преобразований T_{st} напоминает случай марковского процесса (§ 3.1). Возникает вопрос, не связана ли эта полугруппа с некоторым марковским процессом. Проверка показывает, что так оно и есть. Марковским процессом оказываются достаточные координаты, причем это вытекает только из их определения.

Теорема 8. 7. *Процесс* $\{x_t(\omega), t \in T\}$, *описываемый вероятностной мерой* $\mathbf{Q}$, *является марковским.*

Доказательство. Возьмем моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$. Из определения условных вероятностей имеем

$$\mathbf{Q}(\Lambda \in \mathscr{X}_{t_3} \mid \mathscr{U}^{t_1}\mathscr{Y}^{\varphi(t_1)}) = \int \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{U}^{t_2}\mathscr{Y}^{\varphi(t_2)})\, \mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{U}^{t_2}\mathscr{Y}^{\varphi(t_2)} \mid \mathscr{U}^{t_1}\mathscr{Y}^{\varphi(t_1)})$$

или, учитывая 8.6.Б,

$$\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_1}) = \int \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_2})\, \mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{U}^{t_2}\mathscr{Y}^{\varphi(t_2)} \mid \mathscr{U}^{t_1}\mathscr{Y}^{\varphi(t_1)}).$$

Поскольку $\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_2})$, $\Lambda \in \mathscr{X}_{t_3}$ является $\mathscr{X}_{t_2}$-измеримой функцией, здесь $\mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{U}^{t_2}\mathscr{Y}^{\varphi(t_2)} \mid \mathscr{U}^{t_1}\mathscr{Y}^{\varphi(t_1)})$ можно заменить на $\mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{X}_{t_2} \mid \mathscr{U}^{t_1}\mathscr{Y}^{\varphi(t_1)})$, а значит (в силу 8.6.Б) и на $\mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{X}_{t_2} \mid \mathscr{X}_{t_1})$. В итоге указанное равенство примет вид

$$\mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_1}) = \int \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_2})\, \mathbf{Q}(d\omega \in \mathscr{X}_{t_2} \mid \mathscr{X}_{t_1}),$$

т. е. обратится в уравнение Чепмена—Колмогорова.

Из этого уравнения, многократно пользуясь теоремой Радона—Никодима, поочередно можно вывести равенства

$$\mathbf{Q}(\Lambda \in \mathscr{X}_{t_3} \mid \mathscr{X}_{t_1}\mathscr{X}_{t_2}) = \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_2}),\ \mathbf{Q}(\Lambda \in \mathscr{X}_{t_4} \mid \mathscr{X}_{t_1}\mathscr{X}_{t_2}\mathscr{X}_{t_3}) = \mathbf{Q}(\Lambda \mid \mathscr{X}_{t_3})$$

$$(t_1 < t_2 < \ldots), \qquad \text{и т. д.}$$

доказывающие марковский характер процесса.

Согласно доказанной теореме достаточные координаты образуют марковский процесс после выбора решения δ, определяющего, как указывалось в п. 4 § 8.1, комбинированную меру $\mathbf{Q}$. Можно утверждать большее. Достаточные координаты образуют марковский процесс также относительно вероятностных мер $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{U}^t)$, заданных в условии задачи (п. 2 § 8.1). При этом, конечно, следует фиксировать управление u_a^t на достаточно большом интервале $[a, t]$. Чтобы не оговаривать этого каждый раз, фиксируем управление $u \in U$ на всем интервале.

Теорема 8.8. *Процесс $\{x_t(\omega),\ t \in T\}$, описываемый при фиксированном управлении $u \in U$ вероятностной мерой $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{U}^b)$, является марковским.*

Доказательство аналогично предыдущему с той лишь разницей, что вместо условия 8.6.Б следует использовать условие 8.7.Б.

Марковский процесс, рассмотренный в теореме 8.8, определяет свою полугруппу преобразований в G^x. Поскольку эти преобразования соответствуют фиксированному управлению u, будем обозначать их $T_{st}(u)$:

$$(T_{st}(u)\, g)(x_s) = \int \mathbf{P}(dx_t(\omega) \in \mathcal{X} \,|\, u,\ x_s)\, g(x_t(\omega)).$$

3. Коль скоро введены полугруппы преобразований T_{st}, $T_{st}(u)$, то можно рассматривать их инфинитезимальные операторы. Пусть A_t — инфинитезимальный оператор, определенный формулой

$$A_t g = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{T_{t-\Delta,t}\, g - g}{\Delta} \tag{8.43}$$

на множестве $D \subset G^x$ тех функций g, для которых предел существует. Аналогично для каждого $u \in U$ определяем инфинитезимальный оператор $A_t(u)$ преобразований $T_{st}(u)$ и область его определения $D(u) \subset G^x$.

Пользуясь уравнением (8.42), образуем разность

$$\frac{S_{t-\Delta}(x) - S_t(x)}{\Delta} = \mathbf{M}_Q\left[\frac{c^t - c^{t-\Delta}}{\Delta}\,\middle|\, x\right] + \frac{T_{t-\Delta,t}S_t - S_t}{\Delta}$$

и перейдем к пределу $\Delta \downarrow 0$. Если функция c^t дифференцируема по t:

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{c^t - c^{t-\Delta}}{\Delta} = C_t;$$

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \mathbf{M}_Q\left[\frac{c^t - c^{t-\Delta}}{\Delta}\,\middle|\, x\right] = \mathbf{M}_Q\,[C_t \,|\, x] \tag{8.44}$$

(и если $S_t \in D$), то в итоге получим уравнение

$$-\frac{\partial S_t(x)}{\partial t} = \mathbf{M}_Q\,[C_t \,|\, x] + (A_t S_t)(x). \tag{8.45}$$

В противном случае соответствующее дифференциальное уравнение имело бы вид

$$-dS_t(x) = \mathbf{M}_Q\,[dc^t \,|\, x] + d^* L^*(t)\, S_t(x), \tag{8.46}$$

где dL^* — дифференциальный инфинитезимальный оператор, определенный в п. 1 § 3.1.

Запишем теперь дифференциальное уравнение для урезанного риска при помощи инфинитезимального оператора второй полугруппы. Для этого обратимся к уравнению (8.39), соответствующему допредельному индексу. В фигурных скобках в его правой части стоит $\mathcal{U}_{t_k}^{t_{k+1}}\mathcal{X}_{t_k}$-измеримая функция, поэтому минимизация по $\omega|\mathcal{X}_{t_k}$ сводится к минимизации по $u_{t_k}^{t_{k+1}}|\mathcal{X}_{t_k}$. В уравнении (8.39) можно записать любой из этих вариантов, а также вариант $u|\mathcal{X}_{t_k}$. Поэтому имеем

$$\frac{S_{t_k}(x)-S_{t_{k+1}}(x)}{\Delta}=\min_{u|x}\left\{\mathbf{M}_\mathrm{P}\left[\frac{c^{t_{k+1}}-c^{t_k}}{\Delta}\,\middle|\,u,x\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{T_{t_k t_{k+1}}(u)\,S_{t_{k+1}}-S_{t_{k+1}}}{\Delta}\right\} \qquad (8.47)$$

$(x=x_{t_k},\ \Delta=t_{k+1}-t_k)$.

Производя предельный переход $\varphi^N\uparrow\varphi$, $t_k\to t$, $t_{k+1}\to t$, отсюда получаем

$$-\frac{\partial S_t(x)}{\partial t}=\min_{u|x}\left\{\mathbf{M}_\mathrm{P}[C_t|u,x]+A_t(u)\,S_t(x)\right\}, \qquad (8.48)$$

если

$$\frac{c^{t_{k+1}}-c^{t_k}}{\Delta}\to C_t; \qquad (8.49)$$

и

$$\frac{T_{t_k t_{k+1}}(u)\,S_{t_{k+1}}-S_{t_{k+1}}}{\Delta}\to A_t(u)\,S_t \text{ при } t_k\to t,\ t_{k+1}\to t. \qquad (8.50)$$

Сходимость (8.49), как легко видеть, вытекает из условия дифференцируемости (8.44). Условие (8.50) является, возможно, несколько более сильным, чем естественное условие

$$\frac{T_{t-\Delta,t}(u)\,S_t-S_t}{\Delta}\to A_t(u)\,S_t,\ u\in U$$

(т. е. условие $S_t\in\bigcap_u D(u)$).

Естественное обобщение уравнений (8.48) на случай недифференцируемого штрафа и недифференцируемой полугруппы по аналогии с (8.46) имеет вид

$$-dS_t(x)=\min_{u|x}\{\mathbf{M}_\mathrm{P}[dc^t|u,x]+d^*L^*(t,u)\,S_t(x)\}. \qquad (8.51)$$

Здесь и в (8.48) $x\in X$ — точка пространства достаточных координат, а $u=u_a^b$ — функция управления. Подлежащее минимизации выражение, однако, зависит в действительности лишь от ее значений в окрестности точки t.

Минимизация в уравнении (8.48) или (8.51) соответствует выбору оптимальной альтернативы (выбору оптимального «инфинитезимального управления» u_t^{t+dt} из ряда возможных), поэтому назовем его *уравнением альтернатив*. Как отмечалось, ему соответствует «начальное» условие

$$S_b(x) = \mathbf{M_P}[c(\omega) - c^b(\omega) \mid x_b(\omega) = x].$$

Решение этого уравнения при обратном течении времени позволяет последовательно определить $S_t(x)$ и оптимальные (или близкие к таковым) решающие меры. Отыскиваемое в последнюю очередь значение $S_a(x)$ дает полный риск $R = c^a + S_a$.

4. Условия, при которых имеет место дифференцируемость (8.43), (8.44), (8.50) и при которых вид уравнений (8.45), (8.48) не зависит от специального способа перехода к пределу, связаны с условием регулярности управляемого процесса (§ 8.4). Рассмотрим здесь некоторые вспомогательные понятия и достаточные условия регулярности, которые удобно проверять при решении конкретных задач.

Для простоты в этом пункте предполагаем, что индекс $\varphi(t)$ всюду имеет ограниченную первую производную по t.

Определение 8.8. *Назовем пространствами регулярности $\overset{\circ}{D}_t \subset G^x$, $t \in T$ такие множества функций, что для каждой $g \in \overset{\circ}{D}_t$ и любого $\Delta > 0$*

8.8.А. *существует измеримая функция $g' \in D^0_{t-\Delta}$, отличающаяся от функции*

$$\min_{\omega \mid \mathcal{U}^{t-\Delta}\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)}} \mathbf{M_P}[c^t - c^{t-\Delta} + g(x_t(\omega)) \mid \mathcal{U}^t\mathcal{Y}^{\varphi(t-\Delta)})] \qquad (8.52)$$

на $o(1)\Delta$. Согласно 8.7. А — В это условие можно записать

$$g'(x) = \min_{u|x}\{\mathbf{M_P}[c^t - c^{t-\Delta} \mid u, x_{t-\Delta} = x] + (T_{t-\Delta,t}(u)\,g)(x)\} + o(1)\Delta. \qquad (8.53)$$

8.8.Б. *Существует, далее, не зависящая от Δ и непрерывно зависящая от t и $g(\in \overset{\circ}{D}_t)$ функция $\psi_t\ (x, g)$, удовлетворяющая равенству*

$$g'(x) - g(x) = \psi_t(x, g)\,\Delta + o(1)\,\Delta. \qquad (8.54)$$

Из сопоставления (8.53), (8.54), очевидно, следует

$$\min_{u|x}\left\{\mathbf{M_P}\left[\frac{c^t - c^{t-\Delta}}{\Delta}\,\middle|\, u, x\right] + \frac{T_{t-\Delta,t}\,g - g}{\Delta}\right\} = \psi_t(x, g) + o(1). \qquad (8.55)$$

Оценка $o(1)$ здесь берется в смысле нормы (8.19) или (8.20), т. е. предполагается равномерной по x.

Ценность введенных понятий видна из следующей теоремы:

Теорема 8.9. *Если* $S(b)$ *принадлежит пространству регулярности* $\overset{\circ}{D_b}$, *то*:

1) *процесс является регулярным в смысле определения* 8.4;

2) *урезанный условный риск удовлетворяет уравнению*

$$-\frac{\partial S_t(x)}{\partial t} = \psi(x, S_t). \tag{8.56}$$

Доказательство. Пусть Σ — счетная всюду плотная в T последовательность. Рассмотрим Δ-разбиение $\Sigma_N \subset \Sigma$ интервала $[a, b]$ точками $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ и на каждом элементарном интервале $[t_k, t_{k+1}]$ используем условие 8.8.А. Это условие позволяет рекуррентным образом найти последовательность функций (обозначим их $\widetilde{S}_{t_k}$), принадлежащих пространству регулярности $\widetilde{S}_{t_k} \in D^\circ_{t_k}$. *Учитывая 8.8.А, можно провести* сравнение их с оптимальными рисками $S^N_{t_k}$ для данного разбиения. Суммируя отклонения $o(1)\Delta$, имеем $|\widetilde{S}_{t_k} - S^N_{t_k}| = o(1)\,(b - t_k)$ и, в частности, $|\widetilde{R}_\varphi{}^N - R_\varphi{}^N| = o(1)\,(b-a)$ (здесь мы воспользовались непрерывностью преобразования (8.52) относительно введенной метрики в пространстве G^x). Из этого результата следует сходимость последовательностей

$\widetilde{S}_{t_k}\,(\to \widetilde{S}^\Sigma_t)$ и $\widetilde{R}_{\varphi N}\,(\to \widetilde{R}^\Sigma_\varphi)$ при $\Delta \to 0$, т. е. при $N \to \infty$ и $\sum_N \to \to \sum$ (поскольку $S^N_{t_k}$, $R_{\varphi N}$ сходятся), а также совпадение пределов:

$$\lim \widetilde{S}_{t_k} = \lim S^N_{t_k} \equiv S^\Sigma_t \quad (t = \lim t_k);$$

$$\lim \widetilde{R}_{\varphi N} = \lim R_{\varphi N} \equiv R^\Sigma_\varphi.$$

Используем теперь 8.8.Б. Полагая $g = \widetilde{S}_{t_{k+1}}$, $g' = \widetilde{S}_{t_k}$ в (8.54) и суммируя по k, имеем

$$\widetilde{S}_{t_l} - \widetilde{S}_{t_N} = \sum_{k=l}^{N} \psi_{t_{k+1}}(x, \widetilde{S}_{t_{k+1}})\,(t_{k+1} - t_k) + o(1)\,(b - t_l).$$

Переходя к пределу $\Delta \to 0$, $t_l \to t$, получаем

$$S^\Sigma_t - S^\Sigma_b = \int_t^b \psi_\tau(x, S^\Sigma_\tau)\,d\tau \tag{8.57}$$

и

$$-\frac{\partial S^\Sigma_t(x)}{\partial t} = \psi_t(x, S^\Sigma_t) \tag{8.58}$$

вследствие непрерывности функции $\psi_t(x, S_t)$. Утверждение 2) теоремы доказано.

Далее, результат (8.57) не зависит от специального способа разбиения (от Σ), он остается одним и тем же для любой всюду плотной последовательности Σ. То же самое, следовательно, относится и к решению $S_t^{\Sigma}(x)$ уравнения (8.58). Среди таких последовательностей заведомо имеется последовательность определения оптимального риска. В самом деле, если S — некоторая последовательность определения риска, а Σ — всюду плотная последовательность, то, как видно из проведенного в пп. 2 и 3 § 8.2 рассмотрения, последовательностью определения риска будет также объединенная последовательность $\Sigma' = S \cup \Sigma$, в которой поочередно следуют элементы из S и из Σ. Итак, уравнение (8.58) справедливо для последовательности Σ', т. е. ему удовлетворяют оптимальные риски $S_t^{\Sigma} = S_t^{\Sigma'} = S_t$. Доказательство закончено.

Если выполнены условие теоремы 8.9, а также условия $S_t \in D$ и (8.44), при которых справедливо уравнение (8.45), то уравнения (8.45) и (8.56), очевидно, совпадают и

$$\psi_t(x, S_t) = \mathbf{M}_Q [C_t \mid x] + A_t S_t. \tag{8.59}$$

§ 8.7. СЛУЧАЙ МАРКОВСКОГО ОСНОВНОГО ПРОЦЕССА

В предыдущем изложении не предполагались какие-либо марковские свойства рассматриваемых процессов. Следствием определения достаточных координат, однако, оказались марковские свойства последних. Это является косвенным свидетельством того, что понятие достаточных координат будет продуктивным именно при рассмотрении марковских и родственных им процессов. В настоящем параграфе мы будем предполагать основной процесс марковским и покажем, что в этом случае наиболее существенную часть достаточных координат составляют апостериорные вероятности, т. е. «вторичный апостериорный процесс» (§ 5.6). Поскольку изучением марковских апостериорных вероятностей занимается теория условных марковских процессов, то отсюда следует эффективиость применения последней к теории оптимального управления.

1. Понятия и обозначения, связанные с основиым процессом, были изложены в п. 2 § 8.1. Пусть фиксация управления u_a^t определяет вероятности $\mathbf{P}(\cdot \mid u_a^t)$ процесса $z_a^t = \{z_\tau, a \leqslant \tau \leqslant t\}$. Если через $\mathscr{Z}^t(u_a^t)$ обозначить σ-алгебру, определенную условиями, наложенными на z_a^t, то в соответствии с указанными обозначениями имеем

$$\mathscr{Z}^t(\mathscr{U}^t) \subset \mathscr{A}^t(\mathscr{U}^t); \quad \mathscr{U}^t\mathscr{Z}^t(\mathscr{U}^t) \subset \mathscr{B}^t.$$

Пусть $\mathscr{Z}_s^t(u_a^t, z_a^s)$ — σ-алгебра, определенная условиями, наложенными на z_s^t, а $\mathscr{Z}_t(u_a^t, z_a^t)$ — соответственно на z_t. Тогда марковские свойства основного процесса $\{z_t\}$ можно сформулировать как свойства меры $\mathbf{P}(\cdot \mid u)$, именно

$$\mathbf{P}(\Lambda \mid u, \mathscr{Z}^t(u)) = \mathbf{P}(\Lambda \mid u, \mathscr{Z}_t(u, z_a^t)), \qquad \Lambda \in \mathscr{Z}_t^b(u, z_a^t) \tag{8.60}$$

(п. в. $\mathbf{P}$).

Предположим теперь, что выбор управления u влияет на вероятности $\mathbf{P}$, но не на фазовое пространство процесса $\{z_t\}$, т. е. это пространство одно и то же при всевозможных управлениях. Пусть, далее, фазовое пространство, соответствующее моменту t, не зависит от z_a^t, т. е. одно и то же при различных z_a^t. Эти условия можно записать

8.9.А. $$\mathscr{Z}_t(u_a^t, z_a^t) = \mathscr{Z}_t$$

(не зависит от u_a^t, z_a^t).

Управление $u \in U$ будем предполагать несвязанным:

8.9.Б. $$\mathscr{U}_s^t(u_a^s) = \mathscr{U}_s^t, \quad s < t$$

(не зависит от u_a^s).

В соответствии с 8.9.А марковское условие (8.60) возьмем в виде

8.9.В. $$\mathbf{P}(\Lambda \mid u_a^t, z_a^s) = \mathbf{P}(\Lambda \mid u_s^t, z_s), \quad \Lambda \in \mathscr{Z}_s^b \bigcap \mathscr{B}^t, \quad s < t.$$

Остальные предположения относятся к наблюдаемому процессу и функциям штрафов. Ограничимся практически наиболее интересным случаем, когда $\varphi(t) = t$ (случай другого непрерывного индекса $\varphi'(t)$ может быть сведен к данному заменой времени $t' = \varphi'(t)$). Наблюдаемый процесс y_t пусть определяется (помимо u_a^t) процессом z_a^t:

8.9.Г. $$\mathscr{Y}^t(u_a^t) \subset \mathscr{Z}^t.$$

Наконец, будущие штрафы определяются будущими значениями z_s^b процесса z:

8.9.Д. *$c^t - c^s$ есть не только $\mathscr{B}^t$-измеримая, но и $\mathscr{U}_s^t \mathscr{Z}_s^b$-измеримая функция; $c - c^b$ является $\mathscr{Z}_b$-измеримой.*

Теорема 8.10. *При выполнении предположений 8.9.А—Д условные вероятности $W_t(\Lambda \in \mathscr{Z}_t) = \mathbf{P}(\Lambda \mid \mathscr{U}^t \mathscr{Y}^t)$ образуют достаточные координаты.*

Доказательство. Чтобы доказать теорему, проверим выполнение признаков 8.7.А—В достаточных координат. Выполнение 8.7.В непосредственно следует из 8.9.А—Б. Докажем 8.7.А. Обозначим через $\mathscr{W}_t$ σ-алгебру, порожденную условиями, наложенными на W_t. Используя 8.9.Д, имеем

$$\int [c^t(\omega') - c^s(\omega')] \mathbf{P}(d\omega' \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s) =$$

$$= \iint [c^t(\omega') - c^s(\omega')] \mathbf{P}(d\omega' \in \mathscr{U}_s^t\mathscr{Z}_s^b \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s\mathscr{Z}_s)\mathbf{P}(d\omega \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s). \quad (8.61)$$

В силу условия Маркова 8.9.В (а также 8.9.Г)

$$\mathbf{P}(d\omega \in \mathscr{Z}_s^b \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s\mathscr{Z}_s) = \mathbf{P}(d\omega \mid \mathscr{U}_s^t\mathscr{Z}_s),$$

поэтому

$$\mathbf{M}[c^t - c^s \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s] = \iint [c^t(\omega') - c^s(\omega')] \mathbf{P}(d\omega' \mid \mathscr{U}_s^t\mathscr{Z}_s) W_s(d\omega \in \mathscr{Z}_s). \quad (8.62)$$

Эта функция является, следовательно, $\mathscr{U}_s^t\mathscr{W}_s$-измеримой:

$$\mathbf{M}[c^t - c^s \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s] = \mathbf{M}[c^t - c^s \mid \mathscr{U}_s^t\mathscr{W}_s].$$

Выполнение (8.36) проверено. Кроме того, из $\mathscr{Z}_b$-измеримости функции $c - c^b$ (см. 8.9.Д) легко вывести равенство

$$\mathbf{M}[c - c^b \mid \mathscr{U}^b\mathscr{Y}^b] = \int (c - c^b) W_b(d\omega \in \mathscr{Z}_b) = \mathbf{M}[c - c^b \mid \mathscr{W}_b],$$

подтверждающее (8.37).

Проверку последнего признака 8.7.Б можно провести методами, близкими к тем, которые были использованы при доказательстве теорем 5,8, 5.9. Как следует из теории, развитой в п. 2, § 5.6, апостериорная вероятность $W_t(\Gamma \in \mathscr{Z}_t) = \mathbf{P}(\Gamma \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^t)$ для марковского процесса (условие 8.9.В) является измеримой относительно σ-алгебры $\mathscr{W}_s\mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t$, $s<t$. Это может быть показано при помощи формулы (5.83) (в данном случае при наличии управления апостериорная мера V_s^t является $\mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t$-измеримой). Указанная измеримость эквивалентна соотношению $\mathscr{W}_t \subset \mathscr{W}_s\mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t$ или $\mathscr{W}_s\mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t$-измеримости индикатора

$$I_B(\omega) = I(B \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^t) = I(B \mid \mathscr{W}_s\mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t)$$

множества $B \in \mathscr{W}_t$. Расширяя σ-алгебры в условии, очевидно, можно записать

$$I(B \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^t) = I(B \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^t\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s) = I(B \mid \mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s). \quad (8.63)$$

Представим вероятность $\mathbf{P}(B \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s)$ в форме условных математических ожиданий:

$$\mathbf{P}(B \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s) = \mathbf{M}\{\mathbf{M}[I(B \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^t\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s) \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s] \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s\}.$$

Подставляя сюда (8.63) и учитывая, что

$$\mathbf{M}[I(B \mid \mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s) \mid \mathscr{U}^t\mathscr{Y}^s\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s] = \mathbf{M}[I(B \mid \mathscr{U}_s^t\mathscr{Y}_s^t\mathscr{W}_s\mathscr{Z}_s) \mid \mathscr{W}_s\mathscr{U}_s^t\mathscr{Z}_s] =$$

$$= \mathbf{P}[B \mid \mathscr{W}_s\mathscr{U}_s^t\mathscr{Z}_s] \quad (8.63.а)$$

вследствие марковского условия 8.9.В (см. (5.80))*, получаем

$$\mathbf{P}(B\,|\,\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)=\int \mathbf{M}\,[I_B(\omega)\,|\,\mathcal{W}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s]\,\mathbf{P}(d\omega\in\mathcal{Z}_s\,|\,\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)=$$

$$=\int \mathbf{M}\,[I_B(\omega)\,|\,\mathcal{W}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s]\,W_s(d\omega).$$

Как видно отсюда, вероятность $\mathbf{P}(B\,|\,\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)$, $B\in\mathcal{W}_t$ является $\mathcal{W}_s\mathcal{U}_s^t$-измеримой вследствие $\mathcal{W}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s$-измеримости функции $\mathbf{M}\,[I_B(\omega)\,|\,\mathcal{W}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s]$. Это доказывает 8.7.Б и завершает доказательство теоремы.

2. Результаты, полученные выше для несвязанного управления, допускают обобщение на случай связанного управления. Предположим, что множество U управлений u является марковски связанным в соответствии с определением 8.1. Это значит, что существует функция $\widetilde{u}_t(u_a^t)$ и соответствующие ей σ-алгебры $\widetilde{\mathcal{U}}_t$, такие, что $\mathcal{U}_s^t(\mathcal{U}^s)=\mathcal{U}_s^t(\widetilde{\mathcal{U}}_s)$, $s<t$. Условия 8.9. А—Д при этом следует подвергнуть модификации, заменив их на более общие. Вместо 8.9.А—Б будем иметь

8.10.А — Б.
$$\mathcal{U}_s^t(u_a^s)=\mathcal{U}_s^t(\widetilde{u}_s);\tag{8.64}$$

$$\mathcal{Z}_t(u_a^t,\,z_a^t)=\mathcal{Z}_t(\widetilde{u}_t);\qquad \mathcal{Z}_s^t(u_a^t,\,z_a^s)=\mathcal{Z}_s^t(\widetilde{u}_s,\,u_s^t).\tag{8.65}$$

Теперь предполагается, что фазовое пространство основного процесса может зависеть от предыдущего управления u_a^s, но эта зависимость сводится к зависимости от марковской координаты $\widetilde{u}_s$. В марковском условии теперь также может стоять зависимость от марковской координаты:

8.10.В.

$$\mathbf{P}(\Lambda\,|\,u_a^t,\,z_a^s)=\mathbf{P}(\Lambda\,|\,\widetilde{u}_s,\,u_s^t,\,z_s),\quad \Lambda\in\mathcal{Z}_s^b\bigcap\mathcal{B}^t$$
$$(s<t).$$

---

* При сравнении с (5.80) нужно иметь в виду, что

$$\mathcal{W}_s=\mathcal{F}_{\text{пр}};\quad \mathcal{U}^s\mathcal{Y}^s\mathcal{W}_s=\mathcal{F}'_{\text{пр}}\supset\mathcal{F}_{\text{пр}};\quad \mathcal{Y}_s^t=\mathcal{F}_{\text{б}}.$$

Тогда применение (5.80) дает

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{P}(B\,|\,\mathcal{F}_{\text{пр}}\mathcal{Z}_s\mathcal{F}_{\text{б}}\,\mathcal{U}_s^t)\,|\,\mathcal{F}'_{\text{пр}}\mathcal{Z}_s\,\mathcal{U}_s^t]=\mathbf{P}(B\,|\,\mathcal{F}_{\text{пр}}\mathcal{Z}_s\,\mathcal{U}_s^t),$$

что совпадает с (8.63. а).

Аналогичным образом обобщим и другие условия:

8.10.Г.

$$\mathcal{Y}_s^t(u_a^t,\ z_a^s)=\mathcal{Y}_s^t(\widetilde{u}_s,\ u_s^t)\subset\mathcal{Z}_s^t(\widetilde{u}_s,\ u_s^t);$$

8.10.Д. c^t-c^s есть не только $\mathcal{B}^t$-измеримая, но и $\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s^b$-измеримая функция; $c-c^b$ является $\widetilde{\mathcal{U}}_b\mathcal{Z}_b$-измеримой.

Теорема 8.11. *При условиях* 8.10.А—Д *совокупность* $x_t=(\widetilde{u}_t,\ W_t)$ *марковской координаты и апостериорных вероятностей* $W_t(\Lambda\in\mathcal{Z}_t(u_t))=\mathbf{P}(\Delta\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^t)$ *служит достаточными координатами.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Выполнение 8.7.В вытекает из 8.10.А—Б. Для проверки 8.7.А следует записать равенство типа (8.61), (8.62). Вместо (8.61) теперь согласно 8.10.Д имеем

$$\mathbf{M}[c^t-c^s\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s]=\int[c^t(\omega')-c^s(\omega')]\,\mathbf{P}(d\omega'\in\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s^b\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s\mathcal{Z}_s)\times$$
$$\times\mathbf{P}(d\omega\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s).$$

Согласно 8.10.В

$$\mathbf{P}(\Lambda\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s\mathcal{Z}_s)=\mathbf{P}(\Lambda\mid\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s),\quad\Lambda\in\mathcal{Z}_s^b\cap\mathcal{B}^t,$$

поэтому

$$\mathbf{M}[c^t-c^s\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s]=\int\mathbf{M}[c^t-c^s\mid\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s]\,\mathbf{P}(d\omega\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s).$$

Но мера $\mathbf{P}(d\omega\in\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)$ полностью определяется мерой $W_s(A\in\mathcal{Z}_s\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)$ и значениями $\widetilde{u}_s$, u_s^t (значения $\widetilde{u}_s$, u_s^t однозначно заданы, коль скоро фиксированы u_a^t). Отсюда имеем

$$\mathbf{M}[c^t-c^s\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s]=\mathbf{M}[c^t-c^s\mid\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{W}_s].$$

Мы видим, что отличие от соответствующих формул предыдущей теоремы заключается лишь в том, что в условии математических ожиданий и вероятностей стоит, кроме $\mathcal{U}_s^t\mathcal{W}_s$, также σ-алгебра $\widetilde{\mathcal{U}}_s$. С такими же изменениями проводится доказательство выполнения (8.37) и требования 8.7.Б. Здесь снова используется то обстоятельство, что при фиксированном управлении u_a^t значение координаты $\widetilde{u}_t=\widetilde{u}_t(u_a^t)=\widetilde{u}_t(\widetilde{u}_s,u_s^t)$ как функции от $\widetilde{u}_s$ и u_s^t является однозначно заданным. Поэтому мера $\mathbf{P}(\Gamma\in\widetilde{\mathcal{U}}_t\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)$ сосредоточена на множестве $\{\widetilde{u}_t=\widetilde{u}_t(\widetilde{u}_s,\ u_s^t)\}$. Другими словами, первая переменная пары $(\widetilde{u}_t,\ W_t)$ является при фиксации $\widetilde{u}_s$, u_s^t $(s<t)$, детерминированно определенной. Второй же переменной W_t соответствует вероятностная мера $\mathbf{P}(\mathrm{B}\in\mathcal{W}_t\mid\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s)$. Тем же способом, что и

ранее (с указанной модификацией), для нее выводится равенство

$$\mathbf{P}(B\,|\,\mathcal{U}^t\mathcal{Y}^s) = \mathbf{P}(B\,|\,\widetilde{\mathcal{U}}_s\mathcal{U}_s^t\mathcal{W}_s), \quad B \in \mathcal{W}_t.$$

В итоге условие 8.7.Б оказывается проверенным для обеих переменных u_t и W_t.

3. Приведенные теоремы показывают большую роль, которую играют в теории управления апостериорные вероятности W_t, или заменяющие их переменные («вторичный апостериорный процесс» в соответствии с терминологией п. 2 § 5.6). Как показано в § 5.6, эти вероятности представляют собой марковский процесс (теорема 5.9) и для них, следовательно, может быть введен вторичный апостериорный оператор $\mathcal{L}(t)$. Будем предполагать, что существует производная $d\mathcal{L}(t)/dt$, имеющая смысл обычного (определенного в соответствии с Дынкиным [3]) инфинитезимального оператора марковского процесса $\{W_t\}$.

В рассматриваемом здесь случае управляемого процесса вероятности перехода, а поэтому и инфинитезимальный оператор являются зависящими от управления $u \in U$. Отмечая это, будем писать $d\mathcal{L}(t, u)/dt$. При помощи данного оператора записывается уравнение альтернатив (8.48). Чтобы показать это, остановимся для определенности на случае 8.9.А—Д. При этом в качестве достаточных координат x в формулах (8.43), (8.47)—(8.50) следует брать W_t. В соответствии с определением оператора $d\mathcal{L}/dt$ имеем

$$\frac{T_{t-\Delta,t}(u)\,g - g}{\Delta} \to \frac{d\mathcal{L}(t, u)}{dt}\,g \quad \text{при } \Delta \to 0,\ g \in D(u)$$

(здесь $T_{st}(u)$ — «вторичный» оператор). Следовательно, если сходимость (8.50) имеет место, то

$$\frac{T_{t_k t_{k+1}}(u)\cdot S_{t_{k+1}} - S_{t_{k+1}}}{t_{k+1} - t_k} \to \frac{d\mathcal{L}(t, u)}{dt}\,S_t \ \text{при } t_{k+1} \to t,\ t_k \to t,$$

$$S_{t_k} \to S_t \in D(u).$$

Предполагая, что условие (8.49) выполняется и что $S_t \in \bigcap_u D(u)$, получаем из (8.47) в результате предельного перехода

$$-\frac{\partial S_t(W)}{\partial t} = \min_{u|W}\left\{\mathbf{M}\,[C_t\,|\,u, W] + \frac{d\mathcal{L}(t, u)}{dt}\,S_t(W)\right\}, \qquad (8.66)$$

т. е.

$$A_t(u) = \frac{d\mathcal{L}(t, u)}{dt}.$$

4. Рассмотрим для иллюстрации сказанного один конкретный случай. Пусть имеется комбинированный марковский процесс $\{z_t\} = \{x_t,\ y_t(x_t)\}$, рассмотренный в § 6.2—6.4, представляющий собой набор диффузионных процессов

$\{y_t(\alpha),\ \alpha=1, ..., m\}$ и марковские переходы $x_t=\alpha$ между ними. Наблюдаются реализации диффузионных процессов. Чтобы удовлетворить требованиям 8.9.А—Г, предположим, что параметры $a_\rho(\alpha, y, t, u)$, $b_{\rho\sigma}(\alpha, y, t, u)$, $p_{\alpha\beta}\ (t, u)$ комбинированного процесса в каждый момент времени t зависят лишь от мгновенного значения u_t (в тот же момент времени) процесса управления $\{\ u_t,\ t\in T\ \}$ (т. е. являются $\mathcal{U}_t$-измеримыми функциями). Пусть, далее,

$$c^t - c^s = \int_s^t C_\tau(u_\tau, z_\tau)\, d\tau,$$

где $C_\tau(u_\tau, z_\tau)$ есть $\mathcal{U}_\tau\mathcal{Z}_\tau$-измеримая функция.

Тогда 8.9.Д также будет выполнено, так как $c^t - c^s$ будет $\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}_s^t$-измеримой (при этом $\mathcal{B}^t = \mathcal{U}^t\mathcal{Z}^t$). В соответствии с теоремой 8.10 достаточными координатами в данном случае будут составляющие вторичного апостериорного процесса, рассмотренного в § 6.4, т. е. переменные $(w_\alpha,\ y_\rho)$. Урезанный условный риск будет функцией этих переменных: $S_t(w_\alpha,\ y_\rho)$ Чтобы вывести уравнение альтернатив в данном случае, остается лишь подставить (6.41) в (8.66). В итоге будем иметь

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = \min_{u_t}\Big\{\mathbf{M}_{ps} C_t + w_\beta p_{\beta\alpha}\frac{\partial S_t}{\partial w_\alpha} + \mathbf{M}_{ps} a_\rho \frac{\partial S_t}{\partial y_\rho} +$$

$$+ \frac{1}{2} w_\alpha [a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'}]\, b^{-1}_{\rho'\sigma'} [a_{\sigma'}(\beta) - \mathbf{M}_{ps} a_{\sigma'}]\, w_\beta \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_\alpha \partial w_\beta} +$$

$$+ w_\alpha [a_\rho(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_\rho] \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_\alpha \partial y_\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{M}_{ps} b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 S_t}{\partial y_\rho\, \partial y_\sigma}.$$

Здесь минимизация по u превратилась в минимизацию по u_t, так как выражение в фигурных скобках оказалось зависящим лишь от этого значения.

Из этого примера видно, что результаты теории условных марковских процессов, полученные в части II, находят немедленное применение в изложенной здесь теории оптимального управления.

§ 8.8. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРИЮ ИГР

В заключение этой главы затронем вопрос об обобщении изложенной общей теории применительно к теории игр. Как и при неигровой постановке, основным обязательным предположением теории остается требование, чтобы информация, которой располагают игроки, не убывала с течением времени.

1. Обобщение на случай антагонистических игр (с совпадающей информацией) является настолько прямым и естествен-

ным, что нет надобности повторять для него изложенные раньше формулировки. Поэтому мы сконцентрируем внимание на отличиях от неигрового случая.

Вместо одного управления $u = \underline{u}$ теперь следует брать пару $u = (\underline{u}, \overline{u})$. Управление $\underline{u}$ находится в распоряжении одного игрока, $\overline{u}$ — второго. Те условия измеримости, которые раньше относились к одному управлению, теперь относятся к паре.

Для ступенчатого индекса $\varphi^N(t)$ со скачками в точках $\{t_1, \ldots, t_N\}$ решающая мера распадается на произведение

$$\mu_s^t(d\underline{u}_s^t\, d\overline{u}_s^t \mid u_a^s, y_a^{\varphi(s)}) = \underline{\mu}_k(d\underline{u}_s^t \mid u_a^s, y_a^{\varphi(s)})\, \overline{\mu}_k(d\overline{u}_s^t \mid u_a^s, y_a^{\varphi(s)})$$

$$(s = t_k,\ t = t_{k+1}),$$

т. е.

$$\mu_s^t(AB \mid \mathcal{U}^s \mathcal{Y}^{\varphi(s)}) = \underline{\mu}_k(A \mid \mathcal{U}^s \mathcal{Y}^{\varphi(s)})\, \overline{\mu}_k(B \mid \mathcal{U}^s \mathcal{Y}^{\varphi(s)}),$$

$$A \in \underline{\mathcal{U}}_s^t,\ B \in \overline{\mathcal{U}}_s^t.$$

В формуле (8.12), вместо условной минимизации, теперь нужно брать условный (при условии $|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$ минимакс

$$R_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \min_{\underline{\mu}_k} \max_{\overline{\mu}_k} \int R_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k})\, \mu_{t_k}^{t_{k+1}}(d\omega \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}). \tag{8.68}$$

Соотношения монотонности, указанные в п. 2 § 8.2, и определение 8.3 теряют свое значение и теоремы 8.1—8.5 оказываются несправедливыми. Некоторому изменению подвергается также § 8.3, однако дальнейшие параграфы не требуют существенных изменений. Понятие регулярности можно сформулировать без ссылки на множество определения оптимального риска как требование, чтобы всякие всюду плотные в T множества приводили к одному и тому же оптимальному риску. Признаки регулярности 8.4.А, 8.4.Б, 8.8.А—Б остаются без изменения.

Сохраняет свое значение и понятие достаточных координат. Для урезанных условных рисков уравнение (8.68) принимает вид

$$S_{t_k}(x) = \min_{\underline{\mu}_k} \max_{\overline{\mu}_k} \int \mathbf{M}[c^{t_{k+1}} - c^{t_k} + S_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}}) \mid u_{t_k}^{t_{k+1}}, x_{t_k} = x] \times$$
$$\times\, \underline{\mu}_k(d\underline{u}_{t_k}^{t_{k+1}} \mid x)\, \overline{\mu}_k(d\overline{u}_{t_k}^{t_{k+1}} \mid x).$$

Оно служит не только для поэтапного определения урезанного риска, но и для отыскания оптимальных решающих мер $\underline{\mu}_k$, $\overline{\mu}_k$. Решение для непрерывного индекса получается предельным переходом от ступенчатых индексов к непрерывному. Сохраняет значение и другой материал из § 8.6 и § 8.7.

Как известно, в теории антагонистических игр рандомизация является существенной, т. е. приносит определенную выгоду. Однако в последовательной по времени форме теории, охарактеризованной в предыдущем пункте, появляются некоторые дополнительные основания для исчезновения существенной рандомизации. В некоторых задачах рандомизация, будучи существенной для допредельных ступенчатых индексов, теряет существенность при предельном переходе к непрерывному индексу. Другими словами, если заменить минимакс в (8.68) на последовательное взятие максимума и минимума

$$R'_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \min_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} \max_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\underline{\mathcal{U}}^{t_{k+1}}_{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} \mathbf{M}[R'_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}})|\,\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}]$$

или

$$R''_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \max_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} \min_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\overline{\mathcal{U}}^{t_{k+1}}_{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} \mathbf{M}[R''_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}})|\,\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}]$$

(при этом $R'_{\varphi^N} \geqslant R_{\varphi^N} \geqslant R''_{\varphi^N}$), то в пределе $\varphi^N \to \varphi$ могут получиться совпадающие результаты: $R'_\varphi = R_\varphi = R''_\varphi$. Конечно, не все случаи, по-видимому, являются такими, и иногда даже после перехода к непрерывному индексу рандомизация может сохранить свою существенность.

Риски, определенные посредством рекуррентных соотношений с операциями

$$\min_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} \mathbf{M}[\max_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\underline{\mathcal{U}}^{t_{k+1}}_{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}}} R_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}})\,|\,\mathcal{U}^{t_k}\underline{\mathcal{U}}^{t_{k+1}}_{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}],$$

являются мажорирующими для рисков непрерывного индекса. Аналогично операции

$$\max_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}} \mathbf{M}[\min_{\omega|\mathcal{U}^{t_k}\overline{\mathcal{U}}^{t_{k+1}}_{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}}} R_{\varphi^N}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_{k+1}})\,|\,\mathcal{U}^{t_k}\overline{\mathcal{U}}^{t_{k+1}}_{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}]$$

задают минорирующие риски. Эти риски могут быть использованы для построения обобщения теории § 8.2, 8.3 на игровой случай.

2. Менее важным для приложений является обобщение теории на случай неантагонистических игр нескольких игроков. В такой обобщенной теории, конечно, остаются все те трудности, которые свойственны элементарной теории неантагонистических игр. Сформулируем общую постановку задачи: имеются n игроков и n функций штрафа: $c^{(i)}$, $i = 1,\ldots, n$. Любой i-тый игрок заинтересован минимизировать свой риск

$$R^{(i)} = \mathbf{M}_Q c^{(i)},$$

имея при выборе своего управления $u^{(i)}$ в распоряжении в каждый момент времени t свои информационные данные $l^{t}_{(i)}$.

Требования, чтобы эти данные не убывали с течением времени, теперь, по-видимому, уже недостаточно для построения плодотворной теории. Поэтому предположим, что информационные данные всех игроков совпадают:

$$l^t_{(1)} = \ldots = l^t_{(n)} \equiv l^t = (u^t_a, y^{\varphi(t)}_{\varphi(a)}),$$
$$u_t = (u^{(1)}_t, \ldots, u^{(n)}_t).$$

Для ступенчатого индекса $\varphi(t)$ решение определяется набором решающих мер

$$\mu^{t_{k+1}}_{t_k}(du^{t_{k+1}}_{t_k} \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}).$$

На каждом k-м этапе находится оптимальная решающая мера как функция от n условных рисков:

$$R^{(i)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}), \quad i = 1, \ldots n,$$

именно

$$\mu^{t_{k+1}}_{t_k}(\cdot \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \Phi\{R^{(1)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}), \ldots, R^{(n)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k})\}. \tag{8.69}$$

Соответствующий алгоритм подбирается из каких-либо соображений на уровне элементарной (одношаговой) теории игр. Выбранная решающая мера определяет условные математические ожидания

$$\mathbf{M}_{\mathbf{P}}\{\mathbf{M}_\mu[R^{(i)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}] \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_{k-1}}\}.$$

Если имеется перераспределение ресурсов (потерь) между игроками, то это можно учесть, определив, например, условные риски в момент t_k формулой

$$R^{(i)}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \sum_j \gamma_{ij}\mathbf{M}_\mu\ [R^{(j)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) \mid \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}]. \tag{8.70}$$

Следовательно, мы имеем рекуррентное преобразование

$$R^{(1)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}), \ldots, R^{(n)}(\mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) \to$$
$$\to R^{(1)}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_{k-1}}), \ldots, R^{(n)}(\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_{k-1}})$$

(напоминаем, что $\mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_{k-1}} \subset \mathcal{U}^{t_{k+1}}\mathcal{Y}^{\varphi_k}$). Явный вид этого преобразования и само понятие оптимальности, конечно, зависят от принятого принципа согласования интересов. Имеющиеся в этом отношении трудности относятся к одношаговой теории игр. Если, однако, этот принцип зафиксирован, то алгоритмы (8.69), (8.70) им определены. Следовательно, можно вычислить окончательные риски $R^{(i)}(\mathcal{U}^a\mathcal{Y}^{\varphi(a)}) \equiv R^{(i)}$, а также совершить предельный переход от ступенчатого индекса к непрерывному.

Комбинация решающих мер (8.69) и вероятностей $\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{U}^t)$, заданных в условии задачи, определяет, как и раньше, полную меру Q оптимально управляемого процесса.

Глава 9

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Излагаемые здесь методы синтеза оптимальных фильтрующих систем основываются на теории условных марковских процессов. Они были разработаны автором применительно к различным практическим задачам [6, 7, 10—12]. Кроме данных работ следует упомянуть относящиеся к этому же направлению работы Большакова и Репина [1]. В них основным приемом является линеаризация выражений для логарифма апостериорной вероятности или отношения правдоподобия. Полученные линейные интегральные уравнения решаются теми же методами, как и в теории линейной фильтрации. Поэтому методы Большакова и Репина стоят, так сказать, на полпути между методами линейной и нелинейной фильтрации. У нас задачи решения интегральных уравнений для синтеза линейной части фильтрующей системы не возникает.

Если иметь в виду практические приложения теории, то необходимо отметить одно обстоятельство, не нашедшее отражение в монографии. Оно связано с дополнительными приближениями. Дело в том, что число переменных, заменяющих плотность распределения, зачастую, строго говоря, бесконечно, но не все они одинаково существенны. Для практической реализации уравнений важно, чтобы число переменных было невелико. Поэтому встает задача, выбрать из переменных наиболее важные и отбросить остальные, пойдя на ухудшение качества фильтрации. Это ухудшение, если оно невелико, окупится упрощением конструкции. Как видно из сказанного, представляет интерес вопрос о величине этого ухудшения, вопрос о том, какие переменные следует выбрать, чтобы ухудшение было минимальным. Указанные вопросы в настоящее время мало исследованы.

Значительное место мы уделим рассмотрению соотношений между теориями нелинейной оптимальной фильтрации и линейной.

Проблема нелинейной оптимальной фильтрации является естественным логическим продолжением и развитием проблемы линейной фильтрации (в широком смысле). Как известно, эта исторически более ранняя классическая проблема решается установлением и разрешением уравнений регрессии. Последние уравнения, разрешение которых тривиально в случае небольшого числа случайных величин, обращаются, однако, в бесконечную систему уравнений или в интегральное уравнение (в частности, в уравнение Винера-Хопфа) при бесконечном числе случайных величин, например, при стационарном процессе. Классическое решение этих уравнений для стационарного случая (на полупрямой) дано Колмогоровым [2] и Винером [1]. Эти результаты вошли в многочисленные учебники и послужили отправным пунктом для построения нестационарных обобщений.

Ряд результатов в этом направлении изложен в книгах Ленинга и Беттина [1] и Пугачева [1].

Нужно отметить, что эффективное явное решение уравнений регрессии для полубесконечного или конечного интервала в стационарном случае возможно лишь для процессов с рациональной спектральной плотностью, хотя теория Колмогорова-Винера позволяет записать решение в виде интегралов для несколько более общего случая. Гауссов процесс с рациональной спектральной плотностью, как известно, является компонентом многомерного марковского процесса. Поэтому эффективное решение задачи линейной фильтрации оказывается тесно связанным с марковским свойством процесса. Отсюда вытекает утверждение, что эффективное решение задачи линейной фильтрации возможно тогда и только тогда, когда процесс попадает в сферу компетенции теории условных процессов Маркова. Этот внешне не очевидный вывод показывает тесную взаимосвязь двух теорий, совершенно различных по содержанию и исходным предпосылкам: в одной рассматриваются линейные преобразования, среднеквадратичный критерий и любые процессы, в другой — любые преобразования, любой критерий и марковские процессы.

Кроме методов, основывающихся на теории условных марковских процессов, возможны также другие пути решения проблемы оптимальной фильтрации. К числу первых работ по нелинейной фильтрации относится работа Заде [1], в которой отыскивается оптимальное преобразование среди нелинейных преобразований определенного класса. Другая форма нелинейных преобразований рассматривается в работе Кузнецова, Стратоновича, Тихонова [2]. При таком подходе неизвестными являются коэффициенты разложения искомого преобразования по выбранным функциям. Для этих коэффициентов выписывается система уравнений, решение которых является весьма трудным.

В некоторых специальных задачах оказываются целесообразными особые подходы к проблеме нелинейной фильтрации. Так, для фильтрации импульсных сигналов автором [9] был разработан метод, основывающийся на теории коррелированных случайных точек (Стратонович [8], § 6).

Решение проблемы нелинейной фильтрации при помощи теории условных марковских процессов имеет перед прочими методами ряд особых преимуществ. Для этой теории характерными являются рекуррентные преобразования апостериорных мер. Основное звено нелинейной фильтрующей системы может быть синтезировано как устройство, осуществляющее эти рекуррентные преобразования. Алгоритм этих преобразований определяется без особого труда и может быть реализован как блок с обратной связью. Таким образом, синтез фильтрующей системы не связан с решением трудоемких вычислительных задач. Результирующее сложное нелинейное преобразование является следствием более простых поэтапных преобразований. Конечно, возможны и другие варианты применения теории. В случае непрерывного времени и диффузионного характера процессов для теории адекватным является аппарат дифференциальных уравнений. Это обстоятельство приводит к ряду благоприятных следствий. Благодаря ему оказывается возможным решать не только задачи фильтрации, рассматривая апостериорные вероятности, но и более сложные «вторичные» задачи, рассматривая функции от апостериорных вероятностей. Для этих функций также удается получить дифференциальные уравнения, которым соответствует вторичный апостериорный инфинитезимальный оператор (§5.6 и § 6.4). Вторичные задачи возникают при исследовании качества работы нелинейной фильтрующей системы. Теория условных марковских процессов позволяет записать уравнение для функции средних потерь.

Подобное уравнение используется в § 9.6, где для одной частной задачи производится сравнение эффективности линейной и нелинейной фильтрации. Задача выбрана такой, что она попадает в сферу действия обоих теорий. Поскольку теория линейной фильтрации отыскивает оптимальное преобразование в классе линейных преобразований, а теория нелинейной фильтрации — в классе всех преобразований, то нелинейная фильтрация дает заведомо лучшие результаты. Вопрос стоит о величине расхождения. Для обоих оптимальных преобразований удается найти точное выражение для средних рисков. Сравнение показывает, что отношение среднего риска линейного преобразования к риску нелинейного стремится к бесконечности, когда интенсивность помехи стремится к нулю (т. е. когда каждый из рисков стремится к нулю). Сравнение качества линейной и нелинейной фильтрации для данной задачи (по несколько иному критерию) было проделано Кульманом и Стратоновичем в работе [1], где приводятся родственные результаты.

В § 9.5 рассматривается линейная фильтрация как частный случай нелинейной. Используемый здесь метод позволяет избегать решения уравнения Винера-Хопфа, т. е. является обычно более удобным, чем метод теории Винера. Приводимые в § 9.5 уравнения оптимальной линейной фильтрации были получены автором в [7]. Они совершенно не чувствительны к изменению длительности интервала наблюдения, будучи одинаково применимы к конечному и полубесконечному интервалу, к стационарному и нестационарному процессу. Эквивалентные им уравнения позже были выведены Калманом и Бьюси [1] (уравнение [IV]).

§ 9.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблему оптимальной нелинейной фильтрации можно ставить как вырожденный частный случай общей задачи на оптимальное управление, сформулированной в предыдущей главе.

Пусть управление u_t (в данном аспекте более подходящим является термин «оценка»), соответствующее моменту t, представляет собой функцию $\{u_{t\tau},\ \tau\in T_t\}$ на некотором подмножестве $T_t\subset T$. Функции штрафов пусть имеют вид

$$
\begin{aligned}
c(\omega) &= \int\limits_T dt \int\limits_{T_t} C_{t\tau}(u_{t\tau},\ z_\tau)\, F_t(d\tau);\\
c^t(\omega) &= \int\limits_{s\leqslant t} ds \int\limits_{T_s} C_{s\tau}(u_{s\tau},\ z_\tau)\, F_s(d\tau).
\end{aligned} \tag{9.1}
$$

Здесь $F_t(\Lambda)$ (при фиксированном t) есть мера на борелевских подмножествах из $T_t\ni\tau$; $C_{t\tau}(u_{t\tau},\ z_\tau)$ — функция от $u_{t\tau}$ и z_τ, т. е, $\mathcal{U}_\tau\mathcal{Z}_\tau$-измеримая ω-функция. Условия измеримости и интегрируемости по t и τ считаем выполненными. В итоге $c^t(\omega)-c^s(\omega)$ является $\mathcal{U}_s^t\mathcal{Z}^b$ — измеримой функцией.

Предполагается, что вероятности $\mathbf{P}(\cdot\mid u)=\mathbf{P}(\cdot)$ основного процесса $\{z_t(\omega)\}$ не зависят от управления (оценки) u ($\mathcal{A}^t\supset\mathcal{Z}^b,\quad t\in T$). Наблюдаемый процесс $\{y_t(\omega)\}=$ $=\{y_t(z_t(\omega))\}$ также не зависит от оценки и зависит от значения z_t в тот же момент времени. Наконец, предполагается, что оценки $u_{t\tau}$, соответствующие различным t и τ, могут выбираться независимо друг от друга (несвязанное управление $\{u_{t\tau}\}$ как функция двух переменных).

При указанных предположениях минимизацию условного среднего риска можно проводить независимо для непересекающихся прямоугольников в плоскости t, τ и даже для каждой точки (t, τ). При этом решающие меры $\mu_{t_k}^{t_{k+1}}(d\omega \in \in \mathcal{U}_{t_k}^{t_{k+1}} | \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k})$ для ступенчатого индекса φ^N теряют зависимость от $u_a^{t_k}$:

$$\mu_{t_k}^{t_{k+1}}(du_{t_k}^{t_{k+1}} | \mathcal{U}^{t_k}\mathcal{Y}^{\varphi_k}) = \mu_{t_k}^{t_{k+1}}(du_{t_k}^{t_{k+1}} | \mathcal{Y}^{\varphi_k}). \tag{9.2}$$

В самом деле, записывая рекуррентное соотношение (8.38) для $k = N$, имеем

$$S_{t_N}(\mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}) = \min_{u_{t_N}^b | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_N}} \int (c - c^{t_N}) \mathbf{P}(d\omega | \mathcal{U}^b\bar{\mathcal{Y}}^{\varphi_N}). \tag{9.3}$$

Ввиду того что

$$\mathbf{P}(d\omega \in \mathcal{Z}^b | \mathcal{U}^b\mathcal{Y}^{\varphi_N}) \ (= \mathbf{P}(d\omega | \mathcal{Y}^{\varphi_N}))$$

не зависит от u, подлежащее минимизации выражение в (9.3) не зависит от $u_a^{t_N}$. Поэтому $\mu_{t_N}^b$ и $S_{t_N} (= S_{t_N}(\mathcal{Y}^{\varphi_N}))$ не зависят от $u_a^{t_N}$. Учитывая это, второе соотношение (8.38) для $k = N-1$ записываем в виде

$$S_{t_{N-1}} = \min_{u_{t_{N-1}}^{t_N} | \mathcal{U}^{t_{N-1}}\mathcal{Y}^{t_{N-1}}} \left[\int (c^{t_N} - c^{t_{N-1}}) \overline{\mathbf{P}(d\omega \in \mathcal{Z}^b | \mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}})}\right] +$$

$$+ \int S_{t_N}(\mathcal{Y}^{\varphi_N}) \mathbf{P}(d\omega | \bar{\mathcal{Y}}^{\varphi_{N-1}})\Big],$$

ибо

$$\mathbf{P}(d\omega \in \mathcal{Z}^b | \mathcal{U}^{t_N}\mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}) = \mathbf{P}(d\omega | \mathcal{Y}^{\varphi_{N-1}}).$$

Отсюда видно, что $\mu_{t_{N-1}}^{t_N}$ и $S_{t_{N-1}}$ не зависят от $u_a^{t_{N-1}}$. Продолжая рассмотрение аналогичным образом, можно убедиться, что все решающие меры (9.2) и урезанные риски S_{t_k} не зависят от $u_a^{t_k}$.

Из вышеизложенного следует, что оптимальная решающая мера (9.2) отыскивается в силу (9.1) минимизацией выражения

$$\mathbf{M}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{T_t} C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) F_t(d\tau) | \mathcal{Y}^{\varphi_k}\right] \equiv r_{t_k}^{t_{k+1}}(u_{t_k}^{t_{k+1}}, y_a^{\varphi_k}),$$

т. е.

$$\int r_{t_k}^{t_{k+1}}(u_{t_k}^{t_{k+1}}, y^{\varphi_k}) \mu_{t_k}^{t_{k+1}}(du_{t_k}^{t_{k+1}} | y_a^{\varphi_k}) =$$

$$= \min_{u_{t_k}^{t_{k+1}} | y_a^{\varphi_k}} r_{t_k}^{t_{k+1}}(u_{t_k}^{t_{k+1}}, y_a^{\varphi_k}) \equiv \rho_{t_k}^{t_{k+1}}(y_a^{\varphi_k}).$$

Итоговый средний риск для выбранного ступенчатого индекса можно записать

$$R_{\varphi N} = S_a = \sum_k \mathbf{M} \rho_{t_k}^{t_{k+1}} (y_a^{\varphi_k}).$$

Перейдем к рассмотрению непрерывного индекса $\varphi(t) = t$. Независимость результата от специального способа предельного перехода $N \to \infty$, $\varphi^N \to \varphi$ аргументируется проверкой выполнения условия регулярности (8.26). Оно в данном случае принимает вид

$$\rho_{\varphi'}^{t} (y_a^{\varphi'}) - \rho_{\varphi'}^{t-\Delta} (y_a^{\varphi'}) - \mathbf{M} [\rho_{t-\Delta}^{t} (y_a^{t-\Delta}) \mid y_a^{\varphi'}] = o(1)\Delta$$
$$(\varphi' = t - \Delta - c\Delta,\ 0 < c < \infty).$$

Учитывая определение $\rho_{t_k}^{t_{k+1}}$, видим, что это условие выполняется, если

$$\min_{u_{t\tau}} \mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^{\varphi'}] - \mathbf{M} \{\min_{u_{t\tau}} \mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^{t-\Delta}] \mid y_a^{\varphi'}\} \to 0$$

при $t - \Delta - \varphi' \to 0$ $(\tau \in [t - \Delta, t])$. Последнее соотношение справедливо, поскольку

$$\mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^{\varphi'}] - \mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^{t-\Delta}] \to 0 \ \text{(п. н.)}$$

при $t - \Delta - \varphi' \to 0$. Тем самым регулярность проверена. Кроме того,

$$\mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^{t-\Delta}] - \mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^{t}] \to 0 \ \text{(п. н.)}$$

при $\Delta \to 0$, поэтому в процессе предельного перехода экстремальная функция $\{u_{t\tau}^N\}$, соответствующая φ^N и определяемая из условий $r_{t_k}^{t_{k+1}} (u_{t_k}^{t_{k+1}}, y_a^{\varphi_k}) = \rho_{t_k}^{t_{k+1}} (y_a^{\varphi_k})$, дает риск, стремящийся к риску оптимального управления, определяемого минимизацией

$$\min_{u_{t\tau}} \mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^t].$$

Если для этого оптимального управления выполняются условия измеримости и интегрируемости по t и τ (см. (9.1)), то оно, действительно, соответствует минимальному итоговому риску.

Итак, оптимальная оценка $u_{t\tau}$ отыскивается в результате минимизации выражения

$$s_{t\tau} (u_{t\tau} \mid y_a^t) = \mathbf{M} [C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau) \mid y_a^t] = \int C_{t\tau} (u_{t\tau}, z_\tau)\, \mathbf{P} (dz_\tau \mid y_a^t). \quad (9.4)$$

Поскольку функция $C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau)$ задается условиями задачи, для нахождения алгоритма $d_{t\tau}(y_a^t) = u_{t\tau}$ оптимальной фильтрации требуется знать, как апостериорные вероятности $\mathbf{P}(dz_\tau | y_a^t)$ выражаются через наблюденный процесс. Этот вопрос для марковского процесса z_t уже исследовался в главах 5—7. Здесь мы применим полученные там результаты.

В некоторых важных частных случаях в качестве меры $F_t(\Lambda)$ можно брать меру

$$F_t(\Lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Lambda \ni t; \\ 0, & \text{если } \Lambda \not\ni t \end{cases} \quad (\text{т. е. } F_t = \delta(\tau - t)). \tag{9.5}$$

Тогда можно ограничиться лишь рассмотрением функций

$$u_{tt},\ s_{tt}(u_{tt} | y_a^t) = \int C_{tt}(u_{tt}, z_t)\, \mathbf{P}(dz_t | y_a^t) \tag{9.5.a}$$

и апостериорных вероятностей $\mathbf{P}(dz_t | y_a^t) = W_t(dz_t)$. Это приводит к упрощению проблемы фильтрации.

§ 9.2. УРАВНЕНИЯ И БЛОК-СХЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В этом параграфе рассмотрим нелинейную фильтрацию без указанного упрощения. Основной процесс $\{z_t, t \in T\}$ предполагаем марковским. Будем пользоваться обозначениями глав 5—7.

Апостериорная вероятность $\mathbf{P}(dz_\tau | y_a^t)$ по-разному выражается через апостериорный процесс $\{W_s\}$ при $\tau > t$ и при $\tau < t$. Если $\tau > t$, то вероятность $\mathbf{P}(dz_\tau | y_a^t)$ может быть получена из $W_t(dz_t)$ при помощи априорной вероятности перехода:

$$\mathbf{P}(dz_\tau | y_a^t) = \int_{z_t} W_t(dz_t)\, \mathbf{P}(dz_\tau | z_t) \qquad (\tau > t).$$

Это выражение можно рассматривать как решение дифференциального уравнения

$$d_u \mathbf{P}(dz_u | y_a^t) = [\mathbf{P}(\cdot | y_a^t)\, dL_{pr}](dz_u), \tag{9.6}$$

$$t \leqslant u \leqslant \tau$$

при «начальном» условии

$$\mathbf{P}(dz_u | y_a^t) = W_t(dz_u) \text{ при } u = t.$$

Таким образом, можно определить $\mathbf{P}(dz_\tau | y_a^t)$ при любом $\tau > t$, если сначала определена мера $W_t(dz_t)$.

Аналогично рассмотрим, как можно найти $\mathbf{P}(dz_\sigma \mid y_a^t)$; $\sigma < t$. Для этого воспользуемся формулой (5.50):

$$\mathbf{P}(dz_\sigma \mid y_a^t) = W_\sigma(dz_\sigma)\, \widetilde{V}_\sigma^t(z_\sigma, \Omega). \tag{9.7}$$

Здесь функция правдоподобия $\widetilde{V}_\sigma{}^t(z, \Omega)$ является решением уравнения (5.59) или (5.67) (где нужно заменить t, u на s, t и полагать $s \in [\sigma, t]$) при «начальном» условии

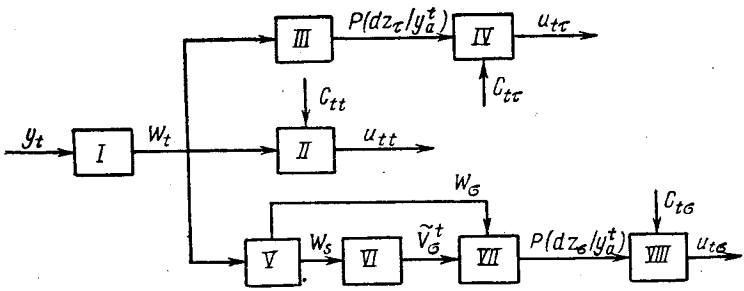
$$\widetilde{V}_s^t(z, \Omega) = 1, \text{ если } s = t.$$

Инфинитезимальный оператор $d\widetilde{L}(s)$ указанных уравнений в свою очередь выражается через W_s.

Итак, апостериорные вероятности $\mathbf{P}(dz_\tau \mid y_a^t)$, $\mathbf{P}(dz_\sigma \mid y_a^t)$, $\tau > t$, $\sigma < t$ можно найти, если предварительно определен апостериорный процесс $\{W_s,\ s \leqslant t\}$. Последний же отыскивается как решение уравнения (5.57), (5.61) или (5.66).

После того как получены апостериорные вероятности, нетрудно найти выражения типа (9.4), а при помощи них и оптимальные оценочные функции.

Описанный способ отыскания оптимальных оценок может быть осуществлен при помощи автоматически действующего устройства — фильтрующей системы. Ее блок-схема приведена на рисунке, где $\sigma < t < \tau$.



Для конкретности остановимся на рассмотренном в гл. 6 частном случае процесса с несколькими состояниями. Используя найденный там апостериорный инфинитезимальный оператор, получаем, что основное уравнение нелинейной фильтрации, определяющее апостериорный процесс $\{w_\alpha(t)\}$, имеет вид (6.31)

$$dw_\alpha = w_\gamma p_{\gamma\alpha} dt + w_\alpha [a_{\rho'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'}]\, b_{\rho'\sigma'}^{-1}\, dy_{\sigma'} -$$

$$- \frac{1}{2} w_\alpha \Big\{ [a_{\rho'}(\alpha)\, a_{\sigma'}(\alpha) - \mathbf{M}_{ps} a_{\rho'} a_{\sigma'}]\, b_{\rho'\sigma'}^{-1} +$$

$$+\left[\frac{\partial a_{\rho'}}{\partial y_\pi}(\alpha)-\mathbf{M}_{ps}\frac{\partial a_{\rho'}}{\partial y_\pi}\right]b^{-1}_{\rho'\sigma'}b_{\sigma'\pi}+$$

$$+\left[a_{\rho'}(\alpha)-\mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}\right]\frac{\partial b^{-1}_{\rho'\sigma'}}{\partial y_\pi}b_{\sigma'\pi}\Big\}dt. \tag{9.8}$$

Блок I на рисунке моделирует это уравнение и тем самым осуществляет преобразование наблюдаемого процесса $\{y_t\}$ в апостериорный процесс $\{w_\alpha(t)\}$.

Если мера $F_t(\Lambda)$ имеет вид (9.5) (случай фильтрации без запаздывания и упреждения), то для получения оценки u_{tt} требуется лишь сконструировать блок II, который отыскивает и выдает то значение u_{tt}, при котором выражение

$$\sum_\alpha C_{tt}(u_{tt}, \alpha)\, w_\alpha(t)$$

достигает минимума.

Если представляют интерес оценки $u_{t\tau}$, $\tau > t$, то нужно поставить блок III, который моделирует уравнение (9.6), т. е. уравнения

$$dp_\alpha(u) = \sum_\gamma p_\gamma(u)\, p_{\gamma\alpha}dt, \quad t \leqslant u \leqslant \tau$$

$$(p_\alpha(u) = \mathbf{P}\{x_u = \alpha \mid y_a^t\})$$

при «начальном» условии

$$p_\alpha(t) = w_\alpha(t)$$

(требуется, конечно, чтобы физически этот процесс протекал в другом временном масштабе — значительно более быстро). После определения $p_\alpha(\tau)$ блок IV выдает оценку $u_{t\tau}$, соответствующую минимуму выражения

$$\sum_\alpha C_{t\tau}(u_{t\tau}, \alpha)\, p_\alpha(\tau).$$

Наконец, рассмотрим устройство, служащее для получения оценок $u_{t\sigma}$, $\sigma < t$. Блок V запоминает прошлый процесс $\{W_s, s \leqslant t\}$ и подает на блок VI в разные моменты времени нужные значения этого процесса. Блок VI моделирует уравнение (5.67), имеющее в данном случае вид

$$-d_s\widetilde{V}_s^t(\alpha, \Omega) = p_{\alpha\beta}\widetilde{V}_s^t(\beta, \Omega)\,dt +$$

$$+\widetilde{V}_s^t(\alpha, \Omega)\{[a_{\rho'}(\alpha)-\mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}]\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}dy_{\sigma'} -$$

$$-\frac{dt}{2}\,[a_{\rho'}(\alpha)\,a_{\sigma'}(\alpha)-\mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}a_{\sigma'}]\,b^{-1}_{\rho'\sigma'} -$$

$$-\frac{dt}{2}\left[\frac{\partial a_{\rho'}(\alpha)}{\partial y_\pi}-\mathbf{M}_{ps}\frac{\partial a_{\rho'}}{\partial y_\pi}\right]b^{-1}_{\rho'\sigma'}b_{\sigma'\pi}-$$

$$\left.-\frac{dt}{2}\left[a_{\rho'}(\alpha)-\mathbf{M}_{ps}a_{\rho'}\right]\frac{\partial b^{-1}_{\rho'\sigma'}}{\partial y_\pi}b_{\sigma'\pi}\right\} \qquad (9.9)$$

при «начальном» условии

$$\widetilde{V}^t_t(\alpha, \Omega)=1$$

и при обратном течении времени (так же, как и блок III, в другом временно́м масштабе). На его выходе получается процесс $\widetilde{V}^t_s(\alpha, \Omega)$. Блок VII образует комбинацию (9.7), т. е. апостериорные вероятности

$$\mathbf{P}(x_\sigma=\alpha\,|\,y^t_a)=w_\alpha(\sigma)\,\widetilde{V}^t_\sigma(\alpha, \Omega).$$

Последний блок VIII, отыскивая минимум выражения

$$\sum_\alpha C_{t\sigma}(u_{t\sigma}, \alpha)\,\mathbf{P}(x_\sigma=\alpha\,|\,y^t_a),$$

выдает оптимальную оценку $u_{t\sigma}$.

В частном случае процесса с двумя состояниями, рассмотренного в § 6.5, приведенные выше уравнения и выражения упрощаются. Так, уравнение (9.8) принимает вид (6.43), а уравнение (9.9) обращается в (6.44).

§ 9.3. ПРИМЕР АПОСТЕРИОРНОГО ПРОЦЕССА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Аналогично строится фильтрующая система и в том случае, когда апостериорный процесс имеет бесконечное число состояний. Для простоты в дальнейшем будем ограничиваться случаем (9.5).

В конце гл. 6 отмечалось, что полученные в ней результаты могут быть распространены на тот случай, когда марковский процесс $\{\alpha(t)\}$ может принимать значение из бесконечного множества.

Пусть α имеет смысл фазы узкополосного процесса и может принимать значение из множества $[0, 2\pi]$. Априори пусть фаза является чисто диффузионным процессом, т. е. описывается инфинитезимальным оператором

$$dL_{pr}(t)=\frac{1}{2}\,dt\,D\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}, \qquad (9.10)$$

где коэффициент диффузии D постоянен.

Наблюдается смесь узкополосного процесса $B_0\cos(\omega_0 t+\alpha(t))$ с белым шумом, имеющим спектральную интенсивность $2N$. Этот случай, как известно, можно формулировать так: наблюдаются два диффузионных процесса $\{y_1(t)\}$,

$\{y_2(t)\}$, которые при фиксированном α описываются параметрами сноса

$$a_1(t) = B_0 \cos\alpha; \quad a_2(t) = B_0 \sin\alpha$$

и матрицей локальных дисперсий

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Применяя формулы (6.47), (6.48) к данному примеру, получаем апостериорный инфинитезимальный оператор

$$dL^*(t) = \frac{1}{2} dt\, D \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{B_0}{N} (\cos\alpha\, d^*y_1 + \sin\alpha\, d^*y_2).$$

Если его записать в форме

$$dL^*(t) = A^* dt + A^*_\rho\, d^*y_\rho,$$

то, очевидно,

$$A^* = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}; \quad A^*_1 = \frac{B_0}{N}\cos\alpha; \quad A^*_2 = \frac{B_0}{N}\sin\alpha.$$

Используем формулу (3.71), чтобы найти инфинитезимальный оператор

$$dL(t) = A dt + A_\rho dy_\rho.$$

Она дает

$$A = A^* - \frac{1}{2} A^*_\rho A^*_\sigma b_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{N} \cos^2\alpha - \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{N} \sin^2\alpha$$

$$(A_\rho = A^*_\rho).$$

Следовательно,

$$dL(t) = \frac{1}{2} dt D \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{B_0}{N} (\cos\alpha\, dy_1 + \sin\alpha\, dy_2) - \frac{B_0^2}{2N} dt. \quad (9.10)$$

Теперь мы можем записать основное уравнение оптимальной фильтрации (5.57), (5.61), (5.66), определяющее апостериорные вероятности W_t, которое соответствует блоку I на рисунке стр. 205. Если

$$w_t(\alpha) = \frac{W_t(d\alpha)}{d\alpha}$$

апостериорная плотность распределения вероятностей, то согласно (9.10), (5.66) имеем

$$dw_t(\alpha) = \frac{1}{2} dt D \frac{\partial^2 w_t(\alpha)}{\partial\alpha^2} + \frac{B_0}{N} [(\cos\alpha - c_1)\, dy_1 +$$

$$+ (\sin\alpha - s_1)\, dy_2]\, w_t(\alpha), \quad (9.11)$$

где обозначено

$$c_1 = \mathbf{M}_{ps}\cos\alpha = \int \cos\alpha\, w_t(\alpha)\, d\alpha;\; s_1 = \mathbf{M}_{ps}\sin\alpha = \int \sin\alpha\, w_t(\alpha)\, d\alpha.$$

При фиксации начальной плотности, скажем $w_{t\,0}(\alpha) = p_0(\alpha)$, это уравнение однозначно определяет апостериорную меру.

Если задать критерий качества при помощи функции штрафа $C(u, \alpha)$, то мы можем найти теперь оптимальное оценочное значение $u(t) \equiv \alpha_0(t) = d_t(y_a^t)$ неизвестной фазы (здесь d_t — решающий алгоритм). Оно соответствует минимуму выражения:

$$\min_u \int C(u, \alpha)\, w_t(\alpha)\, d\alpha = \int C(\alpha_0(t), \alpha)\, w_t(\alpha)\, d\alpha. \qquad (9.12)$$

Выберем для определенности квадратичный критерий качества по отношению к узкополосному сигналу $B_0\cos(\omega_0 t+\alpha)$. Именно, положим

$$C(u, \alpha) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int\limits_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_0}} [B_0\cos(\omega_0 t' + u) - B_0\cos(\omega_0 t' + \alpha)]^2\, dt' =$$

$$= B_0^2[1 - \cos(u - \alpha)].$$

Тогда в (9.12) минимизации будет подвергаться выражение

$$\int C(u, \alpha)\, w_t(\alpha)\, d\alpha = B_0^2[1 - c_1\cos u - s_1\sin u]. \qquad (9.13)$$

Минимум этого выражения находится без труда. Оценочное значение фазы определяется соотношениями

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{s_1}{c_1}; \quad \sin\alpha_0 = \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + c_1^2}}$$

Следовательно, оценочный, т. е. отфильтрованный узкополосный сигнал можно записать

$$s_0(t) = B_0\cos(\omega_0 t + \alpha_0) = B_0\frac{c_1}{\sqrt{s_1^2+c_1^2}}\cos\omega_0 t -$$

$$- B_0\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2+c_1^2}}\sin\omega_0 t. \qquad (9.14)$$

Оконечный блок II на рисунке выдает оценочное значение фазы $\alpha_0(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{s_1}{c_1}$ или отфильтрованный сигнал (9.14).

Чтобы облегчить конструирование блока I (см. рис.), уравнение (9.11) для плотности распределения $w_t(\alpha)$ может быть заменено на эквивалентные уравнения, записанные для совершенно других параметров, заменяющих $w_t(\alpha)$. Так, например, можно ввести параметры $s_n(t)$, $c_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, определяемые формулой

$$w_t(\alpha) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(t) \sin n\alpha + c_n(t) \cos n\alpha), \quad (9.15)$$

т. е.

$$s_n(t) = \mathbf{M}_{ps} \sin n\alpha = \int_0^{2\pi} \sin n\alpha \, w_t(\alpha) \, d\alpha;$$

$$c_n(t) = \int_0^{2\pi} \cos n\alpha \, w_t(\alpha) d\alpha. \quad (9.16)$$

Подставляя (9.15) в (9.11) и приравнивая порознь члены, соответствующие различным функциям $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, получаем для параметров (9.16) систему уравнений

$$ds_1 = -\frac{1}{2} Ds_1 dt + \frac{B_0}{2D} dy_1 (s_2 - 2s_1c_1) + \frac{B_0}{2D} dy_2 (1 - c_2 - 2s_1^2);$$

$$dc_1 = -\frac{1}{2} Dc_1 dt + \frac{B_0}{2D} dy_1 (1 + c_1 - 2c_1^2) +$$

$$+ \frac{B_0}{2D} dy_2 (s_2 - 2s_1c_1); \quad (9.17)$$

$$ds_n = -\frac{1}{2} Dn^2 s_n dt + \frac{B_0}{2D} dy_1 (s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n c_1) +$$

$$+ \frac{B_0}{2D} dy_2 (c_{n-1} - c_{n+1} - 2s_1 s_n);$$

$$dc_n = -\frac{1}{2} Dn^2 c_n dt + \frac{B_0}{2D} dy_1 (c_{n+1} + c_{n-1} - 2c_1 c_n) +$$

$$+ \frac{B_0}{2D} dy_2 (s_{n+1} - s_{n-1} - 2s_1 c_n),$$

$$n = 2, 3, \ldots$$

Она эквивалентна уравнению (9.11), и блок I может быть синтезирован в соответствии с этими уравнениями.

Начальное распределение естественно выбрать равномерным. Это соответствует нулевым начальным условиям:

$$s_n(t_0) = 0; \quad c_n(t_0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Процессы $s_1(t)$ $c_1(t)$, вырабатываемые в блоке I, можно непосредственно использовать для воспроизведения отфильтрованного сигнала в соответствии с формулой (9.14), а также для оценки качества фильтрации. Из (9.13) имеем

$$\mathbf{M}\,[C(\alpha_0, \alpha)\,|\,y_a^t] = B_0^2[1 - \sqrt{s_1^2(t) + c_1^2(t)}];$$

$$\mathbf{M}C(\alpha_0, \alpha) = B_0^2\mathbf{M}[1 - \sqrt{s_1^2(t) + c_1^2(t)}].$$

Следовательно, зная $s_1(t)$, $c_1(t)$, можно судить о величине средних штрафов.

§ 9.4. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ПРОЦЕССОВ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

1. Пусть теперь априорный процесс $\{x_t\}$ является одномерным марковским процессом на прямой и описывается инфинитезимальным оператором

$$dL_{pr}(t) = \left(\frac{b}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)dt$$

(b константа). Наблюдается сумма его и белого шума, или, это по существу то же, наблюдаемым является процесс

$$y_1(t) = \int_{t_0}^{t} x(\tau)\,d\tau + \zeta(t), \tag{9.18}$$

где $\zeta(t)$ — винеровский процесс: $\mathbf{M}\zeta = 0$; $\mathbf{M}\Delta\zeta^2 = N\Delta t$. Очевидно, что процесс (9.18) имеет параметр сноса $a_1 = x$ и локальную дисперсию $b_{11} = N$.

Используя, как и в § 9.3, формулы (6.47), (6.48), а также (3.71), находим апостериорные инфинитезимальные операторы

$$dL^*(t) = dL_{pr}(t) + \frac{1}{N}\,x\,d^*y_1;$$

$$dL(t) = dL_{pr}(t) + \frac{1}{N}\,x\,dy_1 - \frac{1}{2N}\,x^2dt.$$

Поэтому основное уравнение (5.66) оптимальной фильтрации, определяющее апостериорную плотность распределения, имеет вид

$$dw_t(x) = \frac{1}{2}\,b\,dt\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} - dt\frac{\partial}{\partial x}[a(x)\,w_t] + \frac{dy_1}{N}\,[x - \mathbf{M}_{ps}x]\,w_t -$$

$$- \frac{dt}{2N}\,[x^2 - \mathbf{M}_{ps}x^2]\,w_t, \tag{9.19}$$

или, короче,

$$\dot{w}=\frac{b}{2}\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}[a(x)w]+\frac{w}{N}\left\{\dot{y}_1[x-\mathbf{M}_{ps}x]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}[x^2-\mathbf{M}_{ps}x^2]\right\}$$
$$\left(\mathbf{M}_{ps}\ldots=\int\ldots w(x)\,dx\right).$$

2. Рассмотрим несколько более сложный случай. Пусть процесс $\{x(t)\}$ такой же, что и в предыдущем пункте, но наблюдается не его сумма с белым шумом, а сумма

$$y(t)=x(t)+\xi(t)$$

с экспоненциально-коррелированным гауссовым процессом $\xi(t)$ ($\mathbf{M}\xi(t)=0$; $\mathbf{M}\xi(t)\xi(t+\tau)=\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$). Последний является марковским и описывается инфинитезимальным оператором

$$(dL_{pr})_\xi=\beta\left(\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)dt$$

или уравнением

$$\beta^{-1}d\xi+\xi dt=d\zeta \tag{9.20}$$
$$\left(\mathbf{M}\zeta=0;\ \mathbf{M}\Delta\zeta^2=N\Delta t=2\frac{\sigma^2}{\beta}\Delta t\right).$$

Двумерный процесс $(x(t),\ y(t))$, естественно, также марковский; он имеет параметры

$$a_x=a(x);\ a_y=a(x)-\beta\xi=a(x)-\beta(y-x);$$
$$\begin{pmatrix}b_{xx} & b_{xy}\\ b_{yx} & b_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & b\\ b & b+2\beta\sigma^2\end{pmatrix}.$$

Мы видим, что наблюдается один компонент двумерного марковского процесса, поэтому данный пример относится к тому случаю условного марковского процесса, который исследовался в гл. 7. Более того, он является частным случаем (при $a'(\xi)=-\beta\xi$ и постоянных b, b') первого примера из § 7.3. Конкретизируя приведенные там формулы, имеем

$$(b+2\beta\sigma^2)\,dL(t)=b\beta\sigma^2dt\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+[bdy+(2\beta\sigma^2a(x)-$$
$$-b\beta x+b\beta y)\,dt]\,\frac{\partial}{\partial x}+(a(x)+\beta x-\beta y)\left[dy-\frac{1}{2}(a(x)+\right.$$
$$\left.+\beta x-\beta y)\,dt\right]-\frac{dt}{2}\left[b\frac{\partial a(x)}{\partial x}-2\beta^2\sigma^2\right]$$

и

$$\dot{w} = \frac{b\beta\sigma^2}{b+2\beta\sigma^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{b\dot{y}}{b+2\beta\sigma^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta\,\frac{2\sigma^2 a(x) - bx + by}{b+2\beta\sigma^2}\right)w\right] + [F - \mathbf{M}_{ps}F]\,w;$$

$$(b+2\beta\sigma^2)F = [a(x)+\beta x](\dot{y}+\beta y) - \frac{1}{2}[a(x)+\beta x]^2 -$$

$$-\frac{1}{2}b\frac{\partial a(x)}{\partial x}. \qquad (9.21)$$

Можно показать, что уравнение (9.21) с вероятностью 1 переходит в уравнение (9.19), если совершить предельный переход $\beta \to \infty$, но так, чтобы величина $2\sigma^2/\beta = N$ оставалась постоянной. При этом нужно учесть, что

$$\beta^{-1}dy + y\,dt = \beta^{-1}dx + x\,dt + \beta^{-1}d\xi + \xi\,dt$$

обращается в дифференциал dy_1 процесса (9.18), так как $\beta^{-1}dx + x\,dt$ обращается в $x\,dt$, а выражение (9.20) есть дифференциал винеровского процесса.

3. Любое из уравнений (9.19), (9.21) можно записать в виде

$$\dot{w}(x) = B\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}[G(x)w] + [F(x) - \mathbf{M}_{ps}F]\,w. \qquad (9.22)$$

Будем выбирать оценочное значение $x_0(t) = d_t(y_a^t)$ сигнала ($d_t(\cdot)$ — решающая функция) по критерию максимальной плотности вероятностей, т. е. выбирать «наиболее вероятное» значение. В этом случае удобно положить

$$w_t(x) = \exp\left\{c(t) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}h_n(t)[x - x_0(t)]^n\right\} \qquad (9.23)$$

и заменить уравнение (9.22) на систему уравнений для параметров $x_0(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$,.... Заменяя (9.22) на уравнение для $\ln w_t(x)$, подставляя (9.23) и приравнивая члены разложения по различным степеням $(x - x_0)^n$, получаем систему уравнений

$$-h_2\dot{x}_0 = Bh_3 - G(x_0)h_2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0);$$

$$\dot{h}_n - h_{n+1}\dot{x}_0 = Bh_{n+2} - B\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}h_{k+1}h_{n-k+1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x_0)\,h_{n-k+1}+\frac{\partial^{n+1}G}{\partial x^{n+1}}(x_0)-\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x_0), \quad (9.24)$$

$$n \geqslant 2.$$

При отсутствии начальных сведений начальные значения параметров h_n можно полагать нулевыми $h_2(t_0)=h_3(t_0)=\ldots=0$.

Оптимальная фильтрующая система работает в соответствии с приведенными уравнениями и дает на выходе оценочное, т. е. отфильтрованное значение сигнала $x_0(t)$. Как видно из (9.22), оно (при $h_2>0$) действительно соответствует максимуму функции $w_t(x)$. Величина второго параметра $h_2(t)$ позволяет судить о качестве фильтрации, показывая степень апостериорной точности.

§ 9.5. ПЕРЕХОД К ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

1. Как видно из примеров, приведенных в § 9.3, 9.4, основное уравнение оптимальной фильтрации часто записывается для бесконечного числа переменных: плотности распределения вероятностей или заменяющего ее счетного множества параметров. С точки зрения практического осуществления фильтрующей системы, конечно, желательно иметь дело с конечным числом переменных. Это может быть достигнуто путем «квантования» фазового пространства условного процесса (замены его на пространство с конечным числом состояний) или путем обрывания цепочки уравнений типа (9.17) или (9.24).

Конечно, в общем случае указанные приемы связаны с ухудшением качества фильтрации. В некоторых особых случаях, однако, уравнение для плотности распределения без каких-либо погрешностей может быть заменено на уравнения для конечного числа параметров, в точности ему эквивалентные. Это имеет место, когда апостериорная плотность распределения является в точности гауссовой.

Рассмотрим многомерный аналог уравнения (9.22), имеющий вид

$$\dot{w}(x)=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}[B_{\alpha\beta}(x)\,w]-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[G_\alpha(x)\,w]+[F(x)-\mathbf{M}_{ps}F]\,w, \quad (9.25)$$

где $B_{\alpha\beta}(x)$, $G_\alpha(x)$, $F(x)$ некоторые функции времени t и точки $x=(x_1,\ldots,x_r)$ r-мерного пространства R_r, определяемые теорией условных марковских процессов. Уравнения подобного типа получаются, в частности, в тех случаях, которые рассматривались в гл. 7 и в конце гл. 6 (если $\alpha(t)$ — диффузионный процесс).

Сформулируем условия, при которых апостериорная плотность $w_t(x)$ будет гауссовой, если гауссовой является начальная плотность $w_{t0}(x)$.

9.1.А. *Элементы матрицы* $B_{\alpha\beta}$ *постоянны* (*не зависят от* x);

9.1.Б. *Функции* $G_\alpha(x) = g_\alpha + G_{\alpha\beta}x_\beta$ *линейно зависят от* x;

9.1.В. *Функция* $F(x) = f + F_\alpha x_\alpha + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ *зависит от* x *линейно и квадратично.*

Тогда, подставляя

$$w_t(x) = \exp\left\{c(t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}(x_\alpha - m_\alpha)(x_\beta - m_\beta)\right\} \quad (9.26)$$

в (9.25), по аналогии с (9.24) получаем уравнения

$$h_{\alpha\beta}[\dot{m}_\beta - G_\beta(m)] = \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(m);$$

$$\dot{h}_{\alpha\beta} = -2h_{\alpha\gamma}B_{\gamma\delta}h_{\delta\beta} - h_{\alpha\gamma}G_{\gamma\beta} - h_{\beta\gamma}G_{\gamma\alpha} - F_{\alpha\beta}. \quad (9.27)$$

Этим уравнениям соответствуют начальные условия

$$m_\alpha(t_0) = \mathring{m}_\alpha; \; h_{\alpha\beta}(t_0) = \mathring{h}_{\alpha\beta},$$

где $\mathring{m}_\alpha$, $\mathring{h}_{\alpha\beta}$ — параметры начального гауссового распределения;

$$w_{t_0}(x) = \mathrm{const}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathring{h}_{\alpha\beta}(x_\alpha - \mathring{m}_\alpha)(x_\beta - \mathring{m}_\beta)\right\}.$$

Вводя обратную матрицу

$$\| k_{\alpha\beta} \| = \| h_{\alpha\beta} \|^{-1},$$

уравнения (9.27) можно преобразовать к виду

$$\dot{m}_\alpha = G_\alpha(m) + k_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x_\beta}(m) = g_\alpha + k_{\alpha\beta}F_\beta + (G_{\alpha\gamma} + k_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma})\, m_\gamma; \quad (9.28)$$

$$\dot{k}_{\alpha\beta} = 2B_{\alpha\beta} + G_{\alpha\gamma}k_{\gamma\beta} + G_{\beta\gamma}k_{\gamma\alpha} + k_{\alpha\gamma}F_{\gamma\delta}k_{\delta\beta}.$$

Обычно при выполнении требований 9.1.А—В оказываются зависящими от наблюдаемого процесса $\{y(t)\}$ (и притом линейно) лишь функции g_α, F_α. В соответствии с этим уравнения фильтрации (9.28) будут определять линейное преобразование наблюдаемого сигнала $\{y(t)\}$ в оценочный сигнал $\{m(t)\}$. Таким образом, в этом случае указанные уравнения определяют *линейную* оптимальную фильтрацию, но, вообще говоря, *нестационарную.*

2. Обратимся к примерам § 9.4. Условия 9.1.А—В будут выполнены для уравнений (9.19), (9.21), если $a(x)$ линейная функция, скажем $a(x)=\nu-\gamma x$. Тогда в (9.22) для (9.19)

$$B=\frac{1}{2}b;\ G(x)=\nu-\gamma x;\ F=\frac{1}{N}\left(x\dot{y}-\frac{1}{2}x^2\right)$$

и уравнения (9.28) принимают вид

$$\begin{gathered}\dot{m}=\nu-\gamma m+\frac{k}{N}(\dot{y}_1-m);\\ \dot{k}+2\gamma k=b-\frac{k^2}{N}\quad(m\equiv x_\circ).\end{gathered}\tag{9.29}$$

Обратимся к другому примеру, т. е. к уравнению (9.21). Для него

$$B=\frac{b\beta\sigma^2}{b+2\beta\sigma^2};\ G(x)=\frac{2\beta\sigma^2\nu+b(\dot{y}+\beta y)-\beta(b+2\gamma\sigma^2)x}{b+2\beta\sigma^2};$$

$$F=f+\frac{(\beta-\gamma)(\dot{y}+\beta y-\nu)x-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2x^2}{b+2\beta\sigma^2}.$$

Поэтому уравнения фильтрации (9.28) дают

$$\begin{gathered}\dot{m}=-\frac{\beta+2\gamma\sigma^2}{\beta+2\beta\sigma^2}m+\frac{2\beta\sigma^2\nu+b(\dot{y}+\beta y)}{\beta+2\beta\sigma^2}+\\ +k\frac{\beta-\gamma}{\beta+2\beta\sigma^2}[\dot{y}+\beta y-\nu-(\beta-\gamma)m];\\ \dot{k}=\frac{2b\beta\sigma^2}{b+2\beta\sigma^2}-2\frac{b+2\gamma\sigma^2}{b+2\beta\sigma^2}\beta k-\frac{(\beta-\gamma)^2}{b+2\beta\sigma^2}k^2.\end{gathered}\tag{9.30}$$

Особый интерес представляет стационарный режим фильтрации, когда параметры процессов не зависят от времени, а момент начала работы устремляется в далекое прошлое: $t-t_0\to\infty$. Тогда апостериорная дисперсия k обращается в постоянную, которую можно найти из уравнений фильтрации, приравнивая нулю производную $\dot{k}$. Разрешая получающееся квадратное уравнение, находим, что для случаев (9.29) и (9.30) стационарная дисперсия соответственно равна

$$\begin{gathered}k=\sqrt{\gamma^2N^2+Nb}-\gamma N;\\ k=(\beta-\gamma)^{-2}\left[\sqrt{(b+2\gamma\sigma^2)^2\beta^2+2b\beta\sigma^2(\beta-\gamma)^2}-(b+2\gamma\sigma^2)\beta\right].\end{gathered}\tag{9.31}$$

В описанном стационарном приближении данное решение проблемы фильтрации по результатам совпадает с решением, которое может быть получено при помощи теории линейной фильтрации Винера. Изложенный путь решения, явно использующий марковские свойства процессов, требует, однако, меньших вычислений. Еще более существенны преимущества данного метода при рассмотрении нестационарного режима фильтрации. Формулы (9.28) дают решение проблемы также при конечных временах работы $t-t_0$ и при параметрах процессов, меняющихся во времени.

3. Рассмотрим важный случай многомерного условного марковского процесса, когда требования 9.1.А—В являются выполняющимися. Именно, пусть имеется $(m+l)$-мерный диффузионный процесс $\{z_j\}$ и наблюдается l его компонентов, как это было в гл. 7. Но дополнительно предположим, что локальные дисперсии b_{jk} не зависят от z, сносы зависят линейно:

$$a_j(z, t) = \nu_j + d_{jk} z_k, \quad j = 1, \ldots, m+l$$

и $c = 0$ (можно полагать, конечно, $c = c_0 + c_j z_j + \frac{1}{2} c_{jk} z_j z_k$, но с практической точки зрения это мало интересный случай).

Чтобы записать апостериорный инфинитезимальный оператор и уравнение (9.25) для данного случая, остается лишь воспользоваться формулами (7.16), (7.19). При сделанных предположениях ряд членов в этих формулах выпадает, и мы имеем

$$2B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\sigma'} b^{-1}_{\sigma'\rho'} b_{\rho'\beta};$$

$$\begin{aligned} G_\alpha(x) &= a_\alpha(x, y, t) + b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} [\dot{y}_{\sigma'} - a_{\sigma'}(x, y, t)] = \\ &= \nu_\alpha + d_{\alpha\pi} y_\pi + b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} (\dot{y}_{\sigma'} - \nu_{\sigma'} - d_{\sigma'\pi} y_\pi) + \\ &\quad + (d_{\alpha\beta} - b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} d_{\sigma'\beta}) x_\beta, \end{aligned} \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned} F(x) = &-\frac{1}{2} b_{j\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} d_{\sigma' j} + (\nu_{\rho'} + d_{\rho'\pi} y_\pi + d_{\rho'\alpha} x_\alpha) b^{-1}_{\rho'\sigma'} (\dot{y}_{\sigma'} - \\ &- \frac{1}{2} \nu_{\sigma'} - \frac{1}{2} d_{\sigma'\rho} y_\rho - \frac{1}{2} d_{\sigma'\beta} x_\beta). \end{aligned}$$

Условия 9.1.А—В оказываются выполненными, апостериорная плотность распределения является гауссовой и мы без труда можем записать уравнения (9.28) для ее параметров:

$$\begin{aligned} \dot{m}_\alpha &= G_\alpha(m) + [\dot{y}_{\sigma'} - a_{\sigma'}(m, y, t)] b^{-1}_{\sigma'\rho'} d_{\rho'\beta} k_{\beta\alpha} = \\ &= a_\alpha(m, y, t) + [\dot{y}_{\sigma'} - a_{\sigma'}(m, y, t)] b^{-1}_{\sigma'\rho'} [b_{\rho'\alpha} + d_{\rho'\beta} k_{\beta\alpha}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{k}_{\alpha\beta} &= 2B_{\alpha\beta} + (d_{\alpha\gamma} - b_{\alpha\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} d_{\sigma'\gamma}) k_{\gamma\beta} + \\ &+ (d_{\beta\gamma} - b_{\beta\rho'} b^{-1}_{\rho'\sigma'} d_{\sigma'\gamma}) k_{\gamma\alpha} - k_{\alpha\gamma} d_{\rho'\gamma} b^{-1}_{\rho'\sigma'} d_{\sigma'\delta} k_{\delta\beta}. \end{aligned} \tag{9.33}$$

Приведенные раньше уравнения (9.30) являются частным случаем этих формул.

Наблюдаемые координаты $\{y_\rho\}$ и апостериорное распределение вероятностей $w_t(x)$ для остальных координат образуют в совокупности согласно теореме 5.9 вторичный марковский процесс. Поскольку апостериорное распределение $w_t(x)$ определяется параметрами $\{m_\alpha\}$, $\{k_{\alpha\beta}\}$, причем изменение параметров $k_{\alpha\beta}(t)$ носит неслучайный характер и может быть вычислено заранее, целесообразно заменить $w_t(x)$ на апостериорные средние $\{m_\alpha\}$. Тогда останутся лишь переменные $\{m_\alpha,\ y_\rho\}$, которые в совокупности и будут составлять вторичный апостериорный марковский процесс. Этим переменным соответствует, как нетрудно получить из (9.33), вторичный апостериорный инфинитезимальный оператор

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt}=a_\alpha(m,\,y,\,t)\,\frac{\partial}{\partial m_\alpha}+a_\rho(m,\,y,\,t)\,\frac{\partial}{\partial y_\rho}+$$

$$+\frac{1}{2}\,(b_{\rho'\alpha}+d_{\rho'\gamma}k_{\gamma\alpha})\,b^{-1}_{\rho'\sigma'}\,(b_{\sigma'\beta}+d_{\sigma'\delta}k_{\delta\beta})\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+$$

$$+b_{\pi\sigma'}b^{-1}_{\sigma'\rho'}\,(b_{\rho'\alpha}+d_{\rho'\beta}k_{\beta\alpha})\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial y_\pi}+\frac{1}{2}\,b_{\pi\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial y_\pi\partial y_\rho}\qquad(9.34)$$

(функции $k_{\alpha\beta}(t)$ предполагаются известными).

Вторичный марковский процесс $\{m_\alpha, y_\rho\}$ протекает в том же $(m+l)$-мерном пространстве, что и априорный процесс $z=\{x_\alpha, y_\rho\}$.

§ 9.6. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО ПРИМЕРА

В настоящем параграфе будет рассмотрена нелинейная и линейная фильтрация марковского импульсного сигнала с двумя состояниями $\eta\,(t)=\pm 1$, смешанного с белым шумом, при среднеквадратичном критерии. Априорные вероятности $\mathbf{P}\,\{\,\eta\,(t)=\pm\,1\,\}=p_{1,2}$ пусть удовлетворяют уравнению

$$\dot p_1=-\dot p_2=-\mu p_1+\nu p_2,\qquad(9.35)$$

где μ и ν постоянны. Наблюдается процесс

$$y\,(t)=\int_a^t\eta\,(\tau)\,d\tau+\zeta\,(t)\qquad(9.36)$$

($\zeta\,(t)$ — винеровский процесс; $\mathbf{M}\zeta=0$; $\mathbf{M}\Delta\zeta^2=N\Delta t$).

1. *Нелинейная фильтрация.* Данный пример является частным случаем процесса с конечным числом состояний, рассмотренного в гл. 6 и § 9.2. Основное уравнение нелинейной фильтрации имеет вид (6.43), причем теперь $y_\rho=y$, $a_\rho\,(1)=1$;

$a_\rho(2) = -1$, $b_{\rho\sigma} = N$. Если ввести обозначение $w_1 - w_2 = z$, то указанное уравнение примет вид

$$\dot{z} = \nu - \mu - (\mu + \nu) z + N^{-1}(1 - z^2)\dot{y}. \tag{9.37}$$

Отсюда видны те преобразования, которые нужно совершить над $\{y(t)\}$, чтобы получить $\{z(t)\}$, а следовательно, и апостериорные вероятности $w_{1,2} = \frac{1 \pm z}{2}$.

Пусть $u(t) = \eta_0(t)$ — оценка сигнала $\eta(t)$, соответствующая среднеквадратичному критерию качества. Тогда, очевидно,

$$\eta_0(t) = \mathbf{M}[\eta(t) \mid y_a^t] = z(t) \tag{9.38}$$

и средний штраф, рассчитанный на единицу времени, равен

$$r_{\text{нел}} = \mathbf{M}\{[\eta(t) - \eta_0(t)]^2\} = \mathbf{MM}\{[\bar{\eta}(t) - \eta_0(t)]^2 \mid y_a^t\} = \\ = \mathbf{M}[1 - z^2(t)]. \tag{9.39}$$

Формулы (9.37), (9.38) дают в данном случае решение задачи нелинейной фильтрации при отсутствии опережения и запаздывания (случай (9.5)). Для полноты изложения приведем решение задачи также при наличии опережения или запаздывания, т. е. укажем способ отыскания оценок $M[\eta(\tau) \mid y_a^t]$, $\tau > t$ и $M[\eta(\sigma) \mid y_a^t]$, $\sigma < t$.

Решение уравнений (9.6), (9.35) при начальном условии $p_{1,2}(t) = w_{1,2}(t)$ в данном случае находится без труда. Оно имеет вид

$$\mathbf{M}[\eta(\tau) \mid y_a^t] = \frac{\nu - \mu}{\mu + \nu} + \left[z(t) - \frac{\nu - \mu}{\mu + \nu}\right] e^{-(\mu+\nu)(\tau - t)}, \quad \tau > t.$$

Далее, в противоположном случае $\sigma < t$, применяя формулу (9.7), имеем

$$\mathbf{P}\{\eta(\sigma) = 1 \mid y_a^t\} = \frac{1 + z(\sigma)}{2} \widetilde{V}_\sigma^t(1, \Omega); \tag{9.40}$$

$$\mathbf{P}\{\eta(\sigma) = -1 \mid y_a^t\} = \frac{1 - z(\sigma)}{2} \widetilde{V}_\sigma^t(-1, \Omega). \tag{9.41}$$

Если обозначить

$$\widetilde{V}_s^t(1, \Omega) - \widetilde{V}_s^t(-1, \Omega) = v(s)$$

и использовать тот факт, что сумма выражений (9.40), (9.41) равна единице:

$$\frac{1}{2}\left[\widetilde{V}_s^t(1, \Omega) + \widetilde{V}_s^t(-1, \Omega)\right] + \frac{1}{2} z(s) v(s) = 1,$$

то будем иметь

$$\widetilde{V}_s^t(\pm 1, \Omega) = 1 - \frac{1}{2} z(s) v(s) \pm \frac{1}{2} v(s)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}[\eta(\sigma) | y_a^t] = \frac{1 + z(\sigma)}{2} \widetilde{V}_\sigma^t(1, \Omega) - \frac{1 - z(\sigma)}{2} \widetilde{V}_\sigma^t(-1, \Omega) =$$

$$= z(\sigma) + \frac{1}{2} v(\sigma)[1 - z^2(\sigma)]. \qquad (9.42)$$

Входящая сюда функция $z(\sigma)$ определяется уравнением (9.37), а для функции $v(s)$ из (6.44) получаем уравнение

$$-\dot{v}(s) = -(\mu + \nu) v(s) + \frac{2}{N}[1 - z(s) v(s)] \dot{y}(s) \quad (s \leqslant t)$$

при обратном течении времени и при «начальном» условии

$$v(t) = 0.$$

Качество оценки (9.42) по среднеквадратичному критерию определяется формулой

$$\mathbf{M}\{[\eta(\sigma) - \eta_0(\sigma)]^2 | y_a^t\} = 1 - \left\{z(\sigma) + \frac{1}{2} v(\sigma)[1 - z^2(\sigma)]\right\}^2.$$

Возвращаемся к фильтрации (9.38) без опережения и запаздывания. Вычислим средний штраф (9.39) в единицу времени для установившегося стационарного режима фильтрации.

Уравнение (9.37) определяет процесс $\{z(t)\}$ как некоторый «вторичный» апостериорный марковский процесс. В стационарном режиме фильтрации он является стационарным. Если через $p_{\text{ст}}(z)$ обозначить стационарную одномерную плотность распределения вероятностей этого процесса, то средний штраф (9.39), очевидно, можно записать

$$r_{\text{нел}} = \int_{-1}^{1} (1 - z^2) p_{\text{ст}}(z)\, dz. \qquad (9.43)$$

Найдем стационарную плотность $p_{\text{ст}}(z)$. Как отмечалось в гл. 6, «вторичному» апостериорному процессу $\{w_1, y\}$ соответствует инфинитезимальный оператор (6.46), имеющий в данном случае вид

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial}{\partial w_1} + (w_1 - w_2) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} +$$

$$+ 2 w_1 w_2 \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial y} + \frac{N}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (w_2 = 1 - w_1).$$

Ввиду того что коэффициенты $\nu w_2 - \mu w_1$, $\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2$ не зависят от y, одномерный процесс $\{w_1\}$ сам по себе оказывается марковским и имеет, очевидно, инфинитезимальный оператор

$$\frac{d\mathcal{L}'}{dt} = (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2}{\partial w_1^2}. \qquad (9.44)$$

Производя замену переменной $z = w_1 - w_2 = 2w_1 - 1$, нетрудно получить, что в данном случае уравнению (9.37) соответствует инфинитезимальный оператор

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = \frac{1}{2N}(1-z^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + [\nu - \mu - (\mu + \nu) z] \frac{\partial}{\partial z}$$

процесса $\{z(t)\}$. Записывая уравнение Фоккера — Планка

$$\dot{p}(z) = \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(1-z^2)^2 p(z)] - \frac{\partial}{\partial z}\{[\nu - \mu - (\mu + \nu) z] p(z)\}$$

и приравнивая нулю производную $\dot{p}_{\text{ст}} = 0$, обычным способом получаем стационарную плотность распределения

$$p_{\text{ст}}(z)\, dz = \frac{\text{const}}{(1-z^2)^2} \exp\left\{2N \int^z [\nu - \mu - (\mu + \nu) x] \frac{dx}{(1-x^2)^2}\right\} dz. \qquad (9.45)$$

Удобно ввести новую переменную φ при помощи формулы

$$\frac{1}{1-z^2} = \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}\varphi).$$

Тогда стационарное распределение (9.45) будет иметь вид

$$p_{\text{ст}}(\varphi)\, d\varphi = \text{const}(\operatorname{ch}\varphi + 1) \exp\left\{\frac{N}{2}(\nu - \mu)(\operatorname{sh}\varphi + \varphi) - \frac{N}{2}(\mu + \nu)\operatorname{ch}\varphi\right\} d\varphi.$$

Используя (9.43) и взяв получающиеся интегралы при помощи известной формулы 6.444.1 справочника И. М. Рыжика и И. С. Градштейна [1], находим

$$r_{\text{нел}} = \mathbf{M}(1 - z^2) =$$
$$= \frac{4K_q(N\sqrt{\mu\nu})}{2K_q(N\sqrt{\mu\nu}) + \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} K_{q+1}(N\sqrt{\mu\nu}) + \sqrt{\frac{\mu}{\nu}} K_{1-q}(N\sqrt{\mu\nu})} \qquad (9.46)$$

$$\left(q = \frac{1}{2} N(\nu - \mu)\right).$$

В симметричном случае $\mu = \nu$ имеем

$$r_{\text{нел}} = \frac{2K_0(\mu N)}{K_0(\mu N) + K_1(\mu N)}. \tag{9.47}$$

При малых аргументах $\mu N \ll 1$ эта функция определяется приближенной формулой

$$r_{\text{нел}} = 2\mu N \ln \frac{2}{\gamma \mu N} + O\left[\left(\mu N \ln \frac{1}{\mu N}\right)^2\right], \quad \gamma = 1{,}781\ldots. \tag{9.48}$$

При дальнейшем возрастании аргумента μN она увеличивается до единицы.

2. *Линейная фильтрация.* При линейной фильтрации оптимальное преобразование $\eta_0(t) = d_t(y_a^t)$ ищется в классе линейных преобразований. По-прежнему берем среднеквадратичный критерий оптимальности. Оптимальное преобразование можно находить путем решения соответствующего уравнения регрессии. В это уравнение входят лишь корреляционные функции сигналов $\eta(t)$, $y(t)$. В данном случае, как нетрудно убедиться, корреляционные функции имеют вид

$$\begin{gathered} k_{\eta\eta}(\tau) = \frac{4\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} e^{-(\mu+\nu)|\tau|}; \quad k_{\eta\dot{y}}(\tau) = k_{\eta\eta}(\tau); \\ k_{\dot{y}\dot{y}}(\tau) = k_{\eta\eta}(\tau) + N\delta(\tau). \end{gathered} \tag{9.49}$$

Уравнения регрессии в данном негауссовом случае совпадают с уравнениями для гауссовых процессов $\eta(t)$, $y(t)$, имеющих те же самые корреляционные функции. Поэтому оптимальное линейное преобразование совпадает с оптимальным линейным преобразованием для описанных гауссовых процессов. Следовательно, чтобы найти оптимальное линейное преобразование, можно предполагать, что процессы $\eta(t)$, $y(t)$ являются гауссовыми и имеют корреляционные функции (9.49). Поскольку такие процессы являются марковскими, при этом снова можно применять теорию условных марковских процессов, но уже в том плане, как она изложена в § 9.5.

Итак, будем считать, что $\{\eta(t)\}$ — гауссов марковский процесс с корреляционной функцией (9.49), т. е. процесс, соответствующий инфинитезимальному оператору

$$dL_{pr} = \left[\frac{4\mu\nu}{\mu+\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - (\mu+\nu)\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right] dt.$$

Наблюдается его смесь (9.36) с белым шумом. Этот случай уже был рассмотрен в п. 1 § 9.4 и в п. 2 § 9.5. Согласно (9.29) оптимальное линейное преобразование имеет вид

$$\dot{\eta}_0 + (\mu+\nu)\eta_0 + \frac{k}{N}\eta_0 = \frac{k}{N}\dot{y}. \tag{9.50}$$

где

$$\dot{k} + 2(\mu+\nu)k = \frac{8\mu\nu}{\mu+\nu} - \frac{k^2}{N}.$$

В стационарном режиме апостериорная дисперсия $k(t)$ принимает свое стационарное значение

$$k = k_{\text{ст}} = \sqrt{(\mu+\nu)^2 N^2 + \frac{8\mu\nu N}{\mu+\nu}} - (\mu+\nu) N \tag{9.51}$$

(см. (9.31)).

Легко понять, что средний штраф $\mathrm{M}\{[\eta(t) - \eta_0(t)]^2 \mid y_a^t\}$, приходящийся на единицу времени, совпадает для гауссовых процессов с апостериорной дисперсией $k(t)$. Поскольку она не случайна, повторное усреднение не вносит никаких изменений и

$$r_{\text{лин}} = \mathbf{M}[\eta(t) - \eta_0(t)]^2 = \sqrt{(\mu+\nu)^2 N^2 + \frac{8\mu\nu N}{\mu+\nu}} - (\mu+\nu) N. \tag{9.52}$$

Такой же средний штраф имеет место и для исходного негауссового процесса, ибо он имеет такие же вторые моменты.

Разумеется, результаты (9.50), (9.51) можно получить также на основе теории Винера.

3. Сопоставим ошибки (9.46), (9.52) линейной и нелинейной фильтрации. Поскольку при нелинейной фильтрации класс преобразований, среди которых ищется оптимальное, ничем не ограничен, а при линейной фильтрации ограничен линейными преобразованиями, нелинейная фильтрация заведомо не хуже, чем линейная, и, следовательно, $r_{\text{нел}} \leqslant r_{\text{лин}}$. Представляет интерес, однако, вопрос о том, насколько $r_{\text{нел}}$ меньше, чем $r_{\text{лин}}$.

Ограничиваясь симметричным случаем, $\mu = \nu$, для линейной фильтрации (в противовес формуле (9.47)) из (9.52) имеем

$$r_{\text{лин}} = 2\sqrt{\mu^2 N^2 + \mu N} - 2\mu N,$$

в частности

$$r_{\text{лин}} = 2\sqrt{\mu N} + O(\mu N)$$

при $\mu N \ll 1$. Сравнение этого выражения с (9.48) дает

$$\frac{r_{\text{нел}}}{r_{\text{лин}}} = \sqrt{\mu N} \ln \frac{2}{\gamma \mu N}\left[1 + O((\mu N)^{1/2})\right].$$

Следовательно,

$$\frac{r_{\text{нел}}}{r_{\text{лин}}} \to 0 \text{ при } \mu N \to 0,$$

т. е. при малых помехах эффективность нелинейной фильтрации оказывается намного выше, чем линейной.

Глава 10

ЗАДАЧИ НА ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕКРАЩЕНИЕ ПРОЦЕССА

Рассмотрим несколько более общий случай управляемого процесса, а именно случай обрывающегося процесса. Пусть теперь кроме принятия оценочных решений (фильтрация) требуется выбирать оптимальный момент прекращения процесса. При такой постановке теория, рассматриваемая в настоящей главе, является, с одной стороны, обобщением теории оптимальной фильтрации, изложенной в гл. 9, а с другой стороны, обобщением последовательного анализа Вальда [1]. Обобщение идет по двум направлениям. Во-первых, рассматривается случай непрерывного времени и выводятся соответствующие ему дифференциальные уравнения для рисков. Во-вторых, производится синтез последовательного анализа и оптимальной фильтрации (принятие оценочных решений в течение процесса и в момент его остановки). Эти обобщения проведены автором в [15].

Дифференциальные уравнения для рисков при непрерывном времени применительно к задаче Вальда рассматривались Михалевичем [1, 2]. С точки зрения развиваемой здесь теории задачи, изучавшиеся Вальдом и Михалевичем, являются вырожденными, поскольку в них отсутствуют априорные переходы (см. *Дополнение,* стр. 292). Если допустить подобные переходы, то решение этих задач затруднится, и в них трудно будет обойтись без применения теории условных процессов Маркова.

В § 10.6 в качестве примера исследуется задача отыскания оптимальной остановки процесса на два состояния. Допускаются переходы между ними. Решение проводится при помощи теории условных марковских процессов и в результате находится функция риска и границы области остановки при различных значениях параметров задачи. Поскольку данная задача является обобщением задачи Вальда, то полученные результаты, если запретить априорные изменения состояния, переходят в соответствующие результаты Вальда и Михалевича и результаты *Дополнения.*

Рассмотренная в § 10.6 задача, кроме того, в другом частном случае (когда имеются односторонние изменения состояния) превращается в бейесовский вариант задачи Колмогорова и Ширяева, доложенный ими на VI Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 1960 г.). Небейесовское решение этой задачи, полученное без использования рекуррентных дифференциальных уравнений для рисков, опубликовано в работах Ширяева [1—3]. Бейесовское решение (средний риск и границы областей остановки, как функции параметров задачи) было найдено Стратоновичем [15]. Оно изложено в п. 4 *Дополнения.* Эти результаты, естественно, получаются как частные случаи результатов § 10.6.

§ 10.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФУНКЦИЯ ШТРАФОВ

Обозначим через $\vartheta\in[a, b]$ момент прекращения процесса. Пусть функция штрафов имеет вид

$$c(\omega)=\int_a^{\theta} dt \int_{\tau<t} C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau)\, F_\tau(d\tau)+\int_{\tau<\theta} C'_{\theta\tau}(u'_{\theta\tau}, z_\tau)\, F'_\theta(d\tau). \qquad (10.1)$$

Здесь $C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau)$, $F_t(d\tau)$ имеют тот же смысл, что и в формуле (9.1). Функция $C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau)$ и мера $F'_t(d\tau)$ имеют аналогичный смысл: $C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau)$ есть функция от $u'_{t\tau}$ и z_τ, $F'_\theta(d\tau)$ есть мера на борелевских множествах некоторого (вообще зависящего от ϑ) подмножества интервала $[a, \vartheta]$. Условия измеримости и интегрируемости предполагаются выполненными.

Оценочные функции управления $u_{t\tau}$, $u'_{\theta\tau}$ предполагаем несвязанными (§ 8.1), т. е. предполагаем независимый выбор оценок. Чтобы привести данную задачу к той общей задаче, которая была сформулирована в § 8.1, вместо момента времени Θ будем рассматривать ступенчатую функцию

$$\bar{u}_t=\begin{cases} 1 \text{ при } t\leqslant\vartheta; \\ 0 \text{ при } t>\vartheta \end{cases} \qquad (10.2)$$

как компоненту управления u_t. Функцию штрафов (10.1), очевидно, при этом можно записать

$$c(\omega)=\int_T dt\, \bar{u}_t \int C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau)\, F_t(d\tau)-\int_T d\bar{u}_t \int C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau)\, F'_t(d\tau). \qquad (10.3)$$

Установим соответствие управления в данной задаче с понятием управления § 8.1. Если управление считать продолженным на интервал $[\vartheta, b]$, то, очевидно, можно полагать

$$u_t = \begin{cases} \bar{u}_t,\ u_{t\cdot} & \text{при } \bar{u}_t = 1,\ \bar{u}_{t+0} = 1; \\ \bar{u}_t,\ u'_{t\cdot} & \text{при } \bar{u}_t = 1,\ \bar{u}_{t+0} = 0; \\ \bar{u}_t & \text{при } \bar{u}_t = 0. \end{cases} \tag{10.4}$$

Здесь и в дальнейшем точка записана вместо второго индекса τ и обозначает, что он пробегает всевозможные значения. Такое управление является связанным. Если $\bar{u}_r = 1$, то управление u_r^s $(r<s)$ может быть или функцией

$$\{u_{t\cdot},\ t \in [r, s]\}$$

(когда процесс не обрывается на $[r, s]$), или тройкой

$$\vartheta,\ \{u_{t\cdot},\ t \in [r, \vartheta)\},\ u'_{\vartheta\cdot}$$

(когда процесс обрывается в момент $\vartheta \in [r, s]$). Если же $\bar{u}_r = 0$, то никакой свободы выбора управления уже не остается. Обращаясь к определению 8.1, видим, что данный процесс управления есть марковски связанный процесс, и к тому же является простым вырожденным случаем такового. Роль марковской координаты играет функция (10.2): $\tilde{u}_t = \bar{u}_t$.

В выражения (10.1), (10.3) входит основной процесс $\{z_t\}$. Условия, наложенные на z_s^t, определяют σ-алгебру $\mathscr{Z}_s^t$, которая предполагается не зависящей от u и z_a^s. Фиксация управления u_a^s задает вероятности $\mathbf{P}(\Lambda \mid u_a^s)$ событий $\Lambda \in \mathscr{A}^s(u_a^s)$, связанных с этим процессом. Здесь можно подходить двумя способами. Можно представить себе, что процесс $\{z_t\}$ действительно обрывается, и считать, что $\mathscr{A}^s = \mathscr{Z}_a^{\min(s, \theta)}$. Иначе же можно считать, что процесс $\{z_t\}$ не обрывается, но прекращается всякий контакт с ним. Тогда можно полагать $\mathscr{A}^s \supset \mathscr{Z}^b$, как это было в гл. 9, и снять ограничения $\tau < t$ и $\tau < \vartheta$ в формуле (10.1). Остановимся на этом варианте, в нем события $\Lambda \in \mathscr{Z}^t$ $(t > \vartheta)$ имеют гипотетический характер. Меру считаем не зависящей от управления: $\mathbf{P}(\Lambda \mid u_a^s) = \mathbf{P}(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathscr{Z}^b$. Отсюда следует, что в этой главе не рассматриваются задачи, относящиеся к динамическому программированию, в которых выбор управления существенно влияет на ход основного процесса.

Наблюдаемый процесс $\{y_t\}$ считаем зависящим от значения основного процесса в тот же момент времени: $y_t = y_t(z_t)$, так что $\mathscr{Y}^t \subset \mathscr{Z}^t$. Берем практически наиболее интересный индекс решения $\varphi(t) = t$.

§ 10.2. ДОСТАТОЧНЫЕ КООРДИНАТЫ И УСЛОВНЫЕ РИСКИ

В соответствии с определением 8.5 кроме функции штрафа (10.3) будем рассматривать функции «прошлых штрафов»

$$c^t(\omega) = \int_a^t dt\overline{u}_t \int C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) F_t(d\tau) - \int_a^t d\overline{u}_t \int C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_t) F'_t(d\tau) \tag{10.5}$$

$$(c^b(\omega) = c(\omega)).$$

Введем достаточные координаты данной задачи.

Основной процесс $\{z_t\}$ будем предполагать марковским. Поэтому к исследуемой задаче, учитывая, что управление (10.4) является марковски связанным, можно применить теорию, развитую в п. 2 § 8.7. Проверим выполнение условий 8.10. А—Д. Выполнение (8.64) отмечалось ранее. Кроме того, указывалось, что $\mathscr{Z}^t_s(u, z^s_a)$ не зависит от u, z^s_a. Это является более сильным условием, нежели (8.65). Поскольку мера $\mathbf{P}$ на $\mathscr{Z}^b$ не зависит от управления, марковское условие

$$\mathbf{P}(\Lambda | \mathscr{Z}^s_a) = \mathbf{P}(\Lambda | \mathscr{Z}_s), \ \Lambda \in \mathscr{Z}^b_s$$

также является более сильным, что 8.10.В. Условие 8.10.Г выполняется, поскольку наблюдаемый процесс $y_t = y_t(z_t)$ не зависит от u. Остается проверить 8.10.Д. Чтобы разность

$$c^s - c^r = \int_r^s dt\overline{u}_t \int C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) F_t(d\tau) - \int_r^s d\overline{u}_t \int C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau) F'_t(d\tau)$$

была $\mathscr{U}^s_r\mathscr{Z}^b_r$ -измеримой, очевидно, достаточно, чтобы каждая мера F_t (Г) и F'_t (Г) обращалась в нуль на множествах $\Gamma \subset [\alpha, t)$. Предполагаем, что это условие выполняется. В частности, это имеет место в важном случае, когда мера F_t и мера F'_t имеют вид (9.5).

Вследствие выполнения указанных условий мы можем применить теорему 8.11, согласно которой в качестве достаточных координат берутся апостериорные вероятности W_t (или заменяющие их параметры), а также координата $\overline{u}_t$. Последняя принимает одно из двух значений 1 или 0, поэтому урезанный условный риск $S_t(\omega | \mathscr{X}_t) = S_t(\overline{u}_t, W_t)$ есть в данном случае пара функций

$$S_t(1, W_t), \ S_t(0, W_t).$$

Нетрудно записать рекуррентные соотношения (8.38) для урезанных условных рисков. Заменяя индекс $\varphi(t) = t$ на ступенчатую аппроксимацию

$$\varphi^N(t) = t_k \quad \text{при} \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$
$$(t_{k+1} - t_k < \Delta)$$

согласно (8.39) имеем

$$S_{t_k}(\overline{u}_{t_k}, W_{t_k}) = \min_{u_t^{t_{k+1}} | \overline{u}_{t_k}, W_{t_k}} \mathbf{M}\,[c^{t_{k+1}} - c^{t_k} +$$
$$+ S_{t_{k+1}}(\overline{u}_{t_{k+1}}, W_{t_{k+1}}) \,|\, \overline{u}_{t_k}\, \overline{u}_{t_k}^{t_{k+1}}, W_{t_k}]. \tag{10.6}$$

При $\overline{u}_{t_k} = 0$ выбора не остается и

$$S_{t_k}(0, W_{t_k}) = \mathbf{M}\,[c - c^t \,|\, \widetilde{u}_{t_k} = 0, W_{t_k}] = 0,$$

поскольку $c - c^t = 0$ при $t > \vartheta$ в силу (10.5).

При $\overline{u}_{t_k} = 1$ минимизацию по $u_{t_k}^{t_{k+1}}$ будем проводить в два приема: сначала минимизируем по $\{u_{t\cdot}, t \in [t_k, t_{k+1}]\} \cap [t_k, \vartheta)\}$ и u'_ϑ при фиксированной функции $\overline{u}_{t_k}^{t_{k+1}}$, а затем по $\overline{u}_{t_k}^{t_{k+1}}$, т. е. по $\vartheta\,(\geqslant t_k)$. На первом этапе минимизации, очевидно, имеем

$$\min_{u_{t_k}^{t_{k+1}} | \overline{u}_{t_k}^{t_{k+1}}} \mathbf{M}\,(c^{t_{k+1}} - c^{t_k} \,|\, 1, u_{t_k}^{t_{k+1}}, W_{t_k}] =$$
$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} s_t^\Delta \overline{u}_t\, dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} s_t'^\Delta\, d\overline{u}_t, \tag{10.7}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} s_t^\Delta &= \int \min_{u_{t\tau}} \mathbf{M}\,[C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) \,|\, W_{t_k}]\, F_t(d\tau); \\ s_t'^\Delta &= \int \min_{u'_{t\tau}} \mathbf{M}\,[C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau) \,|\, W_{t_k}]\, F'_t(d\tau). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Подставляя (10.7) в (10.6), для $u_{t_k} = 1$ получаем

$$S_{t_k}(1, W_{t_k}) = \min\Big\{ \min_{t_k \leqslant \vartheta < t_{k+1}} \Big[\int_{t_k}^{\vartheta} s_t^\Delta\, dt + s_\vartheta'^\Delta,$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} s_t^\Delta\, dt + \mathbf{M}\,[S_{t_{k+1}}(1, W_{t_{k+1}}) \,|\, W_{t_k}\Big]\Big\}. \tag{10.9}$$

Для сокращения записи формул удобно предположить, что $s_t^\Delta dt + ds_t'^\Delta \geqslant 0$ при всех t, тогда (10.9) примет вид

$$S_{t_k}(1, W_{t_k}) = \min\Big\{ s'_{t_k}(W_{t_k}), \int_{t_k}^{t_{k+1}} s_t^\Delta\, dt + \mathbf{M}\,[S_{t_{k+1}}(1, W_{t_{k+1}}) \,|\, W_{t_k}]\Big\}. \tag{10.10}$$

Здесь $s'^{\Delta}_{t_k}$ записано в виде $s'_{t_k}(W_{t_k})$ в соответствии с обозначениями

$$\begin{aligned} s_t(W_t) &= \int \min_{u_{t\tau}} \mathbf{M}[C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) \mid W_t] F_t(d\tau); \\ s'_t(W_t) &= \int \min_{u'_{t\tau}} \mathbf{M}[C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau) \mid W_t] F'_t(d\tau). \end{aligned} \tag{10.11}$$

Предполагается, что в результате минимизации по оценочным управлениям u_t, u'_t в (10.8), (10.11) получаются измеримые и интегрируемые функции, что легко проверяется в конкретных задачах. Поскольку

$$\mathbf{M}[C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) \mid W_{t_k}] = \mathbf{M}[C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) \mid W_t] + o(1)$$

и

$$s_t^{\Delta} = \mathbf{M}[s_t(W_t) \mid W_{t_k}] + o(1); \; o(1) \to 0 \text{ при } t - t_k \to 0 \text{ (п. н.)},$$

то в (10.10) можно заменить s_t^{Δ} на s_t. Это дает

$$\begin{aligned} S_{t_k}(1, W_{t_k}) = \min\Big\{ s'_{t_k}(W_{t_k}), \mathbf{M}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} s_t(W_t)\,dt + \\ + S_{t_{k+1}}(1, W_{t_{k+1}}) \mid W_{t_k}\Big]\Big\} + o(t_{k+1} - t_k). \end{aligned} \tag{10.12}$$

В соответствии с (10.1), (10.5) к этим рекуррентным соотношениям нужно добавить «начальное» условие: $S_b(1, W) = s'_b(W)$.

§ 10.3. ПЕРЕХОД К НЕПРЕРЫВНОМУ ИНДЕКСУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РИСКОВ

Чтобы совершить предельный переход к непрерывному индексу $\varphi^N(t) \to t$, $\Delta \to 0$ и доказать независимость результатов от специального выбора Δ-разбиений $\{t_1, \ldots, t_N\}$, удобно воспользоваться понятием пространств регулярности D_t^0, $t \in T$, введенном в п. 4 § 8.6. Если $S_b(1, W_b) \in D_b^0$, то вместо последовательности условных рисков

$$S_b(1, W), \; S_{t_N}(1, W), \; S_{t_{N-1}}(1, W), \ldots,$$

определяемых формулой (10.12), можно рассматривать последовательность функций

$$S_b(1, W), \; \widetilde{S}_{t_N}(1, W), \; \widetilde{S}_{t_{N-1}}(1, W), \ldots,$$

принадлежащих областям регулярности: $\widetilde{S}_{t_k}(1, W) \in D^{\circ}_{t_k}$. Эти функции в силу определения 8.8 связаны соотношением (8.53)

$$\widetilde{S}_{t_k}(1, W) = \min\left\{s'_{t_k}(W), \mathbf{M}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} s_t(W_t)\,dt \mid W_{t_k} = W\right] + \right.$$

$$\left. + T_{t_k t_{k+1}} \widetilde{S}_{t_{k+1}}(1, W)\right\} + o(\Delta), \qquad (10.13)$$

аналогичным (10.12), которое можно также записать в виде (8.54):

$$\widetilde{S}_{t_k}(1, W) - \widetilde{S}_{t_{k+1}}(1, W) = \psi_{t_{k+1}}(W, \widetilde{S}_{t_{k+1}})(t_{k+1} - t_k) + o(\Delta).$$

Здесь $\psi_{t_{k+1}}$ — не зависящая от Δ функция, равная в силу (8.55), (10.13) пределу

$$\psi_t(W, \widetilde{S}_t) = \lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-1}\left\{\min\left[s'_{t-\Delta}, \mathbf{M}\left[\int\limits_{t-\Delta}^{t} s_\tau\,d\tau \mid W_{t-\Delta} = W\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + T_{t-\Delta,t}\widetilde{S}_t\right] - \widetilde{S}_t\right\} = \lim_{\Delta\to 0} \min\left\{\frac{s'_{t-\Delta} - \widetilde{S}_t}{\Delta}, \mathbf{M}\left[\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t-\Delta}^{t} s_\tau\,d\tau \mid W\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{T_{t-\Delta,t} - 1}{\Delta}\widetilde{S}_t\right\}. \qquad (10.14)$$

Применение теоремы 8.9 дает полное обоснование предельному переходу $\varphi^N(t) \to t$, $\Delta \to 0$. Согласно ей результирующий урезанный риск как функция непрерывного времени удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial S_t(W)}{\partial t} = \psi_t(W, S_t(W)) \quad (S_t(W) \equiv S_t(1, W)). \quad (10.15)$$

Существование предела (10.14) обусловлено существованием пространств регулярности. Пусть функция s_t непрерывна, так что

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t-\Delta}^{t} s_\tau\,d\tau \mid W_{t-\Delta} = W\right] = s_t(W) + o(1). \qquad (10.16)$$

При минимизации в (10.14) сравниваются две величины, обозначим их для краткости A и B. Рассмотрим область Ξ_1 (в пространстве апостериорных вероятностей W), где

$$\lim_{\Delta\to 0} \min[A, B] = \lim_{\Delta\to 0} B. \qquad (10.17)$$

Аналогично определяем вторую область

$$\Xi_2 \doteq \{W : \lim_{\Delta\to 0}\min[A, B] = \lim_{\Delta\to 0} A\}. \qquad (10.18)$$

Из существования предела (10.14) вытекает существование предела

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{\mathbf{M}\left[\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t-\Delta}^{t} s_\tau\, d\tau\,|\,W\right]+\frac{T_{t-\Delta,t}\widetilde{S}_t-\widetilde{S}_t}{\Delta}\right\}$$

в области Ξ_1. Поскольку в силу (10.16) имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\mathbf{M}\left[\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t-\Delta}^{t} s_\tau\, d\tau\,|\,W\right]=s_t(W),$$

то, следовательно, в Ξ_1 существует предел

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}[T_{t-\Delta,t}\widetilde{S}_t-\widetilde{S}_t]=A_t\widetilde{S}_t, \tag{10.19}$$

и поэтому

$$\varphi_t(W,\widetilde{S}_t)=s_t(W)+(A_t\widetilde{S}_t)(W) \quad \text{в} \quad \Xi_1.$$

Аналогично доказывается существование предела

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{s'_{t-\Delta}-S_t}{\Delta}\equiv-\dot{s}'_t(W) \quad \text{в} \quad \Xi_2. \tag{10.20}$$

Его мы обозначаем $-\dot{s}'_t(W)$. Уравнение (10.15) принимает вид

$$-\frac{\partial S_t(W)}{\partial t}=\begin{cases} s_t(W)+(A_tS_t)(W) & \text{в } \Xi_1;\\ -\dot{s}'_t(W) & \text{в } \Xi_2.\end{cases} \tag{10.21}$$

Оператор A_t, входящий в (10.19), (10.21), есть не что иное, как вторичный апостериорный оператор:

$$A_t=\frac{d\mathscr{L}(t)}{dt}, \tag{10.22}$$

т. е. инфинитезимальный оператор вторичного марковского процесса $\{w_t\}$ (см. п. 2 § 5.6).

Как видно из (10.13), урезанный риск $S_t(W)$ не может превосходить $s'_t(W)$. Поэтому пространство условных вероятностей W можно разделить на две области:

$$\Xi=\{W: S_t(W)<s'_t(W)\}$$

и

$$\Xi^c=\{W: S_t(W)=s'_t(W)\}.$$

Обращаясь к определению (10.17) области Ξ_1, нетрудно понять, что область Ξ принадлежит Ξ_1, если s'_t непрерывная функция от t. В дальнейшем примем более сильное предположение, что s'_t — дифференцируемая функция от t.

Из определения (10.18) области Ξ_2, учитывая (10.14), (10.20), можно получить, что $\Xi_2 \subset \Xi^c$. Но коль скоро $\widetilde{S}_t = s'_t$ в Ξ_2, то предел в (10.20) есть не что иное, как частная производная по времени:

$$\ddot{s}'_t(W) = \frac{\partial s'_t(W)}{\partial t}.$$

Приведем еще одну форму записи уравнения (10.15). Обозначим через H область, где существует предел (10.19) (очевидно $\Xi_1 \subset H$). В области Ξ^c выражение (10.14) можно записать

$$\psi_t(W, S_t) = \lim_{\Delta \to 0} \min \left\{ -\frac{\partial s'_t}{\partial t} + o(1),\ s_t + o(1) + \frac{T_{t-\Delta,t} - 1}{\Delta} S_t \right\}.$$

Следовательно, в области $\Xi^c H$ после перехода к пределу $\Delta \to 0$ будем иметь

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = \min \left\{ -\frac{d s'_t}{\partial t},\quad s_t + A_t S_t \right\} \quad (W \in \Xi^c H).$$

Если

$$\ddot{s}'_t + s_t + A_t S_t < 0, \tag{10.23}$$

то точка области $\Xi^c H$ принадлежит Ξ_1, а если

$$\ddot{s}'_t + s_t + A_t S_t > 0, \tag{10.24}$$

то она принадлежит Ξ_2.

Теперь мы можем описать функции, принадлежащие пространству регулярности. Они обладают следующими свойствами.

10.1.А. *Если $g \in D_t^0$, то $g \leqslant s'_t$, причем $g(W) = s'_t(W)$ в ее области Ξ_2.*

10.1.Б. *Для $g \in D_t^0$ существует предел типа* (10.19) *в области Ξ_1.*

Кроме того, обычно выполняются условия непрерывности функций, принадлежащих области регулярности.

10.1.В. *Если*

$$s'_t(W) \text{ и } T_{t-\Delta,t}\, g \equiv g_\Delta \quad (\Delta > 0,\quad g \in D_t^0) \tag{10.25}$$

непрерывные функции от W, то функция $g(W)$, а также $\psi(W, g)$ являются непрерывными.

Доказательство 10.1.В. Запишем (10.13) в виде

$$D^0_{t-\Delta} \ni g'_\Delta = \min\{s'_{t-\Delta},\ s_{t-\Delta}\Delta + g_\Delta\} + o(\Delta).$$

Отсюда имеем

$$g'_\Delta = \widetilde{g}_\Delta + O(\Delta), \tag{10.26}$$

где через $\widetilde{g}_\Delta$ обозначена функция

$$\widetilde{g}_\Delta = \min[s'_{t-\Delta}, g_\Delta],$$

которая непрерывна вследствие непрерывности функций (10.25). Сопоставление (10.26) с равенством $g'_\Delta - g = O(\Delta)$, вытекающим из (8.54), дает

$$\widetilde{g}_\Delta - g = O(\Delta). \tag{10.27}$$

Поскольку оценка $O(\Delta)$ здесь является равномерной, из непрерывности $\widetilde{g}_\Delta$ следует непрерывность функции g.

Итак, g непрерывна, коль скоро $g \in D^0_t$. Следовательно, g'_Δ непрерывна при любом $\Delta > 0$, ибо $g'_\Delta \in D^0_{t-\Delta}$. Отсюда вытекает непрерывность функции $(g'_\Delta - g)/\Delta$ при любом $\Delta > 0$. Но, как видно из (8.54),

$$\frac{g'_\Delta - g}{\Delta} - \psi_t(W, g) = o(1).$$

Это соотношение доказывает непрерывность функции $\psi_t(W, g)$, аналогично тому, как (10.27) доказало непрерывность g.

Следствие из 10.1.В. Пользуясь непрерывностью по W функции $\psi(W, S)$, можно получить некоторое соотношение, справедливое в тех точках W^Γ, которые принадлежат как замыканию области Ξ_1, так и замыканию области Ξ_2. Выбирая последовательность сходящихся к W^Γ точек из Ξ_1, а также последовательность точек из Ξ_2, сходящихся к тому же пределу, и учитывая, что для обеих последовательностей имеет место один и тот же предел

$$\lim_{W \to W^\Gamma} \psi(W, S) = \psi(W^\Gamma, S),$$

получаем

$$\lim_{\Xi_1 \ni W \to W^\Gamma} [s_t(W) + A_t S_t] = \lim_{\Xi_2 \ni W \to W^\Gamma} \left[-\frac{\partial s'_t}{\partial t}(W)\right].$$

Если функции $s_t(W)$, $\frac{\partial s_t'}{\partial t}(W)$ непрерывны по W, то, следовательно,

$$\frac{\partial s_t'}{\partial t}(W^\Gamma) + s_t(W^\Gamma) + \lim_{\Xi_1 \in W \to W^\Gamma} A_t S_t = 0. \qquad (10.28)$$

§ 10.4. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Остановимся несколько подробнее на том простом частном случае, когда пространство апостериорных вероятностей W сводится к одномерному пространству R_1. Через x обозначим координату последнего. Будем предполагать, что вторичный марковский процесс $\{x_t\}$ является диффузионным и что ему соответствует инфинитезимальный оператор (10.22) следующего простого вида

$$A_t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(коэффициент диффузии постоянен).

Некоторые более сложные одномерные случаи могут быть сведены к данному при помощи замены переменной x. Предполагаем, что $s_t'(x)$, $s_t(x)$ — непрерывные дифференцируемые функции обеих переменных, и, кроме того, что $s_t'(x)$ дважды дифференцируема по x. Для дальнейшего удобно принять, что выполняется условие

$$\frac{\partial s_t'(x)}{\partial t} + s_t(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s_t'(x)}{\partial x^2} > 0. \qquad (10.29)$$

Если $S_\sigma(x) \in D_\sigma^0$, при некотором $\sigma \in [a, b]$, то $S_t(x) \in D_t^0$ в более ранние моменты времени $t < \sigma$. Рассмотрим, каковы в данном случае области Ξ_1, Ξ_2 (вообще говоря, зависящие от времени: $\Xi_1 = \Xi_1(t)$, $\Xi_2 = \Xi_2(t)$).

Поскольку в $\Xi^c \supset \Xi_2$ функция $S_t(x)$ совпадает с s_t', то в силу двукратной дифференцируемости последней существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{T_{t-\Delta,t} - I}{\Delta} S_t(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{T_{t-\Delta,t} - I}{\Delta} s_t'(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s_t'(x)}{\partial x^2}$$

по крайней мере во всех внутренних точках области Ξ^c (т. е. при $W \in \operatorname{Int} \Xi^c$). Условие (10.24) в этих точках принимает вид

$$\frac{\partial s_t'}{\partial t} + s_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s_t'}{\partial x^2} > 0.$$

Из (10.29) вытекает, что оно выполняется во всех точках $\operatorname{Int} \Xi^c$, так что

$$\operatorname{Int} \Xi^c \subset \Xi_2.$$

В § 10.3 отмечалось, что

$$\Xi \subset \Xi_1, \tag{10.30}$$

поэтому остается рассмотреть точки «границы»

$$\Gamma = R_1 - \Xi - \operatorname{Int} \Xi^c.$$

Используем свойство непрерывности функции $\psi_t(x, S_t)$, о котором говорится в 10.1.В (непрерывность функций (10.25) в данном случае с очевидностью имеет место).

К точке x^Γ, принадлежащей как замыканию области Ξ, так и замыканию области $\operatorname{Int}\Xi^c$, можно совершить предельный переход двумя способами: или оставаясь в пределах одной, или другой области. Поскольку

$$\psi_t(x, S_t) = \begin{cases} s_t + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} & \text{в } \operatorname{Int} \Xi, \\[2ex] -\dfrac{\partial s_t'}{\partial t} & \text{в } \Xi^c; \end{cases}$$

то, приравнивая пределы, получаем

$$\frac{\partial s_t'}{\partial t}(x^\Gamma) + s_t(x^\Gamma) + \frac{1}{2} \lim_{\Xi \ni x \to x^\Gamma} \frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} = 0. \tag{10.31}$$

Пусть для примера область Ξ лежит справа от граничной точки x^Γ, а Ξ^c — слева. Предполагая, что функцию $S_t(x)$ в указанных областях можно разложить в ряд Тейлора, имеем

$$S_t(x) = s_t'(x^\Gamma) + S_1 \cdot (x - x^\Gamma) + \frac{1}{2} S_2 (x - x^\Gamma)^2 + \\ + \frac{1}{6} S_3 \, (x - x^\Gamma)^3 + \ldots \text{ при } x > x^\Gamma;$$

$$S_t(x) = s_t'(x) = s_t'(x^\Gamma) + s_1' \cdot (x - x^\Gamma) + \frac{1}{2} s_2' (x - x^\Gamma)^2 + \\ + \frac{1}{6} s_3' \, (x - x^\Gamma)^3 + \ldots \text{ при } x < x^\Gamma.$$

Производя почленное усреднение, находим

$$(T_\Delta S_t)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \int e^{\frac{-(x-y)^2}{2\Delta}} S_t\,(y)\,dy = s_t'(x^\Gamma) + \\ + \sqrt{\Delta}\, S_1 G_1 \left(\frac{x - x^\Gamma}{\sqrt{\Delta}} \right) - \sqrt{\Delta}\, s_1' \, G_1 \left(- \frac{x - x^\Gamma}{\sqrt{\Delta}} \right) + \\ + \frac{\Delta}{2} S_2 G_2 \left(\frac{x - x^\Gamma}{\sqrt{\Delta}} \right) + \frac{\Delta}{2} s_2' \, G_2 \left(- \frac{x - x^\Gamma}{\sqrt{\Delta}} \right) + \ldots . \tag{10.32}$$

Здесь

$$G_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{2}} \eta^n d\eta.$$

Выражение (10.32) следует подставить в рекуррентное соотношение (10.13), имеющее в данном случае вид

$$\widetilde{S}_{t-\Delta}(x) = \min\left[s_t'(x) - \frac{\partial s_t'(x)}{\partial t}\Delta,\ s_t(x)\Delta + T_\Delta S_t\right] + o(\Delta). \tag{10.33}$$

Рассмотрим граничную точку x^Γ, чтобы определить ее принадлежность к области Ξ_1 или Ξ_2. Приравнивая $x = x^\Gamma$ в (10.32), получаем из (10.33):

$$\widetilde{S}_{t-\Delta}(x^\Gamma) = s_t'(x^\Gamma) + \min\left[-\frac{\partial s_t'}{\partial t}(x^\Gamma)\Delta,\ s_t(x^\Gamma)\Delta + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\Delta}\, G_1(0)(S_1 - s_1') + \frac{\Delta}{2}\, G_2(0)(S_2 + s_2')\right] + o(\Delta). \tag{10.34}$$

Вытекающее из (8.54) соотношение $\widetilde{S}_{t-\Delta} - S_t = O(\Delta)$, записанное для точки x^Γ, приводит поэтому к условию

$$\min[0, S_1 - s_1'] = 0 \qquad \left(S_1 = \frac{\partial S_t}{\partial x}(x^\Gamma + 0),\ s_1' = \frac{\partial s_t'}{\partial x}(x^\Gamma)\right). \tag{10.35}$$

Но $s_1' \geqslant S_1$, поскольку $s_t'(x) > S_t(x)$ при $x > x^\Gamma$ (т. е. в Ξ). Следовательно, (10.35) дает условие непрерывности первой производной в граничной точке:

$$\lim_{\Xi \ni x \to x^\Gamma} \frac{\partial S_t(x)}{\partial x} = \frac{\partial s_t'}{\partial x}(x^\Gamma). \tag{10.36}$$

Впервые подобное условие для задачи Вальда при непрерывном времени было получено, по-видимому, Михалевичем [2].

Из (10.34), (10.36) имеем

$$\widetilde{S}_{t-\Delta}(x^\Gamma) = S_t(x^\Gamma) + \Delta \min\left[-\frac{\partial s_t'}{\partial t}(x^\Gamma),\ s_t(x^\Gamma) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(S_2 + s_2')\right] + o(\Delta).$$

Чтобы определить, какая из стоящих здесь величин больше, примем во внимание соотношения (10.29), (10.31). Взяв полусумму выражений, стоящих у них в левой части, получаем

$$\frac{\partial s_t'}{\partial t}(x^\Gamma) + s_t(x^\Gamma) + \frac{1}{4}(S_2 + s_2') > 0.$$

Поэтому

$$\widetilde{S}_{t-\Delta}(x^\Gamma) = S_t(x^\Gamma) - \Delta \frac{\partial s_t'}{\partial t}(x^\Gamma) + o(\Delta),$$

так что точка x^Γ принадлежит области Ξ_2 $(\Xi_1 = \Xi,\ \Xi_2 = \Xi^c)$.

Пользуясь условием (10.36), найдем производную

$$\frac{dx_t^\Gamma}{dt} = -\lim_{\Delta\to 0}\frac{x_{t-\Delta}^\Gamma - x_t^\Gamma}{\Delta} \tag{10.37}$$

от значения $x^\Gamma = x_t^\Gamma$, рассматриваемого как функция времени. Указанное условие должно выполняться как в точке (x_t^Γ, t), так и в точке $(x_{t-\Delta}^\Gamma,\ t-\Delta)$:

$$\frac{\partial s_t'}{\partial x}(x_t^\Gamma) = \frac{\partial S_t}{\partial x}(x_t^\Gamma +); \qquad \frac{\partial s_{t-\Delta}'}{\partial x}(x_{t-\Delta}^\Gamma) = \frac{\partial S_{t-\Delta}}{\partial x}(x_{t-\Delta}^\Gamma +). \tag{10.38}$$

Здесь $x_\tau^\Gamma +$ обозначает предел, соответствующий области Ξ. Воспользуемся тем, что для точек этой области

$$S_{t-\Delta}(x) = S_t(x) + s_t(x)\Delta + \frac{\Delta}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} + o(\Delta),$$

так что

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{t-\Delta}}{\partial x}(x_{t-\Delta}^\Gamma +) &= \frac{\partial S_t}{\partial x}(x_{t-\Delta}^\Gamma +) + \Delta\frac{\partial s_t}{\partial x}(x_t^\Gamma +) + \\ &+ \frac{\Delta}{2}\frac{\partial^3 S_t}{\partial x^3}(x_t^\Gamma +) + o(\Delta) = \frac{\partial S_t}{\partial x}(x_t^\Gamma +) + \\ &+ \frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}(x_t^\Gamma +)(x_{t-\Delta}^\Gamma - x_t^\Gamma) + \Delta\frac{\partial s_t}{\partial x}(x_t^\Gamma +) + \\ &+ \frac{\Delta}{2}\frac{\partial^3 S_t}{\partial x^3}(x_t^\Gamma +) + o(\Delta).\end{aligned}$$

Предполагая, что соответствующие производные существуют, кроме того, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_{t-\Delta}'}{\partial x}(x_{t-\Delta}^\Gamma) &= \frac{\partial s_t'}{\partial x}(x_t^\Gamma) - \frac{\partial^2 s_t'}{\partial x\,\partial t}(x_t^\Gamma)\Delta + \\ &+ \frac{\partial^2 s_t'}{\partial x^2}(x_t^\Gamma)(x_{t-\Delta}^\Gamma - x_t^\Gamma) + o(\Delta).\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (10.38), получаем

$$\left[\frac{\partial^2 s'_t}{\partial x^2}(x_t^\Gamma) - \frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}(x_t^\Gamma +)\right](x_{t-\Delta}^\Gamma - x_t^\Gamma) =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 s'_t}{\partial x\,\partial t}(x_t^\Gamma) + \frac{\partial s_t}{\partial x}(x_t^\Gamma) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 S_t}{\partial x^3}(x_t^\Gamma +)\right]\Delta + o(\Delta).$$

Совершая предельный переход (10.37), получаем окончательно

$$\frac{dx_t^\Gamma}{\partial t} = - \left.\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s'_t}{\partial t} + s_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 s'_t}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}}\right|_{x = x_t^\Gamma +}.$$

В заключение этого параграфа дадим описание пространств регулярности D_t^0, $t \in T$. В рассматриваемом случае пространство D_t^0 состоит из функций $g(x)$:

1) *непрерывных и имеющих непрерывную первую производную* (см. 10.1.В и (10.36)),

2) *не превосходящих* $s'_t(x)$ (см. 10.1.А)),

3) *дважды дифференцируемых в области*

$$\Xi = \{x:\ g(x) < s'_t(x)\}$$

(см. 10.1.Б и (10.30)),

4) *удовлетворяющих на границе области* Ξ *условию*

$$\frac{\partial s'_t(x)}{\partial t} + s_t(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}(x+) = 0.$$

(см. (10.31)).

Необходимость указанных свойств аргументирована ранее, достаточность легко проверить непосредственно.

Результаты, полученные в настоящем параграфе, обобщаются также на случай более сложного оператора (10.22).

§ 10.5. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Общая теория гл. 8 гарантирует существование ε-оптимальных решающих функций. В рассматриваемых здесь задачах можно аргументировать существование в точности оптимальных решающих функций, т. е. решающих функций, в точности соответствующих оптимальному риску.

Вкратце опишем эти решающие функции. Начнем с оценочных функций

$$u_{t\tau} = d_{t\tau}(y_a^t) = d_{t\tau}(W_t); \quad u'_{t\tau} = d'_{t\tau}(y_a^t) = d'_{t\tau}(W_t).$$

Обращаясь к формулам (10.11), видим, что оптимальные оценочные решающие функции определяются условиями

$$\min_{u_{t\tau}} \mathbf{M}[C_{t\tau}(u_{t\tau}, z_\tau) \mid W_t] = \mathbf{M}[C_{t\tau}(d_{t\tau}(W_t), z_\tau) \mid W_t];$$

$$\min_{u'_{t\tau}} \mathbf{M}[C'_{t\tau}(u'_{t\tau}, z_\tau) \mid W_t] = \mathbf{M}[C'_{t\tau}(d'_{t\tau}(W_t), z_\tau) \mid W_t].$$

Эти функции существуют, если минимум (нижняя грань) достигается на допустимом множестве $U_{t\tau}$ (или $U'_{t\tau}$) управлений $u_{t\tau}$ (или $u'_{t\tau}$). Функции $d_{t\tau}$, $d'_{t\tau}$ при этом оказываются $\mathscr{W}_t$-измеримыми (зависят от y_a^t не иначе, как через посредство W_t). Важные для определения оптимального момента остановки функции (10.11), очевидно, равны

$$s_t(W_t) = \int \mathbf{M}[C_{t\tau}(d_{t\tau}(W_t), z_\tau) \mid W_t] F_t(d\tau);$$

$$s'_t(W_t) = \int \mathbf{M}[C'_{t\tau}(d'_{t\tau}(W_t), z_\tau) \mid W_t] F'_t(d\tau).$$

Перейдем теперь к рассмотрению решающей функции $D(y) = \vartheta$, определяющей момент ϑ обрывания процесса. Для фиксированного Δ-разбиения $\{t_1, \ldots, t_N\}$ имеем, очевидно, следующее оптимальное решающее правило: функция $D^\Delta(y) = D^\Delta(W_a^b)$ равна тому моменту времени, когда траектория $W_a^b = \{W_t, t \in [a, b]\}$ в первый раз попадет на множество

$$\Phi^\Delta = \bigcup_k \{t, W : t = t_k, \quad W \in \Xi^c(t_k)\}.$$

Иначе говоря,

$$D^\Delta(W_a^b) = \min\{t : (t, W_t) \in \Phi^\Delta\}.$$

Обозначим, кроме того,

$$\Phi = \{t, W : t \in T, W \in \Xi^c(t)\}.$$

Конечно, множество Φ не является пределом $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Phi^\Delta$, но, если $\{W_t\}$ непрерывная функция времени (при фиксированной точке ω), то, как нетрудно понять,

$$\inf\{t : (t, W_t) \in \Phi\} = \lim_{\Delta\to 0} \min\{t : (t, W_t) \in \Phi^\Delta\}.$$

В качестве решающего правила $D(W_a^b)$ выберем первый момент достижения области остановки Φ:

$$D(W_a^b) = \inf\{t : (t, W_t) \in \Phi\}, \tag{10.39}$$

так, что

$$D(W_a^b) = \lim_{\Delta\to 0} D^\Delta(W_a^b) \tag{10.40}$$

при непрерывной траектории W_a^b. Но в диффузионном случае траектория W_a^b непрерывна с вероятностью 1, следовательно, соотношение (10.40) справедливо почти наверное.

Решающие функции $D^\Delta(W_a^b)$, $D(W_a^b)$ определяют риски

$$R^\Delta = \mathbf{M}\left[\int_0^{D^\Delta(W_a^b)} s_t(W_t)\,dt + s'_{D^\Delta(W_a^b)}(W_{D^\Delta(W_a^b)})\right];$$

$$R^0 = \mathbf{M}\left[\int_0^{D(W_a^b)} s_t(W_t)\,dt + s'_{D(W_a^b)}(W_{D(W_a^b)})\right].$$

Сходимость (10.40), имеющая место с вероятностью 1, позволяет доказать (в предположении непрерывности функции $s_t'(w)$ по t) соотношение

$$\lim_{\Delta\to 0} R^\Delta = R^0. \tag{10.41}$$

Но из рекуррентных соотношений (10.12) и общей теории (гл. 8) следует, что предел

$$\lim_{\Delta\to 0} R^\Delta = R \tag{10.42}$$

является оптимальным риском. Сопоставление (10.41), (10.42) приводит к заключению, что решающая функция (10.40) является в точности оптимальной.

Из описанного способа построения решающих правил $D(W_a^b)$, $D^\Delta(W_a^b)$ вытекает следующее их свойство: если траектории W_a^b, $\widetilde{W}_a^b$ совпадают на интервале $a \leqslant t \leqslant D(W_a^b)$, то

$$D(\widetilde{W}_a^b) = D(W_a^b)$$

(и аналогично для D^Δ). Несколько символически это свойство можно записать

$$D(W_a^b) = D(W_a^D) = D(y_a^D).$$

§ 10.6. ПРИМЕР. ОСТАНОВКА МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Рассмотрим в качестве примера задачу распознавания и остановки марковского процесса η_t с двумя состояниями, описанного в § 9.6, а также в § 6.5. Наблюдается сумма этого процесса и белого шума или, что эквивалентно, процесс (9.36). В данном случае основной марковский процесс является комбинацией двух процессов: $z_t = (\eta_t, y_t)$.

Пусть в момент остановки требуется вынести оценочное суждение, какое именно состояние $\eta_t = \pm 1$ осуществляется.

При продолжении процесса оценка не производится. Тогда оценочное управление $u_{t\tau}$ отсутствует, а функция $u'_{t\tau}$ принимает одно из двух значений, скажем 1 или 2. Меры $F\ (d\tau)$, $F'\ (d\tau)$ пусть имеют простой вид (9.5), а соответствующие штрафы продолжения

$$C_{tt}(u_{tt}, z_t) = \begin{cases} A_1 & \text{при} \quad \eta_t = 1; \\ A_2 & \text{при} \quad \eta_t = -1 \end{cases} \tag{10.43}$$

(зависящие в общем случае от состояния η_t) и штрафы остановки

$$C'_{tt}(u'_{tt} = i, z_t) = \begin{cases} B_{i1} & \text{при} \quad \eta_t = 1; \\ B_{i2} & \text{при} \quad \eta_t = -1; \end{cases} \qquad (i = 1, 2) \qquad (10.43.\text{a})$$

являются постоянными.

Достаточной координатой в данной задаче является апостериорная вероятность w_1. Образуем соответствующие функции (10.11), они оказываются не зависящими от времени:

$$s_t(w_1) \equiv s(w_1) = A_1 w_1 + A_2 w_2 = A_2 + (A_1 - A_2) w_1;$$

$$s'_t(w_1) \equiv s'(w_1) = \min [B_{11} w_1 + B_{12} w_2, B_{21} w_1 + B_{22} w_2].$$

Очевидно, что оптимальное оценочное решение имеет вид

$$d'_{tt}(y_a^t) = d'_{tt}(w_1(t)) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad B_{1j} w_j(t) \leqslant B_{2j} w_j(t); \\ 2 & \text{при} \quad B_{1j} w_j(t) > B_{2j} w_j(t) \end{cases}$$

(по j проводится суммирование).

Оптимальная остановка производится в тот момент времени, когда траектория $w_1(t)$ в первый раз попадает в «область остановки», где

$$S_t(w_1) = s'(w_1).$$

Положение области остановки на плоскости (t, w_1) определяется вместе с отысканием урезанного условного риска $S_t(w_1)$. Он удовлетворяет уравнению (10.21). Соответствующий данному случаю инфинитезимальный оператор (10.22) был найден ранее (формула (9.44)).

Применяя теорию § 8.6, § 10.3 и § 10.4, мы можем констатировать, что, если функция $S_t(w_1)$ принадлежит пространству регулярности D^0 при некотором $t = \tau$, то $S_t(w_1)$ принадлежит пространству регулярности D_t^0 для меньших времен $t < \tau$. В «области продолжения», где $S_t(w_1) < s'(w_1)$, она удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial S_t}{\partial w_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2. \tag{10.44}$$

На границе Г области остановки выполняются условия непрерывности функции и ее первой производной:

$$S_t(w_1) = B_{11}w_1 + B_{12}w_2; \quad \frac{\partial S_t(w_1)}{\partial w_1} = B_{11} - B_{12} \quad (10.45)$$

при $w_1 \in \Gamma$ и $B_{1j}w_j < B_{2j}w_j$;

$$S_t(w_1) = B_{21}w_1 + B_{22}w_2; \quad \frac{\partial S_t(w_1)}{\partial w_1} = B_{21} - B_{22} \quad (10.46)$$

при $w_1 \in \Gamma$ и $B_{1j}w_j > B_{2j}w_j$.

Кроме того, на границе $\Gamma \ni w_1^\Gamma$ выполняется условие (см. (10.31))

$$\frac{2}{N} w_1^{\Gamma^2} w_2^{\Gamma^2} \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2}(w_1^\Gamma +) + (\nu w_2^\Gamma - \mu w_1^\Gamma) \frac{\partial S_t}{\partial w_1}(w_1^\Gamma) + A_1 w_1^\Gamma + B_1 w_2^\Gamma = 0$$

$$(w_2^\Gamma = 1 - w_1^\Gamma).$$

Решением уравнения (10.44) с описанными граничными условиями и определенным «начальным» условием

$$S_b(w_1) = f_0(w_1), \quad (10.47)$$

одновременно определяются функция $S_t(w_1)$ и положение границ области остановки.

Большой практический интерес представляет тот случай, когда конечный момент b является отдаленным и когда специальный выбор заключительных штрафов (10.47) слабо сказывается. Для этого длительность $b - t$ должна значительно превосходить другие постоянные времени задачи:

$$b - t \gg \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \quad b - t \gg N.$$

При выполнении этих условий можно рассматривать стационарное решение $S^0(w_1)$ уравнения (10.44), для которого $\frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$.

Рассуждая формально, мы при выборе некоторой заключительной функции $f_0(w_1)$ $(\in D^0)$ предполагаем, что существует единственное решение $S_t(w_1)$ уравнения (10.44) с описанными условиями и, кроме того, существует предел

$$\lim_{b\to\infty} S_t(w_1) = S^0(w_1). \quad (10.48)$$

Тогда эта предельная функция обязана удовлетворять уравнению

$$\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{d^2 S^0}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{dS^0}{dw_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 = 0 \quad (10.49)$$

в области продолжения, где $S^0(w_1) < s'(w_1)$. На границе Г она удовлетворяет условиям

$$S^0(w_1) = s'(w_1); \quad \frac{dS^0}{dw_1}(w_1) = \frac{ds'(w_1)}{dw_1}, \tag{10.50}$$

аналогичным (10.45), (10.46).

В уравнении (10.49) запишем $A_1 w_1 + A_2 w_2$ в форме

$$D + D'(\nu w_2 - \mu w_1),$$

$$D = \frac{A_2 - A_1}{\mu + \nu}; \quad D = \frac{\nu A_1 + \mu A_2}{\mu + \nu} \tag{10.51}$$

и введем функцию

$$e^{\varphi(w_1)} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{N}{2}(\nu - \mu)} \exp\left\{-\frac{N}{2}\left(\frac{\nu}{w_1} + \frac{\mu}{w_2}\right)\right\}, \tag{10.52}$$

такую, что

$$\frac{d\varphi(w_1)}{dw_1} = \frac{N}{2}\,\frac{\nu w_2 - \mu w_1}{w_1^2 w_2^2}.$$

Тогда (10.49) примет вид

$$\frac{d^2 S^0}{dw_1^2} + \frac{d\varphi}{dw_1}\,\frac{dS^0}{dw_1} + D'\,\frac{d\varphi}{dw_1} + \frac{1}{2}\,\frac{ND}{w_1^2 w_2^2} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\frac{dS^0(w_1)}{dw_1} = -D' - \frac{1}{2} N D e^{-\varphi(w_1)} \int\limits_{\frac{\nu}{\mu+\nu}}^{w_1} e^{\varphi(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi^2(1-\xi)^2} + C_1 e^{-\varphi(w_1)}. \tag{10.53}$$

Повторное интегрирование дает

$$S^0(w_1) = -D' w_1 - \frac{1}{2} N D f_1(w_1) + C_1 f_2(w_1) + C_2. \tag{10.54}$$

Здесь

$$f_1(w_1) = \int\limits_{\frac{\nu}{\mu+\nu}}^{w_1} dw\, e^{-\varphi(w)} \int\limits_{\frac{\nu}{\mu+\nu}}^{w} e^{\varphi(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi^2(1-\xi)^2};$$

$$f_2(w_1) = \int\limits_{\frac{\nu}{\mu+\nu}}^{w_1} e^{-\varphi(w)}\,dw; \tag{10.55}$$

C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

В точках границы Г согласно (10.50) график функции (10.54) касается линии $S = s'(w_1)$, иначе говоря, линия

$$S = s'(w_1) + D'w_1 + \frac{1}{2} NDf_1(w_1) \equiv F(w_1) \tag{10.56}$$

касается линии $S = C_1 f_2(w_1) + C_2$:

$$F(w_1) = C_1 f_2(w_1) + C_2; \quad \frac{dF}{dw_1}(w_1) = C_1 \frac{df_2}{dw_1}(w_1) \quad \text{при } w_1 \in \Gamma.$$

Удобно ввести новую переменную $v = f_2(w_1)$ через ψ обозначим обратную функцию: $w_1 = \psi(v)$). Тогда линия $C_1 f_2(w_1) + C_2 = C_1 v + C_2$ обратится в прямую. Согласно сказанному выше она должна касаться в точках $w_1 \in \Gamma$ линии $F(\psi(v))$. Отсюда вытекает эффективный способ отыскания точек границы Г: нужно построить графически функцию $F(\psi(v))$ и, используя произвольность постоянных C_1, C_2, провести прямую, касающуюся построенной линии в двух точках. Если v' и v'' две такие точки касания и если на всем интервале $v' < v < v''$ справедливо неравенство

$$F(\psi(v)) > C_1 v + C_2, \text{ т. е. } s'(w_1) > S^0(w_1), \text{ при } w_1' = \psi(v') < \\ < w_1 < w_1'' = \psi(v''),$$

тогда этот интервал будет являться областью продолжения, а точки v', v'' (или w_1', w_1'') будут составлять границу области остановки.

Предположим, что $D > 0$. Это соответствует тому практически наиболее интересному случаю, когда продолжение наблюдения требует некоторых затрат. Качественный анализ графика $F(\psi(v))$ показывает, что в этом случае всегда имеется интервал продолжения наблюдений, если точка излома функции $s'(w_1)$ попадает на интервал (0,1).

В некоторых случаях интервал продолжения наблюдений не является ограниченным с обеих сторон точками остановки. Он может примыкать к точке $w_1 = 0$ (т. е. совпадать с интервалом $[0, w_1'')$) или к точке $w_1 = 1$ (совпадать с интервалом $(w_1', 1]$).

Тогда вместо условий (10.50) в граничной точке $w_1 = 0$ (или $w_1 = 1$) следует воспользоваться тривиальным условием

$$\left| \frac{dS^0(w_1)}{dw_1} \right| < \infty \quad \text{при } w_1 = 0 \text{ (или 1)}. \tag{10.57}$$

Оно определяет постоянную C_1 в выражении (10.53) и (10.54):

$$C_1 = -\frac{1}{2} ND \int_0^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} e^{\varphi(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2 (1-\xi)^2} \tag{10.58}$$

(для определенности в (10.57) выбрана точка $w_{\mathrm{I}}=0$), так что

$$\frac{dS^0(w_1)}{dw_1} = -D' - \frac{1}{2} NDe^{-\varphi(w_1)} \int\limits_0^{w_1} e^{\varphi(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}.$$

При описанном ранее проведении прямой, касающейся линии $F(\psi(v))$, наклон этой прямой теперь является фиксированным. Он совпадает согласно (10.56), (10.55), (10.58), с асимптотическим наклоном линии $F(\psi(v))$:

$$\frac{dF}{dv} = e^{\varphi} \frac{dF}{dw_1} = \frac{1}{2} ND \int\limits_{\frac{\nu}{\mu+\nu}}^{w_1} e^{\varphi(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2(1-\xi)^2} + o(1) \to C_1$$

при $v \to -\infty$ (т. е. при $w_{\mathrm{I}} \to 0$), так как $e^{\varphi}\left(\frac{ds'}{dw_1} + D'\right) = o(1)$.

Параллельным переносом прямой добиваемся ее касания с линией $F(\psi(v))$. Это определяет точку касания v''. Если $F(\psi(v)) > C_1 v + C_2$ при $v < v''$ (т. е. при $w_1 < w_{\mathrm{I}}'' = \psi(v'')$), то интервал $[0, w_{\mathrm{I}}'')$ является интервалом продолжения наблюдения. Аналогично строится интервал $(w_{\mathrm{I}}', 0]$, если он имеется.

При фиксированных значениях постоянных удается найти лишь те или иные области продолжения из описанных типов. В некоторых частных случаях может оказаться, что областей продолжения не существует. Это означает, что при данных значениях постоянных задача поставлена некорректно и предела (10.48) не существует.

Выше предполагалось, что $\mu > 0$, $\nu > 0$, однако полученные выше формулы применимы и в том случае, когда одна из этих величин или обе равны нулю. В этих случаях рассматриваемая задача переходит в более простые задачи, некоторые из которых рассмотрены в *Дополнении.*

Глава 11

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ

В этой главе будут рассмотрены более общие задачи, чем в двух предыдущих главах: будет предполагаться что наблюдаемый или управляемый процесс существенно зависит от выбираемого управления. В § 11.1 решается задача на выбор оптимального наблюдения. Предполагается, что наблюдение процесса связано с определенными затратами, так что оно окупается только в опасной ситуации. Теория позволяет ответить на вопрос, когда производить наблюдение и когда нет.

Задачи § 11.2, 11.3 состоят в выборе оптимального управления. Они относятся к динамическому программированию при непрерывном времени. Подобные задачи часто возникают в теории автоматического регулирования при наличии помех. Ряд близких задач рассматривался в работах Стратоновича [18, 19], Стратоновича и Шмальгаузена [1], Шмальгаузена [1].

Приведенные задачи иллюстрируют применение общих методов теории оптимального управления, основывающейся на теории условных марковских процессов. Поле приложения этих методов весьма широко. Обязательное условие, чтобы основной процесс был марковским, является не очень ограничительным. В самом деле, увеличением числа компонент марковского процесса можно добиться того, чтобы этот процесс аппроксимировал всякий процесс с любой наперед заданной точностью. Это, в сущности, снимает какие-либо принципиальные границы области применения методов.

Правда, техническое решение задач при большом числе достаточных координат становится очень трудоемким, и это ставит практические границы полю применений. В свете сказанного ясно, что главным явлением, с которым приходится иметь дело при рассмотрении все более сложных задач, является увеличение числа достаточных координат. Такое увеличение рассмотрено на ряде примеров в § 11.4.

§ 11.1. ЗАДАЧИ НА ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

В главе 9, посвященной выбору оптимальных оценок, ход основного процесса z_t, а также наблюдаемого процесса $y_t = y_t\ (z_t)$ предполагался не зависящим от принимаемых решений. В терминах σ-алгебр, введенных в § 8.1, это выражается тем, что $\mathcal{A}^t(u)$ не зависит от u и при всех $t \in T$ содержит $\mathcal{Z}^b$; σ-алгебра наблюдения $\mathcal{Y}^t(u)$ также не зависит от u и принадлежит $\mathcal{Z}^t$.

Переход к более общему случаю будет произведен, если допустить зависимость наблюдаемого процесса от управления: $y_t = y_t\ (z_t,\ u)$ или же зависимость вероятностей основного процесса от управления. Первый случай, когда $y_t\ (z_t, u)$ существенно зависит от u, но $\mathcal{A}^t \supset \mathcal{Z}^b$, $t \in T$, можно назвать случаем *управляемого наблюдения*. Наблюдатель-оператор здесь может выбирать оптимальный способ наблюдения, но не может влиять на ход основного процесса: $\mathbf{P}\ (\Lambda \mid u) = \mathbf{P}\ (\Lambda),\ \Lambda \in \mathcal{Z}^b$.

Второй случай, когда наблюдатель-оператор может существенно влиять на вероятности (а может быть, даже и на фазовое пространство) основного процесса, т. е. когда $\mathcal{A}^t(u_a^t)$ включает $\mathcal{Z}^t(u)$, но существенно беднее, чем $\mathcal{Z}^{t'}\ (u)$, $t' > t$, относится к *динамическому программированию.*

Общая теория, развитая в гл. 8, охватывает любой из этих случаев. В настоящей главе будут рассмотрены как задачи на выбор оптимального наблюдения, так и задачи динамического программирования.

Изложенные в гл. 10 задачи на оптимальное прекращение процесса занимают некоторое промежуточное положение между задачами на выбор оптимальных оценок и задачами на выбор оптимального наблюдения или управления. Теория гл. 10 выходит за рамки оптимальной фильтрации, поскольку наблюдатель-оператор в состоянии влиять на ход процесса. Но это влияние носит весьма вырожденный, примитивный характер: вмешательство наблюдателя-оператора может лишь прекратить основной процесс или процесс наблюдения. В задачах, которые будут рассмотрены в дальнейшем, вмешательство наблюдателя-оператора будет более содержательным.

1. Пусть $\{\eta_t\}$—марковский процесс с двумя состояниями, о котором была речь в § 9.6 и § 10.6. Значение $\eta_t = 1$ можно интерпретировать как наличие разладки в некотором производственном процессе, в момент t, а значение $\eta_t = -1$ — как ее отсутствие. Разладка может появляться и исчезать, это описывается коэффициентами ν, μ в уравнении (9.35) для априорных вероятностей. Пусть, как и ранее, наблюдаемый процесс имеет вид (9.36), но теперь наблюдатель-оператор решает, нужно ли производить наблюдение или нет. Введем функцию управления $\overline{\overline{u}}_t$, связанную с этим решением: $\overline{\overline{u}}_t = 1$, если наблюдатель в момент времени t ведет наблюдение, и $\bar{\bar{u}}_t = 0$, если нет.

Целесообразность отключения наблюдения (при определенных условиях) объясняем тем, что наблюдение является дорогостоящим, т. е. связано с некоторыми затратами. Чтобы отметить это, дополним штрафы (10.43) зависящим от $\bar{\bar{u}}_t$ членом:

$$C_{tt} = G\bar{\bar{u}}_t + \begin{cases} A_1 & \text{при } \eta_t = 1; \\ A_2 & \text{при } \eta_t = -1. \end{cases} \tag{11.1}$$

При наличии разладки продолжать производственный процесс экономически невыгодно. Поэтому задачей наблюдателя-оператора является остановка процесса при соответствующих условиях. В этом отношении данная задача аналогична тем задачам, которые были рассмотрены в гл. 10, и мы будем придерживаться введенных там понятий и обозначений.

Пусть в момент остановки $t = \vartheta$ штрафуется лишь неоправданная (ошибочная) остановка. Это соответствует более специальным, чем (10.43. а), штрафам остановки:

$$C'_{tt} = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta_t = 1; \\ B & \text{при } \eta_t = -1. \end{cases} \tag{11.2}$$

Добавляя к $\bar{\bar{u}}_t$ ступенчатую функцию (10.2), видим, что в данной задаче роль процесса управления u_t играет пара $(\bar{\bar{u}}_t, \bar{u}_t)$, или, что то же, пара $(\bar{\bar{u}}_t \bar{u}_t, \bar{u}_t)$. Принимая во внимание указанные выше штрафы (11.1), (11.2), записываем полную функцию штрафов (10.5)

$$c^t(\omega) = \int_a^t \left[A_1 \frac{1+\eta_s}{2} + A_2 \frac{1-\eta_s}{2} + G\bar{\bar{u}}_s \right] \bar{u}_s\, ds - \int_a^t B \frac{1-\eta_s}{2}\, d\bar{u}_s. \tag{11.3}$$

Введем достаточные координаты для данной задачи и рассмотрим соответствующее ей рекуррентное соотношение (8.39) (при $\varphi_k = t_k$). Как и в гл. 10, достаточными координатами являются (в соответствии с теоремой 8.11) значение $\bar{u}_t$ и апостериорная вероятность

$$w_1(t) = \mathbf{P}\,[\eta_t = 1 \mid y_\tau,\ \tau \in J_t], \tag{11.4}$$

где

$$J_t = [a, t] \cap \{s : \bar{\bar{u}}_s = 1\}.$$

Целесообразно ограничиться пространством функций $\{\bar{\bar{u}}_t, t \in T\}$, измеримых по Борелю. Тогда интеграл $G\int \bar{\bar{u}}_s \bar{u}_s ds$ в (11,3) будет существовать. Кроме того, множество J_t будет соединением не более чем счетного числа непересекающихся интервалов:

$$J_t = \bigcup_j [\tau'_j, \tau''_j].$$

На каждом интервале (τ'_j, τ''_j) апостериорная вероятность $w_1(\tau)$ как функция от τ удовлетворяет уравнению (6.43), принимающему вид

$$\frac{dw_1(\tau)}{d\tau} = \nu w_2 - \mu w_1 + \frac{2}{N} w_1 w_2 \frac{dy}{d\tau}, \tag{11.5}$$

и на каждом интервале (τ''_j, τ'_{j+1}) — уравнению вида (9.35)

$$\frac{dw_1(\tau)}{d\tau} = \nu w_2 - \mu w_1 \tag{11.6}$$

Таким образом, вероятность $w_1(t)$ может быть получена как решение чередующихся уравнений (11,5), (11.6) при условии непрерывности в граничных точках ..., τ'_j, τ''_j, τ'_{j+1}, ... Если задано значение $w_1(t_k)$ и известно управление $\bar{u}_{t_k}^{t_{k+1}}$, то описанным способом мы можем получить значение $w_1(t_{k+1}) = w_1(w_1(t_k), \bar{\bar{u}}_{t_k}^{t_{k+1}}, y_{t_k}^{t_{k+1}})$ и найти для него распределение вероятностей $\mathbf{P}(dw_1(t_{k+1}) \mid \bar{\bar{u}}_{t_k}^{t_{k+1}}, w_1(t_k))$. Рассмотрим преобразование

$$(T_{t_k t_{k+1}}(\bar{\bar{u}}_{t_k}^{t_{k+1}})\, g)(w_1) = \int g(w'_1)\, \mathbf{P}(dw'_1 \mid \bar{\bar{u}}_{t_k}^{t_{k+1}}, w_1). \tag{11.7}$$

Удобно ввести обозначение

$$\Delta\bar{\bar{u}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{\bar{u}}_t\, dt.$$

Как легко видеть, если $\Delta\bar{\bar{u}} = t_{k+1} - t_k \equiv \Delta$, то на почти всем интервале (t_k, t_{k+1}) справедливо уравнение (11.5), а если $\Delta\bar{\bar{u}} = 0$, то на этом интервале почти всюду справедливо уравнение (11.6). Первому уравнению соответствует инфинитезимальный оператор (9.44)

$$\frac{dL'}{dr} = \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial}{\partial w_1},$$

а второму — оператор

$$\frac{dL''}{dt} = (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial}{\partial w_1}.$$

Следовательно, в предположении, что $g(w_1)$ дважды дифференцируемая функция, имеем

$$T_{t_k t_{k+1}}(\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}})\, g = g + \left[\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial g}{\partial w_1}\right]\Delta + o(\Delta)$$

$$\text{при} \quad \Delta\overline{\overline{u}} = \Delta;$$

$$T_{t_k t_{k+1}}(\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}})\, g = g + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial g}{\partial w_1}\Delta + o(\Delta) \ \text{при} \ \Delta\overline{\overline{u}} = 0.$$

Нетрудно понять, что в промежуточном случае, когда $0 < \Delta\overline{\overline{u}} < \Delta$, справедлива интерполирующая формула:

$$T_{t_k t_{k+1}}(\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}})\, g = g + \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial w_1^2}\Delta\overline{\overline{u}} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial g}{\partial w_1}\Delta + o(\Delta). \tag{11.8}$$

Таким образом, оператор (11.7), если пренебречь величиной $o(\Delta)$, зависит от $\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}}$ только через посредство $\Delta\overline{\overline{u}}$.

Учтем приведенные выше результаты при конкретизации рекуррентного соотношения (8.39). Принимая во внимание (11.3), будем минимизировать, как и при выводе (10.9), сначала по $\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}}$ (при фиксированной функции $\{\overline{u}_t\}$), а затем по $\overline{u}_{t_k}^{t_{k+1}}$, т. е. по $\vartheta \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда (8.39) будет иметь вид

$$S_{t_k}(1, w_1) = \min\Big\{\min_{\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}}}[(A_1 w_1 + A_2 w_2)\Delta + o(\Delta) + G\Delta\overline{\overline{u}} +$$

$$+ T_{t_k t_{k+1}}(\overline{\overline{u}}_{t_k}^{t_{k+1}})\, S_{t_{k+1}}(1, w_1)], \min_{\vartheta\in[t_k, t_{k+1})}[(A_1 w_1 + A_2 w_2)(\vartheta - t_k) +$$

$$+ o(\Delta) + \mathbf{M}(B\, w_2(\vartheta) \mid w_1)]\Big\}. \tag{11.9}$$

Здесь использованы вытекающие из (11.1), (11,2) равенства

$$\mathbf{M}[C_{tt} \mid w_1(t)] = A_1 w_1(t) + A_2 w_2(t) + G\overline{\overline{u}}_t;$$

$$\mathbf{M}[C'_{tt} \mid w_1(t)] = B w_2(t).$$

В тех точках, где $S_{t_{k+1}}(1, w_1)$ дважды дифференцируема по w_1, согласно (11.8) имеем

$$S_{t_k}(1, w_1) = \min\Big\{\min_{0\leqslant\Delta\overline{\overline{u}}\leqslant\Delta}\Big[(A_1 w_1 + A_2 w_2)\Delta + G\Delta\overline{\overline{u}} +$$

$$+ S_{t_{k+1}}(1, w_1) + \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_{t_{k+1}}}{\partial w_1^2}\Delta\overline{\overline{u}} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_{t_{k+1}}}{\partial w_1}\Delta\Big],$$

$$\min_{t_k \leqslant \vartheta < t_{k+1}} [Bw_2 - B(\nu w_2 - \mu w_1)(\vartheta - t_k) + \qquad (11.10)$$

$$+ (A_1 w_1 + A_2 w_2)(\vartheta - t_k)]\Big\} + o(\Delta).$$

Вследствие линейной зависимости входящих сюда выражений от Δu и Θ минимум достигается в крайних точках, так что

$$S_{t_k}(1, w_1) = \min\Big\{S_{t_{k+1}}(1, w_1) + \Big[(\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_{t_{k+1}}}{\partial w_1} +$$

$$+ A_1 w_1 + A_2 w_2\Big]\Delta,$$

$$S_{t_{k+1}}(1, w_1) + \Big[\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_{t_{k+1}}}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_{t_{k+1}}}{\partial w_1} +$$

$$+ A_1 w_1 + A_2 w_2 + G\Big]\Delta, \qquad (11.11)$$

$$Bw_2,\ Bw_2 + [A_1 w_1 + A_2 w_2 - B(\nu w_2 - \mu w_1)]\Delta\Big\} + o(\Delta).$$

Обозначим выражения, стоящие в фигурных скобках, соответственно H_1, H_2, H_3, H_4. Пусть Ξ_i — та область интервала $[0,1] \ni w_1$. где

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[\min_j (H_j,\ j = 1, \ldots, 4) - S_{t_k}] = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[H_i - S_{t_k}].$$

Как и в гл. 10, мы предполагаем, что функция $S_{t_{k+1}}$принадлежит области регулярности $D^0_{t_{k+1}}$ (§ 8.6). Такие функции, как видно из (11.11), не превосходят Bw_2. В области $\Xi^c = \Xi_3 \cup \Xi_4$ они равны Bw_2, а в областях Ξ_1, Ξ_2 ($\subset \Xi$) они меньше Bw_2.

Функции S, принадлежащие области регулярности, являются, кроме того, непрерывными по w_1 и им соответствует непрерывная функция $\psi_t(w_1, S)$. Это можно доказать тем же способом, что и в § 10.3 (доказательство 10.1.В).

После предельного перехода $\Delta \to 0$ рекуррентные соотношения (11.11) обращаются в дифференциальное уравнение

$$-\frac{\partial S_t(1, w_1)}{\partial t} = \psi_t(w_1, S_t(1, w_1)),$$

где

$$\psi_t(w_1, S_t) = (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_t}{\partial w_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 \text{ в } \Xi_1;$$

$$\psi_t(w_1, S_t) = \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2} + (\nu\mu_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_t}{\partial w_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 + G$$

$$\text{в } \Xi_2.$$

К нему следует присоединить граничное условие:

$$S_t(w_1) = B(1 - w_1) \text{ на границе области } \Xi^c \tag{11.12}$$

Область $\Xi_4(t)$ является «неустойчивой»; она превращается в $\Xi_2(t')$ при меньших временах $t' < t$ и поэтому особого рассмотрения не требует.

Из непрерывности функции $\psi(w_1, S_t)$ вытекает также граничное условие

$$\lim_{\Xi_2 \ni w_1 \to w_1'} \left[\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial S_t}{\partial w_1} \right] + G =$$

$$= \lim_{\Xi_1 \ni w_1 \to w_1'} \left[(\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial S_t}{\partial w_1} \right] \tag{11.13}$$

на границе w_1' между областями Ξ_1 и Ξ_2.

В данной задаче мы особо интересуемся стационарным режимом работы, т. е. предельной функцией (10.48) и предельными стабильными областями Ξ_1, Ξ_2, $\Xi_3 = \Xi^c$ (вследствие «неустойчивости» $\Xi_4(t)$ стабильная область Ξ_4 отсутствует).

Предполагая, что предел (10.48) существует, получаем для него уравнение

$$\psi_t(w_1, S^0(w_1)) = 0,$$

т. е.

$$(\nu w_2 - \mu w_1) \frac{dS^0}{dw_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 = 0 \quad \text{в } \Xi_1 \tag{11.14}$$

и

$$\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{d^2 S^0}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{dS^0}{dw_1} + A_1 w_1 + A_2 w_1 + G = 0 \quad \text{в } \Xi_2. \tag{11.15}$$

2. Граничных условий (11.12), (11.13) оказывается недостаточно для решения задачи. К ним нужно добавить условие непрерывности производной

$$\frac{dS^0}{dw_1}(w_1'') = -B \tag{11.16}$$

на границе w_1'' между областью Ξ_2 и областью Ξ^c. Это условие аналогично условию (10.36) и аргументируется тем же способом.

Выведем также дополнительные условия непрерывности производной на границе $\Gamma \ni w_1'$ между областями Ξ_1 и Ξ_2, пользуясь уравнениями (11.10), (11.11), которые для $S^\circ(w_1)$

можно записать

$$S^0(w_1) = \min\{\min_{0\leqslant\Delta\bar{\bar{u}}\leqslant\Delta} [T_\Delta(\Delta\bar{\bar{u}}) S^0 + (A_1w_1 + A_2w_2)\Delta + $$

$$+ G\Delta\bar{\bar{u}}], Bw_2\} + o(\Delta).$$

Для точек, не слишком далеких от этой границы (не попадающих в Ξ^c), имеем

$$S^0(w_1) = \min_{0\leqslant\Delta\bar{\bar{u}}\leqslant\Delta} [T_\Delta(\Delta\bar{\bar{u}}) S^0 + G\Delta\bar{\bar{u}}] + (A_1w_1 + A_2w_2)\Delta + o(\Delta). \tag{11.17}$$

Предположим сначала, что функция имеет скачок производной:

$$S^0(w_1) = \begin{cases} S^0(w_1') + S_1^-(w_1 - w_1') + \ldots & \text{при } w_1 < w_1'; \\ S^0(w_1') + S_1^+\cdot(w_1 - w_1') + \ldots & \text{при } w_1 > w_1', \end{cases}$$

и рассмотрим в (11.17) точку $w_1 = w^* \equiv w_1' - \frac{1}{2}a'\Delta$ ($a' = \nu - (\mu + \nu)w_1'$). Для нее

$$S^0(w^*) = \min_{0\leqslant\Delta\bar{\bar{u}}\leqslant\Delta} \left[(2\pi b'\Delta\bar{\bar{u}})^{-\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{(w^*-w+a'\Delta)^2}{2b'\Delta\bar{\bar{u}}}} S^0(w)\,dw + G\Delta\bar{\bar{u}}\right] +$$

$$+ (A_1w_1' + Aw_2')\Delta + o(\Delta) \tag{11.18}$$

$$\left(b' = \frac{4}{N} w_1'^2 w_2'^2\right).$$

Если $S_1^+ < S_1^-$ (угол излома направлен вверх), то из (11.18) легко получить, что минимум достигается при $\Delta\bar{\bar{u}} = \Delta$. В этом случае правая часть (11.18) равна $S^0(w^*) + \sqrt{\Delta}G_1(0)\cdot(S_1^+ - S_1^-) + O(\Delta)$ подобно тому, как это было в формуле (10.34). Она не может совпадать с $S^0(w^*)$, и мы пришли к противоречию.

Если $S_1^+ > S_1^-$ (угол излома направлен вниз), то минимум в правой части (11.18) достигается при $\Delta\bar{\bar{u}} = 0$ и правая часть оказывается равной

$$S^0(w^* + a'\Delta) + (A_1w_1' + A_2w_2')\Delta + o(\Delta) =$$

$$= S^0\left(w' + \frac{1}{2}a'\Delta\right) + (A_1w_1' + A_2w_2')\Delta + o(\Delta).$$

В этом случае она отличается от $S^0(w^*)$ на величину

$$S^0\left(w_1' + \frac{1}{2}a'\Delta\right) - S^0\left(w_1' - \frac{1}{2}a'\Delta\right) + (A_1 w_1' + A_2 w_2')\Delta +$$

$$+ o(\Delta) = \frac{1}{2}(S_1^+ + S_1^-)\, a'\Delta + (A_1 w_1' + A_2 w_2')\Delta + o(\Delta) =$$

$$= \frac{1}{2}(S_1^+ - S_1^-)\, a'\Delta + o(\Delta)$$

(последнее в силу (11.14)), если Ξ_1 лежит слева от w_1', и на величину

$$\frac{1}{2}(S_1^- - S_1^+)\, a'\Delta + o(\Delta),$$

если справа. Это опять-таки противоречит равенству (11.18). Остается единственная возможность совпадения производных S_1^+, S_1^- справа и слева:

$$\frac{dS^0}{dw_1}(w_1' + 0) = \frac{dS^0}{dw_1}(w_1' - 0). \qquad (11.19)$$

3. Перейдем к решению уравнений (11.14), (11.15) при граничных условиях (11.16), (11.19), (11.12).

Интегрируя (11.15) с учетом (11.19), имеем в Ξ_2

$$\frac{dS^0(w_1)}{dw_1} = -\frac{N}{2} e^{-\varphi_1(w_1)} \int\limits_{w'_1}^{w_1} e^{\varphi(\xi_1)} \frac{A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + G}{\xi_1^2 \xi_2^2} d\xi_1 +$$

$$+ e^{-\varphi(w_1)+\varphi(w'_1)} \frac{dS^0}{dw_1}(w_1')_{\Xi_1} \quad (\xi_2 = 1 - \xi_1), \qquad (11.20)$$

где

$$\frac{dS^0}{dw_1}(w_1)_{\Xi_1} = -\frac{A_1 w_1 + A_2 w_2}{\nu w_2 - \mu w_1} = -D' - \frac{D}{\nu w_2 - \mu w_1} \qquad (11.21)$$

в силу (11.14). Функция φ, а также D, D' определены формулами (10.52), (10.51).

Если положить $w_1 = w_1''$, то согласно (11.16) отсюда получим уравнение

$$Be^{\varphi(w''_1)} = \frac{N}{2} \int\limits_{w'_1}^{w''_1} e^{\varphi(\xi_1)} \frac{A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + G}{\xi_1^2 \xi_2^2} d\xi_1 - e^{\varphi(w'_1)} \frac{dS^0}{dw_1}(w_1')_{\Xi_1},$$

(11.22)

связывающее между собой граничные точки w_1', w_1''. Здесь предположено, что область Ξ_2 примыкает с одной стороны к области Ξ_1, а с другой — к области Ξ^c; не представляет труда исследовать и другие случаи.

Граничные точки w'_1, w''_1 еще не являются полностью определенными при помощи уравнения (11.22), однако имеющаяся свобода их выбора существенно ограничена: положение одной точки определяется положением второй. Дифференцированием этого уравнения находим связь между смещениями точек:

$$(w''_1 w''_2)^{-2} e^{\varphi(w''_1)} [-(\nu w''_2 - \mu w''_1) B + A_1 w''_1 + A_2 w''_2 + G] \delta w''_1 =$$
$$= (w'_1 w'_2)^{-2} e^{\varphi(w'_1)} \left[\frac{2}{N} w'^2_1 w'^2_2 \frac{d^2 S^0}{dw_1^2} (w'_1)_{\Xi_1} + \right.$$
$$\left. + (\nu w'_2 - \mu w'_1) \frac{dS^0}{dw_1} (w'_1)_{\Xi_1} + A_1 w'_1 + A_2 w'_2 + G \right] \delta w'_1. \qquad (11.23)$$

Принимая во внимание условие (11.12) и интегрируя выражения (11.20), (11.21) для производной $\frac{dS^0}{dw_1}$, можно найти функцию S°, и, в частности, ее значение в области Ξ_1:

$$S^0(w_1) = \int\limits_{w'_1}^{w_1} \frac{dS^0}{dw_1} (\xi_1)_{\Xi_1} d\xi_1 + \int\limits_{w''_1}^{w'_1} \frac{dS_0}{dw_1} (\xi_1)_{\Xi_2} d\xi_1 + B(1 - w''_1). \qquad (11.24)$$

Поскольку величины w'_1, w''_1 связаны лишь одним уравнением (11.22), остающаяся свобода их выбора должна быть устранена дополнительно. Для этого потребуем, чтобы искомым величинам w'_1, w''_1 соответствовал экстремум (минимум) функции (11.24). Взяв вариацию от (11.24) при учете (11.16), (11.19), а также (11.21), имеем

$$\delta S^0(w_1) = \int\limits_{w''_1}^{w'_1} \frac{\partial}{\partial w'_1} \left[\frac{dS^0}{dw_1} (\xi_1)_{\Xi_2} \right] d\xi_1 \cdot \delta w'_1.$$

Дифференцируя выражение (11.20), находим

$$\delta S^0(w_1) = J \frac{N}{2} (w'_1 w'_2)^{-2} e^{\varphi(w'_1)} \left[\frac{2}{N} w'^2_1 w'^2_2 \frac{d^2 S^0}{dw_1^2} (w'_1)_{\Xi_1} + \right.$$
$$\left. + (\nu w'_2 - \mu w'_1) \frac{dS^0}{dw_1} (w'_1)_{\Xi_1} + A_1 w'_1 + A_2 w'_2 + G \right] \delta w'_1 =$$
$$= J \frac{N}{2} (w''_1 w''_2)^{-2} e^{\varphi(w''_1)} [-(\nu w''_2 - \mu w''_1) B +$$
$$+ A_1 w''_1 + A_2 w''_2 + G] \delta w''_1$$

где $J = \int\limits_{w''_1}^{w'_1} e^{-\varphi(\xi_1)}\, d\,\xi_1$; второе равенство вытекает из (11.23).

Следовательно, вариация $\delta S^0(w_1)$ обращается в нуль, если выполняется уравнение

$$\frac{2}{N} w_1'^2 w_2'^2 \frac{d^2S^0}{dw_1^2}(w_1')_{\Xi_1} + (\nu w_2' - \mu w_1') \frac{dS^0}{dw_1}(w_1')_{\Xi_1} + $$

$$+ A_1 w_1' + A_2 w_2' + G = 0 \qquad (11.25)$$

или уравнение

$$-(\nu w_2'' - \mu w_1'') B + A_1 w_1'' + A_2 w_2'' + G = 0. \qquad (11.26)$$

Выберем одно из полученных двух уравнений. Выше (стр. 252) отмечалось, что в области $\Xi^c = \Xi_3$ нет точек области Ξ_4, т. е. в ней

$$-(\nu w_2 - \mu w_1) B + A_1 w_1 + A_2 w_2 \geqslant 0.$$

Следовательно, в области Ξ^c и на ее границе w_1''

$$-(\nu w_2 - \mu w_1) B + A_1 w_1 + A_2 w_2 + G > 0,$$

ибо $G > 0$, так что уравнение (11.26) не может выполняться. Поэтому в качестве условия, окончательно определяющего w_1', w_1'', берем остающееся равенство (11.25).

Сопоставляя (11.25) с (11.15) и учитывая непрерывность первой производной (11.19), легко видеть, что указанное условие можно формулировать как условие непрерывности второй производной в граничной точке:

$$\frac{d^2S^0}{dw_1^2}(w_1' + 0) = \frac{d^2S^0}{dw_1^2}(w_1' - 0).$$

Кроме того, если учесть (11.14), (11.20), данному условию можно придать вид

$$\frac{d^2S^0}{dw_1^2}(w_1')_{\Xi_1} = -\frac{1}{2}\ \frac{GN}{w_1'^2 (1 - w_1')^2}.$$

Дифференцируя (11.21), следовательно, получаем

$$\frac{\nu A_1 + \mu A_2}{[\nu - (\mu + \nu) w_1']^2} = \frac{1}{2}\ \frac{GN}{w_1'^2 (1 - w_1')^2}$$

или, предполагая, что $\nu A_1 + \mu A_2 > 0$,

$$w_1'(1 - w_1') = \left(\frac{1}{2}\ \frac{GN}{\nu A_1 + \mu A_2}\right)^{\frac{1}{2}} [\nu - (\mu + \nu) w_1'] \qquad (11.27)$$

(выбирается корень w_1', лежащий между нулем и $\frac{\nu}{\mu+\nu}$).

Вторая граница w_1'' области Ξ_2 находится из уравнения (11.22).

Расположение областей Ξ_1, Ξ_2, Ξ^c обычно является таким: область отсутствия наблюдений Ξ_1 занимает крайнее правое положение, совпадая с отрезком $(0, w_1')$, область наблюдения Ξ_2 является отрезком (w_1', w_1''), а область остановки — отрезком $(w_1'', 1)$. Пока апостериорная вероятность $w_1(t)$ принадлежит Ξ_1, ситуация является не опасной и наблюдения проводить нецелесообразно. Область наблюдения (w_1', w_1'') является опасной зоной и в ней является оправданным наблюдение за процессом. Величина $w_1(t)$ в каждый момент времени является мерой опасности ситуации; когда она достигает критического значения w_1'', следует объявить тревогу, т. е. остановить процесс.

Описанный режим работы и расположение областей имеют место не при всех, а лишь при нормальных значениях параметров задачи. В некоторых случаях возможна другая картина. Так, область Ξ_2 может отсутствовать, а область $\Xi_1 = (0, w_1^{\Gamma})$ и $\Xi^c = (w_1^{\Gamma}, 1)$ — непосредственно граничить друг с другом. Из (11.14), (11.16) нетрудно получить условие

$$B = \frac{A_1 w_1^{\Gamma} + A_2 w_2^{\Gamma}}{\nu w_2^{\Gamma} - \mu w_1^{\Gamma}} \quad \left(= D' + \frac{D}{\nu - (\mu+\nu) w_1^{\Gamma}}\right), \tag{11.28}$$

определяющее границу w_1^{Γ} в этом случае.

Как показывает анализ функций (11.20), (11.21), такое расположение областей имеет место, когда корень уравнения (11.27) больше корня уравнения (11.28). В противоположном случае, когда $w_1^{\Gamma} > w_1'$, т. е.

$$D' + \frac{D}{\nu - (\mu+\nu) w_1'} < B \qquad (D > 0),$$

области имеют описанное выше обычное расположение.

§ 11.2. ЗАДАЧИ НА ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Перейдем к задачам, в которых вероятностные характеристики основного процесса зависят от выбираемого управления, так что наблюдатель-оператор, принимая решение, влияет на ход процесса.

Начнем с конкретной задачи, до известной степени близкой к тем задачам о возникновении разладки, которые были рассмотрены в § 10.6 и § 11.1. Процесс с двумя состояниями $\eta_t = \pm 1$ и наблюдаемый процесс пусть остаются без изменения. Наблюдение специальных затрат не требует и не штрафуется. В отличие от предыдущих задач, в опасной ситуации (вероятная разладка $\eta_t = 1$) теперь пусть требуется не останавливать весь процесс, а переходить к некоторому форсированному режиму работы, вызывающему исчезновение разладки с повышенной вероятностью. При таком форсированном режиме уравнение для априорных вероятностей (9.35) заменяется на уравнение

$$\dot{p}_1 = -\dot{p}_2 = -\mu' p_1 + \nu' p_2,$$

где $\mu' - \mu = \lambda > 0$. Второй параметр для простоты будем полагать таким же, что и раньше: $\nu' = \nu$.

Наблюдатель-оператор в каждый момент времени t имеет одну из двух возможностей: работать при обычном режиме ($u_t = 0$) или перейти к форсированному режиму ($u_t = 1$).

Форсированный режим естественно считать дорогостоящим и его цену включать в функцию штрафа, полагая

$$C_{tt} = Gu_t + \begin{cases} A_1 & \text{при} \quad \eta_t = 1; \\ A_2 & \text{при} \quad \eta_t = -1. \end{cases}$$

Рекуррентное соотношение (8.39) вместо (11.9) теперь будет иметь вид

$$S_{t-\Delta}(w_1) = \min_{u_{t-\Delta}^t} \{(A_1 w_1 + A_2 w_2)\Delta + o(\Delta) + G\Delta u + \\ + T_{t-\Delta, t}(u_{t-\Delta}^t) S_t\}, \tag{11.29}$$

где обозначено

$$\Delta u = \int_{t-\Delta}^{t} u_\tau \, d\tau.$$

Согласно (9.44) инфинитезимальный оператор процесса w_1 равен

$$\frac{d\mathscr{L}'}{dt} = (\nu w_2 - \mu w_1) \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2}{\partial w_1^2},$$

если u_t равна нулю в окрестности точки t, и

$$\frac{d\mathscr{L}''}{dt} = [\nu w_2 - (\mu + \lambda) w_1] \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2}{\partial w_1^2},$$

если равна единице. Предполагая двукратную дифференцируемость функции $g(w_1) = S_t(w_1)$, имеем

$$T_{t-\Delta,t}(u_{t-\Delta}^{t})\,g = g + \left[\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial g}{\partial w_1}\right]\Delta - \\ - \lambda w_1 \frac{\partial g}{\partial w_1}\Delta u + o(\Delta),$$

так что соотношение (11.29) принимает вид

$$S_{t-\Delta}(w_1) = S_t(w_1) + \left[\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_t}{\partial w_1} + \right. \\ \left. + A_1 w_1 + A_2 w_2\right]\Delta + \min_{0\leqslant \Delta u \leqslant \Delta}\left\{G\,\Delta u - \lambda w_1 \frac{\partial S_t}{\partial w_1}\Delta u\right\} + o(\Delta). \tag{11.30}$$

Следовательно, функция $S_t(w_1)$, принадлежащая пространству регулярности, удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial S_t}{\partial w_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 \tag{11.31}$$

в области Ξ_1, где

$$G > \lambda w_1 \frac{\partial S_t}{\partial w_1}(w_1), \tag{11.32}$$

и уравнению

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t} = \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2} + \\ + [\nu w_2 - (\mu + \lambda) w_1]\frac{\partial S_t}{\partial w_1^2} + A_1 w_1 + A_2 w_2 + G \tag{11.33}$$

в области Ξ_2, где

$$G < \lambda w_1 \frac{\partial S_t}{\partial w_1}(w_1). \tag{11.34}$$

Если не предполагать с самого начала двукратную дифференцируемость функции $S_t(w_1)$ по w_1, то уравнения (11.31), (11.33) для $S_t \in D^\circ$ будут вытекать из определения 8.8 пространства регулярности D°. По аналогии с § 10.4 можно доказать непрерывность первой производной $\frac{\partial S_t}{\partial w_1}$ на общей границе $\Gamma \ni w_1^\Gamma$ областей Ξ_1 и Ξ_2. Из (11.32), (11.34) при этом в результате предельных переходов $\Xi_1 \ni w_1 \to w_1^\Gamma$ и $\Xi_2 \ni w_1' \to w_1^\Gamma$ будем иметь

$$\frac{\partial S_t}{\partial w_1}(w_1^\Gamma) = \frac{G}{\lambda w_1^\Gamma}. \tag{11.35}$$

Кроме того, сопоставляя (11.31), (11.33), вследствие непрерывности (по w_1) функции $\frac{\partial S_t}{\partial t}$ получаем непрерывность вторых производных

$$\frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2}(w_1^\Gamma + 0) = \frac{\partial^2 S_t}{\partial w_1^2}(w_1^\Gamma - 0)$$

на границе Г.

К приведенным уравнениям нужно добавить «начальное» условие

$$S_b(w_1) = f_0(w_1), \tag{11.36}$$

соответствующее конечному моменту времени. Для первого момента времени функция $S_a(w_1(a))$ совпадет с полным риском R.

Считая, что параметры задачи постоянны, исследуем стационарный режим работы. Для этого устремим $b-t$ к бесконечности. Стационарный режим характеризуется средними потерями в единицу времени

$$\gamma = \lim_{b-t\to\infty} \frac{S_t(w_1)}{b-t}, \tag{11.37}$$

не зависящими от w_1.

Мы предполагаем, что существует предел (11.37), а также предел

$$f(w_1) = \lim_{b-t\to\infty} [S_t(w_1) - \gamma(b-\gamma)], \tag{11.38}$$

причем до известной степени они не зависят от выбора конечной функции (11.36). Поскольку $S_t(w_1)$ зависит лишь от разности времен $b-t$ (а не от t и b по отдельности), предельная функция (11.38) (как и γ) оказывается не зависящей от времени: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Учитывая это при подстановке выражения

$$S_t(w_1) = \gamma(b-t) + f(w_1) + o(1)$$

в уравнение (11.31), получаем

$$\gamma - \frac{\partial}{\partial t} o(1) = \frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{\partial f}{\partial w_1} + \\ + A_1 w_1 + A_2 w_2 + \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} o(1) + \frac{\partial}{\partial w_1} o(1) \tag{11.39.a}$$

и, переходя к пределу $b-t\to\infty$,

$$\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{d^2 f}{d w_1^2} + (\nu w_2 - \mu w_1)\frac{df}{dw_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 - \gamma = 0, \tag{11.39}$$

если

$$\frac{\partial}{\partial t} o(1) = o(1); \quad \frac{\partial}{\partial w_1} o(1) = o(1); \quad \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} o(1) = o(1).$$

Условие (11.32), определяющее теперь не зависящую от времени область Ξ_1, где справедливо (11.39), принимает вид

$$\frac{df}{dw_1}(w_1) < \frac{G}{\lambda w_1}. \tag{11.40}$$

Аналогично из (11.33) выводим уравнение

$$\frac{2}{N} w_1^2 w_2^2 \frac{d^2 f}{dw_1^2} + [\nu w_2 - (\mu + \lambda) w_1] \frac{df}{dw_1} + A_1 w_1 + A_2 w_2 + G - \gamma = 0, \tag{11.41}$$

выполняющееся в области Ξ_2, где

$$\frac{df}{dw_1}(w_1) > \frac{G}{\lambda w_1}. \tag{11.42}$$

На общей границе w_1^{Γ} областей Ξ_1 и Ξ_2 выполняются условия непрерывности двух производных (первой и второй) и соотношение

$$\frac{df}{dw_1}(w_1^{\Gamma}) = \frac{G}{\lambda w_1^{\Gamma}}, \tag{11.43}$$

которое следует из (11.35).

Для полного определения функции $f(w_1)$ требуется добавить еще условия на границе области достаточных координат, т. е. условия в точках $w_1 = 0$ и $w_1 = 1$. В данной задаче они имеют тривиальный вид:

$$\left| \frac{df}{dw_1}(0) \right| < \infty; \quad \left| \frac{df}{dw_1}(1) \right| < \infty. \tag{11.44}$$

Как может быть подтверждено анализом результатов, области Ξ_1, Ξ_2 имеют такое естественное расположение: область нефорсированного режима Ξ_1 располагается слева и является интервалом $[0, w_1^{\Gamma})$, область форсированного режима совпадает с интервалом $(w_1^{\Gamma}, 1]$. Интегрируя уравнение (11.39) с учетом первого условия (11.44), получаем

$$\frac{df}{dw_1}(w_1) = \frac{N}{2} e^{-\varphi(w_1)} \int_0^{w_1} e^{\varphi(\xi)} \frac{\gamma - A_1 \xi - A_2 (1 - \xi)}{\xi^2 (1 - \xi)^2} d\xi, \quad w_1 < w_1^{\Gamma}, \tag{11.45}$$

где $\varphi(w_1)$ определяется формулой (10.52). Аналогично (11.41) и второе условие (11.44) дают

$$\frac{df}{dw_1}(w_1) = -\frac{N}{2} e^{-\varphi_\lambda(w_1)} \int_{w_1}^{1} e^{\varphi_\lambda(\xi)} \frac{\gamma - A_1\xi - A_2(1-\xi) - G}{\xi^2(1-\xi)^2} d\xi,$$

$$w_1 > w_1^\Gamma \qquad (11.46)$$

$$\left(\varphi_\lambda(w_1) = \frac{1}{2} N \left[(\nu - \mu - \lambda) \ln \frac{w_1}{w_2} - \frac{\nu}{w_1} - \frac{\mu + \lambda}{w_2}\right]\right).$$

Условие (11.43) и условие непрерывности первой производной, если использовать (11.45), (11.46), дают систему двух уравнений

$$w_1^\Gamma e^{-\varphi(w_1^\Gamma)} \int_0^{w_1^\Gamma} e^{\varphi(\xi)} \frac{\gamma - A_1\xi - A_2(1-\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2} d\xi = \frac{2G}{N\lambda};$$

$$w_1^\Gamma e^{-\varphi_\lambda(w_1^\Gamma)} \int_{w_1^\Gamma}^{1} e^{\varphi_\lambda(\xi)} \frac{A_1\xi + A_2(1-\xi) + G - \gamma}{\xi^2(1-\xi)^2} d\xi = \frac{2G}{N\lambda},$$

которая позволяет определить обе неизвестных величины: w_1^Γ и γ.

Интегрированием выражений (11.45), (11.46) находится фунция $f(w_1)$ с точностью до аддитивной постоянной. В стационарной теории эта постоянная остается неопределенной, так как ее величина определяется конкретным выбором функции $f_0(w_1)$ в условии (11.36). Для ее расчета потребовалось бы решение нестационарных уравнений (11.31), (11.33).

Анализ выражения (11.45) при значениях w_1, близких к 1, показывает, что

$$\frac{df}{dw_1}(w_1) = \frac{A_1 + G - \gamma}{\mu + \lambda} + o_{1-w_1}(1)$$

$$(o_{1-w_1}(1) \to 0 \quad \text{при} \quad w_1 \to 1).$$

Используя это для проверки неравенств (11.40), (11.42), получаем соотношение

$$\frac{A_1 + G - \gamma}{\mu + \lambda} > \frac{G}{\lambda},$$

т. е.

$$\frac{\lambda}{\mu}(A_1 - \gamma) > G,$$

как необходимое условие описанного выше нормального расположения областей Ξ_1, Ξ_2. Оно есть не что иное, как условие экономической оправданности форсированного режима. Если оно не выполнено, то область Ξ_2 форсированного режима полностью отсутствует.

§ 11.3. ДРУГАЯ ЗАДАЧА НА ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. СЛЕЖЕНИЕ ЗА БЛУЖДАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

Если в предыдущих задачах исходный процесс η_t был процессом с двумя состояниями, то теперь рассмотрим тот случай, когда он является диффузионным процессом. Описываемая ниже задача типична для автоматического регулирования.

Пусть процесс $\xi(t)$ имеет постоянный коэффициент диффузии D и постоянный снос a. Наблюдается его сумма с белым шумом или, что в сущности то же самое, процесс

$$y_1(t) = \int_{\tau \leqslant t} \xi(\tau)\, d\tau + \zeta_1(t), \tag{11.47}$$

где $\zeta_1(t)$ — винеровский процесс: $\mathbf{M}\zeta_1 = 0$; $\mathbf{M}\Delta\zeta_1^2 = N\Delta t$. Кроме того, имеется процесс $y_2(t)$ (координата регулируемого объекта), который также предполагается известным наблюдателю-оператору. Пусть он описывается уравнением

$$dy_2(t) = du_t + d\zeta_2. \tag{11.48}$$

Здесь $\zeta_2(t)$ — винеровский процесс с дисперсионным параметром $\varkappa$:

$$\mathbf{M}\zeta_2 = 0; \quad \mathbf{M}\Delta\zeta_2^2 = \varkappa\Delta t,$$

а du_t — смещение, обусловленное сервомотором, которым управляет наблюдатель-оператор. Процесс $\{u_t\}$ является в данной задаче процессом управления. Будем считать, что скорость сервомотора ограничена по абсолютной величине значением u_0, т. е., что

$$|u(t_2) - u(t_1)| \leqslant u_0 |t_2 - t_1|. \tag{11.49}$$

Пренебрегая инерционностью сервомотора, не будем вводить других ограничений на процесс управления.

Пусть назначение следящей системы в том, чтобы процесс $y_2(t)$ возможно точнее копировал координату $\xi(t)$ блуждающей точки. Если $C(\xi - y_2)$ — функция, соответствующая критерию оптимальности, то функция штрафа будет иметь вид

$$c^t = \int_{\tau \leqslant t} C(\xi(\tau) - y_2(\tau))\, d\tau. \tag{11.50}$$

В этой задаче основной марковский процесс z_t является диффузионным и состоит из трех компонент $\xi(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, причем наблюдаются две последние компоненты. Подобные случаи рассматривались в гл. 7. Априорный инфинитезимальный оператор основного процесса имеет вид

$$dL_{pr} = dt\left(a\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial}{\partial y_1}\right) + du_t\frac{\partial}{\partial y_2} + \\ + \frac{dt}{2}\left(D\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + N\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \varkappa\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right). \quad (11.51)$$

Проверка признаков 8.7.А—В показывает, что (при подходящем выборе заключительных штрафов c—c^b) наблюдаемые процессы $y_1(t)$, $y_2(t)$ и апостериорная плотность распределения вероятностей $w_t(\xi)$ образуют в совокупности достаточные координаты. Если начальное распределение $w_a(\xi)$ гауссово, то и в любой другой момент времени апостериорное распределение будет гауссовым:

$$w_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_t}} e^{-\frac{(\xi - m_t)^2}{2k_t}}. \quad (11.52)$$

Поэтому, вместо того чтобы рассматривать апостериорную плотность (11.52), можно рассматривать ее параметры m_t, k_t. Подобное упрощение было разобрано в § 9.5. Процесс с оператором (11.51) относится к процессам, которым посвящены п. 1 и п. 3 § 9.5 (не зависящие от координат локальные дисперсии и линейно зависящие сносы). Поэтому к данной задаче применимы изложенные там результаты.

После замены плотности распределения (11.52) на параметры m_t, k_t достаточными координатами будут переменные m_t, k_t, $y_1(t)$, $y_2(t)$. Уравнения для m_t, k_t получаем конкретизацией формул (9.33). Учитывая простой вид локальных параметров в (11.55), находим

$$\dot{m}_t = a + \frac{k_t}{N}(\dot{y}_1 - m_t);$$

$$\dot{k}_t = D - \frac{k_t^2}{N}. \quad (11.53)$$

Если k_0 — начальное значение апостериорной дисперсии, то решение второго уравнения (11.53) имеет вид

$$k_t = \sqrt{DN}\,\frac{(k_0 + \sqrt{DN})\,e^{2t\sqrt{\frac{D}{N}}} + k_0 - \sqrt{DN}}{(k_0 + \sqrt{DN})\,e^{2t\sqrt{\frac{D}{N}}} - k_0 + \sqrt{DN}} = \\ = \sqrt{DN}\,\frac{k_0 \operatorname{ch} t\sqrt{\frac{D}{N}} + \sqrt{DN}\operatorname{sh} t\sqrt{\frac{D}{N}}}{k_0 \operatorname{sh} t\sqrt{\frac{D}{N}} + \sqrt{DN}\operatorname{ch} t\sqrt{\frac{D}{N}}}. \quad (11.54)$$

Этот параметр, поскольку он определен, можно не относить к числу достаточных координат, рассматривая функцию $S_t(k_t, m_t, y_1(t), y_2(t))$ как функцию времени и остальных достаточных координат. Тогда мы будем иметь три достаточные координаты $m_t, y_1(t), y_2(t)$. В соответствии с формулой (9.34) они имеют вторичный апостериорный инфинитезимальный оператор

$$d\mathscr{L}_3(t) = dt\left(a\frac{\partial}{\partial m} + m\frac{\partial}{\partial y_1}\right) + du_t\frac{\partial}{\partial y_2} +$$

$$+\frac{dt}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2}{\partial m^2} + 2k_t\frac{\partial^2}{\partial m\,\partial y_1} + N\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \varkappa\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right). \quad (11.54)$$

Ввиду того что функция $C(\xi - y_2)$ в (11.50) зависит не от всех трех координат ξ, y_1, y_2 в отдельности, а лишь от разности $\xi - y_2$, в данной задаче можно провести дальнейшее сокращение числа достаточных координат. Функция

$$s_t(m_t, y_1, y_2) = \int C(\xi - y_2)\,w_t(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k_t}}\int C(m_t - y_2 + \eta)\,e^{-\frac{\eta^2}{2k_t}}\,d\eta \quad (11.55)$$

оказывается зависящей только от разности $m_t - y_2(t) \equiv x(t)$. Если, в частности, $C(\xi - y_2) = (\xi - y_2)^2$, то

$$s_t(m_t, y_1, y_2) = [m_t - y_2(t)]^2 + k_t = x^2(t) + k_t. \quad (11.56)$$

Как следует из вида оператора (11.54), двумерный процесс (m_t, y_2) является марковским сам по себе и имеет оператор

$$d\mathscr{L}_2 = dt\,a\frac{\partial}{\partial m} + du_t\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{dt}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2}{\partial m^2} + \varkappa\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right). \quad (11.57)$$

Более того, разность $x(t) = m_t - y_2(t)$ представляет собой одномерный марковский процесс с оператором

$$d\mathscr{L} = (a\,dt - du_t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dt}{2}\left(\frac{k_t^2}{N} + \varkappa\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (11.58)$$

Поэтому условие 8.7.Б не вынуждает добавлять к x_t какие-либо другие координаты. Как следует из (11.55), (11.56) и из простого характера ограничений (11.49), этого не требуют и другие условия 8.7.А,В, так что $x(t)$ оказывается единственной достаточной координатой.

Дальнейшее рассмотрение аналогично рассмотрению предыдущего параграфа. Вследствие (11.58) аналог уравнения

(11.30) имеет вид

$$S_{t-\Delta}(x)=S_t(x)+\frac{\Delta}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}+\varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t(x)}{\partial x^2}+$$

$$+\min_{-u_0\Delta\leqslant\Delta u\leqslant u_0\Delta}(a\,\Delta-\Delta u)\frac{\partial S_t(x)}{\partial x}+(x^2+k_t)\,\Delta+o(\Delta), \quad (11.59)$$

$$(\Delta u=u_t-u_{t-\Delta}).$$

Здесь выбран среднеквадратичный критерий качества, приводящий к функции (11.56). Для функции $S_t(x)$, принадлежащей пространству регулярности, справедливо уравнение

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}+\varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}+(a-u_0)\frac{\partial S_t}{\partial x}+x^2+k_t \quad (11.60)$$

в области Ξ_1, где

$$\frac{\partial S_t}{\partial x}>0, \quad (11.61)$$

и уравнение

$$-\frac{\partial S_t}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}+\varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}+(a+u_0)\frac{\partial S_t}{\partial x}+x^2+k_t \quad (11.62)$$

в области Ξ_2, где

$$\frac{\partial S_t}{\partial x}<0. \quad (11.63)$$

Как и в § 11.2, на общей границе $\Gamma\ni x_\Gamma$ областей Ξ_1 и Ξ_2 выполняются условия непрерывности первой и второй производной:

$$\frac{\partial S_t}{\partial x}(x_\Gamma+0)=\frac{\partial S_t}{\partial x}(x_\Gamma-0); \quad \frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}(x_\Gamma+0)=\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}(x_\Gamma-0).$$

Второе из этих условий является менее универсальным, оно справедливо только потому, что по обе стороны границы имеются одинаковые штрафы и одинаковый коэффициент диффузии. Из (11.61), (11.63) и из непрерывности первой производной вытекает добавочное граничное условие

$$\frac{\partial S_t}{\partial x}(x_\Gamma)=0. \quad (11.64)$$

По аналогии с предыдущей задачей может быть рассмотрен стационарный режим работы. Для этого нужно предположить существование пределов (11.37), (11.38) и независимость первого из них от x. Для предельной функции $f(x)$

имеем теперь уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{N}+\varkappa\right)\frac{d^2f}{dx^2}+(a-u_0)\frac{df}{dx}+x^2+k-\gamma=0 \quad (11.65)$$

в Ξ_1, где $\frac{df}{dx}>0$, и уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{N}+\varkappa\right)\frac{d^2f}{dx^2}+(a+u_0)\frac{df}{dx}+x^2+k-\gamma=0 \quad (11.66)$$

в Ξ_2, где $\frac{df}{dx}<0$. При выводе этих уравнений учтено, что в уравнении, аналогичном (11.39. а) в процессе предельного перехода $b-t\to\infty$ дисперсия k_t согласно (11.54) стремится к предельному значению $k\equiv k_\infty=\sqrt{DN}$.

На границе x_Γ справедливо условие

$$\frac{df}{dx}(x_\Gamma)=0 \quad (11.67)$$

(см. (11.64)).

В отличие от предыдущей задачи область достаточных координат является теперь не интервалом, а неограниченной прямой. Для доопределения функции $\frac{df}{dx}(x)$ теперь вместо (11.44) следует добавить некоторые условия на бесконечности. Без особого обоснования потребуем не слишком быстрого возрастания функции $\frac{df}{dx}(x)$ на бесконечности, именно

$$\left|\frac{df}{dx}(x)\right|=O(s_\infty(x)).$$

Здесь $s_\infty(x)$ — предел при $t\to\infty$ функции (11.55), т. е. результат подстановки $k_t=k$. Применительно к функции (11.56) указанное условие приводит к требованию, чтобы возрастание функции $\frac{df}{dt}$ было не более быстрым, чем квадратичное. Учитывая общее решение

$$\frac{df(x)}{dx}=-\beta\int_{x_0}^{x}e^{-\beta(a\mp u_0)(x-y)}(y^2+k-\gamma)\,dy+C_1e^{-\beta(a\mp u_0)x}$$

$$\left(\beta^{-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{N}+\varkappa\right)\right)$$

уравнений (11.65), (11.66), получаем, что это возможно лишь, если $u_0>|a|$. Область больших положительных значений x

при этом совпадает с областью Ξ_1 и в ней

$$\frac{df(x)}{dx} = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(u_0-a)(y-x)} (y^2+k-\gamma)\, dy =$$

$$= \frac{1}{u_0-a}\left[x^2 + \frac{2x}{\beta(u_0-a)} + \frac{2}{\beta^2(u_0-a)^2} + k - \gamma\right]. \quad (11.67)$$

Область больших отрицательных значений x принадлежит области Ξ_2, и в ней

$$\frac{df(x)}{dx} = -\beta \int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(u_0+a)(x-y)} (y^2+k-\gamma)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{u_0+a}\left[x^2 - \frac{2x}{\beta(u_0+a)} + \frac{2}{\beta^2(u_0+a)^2} + k - \gamma\right]. \quad (11.68)$$

Приравнивая согласно (11.64) выражения (11.67) и (11.68) нулю, получаем два уравнения для определения x_Γ и γ. Решение этих уравнений приводит к результату

$$x_\Gamma = -\frac{a}{u_0^2-a^2}\left(\frac{k^2}{N}+\varkappa\right); \quad \gamma = k + \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{N}+\varkappa\right)\frac{u_0^2+a^2}{(u_0^2-a^2)^2}. \quad (11.69)$$

Проверка подтверждает выполнение неравенства $\frac{df}{dx} > 0$ при $x > x_\Gamma$ и неравенства $\frac{df}{dx} < 0$ при $x < x_\Gamma$.

В самом деле, как видно из (11.65), (11.66), обе параболы (11.67), (11.68) имеют в точке x_Γ одинаковую производную

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x_\Gamma) = \beta(\gamma - k - x_\Gamma^2),$$

т. е. являются соприкасающимися. Согласно (11.69) она положительна:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x_\Gamma) = \frac{\frac{k^2}{N}+\varkappa}{u_0^2-a^2} > 0,$$

так что указанные неравенства действительно выполняются.

Интегрированием (11.67), (11.68) нетрудно найти функцию $f(x)$ с точностью до аддитивной постоянной.

Приведенное решение задачи получено в работах Стратоновича и Шмальгаузена.

§ 11.4. УВЕЛИЧЕНИЕ ЧИСЛА ДОСТАТОЧНЫХ КООРДИНАТ

Методы, изложенные в этой главе, в принципе применимы к большому числу задач. При переходе от более простых задач к более сложным применимость методов, как правило, не нарушается, однако происходит увеличение числа достаточных координат, так что фактическое решение задачи, естественно, осложняется.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, усложним пример, рассмотренный в § 11.3.

1. Пусть функция штрафов C, входящая в (11.50), зависит не только от разности $\xi - y_2$, но и от каждого аргумента в отдельности, например,

$$C(\xi - y_2, y_2) = C_0(y_2)(\xi - y_2)^2. \tag{11.70}$$

Это означает, что при разных положениях объекта требуется, вообще говоря, различная точность слежения. Тогда разность $x = m - y_2$ не будет уже являться достаточной координатой. Именно, для нее будет нарушено требование 8.7.А, так как для указания средних штрафов будет требоваться еще координата y_2 или m. Пара координат x, m (или x, y_2) будет достаточной. Учитывая вид инфинитезимального оператора (11.57) и усредняя (11.70) по аналогии с (11.55), получаем уравнения

$$-\frac{\partial S_t(x, m)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N} + \varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} + \frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x\,\partial m} + \frac{k_t^2}{2N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial m^2} +$$
$$+ (a \mp u_0)\frac{\partial S_t}{\partial x} + a\frac{\partial S_t}{\partial m} + C_0(m - x)(x_t^2 + k_t) \tag{11.71}$$

в $\Xi_{1,2}$, обобщающие (11.60), (11.62).

2. Предположим теперь, что усложнение касается не функции штрафа, а диффузионного процесса $\xi(t)$, за которым требуется следить. Пусть его коэффициент сноса не является постоянным, а имеет вид

$$a(\xi) = a^0 + a^1\xi.$$

Применяя формулу (9.34) в этом случае, вместо (11.57) получаем вторичный апостериорный оператор

$$d\mathscr{L}_2 = dt\,(a^0 + a^1 m)\frac{\partial}{\partial m} + du_t\frac{\partial}{\partial y_2} +$$
$$+ \frac{dt}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2}{\partial m^2} + \varkappa\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right). \tag{11.72}$$

Одномерный процесс $x = m - y_2$ теперь не является марковским, а есть лишь компонента двумерного марковского процесса (x, m). Требование 8.7.Б для x не выполняется, хотя другие требования 8.7.А, В и являются выполняющимися. Оно вынуждает добавить к x вторую координату m, после чего все требования будут выполняться.

В соответствии с (11.72) основные уравнения в данном случае имеют вид

$$-\frac{\partial S_t(x, m)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N} + \varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} + \frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x\,\partial m} + \frac{k_t^2}{2N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial m^2} + $$
$$+ (a^0 + a^1 m \mp u_0)\frac{\partial S_t}{\partial x} + (a^0 + a^1 m)\frac{\partial S_t}{\partial m} + x^2 + k_t \quad (11.73)$$

в $\Xi_{1,2}$.

3. Пусть теперь усложнение касается только работы сервомотора. Будем считать, что при разных положениях регулируемого объекта (при разных y_2) условия его работы различны и максимальная скорость зависит от y_2:

$$|u_t - u_{t-\Delta}| \leqslant \int_{t-\Delta}^{t} u_0(y_2(\tau))\,d\tau = u_0(y_2(t))\,\Delta + o(\Delta). \quad (11.74)$$

В этом случае координата x достаточна для выполнения требований 8.7.А, Б, но недостаточна для указания ограничений (11.74) на управление (8.7.В не выполняется). Добавление координаты y_2 (или m) исправляет положение. Как нетрудно видеть, основное уравнение при этом имеет вид

$$-\frac{\partial S_t(x, m)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N} + \varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} + \frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x\,\partial m} + \frac{k_t^2}{2N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial m^2} + $$
$$+ [a \mp u_0(m - x)]\frac{\partial S_t}{\partial x} + a\frac{\partial S_t}{\partial m} + x^2 + k_t \quad (11.75)$$

в $\Xi_{1,2}$.

Каждому из приведенных уравнений (11.71), (11.73), (11.75) соответствуют одни и те же условия (11.61), (11.63) и условие (11.64) на общей границе областей Ξ_1 и Ξ_2.

Легко записать также комбинированное уравнение, соответствующее одновременному учету описанных выше усложняющих факторов.

4. Рассмотрим особо одну важную причину увеличения числа достаточных координат. Для применения излагаемых методов, связанных с условными марковскими процессами, принципиальным является марковский характер процессов. С практической точки зрения это условие является не очень ограничительным, поскольку реальный немарковский про-

цесс с любой требуемой точностью можно представить как компоненту многомерного марковского процесса.

В этом смысле, если не обращать внимания на связанные с такой заменой погрешности, немарковский характер процессов не является препятствием для применения теории. Чтобы увеличить точность аппроксимации, вообще говоря, следует увеличить число компонент многомерного марковского процесса. Поэтому более точный учет немарковского характера процесса связан с увеличением числа достаточных координат.

Возможность замены (с любой точностью) немарковского процесса марковским в большой степени расширяет область применимости теории. Конечно, увеличение числа достаточных координат затрудняет проведение расчетов и получение конкретных результатов. Поскольку повышение точности аппроксимации связано с усложнением расчетов, то при решении конкретных практических задач в выборе точности аппроксимации следует стремиться к разумному компромиссу.

Покажем увеличение числа достаточных координат при учете немарковского характера процесса на примере задачи, разобранной в § 11.3. Пусть процесс $\xi(t)$, за которым проводится слежение, не является марковским: вероятности его будущих значений зависят не только от $\xi(t)$, но, скажем, еще от производной $\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$. Если зависимость от более высоких производных можно не учитывать, то двумерный процесс (ξ, η) будет марковским. Пусть ему соответствует инфинитезимальный оператор

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\lambda^2 D \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \lambda\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + (a + \eta)\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Последний выбран с таким расчетом, чтобы при $\lambda \to \infty$ получался процесс $\xi(t)$, рассмотренный ранее в § 11.3.

Как и раньше, считаем, что наблюдается процесс (11.47) и y_2. Совместный процесс ξ, η, y_1, y_2 имеет оператор

$$dL_{pr} = dt\left[-\lambda\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + (a + \eta)\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{2}\lambda^2 D\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}N\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right] + du_t\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\varkappa}{2}dt\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Пользуясь формулами (9.33), (9.34), можно записать уравнения

$$\dot{m} = a + m_\eta + \frac{1}{N}k_{\xi\xi}(\dot{y}_1 - m);$$

$$\dot{m}_\eta = -\lambda m_\eta + \frac{1}{N}k_{\xi\eta}(\dot{y}_1 - m)$$

для апостериорных математических ожиданий $m=\mathbf{M}_{ps}\xi$, $m_\eta=\mathbf{M}_{ps}\eta$, уравнения для апостериорных дисперсий

$$\dot{k}_{\xi\xi}=2k_{\xi\eta}-\frac{1}{N}k_{\xi\xi}^2;$$

$$\dot{k}_{\xi\eta}=k_{\eta\eta}-\lambda k_{\xi\eta}-\frac{1}{N}k_{\xi\xi}k_{\xi\eta}; \tag{11.76}$$

$$\dot{k}_{\eta\eta}=\lambda^2 D-2\lambda k_{\eta\eta}-\frac{1}{N}k_{\xi\eta}^2,$$

а также выражение для вторичного апостериорного инфинитезимального оператора:

$$d\mathscr{L}=dt\left[-\lambda m_\eta\frac{\partial}{\partial m_\eta}+(a+m_\eta)\frac{\partial}{\partial m}+m\frac{\partial}{\partial y_1}+\right.$$
$$+\frac{1}{2N}k_{\xi\xi}^2\frac{\partial^2}{\partial m^2}+\frac{1}{2N}k_{\xi\eta}^2\frac{\partial^2}{\partial m_\eta^2}+\frac{N}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{1}{N}k_{\xi\xi}k_{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial m\,\partial m_\eta}+$$
$$\left.+k_{\xi\xi}\frac{\partial^2}{\partial m\,\partial y_1}+k_{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial m_\eta\,\partial y_1}\right]+du_t\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\varkappa}{2}dt\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}. \tag{11.77}$$

Как показывает проверка, достаточными координатами теперь являются переменные $x=m-y_2$, m_η. Принимая во внимание (11.77), получаем основное уравнение

$$-\frac{\partial S_t(x,m_\eta)}{\partial t}=-\lambda m_\eta\frac{\partial S_t}{\partial m_\eta}+(a+m_\eta\mp u_0)\frac{\partial S_t}{\partial x}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{k_{\xi\xi}^2}{N}+\varkappa\right)\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}+\frac{1}{2N}k_{\xi\eta}^2\frac{\partial^2 S_t}{\partial m_\eta^2}+\frac{1}{N}k_{\xi\xi}k_{\xi\eta}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x\,\partial m_\eta}+x^2+k_{\xi\xi} \tag{11.78}$$

в $\Xi_{1,2}$. Таким образом, проведенный учет немарковского характера процесса $\xi(t)$ вызвал появление добавочной координаты m_η.

5. Аналогичным образом может быть учтен немарковский характер движения регулируемого объекта. Пусть $y_2(t)$ есть компонента двумерного марковского процесса $(y_2(t), v(t)=\dot{y}_2(t))$, причем уравнение (11.48) заменяется на уравнение

$$\lambda^{-1}dv(t)+v(t)\,dt=du_t+d\zeta_2(t), \tag{11.79}$$

где $\zeta_2(t)$ — тот же самый винеровский процесс. Последнему уравнению соответствует инфинитезимальный оператор

$$dL_{pr}=dt\,v\frac{\partial}{\partial y_2}+\lambda(du_t-v\,dt)\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\varkappa}{2}\lambda^2 dt\frac{\partial^2}{\partial v^2}. \tag{11.80}$$

Переход от (11.48) к (11.79) можно аргументировать учетом инерционности регулируемого объекта. Если совершить предельный переход $\lambda \to \infty$ (инерционность стремится к нулю), то (11.79), очевидно, обратится (в 11.48).

Условие 8.7.Б требует теперь добавления переменной $v(t)$ к числу достаточных координат. Заменяя оператор

$$du_t \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$$

на оператор (11.80), получаем для данного случая основное уравнение в виде

$$-\frac{\partial S_t(x, v)}{\partial t} = (a - v) \frac{\partial S_t}{\partial x} - \lambda (v \pm u_0) \frac{\partial S_t}{\partial v} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{k_t^2}{N} \frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2} + \frac{\varkappa}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial v^2} + x^2 + k_t \qquad (11.81)$$

в областях $\Xi_{1,2}$, где

$$\operatorname{sign} \frac{\partial S_t}{\partial v} = \pm 1.$$

По аналогии с предыдущим на общей границе Γ указанных областей выполняется условие непрерывности и исчезновения первой производной $\frac{\partial S_t}{\partial v}$.

6. Вследствие увеличения числа переменных решение уравнений (11.71), (11.73), (11.75), (11.78), (11.81) значительно труднее, чем уравнения (11.60), (11.62), поэтому для них не удается получить общие и точные результаты. Однако в различных частных случаях, если использовать специальные соотношения между параметрами задачи, можно применять те или иные асимптотические методы (методы малого параметра) и получать с их помощью приближенные результаты.

Так, в работе Стратоновича [18] был разработан и применен для решения стационарного варианта уравнения (11.73) асимптотический метод, учитывающий малость коэффициентов при диффузионных членах (членах со вторыми производными). Решение при этом получается последовательными приближениями, результаты первых приближений находятся без особого труда.

В других специальных случаях могут быть разработаны другие приближенные методы. Пусть, например, представляет интерес исследовать тот случай, когда причины, учитываемые в настоящем параграфе и приводящие к усложненным уравнениям, не очень сильно влияют на окончательные результаты, не очень сильно возмущают задачу, рассмотренную в § 11.3. Тогда можно подсчитать возмущение в первом приближении, во втором и т. д., пользуясь регулярными методами последовательных приближений, которые, как правило, могут быть применены в подобной ситуации.

Не рассматривая здесь регулярные методы последовательных приближений для решения уравнений (11.71), (11.73), (11.75), приведем простое приближенное решение их в указанном специальном случае. Остановимся для конкретности на уравнении (11.73). При каждом конкретном значении координаты m быстро успевает установиться квазистационарное распределение вероятностей по второй координате x. Координата m при этом не успевает существенно измениться. Квазистационарным флюктуациям по x, как видно из (11.73), соответствует уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}+\varkappa\right)\frac{\partial^2\widetilde{S}}{\partial x^2}+(a^0+a^1m\mp u_0)\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial x}+x^2+k=\widetilde{\gamma}(m).$$

Решая последнее, по аналогии с § 11.3 (11.69) находим зависящие от m квазистационарные средние штрафы и квазистационарную границу:

$$\widetilde{\gamma}(m)=k_t+\frac{1}{2}\left(\frac{k_t^2}{N}+\varkappa\right)^2\frac{u_0^2+(a^0+a^1m)^2}{[u_0^2-(a^0+a^1m)^2]^2},$$

$$x_\Gamma(m)=-\frac{(a^0+a^1m)(k_t^2N^{-1}+\varkappa)}{u_0^2-(a^0+a^1m)^2}.$$

После этого можно перейти к рассмотрению диффузии второй координаты m. Если $S_t(m)$ — функция, зависящая только от переменной m (усредненная по флюктуациям второй переменной x), то, как нетрудно понять, используя (11.72), она описывается приближенным уравнением

$$-\frac{\partial S_t(m)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{k_t^2}{N}\frac{\partial^2 S_t}{\partial m^2}+(a^0+a^1m)\frac{\partial S_t}{\partial m}+\widetilde{\gamma}(m).$$

Разработка регулярных методов дает обоснование приведенным результатам и позволяет получить более точные результаты, соответствующие высшим приближениям. Условием применимости этих результатов и приближений является малая величина коэффициента a^1.

7. Рассмотрим в заключение подробнее один метод последовательных приближений, пригодный для решения уравнения (11.78), который близок к методу, изложенному в книге Стратоновича [8], стр. 106—110, 115—117. Как и в описанном выше случае, условием его применимости является близость к невозмущенному режиму, т. е. большая величина параметра λ.

Будем рассматривать стационарное решение, как в конце

§ 11.3. Уравнения для стационарных апостериорных дисперсий получаем, приравнивая нулю производные по времени в (11.76). Это дает

$$k_{\xi\eta} = \frac{k_{\xi\xi}^2}{2N};\quad k_{\eta\eta} = \frac{\lambda}{2N}k_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2N^2}k_{\xi\xi}^3;$$

$$k_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{\lambda N}k_{\xi\xi}^3 + \frac{1}{4\lambda^2N^2}k_{\xi\xi}^4 = DN.$$

Не представляет труда получить асимптотические решения этих уравнений

$$k_{\xi\xi} = \sqrt{DN} - \frac{D}{2\lambda} + O(\lambda^{-2});$$

$$k_{\xi\eta} = \frac{D}{2} - \frac{D}{2\lambda}\sqrt{\frac{D}{N}} + O(\lambda^{-2}).$$

Вводя переменную $y = \sqrt{2\lambda N}\eta_0/k_{\xi\xi}$, запишем стационарный вариант уравнения (11.78):

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \sqrt{\lambda}\varkappa_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \left(a + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}y \mp u^0\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \\ + \frac{\varkappa_2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x^2 + k_{\xi\xi} - \gamma = 0 \qquad (11.82)$$

$$\left(\varkappa_1 = k_{\xi\eta}\sqrt{\frac{2}{N}};\ \varkappa_2 = \frac{k_{\xi\xi}^2}{N} + \varkappa;\ \alpha = \frac{k_{\xi\xi}}{\sqrt{2N}}\right).$$

Вместо одной функции двух переменных рассмотрим последовательность функций от одной переменной

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)F^{(n+1)}(y)\,dy = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}F^{(1)}(y)\,dy \qquad (11.83)$$

$$\left(n = 0, 1, 2, \ldots;\ F^{(n+1)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d^n}{dy^n}e^{-\frac{y^2}{2}}\right).$$

Чтобы получить уравнения для них, умножим (11.82) на $F^{(n+1)}(y)$ и проинтегрируем по y. При рассмотрении членов, содержащих производные по y, целесообразно производить интегрирование по частям. Кроме того, следует воспользоваться соотношениями

$$\frac{d^2F^{(n+1)}(y)}{dy^2} + \frac{d}{\partial y}[yF^{(n+1)}(y)] + nF^{(n+1)}(y) = 0;$$

$$yF^{(n+1)}(y) = -F^{(n+2)}(y) - nF^{(n)}(y).$$

Тогда из (11.82) будем иметь при $n=0$

$$a\frac{df_0}{dx}+\frac{\varkappa_2}{2}\frac{d^2f_0}{dx^2}-u_0\int F^{(1)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy+x^2+k_{\xi\xi}-\gamma-$$

$$-\sqrt{\lambda}\varkappa_1'\frac{df_1}{dx}=0\qquad\left(\varkappa_1'=\varkappa_1+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\tag{11.84}$$

и

$$f_n=-\frac{\alpha}{\lambda\sqrt{\lambda}}\frac{df_{n-1}}{dx}+\frac{a}{n\lambda}\frac{df_n}{dx}+\frac{\varkappa_2}{2n\lambda}\frac{d^2f_n}{dx^2}-$$

$$-\frac{u_0}{n\lambda}\int F^{(n+1)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy-\frac{\varkappa_1'}{n\sqrt{\lambda}}\frac{df_{n+1}}{dx}\tag{11.85}$$

при $n\geqslant 1$. Подставим сначала

$$f_1=-\frac{\alpha}{\lambda\sqrt{\lambda}}\frac{df_0}{dx}+\frac{a}{\lambda}\frac{df_1}{dx}+\frac{\varkappa_2}{2\lambda}\frac{d^2f_1}{dx^2}-$$

$$-\frac{u_0}{\lambda}\int F^{(2)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy-\frac{\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda}}\frac{df_2}{dx}\tag{11.86}$$

в уравнение (11.84). Затем подставим в полученное уравнение аналогичные выражения из (11.85) для f_2 и f_1, потом в результат — выражения для f_3, f_2, f_1 и т. д. Эти подстановки будут добавлять в уравнение все новые и новые члены прогрессирующих порядков относительно $\lambda^{-\frac{1}{2}}$. Главные члены (члены наинизших степеней параметра $\lambda^{-\frac{1}{2}}$), однако, образуются уже в результате первых подстановок и дальнейшие подстановки на них не влияют. Оставляя лишь некоторые такие главные члены, записываем результирующее уравнение в виде

$$a\frac{df_0}{dx}+\frac{\varkappa_2}{2}\frac{d^2f_0}{dx}-u_0\int F^{(1)}\left|\frac{\partial f}{dx}\right|dy+x^2+k_{\xi\xi}-\gamma+$$

$$+\frac{\varkappa_1'\alpha}{\lambda}\frac{d^2f_0}{dx^2}+\frac{\varkappa_1'\alpha}{\lambda^2}\left(a\frac{d}{dx}+\frac{\varkappa_2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2f_0}{dx^2}+$$

$$+\frac{\varkappa_1'u_0}{\sqrt{\lambda}}\frac{d}{dx}\int F^{(2)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy+O(\lambda^{-3}).\tag{11.87}$$

Если описанные многократные подстановки делать в уравнение (11.86) или в аналогичное уравнение для f_2 (или f_3,...), то можно получить, что f_1 имеет порядок $\lambda^{-\frac{3}{2}}$, f_2 имеет порядок λ^{-3} и т. д.

Интегральные члены, содержащие $\int F^{(n+1)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy$, следует в результирующих выражениях, например в уравнении (11.87), выразить через f_0, f_1,... и в конечном счете через функцию f_0 и ее производные. Покажем, как это делается. Записывая функцию $f(x, y)$ через производные

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x, 0)\, y^k \tag{11.88}$$

и подставляя в (11.83), имеем

$$f_n(x) = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} f^{(n+l)}(x, 0)\, \overline{y^l}, \tag{11.89}$$

где

$$\overline{y^l} = \int F^{(1)}(y)\, y^l\, dy = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (l-1) & \text{при четном } l; \\ 0 & \text{при нечетном } l. \end{cases}$$

Эти равенства можно рассматривать как уравнения относительно $\{f^{(k)}, k=0, 1,...\}$. Учитывая, что функции f_n (а значит, и $f^{(n)}$) убывают с ростом n как степени малого параметра $\lambda^{-\frac{3}{2}}$, нетрудно разрешить систему уравнений (11.89) и найти $\{f^{(k)}\}$ с выбранной степенью точности, например,

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= f_0(x) - \frac{1}{2} f_2(x) + \ldots; \\ f^{(1)}(x, 0) &= -f_1(x) + \frac{1}{2} f_3(x) + \ldots; \\ f^{(2)}(x, 0) &= f_2(x) + \ldots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11.90}$$

Итак, $\{f^{(k)}\}$ выражены через $\{f_n\}$. Поэтому и интеграл

$$\int F^{(n+1)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dy = \int F^{(n+1)}(y) \left| \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x, 0)\, y^k \right| dy$$

оказывается выраженным через $\{f_n\}$. Многократные подстановки (11.85) приводят к тому, что этот интеграл в конечном счете выражается через f_0. В результате уравнение (11.87) становится замкнутым уравнением относительно функции $f_0(x)$ и может быть использовано для ее отыскания. Уравнение для линии переключения

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x, 0)\, y_\Gamma^k(x) = 0 \tag{11.91}$$

по той же причине выражается только через функцию $f_0(x)$. Конкретные вычисления облегчаются наличием малого параметра и тем, что вычисления можно проводить лишь с точностью до выбранной степени этого параметра.

Чтобы проиллюстрировать описанный метод, найдем первую поправку к невозмущенному режиму. Оставляя лишь первые (самые большие) поправочные члены (в 11.87), имеем

$$a\frac{df_0}{dx}+\frac{\varkappa_2}{2}\frac{d^2f_0}{dx^2}-u_0\int F^{(1)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy+x^2+k_\xi-\gamma+$$

$$+\frac{\varkappa_1'\alpha}{\lambda}\frac{d^2f_0}{dx^2}=0. \qquad (11.92)$$

В соответствии с выбранной точностью здесь можно полагать

$$\int F^{(1)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy=\int F^{(1)}(y)\left|\frac{df_0}{dx}-\frac{df_1}{dx}y+O(\lambda^{-3})\right|dy=$$

$$=\int F^{(1)}(y)\left|\frac{df_0}{dx}+\frac{\alpha y}{\lambda\sqrt{\lambda}}\frac{d^2f_0}{\partial x^2}+O(\lambda^{-\frac{5}{2}})\right|dy.$$

Этот интеграл, следовательно, равен $\left|\frac{df_0}{dx}\right|$ в тех местах, где $\left|\frac{df_0}{dx}\right|\gg\alpha\lambda^{-\frac{3}{2}}\left|\frac{d^2f_0}{dx^2}\right|$, т. е. в подавляющем большинстве мест. Более сложное выражение для него справедливо в области B, где $\left|\frac{\partial f_0}{dx}\right|\sim\alpha\lambda^{-\frac{3}{2}}\left|\frac{d^2f_0}{dx^2}\right|$. Пусть x_Γ — точка, определенная условием $\frac{df_0}{dx}(x_\Gamma)=0$. Указанная область содержит эту точку и в ней $\frac{df_0}{dx}=\frac{d^2f_0}{dx^2}(x_\Gamma)(x-x_\Gamma)+O(\lambda^{-3})$. Поэтому в области B

$$\int F^{(1)}\left|\frac{\partial f}{dx}\right|dy=\left|\frac{d^2f_0}{dx^2}(x_\Gamma)\right|\cdot\int F^{(1)}(y)\left|x-x_\Gamma+\alpha\lambda^{-\frac{3}{2}}y\right|dy.$$

Отличие этой функции от $\left|\frac{df_0}{dx}\right|$ равно

$$\int F^{(1)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dy-\left|\frac{df_0}{dx}\right|=\left|\frac{d^2f_0}{dx^2}(x_\Gamma)\right|\left[\int F^{(1)}(y)\right|x-x_\Gamma+$$

$$+\alpha\lambda^{-\frac{3}{2}}y\left|dy-|x-x_\Gamma|\right]=\alpha\lambda^{-\frac{3}{2}}\left|\frac{d^2f_0}{dx^2}(x_\Gamma)\right|\varphi(x), \qquad (11.93)$$

$$\left(\varphi(x)=\int F^{(1)}(y)\left[\left|\alpha^{-1}\lambda^{3/2}(x-x_\Gamma)+y\right|-\alpha^{-1}\lambda^{3/2}|x-x_\Gamma|\right]dy\right).$$

Линия переключения, определяемая посредством (11.91), в рассматриваемом приближении является прямой: $y_\Gamma(x) = \alpha^{-1}\lambda^{3/2}(x - x_\Gamma)$. В самом деле, из (11.88), (11.90), (11.86) имеем

$$f(x, y) = f_0(x) - f_1(x)\, y + \ldots = f_0(x) - \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{df_0}{dx}(x)\, y + \ldots$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{df_0}{dx}(x) - \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{d^2 f_0}{dx^2}(x)\, y + \ldots =$$
$$= \frac{d^2 f_0}{dx^2}(x_\Gamma)(x - x_\Gamma) - \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{df_0}{dx^2}(x_\Gamma)\, y + \ldots$$

Отсюда, приравнивая модуль нулю, получаем указанный результат. Уравнение (11.92) вследствие (11.93) принимает вид

$$\left(\frac{\varkappa_2}{2} + \frac{\varkappa_1' a}{\lambda}\right) \frac{d^2 f_0}{dx^2} + a \frac{df_0}{dx} - u_0 \left| \frac{df_0}{dx} \right| -$$
$$- \frac{a u_0}{\lambda\sqrt{\lambda}} \left| \frac{d^2 f_0}{dx^2}(x_\Gamma) \right| \varphi(x) + x^2 + k_{\xi\xi} - \gamma = 0,$$

аналогичный (11.65), (11.66). Функция $\varphi(x)$ сказывается в области B, имеющей по оси x малую ширину $\sim \alpha\lambda^{-\frac{3}{2}}$, и в данном приближении мало влияет на результат. Главное отличие от результатов § 11.3 поэтому сводится к тому, что диффузионный коэффициент $\varkappa_2 = \frac{k^2}{N} + \varkappa$ заменяется на $\frac{k_{\xi\xi}^2}{N} + \varkappa + \frac{k_{\xi\xi} k_{\xi\eta}}{\lambda N} + O(\lambda^{-2})$.

Проиллюстрированное в настоящем параграфе увеличение числа достаточных координат при учете дополнительных факторов, усложняющих задачу, можно считать типичным. Связанное с этим повышение вычислительных трудностей требует разработки новых, подчас своеобразных приближенных методов расчета.

УСЛОВНЫЕ МЕРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ НЕНОРМИРОВАННЫХ МЕР

Приводимые здесь формулы и понятия условных мер и условных математических ожиданий являются прямым обобщением обычных формул и понятий. Обобщение проводится на тот случай, когда мера не является вероятностной, т. е. когда мера всего пространства не равна 1.

Пусть задано пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, причем $\mu(\Omega) < \infty$. Математическое ожидание определим формулой

$$\mathbf{M}_\mu \xi = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \xi(\omega) \mu(d\omega), \tag{П.1.1}$$

если $\xi(\omega)$ есть $\mathcal{F}$-измеримая суммируемая функция на Ω. При таком определении, очевидно,

$$\mathbf{M}_\mu 1 = 1.$$

Пусть имеется σ-алгебра $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. Условную меру $\mu(\Gamma \in \mathcal{F} \mid \mathcal{F}_1)$ определяем как производную Радона—Никодима (на $\mathcal{F}_1$) меры $\mu(\cdot \Gamma)$ относительно меры $\mu(\cdot)$:

$$\mu(\Gamma \in \mathcal{F} \mid \mathcal{F}_1) = \frac{\mu(d\omega\Gamma)}{\mu(d\omega \in \mathcal{F}_1)}. \tag{П.1.2}$$

Такое определение возможно, ибо $\mu(\Lambda\Gamma) = 0$, коль скоро $\mu(\Lambda) = 0$.

Согласно данному определению

$$\mu(\Lambda\Gamma) = \int_\Lambda \mu(\Gamma \mid \mathcal{F}_1) \mu(d\omega \in \mathcal{F}_1), \quad \Gamma \in \mathcal{F}, \ \Lambda \in \mathcal{F}_1$$

или, применяя более наглядную форму записи,

$$\mu(dx\,dy) = \mu(dx \mid y) \mu(dy).$$

Если имеются монотонные σ-алгебры $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, то аналогично предыдущему можно определить условные меры

$$\mu(A \in \mathcal{F}_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \frac{\mu(d\omega A)}{\mu(d\omega \in \mathcal{F}_{k-1})}, \quad k = 2, \ldots, N.$$

В соответствии с этим имеем

$$\mu(A \in \mathcal{F}_k) = \int \mu(A | \mathcal{F}_{k-1}) \mu(d\omega' \in \mathcal{F}_{k-1}).$$

Записывая здесь $\mu(d\omega' \in \mathcal{F}_{k-1})$ при помощи такой же формулы

$$\mu(B \in \mathcal{F}_{k-1}) = \int \mu(B | \mathcal{F}_{k-2}) \mu(d\omega'' \in \mathcal{F}_{k-2}),$$

а также выражая подобным образом и другие вероятности

$$\mu(d\omega \in \mathcal{F}_{k-2}), \ \mu(d\omega \in \mathcal{F}_{k-3}), \ \ldots,$$

получаем

$$\mu(A \in \mathcal{F}_k) = \int \ldots \int \mu(A | \mathcal{F}_{k-1}) \mu(d\omega' \in \mathcal{F}_{k-1} | \mathcal{F}_{k-2}) \mu(d\omega'' \in \\ \in \mathcal{F}_{k-2} | \mathcal{F}_{k-3}) \ldots \mu(d\omega \in \mathcal{F}_1). \qquad (\text{П.1.3})$$

Выведенная формула совпадает с обычными такими формулами для условных вероятностей. В более наглядной форме ее можно записать

$$\mu(dx\,dy\,dz \ldots du) = \mu(dx | y, z, \ldots, u) \mu(dy | z, \ldots, u) \ldots \mu(du)$$

Условной мере (П. 1.2) сопоставляем условное математическое ожидание

$$\mathbf{M}_\mu [\xi | \mathcal{F}_1] = \frac{1}{\mu(\Omega | \mathcal{F}_1)} \int_\Omega \xi(\omega) \mu(d\omega | \mathcal{F}_1)$$

в соответствии с формулой (П. 1.1). Но, как видно из (П. 1.2), $\mu(\Omega | \mathcal{F}_1) = 1$, поэтому условное математическое ожидание можно записать более просто:

$$\mathbf{M}_\mu [\xi | \mathcal{F}_1] = \int \xi(\omega) \mu(d\omega | \mathcal{F}_1). \qquad (\text{П.1.4})$$

Разумеется, здесь вместо $\mathcal{F}_1$ можно взять также любую другую σ-алгебру, например $\mathcal{F}_k$.

Для условного математического ожидания также сохраняется естественное соотношение $\mathbf{M}_\mu[1 | \mathcal{F}_1] = 1$. Таким образом, и в этом случае условное математическое ожидание имеет смысл некоего среднего значения функции, несмотря на то, что исходная мера μ не нормирована на единицу.

Пусть $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$. Как и в вероятностном случае (когда $\mu(\Omega) = 1$), условное математическое ожидание обладает следующими свойствами:

П.1.А:

$$\mathbf{M}_\mu \{\mathbf{M}_\mu [\xi \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1\} = \mathbf{M}_\mu [\xi \mid \mathcal{F}_1] \text{ (почти всюду);}$$

П.1.Б: если $\xi(\omega)$ является $\mathcal{F}_1$-измеримой, то

$$\mathbf{M}_\mu [\xi \mid \mathcal{F}_2] = \xi(\omega) \text{ (п. в.)}$$

Свойство П.1.А вытекает из соотношения

$$\int \mu(A \mid \mathcal{F}_2)\, \mu(d\omega \in \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{F}_1) = \mu(A \mid \mathcal{F}_1), \quad A \in \mathcal{F},$$

которое можно вывести, положив в (П.1.3) сначала $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F})$ $(k = 3)$, а затем $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ $(k=2)$ и приравняв результаты.

Проверим свойство П. 1.Б. Вследствие $\mathcal{F}_1$-измеримости (а значит, $\mathcal{F}_2$-измеримости) функции $\xi(\omega)$ соотношение

$$\mathbf{M}_\mu [\xi \mid \mathcal{F}_2] = \int \xi(\omega)\, \mu(d\omega \mid \mathcal{F}_2)$$

можно записать

$$\mathbf{M}_\mu [\xi \mid \mathcal{F}_2] = \int \xi(\omega)\, \mu(d\omega \in \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{F}_2).$$

Но мера $\mu(\Lambda \in \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{F}_2)$ согласно (П.1.2) является тривиальной:

$$\mu(\Lambda \in \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{F}_2) = I_\Lambda(\omega) \text{ почти всюду (п. в),}$$

где $I_\Lambda(\omega)$-индикатор множества Λ. Поэтому

$$\int \xi(\omega')\, \mu(d\omega' \in \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{F}_2) = \int \xi(\omega')\, I_{d\omega'}(\omega) = \xi(\omega),$$

в чем можно убедиться, заменив интервал на допредельную сумму и перейдя к пределу.

Итак, мы видим, что для невероятностных мер также можно ввести условные меры и условные математические ожидания со свойствами, которые аналогичны обычным свойствам, имеющим место для вероятностных мер.

Приложение 2. УСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ

Вариант I

Пусть задано пространство Ω и две σ-алгебры его подмножеств $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Далее на Ω задана $\mathcal{F}_2$-измеримая функция $f(\omega)$.

Определение П. 2. 1. *Условная нижняя грань*

$$\inf_{\omega|\mathcal{F}_1} f(\omega) = \tilde{f}(\omega)$$

есть функция со свойствами:
П. 2.1.А. *она определена на* Ω *и* $\mathcal{F}_1$*-измерима;*
П. 2.1.Б. *если* $\Gamma \in \mathcal{F}_1$ *непусто, то*

$$\inf_{\omega\in\Gamma} \tilde{f}(\omega) = \inf_{\omega\in\Gamma} f(\omega).$$

Теорема П. 2.1. *Приведенное определение задает условную нижнюю грань единственным образом.*

Доказательство. Пусть $\tilde{f}_1(\omega)$, $\tilde{f}_2(\omega)$ — две такие несовпадающие функции. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и непустое множество Γ_ε, на котором одна функция превосходит другую больше чем на ε, например

$$\Gamma_\varepsilon = \{\omega : \tilde{f}_1(\omega) - \tilde{f}_2(\omega) > \varepsilon\}. \tag{П.2.1}$$

В силу П.2.1.А. имеем $\Gamma_\varepsilon \in \mathcal{F}_1$. Учитывая П.2.1.Б., получаем

$$\inf_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}_1(\omega) = \inf_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}_2(\omega), \tag{П.2.2}$$

так как каждая величина равна $\inf[f(\omega),\ \omega \in \Gamma_\varepsilon]$. Но согласно (П.2.1)

$$\inf_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}_1(\omega) - \inf_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}_2(\omega) > \varepsilon. \tag{П.2.3}$$

Полученное противоречие доказывает совпадение функций $\tilde{f}_1(\omega) = \tilde{f}_2(\omega)$.

Теорема П. 2.2. *Условная нижняя грань удовлетворяет соотношению*

$$\tilde{f}(\omega) \leqslant f(\omega). \tag{П.2.4}$$

Доказательство. Выберем любую точку $\omega_0 \in \Omega$ и рассмотрим интервал $I_\varepsilon = \{\tilde{f}(\omega_0), \tilde{f}(\omega_0) + \varepsilon\}$. Вследствие П.2.1.А. множество $\{\omega : \tilde{f}(\omega) \in I_\varepsilon\} \equiv \Gamma$ принадлежит $\mathcal{F}_1$. Очевидно, что оно не пусто. Применяя для этого множества П.2.1.Б., получаем

$$\tilde{f}(\omega_0) = \inf_{\omega\in\Gamma} f(\omega)$$

Отсюда вытекает (П.2.4) в точке ω_0, поскольку $\omega_0 \in \Gamma$.

Теорема П.2.3. *Пусть* $\mu(\Lambda|\mathcal{F}_1)$ — *некоторая условная вероятностная мера на* $(\Omega, \mathcal{F}_2)$, *т. е. функция пары* $(\Lambda, \omega) \in \mathcal{F}_2 \times \Omega$, *которая* $\mathcal{F}_1$*-измерима по второму аргументу и при* $\Lambda \in \mathcal{F}_1$ *обращается в тривиальную меру*

$$\mu(\Lambda \in \mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_1) = I_\Lambda(\omega) \tag{П.2.5}$$

($I_\Lambda(\omega)$ — индикатор множества Λ). *Тогда*

$$\tilde{f}(\omega) \leqslant \int f(\omega')\, \mu(d\omega' \mid \mathcal{F}_1), \tag{П.2.6}$$

если интеграл в правой части существует при всех ω.

Доказательство. Используя (П. 2.4), имеем

$$\int f(\omega')\, \mu(d\omega' \mid \mathcal{F}_1) \geqslant \int \tilde{f}(\omega')\, \mu(d\omega' \in \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{F}_1).$$

Интеграл в правой части этого равенства в силу П. 2.1.А можно записать

$$\int \tilde{f}(\omega')\, \mu(d\omega' \in \mathcal{F}_1 \mid \mathcal{F}_1).$$

Учитывая тривиальный характер (П. 2.5) подынтегральной меры, имеем

$$\int \tilde{f}(\omega')\, \mu(d\omega' \mid \mathcal{F}_1) = \int \tilde{f}(\omega')\, I_{d\omega'}(\omega) = \tilde{f}(\omega).$$

В том, что это действительно так, можно убедиться более подробно, рассматривая интеграл как предел соответствующей суммы. Сопоставление приведенных соотношений доказывает (П. 2.6.).

Теорема П.2.4. *При любом* $\varepsilon > 0$ *существует такая* $\mathcal{F}_1$*-измеримая функция* $\omega^*(\omega)$ *(со значениями из* Ω*), что*

$$f(\omega^*(\omega)) < \tilde{f}(\omega) + \varepsilon. \tag{П.2.7}$$

Доказательство. Произведем ε-разбиение действительной прямой точками ..., c_1, c_2, ... $(0 < c_{k+1} - c_k < \varepsilon)$. Каждому элементарному интервалу сопоставляем множество

$$\Gamma_k = \{\omega : \tilde{f}(\omega) \in [c_k, c_{k+1})\}.$$

В силу П.2.1.А оно $\in \mathcal{F}_1$. Если оно не пусто, то в соответствии с П.2.1.Б имеем

$$\inf_{\omega \in \Gamma_k} f(\omega) \in [c_k, c_{k+1}), \quad \inf_{\omega \in \Gamma_k} f(\omega) < c_{k+1}.$$

Следовательно, можно выбрать такую точку $\omega_k^* \in \Gamma_k$, что

$$f(\omega_k^*) < c_{k+1}. \tag{П.2.8}$$

Соединение всех непустых множеств $\ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ совпадает с Ω.

Фиксируя множество выбранных точек $\ldots, \omega_1^*, \omega_2^*, \ldots$. определяем функцию на Ω:

$$\omega^*(\omega) = \omega_k^* \text{ при } \omega \in \Gamma_k.$$

Очевидно, что неравенство (П. 2.7) будет выполняться, поскольку точки ω и $\omega^*(\omega)$ принадлежат одному и тому же Γ_k и, следовательно, $\tilde{f}(\omega)$, $f(\omega^*(\omega))$ принадлежат одному и тому же интервалу (c_k, c_{k+1}) (неравенство $c_k \leqslant f(\omega_k^*) < c_{k+1}$ вытекает из (П. 2.8) и (П. 2.4)).

Остается проверить $\mathcal{F}_1$-измеримость указанной функции $\omega^*(\omega)$. Согласно своему определению она измерима относительно σ-алгебры, построенной на множествах ..., Γ_1, Γ_2,.... Но $\sigma(..., \Gamma_1, \Gamma_2,...) \subset \mathcal{F}_1$, поскольку всякое $\Gamma_k \in \mathcal{F}_1$. Теорема доказана.

Теорема. П.2.5. *При любом* $\varepsilon > 0$ *существует такая условная вероятностная мера* $\mu(\Lambda \subset \mathcal{F}_2 | \mathcal{F}_1)$, *что*

$$\int f(\omega')\,\mu(d\omega' | \mathcal{F}_1) < \tilde{f}(\omega) + \varepsilon. \qquad (\text{П.2.9})$$

Доказательство. Построение меры, обладающей указанными свойствами, можно провести по аналогии с построением функции $\omega^*(\omega)$. Для $\omega \in \Gamma_k$ (см. предыдущее доказательство) определим меру $\mu(\Lambda | \omega \in \Gamma_k)$ как сосредоточенную на непустом множестве

$$A_k = \Gamma_k \cap \{\omega : f(\omega) \in [c_k, c_{k+1})\} \in \mathcal{F}_2,$$

полагая

$$\mu(A_k | \omega \in \Gamma_k) = 1; \;\; \mu(\Omega - A_k | \omega \in \Gamma_k) = 0$$

(на подмножествах $\Lambda \subset A_k$ мера может быть определена произвольно). Тогда, как легко видеть,

$$\mu(\Gamma_k | \omega \in \Gamma_k) = 1; \quad \int f(\omega')\,\mu(d\omega' | \omega \in \Gamma_k) \in [c_k, c_{k+1}].$$

Меры $\mu(\Lambda | \omega \in \Gamma_k)$, следовательно, удовлетворяет условию (П. 2.5) и неравенству (П. 2.9). Как функция от ω она измерима относительно $\sigma(..., \Gamma_1, \Gamma_2,...) \subset \mathcal{F}_1$, что завершает доказательство.

Проведенное выше рассмотрение еще не дает уверенности в том, что заданная определением П.2.1 условная нижняя грань действительно всегда существует. Поэтому целесообразно сконструировать функцию, обладающую требуемыми свойствами.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\Gamma = \inf\,[f(\omega),\; \omega \in \Gamma]$$

на множествах σ-алгебры $\mathcal{F}_1$. Обозначим через K_ω класс множеств из $\mathcal{F}_1$, которые содержат точку $\omega \in \Omega$. Определим функцию $\tilde{\tilde{f}}(\omega)$ формулой

$$\tilde{\tilde{f}}(\omega) = \sup_{\Gamma \in K_\omega} \varphi_\Gamma. \qquad (\text{П.2.10})$$

Выведем ряд соотношений для этой функции.

Поскольку $\omega \in A$ для каждого $A \in K_\omega$, то

$$f(\omega) \geqslant \inf\,[f(\omega),\; \omega \in A] \equiv \varphi_A.$$

Учитывая (П. 2.10), отсюда получаем

$$f(\omega) \geqslant \tilde{\tilde{f}}(\omega). \tag{П.2.11}$$

Возьмем далее некоторое Г и точку $\omega \in \Gamma$. Очевидно, что $\Gamma \in K_\omega$, так что в силу (П.2.10)

$$\tilde{\tilde{f}}(\omega) \geqslant \varphi_\Gamma, \quad \inf_{\omega \in \Gamma} \tilde{\tilde{f}}(\omega) \geqslant \varphi_\Gamma. \tag{П.2.12}$$

Но согласно (П.2. 11)

$$\inf_{\omega \in \Gamma} \tilde{\tilde{f}}(\omega) \leqslant \inf_{\omega \in \Gamma} f(\omega) \ (\equiv \varphi_\Gamma). \tag{П.2.13}$$

Сопоставляя (П.2.12), (П.2.13), получаем

$$\inf_{\omega \in \Gamma} \tilde{\tilde{f}}(\omega) = \varphi_\Gamma,$$

т. е. доказываем свойство П.2.1.Б.

Чтобы доказать, что $\tilde{\tilde{f}}(\omega)$ совпадает с условной нижней гранью, данной в определении П.2.1, остается доказать ее $\mathscr{F}_1$-измеримость. Без дополнительных предположений удается доказать несколько более слабое (чем $\tilde{\tilde{f}}^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}_1$) утверждение: если точки ω_1, ω_2 не разделяются ни одним множеством из $\mathscr{F}_1$, то точки $\tilde{\tilde{f}}(\omega_1)$, $\tilde{\tilde{f}}(\omega_2)$ не разделяются ни одним множеством из $\mathscr{B}$ (борелевским множеством).

Конечно, в подавляющем большинстве частных случаев функция (П.2.10) оказывается $\mathscr{F}_1$-измеримой. Измеримые пространства $(\Omega, \mathscr{F}_2)$, обладающие этим свойством при любых $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ и f, можно назвать *нормальными*.

Вариант II.

Изложенную теорию можно общить на случай пространства с мерой $(\Omega, \mathscr{F}_2, \nu)$ так, чтобы в ней не различались ω-функции, принадлежащие одному классу эквивалентности. Многие результаты и рассуждения переносятся на этот случай лишь с тем изменением, что утверждения, справедливые всюду, заменяются на утверждения, справедливые ν-почти всюду, т. е. с точностью до подмножеств множества меры нуль.

Определение П.2.2. *Существенный условный минимум*

$$\operatorname{vrai}\inf_{\omega|\mathscr{F}_1} f(\omega) = \tilde{f}(\omega), \quad \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$$

есть функция со свойствами:

2.2.А. *она определена почти всюду в Ω и почти всюду совпадает с $\mathscr{F}_1$-измеримой функцией;*

2.2.Б. *если $\Gamma \in \mathscr{F}_1$ множество ненулевой меры, то*

$$\operatorname{vrai}\inf_{\omega \in \Gamma} \tilde{f}(\omega) = \operatorname{vrai}\inf_{\omega \in \Gamma} f(\omega) \quad (\text{п.в.}\,\nu).$$

Теорема П.2.6. *Определенная выше функция существует и единственна с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Единственность доказывается по аналогии с теоремой П.2.1 с той разницей, что непустое множество Γ_ε заменяется на множество ненулевой меры. И, кроме того, приведенные соотношения (П.2.2), (П.2.3) берутся выполняющимися почти всюду.

Доказательство существования является принципиально новым. Формула

$$\nu(\Gamma)\,\varphi_\Gamma = \nu(\Gamma) \operatorname*{vrai\,inf}_{\omega\in\Gamma} f(\omega) \tag{П.2.14}$$

определяет на $\mathcal{F}_1 \ni \Gamma$ полуаддитивную функцию множеств, ибо, как легко видеть,

$$\nu(\Gamma_1+\Gamma_2)\,\varphi_{\Gamma_1+\Gamma_2} \leqslant \nu(\Gamma_1)\,\varphi_{\Gamma_1} + \nu(\Gamma_2)\,\varphi_{\Gamma_2} \quad \text{при} \quad \nu(\Gamma_1\Gamma_2)\ 0 \tag{П.2.15}$$

(поскольку из определения φ_Γ следуют соотношения $\varphi_{\Gamma_1+\Gamma_2} \leqslant \varphi_{\Gamma_i}$, $i=1, 2$, если $\nu(\Gamma_i) \neq 0$).

На $\mathcal{F}_1 \ni A$ можно определить меру

$$\rho(A) = \sup_{A=A_1+\ldots+A_n} [\nu(A_1)\,\varphi_{A_1} + \ldots + \nu(A_n)\,\varphi_{A_n}]. \tag{П.2.16}$$

Здесь верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $A_1 + \ldots + A_n$, $A_i \in \mathcal{F}_1$ ($\nu(A_iA_j) = 0$ при $i \neq j$) множества A.

Как видно из определения, имеет место абсолютная непрерывность $\rho \ll \nu$. Применяя к мерам $\rho(A)$, $\nu(A)$, $A \in \mathcal{F}_1$ теорему Радона — Никодима, доказываем существование функции $\tilde{f}(\omega)$, имеющей свойство П.2.2.А.

Свойство полуаддитивности (П.2.15) и формула (П.2.16) приводят к соотношению

$$\nu(\Gamma)\,\varphi_\Gamma \leqslant \rho(\Gamma), \tag{П.2.17}$$

т. е. к неравенству

$$\varphi_\Gamma \leqslant \frac{1}{\nu(\Gamma)} \int_\Gamma \tilde{f}(\omega')\,\nu(d\omega') \equiv \mathbf{M}_\nu\,[\tilde{f}(\omega) \mid \omega \in \Gamma]$$

при любом ненулевом $\Gamma \in \mathcal{F}_1$.

Из (П.2.16) выводится, что можно указать последовательность разбиений

$$A_1^l + \ldots + A_{n_l}^l = A \quad (A_i^l \in \mathcal{F}_1)$$

таких, что

$$\rho(A) = \lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{n_l} \nu(A_i^l)\,\varphi_{A_i^l}. \tag{П.2.18}$$

Введем функцию

$$\chi^l(\omega)=\widetilde{f}(\omega)-\varphi^l(\omega)=\widetilde{f}(\omega)-\varphi_{A_i^l} \text{ при } \omega \in A_i^l,\ \nu(A_i^l)>0,$$

которая неотрицательна почти всюду в силу неравенства (П. 2.17) (оно нарушилось бы для множества $\Gamma=\{\omega:\chi^l(\omega)<<0\}$). Учитывая (П. 2.18) и равенство $\rho(A)=\int_A \widetilde{f}(\omega)\ \nu\ (d\omega)$, получаем, что она стремится в среднем к нулю:

$$\lim_{l\to\infty}\int_A \chi^l(\omega)\,\nu(d\omega)=0.$$

Отсюда вытекает, что $\chi^l(\omega)$ сходится по мере к нулю, а из этого факта легко получить

$$\operatorname{vrai\,sup}\chi^l(\omega)=\operatorname{vrai\,sup}|\chi^l(\omega)|\to 0$$

и

$$\operatorname{vrai\,inf}_A \widetilde{f}(\omega)\leftarrow \operatorname{vrai\,inf}_A \varphi^l(\omega)\ (=\min[\varphi_{A_i^l}:\nu(A_i^l)>0,$$
$$i=1,\ \ldots,\ n_l]). \qquad (\text{П}.2.19)$$

Ввиду того что из определения (П.2.14) функции φ_Γ для любого разбиения $A=A_1^l+\ldots+A_{n_l}^l$, имеем

$$\varphi_A=\min[\varphi_{A_i^l}:\nu(A_i^l)>0;\ i=1,\ \ldots,\ n_l],$$

то (П. 2.19) приводит, следовательно, к равенству

$$\operatorname{vrai\,inf}_{\omega\in A}\widetilde{f}(\omega)=\varphi_A.$$

Требование П.2.2.Б, а следовательно, и вся теорема доказаны.

Мы видим, что вариант 2 имеет перед вариантом 1 то преимущество, что для него теорема существования доказывается без дополнительных предположений.

Модификацией теоремы П.2.2 в данном варианте является

Теорема П.2.7. *Существенный условный минимум почти всюду удовлетворяет неравенству*

$$\widetilde{f}(\omega)\equiv\operatorname{vrai\,inf}_{\omega'|\mathscr{F}_1}f(\omega')\leqslant f(\omega). \qquad (\text{П}.2.20)$$

Для доказательства достаточно показать, что

$$\operatorname{vrai\,inf}_E\widetilde{f}(\omega)\leqslant\operatorname{vrai\,inf}_E f(\omega), \qquad (\text{П}.2.21)$$

каково бы ни было множество $E\in\mathscr{F}_2$ ненулевой меры.

Зафиксировав $E \in \mathscr{F}_2$, $\nu(E) > 0$, рассмотрим интервал

$$J = [\operatorname{vrai}\inf_E \tilde{f},\ \operatorname{vrai}\sup_E \tilde{f}]$$

и множество

$$\Gamma = \{\omega : \tilde{f}(\omega) \in J\} \in \mathscr{F}_1.$$

Очевидно, что (с точностью до нулевого множества) оно включает в себя первоначальное множество: $\Gamma \supset E$ и $\nu(\Gamma) > 0$. Применяя П.2.2.Б, поэтому имеем

$$\operatorname{vrai}\inf_E \tilde{f}(\omega) = \operatorname{vrai}\inf_\Gamma \tilde{f}(\omega) = \operatorname{vrai}\inf_\Gamma f(\omega) \leqslant \operatorname{vrai}\inf_E f(\omega),$$

что доказывает (П.2.21), а следовательно, и (П.2.20).

Сформулируем модификацию теорем П.2.3, П.2.5.

Теорема П.2.8. *Какова ни была бы условная вероятностная мера* $\mu(\Lambda \in \mathscr{F}_2 | \mathscr{F}_1)$, *справедливо неравенство*

$$\operatorname{vrai}\inf_{\omega|\mathscr{F}_1} f(\omega) \leqslant \int f(\omega)\,\mu(d\omega\,|\,\mathscr{F}_1).$$

Теорема П.2.9. *При любом* $\varepsilon > 0$ *существует такая условная вероятностная мера* $\mu(\Lambda \in \mathscr{F}_2\,|\,\mathscr{F}_1)$, *что*

$$\int f(\omega)\,\mu(d\omega\,|\,\mathscr{F}_1) < \operatorname{vrai}\inf_{\omega|\mathscr{F}_1} f(\omega) + \varepsilon.$$

В этих теоремах условная вероятностная мера может быть определена в отличие от варианта 1 не для всех точек $\omega \in \Omega$, а для почти всех точек, т. е. является обычной условной вероятностной мерой. Доказательство теорем вполне аналогично доказательству варианта 1.

ДОПОЛНЕНИЕ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Для овладения методами, которые связаны с дифференциальными уравнениями, составляемыми при помощи теории условных марковских процессов, полезно познакомиться с рассматриваемыми ниже задачами. Они являются в некоторой степени вырожденными и, следовательно, более простыми. Так, в задачах 2 и 3 отсутствуют априорные переходы, в задаче 4 возможны лишь односторонние переходы. Поэтому использование теории условных марковских процессов в этих задачах не является необходимым, но очень полезно. Оно облегчает составление дифференциальных уравнений, а главное, подготавливает читателя к использованию теории в более сложных задачах, когда имеются, например, двусторонние априорные переходы между состояниями. Решение последних или других более сложных задач без систематического применения теории условных процессов Маркова было бы затруднительным.

В настоящем дополнении не используется в полной мере основной материал книги (которая была написана позже). Поэтому дополнение можно читать до известной степени самостоятельно.

Начнем с несколько своеобразного примера оптимальной фильтрации, решаемого без составления уравнения для условных рисков. В последующих задачах такое уравнение будет играть большую роль.

1. *Фильтрация с сигнализацией разладки.* Пусть x_t — единственный переменный параметр, который может принимать всевозможные действительные значения. Интервал $-a<x<a$ назовем «рабочим интервалом». Когда x_t принадлежит этому интервалу, от решающей системы требуется возможно более точная оценка его значения. Соответствующее решение $u_{tt}=d_{tt}\ (y)$ (где $y=y_0^t$ — наблюденные значения) есть результат фильтрации. Качество фильтрации пусть оценивается матрицей штрафов

$$C_{tt}(x, u)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |u-x|<\mu; \\ C & \text{при} \quad |u-x|\geqslant\mu; \end{cases} \tag{1}$$

$$(|x| < a,\ |u| < a).$$

Выход значения x_t за пределы рабочего интервала означает «разладку», и решающая система должна сигнализировать о ней, пока x_t не вернется в рабочий интервал. Если система не сигнализирует об имеющейся разладке, то берется штраф A за единицу времени. За ложную сигнализацию взимается штраф B в единицу времени. Пусть сигнал разладки совпадает с решением $d_{tt}(y)=u'$ (u' не принадлежит рабочему интервалу), тогда матрица штрафов, в дополнение к (1), будет определяться равенствами

$$C_{tt}(x, u) = A \quad \text{при} \quad |x| \geqslant a,\ |u| < a;$$

$$C_{tt}(x, u') = B \quad \text{при} \quad |x| < a.$$

Предположим для определенности, что апостериорное распределение гауссово:

$$\mathbf{P}(dx_t \mid y_0^t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx, \tag{2}$$

где $m = m_t(y)$, $\sigma = \sigma_t(y)$ — функции, определяемые при помощи уравнений теории условных марковских процессов. Данная задача решается методами, изложенными в § 9.1 и § 9.2 (случай (9.5)). Достаточными координатами являются m и σ. Подставляя (1) и (2) в (9.5.а), находим функцию

$$s_{tt} = s(u \mid y) = A\left[F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right) + 1 - F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right)\right] +$$

$$+ C\begin{cases} F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{m-u+\mu}{\sigma}\right), & a-\mu < u < a; \\ F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{m-u+\mu}{\sigma}\right) + F\left(\frac{m-u-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right), & |u| < a-\mu; \\ F\left(\frac{m-u-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right), & -a < u < -a+\mu; \end{cases}$$

и

$$s(u' \mid y) = B\left[F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)\right], \tag{3}$$

где

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon. \tag{3.а}$$

Зафиксировав значения m, σ, будем искать минимальные значения этой функции. Сравнивая между собой значения функции на интервале $a-\mu < u < a$, видим, что минимальное значение достигается в точке $u=a-\mu$ и равно

$$s(a-\mu\,|\,y)=A\left[F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)+1-F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right)\right]+$$
$$+C\left[F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{m-a+2\mu}{\sigma}\right)\right]. \qquad (4)$$

Аналогично минимальное значение на интервале $-a<u<<-a+\mu$ есть

$$s(-a+\mu\,|\,x)=A\left[F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)+1-F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right)\right]+$$
$$+C\left[F\left(\frac{m+a-2\mu}{\sigma}\right)-F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)\right]. \qquad (5)$$

На отрезке $-a+\mu<u<a-\mu$ минимальное значение достигается в точке $u=m$ и равно

$$s(m\,|\,y)=A\left[F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)+1-F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right)\right]+$$
$$+C\left[F\left(\frac{m+a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)-2F\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]. \qquad (6)$$

Выбирая из (4) — (6) наименьшее значение, получаем правило фильтрации

$$d_t(y)=\begin{cases} a-\mu \quad \text{при} \quad m>a-\mu; \\ m, \quad -a+\mu<m<a-\mu; \\ -a+\mu, \quad m<-a+\mu \end{cases}$$

(когда $|m|$ меньше вводимого ниже критического значения m^*).

Правило сигнализации разладки получаем в результате сравнения (3) с наименьшим значением из (4) — (6):

$$d_t(y)=u' \quad \text{при} \quad |m|\geqslant m^*.$$

Здесь критическое значение m^* определяется из уравнения

$$\left(1+\frac{B}{A}\right)\left[F\left(\frac{m^*-a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{m^*+a}{\sigma}\right)\right]+$$
$$+\frac{C}{A}\left[F\left(\frac{m^*+a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{m^*-a+2\mu}{\sigma}\right)\right]+1=0.$$

2. *Простая задача Вальда.* Пусть производятся независимые последовательные испытания, причем постоянный неизвестный параметр, подлежащий оценке, может принимать лишь одно из двух возможных значений $x=x_1$ или x_2. Если $f(y\,|\,x)$ — плотность распределения исходов каждого испытания, то апостериорная вероятность после n-ного испытания будет

$$W(x) \equiv \mathbf{P}(x \mid \dot{y}_1^n) = \frac{1}{N} \mathbf{P}(x) f(\dot{y}_1 \mid x) \ldots f(\dot{y}_n \mid x), \tag{7}$$

где

$$N = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{P}(x_i) f(\dot{y}_1 \mid x_i) \ldots f(\dot{y}_n \mid x_i)$$

нормировочный множитель, а $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$ — наблюденные значения.

В случае непрерывного процесса наблюдения после наблюдения континуального множества значений $\dot{y}_0^t = \{\dot{y}_\tau\colon 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ формула (7) заменяется на непрерывный аналог

$$W(x) = \frac{1}{N} \mathbf{P}(x) \exp\left\{\int_0^t \psi_\tau(\dot{y}_\tau, x)\, d\tau\right\}, \tag{8}$$

где вид функции $\psi_\tau(\dot{y}_\tau, x)$ определяется из условий задачи*. Так, если наблюдается сигнал $\dot{y}_t = s_t(x) + \xi_t$, равный сумме полезного сигнала $s_t(x)$ и белого шума $\xi_t = d\zeta_t/dt$ ($\mathbf{M}\xi_t = 0$; $\mathbf{M}\xi_t\xi_{t+\tau} = \varkappa\delta(\tau)$; ζ_t — винеровский процесс), то, как известно, формула (8) приобретает вид

$$W(x) = \frac{1}{N} \mathbf{P}(x) \exp\left\{\frac{1}{\varkappa} \int_0^t \left[\dot{y}_\tau - \frac{s_\tau(x)}{2}\right] s_\tau(x)\, d\tau\right\}. \tag{9}$$

Последний стохастический интеграл эквивалентен стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{dw_1}{dt} = -\frac{dw_2}{dt} = \frac{s_1 - s_2}{\varkappa}\left[\dot{y}_t - \frac{s_1 + s_2}{2}\right] w_1(1 - w_1) \tag{10}$$

$$(w_i = W(x_i);\ s_i = s_t(x_i))$$

или

$$dw_1 = \frac{s_1 - s_2}{\varkappa}\left[dy - \frac{s_1 + s_2}{2}\, dt\right] w_1(1 - w_1) \left(y = \int_0^t \dot{y}_\tau\, d\tau\right).$$

Приведенное уравнение является вырожденным частным случаем простейшего уравнения (6.43) теории условных марковских процессов (для процесса с двумя состояниями).

---

* Попутно заметим, что в случае наблюдения пуассоновского процесса $\dot{y}_t = \sum_\zeta \delta(t - t_\zeta)$ с плотностью $\beta_t(x)$ функция $\psi_t(\dot{y}_t, x)$ имеет вид $\dot{y}_t \ln \beta_t(x) - \beta_t(x)$.

Требуется найти оценку $u = x_1$ или x_2, соответствующую минимальному среднему риску при следующих штрафах: 1) штраф A за неправильную заключительную оценку $u = x_2$, 2) штраф B за неправильную оценку $u = x_1$, 3) штраф C за наблюдение, рассчитанный на единицу времени. Указанным условиям соответствуют матрицы штрафов

$$\| C'_{tt}(x, u) \| = \begin{Vmatrix} C'_{tt}(x_1, x_1)\, C'_{tt}(x_1, x_2) \\ C'_{tt}(x_2, x_1)\, C'_{tt}(x_2, x_2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{Vmatrix}; \qquad (11)$$

$$C_{tt}(x, u) = C.$$

Урезанный условный риск $S\,(w_1, t) = \mathbf{M}[c\ (\omega) - c^t\ (\omega)\,|\,y_0^t]$ (см. (10.3), (10.5), где F_t, F'_t имеют вид (9.5)), зависит лишь от времени и апостериорной вероятности w_1. Он определяется основным уравнением (10.12), которое в данном случае можно записать

$$S\,(w_1, t) = \min\,[Aw_1, B\,(1 - w_1),\ C\Delta + \mathbf{M}_{ps} S\,(w_1 + \Delta w, t + \Delta) + \\ + o\,(\Delta)], \qquad (12)$$

где символ усреднения $\mathbf{M}_{ps} = \mathbf{M}\,[\cdot\,|\,y_0^t] = \mathbf{M}\,[\cdot\,|\,w_1]$ относится лишь к $\Delta w = w_1\ (t + \Delta) - w_1\ (t)$.

Будем предполагать A, B, C, $\varkappa$, $s_{1,2}$ постоянными и рассматривать «усеченные» процессы наблюдения, не превышающие по длительности заданной величины T. Это значит, что процесс наблюдения заканчивается в момент $t = T$ и принимается решение $u = x_1$ или x_2, соответствующее минимальному риску

$$S\,(w_1, T) = \min\,[Aw_1, B\,(1 - w_1)], \qquad (13)$$

если этот процесс не закончился раньше. Равенство (13) служит «начальным условием» (при попятном течении времени) для определения $S\ (w_1, t)$ при помощи (12).

Во внутренних точках области продолжения наблюдений функция $S\ (w_1, T)$ удовлетворяет уравнению

$$S\,(w_1, t) = C\Delta + \mathbf{M}_{ps} S\,(w_1 + \Delta w, t + \Delta) + o\,(\Delta)$$

и имеет, следовательно, производные $\dfrac{\partial S}{\partial w_1}$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial w_1^2}$. Это вытекает из диффузионного характера изменений (10) процесса $w_1(t)$ и может быть доказано подобно тому, как может быть доказано существование этих производных при выводе обычных уравнений Колмогорова. Если указанное доказательство не проводить, то существование производных следует постулировать дополнительно.

Рассмотрим входящее в (12) апостериорное среднее. Разлагая $S(w_1+\Delta w, t+\Delta)$ в ряд Тейлора, находим

$$\mathbf{M}_{ps}S(w_1+\Delta w, t+\Delta) = S(w_1, t+\Delta) + \frac{\partial S(w_1, t+\Delta)}{\partial w_1}\mathbf{M}_{ps}\Delta w + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial w_1^2}\mathbf{M}_{ps}(\Delta w)^2 + \ldots \quad (14)$$

Чтобы вычислить средние $\mathbf{M}_{ps}\Delta w$, $\mathbf{M}_{ps}(\Delta w)^2, \ldots$, обратимся к (10). Процесс $\dot{y}_t = s_t(x) + \xi_t$, входящий в (10), имеет апостериорное среднее $\mathbf{M}_{ps}\dot{y}_t = s_1 w_1 + s_2(1-w_1)$ и локальную дисперсию $\mathbf{M}_{ps}(\Delta y)^2 = \varkappa\Delta + o(\Delta)$ ($\mathbf{M}_{ps}(\Delta y)^k = o(\Delta)$, $k>2$). Поэтому из (10), применяя технику усреднения стохастических выражений, разработанную автором в [8], § 4, получаем

$$\mathbf{M}_{ps}\dot{w}_1 = 0;\ \mathbf{M}_{ps}(\Delta w_1)^2 = \frac{(s_1-s_2)^2}{\varkappa}w_1^2(1-w_1)^2\Delta + o(\Delta);\ \mathbf{M}_{ps}(\Delta w)^k = \\ = o(\Delta)\quad (k>2). \quad (15)$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}_{ps}S(w_1+\Delta w, t+\Delta) = S(w_1, t+\Delta) + H(w_1)\frac{\partial^2 S(w_1, t+\Delta)}{\partial w_1^2}\Delta + \\ + o(\Delta),$$

где

$$H(w_1) = \frac{(s_1-s_2)^2}{2\varkappa}w_1^2(1-w_1)^2.$$

После подстановки этого выражения в (12) и перехода к пределу $\Delta\to 0$ находим

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = C + H(w_1)\frac{\partial^2 S}{\partial w_1^2} \quad (16)$$

при

$$S(w_1, t) < \min[Aw_1, B(1-w_1)] \quad (17)$$

(ср. с (10.44)).

Во всех остальных местах, как следует из (12) при $\Delta\to 0$, имеет место равенство

$$S(w_1, t) = \min[Aw_1, B(1-w_1)].$$

Предполагая, что область, где выполняется (17), есть связный интервал, обозначаем его граничные точки через

$f_1(t)$ и $f_2(t)$. Это значит, что уравнение (16) справедливо при $f_1(t) < w_1 < f_2(t)$ и ему соответствуют граничные условия

$$S(w_1, t) = \min[Aw_1, B(1-w_1)]$$

$$\text{при } w_1 = f_{1,2}(t),$$

а именно

$$S(f_1(t), t) = Af_1(t),$$

$$S(f_2(t), t) = B(1 - f_2(t)), \tag{18}$$

если

$$Af_1 \leqslant B(1-f_1); \quad Af_2 \geqslant B(1-f_2)$$

(последнее предположение подтвердится в дальнейшем).

Можно доказать, что *в граничных точках имеет место непрерывность первой производной $\partial S/\partial w_1$, если $\partial S/\partial w_1$, $df_{1,2}/dt$ существуют и конечны.* Тогда в дополнение к (18) будут выполняться граничные условия

$$\frac{\partial S}{\partial w_1}(f_1(t), t) = A; \quad \frac{\partial S}{\partial w_1}(f_2(t), t) = -B. \tag{19}$$

Доказательство. Из (12) непосредственно видно, что скачок производной в граничной точке, если он имеется, может быть только отрицательным: $\partial^2 S/\partial w_1^2 = -\infty$ (т. е. излом направлен углом вверх). Если такой излом имеется, то, как видно из соотношения

$$\frac{S(w_1, t) - S(w_1, t+\Delta)}{\Delta} = \min\left\{\frac{1}{\Delta}\min[Aw_1, B(1-w_1)] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta} S(w_1, t+\Delta),\ C + H(w_1)\frac{\partial^2 S}{\partial w_1^2}\right\} + o(1),$$

эквивалентного (12), при этом будем иметь

$$-\frac{\partial S(f, t)}{\partial t} = -\infty \quad (f = f_{1,2}).$$

Однако такое бесконечное значение производной невозможно из следующих соображений. Возьмем производную

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial w_1}\frac{df}{dt} \tag{20}$$

вдоль границы, которая, очевидно, равна $A\dfrac{df_1}{dt}$ или $-B\dfrac{df_2}{dt}$ и, следовательно, конечна. Если $\left|\dfrac{\partial S}{\partial w_1}\right|$, $\left|\dfrac{df}{dt}\right|$ конечны, то согласно (20) должна быть конечна и частная производная $\partial S/\partial t$. Следовательно, излом, приведший к бесконечному значению этой производной, невозможен. Доказательство закончено.

Если обозначить

$$v(w_1, t) = \frac{\partial S(w_1, t)}{\partial w_1},$$

то из (16) будет следовать уравнение

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial w_1}\left[H(w_1)\frac{\partial v}{\partial w_1}\right], \tag{21}$$

которое при граничных условиях (19): $v(f_1, t) = A$; $v(f_2, t) = -B$ однозначно определяет $v(w_1, t)$ как функционал от $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Для отыскания неизвестных функций f_1, f_2 требуются дополнительные условия, которые мы выведем из (16), (18).

Условия (18), очевидно, дают

$$S(f_2, t) - S(f_1, t) = \int_{f_1}^{f_2} v\,dw_1 = B - Af_1 - Bf_2. \tag{22}$$

Далее, дифференцируя (18) по t и учитывая (20), находим

$$\frac{\partial S}{\partial t}(f_1, t) + \frac{\partial S}{\partial w_1}(f_1, t)\frac{df_1}{dt} = A\frac{df_1}{dt},$$

откуда вследствие (19) имеем $\frac{\partial S}{\partial t}(f_1, t) = 0$. Аналогично можно получить $\frac{\partial S}{\partial t}(f_2, t) = 0$. Принимая это во внимание, из (16) будем иметь

$$H(f_1)\frac{\partial v}{\partial w_1}(f_1, t) = H(f_2)\frac{\partial v}{\partial w_1}(f_2, t) = -C. \tag{23}$$

Таким образом, границы областей остановки $f_1(t)$, $f_2(t)$ можно находить следующим образом. Сначала можно решать уравнение (21) при граничных условиях (19), (23), скажем, при условиях

$$v(f_1, t) = A;\quad H(f_1)\frac{\partial v}{\partial w_1}(f_1, t) = C,$$

предполагая $f_1(t)$, $f_2(t)$ известными. Затем нужно определить $f_1(t)$, $f_2(t)$ из второго условия (19) и из (22).

В предположении, что «усеченный» процесс наблюдения заведомо заканчивается в момент $t = T$, можно доказать, что границы областей остановки f_1, f_2 сходятся в одну точку:

$$f_1(T) = f_2(T) = f^* \equiv \frac{B}{A+B}. \tag{24}$$

В моменты $t < T$ область продолжения испытаний $f_1(t) < w_1 < f_2(t)$ расширяется и при $T - t \to \infty$ стремится к предельной области $a < w_1 < b$. Границы последней легко найти, полагая в (16), (21) $\partial S/\partial t = 0$; $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Подставляя решение полученного уравнения

$$v = A - C \int_a^b \frac{dw}{H(w)}$$

во второе условие (19) и в (22), находим трансцендентные уравнения

$$C \int_a^b \frac{dw}{H(w)} = A + B,$$

$$C \int_a^b \frac{w\,dw}{H(w)} = B, \tag{25}$$

которые служат для определения a, b. В случае $A = B$ остается лишь одно уравнение

$$\int_a^{1-a} \frac{dw}{H(w)} = \frac{4\varkappa}{(s_1 - s_2)^2} \left[\frac{1 - 2a}{a(1-a)} + 2 \ln \frac{1-a}{a} \right] = \frac{2A}{C}$$

$$(b = 1 - a).$$

Знания предельных границ областей остановки достаточно, когда длительность процесса наблюдения не лимитирована. В случае «усеченных» испытаний иногда предлагают проводить наблюдение с прежними постоянными границами вплоть до самого последнего момента T. Очевиден неоптимальный характер такой процедуры. Для получения оптимальных границ $f_{1,2}(t)$ следует решать описанную выше задачу. Ввиду того что точное решение получить затруднительно, могут быть применены те или иные приближенные методы. Приведем одно из таких приближенных решений, дающее асимптотическое выражение для $f_{1,2}(t)$ при достаточно малых значениях $T - t$.

Поскольку функции $f_{1,2}$ вблизи конца интервала наблюдения близки к своим заключительным значениям (24), внутри области наблюдения можно считать $H(w_1)$ постоянной:

$$H(w_1) \approx H(f^*) \equiv H.$$

В качестве $v(w_1, t)$ возьмем решение

$$v(w_1, t) = \frac{A-B}{2} - \frac{A+B}{2}\Phi\left(\frac{w_1 - f^*}{2\sqrt{(T-t)H}}\right);$$

$$\left(\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\varepsilon^2}\,d\varepsilon\right),$$

которое в точности удовлетворяет уравнению $-\frac{\partial v}{\partial t} = H\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}$ (см. (21)), но лишь приближенно граничным условиям (19).

Функции $f_{1,2}(t)$ определяем при помощи (23)

$$\frac{A+B}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{(T-t)H}}\exp\left[-\frac{(f_{1,2}-f^*)^2}{4(T-t)H}\right] = \frac{C}{H}.$$

Отсюда

$$f_{1,2}(t) = f^* \pm 2\left[(T-t)H\ln\left(\frac{A+B}{2\sqrt{\pi}C}\sqrt{\frac{H}{T-t}}\right)\right]^{1/2}. \quad (26)$$

Если не учитывать разницы между $H(w_1)$ и H, то решение (26) будет точным для случая переменных штрафов

$$A(t) = \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}\Phi(x); \quad -B(t) = \frac{A-B}{2} - \frac{A+B}{2}\Phi(x),$$

$$x^2 = \ln\left(\frac{A+B}{2\sqrt{\pi}C}\sqrt{\frac{H}{T-t}}\right),$$

в чем можно убедиться, вычисляя $v(f_{1,2}, t)$. Используя асимптотическую формулу

$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

находим

$$A - A(t) = B - B(t) = \frac{A+B}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Отсюда видно, что при $x \gg 1$, $T - t \ll H\left(\frac{A+B}{2C}\right)^2$ штрафы $A(t)$, $B(t)$ близки к A, B и, следовательно, (26) есть асимптотическое выражение для функций $f_{1,2}(t)$. Различными методами последовательных приближений можно провести их уточнение.

В заключение рассмотрим условную постановку данной задачи, более близкую к той постановке, которая имеется в трудах Вальда [1].

Пусть требуется найти оптимальные последовательные критерии $D(y)$, $d'_{DD}(y)$, обращающие в минимум среднее время наблюдения

$$\int D(y)\mathbf{P}(dy \mid x_1) \quad \text{или} \quad \int D(y)\mathbf{P}(dy \mid x_2) \tag{27}$$

при фиксированных ошибках первого и второго рода:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{P}(dy \mid x_2) = \alpha; \quad \int_{\Gamma_2} \mathbf{P}(dy \mid x_1) = \beta. \tag{28}$$

Здесь Γ_i — множество тех траекторий $\{y_t\}$, которые приводят к решению $d'_{DD}(y) = x_i$ $(i = 1, 2)$.

Выбирая произвольное $0 < \Theta < 1$ и комбинируя средние (27), будем искать минимум выражения

$$\Theta \int D(y)\mathbf{P}(dy \mid x_1) + (1 - \Theta)\int D(y)\mathbf{P}(dy \mid x_2).$$

Применим метод сведения условной экстремальной задачи к стандартной бейесовской задаче. Минимизации подлежит средний риск

$$R = \Theta \int D(y)\mathbf{P}(dy \mid x_1) + (1 - \Theta)\int D(y)\mathbf{P}(dy \mid x_2) + $$
$$+ \lambda_1 \int_{\Gamma_2} \mathbf{P}(dy \mid x_1) + \lambda_2 \int_{\Gamma_1} \mathbf{P}(dy \mid x_2),$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители, которые будут найдены в дальнейшем. Если интерпретировать Θ, $1 - \Theta$ как априорные вероятности $\mathbf{P}(x_1)$, $\mathbf{P}(x_2)$, то

$$R = \int D(y)\mathbf{P}(dx, dy) + \frac{\lambda_1}{\Theta}\int_{\Gamma_2} \mathbf{P}(dy, x_1) + \frac{\lambda_2}{1 - \Theta}\int_{\Gamma_1} \mathbf{P}(dy, x_2).$$

Последнему выражению нетрудно придать последовательную форму:

$$R = \int \mathbf{P}(dx, dy)\left[\int_0^D dt C_{tt} + C'_{DD}(x, d'_{DD})\right],$$

где

$$\begin{aligned} &C'_{tt}(x_1, x_1) = C'_{tt}(x_2, x_2) = 0; \quad C'_{tt}(x_1, x_2) = \frac{\lambda_1}{\Theta} \equiv A; \\ &C'_{tt}(x_2, x_1) = \frac{\lambda_2}{1 - \Theta} \equiv B; \quad C_{tt} = 1. \end{aligned} \tag{29}$$

Сравнивая (29) с (11), видим, что данная задача совпадает с задачей, рассмотренной ранее. После ее решения, отношения $A/C = \lambda_1/\Theta$, $B/C = \lambda_2/(1 - \Theta)$ должны быть определены из условий (28).

Оптимальный процесс наблюдения состоит в том, что наблюдение ведется, пока w_1 остается в области $f_1(t) < w_1 < f_2(t)$. Наблюдение заканчивается принятием решения x_1, как только w_1 достигает границы $f_2(t)$, и противоположного решения, когда достигается другая граница. Сказанное относится и к отношению правдоподобия l, поскольку оно однозначно связан с w_1 соотношением

$$\frac{w_1}{1-w_1} = \frac{\mathbf{P}(x_1)}{\mathbf{P}(x_2)}\, l.$$

Область продолжения наблюдения при этом имеет вид

$$\frac{1-\Theta}{\Theta}\,\frac{f_1(t)}{1-f_1(t)} < l < \frac{1-\Theta}{\Theta}\,\frac{f_2(t)}{1-f_2(t)}\,. \tag{30}$$

Уравнения связи между A, B, с одной стороны, и α, β, с другой, получаются из (28) путем решения более или менее сложной задачи на случайные блуждания и достижение границ.

В стационарных задачах, когда $f_1(t) = a$, $f_2(t) = b$ постоянны, находить a, b как решения уравнений (25) необязательно. В этом случае (30) согласно (9) имеет вид

$$\ln a' < \frac{s_1 - s_2}{\varkappa} \int\limits_0^t \left(y_\tau - \frac{s_1 + s_2}{2}\right) d\tau < \ln b',$$

где

$$a' = \frac{1-\Theta}{\Theta}\,\frac{a}{1-a}\,; \quad b' = \frac{1-\Theta}{\Theta}\,\frac{b}{1-b}\,.$$

Вычисление вероятностей (28) достижения границ функцией $\ln l$ при гипотезах $x = x_1$, $x = x_2$ можно проводить, решая соответствующее уравнение Фоккера—Планка. Это дает равенства

$$a' = \frac{\beta}{1-\alpha}\,; \quad b' = \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{31}$$

вместо соответствующих неравенств, полученных Вальдом для дискретного времени. Границы областей остановки a, b, таким образом, не зависят в данном случае от Θ. Это свидетельствует о том, что оба средних времени (27) минимизируются при (31) одновременно.

3. *Сложная задача Вальда.* Пусть теперь проверяется сложная гипотеза $x \in \omega$ относительно сложной конкурирующей гипотезы $x \in \bar{\omega}$. Испытания по-прежнему будем предполагать независимыми. Для простоты примем, что множество $X = \omega \cup \bar{\omega}$ возможных значений параметра x есть одномерное

пространство, а ω — полупрямая $x < 0$, хотя, конечно, возможно обобщение на более общие случаи.

В данном случае также будут справедливы формулы (7)—(9), определяющие апостериорную вероятность, если в них вместо $W(x)$, $\mathbf{P}(x)$ писать $W(dx) = w(x)\,dx$ и $\mathbf{P}(dx) = p(x)\,dx$.

Чтобы условный риск зависел не от бесконечного, а от конечного множества параметров (достаточных координат), требуются дополнительные, упрощающие предположения. Так, положим, что априорное распределение гауссово

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}},$$

а $s_t(x)$ — линейная функция от $x : s_t(x) = q_t + r_t x$. Тогда апостериорное распределение также будет гауссовым

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{32}$$

где

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\varkappa}\int_0^t r_\tau^2\,d\tau;$$

$$m = \sigma^2\left[\frac{m_0}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\varkappa}\int_0^t (\dot{y}_\tau - q_\tau)\,r_\tau\,d\tau\right]. \tag{33}$$

Легко видеть, что последние равенства эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sigma^3}\,d\sigma &= \frac{r_t^2}{\varkappa}\,dt; \\ d\left(\frac{m}{\sigma^2}\right) &= \frac{r_t}{\varkappa}(\dot{y} - q_t)\,dt \end{aligned} \tag{34}$$

с соответствующими начальными условиями $\sigma = \sigma_0$, $m = m_0$ при $t = 0$.

Пусть требуется принять решение $u = \operatorname{sign} x$ при таких же штрафах за неправильное решение и за время наблюдения, что и в предыдущем примере:

$$C'_{tt}(x, u) = \begin{cases} A & \text{при} \quad x > 0,\ u = -1; \\ B & \text{при} \quad x < 0,\ u = 1 \\ 0 & \text{в других местах} \end{cases} \tag{35}$$

$$C_{tt}(x, u) = C.$$

Функция $s'_{tt}(u'_{tt} \mid y_0^t) = \mathbf{M}_{ps} C'_{tt}(x_t, u'_{tt})$ (ср. с (9.4)) теперь зависит от y_0^t только через посредство σ, m (33). Учитывая (32), (35), находим

$$s'_{tt}(u' \mid y_0^t) = \begin{cases} A\left[\frac{1}{2} + F(\mu)\right] & \text{при} \quad u' = -1, \\ B\left[\frac{1}{2} - F(\mu)\right], & \phantom{\text{при}} \quad u' = 1, \end{cases}$$

где $\mu = \frac{m}{\sigma}$, а $F(\mu)$ — функция (3.а).

Условный риск, зависящий от σ, m, или, что то же, от σ, μ, определяется уравнением (10.12), принимающим вид

$$S(\sigma, \mu, t) = \min\left\{A\left[\frac{1}{2} + F(\mu)\right], B\left[\frac{1}{2} - F(\mu)\right],\right.$$

$$\left. C\Delta + \mathbf{M}_{ps} S(\sigma + \Delta\sigma, \mu + \Delta\mu, t + \Delta)\right\} + o(\Delta). \tag{36}$$

Из (34) получаем

$$d\mu = -\frac{r^2}{2\varkappa}\sigma^2 \mu\, dt + \frac{r\sigma}{\varkappa}(\dot{y} - q)\, dt.$$

При усреднении $\mathbf{M}_{ps}$ заменим здесь $(\dot{y} - q)\,dt$ на $(rx + \xi)\,dt = rx\,dt + d\zeta$ и учтем, что $\mathbf{M}_{ps} x = m = \sigma\mu$, $\mathbf{M}_{ps}\xi = 0$ и поэтому

$$\mathbf{M}_{ps}\, d\mu = \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{\varkappa}\,\sigma^2 \mu\, dt;$$

$$\mathbf{M}_{ps}(\Delta\mu - \mathbf{M}_{ps}\Delta\mu)^2 = \frac{r^2\sigma^2}{\varkappa^2}\mathbf{M}_{ps}(\Delta\zeta)^2 = \frac{r^2\sigma^2}{\varkappa}\Delta.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}_{ps} S(\sigma + \Delta\sigma, \mu + \Delta\mu, t + \Delta) = S(\sigma, \mu, t + \Delta) +$$

$$+ \frac{\Delta}{2\varkappa} r^2 \sigma^2 \left[-\sigma\frac{\partial S}{\partial \sigma} + \mu\frac{\partial S}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 S}{\partial \mu^2}\right] + o(\Delta). \tag{37}$$

(здесь учтено также первое равенство (34)).

Подставляя (37) в (36) и переходя к пределу $\Delta \to 0$, получаем, что S удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = C + \frac{r^2\sigma^2}{2\varkappa}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \mu^2} + \mu\frac{\partial S}{\partial \mu} - \sigma\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right],$$

когда

$$S < \min\left\{A\left[\frac{1}{2} + F(\mu)\right], \; B\left[\frac{1}{2} - F(\mu)\right]\right\}. \tag{38}$$

В остальных местах

$$S = \min\left\{A\left[\frac{1}{2} + F(\mu)\right],\ B\left[\frac{1}{2} - F(\mu)\right]\right\}.$$

Область (38) является областью продолжения испытаний. На ее границах $\mu = f_1(\sigma, t)$, $\mu = f_2(\sigma, t)$, $(f_1 < f_2)$, где

$$S(f_1) = A\left[\frac{1}{2} + F(f_1)\right],\ F(f_1) < \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{A+B}\ ; \tag{39}$$

$$S(f_2) = B\left[\frac{1}{2} - F(f_2)\right],\ F(f_2) > \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{A+B}, \tag{40}$$

испытания заканчиваются принятием решения $u = -1$ (на f_1) и решения $u = 1$ (на f_2). Как и в предыдущем примере, на границах выполняется условие непрерывности производной:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial \mu} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\mu^2}{2}} \quad \text{при} \quad \mu = f_1(\sigma, t);\\ \frac{\partial S}{\partial \mu} = -\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\mu^2}{2}} \quad \text{при} \quad \mu = f_2(\sigma, t).\end{gathered} \tag{41}$$

В тех случаях, когда время наблюдения не ограничено и параметры задачи (r, $\varkappa$, A, B и др.) постоянны, функция S не зависит явно от времени и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mu^2} + \mu\,\frac{\partial S}{\partial \mu} - \sigma\,\frac{\partial S}{\partial \sigma} + \frac{2\varkappa C}{r^2\sigma^2} = 0 \tag{42}$$

с граничными условиями (41).

Наличие множителя σ при $\frac{\partial S}{\partial \sigma}$ упрощает приближенное решение данной задачи и отыскание границ $f_{1,2}(\sigma)$. В первом приближении можно, пренебрегая членом $\sigma\frac{\partial S}{\partial \sigma}$, решать уравнение

$$\frac{\partial^2 S^{(1)}}{\partial \mu^2} + \mu\,\frac{\partial S^{(1)}}{\partial \mu} = -\frac{2\varkappa C}{r^2\sigma^2} \tag{43}$$

с тем, чтобы более высокие приближения находить по формуле

$$\frac{\partial^2 S^{(k+1)}}{\partial \mu^2} + \mu\,\frac{\partial S^{(k+1)}}{\partial \mu} = -\frac{2\varkappa C}{r^2\sigma^2} + \sigma\,\frac{\partial S^{(k)}}{\partial \sigma}.$$

Решение уровнения (43) при первом условии (41) имеет вид

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial \mu} = e^{-\frac{\mu^2}{2}} \left\{ \frac{A}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2\varkappa C}{r^2\sigma^2} \int\limits_{f_1}^{\mu} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx \right\}. \qquad (44)$$

Учитывая второе условие (41), отсюда получаем

$$\int\limits_{f_1}^{f_2} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{r^2\sigma^2}{2\varkappa C} \frac{A+B}{\sqrt{2\pi}}.$$

Второе уравнение для определения $f_1(\sigma)$, $f_2(\sigma)$ находим из условия

$$S(\sigma, f_1) - S(\sigma, f_2) = \frac{A-B}{2} + AF(f_1) + BF(f_2).$$

(см. (39), (40)).

Интегрирование равенства (44) поэтому дает

$$\frac{2\varkappa C}{r^2\sigma^2} \int\limits_{f_1}^{f_2} d\mu e^{-\frac{\mu^2}{2}} \int\limits_{f_1}^{\mu} dx e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{A-B}{2} + (A+B) F(f_2).$$

В симметричном случае, когда $A = B$, имеем $f_1 = -f_2$, причем

$$\int\limits_{0}^{f_2(\sigma)} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{r^2\sigma^2}{2\sqrt{2\pi}\,\varkappa} \frac{A}{C}.$$

При малых $\sigma \ll \left(\frac{2\varkappa C}{Ar^2}\right)^{1/2}$, следовательно, справедлива асимптотическая формула

$$f_2(\sigma) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r^2\sigma^2}{2\varkappa} \frac{A}{C}. \qquad (45)$$

На основе полученного решения можно убедиться, что отклонение $S^{(1)} - \min\left[A\left(\frac{1}{2} + F\right),\ B\left(\frac{1}{2} - F\right)\right]$ имеет порядок

$$\frac{2\varkappa C}{r^2\sigma^2} f_{1,2}^2 \sim \frac{A^2}{2\varkappa C} r^2\sigma^2.$$

Поэтому член $\sigma \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \sigma} \sim r^2\sigma^2 A^2/2\varkappa C$, которым мы пренебрегли, в $(r^2\sigma^2 A/2\varkappa C)^2$ раз меньше учтенного члена $2\varkappa C/r^2\sigma^2$. Следовательно, при условии $\sigma \ll (2\varkappa C/r^2 A)^{1/2}$ сделанное приближение является законным.

Вместо найденных границ областей остановки $m_\Gamma =$

$= \sigma f_{1,2}(\sigma)$ в плоскости (m, σ) можно рассматривать границы в плоскости (m, t), поскольку вследствие первого уравнения (34) значение σ просто зависит от t. Так, взяв начальное условие $\sigma(0) = \infty$, при постоянном r имеем

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{r^2}{\varkappa} t.$$

Поэтому вместо (45) уравнение границ остановки принимает вид

$$|m_\Gamma| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{A}{C} \frac{r^2\sigma^3}{2\varkappa} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{A}{C} \frac{\sqrt{\varkappa}}{2r} t^{-\frac{3}{2}}. \quad (46)$$

Использованный метод применим и в том случае, когда функция штрафов $C'(x, u)$ имеет более общий вид, чем (35), например,

$$C'(x, u) = \begin{cases} A|x|^k \text{ при } x > 0, \ u = -1; \\ B|x|^k \text{ при } x < 0, \ u = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\min_u s'_{tt}(u \mid y_0^t) = \min [A\sigma^k \varphi(-\mu), \ B\sigma^k \varphi(\mu)],$$

где

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \eta^k e^{-\frac{(\eta+\mu)^2}{2}} d\eta.$$

Дальнейшее рассмотрение аналогично предыдущему, и мы не будем его проводить. Ограничимся приведением некоторых результатов, касающихся симметричного случая $A = B$. Решение уравнения (43) с граничным условием

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} = -A\sigma^k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right| \text{ при } \mu = f_2$$

дает равенство

$$\int_0^{f_2} e^{\frac{x^2}{2}} dx = \frac{r^2}{2\varkappa} \frac{A}{C} \sigma^{k+2} e^{\frac{1}{2} f_2^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right|_{\mu = f_2},$$

служащее для определения f_2. При выполнении условия $\sigma^{k+2} \ll 2\varkappa C/r^2 A$ имеем $f_2 \ll 1$. Поэтому, учитывая, что

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \text{ при } \mu \ll 1,$$

находим

$$f_2(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k}{2} - 1} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \frac{A}{C} \frac{r^2}{\varkappa} \sigma^{k+2}.$$

В плоскости (m, t) этому выражению соответствуют границы

$$|m_\Gamma| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k}{2}-1} \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \frac{A}{C} \left(\frac{\varkappa}{r^2}\right)^{\frac{k+1}{2}} t^{-\frac{k+3}{2}}.$$

Сравнение учтенного члена $2\varkappa C r^{-2} \sigma^{-2}$ с тем членом уравнения (42), которым мы пренебрегли, показывает, что условие применимости последнего результата имеет вид $f_2 \ll 1$.

Последние формулы переходят в формулы (45, 46), найденные раньше, если $k = 0$, а при $k = 1$ имеет место случай, рассматривавшийся Михалевичем [1, 2].

Приведенное решение непосредственно обобщается на те невальдовские задачи, когда параметр x, подлежащий оценке, является переменным. В этом случае сначала выводятся дифференциальные уравнения для производных $d\sigma/dt$, $d\mu/dt$ (из теории условных марковских процессов), затем, как и раньше, производится их апостериорное усреднение, что соответствует переходу к вторичному апостериорному оператору типа (9.34). Когда апостериорное распределение не является точно гауссовым, но локально близко к таковому, может быть применена приближенная теория, учитывающая то или иное конечное число параметров распределения.

4. *Задача обнаружения разладки.* Рассмотрим задачу, которая в несколько другой (условной) постановке решалась А. Н. Колмогоровым и А. Н. Ширяевым.

Пусть, как в задаче 2, $\dot{y}_t = s_t(x) + \xi_t$, где ξ_t — белый шум, а $s_t(x)$ — сигнал с двумя возможными значениями: $s_t(x_1) = s_1$ и $s_t(x_2) = s_2$. Теперь, однако, будем предполагать, что параметр $x = x_1, x_2$ не остается постоянным, а именно возможны марковские переходы от одного значения к другому. Переход от x_2 к x_1 будем интерпретировать как появление «разладки». Если обратные переходы невозможны, то априорные вероятности $p_1 = \mathbf{P}(x_1)$, $p_2 = \mathbf{P}(x_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt} = \beta p_2, \tag{47}$$

где β — параметр, описывающий частоту появления «разладки». Апостериорные вероятности $w_1 = W(x_1)$, $w_2 = 1 - w_1$ наличия или отсутствия разладки определяются уравнением

$$\frac{dw_1}{dt} = -\frac{dw_2}{dt} = \beta(1 - w_1) + \frac{s_1 - s_2}{\varkappa}\left[\dot{y}_t - \frac{s_1 + s_2}{2}\right] w_1 (1 - w_1) \tag{48}$$

(см. (6.43), (11.5)) несколько более общим, чем (10).

Требуется определить, имеется ли разладка, и прекратить процесс наблюдения, если она есть. При этом берется штраф A в единицу времени за необнаружение «разладки» и штраф B за ложную тревогу.

Выбирая матрицы штрафов

$$C_{tt}(x_1) = A; \quad C_{tt}(x_2) = 0; \tag{49}$$

$$C'_{tt}(x_1) = 0; \quad C'_{tt}(x_2) = B,$$

мы можем применить к данной задаче общую теорию. Матрицы (49) не зависят от u, так что решений d_{tt}, d'_{tt} (в дополнение к $\vartheta = D(y)$) принимать не приходится.

Уравнение (10.12) приобретает вид

$$S(w_1, t) = \min\{B(1 - w_1),\ Aw_1\Delta + \mathbf{M}_{ps}S(w_1 + \\ + \Delta w_1,\ t + \Delta)\} + o(\Delta),$$

так как $s_t = A\, w_1$; $s'_t = B\,(1 - w_1)$ в соответствии с (10.11). Используя (48), после выкладок, аналогичных (14)—(16), получаем уравнение

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = Aw_1 + \beta(1 - w_1)\frac{\partial S}{\partial w_1} + H(w_1)\frac{\partial^2 S}{\partial w_1^2}, \tag{50}$$

$$\left(H(w) = \frac{(s_1 - s_2)^2}{2\varkappa} w^2 (1 - w)^2\right),$$

справедливое при

$$S(w_1, t) < B(1 - w_1),$$

т. е. в пределах области наблюдения $w_1 < f(t)$. На границе $w_1 = f(t)$, которая теперь лишь одна, выполняется, как и раньше, условие непрерывности функции и ее производной:

$$S(f, t) = B(1 - f);$$

$$\frac{\partial S}{\partial w_1}(f, t) = -B. \tag{51}$$

В стационарном случае граничная функция обращается в постоянную: $f(t) = a$, а (50) переходит в уравнение:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial w_1^2} + \frac{\beta(1 - w_1)}{H(w_1)}\frac{\partial S}{\partial w_1} + \frac{Aw_1}{H(w_1)} = 0. \tag{52}$$

При решении этого уравнения и определении a необходимо, в дополнение к (51), учитывать граничное условие

$$\frac{\partial S}{\partial w_1} = 0 \text{ при } w_1 = 0. \tag{53}$$

Для доказательства этого условия заметим, что в противном случае, как легко получить интегрированием из (52), производная $\partial S/\partial w_1$ и функция $S(w_1)$ принимала бы вблизи нуля неограниченные значения, что лишено смысла. При этом была бы справедлива асимптотическая формула

$$\frac{\partial S}{\partial w_1} = \text{const}\,\exp\left\{\frac{2\varkappa\gamma}{(s_1-s_2)^2}\,\frac{1}{w_1}\right\}.$$

Решая (52) с указанным граничным условием (53), находим

$$\frac{\partial S}{\partial w_1}(w_1) = -A\int\limits_0^{w_1} \mathrm{e}^{\varphi(w_1)-\varphi(w)}\,\frac{w}{H(w)}\,dw, \qquad (54)$$

$$\left(\varphi(w) = -\beta\int\frac{1-w}{H(w)}\,dw\right)$$

и получаем формулу для определения границы a:

$$\int\limits_0^a e^{\varphi(a)-\varphi(w)}\,\frac{w}{H(w)}\,dw = \frac{B}{A}. \qquad (55)$$

Выражения, получаемые вычислением интегралов (54), (55), не стремятся при $\beta\to 0$ к конечным пределам, так как интеграл $\int\limits_0^w w^{-1}\,dw$ расходится в нижнем пределе. Однако при малых $\beta \ll \frac{(s_1-s_2)^2}{2\varkappa}$ роль множителя $\exp\,[\varphi(w_1)-\varphi(w)]$ сводится по существу к исключению малой области вблизи нуля. Вводя малую величину $\mu\ll 1$, можно опустить в (54), (55) экспоненциальный множитель, но зато в качестве нижнего предела интегрирования брать μ.

Тогда (55) примет вид

$$\frac{a}{1-a} + \ln\frac{a}{(1-a)\mu} \approx \frac{(s_1-s_2)^2}{2\varkappa}\,\frac{B}{A}. \qquad (56)$$

Функция $S(w_1)$, получаемая интегрированием (54), будет равна

$$S(w_1) = B(1-a) + \frac{2\varkappa A}{(s_1-s_2)^2}\left[\ln\frac{1-w_1}{1-a} + \right.$$
$$\left. + H_0(w_1) - H_0(a) - (1+\ln\mu)(a-w_1)\right], \qquad (57)$$

$$(H_0(w) = -w\ln w - (1-w)\ln(1-w)).$$

Величина μ, входящая в (56), (57), определяемая равенством

$$\int_{\mu}^{w_1} \frac{dw}{w} = \int_0^{w_1} e^{\varphi(w_1)-\varphi(w)} \frac{dw}{w} \approx$$

$$\approx \int_0^{w_1} \exp\left[\frac{2\varkappa\beta}{(s_1-s_2)^2}\left(\frac{1}{w_1}-\frac{1}{w}\right)\right]\frac{dw}{w} =$$

$$= -\exp\left[\frac{2\varkappa\beta}{(s_1-s_2)^2}\frac{1}{w_1}\right]\mathrm{Ei}\left(-\frac{2\varkappa\beta}{(s_1-s_2)^2}\frac{1}{w_1}\right),$$

оказывается при $2\varkappa\beta(s_1-s_2)^{-2} \ll 1$ равной

$$\mu \approx \gamma \frac{2\beta\varkappa}{(s_1-s_2)^2} \quad (\gamma = 1{,}781\ldots).$$

Перейдем к условной постановке данной задачи. Пусть штрафы A и B не заданы, а требуется найти оптимальную обработку наблюденных величин, обращающую в минимум среднее время разладки

$$T = \frac{1}{1-\alpha}\int_{D(y)>\tau(x)} [D(y)-\tau(x)]\, \mathbf{P}(dx, dy) \tag{58}$$

при фиксированной вероятности ложной тревоги

$$\int_{D(y)<\tau(x)} \mathbf{P}(dx, dy) = \alpha. \tag{59}$$

Здесь через $\tau(x)$ обозначено время возникновения разладки.

Сводя условную задачу к стандартной (бейесовской), образуем функцию риска

$$R = \int_{D>\tau} [D(y)-\tau(x)]\, \mathbf{P}(dx, dy) + \lambda \int_{D<\tau} \mathbf{P}(dx, dy) =$$

$$= \int \left[\int_0^D dt C_{tt}(x_t) + C'_{DD}(x_D)\right] \mathbf{P}(dx, dy), \tag{60}$$

где

$$C_{tt}(x_1) = 1;\ C_{tt}(x_2) = 0;\ C'_{tt}(x_1) = 0;\ C'_{tt}(x_2) = \lambda.$$

Задача минимизации риска (60) совпадает с вышеизложенной задачей, если положить $\lambda = B/A$. Наблюдение должно вестись, пока w_1 не достигнет порогового значения a. Равенство (55) устанавливает однозначную связь между λ и a. Поскольку λ — неопределенный множитель, то λ или a следует определить из условия (59).

Задавшись значением a, подсчитаем вероятность ложной тревоги

$$\alpha = \mathbf{P}[D(y) < \tau(x)] = \int_0^\infty \mathbf{P}[D(y) < \tau | \tau] \mathbf{P}(d\tau), \text{ где } \int_{\tau > t} \mathbf{P}(d\tau) = p_2(t).$$

Учитывая (47), имеем

$$\alpha = \beta \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \mathbf{P}[D < \tau | \tau] d\tau. \tag{61}$$

Вероятность $\mathbf{P}[D < \tau \mid \tau]$, очевидно, берется при наблюдаемом сигнале $\dot{y}_t = s_2 + \xi_t$. Эту вероятность можно подсчитать, зная, что w_1 удовлетворяет уравнению (48), принимающему вид

$$\frac{dw_1}{dt} = \beta(1 - w_1) + \frac{s_1 - s_2}{\varkappa}\left[\xi - \frac{s_1 - s_2}{2}\right] w_1 (1 - w_1),$$

с начальным условием $w_1 = w_0 = 0$ при $t = 0$.

Плотность вероятности перехода $f(w_0, w_1, t - t_0)$, $(t_0 = 0)$, которая связана с $\mathbf{P}[D < \tau \mid \tau]$ соотношением $\mathbf{P}[D < \tau \mid \tau] = 1 - \int_0^a f(0, w_1, t)\, dw_1$, при этом удовлетворяет (первому) уравнению Колмогорова

$$-\frac{\partial f}{\partial t_0} = \frac{\partial f}{\partial t} = \left[\beta(1 - w_0) - \frac{2H(w_0)}{1 - w_0}\right] \frac{\partial f}{\partial w_0} + H(w_0) \frac{\partial^2 f}{\partial w_0^2}.$$

Из него интегрированием по w_1 от 0 до a и по t (после умножения на e^{-pt}) получаем уравнение

$$H(w_0) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial w_0^2} + \left[\beta(1 - w_0) - \frac{2H(w_0)}{1 - w_0}\right] \frac{\partial \Theta}{\partial w_0} = p\Theta \tag{62}$$

для характеристической функции

$$\Theta(w_0, p) = p \int_0^\infty e^{-p\tau} \mathbf{P}[D < \tau | \tau] d\tau =$$

$$= 1 - p \int_0^\infty d\tau\, e^{-p\tau} \int_0^a dw_1 f(w_0, w_1, \tau).$$

Уравнению (62) соответствует граничное условие

$$\Theta(a, p) = 1. \tag{63}$$

Поскольку $0 \leqslant \Theta(w_0, p) \leqslant 1$ при всех w_0 и $p \geqslant 0$, потребуем ограниченности

$$|\Theta(0, p)| < \infty \tag{64}$$

на другом конце интервала.

Нетрудно видеть, что (61) совпадает с частным значением $\alpha = \Theta(0, \beta)$, поэтому в дальнейшем мы будем полагать $p = \beta$.

Умножая (62) на интегрирующий множитель, имеем после однократного интегрирования

$$\frac{\partial\Theta}{\partial w_0}(w_0, \beta) = \frac{\beta}{(1-w_0)^2}\int\limits_0^{w_0} e^{\varphi(w_0)-\varphi(w)}\,\frac{(1-w)^2}{H(w)}\,\Theta(w, \beta)\,dw + \frac{C_1}{(1-w_0)^2}\,e^{\varphi(w_0)}. \tag{65}$$

Здесь $C_1 = 0$ в силу (64).

Равенство (65) удобно для получения асимптотического решения $\Theta(w_0, \beta)$ при $\beta \to 0$. Подынтегральное выражение в (65) существенно лишь при малых w, где $\Theta(w, \beta)$ можно заменить на $\Theta(0, \beta)$, а $\varphi(w)$ — на асимптотическое выражение $\frac{2\varkappa\beta}{(s_1-s_2)^2}\,\frac{1}{w}$. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial\Theta}{\partial w_0}(w_0, \beta) = \frac{\Theta(0, \beta)}{(1-w_0)^2}.$$

Интегрируя вторично при условии (63) и полагая $w_0 = 0$, находим

$$\alpha = \Theta(0, \beta) = 1 - a.$$

Таким образом, пороговое значение $a = 1 - \alpha$ и прочие параметры задачи определены (выражены через α).

Теперь можно найти также среднее время разладки (58), пользуясь найденным ранее выражением (57). В самом деле, риск (60) совпадает (при $A = 1$) с значением $S(0)$, поэтому

$$(1-\alpha)\,T = S(0) - \lambda\alpha = \frac{2\varkappa}{(s_1-s_2)^2}\,a\left[\ln\frac{a}{(1-a)\,\mu} - 1\right].$$

Эта формула, если учесть, что $\frac{a}{1-a} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \approx \beta T_0$ (T_0 — среднее время между ложными тревогами), совпадает с асимптотическим выражением для среднего времени запаздывания

$$T = \frac{2\varkappa}{(s_1-s_2)^2}\left\{\ln\left[\frac{(s_1-s_2)^2}{2\varkappa}\,T_0\right] - C - 1\right\},\quad C = 0{,}577..,$$

полученным ранее Ширяевым [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

Арроу, Блеквелл, Гиршик (Arrow K. I., Blackwell D., Girshik M. A.).

1. Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. «Econometrica», 1949, v. 17, pp. 213—244.

Беллман Р.

1. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.

Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.

1. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., ИЛ, 1962.

Беллман Р., Калаба Р.

1. Теория динамического программирования и системы управления с обратной связью. Доклад на I конгрессе ИФАК. «Тр. I междунар. конгресса ИФАК». М., Изд-во АН СССР, 1961.

Блеквелл Д., Гиршик М. А.

1. Теория игр и статистических решений. М., ИЛ, 1958.

Большаков И. А., Репин В. Г.

1. Вопросы нелинейной фильтрации. «Автоматика и телемеханика», 1961, т. XXII, № 4, стр. 466—478.

Вальд А.

1. Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960.

Вальд, Вольфовиц (Wald A., Wolfowitz I.).

1. Bayes solutions of sequential decision problems. «Ann. of Math. Stat.», 1951, v. 21, pp. 82—99.

Ван дер Варден Б. Л.

1. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.

Вентцель А. Д.

1. Сообщение на VII Всесоюзном совещании по теории вероятностей и матем. статистике». Тбилиси, 1963.

Винер (Wiener N.).

1. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. N.-Y., J. Wiley, 1949.

Гирсанов И. В.

1. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. «Теория вероятн. и ее применение», 1960, т. V, в. 3, стр. 314—330.

2. Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов. ДАН СССР, 1961, т. 136, № 4, стр. 761—764.

3. Некоторые минимаксные задачи в теории управляемых марковских процессов. «Теория вероятн. и ее применение», 1962, т. VII, в. 2, стр. 233—234.

Дуб Дж. Л.

1. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.

Дынкин Е. Б.

1. Марковские процессы и полугруппы операторов. «Теория вероятн. и ее применения», 1956, т. I, в. 1, стр. 25—37.

2. Основания теории марковских процессов. М., Физматгиз, 1959.
3. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
4. Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса. ДАН СССР, 1963, т. 150, № 2, стр. 238—241.

Заде (Zadeh L. A.).
1. Optimum nonlinear filters. «J. Appl. Physics.», 1953, v. 24, No. 4, pp. 396—404.

Иосида (Vosida K.).
1. On differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operatos. «J. Math. Sos. Japan», 1948, v. 1, pp. 15—21.
2. An operator-theoretical treatment of temporally homogenius Markoff process. «J. Math. Soc. Japan», 1949, v. 1, pp. 244—253.

Ито (Ito K.).
1. Stochastic integral. «Proc. Imp. Acad.», 1944, v. 20, pp. 519—524.
2. On a stochastic integral eguation. «Proc. Japan Acad.», 1946, v. 22; 2, pp. 32—35.
3. On a stochastic differential equations. «Memoirs Amer. Math. Soc.», 1951, v. 4.

Калман и Бьюси (Kalman R. E., Bucy R. S.
1. New results in linear filtering and prediction theory. «J. of Basic Engineering». Trans. ASME», 1961, v. 83, pp. 95—108.

Камерон и Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.).
1. Non-linear integral equations. «Ann. of Math.», 1950, v. 51, pp. 629—642.

Колмогоров А. Н.
1. Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze. «Math. Ann.», 1936, v. 113, pp. 766—772.
2. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. «Изв. АН СССР», сер. матем., 1941, т. 5, № 5, стр. 3—14.

Колосов Г. Е., Стратонович Р. Л.
1. Об одной задаче синтеза оптимального регулятора, решаемой методами динамического программирования. «Автоматика и телемеханика», 1963, т. XXIV, № 9, стр. 1165—1173.

Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И.
1. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. XIV, № 4, стр. 375—391.
2. Прохождение случайных функций через нелинейные системы (продолжение). «Автоматика и телемеханика», 1954, т. XV, № 3, стр. 200—205.

Кульман Н. К., Стратонович Р. Л.
1. О некоторых оптимальных устройствах для выделения импульсного сигнала случайной длительности из шума. «Радиотехника и электроника», 1961, т. VI, № 9, стр. 1442—1451.
2. Фазовая автоподстройка частоты и оптимальное измерение параметров узкополосного сигнала в шуме. «Радиотехника и электроника», 1964, т. IX, в. I, стр. 67—77.

Кушнер (Kushner H. J.).
1. Lincoln Laboratory M. I. T. Report JA 2123, March, 1963.
2. «J. of Math. Anal. and Appl.», 1964, v. 8, pp. 332—344.

Ланжевен (Langevin P.).
1. «Comptes rendus», 1908, v. 14, p. 530.

Ленинг Дж. Х., Беттин Р. Т.
1. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИЛ, 1958.

Леонов В. П., Ширяев А. Н.
1. К технике вычисления семиинвариантов. «Теория вероятн. и ее применение», 1959, т. IV, в. 3, стр. 342—355.

Лоэв М.
1. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.

Лян Чжи-Шуен.

1. Об условных марковских процессах. «Теория вероятн. и ее применение», 1960, т. V, в. 2, стр. 227—228.

Михалевич В. С.

1. Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля. «Теория вероятн. и ее применение», 1956, т. I, в. 4, стр. 437—465.

2. Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля. Канд. дис. МГУ, 1956.

Прохоров Ю. В.

1. Сходимость случайных процессов и предельные теории вероятностей. «Теория вероятн. и ее применение», 1956, т. I, в. 2, стр. 177—238.

Пугачев В. С.

1. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

Рыжик И. М., Градштейн П. С.

1. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.

Скороход А. В.

1. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. «Теория вероятн. и ее применение», 1957, т. II, в. 4, стр. 417—443.

Смирнов В. И.

1. Курс высшей математики, т. II. М., Физматгиз, 1961.

Стратонович Р. Л.

1. К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций. «Теория вероятн. и ее применение», 1959, т. IV, в. 2, стр. 239.

2. Условные процессы Маркова. «Теория вероятн. и ее применение», 1960, т. V, в. 2, стр. 172—195.

3. Об условных марковских процессах. Доклад на VI Всесоюзном совещании по теории вероятн. и матем. статистике. «Тр. совещания», Вильнюс, Гос. изд. полит. и научн. лит. Литовской ССР, 1962.

4. Об инфинитезимальном операторе марковского процесса. «Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике». Вильнюс, 1962.

5. О функционале вероятности диффузионных процессов. «Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике». Вильнюс, 1962.

√6. Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума. «Изв. вузов», Радиофизика, 1959, т. II, № 6, стр. 892—901.

√7. Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов. «Радиотехника и электроника», 1960, т. V, № 11, стр. 1751—1763.

8. Избранные вопросы теории флюктуации в радиотехнике. М., «Советское радио», 1961.

9. Условное распределение коррелированных случайных точек и использование корреляции для оптимального выделения импульсного сигнала из шумов. «Изв. АН СССР», ОТН. Энергетика и автоматика, 1961, № 2, стр. 148—158.

√10. Оптимальный прием узкополосного сигнала с неизвестной частотой на фоне шумов. «Радиотехника и электроника», 1961, т. VI, № 7, стр. 1063—1075.

√11. Оптимальная фильтрация телеграфного сигнала. «Автоматика и телемеханика», 1961, т. XXII, № 9, стр. 1163—1174.

√12. Выделение сигнала с непостоянной частотой из шума. «Радиотехника и электроника», 1962, т. VII, № 2, стр. 187—194.

13. Условные марковские процессы в задачах математической статистики и динамического программирования. ДАН СССР, 1961, т. 140, № 4, стр. 769—772.

14. Условные марковские процессы в задачах математической статистики, динамического программирования и теории игр. Доклад на

IV Всесоюзном матем. съезде. Л., 1961. «Тр. съезда», 1963, стр. 370—379.
15. Некоторые экстремальные задачи математической статистики и условные процессы Маркова. «Теория вероятн. и ее применение», 1962, т. VII, в. 2, стр. 226—229.
16. Об оптимальном обнаружении разладки производственного процесса. «Вестн. Моск. ун-та», сер. матем. и мех., 1962, № 2, стр. 63—71.
17. К теории оптимального управления. Достаточные координаты. «Автоматика и телемеханика», 1962, т. XXIII, № 7, стр. 910—917.
18. К теории оптимального управления. Асимптотический метод решения диффузионного альтернативного уравнения. «Автоматика и телемеханика», 1962, т. XXIII, № 11, стр. 1339—1447.
19. Новейшее развитие методов динамического программирования. Доклад на II конгрессе ИФАК. Базель, 1963.
20. Рекуррентные соотношения для условных рисков в измеримом пространстве. Доклад на VII Всесоюзном совещании по теории вероятн. и матем. статистике. Тбилиси, 1963.
21. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений. «Вестн. Моск. ун-та», сер. матем. и мех., 1964, № 1, стр. 3—12.

Стратонович Р. Л., Шмальгаузен В. И.
1. Некоторые стационарные задачи динамического программирования. «Изв. АН СССР», ОТН. Энергетика и автоматика, 1962, № 5, стр. 131—139.

Феллер (Feller W.)
1. Semi-groups of transformation in general weak topologies. «Ann. of Math.», 1953, v. 57.

Хилл Е.
1. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1951.

Чандрасекар С.
1. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., ИЛ, 1947.

Ширяев А. Н.
1. Обнаружение спонтанно возникающих эффектов. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 4, стр. 799—801.
2. Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 5, стр. 1039—1042.
3. Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима. Канд. дис. Математический институт АН СССР, 1961.

Шмальгаузен В. И.
1. Синтез одной оптимальной следящей системы. «Автоматика и телемеханика», 1963, т. XXIV, № 8, стр. 1065—1072.

Яглом А. М.
1. О статистической обратимости броуновского движения. «Матем. сборник», 1949, № 24 (66), стр. 457—492.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Руслан Леонтьевич Стратонович

УСЛОВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Тематический план 1965 г. № 13

Редактор *Хазен Э. М.* Технический редактор *Георгиева Г. И.*
Переплет художн. *Иванов А. А.* Корректоры: *Белова Г. В., Эльмус М. И.*

Сдано в набор 3/V1965 г. Подписано к печати 20/XII 1965 г.
Л-49767. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 20,0. Уч.-изд. л. 18,40.
Изд. № 792 Заказ 671 Тираж 3.250 экз. Цена 1 р. 44 к.

Издательство Московского университета
Москва, Ленинские горы, Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы