В.А. СТЕКЛОВ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издание второе

Под редакцией В.С Владимирова

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.16
С 79
УДК 517

Стеклов В.А. Основные задачи математической физики/Под ред. В.С. Владимирова. – 2-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 432 с.

Книга написана выдающимся советским математиком В.А. Стекловым. Первая часть ее посвящена классической задаче Штурма – Лиувилля. Здесь, в частности, доказывается, что собственные функции задачи Штурма – Лиувилля в случае трех классических типов граничных условий образуют ортонормированный базис пространства L_2 и устанавливаются точные теоремы (теоремы Стеклова) о разложении функций в ряды Фурье по этому базису.

Во второй части книги изучаются основные краевые задачи для трехмерного эллиптического уравнения. В отличие от обычных методов, решения краевых задач представляются в виде рядов по некоторым специальным функциям (функциям Стеклова). Интерес к разложениям в ряды по функциям Стеклова, являющимся далеко идущим обобщением шаровых функций, решений краевых задач для эллиптических уравнений становится все большим и большим.

Первое издание (в двух томах) вышло в 1922, 1923 гг.

Книга может быть полезной для аспирантов и научных работников в области математики и прикладных наук. Она может быть использована и студентами.

Владимир Андреевич Стеклов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редакторы *А.К. Гущин, В.П. Михайлов, М.М. Горячая*
Тех. редактор *С.В. Геворкян*
Корректоры *Т.В. Обод, Т.А. Печко*

ИБ № 11641

Сдано в набор 14.10. 82. Подписано к печати 21.03.83
Бумага 60 Х 90/16 офсетная. Печать офсетная
Усл. печ.л. 27,00. Уч.изд.л. 28,81. Тираж 6600 экз.
Тип.зак. 571 . Цена 2 р. 30 к.

Издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В–71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25

$$С \frac{1702050000 - 076}{053(02)-83} 30\text{-}83$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ В.А. СТЕКЛОВА *)

Владимир Андреевич Стеклов родился 9 января 1864 г. (28 декабря 1863 г. ст. ст.) в Нижнем Новгороде (ныне Горький). Его отец Андрей Иванович, происходивший из среды сельского духовенства, был преподавателем и ректором Нижегородской, а последние два года жизни – Таврическо-Симферопольской духовной семинарии. Мать В.А. Стеклова – Екатерина Алексеевна – родная сестра выдающегося русского критика и публициста Н.А. Добролюбова.

В 1874 г. В.А. Стеклов после достаточной домашней подготовки поступил в первый класс Нижегородского Александровского дворянского института, обучение в котором проводилось по программе гимназий. В течение первых пяти лет пребывания в институте В.А. Стеклов не проявлял особого интереса к учебе. Однако после окончания пятого класса он основательно повторил в течение каникул все гимназические предметы за пятый класс и уже к концу первой четверти шестого класса был в числе лучших учеников. С этого времени В.А. Стеклов не только с интересом изучал обязательные предметы, но и обнаружил способности и стремление к занятиям физикой, химией, математикой. В 1882 г. он окончил институт с серебряной медалью, хотя в его аттестате все оценки были отличные. Золотой медалью не наградили его только потому, что, по мнению педсовета, он начал проявлять "неустойчивость во взглядах и признаки вредного направления", что особенно сказалось в поданном им сочинении на тему "Прекрасный век был век Екатерины".

В том же году В.А. Стеклов поступил на первый курс физико-математического факультета Московского университета. Первый год прошел для него неудачно. Сдав все основные экзамены на "хорошо" и "отлично", он получил неудовлетворительную оценку по физической географии. После этой неудачи В.А. Стеклов предполагал перевестись на медицинский факультет, но мест не оказалось, и тогда он поступает на первый курс математического факультета Харьковского университета.

В 1885 г. в Харьковский университет переехал из Петербурга молодой приват-доцент, талантливый математик и механик А.М. Ляпунов (1857 – 1918), ученик П.Л. Чебышева (1821 – 1894), незадолго перед этим защитивший в Петербургском университете магистерскую диссертацию "Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости". Вскоре В.А. Стеклов становится ближайшим учеником А.М. Ляпунова, и это

*) Более подробное изложение и полная библиография трудов В.А. Стеклова содержатся в очерке В.С. Владимирова и И.М. Маркуша "Владимир Андреевич Стеклов – ученый и организатор науки". (М.: Наука, 1981, 96 с.)

определило, по существу, всю его дальнейшую научную деятельность. Между учителем и учеником установились тесные контакты, тем более что и по возрасту разница между ними была лишь неполных семь лет. До конца дней своих В.А. Стеклов сохранил чувство исключительного уважения к своему учителю.

В 1887 г. В.А. Стеклов окончил Харьковский университет и был оставлен Ляпуновым при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1889 г. появилась первая печатная работа В.А. Стеклова. С этого времени научное творчество стало неизменной и привычной частью его жизни. Одновременно с научными занятиями В.А. Стеклов продолжал подготовку к магистерскому экзамену, который успешно сдал осенью 1890 г. В том же году он женился на О.Н. Дракиной.

С 1891 г. В.А. Стеклов был допущен к чтению лекций в Харьковском университете в качестве приват-доцента. Он начал читать курс теории упругости – именно этим предметом он больше всего занимался в то время. Нужно отметить, что интересы В.А. Стеклова с самого начала его научной деятельности были очень разнообразными. Наряду с исследованиями по теории упругости, он уже тогда выполнил несколько работ по гидродинамике и высшей алгебре. По результатам некоторых из этих исследований он в 1893 г. успешно защитил диссертацию "О движении твердого тела в жидкости"*) и в 1894 г. получил степень магистра прикладной математики.

Осенью 1893 г. В.А. Стеклов получил приглашение занять должность преподавателя теоретической механики в Харьковском технологическом институте. В 1896 г. В.А. Стеклов назначается исполняющим должность экстраординарного профессора по кафедре механики Харьковского университета. Здесь он читает курсы по теории упругости, по теоретической механике, по линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами и др.

Примерно с 1895 г. В.А. Стеклов обращается преимущественно к исследованию вопросов математической физики, и до конца своей жизни наибольшее внимание он уделяет именно этой области математики – к ней относятся самые важные его исследования. Однако позже он неоднократно возвращается к вопросам механики (гидродинамика, аналитическая механика), а также значительно расширяет тематику своих математических исследований (теория замкнутости, ортогональные многочлены, асимптотические разложения, квадратурные формулы).

В 1902 г. В.А. Стеклов получил степень доктора прикладной математики после защиты диссертации "Общие методы решения основных задач математической физики"**). Вскоре после этого ему было присвоено звание ординарного профессора Харьковского университета. К этому времени он имел уже около 45 печатных работ и стал известным ученым. С 1902 по 1906 г. В.А. Стеклов был председателем Харьковского математического общества, сменив на этом посту А.М. Ляпунова.

В 1902 г. Петербургская Академия наук избрала В.А. Стеклова своим членом-корреспондентом.

---

*) Харьков, 1893, XVI + 234 с.

**) Изд-во ХМО, 1901, (2), VI + 291 с.

Еще в Харьковский период проявилось исключительное мастерство В.А. Стеклова как педагога и организатора учебных занятий. О высоком качестве его лекций в Харьковском технологическом институте можно судить по сохранившемуся литографированному курсу лекций "Теоретическая механика" *). Курс лекций содержит прекрасное изложение сведений по механике, необходимых будущему ученому и инженеру. В нем излагались некоторые разделы математики, не входившие в принятые тогда программы, но необходимые для глубокого изучения механики, – элементы векторной алгебры и векторного анализа, сведения о криволинейных интегралах и др. Изложение механики на основе векторной алгебры и векторного анализа было новым явлением для того времени.

По предложению В.А. Стеклова вместо так называемых "репетиций" (промежуточных экзаменов) в Харьковском технологическом институте были введены практические занятия, на которых решались задачи, способствовавшие развитию интереса к изучаемому предмету. На этих занятиях давались дополнительные разъяснения наиболее трудных мест курса. Такие практические занятия сохранились и до наших дней, и польза их хорошо известна.

В 1904 г. В.А. Стеклова избирают деканом математического факультета Харьковского университета. С этого времени он принимает особенно активное участие в университетских делах, участвует в выработке нового университетского устава и т.д. Его деятельность в этой области нашла отражение в ряде заметок, помещенных в "Трудах совещания по выработке университетского устава при Министерстве народного просвещения" (1906 г.).

Господствовавшая в семье атмосфера почитания памяти Николая Добролюбова, чья жизнь была настоящим подвигом, в немалой степени способствовала формированию у В.А. Стеклова характерной для него с юных лет черты – высокого чувства гражданственности. Всякое дело, большое или малое, за которое брался В.А. Стеклов, он всегда выполнял с большим трудолюбием, упорством и тщательностью. В.А. Стеклов не ограничивался простым присутствием на заседаниях, а неутомимо работал, выступал, составлял проекты, докладные записки, особые мнения и т.д. При этом он всегда проявлял большую эрудицию, самостоятельность и принципиальность, не терпел фальши и несправедливости.

В бурный 1905 г. в Харьковском университете начались выступления политического характера, университет оказался в центре революционных волнений. Совместно с другими деканами и ректором университета В.А. Стеклов предпринимал активные меры для предотвращения кровопролития студенческой молодежи.

В 1906 г. В.А. Стеклов принял предложение занять должность ординарного профессора кафедры математики в Санкт-Петербургском университете. Появление В.А. Стеклова в Петербургском университете активизировало учебную и научную жизнь физико-математического факультета. По предложению В.А. Стеклова были введены регулярные практические занятия, здесь он читает курсы по обыкновенным дифференциальным уравнениям и по уравнениям в частных производных. Вокруг В.А. Стеклова довольно

*) Харьков, 1901 (1), 370 с.

быстро организовалась группа талантливых студентов, занятиями которых он руководил.

Для характеристики педагогической деятельности В.А. Стеклова приведем отзыв его ученика В.И. Смирнова*): "Он не любил касаться общих вопросов о методах и целях математики, предпочитая показывать эту математику в действии, но делал это так, что в результате у слушателей получалось впечатление не отдельных теорем и терминов, а чего-то цельного. Достигал этого В.А. теми замечаниями, весьма краткими, но чрезвычайно ценными, которыми он обычно сопровождал доказательство теорем и решение примеров. Особенно, я думаю, памятны слушателям лекции В.А., посвященные уравнениям в частных производных, где В.А. знакомил нас и с некоторыми современными методами и задачами математической физики.

Требовательный к себе, он был требователен и к другим. От своих непосредственных учеников он требовал посильной, но безусловно самостоятельной научной работы с самого начала. Но вместе с тем он не признавал и узкой специализации без достаточно широкого математического образования".

Здесь, на базе Петербургской математической школы, созданной П.Л. Чебышевым, В.А. Стеклов создает первую в нашей стране школу математической физики. Под непосредственным руководством В.А. Стеклова выросли такие ученые, как В.В. Булыгин (1888 – 1918), А.Ф. Гаврилов (1887–1961), М.Ф. Петелин (1886–1921), В.И. Смирнов (1887–1974), Я.Д. Тамаркин (1888–1945), А.А. Фридман (1888–1925), Я.А. Шохат (1886–1944) и др. Большое влияние на создание и научную деятельность школы В.А. Стеклова имели работы А.М. Ляпунова. Н.М. Гюнтер (1871–1941) стал деятельным помощником В.А. Стеклова в организации школы математической физики; дальнейшая его научная деятельность проходила под сильным влиянием идей Стеклова.

Плодотворной и многогранной была деятельность В.А.Стеклова и созданной им школы. Характерной чертой его научного творчества было объединение глубоких теоретических исследований с практическим применением математических методов к естествознанию. Наиболее важные результаты В.А. Стеклов получил, как уже отмечалось, в математической физике. Большинство работ В.А. Стеклова (а их – свыше 150) относится к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Он впервые дал строгое обоснование метода Фурье решения смешанной задачи для уравнений колебания неоднородной струны и охлаждения неоднородного твердого стержня. В.А. Стеклов построил асимптотические выражения для собственных функций задачи Штурма – Лиувилля и для разложения произвольной функции по собственным функциям получил те же общие условия разложимости, что и для обычного тригонометрического ряда Фурье.

Важные результаты, достигнутые В.А. Стекловым, относятся к вопросам разрешимости и представления решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа при минимальных для своего времени предположениях о границе области и о граничных функциях.

Особенно выдающихся успехов В.А. Стеклов добился в разработке теории замкнутости ортогональных систем функций, подойдя вплотную к по-

---

*) Памяти В.А. Стеклова/Сб. статей. – Л.: Изд-во АН СССР, 1928, с. 17.

нятию гильбертова пространства. Теории замкнутости и ее применениям в математической физике и анализе он посвятил много работ, начиная с 1896 г. и до конца своей жизни. Вот что пишет по этому поводу известный немецкий математик А.Кнезер*): "Уравнение замкнутости вполне может быть названо излюбленной формулой Стеклова, это уравнение можно бы назвать формулой Стеклова, так как он, превзойдя А. Гурвица, впервые строго доказал его для других случаев"**). В силу сказанного представляется справедливым условие замкнутости, называемое в настоящее время равенством Парсеваля, назвать равенством Парсеваля – Стеклова.

Разработанная В.А. Стекловым плодотворная идея усреднения (сглаживания) функций привела к понятию функции множеств и, вообще, обобщенной функции и прочно вошла в аппарат современной математической физики и анализа. В.А. Стеклов установил и систематически пользовался простейшими теоремами вложения функциональных пространств.

Работы В.А. Стеклова совпали с переломным моментом в истории математической физики. Уточняя старые и создавая новые методы, он вступал на новые пути математического исследования, предвосхищая плодотворные идеи современной математики – математики второй половины XX в.

В Петербургском университете В.А. Стеклов много внимания уделял организации университетской жизни.

Не прошло и года работы В.А. Стеклова на новом месте, как он выступил на заседании Совета Петербургского университета с предложением отказаться от выборов представителя от университета и Академии наук в Государственный совет, категорически высказывался против введения в Петербургском университете профессорского дисциплинарного суда, выступал с протестом против допуска в здание университета полиции и против произведенных ею арестов во время студенческих сходок, вносил предложение отменить запрещение свободного доступа в лекторий университета лицам, оставленным для подготовки к профессорскому званию.

В 1910 г. В.А. Стеклова избирают адъюнктом Академии наук, а в 1912 г. – ординарным академиком. Однако он не покидает своей деятельности в университете. Только с 1916 г., когда его избирают членом правления Академии наук, он начинает отходить от университета, а в 1919 г., после избрания его вице-президентом Академии наук, прекращает там чтение своих лекций. С этого времени начинается напряженнейшая работа В.А. Стеклова в Академии наук.

Существенные изменения в Академии наук произошли вскоре после Февральской революции. В мае 1917 г. Императорская Академия наук была переименована в Российскую Академию наук. Тогда же впервые в истории этого научного учреждения академики сами избрали президента Российской Академии наук. Президентом стал академик А.П. Карпинский.

Примерно в середине 1917 г. в Академии наук определилась группа ученых, стремившихся приблизить науку к народу и усилить ее влияние на жизнь общества. В этом движении, вдохновителем которого был А.М. Горький, принял самое активное участие и В.А. Стеклов. Избрание именно тако-

---

*) A. K n e s e r. Wladimir Stekloff zum Gedächtnis. – Jahresb. der Deutsch. Mathem.-Verein., B. – Z., 1929, Bd 38, Heft 9–10, S. 206–231.

**) А. Гурвиц доказал замкнутость тригонометрической системы функций.

го человека вице-президентом Академии наук (1919 г.) явилось большим событием в ее жизни. На плечи В.А. Стеклова легло бремя больших забот, связанных с ростом и обновлением Академии наук. В суровое время гражданской войны, несмотря на большие трудности, научная работа не прекращалась. Добиваясь расширения исследований в области физико-математических наук, В.А. Стеклов в январе 1919 г. совместно с академиками А.А. Марковым и А.Н. Крыловым поставил вопрос об организации в Академии наук специального Математического кабинета. Задачи его были сформулированы в записке, с которой эти ученые обратились к Физико-математическому отделению. Математический кабинет (ему были присвоены имена П.Л. Чебышева и А.М. Ляпунова) начал свою работу в 1919 г., его возглавил В.А. Стеклов. Он передал этому кабинету личную библиотеку.

В январе 1921 г. В.А. Стеклов представил в Физико-математическое отделение развернутую записку, в которой, обосновывая настоятельную необходимость организации при Российской Академии наук Физико-математического института, он, ссылаясь на М.В. Ломоносова, писал*): "Ни одна из естественных наук, если дело идет не о собирании сырого материала, а о действительном творчестве, не обойдется без математики, матери всех наук. Что же касается физики, поставленной впереди всех других наук, как и следует в проекте Ломоносовского института, то в настоящее время математика и физика до такой степени слились в одно целое, что иногда трудно отделить – где кончается математика и начинается физика".

Предложение В.А. Стеклова нашло единодушную поддержку в Академии наук, и в 1921 г. был организован Физико-математический институт Российской Академии наук ввиду "назревшей в науке потребности связать теснейшим образом физические науки с чисто математическими". Директором его был избран В.А. Стеклов. В состав института вошли Математический кабинет, Физическая лаборатория и Сейсмическая сеть, на базе которых были организованы соответствующие отделы. Физико-математический институт просуществовал до 1934 г.**). В 1934 г. 11 марта постановлением Отделения математических и естественных наук, которое было 28 апреля утверждено Общим собранием АН СССР, он был разделен на два самостоятельных института: Математический институт им. В.А. Стеклова***), руководимый И.М. Виноградовым, и Физический институт им. П.К. Лебедева во главе с С.И. Вавиловым.

Для переговоров по делам науки В.А. Стеклов неоднократно встречался с В.И. Лениным и А.В. Луначарским. По свидетельству М. Горького****) Владимир Ильич с большой симпатией отзывался о Владимире Андреевиче, назвал его "русским Архимедом".

В.А. Стеклов был одним из инициаторов и организаторов Особого Временного комитета науки при СНК СССР. При непосредственном участии

---

*) Протоколы заседаний Физико-математического отделения Российской Академии наук, 1921.

**) Имя В.А. Стеклова было присвоено Физико-математическому институту в 1926 г. сразу после смерти Владимира Андреевича.

***) Фактическим началом организации Математического института им. В.А. Стеклова следует считать дату 28 ноября 1932 г., когда директором Математического института был избран академик И.М. Виноградов.

****) М. Горький. Собр. соч. в 30 томах. – М., 1952, т. 17, с. 31–32.

В.А. Стеклова Комитет разработал и провел в жизнь ряд постановлений правительства, способствовавших росту как самой Академии наук, так и других научных учреждений страны.

В трудные годы гражданской войны В.А. Стеклов принимал активное участие в работе по изучению Курской магнитной аномалии, приведшему к открытию громадных залежей железной руды. Он заведовал теоретической и вычислительной частью экспедиции северного района КМА. В.А. Стеклов состоял членом Комиссии по изучению производительных сил страны при Госплане, Постоянной комиссии по изучению тропических стран, был активным деятелем двух комитетов – Комитета по делам Главной Российской астрономической обсерватории и Комитета по делам Российского гидрологического института. В.А. Стеклов был председателем Постоянной сейсмической комиссии, принимал активное участие в восстановлении и строительстве сети сейсмических станций в стране. В.А. Стеклов принимал деятельное участие в подготовке нового Устава Академии наук, который был почти без поправок принят в 1927 г. (спустя год после смерти В.А. Стеклова). В.А. Стеклов оказывал большое влияние на строительство в Академии наук, будучи членом Строительной комиссии. Наконец В.А. Стеклов был членом издательской комиссии Академии наук и входил в Международную комиссию по изданию трудов Л. Эйлера, постоянное местопребывание которой было в Цюрихе (Швейцария).

На основе этого краткого перечня обязанностей В.А. Стеклова можно составить лишь самое общее, далеко не полное представление о его научно-организационной и общественной деятельности после революции.

Большим событием последних лет жизни В.А. Стеклова была командировка на Международный математический конгресс, проходивший в августе 1924 г. в Торонто (Канада). На конгрессе В.А. Стеклов сделал два доклада – "О задачах представления функций при помощи полиномов..."*) и "О посмертных трудах А.М. Ляпунова о формах равновесия вращающейся неоднородной жидкости"**).

На этом конгрессе В.А. Стеклов подружился с профессором Дж. Филдсом, президентом конгресса. Там же в торжественной обстановке была присуждена В.А. Стеклову степень почетного доктора Торонтского университета за выдающиеся работы по математике.

Отметим попутно, что В.А. Стеклов был также членом многих математических обществ: Харьковского, Московского, Петербургского-Ленинградского, в Палермо, членом-корреспондентом Академии наук в Геттингене, члено Германского сейсмологического общества в Иене.

Командированный в июне и октябре 1925 г. в Германию, Италию и Австрию, В.А. Стеклов посещал там научные учреждения, встречался с видными учеными и вел переговоры об укреплении научных связей. В Германии В.А. Стеклов, в частности, имел беседы с непременным секретарем Берлинской Академии наук М. Планком.

Эти заграничные поездки В.А. Стеклова и участие его вместе с другими советскими математиками в работе конгресса способствовали повышению авторитета и влияния советской математики за рубежом.

---

*) Proc. IMC, Toronto, august 11 – 16. – 1924, vol. 1, p. 631 – 640.

**) Там же, vol. 2, p. 23 – 30.

В 1925 г. исполнилось 200 лет со дня основания Академии наук. В.А. Стеклов приложил много труда и энергии, чтобы этот юбилей превратился в подлинный праздник советской науки.

Ведя большую научно-организационную работу, В.А. Стеклов продолжает интенсивно заниматься (преимущественно в ночное время) научной деятельностью. Продолжая свои исследования по теории замкнутости, по разложениям функций по ортогональным многочленам, В.А. Стеклов публикует также свои знаменитые работы по квадратурным формулам (1916 – 1919 гг.)*). В 1922 – 1923 гг. вышло в свет его сочинение "Основные задачи математической физики"**), подводящее итог его многолетних исследований по математической физике. Создает учебник "Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений"***).

Еще в молодые годы В.А. Стеклов часто задумывался над тем, какая роль принадлежит математике в материальном и культурном развитии общества. Уже с первых дней Февральской революции В.А. Стеклов вместе с А.М. Горьким начал активную деятельность в области популяризации науки. С этого же времени он начал обработку своих заметок историко-математического и философского характера.

В.А. Стеклов всегда стремился приблизить науку к народу, усилить ее влияние на жизнь общества. При этом он имел в виду не только прикладную роль науки. "Наука, – говорил он, – есть нравственный образователь человечества".

В 1920 г. В.А. Стеклов закончил работу над книгой на историко-философскую тему "Математика и ее значение для человечества"****). Говоря о задачах своей книги, он писал: "Я хотел, с одной стороны, в кратком историческом обозрении установить теснейшую связь математики со всеми философскими системами, начиная с древнейших, показать, что именно математика всегда являлась и является источником философии, что она создала философию и может быть названа "матерью философии".

С другой стороны, я пытался последовательно в общих чертах проследить движение философской мысли в решении вопроса о происхождении и достоверности человеческого знания . . . и, в частности, вопроса о происхождении и характере основных положений геометрии" (с. 30 – 31).

Развитие математической науки В.А. Стеклов рассматривал с позиций философа-материалиста. Краткий исторический обзор развития математики и ее влияния на философию написан блестяще, точным и лаконичным языком математика. В.А. Стеклов приходит к выводу, что математика является источником философии.

Излагая собственные воззрения, В.А. Стеклов утверждает, что все явления, происходящие в природе и в обществе, должны со временем стать объектами математики. Математика возникает и развивается на основе опыта, в результате практической деятельности людей. Он отвергает взгляд Э. Канта на математику как на априорную науку, вытекающую из свойств чистого разума, и выступает против кантовского агностицизма с его невозможностью познания "вещей в себе".

---

*) ИАН, серия 6, 1916 – 1919, т. 10 – 13.

**) Петроград, ч. I, 1922, IV + 285 с.; ч. II, 1923, II + 285 с.

***) Госиздат, 1927, X + 419 с.

****) Госиздат, 1923, 137 с.

В.А. Стеклов считал, что основы всех наук, в том числе и чистой математики (к которой он относил арифметику, алгебру и частично геометрию), созданы путем длительного ряда опытов и наблюдений и обобщения замеченных на многих частных случаях общих закономерностей. Особую роль он придавал интуиции как одной из форм познания. В.А. Стеклов писал: ". . . Здесь проявляется, на наш взгляд, особая способность человеческого ума, составляющая основу его творчества и одно из орудий открытия и изобретения, та способность которую называют теперь интуицией, хотя и придают этому термину не всегда именно то значение, о котором мы сейчас говорим . . ." (с. 104). Дальше он пишет: ". . . Метод открытия и изобретения у всех один и тот же, та же интуиция, ибо при помощи логики никто ничего не открывает; силогизм может только приводить других к признанию той или другой уже заранее известной истины, но, как орудие изобретения, бессилен . . . Математик иногда наперед высказывает весьма сложное положение, совершенно не очевидное, и затем начинает доказывать его . . . В изобретении чуть ли не каждого шага доказательства играет роль не логика, а все та же интуиция, которая идет поверх всякой логики" (с. 110).

Заканчивая свою книгу, В.А. Стеклов высоко оценивает вклад великих русских математиков: "Изложенное выше направление в теории познания внешнего мира создано исключительно гениями математической мысли, среди которых одно из первых мест принадлежит русским математикам, а из этих последних первое место занимают Н.И. Лобачевский и П.Л. Чебышев" (с. 137).

В.А. Стеклов был большим мастером научно-художественной прозы: им написаны две книги научно-биографического характера: "Михайло Васильевич Ломоносов"*) и "Галилео Галилей"**), а также статьи и очерки о жизни и деятельности П.Л. Чебышева, Н.И. Лобачевского, М.В. Остроградского, А.А. Маркова, А. Пуанкаре, В. Томсона и др.

Большие способности В.А. Стеклова проявились и в художественной прозе. Его перу принадлежат книга "В Америку и обратно. Впечатления"***) и повествования о своей жизни****).

Еще в харьковский период деятельности В.А. Стеклов установил широкие научные связи как с зарубежными, так и с отечественными учеными. Об этом, в частности, свидетельствует обширная переписка с зарубежными учеными, в том числе с такими выдающимися математиками, как А. Пуанкаре, К. Жордан, Д. Гильберт, Ж. Адамар, Т. Леви-Чивита, Э. Пикар, А. Хаар, Э. Ландау, В. Вольтерра, С. Заремба, А. Корн, А. Кнезер и др. В Ленинградском отделении архива АН СССР сохранились большое количество писем отечественных и зарубежных ученых к В.А. Стеклову и часть его собственных писем-черновиков. Эти письма интересны как своим научным содержанием, так и имеющимся в них историческим материалом. Переписка В.А. Стеклова и А. Кнезера недавно опубликована*****).

---

*) Госиздат, 1923, 203 с.

**) Госиздат, 1923, 103 с.

***) "Время", 1925, 146 с.

****) Ленинградское отделение архива Академии наук СССР, ф.165, оп. 1 – 5.

*****) В.А. Стеклов. А.Кнезер. Научная переписка (1901–1925). – М.: Наука, 1980.

Осенью 1920 г. умерла жена В.А. Стеклова – Ольга Николаевна. Смерть жены была тяжелым ударом для В.А.Стеклова: он стал более замкнутым, более суровым.

Осенью 1925 г. во время празднования 200-летнего юбилея Академии наук В.А. Стеклов простудился, но, как всегда, перенес болезнь на ногах. Несмотря на его крепкое здоровье, последствия оказались роковыми. Поездка на лечение в Италию не помогла, состояние его здоровья не улучшалось.

23 февраля 1926 г. отмечалось 100-летие со дня открытия Н.И. Лобачевским неевклидовой геометрии. В.А. Стеклов, высоко чтивший великого ученого, присутствовал на торжествах в Казани. Поездка в Казань еще более ухудшила состояние его здоровья. В мае 1926 г. В.А. Стеклов решает уехать в Крым лечиться, предполагая пробыть там один месяц. Однако судьба распорядилась иначе: 30 мая в Гаспре В.А. Стеклов внезапно скончался. Похоронен В.А. Стеклов на Волковом кладбище в Ленинграде.

Имена и дела ученых подвергаются испытанию временем. Сохраняется и развивается лишь то, что служит прогрессу и практической деятельности людей. Труды В.А. Стеклова, бесспорно, выдерживают такое испытание. Они оказали и продолжают оказывать большое влияние на дальнейшее развитие математики и механики. Вспоминая о В.А. Стеклове, А.Н. Крылов в 1936 г. писал*): "... его можно причислить к той группе знаменитых русских математиков, в которую входят Остроградский, Чебышев и Ляпунов".

В.С. Владимиров

---

*) А.Н. Крылов. Памяти В.А. Стеклова. – В кн.: Воспоминания и очерки. – М.: Изд. АН СССР, 1956, с. 396 – 398.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию читателя сочинение В.А. Стеклова "Основные задачи математической физики" было издано в Петрограде в двух частях: часть первая (1922 г.) посвящена одномерным краевым задачам и часть вторая (1923 г.) – теории потенциала в пространстве*). Это первое посмертное переиздание Академией наук СССР избранного труда академика В.А. Стеклова. В этом сочинении подводится итог его многолетних исследований по математической физике, начатых еще в 1896 г.

В части I (гл. III) В.А. Стеклов перечисляет основные задачи математической физики и соответствующие им краевые задачи для дифференциальных уравнений распространения тепла, распространения звука (электродинамики и т.д.) и установившихся физических процессов для областей одного, двух или трех измерений. Изложенная В.А. Стекловым схема постановок краевых задач соответствует современной: на основе физических гипотез о сущности физического процесса выводятся дифференциальные уравнения, к ним добавляются краевые условия: начальные условия (описывающие начальное состояние процесса) и граничные условия (описывающие режим на границе области, где происходит процесс). Задачи математической физики В.А. Стеклов рассматривает как математические**) модели физических процессов. Необходимые требования, которые он предъявляет к задачам математической физики, состоят в том, что решение должно существовать и быть единственным. Впоследствии Ж. Адамар добавил к этим условиям еще условие непрерывной зависимости решения от данных задачи, выделив важный вопрос так называемых корректно поставленных задач математической физики.

Для решения одномерных краевых задач В.А. Стеклов использует метод Фурье разделения переменных***) (гл. IV и XI). Для обоснования метода Фурье он ставит и решает две задачи: (A) задача на собственные значения, (B) разложение по собственным функциям (гл. IV).

Задача (A) состоит в доказательстве существования бесконечного (счетного) множества собственных чисел λ_k (считаем $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$) и им соответствующих собственных функций $V_k(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$V''_k(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\, V_k(x) = 0, \quad a < x < b, \tag{1}$$

---

*) В. А. Стеклов предполагал написать и часть третью, посвященную теории фундаментальных функций.

**) Иногда он говорит о механических моделях.

***) В.А. Стеклов также называет его методом Эйлера – Бернулли.

и граничным условиям (первого класса) *)

$$V_k'(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \quad V_k'(a) = \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b) \tag{2_1}$$

или (второго класса)

$$V_k(b) = \rho V_k(a), \quad V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a) + \tau V_k(a). \tag{2_2}$$

Граничным условиям (2_1) или (2_2) соответствуют три предельных класса (когда некоторые из постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ и τ обращаются в ∞) :

$$V_k(a) = 0, \quad V_k(b) = 0, \tag{$2'$}$$

$$V_k'(a) = \gamma V_k(a), \quad V_k(b) = 0, \tag{$2''$}$$

$$V_k(a) = 0, \quad V_k'(b) = \beta V_k(b). \tag{$2'''$}$$

При перечисленных граничных условиях собственные функции $V_k(x)$ и $V_i(x)$, соответствующие различным собственным значениям, удовлетворяют условию ортогональности с весом $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) V_k(x) V_i(x)\, dx = 0 \quad \left(\int_a^b p(x) V_k^2(x)\, dx = 1 \right). \tag{3}$$

Для исследования задачи (А) В.А. Стеклов применяет и развивает метод Шварца – Пуанкаре (гл. V – VII). Идея этого метода состоит в следующем: ищем решение неоднородного уравнения

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) + f(x) = 0, \quad f \in C([a, b]), \tag{4}$$

удовлетворяющее одному из граничных условий (2), в виде ряда по степеням λ:

$$V(x, \lambda) = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \ldots, \tag{5}$$

где $v_k(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} &v_k''(x) - q(x)\, v_k(x) + p(x)\, v_{k-1}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ &v_0''(x) - q(x)\, v_0(x) + f(x) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

и соответствующим граничным условиям.

Доказывается регулярная сходимость ряда (5) в круге $|\lambda| < \rho$, где

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}, \quad W_k = \int_a^b p(x) v_k^2(x)\, dx. \tag{7}$$

При этом решение $V(x, \lambda)$ есть мероморфная функция λ с простыми вещественными полюсами $\lambda = \lambda_k$ и вычетами $c_k V_k(x)$ (или соответствующими линейными комбинациями, если кратность λ_k равна 2). При этом $\rho =$ $= |\lambda_1|$. Если выбрать $f(x)$ такой, что

$$\int_a^b p(x) f(x)\, V_1(x)\, dx = 0, \tag{8}$$

то соответственно $\rho = |\lambda_2|$ и т.д.

---

*) Эта задача при $\alpha = 0$, $\beta \leqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$ называется задачей Штурма – Лиувилля.

Изложенный метод Шварца – Пуанкаре В.А. Стеклов применяет и для решения задачи (B) о разложении функции $f(x)$ в ряды Фурье по собственным функциям $V_k(x)$ (гл. IX):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx. \tag{9}$$

Сначала доказывается регулярная сходимость ряда (9) для функций $f(x)$, удовлетворяющих граничным условиям и таких, что $f''(x)$ интегрируема (по Риману) на (a, b). Далее, пользуясь созданными В.А.Стекловым теорией замкнутости (гл. II) и методом усреднения (гл. I), он распространяет теоремы разложения на более широкие классы функций. В результате он доказывает, что ряд (9) сходится равномерно для всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица*) в случае граничных условий (2_1) и при дополнительных граничных условиях: $f(b) - \rho f(a) = 0$ в случае (2_2), $f(a) = f(b) = 0$ в случае $(2')$, $f(b) = 0$ в случае $(2'')$, $f(a) = 0$ в случае $(2''')$ (гл. IX).

При некоторых дополнительных предположениях относительно чисел α, β, γ, ρ и τ и функций $p(x)$ и $q(x)$, обеспечивающих неотрицательность собственных значений λ_k, доказывается регулярная сходимость ряда (9) и дается оценка погрешности, если $f(x)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям (гл. X).

При этих же предположениях в главе XI доказывается существование и единственность решения смешанной задачи

$$p(x) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x) U, \quad U\big|_{t=0} = f(x) \tag{10}$$

(с граничными условиями типа (2)) и представимость его в виде ряда Фурье по собственным функциям $V_k(x)$:

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k(x). \tag{11}$$

Для смешанной задачи

$$p(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x) U, \quad U\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = f_1(x) \tag{12}$$

(с граничным условием (2_1) при $\beta \leqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha^2 + \beta\gamma \leqslant 0$) доказывается существование и единственность решения и представимость его в виде ряда Фурье по собственным функциям $V_k(x)$

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t) V_k(x), \tag{13}$$

где

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx \tag{14}$$

при более ограничительных условиях: $f(x)$ и $f_1(x)$ принадлежат классу

*) В.А. Стеклов называет это условие условием Коши.

$C^1([a, b])$ и удовлетворяют граничным условиям (2_1), $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица на (a, b), а $f_1''(x)$ интегрируема на (a, b); $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ удовлетворяют условию Липшица на (a, b).

Аналогичный результат получен и для граничных условий $(2')$. В этом случае дополнительно требуется: $f''(a) = f''(b) = 0$.

В главах VIII и X В.А. Стеклов указывает на важность условий ортогональности (3) для справедливости развитой им теории и приводит соответствующие примеры. Хотя в то время в математической физике и не встречались несамосопряженные задачи, В.А. Стеклов указывает на интерес к таким задачам с точки зрения чистого анализа, разработки особых более общих методов. Здесь он ссылается на труды О. Коши, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофа и др.*)

Часть II посвящена исследованиям задач Дирихле, Неймана и Робена**) в трехмерном пространстве, выполненным В.А. Стекловым за период 1896–1902 гг.

Напомним, что задача Дирихле состоит в нахождении гармонической функции $U(x)$ в области D, непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$ и принимающей на границе ее S заданные значения f. Задача Неймана состоит в нахождении гармонической функции $U(x)$ в D, для которой правильная нормальная производная $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ существует на S и принимает заданные (непрерывные) значения g. Аналогично ставятся и внешние задачи Дирихле и Неймана, причем на бесконечности требуется выполнение условий***)

$$U(x) = O(1/|x|), \quad \operatorname{grad} U(x) = O(1/|x|^2), \quad |x| \to \infty. \tag{15}$$

Задача Робена состоит в нахождении плотности ρ^* на S, потенциал простого слоя которой есть величина постоянная в области D (задача о равновесии электричества на проводнике S).

Глава I носит подготовительный характер и посвящена изучению общих свойств гармонических функций, а также объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоев. Для поверхностей Ляпунова****) (с показателем $\alpha = 1$) даются доказательства основных теорем Ляпунова. В частности, получено достаточное условие на плотность, при котором потенциал двойного слоя имеет правильные нормальные производные (четвертая теорема Ляпунова). Приведен пример, показывающий, что это условие неулучшаемо.

Решение задач Робена и Неймана для выпуклых поверхностей Ляпунова содержится в главе II.

Задача Робена сводится к нахождению ненулевого решения однородного интегрального уравнения

$$\rho^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \rho^*(x') \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds, \quad x \in S, \tag{16}$$

---

*) Дальнейшее развитие теория несамосопряженных операторов для дифференциальных уравнений получила в трудах М.В. Келдыша. Им было введено важное понятие m-кратной полноты.

**) Задачи Неймана и Робена В.А. Стеклов называет также основными задачами гидродинамики и электростатики соответственно.

***) Условия (15) являются следствием гармоничности $U(x)$ и условия $U(\infty) = 0$.

****) Термин введен В.А. Стекловым.

где $r = |x - x'|$ и ψ — угол между направлением (внешней) нормали n в точке $x \in S$ и направлением $x - x'$. Решение интегрального уравнения (16) строится методом последовательных приближений с помощью итераций

$$\rho_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \rho_{k-1}(x') \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad k = 1, 2, \ldots, x \in S, \tag{17}$$

где $\rho_0(x)$ — произвольная функция на S, удовлетворяющая условию

$$\int_S \rho_0(x)\, ds = M > 0, \tag{18}$$

и тогда, в силу формулы Гаусса,

$$\int_S \rho_k(x)\, ds = \int_S \rho_0(x)\, ds = M. \tag{19}$$

Следуя Стеклову, будем говорить, что поверхность Ляпунова удовлетворяет *принципу Робена*, если существует такое число $\tau \in (0, 1)$, что для любой ρ_0 итерации ρ_k удовлетворяют неравенству

$$|\rho_k(x) - \rho_{k-1}(x)| \leqslant N\tau^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad x \in S, \tag{20}$$

при некотором $N = N(\rho_0) > 0$. (Доказывается, что выпуклые поверхности Ляпунова удовлетворяют принципу Робена.)

Для поверхностей S, удовлетворяющих принципу Робена, итерации $\rho_k(x)$ сходятся равномерно на S, определяя непрерывную функцию*)

$$\rho^* = \lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots \tag{21}$$

на S — решение интегрального уравнения (16). При этом для любого M при условии

$$\int_S \rho^*(x)\, ds = M$$

задача Робена разрешима однозначно.

Таким образом, В.А. Стеклов, видоизменив метод Робена, полностью доказал существование ненулевого решения ρ^* задачи Робена.

Аналогично решаются и задачи Неймана — внутренняя и внешняя. Решение внутренней задачи Неймана ищется в виде потенциала простого слоя

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\rho(x')}{r} ds \tag{22}$$

с неизвестной плотностью ρ. Плотность находится с помощью итераций ρ_k, определяемых равенством (17) с $\rho_0 = g$, по формуле

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots \tag{23}$$

При выполнении необходимого условия разрешимости

$$\int_S g\, ds = \int_S \rho_0\, ds = 0 \tag{24}$$

*) Для выпуклых поверхностей Ляпунова S функция ρ^* положительна. Этот результат вытекает также и из теоремы Ентча.

(и тогда в силу (19)

$$\int_S \rho_k \, ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots\ ) \tag{25}$$

для поверхностей S, удовлетворяющих принципу Робена (20), справедлива оценка

$$|\rho_k(x)| \leqslant N\tau^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad x \in S. \tag{26}$$

Отсюда следует, что ряд (23) сходится регулярно, определяя непрерывную функцию ρ. Этим существование решения и его представимость в виде потенциала простого слоя (22) доказаны.

На языке теории интегральных уравнений формулы (17) и (23) суть не что иное, как последовательные приближения для интегрального уравнения Фредгольма

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \rho(x') \frac{\cos\psi}{r^2} \, ds + g(x), \quad x \in S. \tag{27}$$

При этом $\lambda = 1$ есть характеристическое число ядра $\dfrac{\cos\psi}{2\pi r^2}$ и союзного ядра $\dfrac{\cos\varphi}{2\pi r^2}$ (φ – угол между нормалью n в точке $x' \in S$ и направлением $x - x'$) и ρ^* и 1 – соответствующие собственные функции. Поэтому в соответствии с теоремами Фредгольма возникает условие разрешимости (24) интегрального уравнения (27) и его решение определено с точностью до слагаемого $C\rho^*$. Отсюда, в силу (22), сразу следует, что решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной.

Подчеркнем особо, что сходимость метода последовательных приближений для интегрального уравнения (27) доказана на характеристическом числе. Здесь мы имеем пример глубокого использования специфики задачи.

Решению задач Дирихле (внутренней и внешней) посвящена глава III. Решение внутренней задачи Дирихле ищется в виде потенциала двойного слоя

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(x') \frac{\cos\varphi}{r^2} \, ds \tag{28}$$

с неизвестной плотностью μ. При этом искомая плотность μ представляется в виде ряда

$$\mu = \frac{1}{2} \left[\mu_0 - (\mu_1 - \mu_0) + (\mu_2 - \mu_1) - \ldots\right], \tag{29}$$

где $\mu_0 = f$ и

$$\mu_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu_{k-1}(x') \frac{\cos\varphi}{r^2} \, ds, \quad k = 1, 2, \ldots, x \in S. \tag{30}$$

Доказывается, что для поверхностей S, удовлетворяющих принципу Робена, справедлив и принцип Неймана:

$$|\mu_k(x) - \mu_{k-1}(x)| \leqslant N\tau^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad x \in S, \tag{31}$$

так что для таких поверхностей S внутренняя задача Дирихле разрешима в виде потенциала двойного слоя.

Далее рассматривается задача о представлении решения задачи Неймана в виде потенциала двойного слоя, а также *задача Гаусса* о представлении решения задачи Дирихле в виде потенциала простого слоя. Получено необходимое и достаточное условие на f, обеспечивающее существование у решения задачи Дирихле правильной нормальной производной.

В главе IV рассматриваются простейшие задачи математической физики, сводящиеся к задачам Дирихле или Неймана: о вихревом движении жидкости, об установившейся температуре, построение функций Грина.

Наконец, в главе V доказывается справедливость принципа Робена (20) и, стало быть, всех предыдущих результатов для произвольных поверхностей Ляпунова. Доказательство основывается на фундаментальной теореме Пуанкаре – Зарембы: пусть V_k, $k = 1, 2, \ldots$, – потенциалы простого слоя с непрерывными плотностями; тогда для любого $\epsilon > 0$ существуют такие числа p и α_k, $k = 1, \ldots, p$, что для функции $V = \alpha_1 V_1 + \ldots + \alpha_p V_p$ будут иметь место неравенства

$$(1-\epsilon) \int_{D'} |\operatorname{grad} V|^2 \, dx < \int_{D} |\operatorname{grad} V|^2 \, dx <$$

$$< (1+\epsilon) \int_{D'} |\operatorname{grad} V|^2 \, dx. \tag{32}$$

Следует отметить, что В.А. Стеклов в своих исследованиях не пользуется систематически ни теорией интегральных уравнений, ни теорией интеграла Лебега, хотя знал работы, опирающиеся на эти теории. Применение этих теорий значительно сократило бы изложение, особенно в вопросах существования, и дало бы возможность рассматривать более общие задачи. Отметим в связи с этим, что в части II В.А. Стеклов излагает теорию потенциала по работам 1896 – 1902 гг., когда этих теорий еще не существовало. Кроме того, непосредственное применение теории интегральных уравнений (особенно это касается части I) дает худшие результаты, чем те, которые получены В.А. Стекловым методами, специально приспособленными для рассматриваемых краевых задач.

Далее, многие результаты по математической физике, полученные в течение XIX в., уже не удовлетворяли в конце XIX и начале XX веков новым повышенным требованиям строгости. Уточняя старые и создавая новые методы, В.А. Стеклов закрывает пробелы в доказательствах его предшественников, распространяет результаты на более общие случаи. В этом он видел главную задачу: строго установить саму возможность разрешимости классических краевых задач и вывести нужные свойства решений; рассмотрение же более общих задач, требующих привлечения понятия интеграла Лебега, в то время еще не назрело и предназначалось будущему.

Сочинение В.А. Стеклова "Основные задачи математической физики" не потеряло интерес и для современного читателя: оригинальны методы исследования, например доказательства и применения своеобразных теорем вложения с оценками постоянных в главах IV и V части II, а также интересные исторические экскурсы, показывающие, как развивалась математическая физика в XIX в., как результаты, нестрого доказанные, постепенно становились доказанными строго*).

---

*) В этом отношении развитие математической физики в XIX в. сильно напоминает развитие современной математической физики.

При подготовке настоящего издания большую работу по редактированию провели В.П. Михайлов (часть I) и А.К. Гущин (часть II). Были исправлены явные опечатки, а также мелкие неточности. Эти мелкие неточности, проистекающие из стиля изложения и легко исправляемые по контексту, сводятся к следующим: не всегда оговариваются все условия, не всегда ясно, идет ли речь о замкнутой или открытой области (интервале), о max или sup, о положительной или неотрицательной функции (числе), об убывающей или невозрастающей последовательности, встречаются выражения типа "для каких угодно функций" или "представляется под видом интеграла". Вместе с тем замечено некоторое количество мест (особенно в части II), в которых содержатся погрешности в доказательствах. В этом случае в соответствующих местах авторского текста пришлось сделать изменения с сохранением (по возможности) стиля автора; эти места отмечены в подстрочных примечаниях. Сделано также большое число подстрочных примечаний редакторов с разъяснениями тех или иных мест текста.

2 сентября 1981 г. *В.С. Владимиров*

ЧАСТЬ I

Основные задачи математической физики для тел линейных размеров

ГЛАВА I

Системы ортогональных функций данного вида; нормальные системы; тригонометрические функции; полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля. Разложение функций в тригонометрические ряды и в ряды по полиномам Чебышева. Приближенное представление функций при помощи полиномов. Обобщение теоремы Вейерштрасса

1. Обозначим через $p(x)$ функцию от x, которая остается неотрицательной в промежутке изменения x от a до $b(b>a)$, т.е. сохраняет в этом промежутке либо положительные, либо равные нулю значения, и не равную нулю тождественно. Промежуток изменения какой-либо переменной от a до b $(b>a)$ будем обозначать через $[a, b]$. Функцию $p(x)$ будем предполагать интегрируемой в обобщенном смысле Римана *) в промежутке $[a, b]$

Обозначим через

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{1}$$

ряд (ограниченный или неограниченный) функций, вполне определенных и непрерывных в промежутке $[a, b]$.

Если функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условиям

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m, \tag{2}$$

то мы будем называть совокупность функций (1) *ортогональной системой по отношению к функции* $p(x)$, а эту последнюю – *характеристической функцией ортогональной системы* (1).

Если функции $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ удовлетворяют условиям

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_k^2(x)\,dx = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

то такую систему будем называть *нормальной*.

2. Обозначим теперь через $f(x)$ функцию, которая может обращаться и в ∞ в некоторых точках промежутка $[a, b]$, но интегрируемую в этом промежутке в обобщенном смысле Римана. Предположим, что и квадрат

---

*) См., например, J o r d a n, "Cours d' Analyse de l' Ecole Polytechnique" (Paris, 1893, T. I, p. 31 etc; T. II, p. 50 etc.); см. также С. М. Н и к о л ь с к и й, "Курс математического анализа", т. 1 (2-е изд. – М.: Наука, 1975).

функции $f(x)$ есть также интегрируемая функция в рассматриваемом промежутке, так что не только интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$, но и интегралы $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx$, $\int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)f^2(x)dx$, где α и β – два каких угодно числа, принадлежащие промежутку $[a, b]$, имеют определенный смысл.

Допустим, что система (1) есть система ортогональная и нормальная, и положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(x) + \rho_n(x), \tag{4}$$

где n есть какое-либо целое число,

$$A_k = \int\limits_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x)\,dx. \tag{5}$$

Умножая (4) на $p(x)f(x)\,dx$ и интегрируя результат в пределах от a до b, получаем, в силу (2), (3) и (5),

$$\int\limits_a^b p(x) f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \int\limits_a^b p(x)\rho_n^2(x)\,dx \geqslant 0. \tag{6}$$

Из этой формулы, справедливой при всяком n, выводим следующее предложение:

Какова бы ни была система функций $\varphi_k(x)$ $(k = 1,2,3, \ldots)$ данного вида, нормальная и ортогональная в некотором промежутке $[a, b]$ по отношению к данной функции $p(x)$, интегрируемой в этом промежутке и неотрицательной, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int\limits_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x)\,dx$$

есть ряд, всегда сходящийся, какова бы ни была функция $f(x)$, интегрируемая в промежутке $[a, b]$ вместе с ее квадратом и произведением $p(x)f^2(x)$.

Отсюда следует, что, задав произвольно положительное число ϵ, которое можно взять сколь угодно малым, можно найти затем такое целое число $n = n_0$, достаточно большое, что будет иметь место неравенство

$$|A_n| < \epsilon \quad \text{при } n \geqslant n_0. \tag{7}$$

Формула (6) показывает, кроме того, что при всяком n

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant \int\limits_a^b p(x) f^2(x)\,dx. \tag{8}$$

3. Рассмотрим, в частности, бесконечный ряд функций

$$\varphi_k(\varphi) = c_k \cos k\varphi \tag{9}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$, где c_k – некоторые постоянные.

Функции (9) образуют систему, ортогональную по отношению к функции

$$p(\varphi) = 1 \tag{10}$$

в промежутке $[0, \pi]$, ибо

$$\int_0^\pi \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = c_m\ c_n \int_0^\pi \cos m\varphi \cos n\varphi\, d\varphi = 0, \tag{11}$$

каковы бы ни были постоянные c_k.

Определив каждое c_k из условия

$$\int_0^\pi \varphi_k^2(x)dx = c_k^2 \int_0^\pi \cos^2 k\varphi\, d\varphi = 1,$$

получим $c_0^2 = 1/\pi$, $c_k^2 = 2/\pi\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Получим ряд тригонометрических функций вида

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos\varphi,\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos 2\varphi,\ \ldots,\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos k\varphi,\ \ldots, \tag{12}$$

образующих систему, ортогональную по отношению к характеристической функции (10) и нормальную.

4. Введем вместо переменной φ новую переменную x при помощи соотношения

$$x = a\cos\varphi, \tag{13}$$

где a – какое-нибудь положительное число.

Когда φ изменяется от 0 до π, переменная x будет изменяться от $+a$ до $-a$. Функции (9) преобразуются в

$$\varphi_k\left(\arccos \frac{x}{a}\right) = c_k \cos k \arccos \frac{x}{a},$$

т.е. в полиномы степени k от x/a, отличающиеся лишь постоянным множителем от полиномов Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля в промежутке $[-a, +a]$. Обозначим эти полиномы через

$$T_k^{(1)}(x/a). \tag{14}$$

Равенства (11), преобразованные к переменной x, дают

$$\int_{-a}^{+a} T_m^{(1)}\left(\frac{x}{a}\right) T_n^{(1)}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0.$$

Отсюда видим, что полиномы (14) образуют систему, ортогональную в промежутке $[-a, +a]$ по отношению к функции

$$p(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{15}$$

Очевидно, если положим $c_0 = 1/\sqrt{\pi}$, $c_k = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}\,(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то получим полиномы нулевой, первой и т.д. степеней вида

$$T_0\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad T_k\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos k \arccos \frac{x}{a}, \tag{16}$$

образующих систему, ортогональную по отношению к характеристической функции (15) и нормальную.

5. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\varphi) = f(a\cos\varphi) = f(x), \tag{17}$$

подразумевая под $f(x)$ функцию, интегрируемую по x в промежутке от $-a$ до $+a$. Положим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi, \tag{18}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\psi)\,d\psi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\psi)\cos k\psi\,d\psi \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18$_1$}$$

Можно написать

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\psi)\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi\cdot\cos k\psi\right\} d\psi. \tag{19}$$

Будем подразумевать под φ какое-нибудь определенное его значение, взятое в промежутке $[0, \pi]$, и заменим в этом равенстве под знаком интеграла $\Phi(\psi)$ через $\Phi(\varphi)$. Получим тождество

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\varphi)\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi\cdot\cos k\psi\right\} d\psi,$$

которое совместно с (19) приводит к равенству

$$\Phi(\varphi) - S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\Phi(\varphi) - \Phi(\psi))\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi\cdot\cos k\psi\right\} d\psi. \tag{20}$$

Заметив, что

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi\cdot\cos k\psi =$$

$$= -\frac{\cos n\varphi\cdot\cos(n+1)\psi - \cos(n+1)\varphi\cdot\cos n\psi}{\cos\varphi - \cos\psi},$$

и введя обозначения

$$F(\varphi,\psi) = \frac{\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)}{\cos\varphi - \cos\psi}, \tag{21}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(\varphi,\psi)\cos k\psi\,d\psi, \tag{22}$$

приведем равенство (20) к виду

$$\Phi(\varphi) - S_n = -b_{n+1}\cos n\varphi + b_n\cos(n+1)\varphi.$$

Отсюда, воспользовавшись известным неравенством Коши

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2), \tag{23}$$

справедливым при всяком целом n для всяких вещественных чисел a_k и b_k

$(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, выводим неравенство

$$|\Phi(\varphi) - S_n| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{b_n^2 + b_{n+1}^2}. \tag{24}$$

6. Допустим теперь, что функция $f(x)$ предыдущего пункта удовлетворяет следующему условию:

Интеграл $K = \int\limits_{-a}^{+a}\left(\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right)^2 \dfrac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ имеет определенный смысл при всех значениях x промежутка $[\alpha, \beta]$, лежащего целиком внутри $[-a, +a]$.

Если мы заменим в этом интеграле x и y соответственно через $a \cos\varphi$ и $a \cos\psi$, то получим, на основании (21),

$$K = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)}{\cos\varphi - \cos\psi}\right)^2 d\psi = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^\pi F^2(\varphi, \psi)\, d\psi.$$

При сделанном предположении интеграл $\int\limits^\pi F^2(\varphi, \psi)\, d\psi$ сохраняет, следовательно, определенный смысл при всех значениях φ, принадлежащих промежутку $[\alpha, \beta]$, лежащему в $[0, \pi]$.

Применяя теперь неравенство (7), справедливое для любой системы ортогональных функций, к рассматриваемому частному случаю ортогональных функций (12), заключаем, что при всяком данном φ в промежутке $[\alpha, \beta]$

$$|b_n| < \epsilon/2, \quad |b_{n+1}| < \epsilon/2 \quad \text{при } n \geqslant n_0, \tag{7_1}$$

где ϵ — наперед заданное положительное число, n_0 — соответствующим образом выбранное число. При этом основании (24) и (18) будем иметь

$$|\Phi(\varphi) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi| < \epsilon \quad \text{при } n \geqslant n_0.$$

Это неравенство доказывает следующую теорему:

Всякая функция $\Phi(\varphi)$, удовлетворяющая единственному требованию, чтобы интеграл

$$K_1 = \int\limits_0^\pi \left(\frac{\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)}{\cos\varphi - \cos\psi}\right)^2 d\psi \tag{25}$$

имел определенный смысл при всех значениях φ из какого-либо промежутка $[\alpha, \beta]$, лежащего целиком внутри промежутка $[0, \pi]$, разлагается во всех точках этого промежутка по функциям $\cos k\varphi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ в сходящийся ряд следующего вида:

$$\Phi(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi, \tag{26}$$

где a_k суть коэффициенты, определенные формулами (18_1).

Само собой разумеется, что предыдущие рассуждения, устанавливая разложения вида (26) и сходимость ряда правой части этого равенства, не доказывают равномерной сходимости этого ряда в промежутке $[0, \pi]$, ибо число ϵ в неравенствах (7_1) может, вообще говоря, зависеть от взятого значения φ.

7. Возвратимся теперь к переменной x, связанной с φ соотношением (13).

Функция $\Phi(\varphi)$ в силу (17) преобразуется в $f(x)$, коэффициенты a_k в силу (18_1) и (16) примут вид

$$a_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x)\, T_k\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

функция $\cos k\varphi$ представляется в виде $\cos k\varphi = (\sqrt{\pi}/\sqrt{2})\, T_k(x/a)$ и равенство (26) преобразуется в такое:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k\left(\frac{x}{a}\right) \int_{-a}^{+a} f(x)\, T_k\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Таким путем приходим к следующей теореме:

Всякая функция $f(x)$, подчиненная единственному требованию, чтобы интеграл

$$K = \int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right)^2 \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \tag{27}$$

имел определенный смысл при всех значениях x, принадлежащих какому-либо промежутку $[\alpha, \beta]$, лежащему целиком внутри $[-a, +a]$, разлагается в этом промежутке в сходящийся ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k\left(\frac{x}{a}\right) \int_{-a}^{+a} f(x)\, T_k\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \tag{28}$$

расположенный по полиномам Чебышева $T_k(x/a)$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, определяемым равенствами (16), и пропорциональным полиномам, наименее уклоняющимся от нуля в промежутке $[-a, +a]$.

Равномерная сходимость рассматриваемого ряда, конечно, этой теоремой не устанавливается.

8. Мы рассмотрели для простоты промежуток $[-a, +a]$, но предыдущие рассуждения легко распространяются на какой угодно промежуток $[a, b]$, где a и $b > a$ – какие угодно данные числа. Для этого стоит только вместо прежней переменной x, связанной с φ соотношением (13), ввести переменную x при помощи соотношения вида

$$x = \frac{b-a}{2}\cos\varphi + \frac{a+b}{2}, \tag{α}$$

а под функцией $\Phi(\varphi)$ подразумевать функцию

$$\Phi(\varphi) = f(x) = f\left(\frac{b-a}{2}\cos\varphi + \frac{a+b}{2}\right). \tag{β}$$

Система ортогональных и нормальных функций (16) преобразуется в систему полиномов

$$T_0(x, a, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$T_k(x, a, b) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos k \arccos\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right), \tag{29}$$

нормальных и ортогональных по отношению к характеристической функции

$$p(x) = 1 / \sqrt{(b-x)(x-a)},$$

т.е. в систему полиномов, пропорциональных полиномам Чебышева, наименее уклоняющимся от нуля в промежутке $[a, b]$.

Теорема п. 6 преобразуется в следующую:

Всякая функция $f(x)$, подчиненная требованию, чтобы интеграл

$$K = \int_a^b \left(\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right)^2 \frac{dy}{\sqrt{(b-y)(y-a)}} \tag{30}$$

сохранял определенный смысл при всяком значении x в каком-либо промежутке $[\alpha, \beta]$, лежащем целиком внутри $[a, b]$, разлагается в этом промежутке в сходящийся ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x, a, b) \int_a^b f(x) T_k(x, a, b) \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \tag{31}$$

где $T_k(x, a, b)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ суть полиномы Чебышева, определяемые равенствами (29) и пропорциональные полиномам, наименее уклоняющимся от нуля в промежутке $[a, b]$.

9. Из доказанных общих теорем весьма просто выводятся важные для дальнейшего следствия.

Допустим, что функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: Для всяких двух точек x и y промежутка $[a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \mu |x-y|^{\alpha}, \tag{32}$$

где μ и $\alpha \leqslant 1$ суть два числа, не зависящие от x и y *).

При этом интеграл (30), обозначенный через K, будет меньше, чем

$$\mu^2 \int_a^b \frac{dy}{|x-y|^{2(1-\alpha)} \sqrt{(b-y)(y-a)}}.$$

Этот последний интеграл имеет определенный смысл для всех значений x, не совпадающих с a или b, коль скоро

$$2(1-\alpha) < 1,$$

т.е. коль скоро

$$1 \geqslant \alpha > 1/2. \tag{32'}$$

Отсюда следует, что интеграл K, содержащий под знаком интеграла существенно положительную функцию при всяких значениях x и y и всяком значении x, лежащем внутри (a, b), имеет определенный смысл, коль скоро функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству (32) при условии (32'). Теорема предыдущего пункта приложима, следовательно, ко всякой такой функции и приводит к следующей теореме:

Всякая функция $f(x)$, подчиненная неравенству

$$|f(x) - f(y)| < \mu |x-y|^{\alpha}, \tag{32_1}$$

где μ и α суть данные числа, не зависящие от x и y, причем $1/2 < \alpha \leqslant 1$,

*) Это условие называют условием Коши – Липшица.

разлагается внутри промежутка $[a, b]$ *в сходящийся ряд по полиномам Чебышева* $T_k(x, a, b)$ (равенства (29)) *по формуле* (31).

10. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (32), то функция

$$\Phi(\varphi) = f\left(\frac{b-a}{2}\cos\varphi + \frac{b+a}{2}\right)$$

при всяких двух значениях φ и ψ, принадлежащих промежутку $[0, \pi]$, удовлетворяет неравенству

$$|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)| < \mu\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha |\cos\varphi - \cos\psi|^\alpha <$$

$$< \mu\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha |\varphi - \psi|^\alpha = \mu_1 |\varphi - \psi|^\alpha .$$

При этом интеграл (25) будет, очевидно, иметь определенный смысл при всяком φ, лежащем *внутри* промежутка $[0, \pi]$, коль скоро $1/2 < \alpha \leqslant 1$. При соблюдении этого условия теорема п. 6 приводит к следующей:

Всякая функция $\Phi(\varphi)$, *удовлетворяющая неравенству*

$$|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)| < \mu |\varphi - \psi|^\alpha , \qquad (32_2)$$

где μ *и* α *суть постоянные, не зависящие от* φ *и* ψ, *причем* $1/2 < \alpha \leqslant 1$, *разлагается внутри промежутка* $[0, \pi]$ *в сходящийся ряд вида* (26) *по косинусам дуг, кратных* φ.

11. Легко убедиться, что интегралы K и K_1 при соблюдении условий (32_1) и (32_2) сохраняют определенное значение для всех значений x и φ, принадлежащих соответственно промежуткам $[a, b]$ и $[0, \pi]$, включая и концы этих промежутков, если α удовлетворяет неравенствам $3/4 < \alpha \leqslant 1$.

При этом разложения (31) *и* (26) *будут иметь место для всех точек промежутков* $[a, b]$ *и* $[0, \pi]$.

Особого внимания заслуживает случай, когда $\alpha = 1$, т.е. функция $f(x)$ (а также и функция $\Phi(\varphi)$) удовлетворяет условию Коши

$$|f(x) - f(y)| < \mu |x - y|. \qquad (33)$$

На основании только что высказанного можем утверждать, что *всякая функция* $f(x)$, *подчиненная условию Коши, разлагается во всех точках промежутка* $[a, b]$ *в сходящийся ряд вида* (31) *по полиномам Чебышева* $T_k(x, a, b)$.

Точно так же *всякая функция* $\Phi(\varphi)$, *подчиненная условию Коши, разлагается во всех точках промежутка* $[0, \pi]$ *в сходящийся тригонометрический ряд вида* (26).

12. Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (33), есть функция ограниченной вариации в любом промежутке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем промежутку $[a, b]$. В самом деле, сумма

$$\Sigma |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \mu l,$$

где x_k обозначают ряд промежуточных значений x в промежутке $[\alpha, \beta]$, а l – длину промежутка $[\alpha, \beta]$. Это неравенство показывает, что полная вариация функции $f(x)$ не превосходит определенного предела и что эта вариация стремится к нулю одновременно с ее соответствующим промежутком.

На основании теоремы Лебега *), строго доказанной затем Витали **), такая функция может быть представлена для значений x промежутка $[a, b]$ в виде

$$f(x) = \int_a^x f_1(z)\,dz + A, \tag{33_1}$$

где $f_1(x)$ есть функция, подчиненная единственному условию быть интегрируемой в промежутке $[a, b]$ ***), A есть некоторая постоянная.

Обратно, из условия (33_1) сейчас же вытекает неравенство (33).

Таким образом, условие (33_1) эквивалентно условию Коши.

13. Пользуясь этим обстоятельством, докажем следующую теорему: *Всякая функция $\Phi(\varphi)$, удовлетворяющая условию Коши в промежутке $[0, \pi]$, разлагается во всех точках этого промежутка (включая и концы его) в равномерно сходящийся тригонометрический ряд вида* (26), *причем если положим*

$$\Phi(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi + \rho_n(\varphi),$$

то модуль остаточного числа $\rho_n(\varphi)$ не превосходит $\tau/\sqrt{n}$, где τ — конечное положительное число, не зависящее от n.

Если $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет условию Коши, то по предыдущему

$$\Phi(x) = \int_0^{\varphi} \Phi_1(\psi)\,d\psi + A \tag{γ}$$

и к интегралу

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\psi)\cos k\psi\,d\psi$$

можем применить теорему интегрирования по частям****). Таким путем получаем

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} \Phi_1(\psi)\sin k\psi\,d\psi = \frac{b_k}{k}.$$

Так как по предыдущему ряд $\sum_0^{\infty} a_k \cos k\varphi$ сходится и сумма его равна $\Phi(\varphi)$, то

$$\rho_n(\varphi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos k\varphi = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\cos k\varphi. \tag{34}$$

*) Lebesgue. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. – Paris, 1904, p. 129.

**) Vitali. Sulle funzioni integrali. – Atti della R. Accad. di Torino. Torino, 1905, Vol. XL, p. 1021.

De la Vallée Poussin. Cours d'Analyse, T. II.

***) Конечно, здесь под функцией $f_1(x)$ нужно понимать интегрируемую по Лебегу ограниченную функцию. (*Прим. ред.*)

****) См. по этому поводу, например, A. Liapounoff, "Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales" (Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg, Cl. Ph. M., Vol. XV, n. 10, p. 5 et. 6).

Отсюда на основании известного неравенства Коши (см. п. 5, неравенство (23))

$$|\rho_n(\varphi)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos^2 k\varphi}{k^2}} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} / \sqrt{n}. \quad (34_1)$$

Но система функций $(\sqrt{2}/\sqrt{\pi}) \sin k\varphi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) есть система, ортогональная по отношению к характеристической функции $p(x) = 1$ в промежутке $[0, \pi]$ и притом нормальная. Поэтому, в силу неравенства (8),

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \Phi_1^2(\varphi)\, d\varphi = \tau^2 .$$

Неравенство (34_1) приводится, следовательно, к таковому:

$$|\rho_n(\varphi)| \leqslant \tau / \sqrt{n}, \quad (35)$$

имеющему место при всяком значении φ в промежутке $[0, \pi]$. Из этого неравенства следует, что

$$|\Phi(\varphi) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi| < \epsilon \text{ при } n \geqslant n_0 , \quad (36)$$

где ϵ — наперед заданное положительное число, не зависящее от φ, n_0, — есть целое число соответствующим образом выбранное.

Неравенства (35) и (36) и доказывают высказанную в начале пункта теорему.

14. Если теперь вместо переменной φ введем переменную x при помощи соотношения (α) и воспользуемся равенством (β), то из доказанной теоремы выведем, подобно тому, как в п. 8, следующую:

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая в промежутке $[a, b]$ условию Коши, разлагается во всех точках этого промежутка (включая и его концы) в равномерно сходящийся ряд вида (31), *расположенный по полиномам Чебышева $T_k(x, a, b)$* ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

При этом, если положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} T_k(x, a, b) \int_a^b f(x)\, T_k(x, a, b) \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} + \rho_n(x),$$

то модуль остаточного члена разложения не превосходит числа $\tau / \sqrt{n}$.

Таким образом, приходим к теореме о приближенном представлении непрерывных функций при помощи полиномов и тригонометрических сумм весьма простого вида, причем устанавливается и порядок приближения, который, как видим, не ниже $1/\sqrt{n}$.

15. Мы знаем, что порядок наилучшего приближения, который способен доставить какой бы то ни было полином степени n для функций, удовлетворяющий условию Коши, как раз равен $1/n$*). В мемуаре, указанном в примечании, мною доказано также, *что порядок наилучшего при-*

*) См. по этому поводу, например, мой мемуар "Sur quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture"(Mém. de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, Cl. Ph. M., Vol. XXXII, n. 4).

ближения при помощи тригонометрических сумм из n членов или полиномов степени n и для функций, допускающих их представление в виде интеграла

$$f(x) = \int\limits_a^x f_1(z)\,dz + A\,,$$

где $f_1(x)$ — не только интегрируемая функция, но еще и ограниченной вариации в промежутке $[a, b]$, также не происходит $1/n$ и что такого рода приближение дается при сделанном условии тригонометрической суммой

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi \tag{37}$$

и соответственно полиномом степени n вида

$$\sum_{k=0}^{n} T_k(x, a, b) \int\limits_a^b f(x)\, T_k(x, a, b) \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,. \tag{38}$$

Последний результат легко выводится из формулы (34).

Если в равенстве (γ) функция $\Phi_1(\varphi)$ не только интегрируема, но и ограниченной вариации в промежутке $[0, \pi]$, то

$$|b_k| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi \Phi_1(\psi)\sin k\psi\, d\psi\right| \leqslant \frac{B}{k}\,,$$

где B — конечное число. Это неравенство вытекает сейчас же из известной теоремы о средних *).

Равенство (34) дает при этом $|\rho_n(\varphi)| \leqslant B \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{B}{n}$, откуда и вытекает только что упомянутая теорема о порядке приближения, доставляемого суммой (37) для непрерывных функций, удовлетворяющих условиям этого пункта.

Такая же теорема о порядке приближения, доставляемого полиномом (38) для функций рассматриваемого типа, выводится из только что доказанной при помощи преобразования переменной φ к переменной x по формуле (α). Подобным же путем получаются и некоторые другие теоремы о приближении функций при помощи полиномов, указанные в упомянутом выше мемуаре, но мы не будем здесь на этом останавливаться.

16. Предположим теперь, что функция $f(x)$ подчинена единственному условию быть интегрируемой в промежутке $[a,b]$. Вводим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(z)\,dz\,, \tag{39}$$

где h — произвольное число, отличное от нуля. Можем написать

$$\int\limits_x^{x+h} f(z)\,dz = \int\limits_x^h f(z)\,dz + \int\limits_h^{x+h} f(z)\,dz\,.$$

Но

$$\int\limits_h^{x+h} f(z)\,dz = \int\limits_0^x f(t+h)\,dt.$$

*) C. J o r d a n. Cours d'Analyse, T. I. – 1893, n. 68, p. 55; T. II – 1894, n. 215, p. 220. С.М. Н и к о л ь с к и й. Курс математического анализа, т. 1. – М.: Наука, 1973.

Следовательно,

$$\int_x^{x+h} f(z)\,dz = \int_x^h f(t)\,dt + \int_0^x f(t+h)\,dt = \int_0^x [f(t+h) - f(t)]\,dt + A_1\,,$$

где $A_1 = \int_0^h f(x)\,dt$. Поэтому для всякого x, принадлежащего промежутку $[a,b]$,

$$\varphi(x) = \int_a^x \varphi_1(z)\,dz + A\,, \tag{39$_1$}$$

где A есть постоянная, равная

$$\int_0^a \varphi_1(z)\,dz + \frac{1}{h}\int_0^h f(t)\,dt\,,$$

$$\varphi_1(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{40}$$

есть функция, которую можно считать интегрируемой во всем промежутке $[a, b]$, каково бы ни было h. В самом деле, функция $f(x)$ определена лишь в промежутке $[a, b]$; когда z изменяется от a до b, в выражении правой части равенства (40) войдут значения $f(x)$ при значениях x, принадлежащих промежутку $[b, b+h]$, где функция $f(x)$ остается неопределенной. Можно всегда продолжить эту функцию на весь этот последний промежуток так, чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой во всем промежутке $[a, b+h]$, каково бы ни было данное число h *). При этом функция $\varphi_1(z)$, определяемая равенством (40), будет, очевидно, интегрируемой во всем промежутке от a до b. Получим, таким образом, функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию (39$_1$) для всех значений x промежутка $[a, b]$.

17. К вспомогательной функции $\varphi(x)$ применима теорема п. 14. Положим

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} T_k(x, a, b) \int_a^b \varphi(x)\, T_k(x, a, b)\, \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(a-x)}}\,. \tag{41}$$

На основании этой теоремы можно утверждать, что, каково бы ни было число h, всегда можно выбрать n так, что

$$|\varphi(x) - P_n(x)| < \epsilon/2\,, \tag{42}$$

где ϵ — наперед произвольно заданное положительное число.

Предположим теперь, что в промежутке $[a, b]$ существует такая точка (или точки) x, для которой выражение $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(z)\,dz$ стремится к определенному пределу при $h \to 0$, т.е. что существует для этого значения (или значений) x такое положительное число h_0, что при всяком h, $|h| \leqslant h_0$,

---

*) Здесь и далее в аналогичных рассуждениях функцию $f(x)$ удобно считать продолженной на всю числовую ось, например, следующим образом: $f(x) = f(a)$ для $x < a$ и $f(x) = f(b)$ для $x > b$. Напомним, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману и, следовательно, ограничена. (*Прим. ред.*)

имеет место неравенство

$$\left| \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ при } |h| \leqslant h_0 . \tag{43}$$

Взяв какое-либо определенное значение h, мы можем всегда выбрать n столь большим, что неравенство (42) будет удовлетворено одновременно с неравенством (43) при одном и том же наперед заданном положительном числе ϵ. При этом неравенства (42) и (43) дадут

$$\left| \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz - P_n(x) \right| < \epsilon$$

— неравенство, которое доказывает следующую теорему:

Для всякой точки x промежутка $[a, b]$, где для интегрируемой в этом промежутке функции $f(x)$ выражение

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz$$

стремится к определенному пределу при $h \to 0$, можно найти такое число h_0, достаточно малое, и целое число n_0, достаточно большое, что полином степени n_0 вида

$$P_{n_0}(x) = \sum_{k=0}^{n_0} T_k(x, a, b) \int_a^b \varphi(x)\, T_k(x, a, b) \frac{dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} , \tag{44}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{h_0} \int_x^{x+h_0} f(z)\, dz ,$$

дает приближенное выражение для

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz$$

с наперед заданным приближением ϵ.

18. Мы получаем указанным путем весьма простое доказательство общей теоремы, из которой, между прочим, выводится, как весьма частный случай, известная теорема, носящая название теоремы Вейерштрасса и являющаяся основной в теории функции от одной вещественной переменной.

Предположим, в самом деле, что функция $f(x)$ остается непрерывной во всех точках промежутка $[a, b]$, так что $|f(z) - f(x)| < \epsilon$ при $|z - x| < h_0$, где ϵ и h_0 суть положительные числа, не зависящие от x. В таком случае

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz - f(x) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} [f(z) - f(x)]\, dz \right| < \epsilon$$

при $|h| < h_0$, т.е. выражение $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz$ стремится равномерно для всех значений x к пределу $f(x)$ при $h \to 0$. Применяя к рассматриваемому случаю общую теорему предыдущего пункта, замечаем, что в этом случае числа h_0 и n_0 не зависят от выбора точки x в промежутке $[a, b]$.

Выбрав соответствующим образом эти числа, получим полином степени n_0 *вида* (44), *который даст приближенное выражение всякой непрерывной функции* $f(x)$ *для всех точек промежутка* $[a, b]$ *с наперед заданным приближением* ϵ .

Заметим, что при нашем приеме суждений получается не только доказательство существования приближающего полинома, но и весьма простое, определенное его выражение, при помощи полиномов Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля, вида (44). Этой теоремой нам придется воспользоваться в дальнейшем.

ГЛАВА II

Определение замкнутости ортогональных систем функций. Основные теоремы теории замкнутости. Применение к тригонометрическим функциям и полиномам Чебышева. Определение точного низшего (или высшего) предела отношения некоторых определенных интегралов

1. Возвращаемся к общему случаю каких угодно функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{1}$$

п. 1 гл. I, ортогональных по отношению к некоторой неотрицательной функции $p(x)$ и нормальных. Обозначим через $S_n(f)$ интеграл

$$\int_a^b p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx = \int_a^b pf^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^2 , \tag{2}$$

где, напомним

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x)\,\varphi_k(x)\,dx. \tag{2_1}$$

Величина $S_n(f)$ зависит от вида функций $\varphi_k(x)$ и выбора функции $f(x)$, но, каковы бы ни были эти функции, $S_n(f)$ всегда есть невозрастающая функция значка n и неотрицательная.

Может случиться, что для данной системы функций $\varphi_k(x)$ интеграл $S_n(f)$ будет стремиться к нулю при беспредельном возрастании значка n для всякой функции $f(x)$, принадлежащей некоторому классу функций, определяемому теми или иными условиями. При этом условии равенство (2) приводит в пределе при $n \to \infty$ к уравнению

$$\int_a^b p(x) f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 , \tag{3}$$

которое будет иметь место для любой функции $f(x)$, принадлежащей рассматриваемому классу.

Уравнение (3) мы будем называть *уравнением замкнутости функций* $\varphi_k(x)$, а саму систему (1) этих функций – *замкнутой системой по отношению к данному классу функций* $f(x)$.

Если окажется, что уравнение замкнутости (3) будет справедливо для любой функции, интегрируемой в промежутке $[a, b]$, то всякую систему функций (1), для которой это обстоятельство имеет место, будем называть *абсолютно замкнутой* или просто *замкнутой* (когда этот сокращенный термин не может вызывать никаких сомнений) *).

Очевидно, что всякая ортогональная и нормальная система функций $\varphi_k(x)$ будет замкнутой по отношению к классу функций $f(x)$, которые допускают равномерное разложение в промежутке $[a, b]$ вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x). \tag{4}$$

Стоит умножить это равенство на $p(x) f(x)\, dx$ и проинтегрировать по x в пределах от a до b, чтобы получить уравнение замкнутости (3).

Но система функций $\varphi_k(x)$ может быть замкнута для известного класса функций или даже абсолютно замкнута, когда разложение (4) не имеет места.

Теория замкнутости имеет разнообразные и важные применения к решению многих вопросов, которые не могут быть решены методом разложения функций в ряды, а в частности, приводит к общему приему решения и самой задачи о разложении функций в ряды по функциям данного вида. Эта последняя задача играет первостепенную роль в анализе и при решении всех основных задач математической физики.

В этой главе мы изложим основные теоремы замкнутости и их простейшие применения, необходимые для дальнейшего.

2. Обозначим через $F(x)$ и $\Phi(x)$ две какие-либо функции, интегрируемые в промежутке $[a, b]$, и положим

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(x) + \rho_n(x), \tag{5}$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(x) + \sigma_n(x), \tag{5_1}$$

где

$$A_k = \int_a^b p(x) F(x) \varphi_k(x)\, dx, \tag{6}$$

$$B_k = \int_n^b p(x) \Phi(x) \varphi_k(x)\, dx. \tag{6_1}$$

---

*) Обыкновенно пользуются другим определением замкнутости, а именно:

Система ортогональных (и нормальных) функций (1) называется замкнутой, если не существует отличной от нуля непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей уравнениям

$$\int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x)\, dx = 0$$

при всяком (целом) k.

Это определение эквивалентно с данным нами в тексте, которое является более удобным для дальнейших соображений – см. мой мемуар "Sur la théorie de fermeture etc" (Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg., Cl. Ph. M., 1911, Vol. XXX, n. 4).

Умножив равенство (5) на $p(x)\varphi_m(x)\,dx$ и интегрируя результат в пределах от a до b, получим, приняв в расчет соотношения (2) и (3) гл. I и равенство (6),

$$\int_a^b p(x)\rho_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \tag{7}$$

при всяком m, меньше или равном n.

Вычитая затем равенства (5) и (5_1) одно из другого, находим

$$\rho_n(x) = \sigma_n(x) - \sum_{k=1}^{n} (A_k - B_k)\varphi_k(x) + F(x) - \Phi(x).$$

Умножив это равенство на $p(x)\rho_n(x)\,dx$ и проинтегрировав результат от a до b, получим, в силу (7),

$$S_n(F) = \int_a^b p(x)\rho_n(x)\sigma_n(x)\,dx +$$

$$+\int_a^b p(x)\,[F(x) - \Phi(x)]\,\rho_n(x)\,dx. \tag{8}$$

3. Выведем одно неравенство, которым часто придется пользоваться, называемое обыкновенно неравенством Шварца, но указанное задолго до него Буняковским. Рассмотрим разность

$$D = \int_a^b p(x)F^2(x)\,dx \int_a^b p(x)\Phi^2(x)\,dx -$$

$$-\left(\int_a^b p(x)F(x)\Phi(x)\,dx\right)^2 = D_1 - D_2.$$

Первый из интегралов можно представить под видом двойного интеграла

$$D_1 = \int_a^b\int_a^b p(\xi)p(\eta)F^2(\xi)\Phi^2(\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_a^b\int_a^b p(\eta)\,p(\xi)F^2(\eta)\Phi^2(\xi)\,d\xi\,d\eta.$$

Отсюда

$$D_1 = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(\xi)p(\eta)\{F^2(\xi)\Phi^2(\eta) +$$

$$+ F^2(\eta)\,\Phi^2(\xi)\}\,d\xi\,d\eta.$$

Далее, легко видеть, что

$$D_2 = \int_a^b\int_a^b p(\xi)p(\eta)F(\xi)F(\eta)\Phi(\xi)\Phi(\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Следовательно,

$$D = D_1 - D_2 = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(\xi) p(\eta) \times$$

$$\times \{ F(\xi) \Phi(\eta) - F(\eta) \Phi(\xi) \}^2 \, d\xi \, d\eta,$$

т.е. так как функция $p(x)$ по условию не отрицательна в промежутке $[a, b]$, то если $D \geqslant 0$, причем $p(x) > 0$ для $a < x < b$, то знак равенства возможен лишь когда $\Phi(x) = F(x)$.

Таким образом, приходим к упомянутому в начале пункта неравенству*)

$$\left(\int_a^b p(x) F(x) \Phi(x) \, dx \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b p(x) F^2(x) \, dx \int_a^b p(x) \Phi^2(x) \, dx. \tag{9}$$

4. Применим неравенство (9) к интегралам правой части уравнения (8). Имеем, согласно с принятым в п. 1 обозначением,

$$\left| \int_a^b p(x) \rho_n(x) \sigma_n(x) \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b p(x) \rho_n^2(x)} \cdot \sqrt{\int_a^b p(x) \sigma_n^2(x) \, dx} = \sqrt{S_n(F)} \sqrt{S_n(\Phi)},$$

$$\left| \int_a^b p(x) \rho_n(x) \, [F(x) - \Phi(x)] \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{S_n(F)} \sqrt{\int_a^b p(x) \, [F(x) - \Phi(x)]^2 \, dx.}$$

Следовательно,

$$\sqrt{S_n(F)} \leqslant \sqrt{S_n(\Phi)} + \sqrt{\int_a^b p(x) \, [F(x) - \Phi(x)]^2 \, dx.} \tag{10}$$

Этим основным неравенством, справедливым для каких угодно двух функций $F(x)$ и $\Phi(x)$ и для всякой ортогональной системы функций $\varphi_k(x)$ с неотрицательной в промежутке $[a, b]$ характеристической функцией $p(x)$, мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

5. Допустим, что система (1) ортогональных (и нормальных) функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению ко всякой непрерывной функции $\Phi(x)$, имеющей интегрируемую производную первого порядка в промежутке $[a, b]$. Из уравнения замкнутости (3) следует, что при этом, задав произвольно положительное число ϵ, можно найти такое целое число $n = n_0$, что

$$S_n(\Phi) < \epsilon^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{11}$$

---

*) Это неравенство легко выводится также из условия положительности квадратичной относительно аргументов α и β формы $\int_a^b p(x) \, [\alpha F(x) - \beta \Phi(x)]^2 dx$.

Пусть $f(x)$ есть какая угодно непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция, которая может и не иметь производной. Воспользуемся вспомогательной функцией $\varphi(x)$ п. 16 гл. 1:

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\,dz. \tag{39}$$

Если $f(x)$ непрерывна, то $\varphi(x)$ допускает первую производную, которая равна

$$\varphi'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

С другой стороны, $\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(z) - f(x)]\,dz$. Так как $f(x)$ непрерывна, то, выбрав соответствующим образом число h, будем иметь для всех значений z между x и $x + h$ и при всяком x*):

$$|f(z) - f(x)| < \epsilon,$$

где ϵ есть наперед заданное положительное число. При этом при всяком x

$$|\varphi(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{12}$$

Положим теперь в неравенстве (10) $F(x) = f(x)$, $\Phi(x) = \varphi(x)$. При сделанном условии относительно $f(x)$ будем иметь в силу (12) при соответствующем выборе h:

$$\int_a^b p(x)\,[f(x) - \varphi(x)]^2\,dx < Q^2\epsilon^2,$$

$$Q^2 = \int_a^b p(x)\,dx > 0. \tag{13}$$

Так как, с другой стороны, система функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению ко всякой функции, имеющей интегрируемую производную, а функция $\varphi(x)$ имеет таковую (и притом непрерывную) при всяком h, то на основании (11) и при только что указанном выборе h можем найти такое n_0, что

$$S_n(\varphi) < \epsilon^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{14}$$

При этом неравенство (10) дает $\sqrt{S_n(f)} < \epsilon(1 + Q)$ при $n \geqslant n_0$, т.е.

$$S_n(f) < \epsilon' \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

где ϵ' обозначает положительное наперед заданное число.

Это неравенство приводит к такой теореме:

Если некоторая система ортогональных функций с характеристической неотрицательной в данном промежутке $[a, b]$ функцией замкнута относительно всякой функции, допускающей первую производную, интегрируемую в рассматриваемом промежутке, то эта система непременно замкнута и по отношению ко всякой функции, подчиненной единственному условию непрерывности в том же промежутке.

---

*) Разумеется, я рассматриваю всюду лишь равномерную непрерывность.

6. Из этой теоремы, как следствие, вытекает следующее предложение.

Если система функций $\varphi(x)$ замкнута по отношению ко всякой функции, имеющей в промежутке $[a, b]$ интегрируемую производную какого-либо порядка p, то она переменно замкнута по отношению ко всякой функции, допускающей такую же производную, лишь $(p-1)$-го порядка.

Применяя последовательно это предложение, справедливое при всяком p, придем к следующей теореме:

Если система рассматриваемых функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению к любой функции, имеющей в данном промежутке интегрируемую производную какого-либо порядка p, то она непременно замкнута и по отношению ко всякой функции, только непрерывной в том же промежутке.

7. Предположим теперь, что функция $f(x)$ подчинена единственному условию быть интегрируемой в промежутке $[a, b]$. В этом случае вспомогательная функция $\varphi(x)$ (формула (39)) будет непрерывной в $[a, b]$. В самом деле, обозначив через δ некоторое произвольное число, имеем

$$\varphi(x+\delta) - \varphi(x) = \frac{1}{h}\left(\int_{x+\delta}^{x+h+\delta} f(z)\,dz - \int_{x}^{x+h} f(z)\,dz\right).$$

Но

$$\int_{x+\delta}^{x+h+\delta} f(z)\,dz - \int_{x}^{x+h} f(z)\,dz = \int_{x+\delta}^{x+h} f(z)\,dz +$$

$$+\int_{x+h}^{x+h+\delta} f(z)\,dz + \int_{x+h}^{x} f(z)\,dz = \int_{x+h}^{x+h+\delta} f(z)\,dz + \int_{x+\delta}^{x} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{x+h}^{x+h+\delta} f(z)\,dz - \int_{x}^{x+\delta} f(z)\,dz.$$

В силу этого можем писать

$$\varphi(x+\delta) - \varphi(x) = \frac{1}{h}\left(\int_{x+h}^{x+h+\delta} f(z)\,dz - \int_{x}^{x+\delta} f(z)\,dz\right).$$

Первый из этих интегралов можно представить в виде

$$\int_{x+h}^{x+h+\delta} f(z)\,dz = \int_{x}^{x+\delta} f(z+h)\,dz,$$

причем будем иметь

$$\varphi(x+\delta) - \varphi(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+\delta} [f(z+h) - f(z)]\,dz.$$

Отсюда, обозначив через $M \sup |f(z)|$ в промежутке $[a, b]$*), выводим неравенство

$$|\varphi(x+\delta) - \varphi(x)| < 2M\,|\delta|/|h|,$$

которое показывает, что функция $\varphi(x)$ непрерывна в $[a, b]$, каково бы ни было данное число h, $h \neq 0$.

*) Функция $f(x)$ предполагается ограниченной.

Рассмотрим разность

$$D(x) = f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(z) - f(x)]\,dz. \tag{15}$$

Воспроизводя рассуждения моего мемуара "Sur la théorie de fermeture etc", упомянутого выше, разобъем промежуток $[a, b]$ на некоторое число составляющих.

Обозначим через e_i все те промежутки, где осцилляция функции $f(x)$ не превосходит числа ϵ, через e_k – все те, где эта осцилляция более ϵ. Так как по условию функция $f(x)$ интегрируема, то (это вытекает из самого определения интегрируемости) *) всегда можно так распорядиться выбором составляющих промежутков, на которые мы разбиваем $[a, b]$, что

$$\Sigma e_k < \epsilon, \tag{16}$$

где знак суммы распространяется на все элементы e_k.

Разобъем затем каждый из интервалов e_i на три составляющие e_i', e_i'' и e_i''' и выберем элементы e_i' и e_i''' так, чтобы

$$\Sigma e_i' < \epsilon \quad \text{и} \quad \Sigma e_i''' < \epsilon, \tag{17}$$

что, очевидно, всегда возможно. Примем теперь в выражении функции $\varphi(x)$ (39) за h число, меньшее наименьшей из всех величин e_i' и e_i''', удовлетворяющих условиям (17). При таком выборе h все точки, лежащие между x и $x+h$, где x есть какая-либо точка, принадлежащая элементу e_i'', не выйдут из промежутка e_i, где осцилляция функции $f(x)$ не превосходит ϵ. Поэтому для всякого значения x, принадлежащего интервалу e_i'', будем иметь, в силу (15),

$$|D(x)| < \epsilon. \tag{18}$$

Напишем теперь интеграл

$$\int_a^b p(x) D^2(x)\,dx$$

в виде**)

$$\int_a^b = \Sigma \int_{e_i'} + \Sigma \int_{e_i'''} + \Sigma \int_{e_i''} + \Sigma \int_{e_k},$$

где, вообще, через $\int_e$ мы обозначаем интеграл, распространенный на отрезок e.

Обозначая через p_0 $\sup p(x)$ в интервале $[a, b]$, получим, приняв в расчет (16) и (17),

$$\Sigma \int_{e_i'} < 2p_0 M^2 \epsilon, \quad \Sigma \int_{e_i'''} < 2p_0 M^2 \epsilon, \quad \Sigma \int_{e_k} < 2p_0 M^2 \epsilon.$$

Далее, на основании (18),

$$\Sigma \int_{e_i''} < \epsilon^2\, \Sigma \int_{e_i''} p(x)\,dx < Q^2 \epsilon^2.$$

---

*) См. C. J o r d a n, "Cours d'Analyse", T.I (Paris, 1893); см. также С.М. Н и к о л ь с к и й, "Курс математического анализа", Т. I (М.: Наука, 1973).

**) Мы опускаем везде для простоты элемент $p(x) D^2(x)\,dx$ под знаками интегралов.

Следовательно,

$$\int_a^b p(x)D^2(x)\,dx < \epsilon(6p_0M^2 + Q^2\epsilon) < A^2\epsilon, \tag{19}$$

где A^2 – конечное положительное число.

8. Применим опять неравенство (10) (п.4) к функциям

$$F(x) = f(x), \quad \Phi(x) = \varphi(x),$$

где под $f(x)$ будем подразумевать функцию, только интегрируемую в промежутке $[a, b]$, а под $\varphi(x)$ – вспомогательную функцию (39). Получаем

$$\sqrt{S_n(f)} \leqslant \sqrt{S_n(\varphi)} + \sqrt{\int_a^b p(x)D^2(x)\,dx}. \tag{20}$$

Предположим, что система функций $\varphi_k(x)$ (1) замкнута по отношению ко всякой непрерывной функции. Выберем h так, как указано в предыдущем пункте, причем будет иметь место неравенство (19). С другой стороны, так как $\varphi(x)$ есть непрерывная функция в $[a, b]$, то при выбранном значении h можем найти в силу сделанного допущения такое целое число $n = n_0$, что

$$S_n(\varphi) < \epsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

При этих условиях неравенство (20) даст

$$\sqrt{S_n(f)} < \sqrt{\epsilon}(1 + A) = B\sqrt{\epsilon},$$

т.е.

$$S_n(f) < \epsilon' \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

где ϵ' можно подразумевать произвольно наперед заданное положительное число.

Последнее неравенство приводит к следующей важной теореме:

Если какая-либо система ортогональных функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению к любой непрерывной функции, то она непременно замкнута и по отношению к любой функции, только интегрируемой в данном промежутке, т.е. по принятой нами терминологии абсолютно замкнута)*.

9. Сопоставляя эту теорему с теоремой п. 6, приходим еще к следующей:

Если какая-либо система ортогональных функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению к любой функции, имеющей производную некоторого порядка p, интегрируемую в данном промежутке $[a, b]$, то она непременно абсолютно замкнута.

При помощи этой теоремы сейчас же убеждаемся, что *система* (12) *гл.* I *тригонометрических функций*

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos k\varphi \tag{12$_1$}$$

есть система абсолютно замкнутая.

---

*) Отметим, что доказательство этого утверждения проведено в предположении ограниченности функции $p(x)$. Однако, как легко видеть, это доказательство без труда переносится и на случай функций $p(x)$, удовлетворяющих условиям гл. I. (*Прим. ред.*)

В самом деле, из теоремы п. 13 гл. I следует, что всякая функция, имеющая интегрируемую производную первого порядка в промежутке $[0, \pi]$, разлагается в равномерно сходящийся ряд вида (26) (гл. I, п. 6). Поэтому система (12_1) замкнута по отношению ко всякой функции, допускающей в $[0, \pi]$ интегрируемую производную первого порядка ($p = 1$) (см. п. 6 этой главы), и, следовательно, в силу только что доказанной теоремы она абсолютно замкнута. Совершенно таким же путем убеждаемся, что и *система полиномов Чебышева, определяемых формулами* (29) *гл.* I (п. 8), *есть также система абсолютно замкнутая.*

10. Заметим, что последняя теорема является частным случаем общей теоремы, справедливой для каких угодно полиномов Чебышева, которая выводится в свою очередь из одной основной теоремы замкнутости, наипростейшее доказательство которой сейчас изложим*).

Допустим, что какая-либо система ортогональных функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению к любому полиному $P_m(x)$ какой угодно степени m, так что

$$S_n(P_m) < \epsilon/4 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{21}$$

Пусть $f(x)$ есть какая угодно непрерывная функция x в данном промежутке $[a, b]$. Положим в неравенстве (10) $F(x) = f(x)$, $\Phi(x) = P_n(x)$. В силу (21) будем иметь, каков бы ни был полином $P_n(x)$,

$$\sqrt{S_n(f)} < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} + \sqrt{\int_a^b p(x)\,[f(x) - P_n(x)]^2 dx} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{22}$$

Так как функция $f(x)$ по условию непрерывна, то по теореме п. 18 гл. I полином $P_n(x)$ можно выбрать так, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\epsilon}{4Q}, \quad Q = \sqrt{\int_a^b p(x)\,dx}.$$

Если будем понимать под $P_n(x)$ в неравенстве (22) именно такой полином, то получим

$$\sqrt{S_n(f)} < \sqrt{\epsilon}, \quad \text{т.е.} \quad S_n(f) < \epsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

где n_0 есть соответствующим образом выбранное целое число. Это неравенство показывает, что коль скоро система ортогональных функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению ко всякому полиному какой угодно степени n, то она непременно замкнута и по отношению ко всякой непрерывной функции $f(x)$.

Отсюда при помощи теоремы п. 8 этой главы выводим следующую:

Если система каких-либо ортогональных функций $\varphi_k(x)$ замкнута по отношению ко всякому полиному какой угодно степени n, то она непременно абсолютно замкнута.

11. Будем теперь подразумевать под $\varphi_k(x)$ полиномы Чебышева (φ_k – полином k-степени), определяемые условиями

$$\int_a^b p(x)\varphi_k(x)\,\Pi_{k-1}(x)\,dx = 0, \tag{23}$$

где $\Pi_{k-1}(x)$ обозначает произвольный полином степени $\leqslant k - 1$, $p(x)$ – по-

*) Эта теорема дана мною впервые в мемуаре "Sur certaines égalités générales etc." (Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Petersbourg, Cl. Ph. M., 1904, Vol. XV, n. 7).

прежнему функцию неотрицательную, интегрируемую в (a, b), и

$$\int_a^b p(x)\varphi_k^2(x)\,dx = 1. \tag{24}$$

Из равенства (23), имеющего место при всяком целом k, сейчас же вытекает, что

$$\int_a^b p(x)\varphi_k(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \tag{25}$$

коль скоро $k \neq m$. Таким образом, всякая система полиномов Чебышева есть система ортогональная с характеристической функцией $p(x)$, а в силу условия (24) и нормальная.

Пусть $P_n(x)$ есть произвольный полином какой-либо степени n. На основании (24) и (25) заключаем, что всегда

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x)P_n(x)\varphi_k(x)\,dx,$$

откуда $S_n(P_n) = 0$, т.е. всякая система полиномов необходимо замкнута по отношению к любому полиному какой угодно степени. На основании теоремы предыдущего пункта, примененной к рассматриваемому случаю, выводим следующую:

Всякая система полиномов Чебышева, какова бы ни была ее характеристическая функция $p(x)$, неотрицательная и интегрируемая в данном промежутке $[a, b]$, есть система абсолютно замкнутая.

Теорема п. 9 есть, очевидно, частный случай этой общей, если предположить, что $p(x) = 1/\sqrt{(b-x)(x-a)}$.

12. Рассмотрим теперь систему функций

$$\psi_k(\varphi) = \sqrt{2/\pi}\,\sin k\varphi \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{26}$$

которые, очевидно, удовлетворяют условиям

$$\int_0^\pi \psi_k(\varphi)\psi_m(\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin k\varphi \sin m\varphi\,d\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi \psi_k^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 k\varphi\,d\varphi = 1,$$

т.е. представляют ортогональную систему с характеристической функцией $p(\varphi) = 1$ и нормальную. Обозначим теперь через $f(\varphi)$ какую-либо функцию, имеющую интегрируемую производную в промежутке $[0, \pi]$, и положим

$$\begin{gathered} f(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} b_k\psi_k(\varphi) + \rho_n(\varphi), \\ b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi, \quad \psi_k(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin k\varphi. \end{gathered} \tag{26_1}$$

Имеем

$$f'(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{n} kb_k\cos k\varphi + \rho_n'(\varphi). \tag{27}$$

Возьмем теперь абсолютно замкнутую систему тригонометрических функций

$$\varphi_0(\varphi) = 1/\sqrt{\pi}, \quad \varphi_k(\varphi) = \sqrt{2/\pi}\, \cos k\varphi \tag{27_1}$$

и положим $f'(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(\varphi) + r_n(\varphi)$, где

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f'(\varphi)\, d\varphi, \qquad c_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f'(\varphi) \cos k\varphi\, d\varphi.$$

Предположим еще, что функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = f(\pi) = 0. \tag{28}$$

В таком случае

$$f'(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n} c_k \cos k\varphi + r_n(\varphi). \tag{29}$$

Но, в силу (28),

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(\varphi) \sin k\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f'(\varphi) \cos k\varphi\, d\varphi,$$

т.е. $b_k = c_k/k$, вследствие чего равенство (27) представляется в виде

$$f'(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n} c_k \cos k\varphi + \rho_n'(\varphi).$$

Отсюда на основании (29) получаем $\rho_n'(\varphi) = r_n(\varphi)$. При соблюдении условий (28) будем иметь, в силу (26_1), $\rho_n(0) = 0$. Поэтому

$$\rho_n(\varphi) = \int_0^\varphi r_n(\varphi)\, d\varphi,$$

откуда при помощи неравенства Бунявского выводим

$$|\rho_n(\varphi)| \leqslant \sqrt{\varphi} \sqrt{\int_0^\varphi r_n^2(\varphi)\, d\varphi} \leqslant \sqrt{\pi} \sqrt{S_n(f')}.$$

Но система функций (27_1) есть абсолютно замкнутая. Поэтому

$$|\rho_n(\varphi)| < \epsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

где n_0 есть соответствующим образом выбранное целое число, ϵ – наперед заданное положительное число.

Это неравенство показывает, что всякая функция $f(\varphi)$, имеющая интегрируемую производную в промежутке $[0, \pi]$, разлагается во всем этом промежутке в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi \int_0^\pi f(\varphi) \sin k\varphi\, d\varphi,$$

если только $f(\varphi)$ обращается в нуль на концах этого промежутка.

13. Из этой теоремы сейчас же вытекает, что система ортогональных функций (26) есть система замкнутая по отношению ко всякой функции, имеющей интегрируемую производную в промежутке $[0,\pi]$ и обращающейся в нуль на концах этого промежутка.

Пусть $f(\varphi)$ есть какая-либо функция, имеющая интегрируемую производную в промежутке $[0,\pi]$, но не обращающаяся в нуль на концах этого промежутка. Подразумевая под ϵ, как всегда, произвольно заданное положительное число, положим $F(\varphi)=\alpha\varphi$ и определим постоянную α из условия

$$F(\epsilon)=\alpha\epsilon=f(\epsilon). \tag{30}$$

Очевидно, для значений φ между 0 и ϵ будем иметь

$$|F(\varphi)|<M, \tag{31}$$

где M есть $\max f(x)$ в промежутке $[0,\pi]$.

Точно так же, положив $F_1(\varphi)=\beta(\pi-\varphi)$ и определив β из условия

$$F_1(\pi-\epsilon)=\beta\epsilon=f(\pi-\epsilon), \tag{30_1}$$

получим функцию $F_1(\varphi)$, удовлетворяющую условию

$$|F_1(\varphi)|<M \tag{31_1}$$

для всех точек промежутка $[\pi-\epsilon,\pi]$.

Составим теперь функцию $\psi(x)$, определяемую условиями

$$\psi(\varphi)=\begin{cases} F(\varphi) & \text{при} \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\epsilon, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \epsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi-\epsilon, \\ F_1(\varphi) & \text{при} \quad \pi-\epsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi. \end{cases} \tag{32}$$

Определенная таким образом функция в силу (30) и (30_1) непрерывна в промежутке $[0,\pi]$, имеет, очевидно, интегрируемую в этом промежутке первую производную и обращается в нуль при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

Следовательно, система тригонометрических функций (26) замкнута по отношению к функции $\psi(\varphi)$, т.е.

$$S_n(\psi)<\epsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant n_0. \tag{33}$$

14. Обращаемся снова к неравенству (10), положив в нем $F(x)=f(\varphi)$, $\Phi(\varphi)=\psi(\varphi)$. Приняв в расчет (32), получаем

$$\int_a^b p(x)\,[F(x)-\Phi(x)]^2\,dx=\int_0^\pi [f(\varphi)-\psi(\varphi)]^2\,d\varphi=$$

$$=\int_0^\epsilon [f(\varphi)-F(\varphi)]^2\,d\varphi+\int_{\pi-\epsilon}^\pi [f(\varphi)-F_1(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Отсюда в силу (31) и (31_1) выводим

$$\int_0^\pi [f(\varphi)-\psi(\varphi)]^2\,d\varphi<8M^2\epsilon.$$

Неравенство (10) при помощи этого неравенства и (33) дает

$$\sqrt{S_n(f)}<\sqrt{\epsilon}\,(1+2\sqrt{2}\,M)=\epsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant n_0$$

— неравенство, справедливое для любой функции $f(\varphi)$, подчиненной единственному условию, что она допускает интегрируемую производную в промежутке $[0, \pi]$.

Отсюда следует, что система функций $\psi_k(x)$ (26) есть система замкнутая по отношению к любой функции $f(\varphi)$, имеющей первую производную, интегрируемую в промежутке $[0, \pi]$.

Сопоставляя этот результат с общей теоремой п. 9, получаем теорему:

Система тригонометрических функций вида

$$\psi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\,\sin kx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{34}$$

есть система абсолютно замкнутая.

15. Установленные теоремы мы применим теперь к определению точных низших пределов отношения некоторых определенных интегралов к выводу некоторых других неравенств, имеющих существенное значение для дальнейших исследований.

Пусть $f(x)$ есть функция, имеющая производную $f'(x)$, интегрируемую в промежутке $[0, \pi]$.

По предыдущему имеем равномерное разложение

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx\,dx.$$

Отсюда $\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$.

Допустим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0. \tag{35}$$

В таком случае $\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. Но

$$a_k = -\frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f'(x) \sin kx\,dx = -\frac{b_k}{k}.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{k^2}. \tag{36}$$

Далее, так как система функций (34) абсолютно замкнута, то

$$\int_0^{\pi} f'^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2. \tag{36$_1$}$$

Равенства (35) и (36_1) приводят к следующему:

$$\int_0^{\pi} f'^2(x)\,dx \Big/ \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \Big/ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{k^2},$$

имеющему место для всякой функции $f(x)$, допускающей интегрируемую производную в промежутке $[0, \pi]$ и удовлетворяющей условию (35). Отсюда сейчас же заключаем, что при этом отношение

$$\int_0^\pi f'^2(x)\,dx \Big/ \int_0^\pi f^2(x)\,dx \geqslant 1.$$

Стоит заменить переменную x через $\dfrac{\pi}{b-a}x - \dfrac{\pi a}{b-a}$, чтобы привести предыдущее неравенство к виду*)

$$K = \int_a^b f'^2(x)\,dx \Big/ \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2}, \tag{37}$$

а условие (35) к такому:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{37_1}$$

Нетрудно убедиться, что *неравенство* (37) *дает точный низший предел рассматриваемого отношения для всякой функции, подчиненной условию* (37_1). Стоит только положить $f(x) = \cos\dfrac{\pi(x-a)}{b-a}$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условию (37_1), причем

$$K = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\int_a^b \sin^2\frac{\pi(x-a)}{b-a}\,dx \Big/ \int_a^b \cos^2\frac{\pi(x-a)}{b-a}\,dx = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

16. Подобным путем можно вывести многие другие неравенства, могущие иметь полезные приложения и сами по себе представляющие интерес.

Пусть $f(x)$ есть функция, могущая быть представленной в промежутке $[0, \pi]$ в виде интеграла

$$f(x) = \int_0^x f_1(z)\,dz, \tag{38}$$

где $f_1(z)$ есть некоторая интегрируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\pi f_1(x)\,dx = 0. \tag{38_1}$$

Очевидно, что $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(0) = f(\pi) = 0$. Приняв в расчет замкнутость системы функций $\psi_k(x)$ (26), можем писать

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty b_k^2.$$

С другой стороны, так как система функций $1/\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2/\pi}\cos kx$ есть

---

*) Аналогичное неравенство было выведено мною в 1896 г. в статье "Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня" (Сообщ. Харьковск. Матем. Общ., 1896 г.). Другое доказательство неравенства (37) было дано в 1901 г. в мемуаре "Problème de refroidissement d'une barre hétérogène" (Annales de Toulouse, 1901).

также абсолютно замкнутая, то

$$\int_0^\pi f_1^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty a_k^2, \tag{39}$$

ибо по условию $a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f_1(x)\,dx = 0$.

Так как, далее, в данном случае

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin kx\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f_1 \cos kx\,dx = -\frac{a_k}{k},$$

то

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k^2}{k^2}. \tag{39_1}$$

Равенства (39) и (39_1) приводят к следующему неравенству:

$$\int_0^\pi f_1^2(x)\,dx \Big/ \int_0^\pi f^2(x)\,dx \geqslant 1,$$

из которого, совершенно так же, как и в предыдущем пункте, заключаем, что *отношение*

$$K = \int_a^b f_1^2(x)\,dx \Big/ \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \tag{40}$$

для всякой функции $f(x)$ *вида* $f(x) = \int_a^x f_1(z)\,dz$, где $f_1(x)$ *есть интегрируемая функция, удовлетворяющая условию* $\int_a^b f_1(x)\,dx = 0$.

Неравенство (40) *дает точный низший предел для отношения* K, в чем убеждаемся, положив, в частности,

$$f(x) = \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}, \quad f_1(x) = f'(x) = \frac{\pi}{b-a} \cos \frac{\pi(x-a)}{b-a}.$$

17. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n составляющих

$[a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, b]$

и обозначим через l_k длину k-го из них (a_{k-1}, a_k).

Предположим, что функция $f(x)$, имеющая интегрируемую производную, удовлетворяет условиям

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = 0, \ \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = 0, \ \ldots, \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx = 0, \ \ldots,$$

$$\int_{a_{n-1}}^b f(x)\,dx = 0. \tag{41}$$

На основании теоремы п. 15 имеем

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f'^2(x)\,dx \Big/ \int_{a_{k-1}}^{a_k} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{\pi^2}{l_k^2}.$$

Заметив теперь, что

$$K = \int_a^b f'^2(x)\,dx \,/ \int_a^b f^2(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f'^2(x)\,dx \,/ \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f^2(x)\,dx, \tag{42}$$

на основании предыдущего неравенства заключаем, что

$$K \geqslant \pi^2/l^2, \tag{42_1}$$

где l обозначает наибольшее из чисел l_k.

Если в частности, все промежутки (40) равны между собой, то $l_k = l = (b - a)/n$ и мы получаем

$$K = \int_a^b f'^2(x)\,dx \,/ \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \frac{\pi^2 n^2}{(b - a)^2} \tag{42_2}$$

— *неравенство, справедливое для всякой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей условиям* (41) (при равенстве между собой всех n интервалов (40)).

Этим неравенством нам придется воспользоваться впоследствии.

ГЛАВА III

Простейшие задачи математической физики и им соответствующие дифференциальные уравнения. Три типа этих уравнений: 1) уравнения аналитической теории тепла, 2) уравнения звука (света, электричества, магнетизма), 3) уравнения установившихся (стационарных) физических процессов. Начальные и предельные условия. Определенность задачи. Простейший случай распространения или распределения тепла в телах линейных размеров

1. Решение задач математической физики приводится к определению одной или нескольких величин, характеризующих тот или иной физический процесс, совершающийся в данной среде (в данном теле), в зависимости от положения каждой точки этой среды и времени при помощи одного или нескольких дифференциальных уравнений. Эти уравнения выводятся при помощи небольшого числа возможно простых гипотез, которые полагаются в основу теории каждого физического явления и представляются как результат обобщения длинного ряда опытов и наблюдений над физическими процессами, которые действительно происходят в окружающей нас природе или создаются искусственно. В результате такого отвлечения (обобщения) создается небольшое число основных положений (гипотез), которые должны быть независимы между собой и не противоречить ни одному из известных в данное время фактор действительности. Эти гипотезы полагаются в основу теории того или иного физического явления и вся теория развивается затем дедуктивно при помощи аксиом математики и основных законов

общей механики по методам дифференциального и интегрального исчислений.

Таким путем по физическим данным каждой задачи составляются дифференциальные уравнения, характеризующие сущность рассматриваемого процесса для каждой точки среды и для каждого момента времени. Задача сводится к определению в функции времени координат каждой точки среды, в которой происходит изучаемое явление, и величин, определяющих физические свойства среды, тех неизвестных, которые фигурируют в полученных дифференциальных уравнениях, т.е. к интегрированию этих уравнений. При этом получаемое таким путем решение должно удовлетворять всем данным, которые получаются как результат непосредственного наблюдения над изучаемым процессом.

2. Положим, например, что мы желаем изучить закон изменения температуры с течением времени в каждой точке внутри данного твердого тела, нагретого до известной температуры и помещенного затем в среду, температура которой равна нулю. Тепловые свойства каждого тела характеризуются тремя следующими величинами: удельной теплотой каждой его точки, которую обозначим через c, его внутренней теплопроводностью, которую обозначим через k, и его плотностью, которую обозначим через ρ. Вообще говоря, величины c, k и ρ суть функции координат x, y и z точек тела, различные для тел различного физического состава. Распределение температуры должно зависеть от этих величин, которые являются данными, наперед известными по опыту, для каждого тела.

Если обозначим через U искомую температуру данного тела, то при помощи гипотез, положенных Фурье в основу аналитической теории тепла, выводится упомянутым выше путем следующее дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая температура U для любого момента времени и для всех точек x, y, z тела*):

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial\left(k \dfrac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k \dfrac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z}. \tag{1}$$

Это есть дифференциальное уравнение, которое допускает бесчисленное множество различных решений.

Но в данной физической задаче, нам наперед известна температура U в тот момент, когда мы поместили нагретое тело в среду с температурой нуль, т.е. известно значение U для всех точек тела в этот момент. Следовательно, необходимо найти такое решение уравнения (1), которое в начальный момент $t = t_0$ обращалось бы в наперед данную функцию от x, y и z.

Кроме того, поверхность, ограничивающая тело, непосредственно доступна нашему наблюдению, и мы можем путем опыта знать, какое количество тепла теряет тело в любой точке поверхности путем внешнего лучеиспускания. Решение уравнения (1) должно быть таково, чтобы количество тепла, теряемого телом в каждом элементе ограничивающей его поверхности через внешнее лучеиспускание, уравновешивалось в любой момент времени

*) В нашу задачу не входит вывод самого уравнения, как и всех других уравнений математической физики, с которыми будем иметь дело. Классические выводы всех таких уравнений читатель найдет в любом руководстве по теоретической физике.

количеством тепла, протекающим изнутри тела к каждому из этих элементов поверхности.

Таким образом, в данной задаче приходится интегрировать уравнение (1) при соблюдении двух дополнительных условий: условия, которое должно быть выполнено в начальный момент времени, и условия, которое должно соблюдаться в каждый момент времени во всех точках поверхности, ограничивающей тело.

3. Для второго примера рассмотрим задачу о колебании упругой струны.

Предположим, что в начальный момент времени струна натянута горизонтально и закреплена в концах. Примем прямую, по которой расположены точки струны в начальный момент, за ось x. Выводим все точки струны из этого положения, сообщая им некоторые отклонения в плоскости, проходящей через ось x, и различные скорости отклоненным точкам в направлении, перпендикулярном к оси x, и предоставляем ее затем самой себе. Под влиянием развившихся при этом упругих сил струна начнет колебаться.

Если обозначим через U отклонение каждой точки струны от положения равновесия, то U будет функцией времени t и абсциссы x. Задача о колебании струны будет решена, если мы будем знать закон изменения величины U в зависимости от времени t и переменной x, определяющей положение каждой точки струны на оси x.

Упругие свойства каждого элемента струны характеризуются двумя величинами: модулем упругости, который обозначим через E, и плотностью ρ. При помощи гипотез, положенных в основу теории упругих тел, созданной Коши и Сен-Венаном, доказывается, что для каждого момента времени и для каждой точки x струны отклонение U должно удовлетворять дифференциальному соотношению вида

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} . \tag{2}$$

Вообще говоря, E и ρ суть величины, различные для разных точек струны, так что E/ρ есть некоторая функция от x, известная по непосредственному опыту для каждой струны данного физического состава.

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = p(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \tag{3}$$

где положено $p(x) = E/\rho$.

Уравнение (3) также допускает бесчисленное множество различных решений, но из всех этих решений необходимо выбрать то, которое будет удовлетворять всем поставленным выше физическим условиям задачи.

В начальный момент времени и величина U (отклонение точек струны от положения равновесия) и сообщенные этим точкам скорости, т.е. значения производной $\frac{\partial U}{\partial t}$, должны совпадать с теми, которые были даны в действительности. Кроме того, так как концы струны должны оставаться закрепленными (неподвижными), то для всякого t величина U должна равняться нулю для значений x, соответствующих концам струны.

В этом случае опять решение задачи приводится к интегрированию дифференциального уравнения (3) при соблюдении двух условий в начальный момент времени и двух условий на границах той физической среды, в которой происходит изучаемое явление.

4. От теории тепла и звука переходим к некоторым простейшим вопросам гидродинамики.

Предположим, что однородная масса газа (сжимаемой жидкости) заключена внутри твердого сосуда, движущегося данным образом в пространстве. Допустим, что в начальный момент времени частицам жидкости сообщено некоторое движение такое, что при дальнейшем движении жидкой массы проекции u, v, w скорости каждой ее точки на прямоугольные оси x, y, z оказываются частными производными по соответствующим координатам некоторой функции U от времени t и координат x, y, z, т.е. что жидкость получает, как говорят, движение с потенциалом скоростей U.

В гидродинамике доказывается, что движение газа будет происходить таким образом, что потенциал скоростей U в любой момент t и во всякой точке x, y, z будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \qquad (4)$$

где a^2 есть некоторая постоянная, зависящая от физических свойств данного газа. Движение жидкости будет известно, коль скоро будет известна функция U, удовлетворяющая уравнению (4).

Но и в данном случае не всякое решение этого уравнения будет отвечать поставленной физической задаче. Необходимо, чтобы U и первая производная U по t принимали в момент времени, который мы принимаем за начальный, те самые значения, которые им сообщены в действительности, т.е. чтобы U и $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ обращались в наперед заданные функции от координат x, y, z. Кроме того, так как газ должен целиком заполнять всю внутренность твердого сосуда без образования разрывов и пустот, то на стенках сосуда составляющая скорости каждой прилегающей к стенке частицы жидкости по направлению нормали к поверхности сосуда (его стенке) должна равняться нормальной составляющей скорости той точки стенки сосуда, которая совпадает с рассматриваемой частицей жидкости, а нормальная составляющая скорости каждой точки твердой стенки сосуда есть величина известная, ибо движение сосуда наперед задано.

Здесь опять приходим к необходимости искать такое решение дифференциального уравнения (4), которое должно удовлетворять двум заданным начальным условиям и одному условию на поверхности, ограничивающей рассматриваемую жидкую массу, т.е. так называемому предельному (или граничному) условию.

5. Различные задачи теории света, электричества и магнетизма также приводятся к интегрированию уравнений, аналогичных уравнению (4).

Так, обращаясь к электромагнитной теории света Максвелла, обозначим через c скорость света, через ϵ — так называемую диэлектрическую постоянную данной силы, через λ — коэффициент электропроводности, через μ — коэффициент так называемой электрической проницаемости.

Закон распространения электрических волн в данной среде по теории Герца — Максвелла характеризуется вектором U электрических сил, который как функция времени t и координат x, y, z точек среды должен удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)=\epsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+4\pi\lambda\mu\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (5)$$

При $\lambda = 0$ это уравнение совпадает с (4), если положим

$c^2/\epsilon\mu = a^2$.

Если среда, в которой происходит явление, есть свободный эфир, то

$\epsilon = 1, \quad \mu = 1, \quad \lambda = 0$

и уравнение (5) приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \qquad (5_1)$$

В данном случае среда, в которой происходит явление, беспредельна; за границы ее можно принимать бесконечно удаленные точки пространства. Величина $4\pi\lambda\mu\dfrac{\partial U}{\partial t}$ характеризует потерю электрических сил с течением времени, или так называемую абсорбцию.

Задача получит определенный смысл, если мы зададим в начальный момент времени распределение электрических сил, т.е. значения U для этого момента для всех точек x, y, z пространства и абсорбцию, т.е. значения $\dfrac{\partial U}{\partial t}$. Таковы начальные условия задачи.

Предельные (граничные) условия заменяются некоторыми условиями, которые налагаются на значения функции U для бесконечно удаленных точек среды.

Мы видим, между прочим, что с аналитической точки зрения рассматриваемая задача тождественна с задачей гидродинамики предыдущего пункта, если предположить, что жидкость (газ) заполняет не замкнутый сосуд ограниченных размеров, а все беспредельное пространство.

6. Мы рассматривали до сих пор простейшие случаи, когда явление характеризовалось вполне одной величиной, для определения которой получалось одно дифференциальное уравнение. Вообще же в математической физике изучаются и такие физические процессы, которые определяются не одним, а несколькими параметрами, причем для определения этих параметров, зависящих от нескольких независимых переменных, получается система дифференциальных уравнений с частными производными.

Простейшими примерами могут служить общие уравнения гидродинамики, электромагнитной теории света, теории колебания упругих твердых тел и др. Так, например, закон колебания упругого твердого тела будет известен, если будут известны величины u, v и w перемещений каждой точки тела в функции времени t и координат x, y, z.

Аналитически задача приводится к определению величин u, v и w при помощи следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\
\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \qquad (6) \\
\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},
\end{aligned}$$

где μ есть плотность тела, X, Y и Z – заданные функции от x, y, z, представляющие собой проекции на оси прямоугольных координат заданных объемных сил, действующих на частицы тела, а X_x, $X_y, \ldots, Z_z$ суть линейные функции от частных производных первого порядка по x, y, z искомых функций u, v и w с постоянными коэффициентами, зависящими от физических свойств данного тела.

В момент, принимаемый за начальный, нам известны и отклонения u, v, w всех точек тела от их естественного состояния и скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, которые сообщены точкам в этот начальный момент, т.е. все эти шесть величин должны быть заданными функциями координат x, y, z при значении t, которое принимается за начальное. Таким образом, задача приводится к интегрированию уравнений (6) при выполнении только что указанных шести начальных условий.

Кроме того, нам известны те силы, которые прилагаются к точкам поверхности, ограничивающей тело, с внешней стороны. Если частицы тела, прилегающие к его поверхности, не отрываются от тела этими заданными силами, то необходимо предположить, что составляющие последних по нормали к поверхности уравновешиваются нормальной составляющей тех внутренних упругих напряжений тела, которые при этом развиваются в теле.

Удовлетворяя этому условию, придем к заключению при помощи основных положений теории упругости, что в каждой точке поверхности при всех значениях времени t должны быть выполнены следующие предельные (поверхностные) условия:

$$\begin{aligned}
X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z), \\
Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \qquad (7) \\
Z_n &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z),
\end{aligned}$$

где X_n, Y_n, Z_n – проекции на оси координат нормальной составляющей внешних сил, приложенных к точкам поверхности тела, т.е. заданные функции x, y и z, а n обозначает направление нормали к поверхности тела в точке x, y, z (идущее внутрь тела).

И в рассматриваемом случае приходится искать такие решения уравнений (6), которые удовлетворяют указанным выше шести начальным условиям и трем предельным (поверхностным) условиям вида (7).

7. В предыдущих примерах мы рассматривали такие явления тепла, звука, света, электричества, когда величины, их характеризующие, изменяются с течением времени, т.е. так называемые неустановившиеся динамические процессы.

В частности возможны и такие динамические процессы, когда величины, их характеризующие, не зависят от времени. В этом случае получаются так называемые установившиеся движения.

Предположим, например, что несжимаемая жидкость заключена в твердом замкнутом сосуде, который вращается равномерно вокруг некоторой неподвижной оси. Жидкость заполняющая сосуд, может при этом двигаться с потенциалом скоростей (см. п. 4), который будет зависеть лишь от координат x, y, z (и не зависеть от времени). Получится установившееся течение в рассматриваемой жидкой массе.

Определение потенциала U приведется к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{8}$$

которому должно удовлетворять U во всех точках внутри сосуда (и которое получается из (4), если предположить, что U не зависит от t). При этом, понятно, начальные условия отпадают, но предельные условия по-прежнему должны выполняться. Нормальная составляющая скорости любой частицы жидкости, прилегающей к стенке сосуда, должна по-прежнему равняться нормальной составляющей скорости соответствующей точки твердого сосуда. Так как в данном случае проекции u, v, w скоростей точки жидкости на оси координат суть

$$u = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то нормальная составляющая жидкой частицы в точке x, y, z поверхности сосуда будет равна значению выражения

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(n, z)$$

для этих значений x, y и z. Нормальная же составляющая скорости той точки стенки твердого сосуда, координаты которой имеют те же самые значения, известна, ибо нам дано движение сосуда, т.е. представляется заданной функцией $f(x, y, z)$ координат точек его поверхности.

Задача приводится, следовательно, к отысканию такого решения U уравнения (8), которое удовлетворяет предельному (поверхностному) условию

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(n, z) = f(x, y, z)$$

во всех точках поверхности, ограничивающей жидкость.

Заметим, что задача является основной в гидродинамике и носит название задачи Карла Неймана.

8. К подобным же задачам анализа приводятся и все статические задачи физики, как, например, задача о тепловом равновесии тела, о распределе-

нии статического электричества на данном кондукторе, задача о равновесии упругих тел, задачи теории притяжения по закону Ньютона и т.п.

Так, например, задача о равновесии электричества на кондукторе данной поверхности приводится к определению потенциала U электрических масс, распределенных по поверхности кондуктора, при условии, чтобы U и внутри и вне поверхности кондуктора удовлетворял уравнению

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{9}$$

которое носит название уравнения Лапласа, обращался в нуль для бесконечно удаленных точек пространства и стремился к постоянной величине при приближении точки x, y, z с внешней стороны к любой точке поверхности кондуктора.

Если такое предельное значение U в точках поверхности кондуктора обозначим через U_e, то предыдущие условия представятся в виде

$$U_e = \text{const}, \quad \lim_{r \to \infty} U = 0, \tag{10}$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Задача опять приводится к определению такого решения уравнения (9), которое удовлетворяло бы предельным условиям вида (10).

9. Мы имеем в этом примере частный случай так называемой внешней задачи Дирихле, имеющей первостепенное значение как в анализе, так и в математической физике.

В общем виде эта задача распадается на две: внутреннюю и внешнюю. В первой требуется найти такое решение уравнения Лапласа для всех точек, лежащих внутри данной замкнутой поверхности, которое удовлетворяло бы предельному условию

$$U_i = f(x, y, z),$$

где U_i обозначается предел, к которому стремится функция U при приближении точки x, y, z к какой-либо точке поверхности с ее внутренней стороны, а $f(x, y, z)$ означает заданную функцию точек этой поверхности.

Внешняя задача требует определения функции U, удовлетворяющей уравнению Лапласа во всех точках, внешних по отношению к некоторой данной замкнутой поверхности, при условии соблюдения предельных условий вида

$$U_e = f(x, y, z), \quad \lim_{r \to \infty} U = 0.$$

10. Во всех предыдущих примерах, взятых из разнообразных областей математической физики, задача сводилась к интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными, причем все эти уравнения были линейными по отношению к частным производным искомой функции (или искомых функций) и все – второго порядка.

Встречаются и такие задачи математической физики, где приходится иметь дело с уравнениями высших порядков, но мы не будем пока останавливаться на этих более сложных вопросах, ограничившись сначала исследованием простейшего случая уравнений указанного выше типа. Притом будем для простоты рассматривать случай одного дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией.

Все приведенные выше примеры таких уравнений заключаются, как частные, в следующем уравнении общего типа:

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b\frac{\partial U}{\partial t} + \Sigma A_{\alpha+\beta+\gamma}\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} +$$

$$+ m\frac{\partial U}{\partial x} + n\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + lU = 0,$$

где α, β и γ суть целые числа*), удовлетворяющие уравнению

$$\alpha + \beta + \gamma = 2,$$

a, b, $A_{\alpha+\beta+\gamma}$, m, n, q и l – заданные функции от x, y и z (не зависящие от t).

Такого рода уравнения можно разделить на три типа:

1°. Уравнения, в которых $a = 0$, $b \neq 0$, т.е. содержащие лишь первую производную искомой функции U по t.

2°. Уравнения, в которых $a \neq 0$, $b = 0$, т.е. содержащие лишь вторую производную по t.

3°. Уравнения, в которых одновременно $a = 0$, $b = 0$, т.е. не содержащие ни первой, ни второй производных искомой функции по переменной t**).

Уравнения типа 1° соответствуют различным задачам теории тепла. Уравнения типа 2° охватывают область явлений, изучаемых в теории звука, света, электричества, гидродинамики, теории упругости. Уравнения типа 3° характеризуют различные задачи об установившихся процессах и задачи о равновесии. В двух первых случаях задача приводится к интегрированию соответствующих дифференциальных уравнений при соблюдении некоторых начальных и предельных условий, в третьем – начальные условия отпадают и остаются лишь предельные условия, примеры которых указаны выше.

11. Эти начальные и предельные условия играют первостепенную роль в вопросах математической физики, такую же, как так называемые начальные данные в задачах общей механики.

Сущность физических процессов во всех подробностях нам неизвестна. Обобщая всю совокупность данных опыта и наблюдений, мы строим, как упомянуто выше, некоторое число наиболее вероятных гипотез, при помощи которых создаем в своем воображении особого рода механическую модель изучаемого физического явления. Чем полнее соответствие процессов, которые воспроизводятся этой моделью, с теми фактами, которые могут быть непосредственно наблюдаемы в действительном явлении природы, подмененном построенной нами моделью, тем эта модель лучше, тем более заслуживают доверия гипотезы, положенные в основу ее построения. Создав такую по возможности самую простую модель, механическая конструкция которой нам известна, мы получаем возможность изобразить законы ее движения в аналитических формах по принципам математики и общей механики. Получаемые таким путем математические соотношения характери-

*) Включая сюда и значения, равные нулю.

**) Смешанный случай, когда уравнение содержит и первую и вторую производные по t, мы рассматривать не будем.

зуют, строго говоря, не те движения, которые на самом деле совершаются в природе, а те, которые происходят и должны происходить в построенной нами модели.

Выводя аналитически различные свойства и особенности этих последних движений нашей модели, мы сравниваем затем полученные таким путем данные с фактами действительности. Если получается постоянное совпадение тех и других, если новые факты, выводимые из известных свойств построенной нами модели, подтверждаются опытом и наблюдениями, то соответствие между нашим искусственным построением и действительным физическим явлением делается все более заслуживающим доверия и гипотезы, положенные в основу наших суждений, становятся все более и более вероятными, превращаясь с течением времени в законы. Если же наоборот, хоть один вывод из аналитических формул, изображающих законы движения построенной модели, оказывается в явном противоречии с данными непосредственного наблюдения, то такая модель должна быть признана недостаточной, гипотезы (или некоторые из них), послужившие основой для ее построения, — неудовлетворительными, несоответствующими действительности. В таком случае приходится приниматься за построение новой модели или соответствующим образом видоизменять старую.

Вся история опытных наук, в особенности наиболее точных из них, как то: геометрии, механики, физики, астрономии, представляет собой образец создания и постоянной перестройки такого рода моделей.

12. Применяя сказанное к интересующим нас задачам математической физики, мы должны прежде всего отметить следующее: если дифференциальные уравнения с упомянутыми выше начальными и предельными условиями построены не на ошибочных основаниях, не находятся в явном противоречии с действительностью, то они должны давать для каждой задачи единственный и вполне определенный ответ, подобно тому, как дифференциальные уравнения общей механики при определенных начальных данных должны давать единственное и вполне определенное решение.

В действительной, наблюдаемой нами природе всякий физический процесс, вызываемый определенными причинами, всегда принимает определенное, единственно возможное течение. Материальное тело, например, помещенное в определенное положение в пространстве и пущенное с определенной скоростью под действием данных сил, может приобрести одно и только одно определенное движение.

Поэтому *первым и необходимым условием соответствия движений в построенных нами моделях с движениями в действительных физических процессах, которые мы желаем изобразить при помощи этих механических моделей, является требование, чтобы упомянутые выше дифференциальные уравнения в совокупности с начальными и предельными условиями давали, как сказано выше, единственное и вполне определенное решение.*

13. В дальнейшем мы подвергнем последовательному изучению дифференциальные уравнения трех типов, указанных в п. 10, в соответствии с различными задачами математической физики, которые характеризуются этими различными типами уравнений.

Начнем со случая 1^0, соответствующего процессам движения теплоты в материальных средах, и в этой области изучим сначала простейшие вопросы о распространении тепла в телах линейных размеров. К таковым принадлежат классические задачи об охлаждении неоднородного твердого стержня, об охлаждении стержня, согнутого в дугу и приведенного в соприкосновение концами его, задача об охлаждении неоднородного сплошного кольца и др. В соответствии с тем, что сказано в предыдущем пункте, займемся прежде всего выяснением тех обстоятельств, при которых соответствующие такого рода задачам уравнения, начальные и предельные условия дают действительно единственное и определенное решение.

ГЛАВА IV

Задачи об охлаждении неоднородного твердого стержня, сплошного неоднородного кольца, изогнутого стержня. Им соответствующие дифференциальные уравнения, начальные и предельные условия. Аналитическое обобщение этих задач. Определение условий, достаточных для определенности задачи. Общий прием решения этих задач по методам Эйлера, Бернулли, Фурье, Ляме. Две основные задачи, из них вытекающие: (А) Определение характеристических чисел и им соответствующих фундаментальных функций; (В) Разложение произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям

1. Обозначим, как и в п. 2 предыдущей главы, через c удельную теплоту в каждом поперечном сечении тонкого твердого стержня, через k – его внутреннюю теплопроводность, через m – лучеиспускательную способность каждого поперечного сечения, через ρ – его плотность. Предположим, что стержень нагрет до некоторой определенной температуры и в таком состоянии помещен в среду, температура которой, предположим для простоты, равна нулю. С этого момента, который примем за начальный, стержень начнет охлаждаться, теряя тепло во внешнее пространство как путем лучеиспускания каждого поперечного его сечения, так и путем лучеиспускания с площадок его крайних сечений.

Примем за ось x прямую, по которой расположен стержень. Приравнивая то количество тепла, которое притекает за промежуток времени dt к элементарному объему стержня, тому количеству тепла, которое необходимо для повышения температуры этого объема на $\dfrac{\partial U}{\partial t}\,dt$, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$g\,\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) - mU, \quad g = c\rho, \tag{1}$$

которому должна удовлетворять температура U в каждый момент времени t и для всякой точки x стержня.

Предположим, что начало оси x совпадает с одним из концов стержня, и обозначим через l его длину. Примем за начальный момент времени $t = 0$, что всегда можем сделать.

Так как температура U известна для каждой точки x стержня в момент $t = 0$, то получаем начальное условие задачи в виде

$$U(0, x) = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ — заданная функция от x для всех значений x от $x = 0$ до $x = l$.

Выражая, наконец, аналитически условие, что количество тепла, притекающего изнутри стержня к каждому из крайних его сечений, должно уравновешивать количество тепла, теряемое этими сечениями через лучеиспускание во внешнюю среду, получим два следующих предельных условия рассматриваемой задачи, которые должны выполняться для любого значения t и для значений $x = 0$ и $x = l$:

$$\begin{aligned} &k \frac{\partial U}{\partial x} - hU = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ &k \frac{\partial U}{\partial x} + HU = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \end{aligned} \tag{3}$$

где h и H обозначают лучеиспускательные способности двух крайних сечений стержня.

По физическому смыслу величины g и k суть функции от x, всегда положительные и не обращающиеся в нуль в промежутке $[0, l]$, а m есть функция, только неотрицательная, могущая принимать и значения, равные нулю. Что касается h и H, то это суть величины постоянные, могущие изменяться от 0 до $+\infty$, сохраняя всегда положительные значения.

Таким образом, решение задачи приводится к интегрированию уравнения с частными производными (1) при начальном условии (2) и предельных условиях (3).

2. Другой классической задачей для тел линейных размеров, которая, как и предыдущая, была поставлена Фурье, является задача об охлаждении неоднородного сплошного кольца. Под этим именем подразумевается весьма тонкое (в пределе бесконечно тонкое) твердое тело, имеющее вид какой угодно замкнутой и не пересекающей себя кривой.

Если такое тело, нагретое до известной температуры, поместить в среду с температурой нуль, то оно начнет изменять свою температуру с течением времени. Фурье указал, что закон изменения температуры U с течением времени и в различных точках такого тела должен подчиняться тому же самому уравнению (1), если только подразумевать в нем под x дугу кривой, представляющей контур кольца и отсчитываемой от некоторой его определенной точки в определенном направлении. Очевидно, что в данном случае начальное условие остается неизменным, т.е. дается тем же уравнением (2). Что же касается предельных условий (3), то они заменятся двумя следующими:

$$U(t, 0) = U(t, l), \qquad \frac{\partial U(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial U(t, l)}{\partial x}, \tag{4}$$

где l обозначает периметр кривой кольца. Условия (4) выражают аналитически требование непрерывности температуры и ее течения в рассматриваемом замкнутом (сплошном) теле.

3. Эта задача допускает различные обобщения.

Вместо сплошного кольца мы можем рассматривать стержень, согнутый в какую-либо дугу, приведя в соприкосновения его крайние сечения. Закон изменения температуры U для всех точек такого согнутого стержня, лежащих между его концами, будет, очевидно, определяться тем же самым дифференциальным уравнением вида (1), если считать в нем, как и в случае сплошного кольца, x за дугу кривой, получившейся после изогнутия стержня. Останется неизменным и начальное условие (2), но предельные условия будут, вообще говоря, иные.

Ввиду различия физических свойств в крайних площадках стержня, приведенных лишь в соприкосновение, температура U может изменяться скачком при переходе по дуге кривой с одной стороны плоскости их соприкосновения на другую. Если при этом остановимся на гипотезе, принятой в теории теплоты, что количество тепла, протекающего через плоскость соприкосновения с одной стороны на другую, пропорционально разности температур, то придем к следующим условиям:

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial U(t,0)}{\partial x} - h\,[U(t,0)-U(t,l)] = 0 \qquad \text{при} \quad x=0,\\ &k\frac{\partial U(t,l)}{\partial x} - h\,[U(t,0)-U(t,l)] = 0 \qquad \text{при} \quad x=l^{*}), \end{aligned} \tag{5}$$

где h — положительная постоянная.

Если допустим, что температурного скачка в месте соприкосновения не происходит, что соответствует предельному случаю, когда постоянная h обращается в ∞, то предыдущие условия заменятся такими:

$$U(t,0)=U(t,l), \quad k(0)\frac{\partial U(t,0)}{\partial x} = k(l)\frac{\partial U(t,l)}{\partial x} \;{}^{**})$$

4. Можно предположить, наконец, что согнутый стержень образует незамкнутую кривую и в таком виде помещен в среду, температура которой равна нулю. Здесь возможны различные предположения.

При некотором положении его крайних сечений может случиться, например, что каждой из этих сечений будет терять тепло через лучеиспускание и в то же время поглощать часть лучистой теплоты, испускаемой другим, ему противостоящим крайним сечением. Дифференциальное уравнение, характеризующее закон изменения тепла в теле, останется тем же, начальное условие также не изменится, но предельные условия заменятся, вообще говоря, такими:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(t,0)}{\partial x} = \alpha U(t,0) + \beta U(t,l),\\ &\frac{\partial U(t,l)}{\partial x} = \gamma U(t,0) + \delta U(t,l) \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть некоторые постоянные.

---

*) Значения k при $x=0$ и $x=l$ различны.

**) См., например, Riemann-Weber, "Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathem. Physik" (Bd. II, 1912, p. 85, § 34).

5. Сопоставляя все сказанное, видим, что различные задачи об охлаждении тел линейных размеров, переведенные на язык анализа, сводятся к интегрированию дифференциального уравнения (1) при начальном условии (2) и при различных предельных условиях. Эти последние являются частными случаями следующих двух условий общего вида:

$$\begin{aligned} L(U) &= a_1 U(t,0) + a_2 \frac{\partial U(t,0)}{\partial x} + a_3 U(t,l) + a_4 \frac{\partial U(t,l)}{\partial x} = 0, \\ L_1(U) &= b_1 U(t,0) + b_2 \frac{\partial U(t,0)}{\partial x} + b_3 U(t,l) + b_4 \frac{\partial U(t,l)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где a_k и b_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ суть некоторые постоянные. В этом обобщенном виде мы и будем рассматривать задачу.

6. Преобразуем прежде всего дифференциальное уравнение (1) к несколько иному виду. Умножим его на k и вместо независимой переменной x введем новую ξ, положив

$$d\xi = \frac{dx}{k}, \quad \xi = \int_0^x \frac{dx}{k} + C, \tag{9}$$

где C есть некоторая постоянная. Так как по предыдущему функция k, оставаясь положительной в промежутке $[0, l]$, не обращается в нуль ни в одной из его точек, то преобразование (9) всегда возможно.

Если положим

$$gk = p(\xi), \quad mk = q(\xi), \tag{10}$$

то уравнение (1) примет вид

$$p(\xi)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - q(\xi)\, U.$$

Для простоты мы опять заменим букву ξ через x и будем в дальнейшем исходить из уравнения вида

$$p(x)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x)\, U, \tag{A}$$

предполагая, что x меняется в пределах от a до $b (b > a)$. При этом преобразовании переменной условия (8) заменятся, очевидно, такими:

$$\begin{aligned} L(U) &= a_1 U(t,a) + a_2 \frac{\partial U(t,a)}{\partial x} + a_3 U(t,b) + a_4 \frac{\partial U(t,b)}{\partial x} = 0, \\ L_1(U) &= b_1 U(t,a) + b_2 \frac{\partial U(t,a)}{\partial x} + b_3 U(t,b) + b_4 \frac{\partial U(t,b)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{B}$$

К этим условиям нужно еще присоединить начальное условие вида

$$U(0, x) = f(x). \tag{C}$$

Приняв в расчет выражения (10) для $p(x)$ и $q(x)$ и сказанное раньше о свойствах функций k, g и m, заключаем, что для задач математической физики функции $p(x)$ и $q(x)$ в основном уравнении (A) должно считать неотрицательными в промежутке $[a, b]$, причем первая из них не должна обращаться в нуль ни в одной из точек этого промежутка.

7. Линейные формы правых частей предельных условий (B) должны быть линейно независимыми между собой. Поэтому по крайней мере одна из разностей

$$a_i b_k - a_k b_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

должна быть отлична от нуля.

Чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, рассмотрим разность $a_2 b_4 - a_4 b_2$. Возможны два случая: (а) либо эта разность не равна нулю, либо (в) эта разность равна нулю (а какая-либо другая не нуль).

В первом случае (а) уравнения (B) можно решить относительно величин

$$\frac{\partial U(t, a)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(t, b)}{\partial x},$$

причем получим

$$\frac{\partial U(t, b)}{\partial x} = \alpha U(t, a) + \beta U(t, b), \qquad (B_1)$$

$$\frac{\partial U(t, a)}{\partial x} = \gamma U(t, a) + \delta U(t, b),$$

где α, β, γ и δ суть некоторые постоянные.

Во втором случае (в) уравнения (B) легко приводятся к двум следующим:

$$U(t, b) = \rho U(t, a), \qquad (B_2)$$

$$\frac{\partial U(t, b)}{\partial x} = \sigma \frac{\partial U(t, a)}{\partial x} + \tau U(t, a),$$

где ρ, σ и τ – также некоторые постоянные*).

В дальнейшем мы будем различать два класса задач: к первому классу отнесем те, которые требуют интегрирования уравнения (A) при предельных условиях вида (B_1), ко второму те, когда интегрирование уравнения (A) должно быть выполнено при соблюдении условий (B_2).

Припоминая сказанное выше (см. пп. 1 – 5), убеждаемся, что условия (B_1) заключают в себе задачи об охлаждении незамкнутых твердых тел ли-

*) Здесь предположено, что кроме условия (в) выполнено также условие $a_3 b_4 - a_4 b_3 \neq 0$. Если вместо последнего неравенства выполняется неравенство $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то условия (B) приводятся к граничным условиям, которые получаются из (B_2), если в них поменять местами точки a и b. Кроме того, возможен еще случай, когда граничные условия (B) приводятся к виду

$$u(t, b) = \rho u(t, a), \quad b_1 u(t, a) = b_2 \frac{\partial u}{\partial x}(t, a),$$

где $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ и $\rho b_2 = 0$, и случай, получающийся из последнего заменой a на b. Последние два случая называются исключительными и рассматриваются в гл. VI (условия (2), (3) или (4) гл. VI). (*Прим. ред.*).

нейных размеров (прямой стержень, стержень, изогнутый в незамкнутую кривую), вторые же (B_2) соответствуют таким же задачам замкнутых твердых тел линейных размеров (сплошное кольцо, стержень, изогнутый в замкнутую кривую). Эти два класса задач, различные по физическим особенностям, представляют некоторые особенности и с точки зрения чистого анализа и потому заслуживают особого рассмотрения.

8. Рассматривая вопрос с чисто аналитической точки зрения, мы можем обобщить задачу, предполагая в уравнении (A) функции $p(x)$ и $q(x)$ какими угодно непрерывными функциями от x, не подчиняя их непременному условию оставаться положительными или не обращаться в нуль в промежутке $[a, b]$. Точно так же в предельных условиях (B_1) и (B_2) можем предполагать постоянные α, β, γ, δ и ρ, σ, τ какими угодно. Задачам же, могущим иметь приложение в математической физике, будут соответствовать лишь те случаи, когда уравнением (A), начальным условием (C) и предельными условиями (B_1) или (B_2) задача определяется вполне и единственным образом. Выяснением условий, достаточных для определенности задачи, мы прежде всего и займемся*).

Допустим, что существуют две различные функции U_1 и U_2, удовлетворяющие всем поставленным требованиям.

Положим $V = U_1 - U_2$. Так как дифференциальное уравнение (A) линейно относительно U и ее производных, то V удовлетворяет уравнению того же вида, т.е.

$$p(x) \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q(x) V,$$

и начальному условию

$$V(0, x) = 0. \tag{11}$$

Умножив предыдущее уравнение на $V dx$ и интегрируя результат по x от a до b, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b p(x) V^2 dx = \int_a^b V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx - \int_a^b q(x) V^2 dx, \tag{12}$$

так как

$$\int_a^b p(x) V \frac{\partial V}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b p(x) V^2 dx.$$

Заметив, далее, что

$$\int_a^b V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = V \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx,$$

приводим равенство (11) к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b p(x) V^2 dx + \int_a^b q(x) V^2 dx + \int_a^b \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx = V \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_a^b.$$

---

*) Решения при этом предполагаются достаточно гладкими функциями. (*Прим. ред.*)

Отсюда, интегрируя по t от 0 до какого-либо значения t, выводим

$$\frac{1}{2}\int_a^b p(x)V^2dx + \int_0^t dt\int_a^b q(x)V^2\,dx + \int_0^t dt\int_a^b\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dx =$$

$$= \int_0^t V\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b dt,$$

ибо, в силу (11), $\int_a^b p(x)V^2dx = 0$ при $t = 0$.

Если $p(x)$ и $q(x)$ суть функции только непрерывные, то из этого соотношения нельзя сделать никаких заключений относительно величины V. Допустим, что $p(x)$ и $q(x)$ остаются неотрицательными в промежутке $[a, b]$ (хотя и могут принимать значения, равные нулю*)). Очевидно, если при этом

$$V\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b \leqslant 0, \tag{13}$$

то необходимо $V = U_1 - U_2 = 0$ для всех значений t и при всех значениях x в промежутке $[a, b]$. Следовательно, если в уравнении (A) $p(x)$ и $q(x)$ остаются неотрицательными и соблюдается условие (13), то задача не может иметь более одного решения.

9. Рассмотрим подробнее условие (13). Предположим сначала, что искомая функция U принадлежит функциям 1-го класса, т.е. определяется предельными условиями вида (B_1). Очевидно, что V, равное разности двух различных значений U, удовлетворяет тем же условиям, т.е.

$$\frac{\partial V(t,b)}{\partial x} = \alpha V(t,a) + \beta V(t,b), \qquad \frac{\partial V(t,a)}{\partial x} = \gamma V(t,a) + \delta V(t,b).$$

При помощи этих соотношений находим

$$V\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b = \beta V^2(t,b) - \gamma V^2(t,a) + (\alpha - \delta)V(t,a)V(t,b),$$

т.е. выражение (13) есть квадратичная форма двух переменных $V(t, a)$ и $V(t, b)$. Эта форма наверное будет отрицательна при всех значениях аргументов, если

$$\beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \leqslant 0. \tag{14}$$

При этих условиях, как указано в конце предыдущего пункта, необходимо $V = U_1 - U_2 = 0$, т.е. *задача не может иметь более одного решения***).

---

*) Конечно, по-прежнему считается, что $p(x) \not\equiv 0$. Однако, для приводимого ниже рассуждения достаточно предположить, что $p(x) + q(x) \not\equiv 0$. (*Прим. ред.*)

**) Это предложение будет справедливо и в том случае, когда β, или γ, или оба вместе обращаются в нуль, если только при этом $\alpha - \delta = 0$.

Поэтому условия (14) можно заменить такими:

$$\beta \leqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0, \quad (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \leqslant 0, \tag{14_1}$$

условившись при этом при знаке равенства в одном или обоих из двух первых из этих трех неравенств в третьем непременно брать нижний знак (равенство).

10. Предположим теперь, что искомая функция U принадлежит функциям 2-го класса, т.е. удовлетворяет предельным условиям (B_2). В этом случае в силу (B_2), которым, очевидно, удовлетворяет и функция V, получаем

$$V\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_a^b = (\rho\sigma - 1)V(t,a)\frac{\partial V(t,a)}{\partial x} + \rho\tau V^2(t,a).$$

Правая часть этого выражения будет наверное отрицательна или равна нулю при всевозможных (вещественных) значениях

$$V(t,a) \quad \text{и} \quad \frac{\partial V(t,a)}{\partial x},$$

если

$$\rho\sigma - 1 = 0, \quad \rho\tau \leqslant 0, \tag{15}$$

т.е. когда условия (B_2) принимают вид

$$U(t,b) = \rho U(t,a), \qquad \frac{\partial U(t,b)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U(t,a)}{\partial x} + \tau U(t,a), \tag{B_3}$$

где постоянные ρ и τ подчинены условию

$$\rho\tau \leqslant 0. \tag{15_1}$$

Таким образом, *при выполнении условий* (15) *все задачи второго класса не могут иметь более одного решения.*

11. Замечательно, что во всех задачах математической физики двух отмеченных нами типов соблюдаются соответственно условия (14) и (15). Так, в задаче об охлаждении прямого стержня условия (3) (п. 1) при замене переменной x через $\int_0^x \frac{dx}{k} + C$ (см. (9) п. 6) приводятся к виду

$$\frac{\partial U(t,b)}{\partial x} + HU(t,b) = 0,$$

$$\frac{\partial U(t,a)}{\partial x} - hU(t,a) = 0,$$

$$h \geqslant 0, \ H \geqslant 0.$$

В данном случае $\alpha = \delta = 0$, $\beta = -H < 0$, $\gamma = h > 0$. Условия (14), очевидно, соблюдены.

В случае задачи согнутого стержня, крайние сечения которого приведены в соприкосновение (п. 3), условия (5) приводятся к виду

$$\frac{\partial U(t,b)}{\partial x} = h[U(t,a) - U(t,b)],$$

$$\frac{\partial U(t,a)}{\partial x} = h[U(t,a) - U(t,b)].$$

В этом случае $\alpha = h, \beta = -h, \gamma = h, \delta = -h, h > 0$, т.е. $\beta < 0, \gamma > 0$, $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$.

В задаче об охлаждении сплошного кольца, принадлежащей задачам 2-го класса, условия (4) представляются в виде*)

$$U(t, b) = U(t, a), \qquad \frac{\partial U(t, b)}{\partial x} = \frac{\partial U(t, a)}{\partial x}, \tag{16}$$

т.е. $\rho = \sigma = 1$, $\tau = 0$. Условия (15), очевидно, соблюдены.

Случай, когда в согнутом стержне в месте соприкосновения крайних сечений не происходит скачка температуры, т.е. когда предельные условия имеют вид (6), также принадлежит задачам 2-го класса. Но этот случай аналитически не отличается от только что рассмотренного, ибо условия (6) после их преобразования к новой переменной по формуле (9) приводятся к виду (16). Следовательно, и в этом случае условия (15) также соблюдаются.

На основании сказанного можем утверждать, что *во всех изучаемых в теории тепла задачах о распределении температуры в твердых телах линейных размеров может получиться одно и только одно определенное решение, если только таковое возможно.*

Первое испытание правильности гипотез, положенных в основу теории тепла, приводит, таким образом, к удовлетворительному результату (см. п. 13 гл. III).

Заметим, что полученный результат легко распространяется и на предельные случаи, когда некоторые из постоянных в уравнениях (B_1) и (B_2) обращаются в бесконечность, но мы на этом сейчас останавливаться не будем.

12. Из доказанной теоремы вытекает следующее весьма важное следствие.

Так как задача при соблюдении условий (14) или (15) может допускать только одно решение, то, если каким бы то ни было способом мы найдем некоторую функцию $U(t, x)$, удовлетворяющую уравнению (A), начальному условию (C) и предельным условиям (B_1) или (B_2), найденная таким путем функция $U(t, x)$ даст окончательный, единственно возможный ответ.

Для одной задачи математической физики весьма частного характера, а именно для задачи о колебании однородной упругой струны, Эйлер, а затем Бернулли предложили особый прием решения, который был распространен затем Фурье, Пуассоном и позднее Ляме на другие задачи подобного рода. Идею этого метода мы сейчас и изложим в применении к интересующему нас вопросу.

Ищем частное решение уравнения (A) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от t, другая – только от x, полагая

$$U(t, x) = W(t)\,V(x). \tag{17}$$

Получаем

$$\frac{\dfrac{d^2 V(x)}{dx^2} - q(x)\,V(x)}{p(x)\,V(x)} - \frac{1}{W(t)}\,\frac{dW(t)}{dt} = 0.$$

---

*) Ибо в этом случае $k(a) = k(b)$.

Так как первая дробь зависит лишь от x, вторая – только от t, то необходимо

$$\frac{V''(x)-q(x)V(x)}{p(x)V(x)}+\lambda=0, \qquad \frac{1}{W(t)}\,\frac{dW(t)}{dt}+\lambda=0,$$

где λ какая угодно постоянная. Последнее уравнение дает

$$W(t)=Ae^{-\lambda t},$$

где A – произвольная постоянная. Таким образом, искомое частное решение типа (17) должно иметь вид

$$U(t,x)=Ae^{-\lambda t}V(x), \tag{18}$$

где $V(x)$ есть функция, удовлетворяющая линейному уравнению 2-го порядка

$$V''(x)+[\lambda p(x)-q(x)]\;V(x)=0. \tag{19}$$

Полученное решение будет удовлетворять и предельным условиям (B_1) или (B_2), если подчиним функцию $V(x)$ следующим предельным условиям:

в первом случае (условия (B_1))

$$V'(b)=\alpha V(a)+\beta V(b), \quad V'(a)=\gamma V(a)+\delta V(b), \tag{20}$$

во втором (условия (B_2))

$$V(b)=\rho V(a), \quad V'(b)=\sigma V'(a)+\tau V(a), \tag{20_1}$$

которые сейчас же выводятся из (B_1) и (B_2), если в эти равенства вместо $U(t,x)$ подставить выражение (18).

Функция $U(t,x)$, определяемая равенством (18), будет, следовательно, удовлетворять как уравнению (A), так и предельным условиям (B_1) или (B_2), если определить функцию $V(x)$ как решение уравнения (19), удовлетворяющее соответственно предельным условиям (20) или (20_1).

13. Задача об интегрировании дифференциального уравнения (A) с частными производными сводится этим приемом к особого рода задаче об интегрировании обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка, когда требуется найти интеграл его не по начальным данным (интеграл Коши), как в общей теории линейных уравнений, а по некоторым условиям на концах данного промежутка изменения независимой переменной x; в рассматриваемом нами случае эти определенные условия выражаются уравнениями (20) или (20_1).

Уравнение (19) содержит неопределенный параметр λ; при каком угодно (неопределенном) λ, вообще говоря, не существует функции $V(x)$, отличной от нуля и удовлетворяющей одновременно уравнению (19) и условиям (20) или (20_1). Если искомый интеграл, не равный тождественно нулю, и существует, то лишь при некоторых особенных значениниях λ.

Допустим, что существует несколько таких значений, которые обозначим через

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots \tag{21}$$

Каждому из них будет соответствовать определенная, не равная тождественно нулю функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (19) и (20) или (19) и (20_1).

Обозначим функцию, соответствующую числу λ_k ($k = 1, 2, \ldots$), через $V_k(x)$. Для каждой такой функции получим соответствующее решение уравнения (A) по формуле (18) в виде

$$U_k(t, x) = A_k e^{-\lambda_k t} V_k(x), \tag{22}$$

где A_k есть произвольная постоянная, которое будет удовлетворять и предельным условиям (B_1) или (B_2). Так как уравнение (A) и эти последние условия суть линейные однородные функции от U и ее производных, то и сумма какого угодно числа n решений вида (22) есть также решение уравнения (A), удовлетворяющее условиям (B_1) или (B_2).

Если бы оказалось, что число различных чисел (21) λ_k бесконечно велико, то, положив

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k(x), \tag{23}$$

получим бесконечный ряд, который формально будет удовлетворять и уравнению (A) и условиям (B_1) или (B_2), ибо каждый его член обладает этим свойством. Если при соответствующем выборе пока неопределенных коэффициентов A_k удастся сделать этот ряд и ряды, составленные из первых производных его членов по t и из производных двух первых порядков по x, сходящимися равномерно при всяком положительном t и при всех значениях x в промежутке $[a, b]$, то формула (23) даст функцию от t и x, непрерывную вместе с ее производными

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2},$$

действительно удовлетворяющую уравнению (A) и предельным условиям (B_1) или (B_2).

14. Чтобы получить окончательное решение задачи п. 7, необходимо еще удовлетворить начальному условию (C). Полагая в выражении (23) $t = 0$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) = f(x). \tag{24}$$

Если поэтому удастся выбрать коэффициенты A_k не только так, как только что указано в конце предыдущего пункта, но и так, чтобы было удовлетворено равенство (24) для всех значений x промежутка $[a, b]$, то интересующая нас задача будет разрешена. Функция $U(t, x)$, определяемая рядом (23), даст то единственно возможное решение задачи, которое она способна допускать.

15. Таким образом, *задача физики об охлаждении тел линейных размеров, переведенная на язык анализа и соответствующим образом обобщенная, приводит к двум вопросам чистого анализа первостепенной важности: к задаче об интегрировании линейного дифференциального уравнения* (19) *при предельных условиях* (20) *или* (20_1), *которую мы для краткости условимся называть задачей* (A), *и к задаче о разложении произвольных функ-*

ций от одной переменной x в сходящиеся ряды по особого рода функциям, обозначенным нами через $V_k(x)$, которую будем называть задачей (B)*).

Задача (А) приводится к доказательству существования бесчисленного множества различных чисел λ_k и им соответствующих, не равных нулю функций $V_k(x)$, удовлетворяющих уравнению

$$V''_k(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\ V_k(x) = 0 \tag{25}$$

и условиям на концах

$$V'_k(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \tag{26}$$

$$V'_k(a) = \gamma V_k(a) + \delta V_k(b),$$

или

$$V_k(b) = \rho V_k(a), \tag{26_1}$$

$$V'_k(b) = \sigma V'_k(a) + \tau V_k(a).$$

Числа λ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) мы будем называть *характеристическими числами*, а соответствующие им функции

$$V_k(x)\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

– *фундаментальными функциями*, причем функции, подчиненные предельным условиям (26), будем называть *фундаментальными функциями первого класса*, а функции, удовлетворяющие условиям (26_1) – *фундаментальными функциями второго класса*. Соответственно этому предельные условия (26) назовем *предельными условиями первого класса*, а условия (26_1) – *предельными условиями второго класса*.

16. Мы уже видели, что для вопросов физики представляют интерес лишь те случаи, когда функция $U(t,x)$, определяемая рядом (23), дает единственно возможное решение задачи, в частности, когда в условиях первого класса постоянные α, β, γ и δ удовлетворяют условиям (14) (п. 9), а постоянные ρ, σ и τ в предельных условиях второго класса подчинены условиям (15) (п. 10). Мы показали также, что во всех основных задачах теории тепла эти условия действительно выполняются (см. п. 11). При этом, напомним, предполагается, что в уравнении (25) функции $p(x)$ и $q(x)$ остаются непрерывными и неотрицательными в промежутке $[a, b]$.

Физический смысл задачи налагает еще другое ограничение на изложенный нами метод, приведший к изображению искомой функции под видом ряда (23) (п. 13). Ясно, что во всяком теле, замкнутом или незамкнутом, помещенном в среду с температурой нуль, температура его $U(t,x)$ не может возрастать беспредельно с возрастанием времени; для незамкнутого тела (прямой стержень, стержень, изогнутый в незамкнутую кривую) температура $U(t,x)$ должна стремиться к нулю; для тела замкнутого (сплошное кольцо и т.п.) температура его $U(t,x)$ должна стремиться, вообще говоря, также к нулю с возрастанием t или, когда лучеиспускательная способность

*) Придерживаюсь терминов, употребленных мною в 1910 г. в мемуаре "Sur l'existence des fonctions fondamentales" (R. Accad. dei Lincei, 1910).

(или внешняя теплопроводность) его боковой поверхности равна нулю *), к некоторому определенному постоянному пределу.

Если изложенная теория не противоречит действительности, то из выражения (23) для $U(t, x)$ должны обязательно вытекать только что указанные следствия. Эти последние действительно будут иметь место только тогда, когда для рассматриваемых нами задач математической физики все характеристические числа λ_k окажутся неотрицательными, что с очевидностью вытекает из самого выражения (23) для температуры $U(t, x)$.

Найдем условия, при которых эти требования действительно выполняются. Умножим уравнение (25) на $V_k(x)dx$ и проинтегрируем результат в пределах от a до b**). Получим

$$\lambda_k \int_a^b p(x) V_k^2(x)\, dx = \int_a^b q(x) V_k^2(x)\, dx - \int_a^b V_k(x) V_k''(x)\, dx.$$

Но

$$\int_a^b V_k(x) V_k''(x)\, dx = V_k(x) V'(x) \Big|_a^b - \int_a^b V_k'^2(x)\, dx.$$

Поэтому

$$\lambda_k \int_a^b p(x) V_k^2(x)\, dx = \int_a^b q(x) V_k^2(x)\, dx + \int_a^b V_k'^2(x)\, dx - V_k(x) V_k'(x) \Big|_a^b .$$

Так как $p(x)$ и $q(x)$ суть функции неотрицательные, то все λ_k выйдут несомненно неотрицательными, если при всяком k будет соблюдено неравенство

$$V_k(x) V_k'(x) \Big|_a^b \leqslant 0,$$

аналогичное неравенству (13) п. 8.

Приняв в расчет равенства (26) и (26_1), убеждаемся, совершенно так же как и в пп. 9 и 10, что *для фундаментальных функций первого класса все* λ_k *будут неотрицательными, коль скоро постоянные* α, β, γ *и* δ *удовлетворяют неравенствам* (14), *а для фундаментальных функций второго класса – неотрицательными, коль скоро постоянные* ρ, σ *и* τ *подчинены условиям* (15).

Таким образом, оказывается, что во всех случаях, когда выполняется требование определенности задачи, само собой удовлетворяется и второе требование, вытекающее из физического смысла задачи, о неотрицательности всех характеристических чисел λ_k. Второе испытание опять не приводит к противоречию между основами теории и непосредственно наблюдаемыми фактами действительности (см. конец п. 11).

---

*) Это соответствует предположению, что $q(x) = 0$.

**) Функции $V_k(x)$ считаются достаточно гладкими. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА V

Фундаментальные функции и характеристические числа. Условие ортогональности. Уравнение, определяющее характеристические числа. Интеграл уравнения $V''(x, \lambda) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x, \lambda) + f(x) = 0$, рассматриваемый как функция параметра λ; метод Шварца – Пуанкаре и его распространение на общий случай предельных условий (26) и (26_1) предыдущей главы. Случай, когда $\lambda = 0$, не входит в состав характеристических чисел. Основные теоремы о полюсах мероморфной функции $V(x, \lambda)$ и связь ее полюсов с характеристическими числами. Алгоритм Шварца – Пуанкаре для вычисления характеристических чисел и фундаментальных функций, соответствующих данной функции $f(x)$. Некоторые неравенства и низшие пределы для модулей характеристических чисел. Полная система характеристических чисел и фундаментальных функций

1. Допустим, что характеристические числа λ_k и им соответствующие фундаментальные функции $V_k(x)$ указанных в предыдущей главе двух классов существуют. Пусть λ_m и λ_n – два каких-либо различных характеристических числа, $V_m(x)$ и $V_n(x)$ – им соответствующие фундаментальные функции. На основании (25) предыдущей главы имеем

$$V''_m(x) + [\lambda_m p(x) - q(x)]\ V_m(x) = 0,$$
$$V''_n(x) + [\lambda_n p(x) - q(x)]\ V_n(x) = 0.$$

Умножив первое из этих уравнений на $V_n(x)$, второе – на $V_m(x)$, вычитая один результат из другого и проинтегрировав полученную разность в пределах от a до b, находим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x) V_m(x)\, V_n(x)\, dx = \left(V_m(x) V'_n(x) - V_n(x) V'_m(x) \right) \Big|_a^b$$

Если при всяких m и n имеет место равенство

$$K_{m,n} = (V_m(x)\, V'_n(x) - V_n(x)\, V'_m(x)) \Big|_a^b = 0, \tag{1}$$

то

$$\int_a^b p(x) V_m(x) V_n(x)\, dx = 0 \tag{2}$$

при всяких не равных между собой m и n, ибо при этом $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$.

Таким образом, *если фундаментальные функции удовлетворяют условию* (1), *то они образуют систему ортогональных функций, характеристической функцией которой служит функция* $p(x)$. Условие (1) будем называть *условием ортогональности*.

2. Предположим, что фундаментальные функции принадлежат первому классу, т.е. удовлетворяют предельным условиям (26) предыдущей главы. Уравнения (26) дают

$$K_{m,n} = (\alpha+\delta)\,[V_m(a)V_n(b) - V_n(a)V_m(b)].$$

Равенство (1) будет выполнено для каких угодно фундаментальных функций первого класса, если

$$\alpha+\delta = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим фундаментальные функции второго класса, удовлетворяющие предельным условиям (26_1) предыдущей главы. В этом случае уравнения (26_1) дают

$$K_{m,n} = (\rho\sigma - 1)\,[V_m(a)\,V'_n(a) - V_n(a) - V'_m(a)].$$

Равенство (1) будет выполнено для каких угодно фундаментальных функций второго класса, если

$$\rho\sigma - 1 = 0. \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно случай ортогональных фундаментальных функций, т.е. будем предполагать, что функции первого класса определяются уравнением (25) предыдущей главы и предельными условиями вида

$$V'_k(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \quad V'_k(a) = \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b), \tag{5}$$

а фундаментальные функции второго класса – тем же уравнением (25) и предельными условиями вида

$$V_k(b) = \rho V_k(a), \quad V'_k(b) = \frac{1}{\rho}\, V'_k(a) + \tau V_k(a). \tag{6}$$

Заметим, что во всех задачах математической физики условия ортогональности (3) и (4) соблюдаются. В задаче об охлаждении прямого стержня $\alpha = \delta = 0, \alpha + \delta = 0$, в задачах сплошного кольца и стержня, согнутого в замкнутую кривую, для первого случая $\rho = \sigma = 1$, $\rho\sigma - 1 = 0$, для второго $\alpha = h$, $\delta = -h$, $\alpha + \delta = 0$ (см. п. 11 предыдущей главы).

Важное значение условия ортогональности фундаментальных функций для всей теории, которая будет изложена, выяснится впоследствии.

3. Так как вопрос о существовании фундаментальных функций имеет интерес не только с точки зрения математической физики, но и для чистого анализа, то мы будем сначала предполагать, что в уравнениях (5) и (6) постоянные α, β, γ и ρ, τ имеют какие угодно вещественные значения, не связанные неравенствами (14) и (15_1) предыдущей главы. Те особенности, которые вносятся в общую теорию этими последними ограничениями и принадлежат специально указанным выше задачам математической физики, отметим впоследствии особо.

Пользуясь основами общей теории линейных дифференциальных уравнений, будем искать интеграл уравнения

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\; V(x) = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющий предельным условиям (5) первого класса, подразумевая в (7) под λ пока неопределенный параметр. Обозначим через

$$w_1(x, \lambda) \quad \text{и} \quad w_2(x, \lambda)$$

два независимых частных решения уравнения (7), подчинив их для простоты условиям

$$\begin{aligned} &w_1(a, \lambda) = 1, \;\; w_1'(a, \lambda) = 0, \\ &w_2(a, \lambda) = 0, \;\; w_2'(a, \lambda) = 1, \end{aligned} \tag{8}$$

что всегда возможно.

По известной теореме Лиувилля имеем при всяких x и λ:

$$w_1(x, \lambda)\, w_2'(x, \lambda) - w_2(x, \lambda)\, w_1'(x, \lambda) = \text{const},$$

каковы бы ни были независимые частные решения $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$ уравнения (7). Если эти решения удовлетворяют условиям (8), то,очевидно,

$$D = w_1(x, \lambda)\, w_2'(x, \lambda) - w_2(x, \lambda)\, w_1'(x, \lambda) = 1. \tag{9}$$

Функции $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$, как известно, суть целые трансцендентные функции параметра λ во всей плоскости комплексного переменного λ.

Общий интеграл уравнения (7) представляется в виде

$$V(x) = C_1 w_1(x, \lambda) + C_2 w_2(x, \lambda), \tag{10}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Выбрав в общем интеграле постоянные C_1 и C_2 так, чтобы были выполнены условия (5), получим искомый интеграл уравнения (7), если таковой существует.

4. Подставляя выражение (10) в уравнения (5) и приняв в расчет (8), получаем два следующих уравнения для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} &C_1 [w_1'(b, \lambda) - \beta w_1(b, \lambda) - \alpha] + C_2 [w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda)] = 0 \\ &C_1 [\alpha w_1(b, \lambda) - \gamma] + C_2 [1 + \alpha w_2(b, \lambda)] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Эти линейные однородные относительно неизвестных C_1 и C_2 уравнения могут быть удовлетворены значениями C_1 и C_2, не равными нулю тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е. когда

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = {}& [w_1'(b, \lambda) - \beta w_1(b, \lambda) - \alpha]\; [1 + \alpha w_2(b, \lambda)] - \\ & -[w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda)]\; [\alpha w_1(b, \lambda) - \gamma] = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

или, на основании (9),

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = {}& w_1'(b, \lambda) - \beta w_1(b, \lambda) - 2\alpha + \\ & + \gamma w_2'(b, \lambda) - (\alpha^2 + \beta\gamma)\, w_2(b, \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{12_1}$$

В силу сказанного выше $\omega(\lambda)$ есть целая трансцендентная функция от λ для всех значений λ.

Таким образом, *уравнение* (7) *может допускать интеграл, удовлетворяющий предельным условиям* (5), *лишь для таких значений параметра* λ, *которые служат корнями трансцендентного уравнения*

$$\omega(\lambda) = 0. \tag{12_2}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество отдельных корней, модули которых беспредельно возрастают, если только $\omega(\lambda)$ не равно тождественно нулю при всяком λ. Уравнение (12_2) будем называть *уравнением характеристических чисел.*

5. Положим в уравнении (7) $\lambda = 0$. Получим уравнение

$$V''(x) - q(x)V(x) = 0. \tag{13}$$

Обозначим через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ два его частных линейно независимых решения, подчиненные условиям

$$u_1(a) = 1, \quad u_1'(a) = 0, \quad u_2(a) = 0, \quad u_2'(a) = 1. \tag{14}$$

Очевидно,

$$w_1(x, 0) = u_1(x), \quad w_2(x, 0) = u_2(x) \tag{14_1}$$

и

$$\omega(0) = u_1'(b) - \beta u_1(b) - 2\alpha + \gamma u_2'(b) - (\alpha^2 + \beta\gamma)u_2(b).$$

Рассмотрим сначала случай, когда α, *β и γ подчинены условию*

$$\omega(0) = u_1'(b) - \beta u_1(b) - 2\alpha + \gamma u_2'(b) -$$
$$- (\alpha^2 + \beta\gamma)u_2(b) \neq 0, \tag{15}$$

что *равносильно предположению, что уравнение характеристических чисел не имеет корня, равного нулю.*

При соблюдении условия (15) $\omega(\lambda)$ *не может равняться тождественно нулю при всяком* λ; *в этом случае уравнение* (12_2) *определит бесчисленное множество различных между собой значений* λ_k, *служащих его корнями.*

Случай, когда $\omega(0)$ обращается в нуль, рассмотрим впоследствии.

6. Сделаем временно еще другие предположения. Выражение

$$w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda) \tag{16}$$

представляет некоторую целую трансцендентную функцию от λ и обращается в

$$u_2'(b) - \beta u_2(b) \tag{17}$$

при $\lambda = 0$.

Предположим, что

$$u_2'(b) - \beta u_2(b) \neq 0. \tag{18}$$

При этом разность (16) не может равняться тождественно нулю при всяком λ.

Допустим, наконец, что целая трансцендентная функция от λ (16) *не имеет корней, общих с корнями функции* $\omega(\lambda)$.

Случай, когда разность (17) обращается в нуль и уравнение

$$w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda) = 0$$

имеет корни, одинаковые с корнями уравнения характеристических чисел (уравнение (12_2)), что, вообще говоря, возможно, мы рассмотрим впоследствии особо.

7. При сделанных допущениях мы можем заменить совокупность уравнений (11) уравнением (12_2) и первым из уравнений (11). При каждом значении $\lambda = \lambda_k$, служащем корнем уравнения (12_2), получится определенное выражение для отношения C_2 к C_1, причем C_1 останется произвольным.

Обозначая эти произвольные значения C_1 для различных значений λ_k через C_k, получим при всяком k:

$$C_2 = C_k \; \frac{\alpha + \beta w_1(b, \lambda_k) - w_1'(b, \lambda_k)}{w_2'(b, \lambda_k) - \beta w_2(b, \lambda_k)} \; .$$

Подставив это выражение C_2 в (10) и заменив в нем C_1 через C_k, найдем определенную функцию $V_k(x)$ в виде

$$V_k(x) = C_k \; \frac{w_1(x, \lambda_k)[w_2'(b, \lambda_k) - \beta w_2(b, \lambda_k)]}{w_2'(b, \lambda_k) - \beta w_2(b, \lambda_k)} \; +$$

$$+ \; \frac{w_2(x, \lambda_k)\,[\alpha + \beta w_1(b, \lambda_k) - w_1'(b, \lambda_k)]}{w_2'(b, \lambda_k) - \beta\, w_2(b, \lambda_k)} \; . \tag{19}$$

Давая k всевозможные значения 1, 2, 3 и т.д., получим бесчисленное множество функций $V_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), соответствующих числам λ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), каждая из которых будет удовлетворять уравнению

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\; V_k(x) = 0 \tag{20}$$

и предельным условиям

$$\begin{aligned} V_k'(b) &= \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \\ V_k'(a) &= \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b), \end{aligned} \tag{21}$$

где, согласно сделанным допущениям, постоянные α, β и γ подчинены неравенствам (15) и (18).

Очевидно, что ни одна из функций $V_k(x)$, определяемых равенством (19), не равна тождественно нулю, ибо при $x = a$ она обращается на основании (8) в C_k.

8. Рассмотрим теперь случай предельных условий второго класса. Подставив выражение (10) в уравнения (6), получим

$$\begin{aligned} &C_1(w_1(b, \lambda) - \rho) + C_2 w_2(b, \lambda) = 0, \\ &C_1(w_1'(b, \lambda) - \tau) + C_2 \left(w_2'(b, \lambda) - \frac{1}{\rho} \right) = 0. \end{aligned} \tag{11_1}$$

Отсюда, подобно тому, как в п. 4, заключаем, что *характеристическими числами могут быть лишь корни целой трансцендентной относительно* λ *функции*

$$\omega(\lambda) = 2 - \frac{1}{\rho}\; w_1(b, \lambda) - \rho w_2'(b, \lambda) + \tau w_2(b, \lambda). \tag{12_1}$$

представляющей определитель системы (11_1).

Сделаем здесь следующие допущения:

(а) Постоянные ρ и τ удовлетворяют условиям

$$\omega(0) = 2 - \frac{1}{\rho}\; u_1(b) - \rho u_2(b) + \tau u_2(b) \neq 0, \quad u_2(b) \neq 0, \tag{15_1}$$

(в) Функции $\omega(\lambda)$ и $w_2(b, \lambda)$ не имеют общих корней.

Случаи, когда эти условия могут не соблюдаться, также рассмотрим впоследствии. При этом $\omega(\lambda)$ не может обращаться в нуль тождественно при всяком λ; уравнение $\omega(\lambda)=0$ определит бесчисленное множество различных значений

$$\lambda=\lambda_k \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

для каждого из которых первое из уравнений (11_1) даст определенную величину отношения C_2 к C_1:

$$C_2=C_k\ \frac{w_1(b,\lambda)-\rho}{w_2(b,\lambda)}\ {}^{*)},$$

причем, приняв в расчет (10), получим для всякого k:

$$V_k(x)=C_k\ \frac{w_1(x,\lambda_k)\,w_2(b,\lambda_k)-w_2(x,\lambda_k)\,[w_1(b,\lambda_k)-\rho]}{w_2(b,\lambda_k)}\ . \tag{19_1}$$

Получим при сделанных допущениях бесчисленное множество чисел λ_k и им соответствующих функций $V_k(x)$, не равных тождественно нулю**) и удовлетворяющих уравнению (20) и предельным условиям

$$\begin{aligned} &V_k(b)=\rho V_k(a),\\ &V_k'(b)=\frac{1}{\rho}\ V_k'(a)+\tau V_k(a). \end{aligned} \tag{21_1}$$

9. Еще Лиувилль показал (Journal de Liouville, T.I), что для частного случая, когда (задача об охлаждении неоднородного твердого стержня)

$$\alpha=0, \quad \beta<0, \quad \gamma>0, \tag{22}$$

все корни целой трансцендентной функции $\omega(\lambda)$ вещественны, положительны и притом простые (не кратные). Обстоятельное изложение метода Лиувилля для указанного частного случая читатель может найти, например, в томе III курса К. Жордана.

В 1909 г. итальянский ученый М.Пиконе распространил этот метод и на более общий случай (Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un equazione differenziale lineare ordinaria dei secondo ordine. – Pisa, 1909).

Но еще в 1896 г. мною показано, что для случая Лиувилля вопрос решается с полной обстоятельностью при помощи иного метода, идея которого принадлежит Шварцу и который был затем развит и дополнен Пуанкаре в его известном мемуаре "Sur les équations differéntielles de la Physique Mathématique", помещенном в Rendiconti di Palermo за 1894 г.

Тогда же я указал, что метод Шварца – Пуанкаре допускает дальнейшее развитие и приводит не только к решению задачи (A), но также решает и задачу (B) (см. п. 15 предыдущей главы). Эти первоначальные исследования, опубликованные мною в статье "Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня" (Сообщения Харьк. матем. общ., 1896), были затем развиты и усовершенствованы в мемуарах "Problème de refroidissement d'une barre hétérogène" (Annales de Toulouse, 1901) и "Sur l'existence des fonctions fondamentales etc." (Memoria della R. Accademia dei Lincei, 1910), где я рас-

---

*) По-прежнему заменяем C_1 через C_k.

**) Ибо при $x=a$, так же как и в предыдущем случае, $V_k(x)$ обращается в C_k.

пространил рассматриваемый метод и на случай, когда функция $p(x)$ в уравнении (25) только непрерывна*). Но в этих исследованиях я ограничивался случаем предельных уравнений первого класса, и притом тем частным случаем, когда постоянные α, β и γ подчинены условиям (22).

Наконец, в мемуаре "Sur certaines questions d'Analyse qui se rattachent à plusieurs problèmes de la Physique Mathématique (Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg, Cl. Ph. M. Vol. XXXI, n. 7, 1913) я распространил указанный метод и на общий случай предельных условий как первого, так и второго классов.

В настоящем сочинении мы изложим решение основных задач (A) и (B), поставленных в предыдущей главе, при помощи того же метода, начала которого положены Шварцем и Пуанкаре и который будем называть *методом Шварца – Пуанкаре*, внеся некоторые существенные изменения и дополнения в наши предыдущие исследования.

10. В предыдущих пунктах доказано, что фундаментальные функции, не равные тождественно нулю, могут существовать лишь для отдельных значений параметра λ, служащих корнями целой трансцендентной функции $\omega(\lambda)$. Как для задач чистого анализа, так и в особенности для задач математической физики существенно важным требованием является условие, чтобы характеристические числа были числами вещественными (а для задач математической физики еще и положительными).

Исследованию вопроса о свойствах чисел λ_k, т.е. корней функции $\omega(\lambda)$, и будут посвящены следующие пункты этой главы.

11. Заменим уравнение $V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\ V(x) = 0$ следующим:

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\ V(x) + f(x) = 0, \tag{23}$$

где $f(x)$ есть какая-либо заданная непрерывная функция от x, и будем искать интеграл уравнения (23) в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра λ, удовлетворяющий предельным условиям

$$\left.\begin{aligned} L(V) &= V'(b) - \alpha V(a) - \beta V(b) = 0,\\ L_1(V) &= V'(a) - \gamma V(a) + \alpha V(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

---

*) Аналогичные результаты получены иными приемами в исследованиях А.Кнезера (Mathem. Annalen, Bd. 58, 1904, Bd. 60, 1905 и Bd. 63, 1907), Мэзона (Trans. Americ. Mathem. Society, 1906), С. Саниелевичи (Annales de l'École Norm. Supér., 1909), М. Пиконе (Annali d. R. Scuola Norm. Super. di Pisa, 1909) и др.

Исследования А. Кнезера представляют развитие и усовершенствование идей Лиувилля, Мэзон сводит вопрос к задачам вариационного исчисления, С.Саниелевичи и М. Пиконе пользуются интегральными уравнениями Гильберта – Фредгольма.

Этот же метод, за два года до появления работ С. Саниелевичи и М. Пиконе, был развит А. Кнезером в 1907 г. в третьем из вышеупомянутых его мемуаров, который, по-видимому, ускользнул от внимания С. Саниелевичи и М. Пиконе.

Из других исследований, относящихся к рассматриваемым вопросам, особого внимания заслуживают изыскания Э. Пикара, опубликованные им одновременно с упомянутым выше мемуаром А. Пуанкаре и изложенные затем в его ("Traité d'Analyse" T.III, Paris, 1896), а также его мемуар "Sur un problème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique Mathématique" (Rendic. di Palermo, T. XXIX, 1910).

Дополнительные литературные указания по этому предмету можно найти в речи М. Бохера "Boundary Problems in one Dimension", произнесенной им на одном из общих собраний V Интернационального конгресса математиков в Кембридже в 1912 г. (см. Proc. of the V International Congress of Mathematicians, Vol. I.–Cambridge, 1913, p. 163).

или условиям вида

$$L(V) = V(b) - \rho V(a) = 0,$$
$$L_1(V) = V'(b) - \frac{1}{\rho} V'(a) - \tau V(a) = 0. \tag{24_1}$$

Положим

$$V(x) = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \ldots + \lambda^k v_k(x) + \ldots, \tag{27}$$

где $v_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ суть некоторые функции от x. Подставляя это выражение $V(x)$ в (23) и (24) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях λ, получим следующие уравнения для последовательного определения функций $v_k(x)$:

$$v_0''(x) - q(x)\, v_0(x) + f(x) = 0, \tag{28}$$

$$L(v_0) = 0, \quad L_1(v_0) = 0 \tag{28_1}$$

и для всякого k, начиная с 1,

$$v_k''(x) - q(x)\, v_k(x) + p(x)\, v_{k-1}(x) = 0, \tag{29}$$

$$L(v_k) = 0, \quad L_1(v_k) = 0.$$

Общий интеграл линейного однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (28), имеет вид

$$v(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два частных (различных) решения уравнения (13), удовлетворяющие условиям (14) (п. 5).

Пользуясь методом изменения произвольных постоянных, получим общий интеграл уравнения (28) в виде

$$v_0(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + r_0(x), \tag{30}$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные, а

$$r_0(x) = u_1(x) \int_a^x f(x) u_2(x)\, dx - u_2(x) \int_a^x f(x)\, u_1(x)\, dx. \tag{31_1}$$

Уравнение (29) отличается от (28) лишь тем, что функция $f(x)$ заменена функцией $p(x) v_{k-1}(x)$. Поэтому общий интеграл уравнения (29) представится в виде (при всяком $k = 1, 2, 3, \ldots$)

$$v_k(x) = C_1^{(k)} u_1(x) + C_2^{(k)} u_2(x) + r_k(x), \tag{31}$$

где $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$ — произвольные постоянные, а

$$r_k(x) =$$
$$= u_1(x) \int_a^x p(x) v_{k-1}(x)\, u_2(x)\, dx - u_2(x) \int_a^x p(x)\, v_{k-1}(x)\, u_1(x)\, dx. \tag{31_1}$$

12. Подберем теперь произвольные постоянные C_1, C_2 и $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ в выражениях (30) и (31) так, чтобы условия (28_1) и (29_1) были удовлетворены. Так как левые части этих равенств линейны относительно $v_0(x)$, $v_k(x)$ и их первых производных, а $v_0(x)$ и $v_k(x)$ линейны относительно постоянных

C_1, C_2, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, то очевидно, что результат подстановки (30) и (31) в (28_1) и (29_1) дает уравнения вида

$$\begin{aligned} &C_1 L(u_1) + C_2 L(u_2) + L(r_0) = 0, \\ &C_1 L_1(u_1) + C_2 L_1(u_2) + L_1(r_0) = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

и

$$\begin{aligned} &C_1^{(k)} L(u_1) + C_2^{(k)} L(u_2) + L(r_k) = 0, \\ &C_1^{(k)} L_1(u_1) + C_2^{(k)} L_1(u_2) + L_1(r_k) = 0 \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{32_1}$$

Для определения постоянных C_1, C_2 и $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ получается система линейных уравнений, определитель которой равен, очевидно (см. п. 5),

$$L(u_1) L_1(u_2) - L(u_2) L_1(u_1) = \omega(0). \tag{33}$$

В силу допущения, сделанного в пп. 5 и 8 (неравенства (15) и (21_1)), этот определитель не равен нулю как в случае условий (28_1), так и в случае условий (29_1). Уравнения (32) и (32_1) разрешимы относительно C_1, C_2 и $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$. Последние дают, в случае условий (28_1)*),

$$\begin{aligned} C_1^{(k)} &= \frac{M_k(b)\,[u_2'(b) - \beta u_2(b)] - N_k(b)\,[u_1'(b) - \beta u_1(b) - \alpha]}{\omega(0)}, \\ C_2^{k} &= \frac{M_k(b)\,\{\gamma[u_2'(b) - \beta u_2(b)] - \alpha[1 + \alpha u_2(b)]\}}{\omega(0)} + \\ &+ \frac{N_k(b)\,\{(\alpha^2 + \beta\gamma) u_1(b) - \gamma u_1'(b)\}}{\omega(0)}, \end{aligned} \tag{34}$$

где положено, вообще,

$$\begin{aligned} M_k(x) &= \int_a^x p(x) v_{k-1}(x) u_1(x)\, dx, \\ N_k(x) &= \int_a^x p(x) v_{k-1}(x) u_2(x)\, dx, \end{aligned} \tag{35}$$

а $\omega(0)$, напомним, определяется равенством

$$\omega(0) = u_1'(b) - \beta u_1(b) - 2\alpha + \gamma u_2'(b) - (a^2 + \beta\gamma) u_2(b). \tag{35_1}$$

Выражения для C_1 и C_2 получатся из $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$, если заменить в формулах (34) и (35) под знаками интегралов функцию $p(x)v_{k-1}(x)$ через $f(x)$.

В случае условий (29_1) получим

$$\begin{aligned} C_1^{(k)} &= \frac{N_k(b)\,[u_1(b) - \rho] - M_k(b)\, u_2(b)}{\rho\omega(0)}, \\ C_2^{(k)} &= \frac{M_k(b)\,[\tau u_2(b) - \rho u_2'(b) + 1] - N_k(b)\,[\tau u_1(b) - \rho u_1'(b)]}{\omega(0)} \end{aligned} \tag{36}$$

*) Следует принять в расчет, что на основании (14) $u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x) = 1$ при всяком x и что $r_k(a) = 0$ и $r_k'(a) = 0$.

где, напомним (см. (21_1) п. 8),

$$\omega(0) = 2 - \frac{1}{\rho} u_1(b) - \rho u_2'(b) + \tau u_2(b). \tag{36_1}$$

Выражения для C_1 и C_2, так же как и в предыдущем случае, получатся из (36) и (35) заменой под знаками интегралов функции $p(x)v_{k-1}(x)$ через $f(x)$.

Подставив найденные выражения для $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$ в (31), получим, приняв в расчет равенства (31_1) и (35),

$$v_k(x) = u_1(x) N_k(x) - u_2(x) M_k(x) + \omega_1(x) N_k(b) - \omega_2(x) M_k(b), \tag{37}$$

где $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ суть линейные однородные функции от $u_1(x)$ и $u_2(x)$, выражения которых выписывать не будем*).

Формулу (37) можем считать справедливой при всяком k, начиная от $k = 0$, если условимся, что $p(x)v_{-1}(x) = f(x)$.

13. Функцию $v_k(x)$ можно представить в виде

$$v_k(x) = \int_a^x p(\xi) v_{k-1}(\xi) \psi_1(x, \xi) d\xi + \int_a^b p(\xi) v_{k-1}(\xi) \psi_2(x, \xi) d\xi, \tag{38}$$

положив

$$\begin{aligned} \psi_1(x, \xi) &= u_1(x) u_2(\xi) - u_2(x) u_1(\xi), \\ \psi_2(x, \xi) &= \omega_1(x) u_2(\xi) - \omega_2(x) u_1(\xi). \end{aligned} \tag{38'}$$

Каждая из этих функций непрерывна по ξ вместе со своими производными двух первых порядков в промежутке изменения ξ от a до b, каково бы ни было значение x, взятое в этом промежутке, причем $\psi_1(x, \xi)$ обращается в нуль при $x = \xi$.

Обозначим через $\psi(x, \xi)$ функцию, которая равна

$$\psi(x, \xi) = \psi_1(x, \xi) + \psi_2(x, \xi) \quad \text{при} \quad a \leqslant \xi \leqslant x \tag{38''}$$

и равна

$$\psi(x, \xi) = \psi_2(x, \xi) \quad \text{при} \quad x \leqslant \xi \leqslant b. \tag{38'''}$$

Определенная таким образом функция $\psi(x, \xi)$ непрерывна в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ и имеет при $\xi \neq x$ производные до второго порядка, интегрируемые по ξ на $[a, b]$.

Равенство (38) при этом может быть представлено в виде

$$v_k(x) = \int_a^b p(\xi) v_{k-1}(\xi) \psi(x, \xi) d\xi. \tag{38_1}$$

Отсюда при помощи неравенства Буняковского (гл. 1, п. 3) выводим

$$v_k^2(x) \leqslant \int_a^b p(\xi) v_{k-1}^2(\xi) d\xi \int_a^b p(\xi) \psi^2(x, \xi) d\xi,$$

так как $p(\xi)$ по условию неотрицательна в промежутке $[a, b]$.

---

*) Постоянные коэффициенты функций $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ линейных однородных относительно $u_1(x)$ и $u_2(x)$, будут, конечно, различны для условий (24) и (24_1).

Положив, вообще,

$$W_k = \int_a^b p(x)\, v_k^2(x)\, dx \tag{39}$$

и заметив, что $0 \leqslant \int_a^b p(\xi)\, \psi^2(x, \xi)\, d\xi \leqslant Q^2$, где Q^2 есть конечное число, можем писать

$$v_k^2(x) \leqslant Q^2 W_{k-1}. \tag{40}$$

14. Интегралы (39) аналогичны интегралам, введенным Шварцем в его исследовании об интегрировании дифференциального уравнения*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x, y)\, u = 0.$$

Мы будем называть интегралы W_k *интегралами Шварца.*

Умножим (40) на $p(x)dx$ и интегрируем результат в пределах от a до b. Получим

$$W_k \leqslant Q^2 \int_a^b p(x)\, dx, \quad W_{k-1} = N^2 W_{k-1},$$

т.е.

$$\sqrt{W_k} \,/\, \sqrt{W_{k-1}} \leqslant N, \tag{41}$$

где N *есть положительное конечное число, не зависящее от выбора функции* $f(x)$ *в уравнении* (23) (п. 11).

Преобразуем затем интеграл W_k следующим образом: заменим в нем произведение $p(x)\, v_k(x)$ его выражением, следующим из уравнения (29). Получим

$$W_k = \int_a^b p(x)\, v_k^2(x)\, dx = \int_a^b v_k(x)\, [q(x)\, v_{k+1}(x) - v_{k+1}''(x)]\, dx. \tag{42}$$

Но

$$\int_a^b v_k(x)\, v_{k+1}''(x)\, dx = v_k(x)\, v_{k+1}'(x) \Big|_a^b - \int_a^b v_k'(x)\, v_{k+1}'(x)\, dx,$$

$$\int_a^b v_k'(x)\, v_{k+1}'(x)\, dx = v_k'(x)\, v_{k+1}(x) \Big|_a^b - \int_a^b v_k''(x)\, v_{k+1}(x)\, dx,$$

откуда при помощи того же уравнения (29) выводим

$$\int_a^b v_k'(x)\, v_{k+1}'(x)\, dx =$$

$$= v_k'(x)\, v_{k+1}(x) \Big|_a^b - \int_a^b v_{k+1}(x)\, [q(x)\, v_k(x) - p(x)\, v_{k-1}(x)]\, dx.$$

*) "Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts befreffenden Problem der Variationsrechnung". Zweiter Theil(Werke. Berlin. 1890, Bd. I, S. 241 etc.).

т.е.

$$\int_a^b v_k(x)\,v''_{k+1}(x)\,dx = (v_k(x)\,v'_{k+1}(x) - v'_k(x)\,v_{k+1}(x))\Big|_a^b +$$

$$+ \int_a^b q(x)\,v_k(x)\,v_{k+1}(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,v_{k-1}(x)\,v_{k+1}(x)\,dx.$$

Но функции $v_k(x)$ и $v_{k+1}(x)$ удовлетворяют предельным условиям того же вида, что и искомые нами фундаментальные функции $V_k(x)$, причем для обоих типов этих условий (24) и (24_1) условие ортогональности соблюдается (см. п. 1 этой главы). Следовательно,

$$(v_k(x)\,v'_{k+1}(x) - v'_k(x)\,v_{k+1}(x))\Big|_a^b = 0$$

и

$$\int_a^b v_k(x)\,v''_{k+1}(x)\,dx - \int_a^b q(x)\,v_k(x)\,v_{k+1}(x)\,dx =$$

$$= -\int_a^b p(x)\,v_{k-1}(x)\,v_{k+1}(x)\,dx.$$

В силу этого соотношения равенство (42) приводится к виду

$$W_k = \int_a^b p(x)\,v_{k-1}(x)\,v_{k+1}(x)\,dx.$$

Отсюда при помощи неравенства Буняковского выводим

$$W_k \leqslant \sqrt{W_{k-1}}\,\sqrt{W_{k+1}}, \quad \text{или} \quad \sqrt{W_k}\,/\,\sqrt{W_{k-1}} \leqslant \sqrt{W_{k+1}}\,/\,\sqrt{W_k}.$$

Из этого неравенства и (41), имеющих место при всяком целом k (включая $k = 0$), выводим ряд неравенств

$$\frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{W_{-1}}} \leqslant \frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{W_0}} \leqslant \frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k-1}}} \leqslant \ldots \leqslant N, \tag{43}$$

где введено условное обозначение

$$W_{-1} = \int_a^b \frac{f^2(x)}{p(x)}\,dx \tag{44}$$

в предположении, что этот интеграл имеет определенный смысл.

Неравенства (43) мы будем называть *неравенствами Шварца*.

15. Сравним ряд (27) со следующим:

$$Q\,(\sqrt{W_{-1}} + |\lambda|\sqrt{W_1} + |\lambda^2|\sqrt{W_2} + \ldots + |\lambda^k|\sqrt{W_k} + \ldots). \tag{45}$$

Так как в силу (40) $|v_k(x)| \leqslant Q\sqrt{W_{k-1}}$, то по теореме Коши радиус ρ круга равномерной сходимости ряда (27) не менее радиуса круга сходимости ряда (45). Этот же последний равен, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}$.

Итак,

$$\rho \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}} \tag{46}$$

Умножим теперь ряд (27) на $p(x)v_0(x)dx$ и интегрируем результат в пределах от a до b. Получим ряд

$$S(\lambda) = \int_a^b p(x)v_0^2(x)\,dx + \lambda\int_a^b p(x)v_1(x)v_0(x)\,ax + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^k \int_a^b p(x)v_k(x)v_0(x)\,dx + \ldots \tag{47}$$

Обозначим радиус круга его равномерной сходимости через R_1.

Как известно, радиус круга равномерной сходимости всякого ряда, получающегося из какого-либо данного путем интегрирования, не менее радиуса круга равномерной сходимости этого последнего. Следовательно, в данном случае

$$\rho \leqslant R_1. \tag{48}$$

Заменим в ряде (47) λ через $-\lambda$. Получим ряд

$$S(-\lambda) = \int_a^b p(x)v_0^2(x)\,dx - \lambda\int_a^b p(x)v_1(x)v_0(x)\,dx + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k\lambda^k \int_a^b p(x)v_k(x)v_0(x)\,dx + \ldots,$$

радиус круга равномерной сходимости которого есть R_1. Радиус R круга равномерной сходимости ряда

$$S(\lambda) + S(-\lambda) = 2\Big(\int_a^b p(x)v_0^2(x)\,dx +$$
$$+\lambda^2\int_a^b p(x)v_0(x)v_2(x)\,dx + \ldots + \lambda^{2k}\int_a^b p(x)v_0(x)v_{2k}(x)\,dx + \ldots\Big) \tag{49}$$

во всяком случае не менее R_1, т.е.

$$R_1 \leqslant R.$$

Отсюда на основании (48) заключаем, что

$$\rho \leqslant R. \tag{50}$$

16. Рассмотрим интеграл $I_{2k} = \int_a^b p(x)v_0(x)v_{2k}(x)dx$. Положив в (29) $k = 1$, получим $p(x)v_0(x) = q(x)v_1(x) - v_1''(x)$. Поэтому можем писать

$$I_{2k} = \int_a^b q(x)v_1(x)v_{2k}(x)\,dx - \int_a^b v_{2k}(x)v_1''(x)\,dx.$$

Подобно предыдущему (п. 14),

$$\int_a^b v_{2k}(x)v_1''(x)\,dx = \left(v_{2k}(x)v_1'(x) - v_{2k}'(x)v_1(x)\right)\Big|_a^b + \int_a^b v_1(x)v_{2k}''(x)\,dx.$$

Так как в предельных условиях (24) и (24_1), которым удовлетворяют функции $v_1(x)$ и $v_{2k}(x)$, условие ортогональности соблюдается, то

$$(v_{2k}(x)\,v_1'(x) - v_{2k}'(x)\,v_1(x))\Big|_a^b = 0,$$

а, в силу уравнения (29) (при замене k через $2k$),

$$\int_a^b v_1(x)\,v_{2k}''(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b q(x)\,v_1(x)\,v_{2k}(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,v_1(x)\,v_{2k-1}(x)\,dx,$$

то

$$I_{2k} = \int_a^b p(x)\,v_1(x)\,v_{2k-1}(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,v_0(x)\,v_{2k}(x)\,dx.$$

Подвергнув первый из этих интегралов снова только что указанному преобразованию, получим

$$\int_a^b p(x)\,v_1(x)\,v_{2k-1}(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,v_2(x)\,v_{2k-2}(x)\,dx.$$

Повторив последовательно такое преобразование s раз, убедимся, что

$$I_{2k} = \int_a^b p(x)\,v_0(x)\,v_{2k}(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,v_s(x)\,v_{2k-s}(x)\,dx.$$

Положив $s = k$, получим $I_{2k} = \int_a^b p(x)v_k^2(x)dx = W_k$. При этом равенство (49) дает

$$S(\lambda) + S(-\lambda) = 2(W_0 + \lambda^2 W_1 + \lambda^4 W_2 + \ldots + \lambda^{2k} W_k + \ldots).$$

Радиус R круга равномерной сходимости этого ряда равен, следовательно, $R = \lim\limits_{k\to\infty} (\sqrt{W_{k-1}}/\sqrt{W_k})$. Отсюда на основании (50) заключаем, что $\rho \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} (\sqrt{W_{k-1}}/\sqrt{W_k})$. Сопоставляя это неравенство с неравенством (46), убеждаемся, что

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}.$$

Таким образом, приходим к следующему результату:

Ряд (27) сходится абсолютно и равномерно для всех значений x в промежутке от a до b, и радиус ρ круга его равномерной сходимости по параметру λ равен

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}. \qquad (51)$$

Иначе говоря, *ряд* (27) *представляет собой голоморфную функцию параметра* λ *внутри круга радиуса* ρ *и при этих значениях* λ *непрерывную функцию от* x *в промежутке* $[a, b]$.

17. Остается показать, что функция $V(x)$, определяемая рядом (27), действительно (а не только формально) удовлетворяет и уравнению (23), и условиям (24) или (24_1) (п. 11). Покажем, что ряд составленный из производных по x от членов ряда (27), также сходится равномерно внутри круга радиуса ρ.

Из равенства (37) выводим, дифференцируя по x,

$$v_k'(x) = u_1'(x) N_k(x) - u_2'(x) M_k(x) + \omega_1'(x) N_k(b) - \omega_2'(x) M_k(b). \tag{52}$$

Положив

$$\theta_1(x, \xi) = u_1'(x) u_2(\xi) - u_2'(x) u_1(\xi),$$
$$\theta_2(x, \xi) = \omega_1'(x) u_2(\xi) - \omega_2'(x) u_1(\xi),$$

составим функцию $\theta(x, \xi)$, подчинив ее условиям

$$\theta(x, \xi) = \theta_1(x, \xi) + \theta_2(x, \xi) \quad \text{при} \quad a \leqslant \xi \leqslant x,$$
$$\theta(x, \xi) = \theta_2(x, \xi) \quad \text{при} \quad x \leqslant \xi \leqslant b.$$

Функция $\theta(x, \xi)$, таким образом определенная, есть ограниченная функция и она интегрируема по ξ в промежутке $[a, b]$ при всяком x, лежащем в том же промежутке. Следовательно,

$$\int_a^b p(\xi)\theta^2(x, \xi)\, d\xi \leqslant \theta_1^2, \tag{53}$$

где θ_1^2 есть положительное число, не зависящее от x.

Выражение (52) для $v_k(x)$ можно представить при помощи функции $\theta(x, \xi)$ в виде

$$v_k'(x) = \int_a^b p(\xi) v_{k-1}(\xi) \theta(x, \xi)\, d\xi.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством Буняковского и (53), выводим

$$|v_k'(x)| \leqslant \theta_1 \sqrt{W_{k-1}}. \tag{54}$$

Сравнивая теперь ряд

$$v_0'(x) + \lambda v_1'(x) + \lambda^2 v_2'(x) + \ldots + \lambda^k v_k'(x) + \ldots \tag{55}$$

с рядом $\theta_1(\sqrt{W_0} + |\lambda|\sqrt{W_1} + |\lambda^2|\sqrt{W_2} + \ldots + |\lambda^k|\sqrt{W_k} + \ldots)$, заключаем на основании (54) и рассуждений предыдущих пунктов, что *ряд* (55) *сходится равномерно (и притом абсолютно) при всяком* x *в промежутке* $[a, b]$ *и при всех значениях* λ *внутри круга радиуса* ρ (51).

Отсюда на основании известной теоремы*) заключаем, что *ряд* (55) *представляет производную по* x *от функции* $V(x)$ *для всех точек промежутка* $[a, b]$, так что можем писать

$$V'(x) = v_0'(x) + \lambda v_1'(x) + \lambda^2 v_2'(x) + \ldots + \lambda^k v_k'(x) + \ldots \tag{56}$$

*) См., например, C. J o r d a n, "Cours d'Analyse", T. I (Paris, 1893, p. 313); см. также С.М. Н и к о л ь с к и й, "Курс математического анализа", т. 1 (М.: Наука, 1975).

18. Составим теперь ряд из производных второго порядка по x от членов ряда (27), т.е. ряд

$$\sigma(x) = v_0''(x) + \lambda v_1''(x) + \lambda^2 v_2''(x) + \ldots + \lambda^k v_k''(x) + \ldots \tag{57}$$

Рассмотрим ряды

$$S_1 = f(x) + \lambda p(x) \{ v_0(x) + \lambda^2 v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \ldots + \lambda^k v_k(x) + \ldots \}$$

и

$$S_2 = q(x) \{ v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \ldots + \lambda^k v_k(x) + \ldots \}.$$

Каждый из них, как доказано выше, сходится абсолютно и равномерно при всяком x в промежутке $[a, b]$ и для значений λ внутри круга радиуса ρ. Следовательно, ряд

$$S_2 - S_1 = [q(x) - \lambda p(x)]\; V(x) - f(x) =$$

$$= q(x) v_0(x) - f(x) + \lambda [q(x) v_1(x) - \lambda p(x) v_0(x)] + \ldots$$

$$\ldots + \lambda^k [q(x) v_k(x) - \lambda p(x) v_{k-1}(x)] + \ldots \tag{58}$$

сходится равномерно при тех же условиях, что и каждый из рядов S_1 и S_2. Но на основании уравнений (28) и (29) имеем при всяком k:

$$q(x) v_k(x) - \lambda p(x) v_{k-1}(x) = v_k''(x).$$

Следовательно

$$S_2 - S_1 = v_0''(x) + \lambda v_1''(x) + \lambda^2 v_2''(x) + \ldots + \lambda^k v_k''(x) + \ldots = \sigma(x),$$

т.е. ряд $\sigma(x)$ (57) сходится равномерно при тех же условиях, что и ряды (27) и (56), а потому представляет собой первую производную от $V'(x)$ или, что то же, вторую производную от $V(x)$.

На основании сказанного из равенства (58) заключаем, что *функция $V(x)$, определяемая рядом* (27), *действительно удовлетворяет уравнению* (23). Очевидно, наконец, что *эта функция удовлетворяет действительно и предельным условиям* (24) *и* (24_1), так как каждый ее член этим условиям удовлетворяет.

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Уравнение (23) *допускает интеграл, удовлетворяющий предельным условиям* (24) *или* (24_1), *в виде ряда* (27), *равномерно сходящегося при всяком x в промежутке* $[a,b]$ *и при всех значениях λ внутри круга радиуса*

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}. \tag{51}$$

Круг этот есть предельный круг голоморфности функции $V(x)$, так что *ряд* (27) *не может быть равномерно сходящимся для значений λ, лежащих вне этого круга.*

19. Рассмотрим теперь ту же задачу об интегрировании уравнения (23) при предельных условиях (24) или (24_1), основываясь на общей теории линейных дифференциальных уравнений.

Придерживаясь обозначений п. 3 настоящей главы, напишем общий интеграл уравнения однородного, соответствующего данному неоднородному уравнению (23) (см. (7) гл. 3), в виде

$$V(x) = C_1 w_1(x, \lambda) + C_2 w_2(x, \lambda).$$

Применив затем метод Лагранжа изменения произвольных постоянных C_1 и C_2 получим общий интеграл уравнения (23) в виде

$$V(x) = C_1 w_1(x, \lambda) + C_2 w_2(x, \lambda) + r(x, \lambda), \tag{59}$$

где (ср. п. 11 этой главы)

$$r(x, \lambda) = w_1(x, \lambda) \int_a^x f(x)\, w_2(x, \lambda)\, dx - w_2(x, \lambda) \int_a^x f(x)\, w_1(x, \lambda)\, dx.$$

Выберем затем произвольные постоянные C_1 и C_2 в выражении $V(x)$ (59) так, чтобы были удовлетворены предельные условия

$$L(V) = 0, \quad L_1(V) = 0,$$

где, напомним, символы $L(V)$ и $L_1(V)$ представляют сокращенное обозначение первых частей равенств (24) и (24_1). Для определения C_1 и C_2 получаем следующую систему уравнений (ср. п. 12 этой главы):

$$\begin{aligned} &C_1 L(w_1) + C_2 L(w_2) + L(r) = 0, \\ &C_1 L_1(w_1) + C_2 L_1(w_2) + L_1(r) = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Определитель этой системы, очевидно, одинаков с определителем $\omega(\lambda)$ уравнений (11) (п. 3) или (20) (п. 8), смотря потому, имеем ли мы дело с предельными условиями вида (24) или условиями вида (24_1). При сделанных в пп. 5 и 8 допущениях этот определитель не равен тождественно нулю при всяком λ.

Уравнения (60) разрешимы относительно C_1 и C_2 и дают

$$C_1 = A(\lambda)/\omega(\lambda), \quad C_2 = B(\lambda)/\omega(\lambda),$$

где $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, равно как и $\omega(\lambda)$, суть некоторые целые трансцендентные функции от λ во всей плоскости этой переменной. Подставив эти выражения C_1 и C_2 в (59), получим искомый интеграл в виде

$$V(x, \lambda) = W(x, \lambda)/\omega(\lambda), \tag{61}$$

где $W(x, \lambda)$ *есть целая трансцендентная функция от* λ *при всяком* x *в промежутке* $[a, b]$, *т.е. представляется в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра* λ, *равномерно сходящегося для всех значений* λ*).

Из выражения (61) следует, что $V(x, \lambda)$, *вообще говоря, есть мероморфная функция параметра* λ, *не имеющая других критических точек, кроме полюсов, которыми могут служить лишь корни функции* $\omega(\lambda)$, *т.е. характеристические числа* λ_k *фундаментальных функций* $V_k(x)$ (см. первые пункты настоящей главы).

20. Сопоставив только что полученный результат с теоремой предыдущего пункта, убеждаемся, что при допущениях пп. 5 и 8 функция $V(x, \lambda)$ не

---

*) То есть при любом $R > 0$ ряд сходится равномерно по $(x, \lambda) \in \{x \in [a, b], |\lambda| < R.\}$ *(Прим. ред.)*

имеет ни одного полюса внутри круга радиуса ρ, определяемого равенством (51), ибо согласно этой теореме $V(x, \lambda)$ остается голоморфной функцией от λ внутри этого круга.

Покажем, *что на границе этого круга непременно лежит полюс λ_1 функции $V(x, \lambda)$, а следовательно, и корень функции $\omega(\lambda)$.*

Допустим обратное, т.е. что модуль ρ_1 ближайшего к нулю полюса функции $V(x, \lambda)$ больше ρ. Так как $W(x, \lambda)$ есть голоморфная функция λ во всей плоскости переменного λ, так же как и $\omega(\lambda)$, то при сделанном допущении функция $V(x, \lambda)$ может быть представлена в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра λ, равномерно сходящегося внутри круга радиуса

$$\rho_1 > \rho,$$

что в силу теоремы п. 18 невозможно. Таким образом, *на окружности радиуса ρ наверное лежит полюс λ_1 мероморфной функции $V(x, \lambda)$* (61), *а следовательно, и корень функции $\omega(\lambda)$.*

21. Обозначим через μ, $\mu \geqslant 1$, кратность полюса λ_1.

Функция $V(x, \lambda)$ (см. (61)) может быть представлена в виде

$$V(x, \lambda) = \frac{W_\mu(x)}{(\lambda - \lambda_1)^\mu} + \frac{W_{\mu-1}(x)}{(\lambda - \lambda_1)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{W_1(x)}{\lambda - \lambda_1} + U(x, \lambda), \qquad (62)$$

где $U(x, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ, т.е. представляется рядом, содержащим лишь целые положительные степени $\lambda - \lambda_1$. Функция $V(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (23), которое напишем так:

$$V''(x) + (\lambda - \lambda_1)\, p(x) V(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\, V(x) + f = 0^{*)}.$$

Подставив сюда выражение (62) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых отрицательных степенях разности $\lambda - \lambda_1$, получим ряд дифференциальных соотношений между функциями $W_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$. Первые два из этих соотношений, которые получаются, когда приравняем нулю коэффициенты при

$$(\lambda - \lambda_1)^{-\mu} \quad \text{и} \quad (\lambda - \lambda_1)^{-\mu+1}, \qquad (63)$$

имеют, как легко убедиться, вид

$$\begin{aligned} &W''_\mu(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\, W_\mu(x) = 0, \\ &W''_{\mu-1}(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\, W_{\mu-1}(x) + p(x)\, W_\mu(x) = 0. \end{aligned} \qquad (64)$$

С другой стороны, функция $V(x, \lambda)$ удовлетворяет предельным условиям (24) или (24_1), которые напишем в общей форме

$$L(V) = 0, \quad L_1 V = 0. \qquad (65)$$

Подставив сюда вместо V его выражение (62) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых отрицательных степенях $\lambda - \lambda_1$, получим для степеней (63):

$$\begin{aligned} &L(W_\mu) = 0, \qquad L_1(W_\mu) = 0, \\ &L(W_{\mu-1}) = 0, \qquad L_1(W_{\mu-1}) = 0. \end{aligned} \qquad (65_1)$$

*) В дифференциальном уравнении мы пишем для сокращения вместо $V(x, \lambda)$ просто $V(x)$.

Докажем, что λ_1 *есть число вещественное.* Допустив обратное, положим

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \tag{66}$$

где α и β суть некоторые вещественные числа.

Если λ_1 имеет вид (66), то, очевидно, $W_\mu(x)$ не может быть вещественной функцией, т.е. должно иметь вид

$$W_\mu(x) = U_1(x) + iU_2(x),$$

где $U_1(x)$ и $U_2(x)$ – вещественные функции от x. Подставив это выражение $W_\mu(x)$ в (64) и (65_1) и приравнивая нулю вещественные части и коэффициенты при i, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &U_1''(x) + [\alpha p(x) - q(x)]\,U_1(x) - \beta p(x) U_2(x) = 0,\\ &U_2''(x) + [\alpha p(x) - q(x)]\,U_2(x) + \beta p(x) U_1(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &L(U_1) = 0, \quad L_1(U_1) = 0,\\ &L(U_2) = 0, \quad L_1(U_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

В силу этих последних предельных условий заключаем, что

$$\left(U_1'(x)U_2(x) - U_1(x)U_2'(x)\right)\Big|_a^b = 0, \tag{69}$$

ибо в равенствах (65_1) соблюдается условие ортогональности.

Умножив теперь первое из уравнений (67) на $U_2(x)$, второе на $U_1(x)$, вычтя одно из другого и проинтегрировав результат по x от a до b, получим, на основании (69),

$$\beta \int_a^b p(x)\,[U_1^2(x) + U_2^2(x)]\,dx = 0. \tag{70}$$

Если $\beta \neq 0$, т.е. λ_1 есть число комплексное, то необходимо

$$U_1(x) = 0, \quad U_2(x) = 0 \quad \text{тождественно},$$

т.е. и

$$W_\mu(x) = 0 \quad \text{тождественно},$$

что невозможно, ибо тогда порядок полюса λ_1 функции $V(x, \lambda)$ был бы меньше, чем μ.

22. Докажем, наконец, что *кратность полюса* λ_1 *равна единице,* $\mu = 1$. Предположим, напротив, что $\mu \geqslant 2$.

Так как в равенствах (65_1) соблюдается условие ортогональности, то (см. п. 1 этой главы)

$$\left(W_\mu'(x)W_{\mu-1}(x) - W_\mu(x)W_{\mu-1}'(x)\right)\Big|_a^b = 0.$$

Помножим теперь первое из уравнений (64) на $W_{\mu-1}(x)$, второе на $W_\mu(x)$, вычтем один результат из другого и полученное равенство проинтегрируем по x от a до b. Приняв в расчет (71), получим

$$\int_a^b [W_{\mu-1}(x)W''_\mu(x) - W_\mu(x)W''_{\mu-1}(x)]\,dx =$$

$$= (W'_\mu(x)W_{\mu-1}(x) - W_\mu(x)W'_{\mu-1}(x))\Big|_a^b = 0.$$

Следовательно, необходимо $\int_a^b p(x)\,W^2_\mu(x)\,dx = 0$, что требует, чтобы было $W_\mu(x) = 0$ тождественно *).

Очевидно, такой результат получится всегда, коль скоро $\mu \geqslant 2$. Последовательно повторяя те же рассуждения, совершенно так же убедимся, что и $W_{\mu-1}(x)$, $W_{\mu-2}(x)$, $W_{\mu-s}(x)$ должны равняться тождественно нулю при всяком s, удовлетворяющем условию

$$\mu - s \geqslant 2.$$

Следовательно, $V(x, \lambda)$ непременно должно иметь вид

$$V(x, \lambda) = \frac{W_1(x)}{\lambda - \lambda_1} + U(x, \lambda), \tag{72}$$

т.е. λ_1 *есть простой полюс функции* $V(x, \lambda)$.

23. Сопоставляя все сказанное, приходим к следующему выводу: *при соблюдении условий, указанных в пп.* 5 *и* 8, *функция* $V(x)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\;V(x) + f(x) = 0 \tag{73}$$

и предельным условием первого или второго класса

$$L(V) = 0, \quad L_1(V) = 0, \tag{74}$$

есть, вообще говоря, мероморфная функция λ. *Она остается голоморфной в области значений* λ, *ограниченной кругом радиуса*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}. \tag{75}$$

На границе этого круга имеется простой и вещественный полюс λ_1. *Интегральным вычетом этого полюса служит функция* $W_1(x)$ (*см.* (72)), *не равная тождественно нулю, удовлетворяющая уравнению*

$$W_1''(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\;W_1(x) = 0 \tag{76}$$

и предельным условиям

$$L(W_1) = 0, \quad L_1(W_1) = 0. \tag{77}$$

---

*) При вещественном λ_1 функции $V(x, \lambda_1)$, $W_1(x), \ldots, W_\mu(x)$ – вещественно-значные. (*Прим. ред.*)

Число λ_1 есть корень уравнения

$$\omega(\lambda) = 0. \tag{78}$$

Уравнения (76) и (77) показывают, что $W_1(x)$ *есть фундаментальная функция, а λ_1 есть соответствующее ей характеристическое число.* Таким образом, *доказано существование одного вещественного характеристического числа λ_1 и ему соответствующей (вещественнозначной) фундаментальной функции* $W_1(x)$. При этом формула (75) дает и способ приближенного вычисления $|\lambda_1|$, т.е. модуля одного из вещественных корней уравнения (78) ибо, взяв k достаточно большим, получим, приближенное выражение $|\lambda_1|$ в виде $\sqrt{W_{k-1}}/\sqrt{W_k}$, достаточно мало отличающееся его истинного значения.

Так как уравнения (76) и (77) линейны и однородны относительно $W_1(x)$ и ее производных, то за фундаментальную функцию, соответствующую найденному характеристическому числу λ_1, можем принять любую функцию вида $C_1 W_1(x)$, где C_1 – какой угодно (вещественный) постоянный множитель. Мы определим этот множитель при помощи условия

$$C_1^2 \int_a^b p(x)\, W_1^2(x)\, dx = 1.$$

При этом получим фундаментальную функцию, соответствующую характеристическому числу λ_1, которую обозначим через $V_1(x)$ и которая будет, следовательно, удовлетворять условию

$$\int_a^b p(x)\, V_1^2(x)\, dx = 1. \tag{79}$$

В дальнейшем под $V_1(x)$ будем подразумевать именно такую функцию.

24. Возьмем в уравнении (73) вместо функции $f(x)$ для которой изложенным выше приемом мы получили число λ_1 и функцию $V_1(x)$, другую какую-либо функцию $f_1(x)$.

По предыдущему интеграл уравнения

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) + f_1(x) = 0 \tag{81}$$

при тех же предельных условиях (74) (которые не зависят от выбора функции $f(x)$) представится в виде

$$V(x, \lambda) = W_1(x, \lambda)/\omega(\lambda), \tag{82}$$

где $W_1(x, \lambda)$ есть функция того же характера, что и функция $W(x, \lambda)$ в уравнении (61).

Применяя к уравнению (81) дословно все предыдущие рассуждения, мы найдем некоторое вещественное число $\lambda_1^{(1)}$ и ему соответствующую фундаментальную функцию, которую обозначим через $V_1^{(1)}(x)$.

Возможны следующие предположения:

1°. Число $\lambda_1^{(1)}$ окажется равным раньше найденному числу λ_1, и функция $W_1(x, \lambda)$ обратится при $\lambda = \lambda_1$ в ту же фундаментальную функцию $V_1(x)$*).

---

*) Или в функцию, отличающуюся от $V_1(x)$ постоянным множителем.

2°. Число $\lambda_1^{(1)}$ будет равно λ_1, но $W_1(x, \lambda)$ обратится при $\lambda = \lambda_1$ в функцию $V_1^{(1)}(x)$, отличную от раньше найденной функции $V_1(x)$ (в линейно независимую от нее функцию).

3°. Число $\lambda_1^{(1)}$ будет отлично от числа λ_1, причем $W_1(x, \lambda)$ обратится при $\lambda = \lambda_1^{(1)}$ в функцию $V_1^{(1)}(x)$, отличную от найденной $V_1(x)$, ибо разным характеристическим числам, если таковые существуют, не может соответствовать одна и та же фундаментальная функция*).

25. Первое предположение невозможно при произвольном выборе функции $f_1(x)$; иначе говоря, функцию $f_1(x)$ всегда можно выбрать так, что это допущение не будет иметь места.

Определим $f_1(x)$ при помощи условия

$$\int_a^b f_1(x)\, V_1(x)\, dx = 0, \tag{83}$$

выбрав из бесчисленного множества функций, удовлетворяющих этому равенству, какую-либо определенную. Подставив (82) в уравнение (81), получим следующее уравнение, которому удовлетворяет функция $W_1(x, \lambda)$:

$$\frac{W_1''(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} + [\lambda p(x) - q(x)]\,\frac{W_1(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} + f_1(x) = 0.$$

Умножив это уравнение на $V_1(x)\,dx$ и интегрируя результат в пределах от a до b, получим

$$\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\int_a^b W_1''(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx + \lambda \int_a^b p(x)\, W_1(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx -\right.$$

$$\left.-\int_a^b q(x)\, W_1(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx\right\} + \int_a^b f_1(x)\, V_1(x)\, dx = 0.$$

Но

$$\int_a^b W_1''(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx =$$

$$=(W_1'(x, \lambda)\, V_1(x) - W_1(x, \lambda)\, V_1'(x))\Big|_a^b + \int_a^b W_1(x, \lambda)\, V''(x)\, dx.$$

Так как $W_1(x, \lambda)$ и $V_1(x)$ удовлетворяют предельным условиям одного

---

*) Пусть $V_1(x)$ есть фундаментальная функция, отвечающая двум различным характеристическим числам λ_1 и λ_2.

По самому определению фундаментальных функций имеем

$$V_1''(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\; V_1(x) = 0,$$

$$V_1''(x) + [\lambda_2 p(x) - q(x)]\; V_1(x) = 0.$$

Отсюда необходимо $(\lambda_1 - \lambda_2)\, p(x)\, V_1(x) = 0$, т.е $V_1(x) = 0$ тождественно.

и того же вида (74), в $V_1(x)$ – уравнению

$$V_1''(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\ V_1(x) = 0\ ,$$

то

$$\int_a^b W_1''(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b q(x)\, W_1(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx - \lambda_1 \int_a^b p(x)\, W_1(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx,$$

вследствие чего уравнение (84) принимает вид

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\omega(\lambda)} \int_a^b p(x)\ W_1(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx + \int_a^b f_1(x)\, V_1(x)\, dx = 0. \tag{85}$$

Заметим, что число λ_1 мы можем рассматривать как простой корень функции $\omega(\lambda)$, ибо λ_1 есть простой полюс мероморфной функции

$$V(x, \lambda) = W_1(x, \lambda)/\,\omega(\lambda)\ . \tag{82}$$

Если бы оказалось, что λ_1 есть корень функции $\omega(\lambda)$ кратности μ, то $W_1(x, \lambda)$ содержит непременно множитель вида $(\lambda - \lambda_1)^{\mu - 1}$, ибо только при этом $\lambda = \lambda_1$ может быть простым полюсом $V(x, \lambda)$. Сократив числитель и знаменатель дроби (82) на этот множитель, получим

$$V(x, \lambda) = W_1^{(1)}(x, \lambda)/\,\omega_1(\lambda)\ ,$$

где $\omega_1(\lambda)$ будет функцией, для которой λ_1 есть необходимо простой корень, причем $W_1^{(1)}(x, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_1$ будет обращаться в функцию $\theta V_1(x)$, где $\theta \neq 0$ – некоторая постоянная. Заметив это, предположим, что λ стремится к λ_1, и перейдем к пределу. В пределе получим

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1} \frac{\lambda - \lambda_1}{\omega(\lambda)} = \frac{1}{\omega'(\lambda_1)}\ , \qquad W_1(x, \lambda_1) = \theta V_1(x)\ ,$$

и уравнение (85) при условии (83) даст $\dfrac{\theta}{\omega'(\lambda_1)} \displaystyle\int_a^b p(x)\ V_1^2(x)\ dx = 0$, что невозможно, ибо $\theta \neq 0$ и $\omega'(\lambda_1)$ есть величина конечная, а $V_1(x)$ не равно тождественно нулю.

Следовательно, *при условии* (83) *первое допущение оказывается невозможным.*

26. Рассмотрим второе предположение; допустим опять, что $f_1(x)$ удовлетворяет условию (83). В этом случае из равенства (85) при $\lambda = \lambda_1$ получаем

$$\frac{1}{\omega_1'(\lambda_1)} \int_a^b p(x)\ V_1^{(1)}(x)\ V_1(x)\, dx = 0.$$

Так как $1/\omega'(\lambda_1)$ есть величина, не равная нулю, то необходимо

$$\int_a^b p(x)\, V_1^{(1)}(x)\ V_1(x)\, dx = 0\ ,$$

т.е. $V_1^{(1)}(x)$ есть функция, ортогональная с $V_1(x)$ по отношению к характеристической функции $p(x)$.

Второе предположение возможно лишь в том случае, когда числу λ_1 отвечают две различные фундаментальные функции. При этом, если функция $f_1(x)$ удовлетворяет условию (83), то метод Шварца – Пуанкаре, примененный к уравнению (81), если и приведет к ранее найденному числу λ_1, то числитель дроби (82) $W_1(x, \lambda)$ обратится при $\lambda = \lambda_1$ в фундаментальную функцию $V_1^{(1)}(x)$, отличную от найденной раньше функции $V_1(x)$ и ортогональную с ней.

27. Итак, если вместо уравнения (23) (п. 11), давшего по методу Шварца – Пуанкаре некоторое характеристическое число λ_1 и ему соответствующую фундаментальную функцию $V_1(x)$, мы возьмем уравнение (81), заменив $f(x)$ через $f_1(x)$, где $f_1(x)$ – какая-либо функция, подчиненная условию (83), то метод Шварца – Пуанкаре, примененный вновь к уравнению (81), приведет либо к другому характеристическому числу λ_2, отличному от λ_1, и другой фундаментальной функции $V_2(x)$, отличной от $V_1(x)$*), либо к тому же числу λ_1, но к другой ему же соответствующей функции $V_1^{(1)}(x)$, отличной от $V_1(x)$ и ортогональной с ней. Напомним, что в первом случае $V_2(x)$ также будет ортогональна по отношению к $V_1(x)$ (см. п. I этой главы).

Полученный результат можно формулировать иначе следующим образом:

Если $V_1(x)$ есть какая-либо фундаментальная функция, а данная функция $f_1(x)$ в уравнении (81) *удовлетворяет условию*

$$\int_a^b f_1(x)\, V_1(x)\, dx = 0,$$

то точка $\lambda = \lambda_1$ есть, вообще говоря, простая точка мероморфной функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению (81) *и условиям* (74) (*не полюс*), *и может быть ее полюсом* (*если может*) *лишь в том случае, когда числу λ_1 соответствуют две различные между собой фундаментальные функции.*

28. Нетрудно убедиться в справедливости обратного предложения, а именно: *если в уравнении* (81) *функция $f_1(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_a^b f_1(x)\, V_1(x)\, dx \neq 0\,, \tag{86}$$

то λ_1 есть непременно полюс мероморфной функции $V(x, \lambda)$ (82), *причем при $\lambda = \lambda_1$ функция $W_1(x, \lambda)$ обращается в функцию, являющуюся линейной комбинацией функций $V_1(x)$ и $V_1^{(1)}(x)$.*

В самом деле, формула (85) справедлива для всякой функции $f_1(x)$ и при всяком λ. Полагая $\lambda = \lambda_1$, получаем

$$\frac{1}{\omega'(\lambda_1)} \int_a^b p(x)\, W_1(x, \lambda)\, V_1(x)\, dx + \int_a^b f_1(x)\, V_1(x)\, dx = 0\,. \tag{87}$$

Если λ_1 есть простая точка функции $V(x, \lambda)$, то $W_1(x, \lambda_1)$ должно быть тождественным нулем, что невозможно в силу условия (86). Итак, *при условии* (86) λ_1 *есть необходимо полюс функции* $V(x, \lambda)$.

---

*) В соответствии с предположением 3° п. 24.

Следовательно, $W_1(x, \lambda)$ должно обращаться при $\lambda = \lambda_1$ либо в функцию $V_1(x)$, либо в другую фундаментальную функцию, соответствующую числу λ_1, если это возможно. В этом последнем случае $W_1(x, \lambda_1)$ не может равняться функции $V_1^{(1)}(x)$ предыдущего пункта, которая ортогональна с $V_1(x)$, ибо тогда равенство (87) делается невозможным в силу условия (86).

Получится другая функция $V_1^{(2)}(x)$, соответствующая тому же λ_1.

Очевидно, что *одному и тому же* λ_1 *могут отвечать не более двух линейно независимых функций*, ибо они должны представлять два частных решения одного и того же линейного уравнения

$$V''(x) + [\lambda_1 p(x) - q(x)]\ V(x) = 0,$$

которое более двух таких решений допускать не может. Поэтому функция $V_1^{(2)}(x)$ необходимо будет линейной комбинацией функции $V_1(x)$ и $V_1^{(1)}(x)$.

29. Возвращаемся к первоначальному уравнению (23). Применяя к нему метод Шварца – Пуанкаре, найдем, как доказано выше, вещественное число λ_1; функция $V(x, \lambda)$, удовлетворяющая уравнению (23) и предельным условиям (74), представится в виде (72) (п. 22).

Если вместо $W_1(x)$ введем функцию $V_1(x)$ п. 23, подчиненную условию (79), то можем писать

$$V(x, \lambda) = \frac{A_1 V_1(x)}{\lambda - \lambda_1} + U(x, \lambda), \tag{66}$$

где A_1 есть некоторая постоянная, а $U(x, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ в точке $\lambda = \lambda_1$. Подставив это выражение $V(x, \lambda)$ в уравнение (23), получим следующее уравнение, которому должна удовлетворять функция $U(x, \lambda)$:

$$U''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\ U(x) + f_1(x) = 0\ ^{*)}, \tag{88}$$

где

$$f_1(x) = A_1 p(x)\ V_1(x) + f(x), \tag{88_1}$$

а подстановка того же выражения в предельные условия (74) дает, очевидно,

$$L(U) = 0, \quad L_1(U) = 0 \tag{89}$$

Уравнение (88) имеет как раз вид уравнения (81).

Метод Шварца – Пуанкаре, примененный к уравнению (88) при условиях (88_1), приведет к некоторому числу λ_2 такому, что $U(x, \lambda)$ будет голоморфной функцией λ внутри круга радиуса $\rho_1 = |\lambda_2|$, а $\lambda = \lambda_2$ будет простым вещественным полюсом этой функции. Так как по предыдущему непременно $\rho_1 \geqslant \rho$, то $|\lambda_2| \geqslant |\lambda_1|$, причем $\lambda = \lambda_1$ есть простая точка для функции $U(x, \lambda)$. Отсюда на основании теорем пп. 27 и 28 заключаем, что необходимо

$$\int_a^b f_1(x) V_1(x)\, dx = 0$$

---

*) Для сокращения опускаем аргумент λ, написав $U(x)$ вместо $U(x, \lambda)$.

или, в силу (88_1) и (79),

$$A_1 = -\int_a^b f(x)\, V_1(x)\, dx.$$

На основании этого можем утверждать, что *если в уравнении* (81) *за функцию $f_1(x)$ примем*

$$f_1(x) = f(x) - p(x)\, V_1(x) \int_a^b f(x)\, V_1(x) = dx,$$

то, применив к нему метод Шварца – Пуанкаре, мы придем к новому характеристическому числу λ_2, $|\lambda_2| \geqslant |\lambda_1|$, причем числитель $W_1(x, \lambda)$ дроби (82) *обратится при $\lambda = \lambda_2$ в новую фундаментальную функцию $W_1(x, \lambda_2)$, соответствующую числу λ_2.*

Совершенно так же, как в п. 21, убедимся затем, что $U(x, \lambda)$ представится в виде

$$U(x, \lambda) = \frac{A_2 V_2(x)}{\lambda - \lambda_2} + U_1(x, \lambda), \tag{90}$$

где A_2 есть некоторая постоянная, $V_2(x)$ есть фундаментальная функция, подчиненная условию

$$\int_a^b p(x)\, V_2^2(x)\, dx = 1,$$

а $U_1(x, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ внутри круга радиуса $\rho_2 \geqslant \rho_1$. Заметим, что равенство $\rho_1 = \rho$ может иметь место лишь при $\lambda_2 = -\lambda_1$; если же точка $\lambda = -\lambda_1$ – правильная точка функции $V(x, \lambda)$, то $\rho_1 > \rho$.

Таким образом, *доказывается существование другого характеристического числа λ_2, $|\lambda_2| \geqslant |\lambda_1|$, и ему соответствующей фундаментальной функции $V_2(x)$.*

Если обозначим через $W_k^{(1)}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) интегралы Шварца, соответствующие функции $f_1(x)$ (88_1), то получим

$$\rho_1 = |\lambda_2| = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}^{(1)}}}{\sqrt{W_1^{(1)}}}.$$

30. Если применим затем дословно к функции $U_1(x, \lambda)$, определяемой уравнением (90), рассуждения предыдущего пункта, то докажем существование третьего числа λ_3 и соответствующей ему фундаментальной функции V_3, которую можем подчинить условию

$$\int_a^b p(x)\, V_3^2(x)\, dx = 1.$$

Продолжая рассуждать так далее, мы докажем следующую теорему:

Каждой данной функции $f(x)$, непрерывной в данном промежутке $[a, b]$, соответствует бесчисленное множество вещественных чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots,$$

модули которых l_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) удовлетворяют условиям

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_k \leqslant \ldots,$$

и соответствующих этим числам не равных нулю функций

$$V_1(x),\ V_2(x), \dots ,\ V_k(x), \dots ,$$

образующих ортогональную и нормальную систему с характеристической функцией $p(x)$, удовлетворяющих уравнениям

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\ V_k(x) = 0$$

и предельным условиям двух следующих типов:

$$V_k'(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \quad V_k'(x) = \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b), \tag{а}$$

или

$$V_k(b) = \rho V_k(a), \quad V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a) + \tau V_k(a); \tag{в}$$

где α, β, γ и ρ, τ суть постоянные, причем ρ не равно нулю.

Фундаментальные функции (первого и второго классов) являются интегральными вычетами в простых вещественных полюсах мероморфной функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$V''(x, \lambda) + [\lambda p(x) - q(x)]\ V(x, \lambda) + f = 0 \tag{с}$$

и предельным условиям (а) *или* (в), *а полюсы — ее характеристическими числами λ_k и в то же время корнями целой трансцендентной функции $\omega(\lambda)$, которая при предельных условиях* (а) *(первого класса) представляется в виде*

$$\omega(\lambda) = w_1'(b, \lambda) - \beta w_1(b, \lambda) - 2\alpha +$$

$$+ \gamma w_2'(b, \lambda) - (\alpha^2 + \beta\gamma)\, w^2(b, \lambda), \tag{α}$$

а для предельных условий (в) *(второго класса) — в виде*

$$\omega(\lambda) = 2 - \frac{1}{p} w_1(b, \lambda) - \rho w_2'(b, \lambda) + \tau w_2(b, \lambda). \tag{β}$$

Здесь $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$ суть два частных линейно независимых решения дифференциального уравнения

$$V''(x, \lambda) + [\lambda p(x) - q(x)]\ V(x) = 0,$$

подчиненные условиям

$$w_1(a, \lambda) = 1, \quad w_1'(a, \lambda) = 0,$$

$$w_2(a, \lambda) = 0, \quad w_2'(a, \lambda) = 1.$$

Все предыдущие положения справедливы, если $p(x)$ и $q(x)$ суть две какие угодно непрерывные функции, причем первая из них остается положительной в промежутке $[a, b]$, а постоянные α, β, γ в условиях первого класса или постоянные ρ и τ в условиях второго класса имеют какие угодно значения, подчиненные единственному требованию, что $\omega(0)$ в том и другом случае не равно нулю (*см. пп.* 12 *и* 19 *этой главы*).

Изложенный выше прием последовательного вычисления характеристических чисел и фундаментальных функций, принадлежащих данной функции $f(x)$, мы будем называть иногда для краткости алгоритмом Шварца – Пуанкаре.

31. Предыдущий анализ показывает, что каждой данной функции $f(x)$ в исходном уравнении (23) принадлежит, вообще говоря, особая совокупность характеристических чисел и фундаментальных функций. Но все получаемые таким путем для различных функций $f(x)$ характеристические числа служат корнями одной и той же целой трансцендентной функции $\omega(\lambda)$. Такая функция, как известно, может иметь лишь отдельные точки нулей, и в плоскости переменного λ не может существовать на конечном расстоянии от начала координат точки сгущения ее корней.

Поэтому *все возможные особенные значения λ, могущие служить характеристическими числами, представляют беспредельный ряд отдельных вещественных чисел, не имеющий точек сгущения, беспредельно возрастающих по численному значению. Каждому такому числу может, как упомянуто выше, соответствовать одна или две линейно независимые между собой фундаментальные функции.*

Собрав в одну совокупность все такие возможные особенные значения λ, получим *полную систему всех возможных характеристических чисел*, а вся совокупность им соответствующих фундаментальных функций представит их *полную систему*. Вся эта совокупность характеристических чисел разобьется на две группы: к одной будут принадлежать все числа, каждому из которых соответствует только одна фундаментальная функция, к другой – все те, каждому из которых будут отвечать две различные фундаментальные функции. Все фундаментальные функции, соответствующие различным характеристическим числам, необходимо ортогональны между собой, но две функции, отвечающие одному и тому же числу, как указано выше (п. 28), могут не быть таковыми.

Но если одному и тому же числу, положим λ_k, соответствуют две разные функции, положим $V_k(x)$ и $V_k^{(1)}(x)$, то, очевидно, и две независимые между собой их линейные комбинации представят также две различные фундаментальные функции для числа λ_k. Пусть $V_k(x)$ и $V_k^{(1)}(x)$, найденные каким бы то ни было способом, оказываются неортогональными, т.е.

$$\int_a^b p(x)\, V_k(x)\, V_k^{(1)}(x)\, dx \neq 0. \tag{91}$$

Возьмем за фундаментальные функции две следующие:

$$V_k(x) \text{ и } V_k(x) + \alpha V_k^{(1)}(x), \tag{92}$$

где α – какая угодно постоянная. Последнюю при условии (91) всегда можно выбрать так, чтобы было

$$\int_a^b p(x)\, [V_k^2(x) + \alpha V_k(x)\ \ V_k^{(1)}(x)]\, dx = 0.$$

Если под α в (92) будем подразумевать именно то определенное число, которое дается этим уравнением, то две функции (92) окажутся ортогональными между собой. Выбрав указанным образом пары фундаментальных функций для всех чисел второй группы, мы получим *полную систему фундаментальных функций* (вместе с функциями для чисел первой группы), *все функции которой будут между собой ортогональны*. Очевидно, что *все их можно сделать и нормальными*.

Если теперь модуль каждого числа λ_k обозначим через l_k и расположим все числа первой и второй категорий в порядке возрастания их модулей, обозначив их буквой λ со значками 1, 2, 3 и т.д. в порядке натуральных чисел, то каждому числу при этом способе обозначения будет соответствовать одна определенная фундаментальная функция. Обозначив все эти функции буквой V с по порядку взятыми значками 1, 2, 3 и т.д., получим полную систему характеристических чисел в виде ряда

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots,\ \lambda_k, \ldots \tag{93}$$

и полную систему им соответствующих фундаментальных функций в виде ряда

$$V_1(x),\ V_2(x),\ V_3(x), \ldots,\ V_k(x), \ldots \tag{94}$$

причем порядок расположения чисел (93) будет характеризоваться следующими условиями, которым удовлетворяют их модули l_k :

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant l_4 \leqslant \ldots \leqslant l_k \leqslant \ldots \tag{95}$$

При этом подряд взятые два, три или четыре из чисел l_k могут оказаться равными между собой.

Первый случай может, например, встретиться, когда два подряд взятых характеристических числа численно равны между собой, но различны по знаку, и каждому из них соответствует по одной фундаментальной функции или когда оба эти числа, обозначенные разными значками, равны тому характеристическому числу, которому соответствуют две фундаментальные функции.

Второй случай представится, если два подряд взятых характеристических числа численно равны, но обратны по знаку, и одному из них отвечают две, а другому – только одна фундаментальная функция.

Наконец, последний случай может иметь место, если таким же двум числам, что и в предыдущем случае, соответствуют каждому по две различные фундаментальные функции.

Больше четырех подряд взятых в ряде (95) чисел l_k, равных между собой, быть не может.

Ряд (93) *исчерпывает все возможные характеристические числа, а ряд* (94) – *все возможные соответствующие им фундаментальные функции, так что вне значений* λ_k *определяемых рядом* (93), *не существует никакого другого числа, которому могла бы соответствовать не равная нулю фундаментальная функция, равно как не существует никакой другой функции, не равной нулю и отличной от функции ряда* (94), *которая могла бы быть фундаментальной для какого бы то ни было значения* λ, *не равного нулю, и была бы отличной от линейной комбинации ряда* (94), *соответствующих* $\lambda_k = \lambda$.

Случай характеристического числа, равного нулю, напомним, исключен наперед сделанным в пп. 5 и 8 допущением, что $\omega(0) \neq 0$, и будет рассмотрен особо.

32. Таким образом, от теоремы п. 30, устанавливающей существование бесчисленного множества характеристических чисел и фундаментальных функций, соответствующих данной функции $f(x)$, переходим к теореме о существовании полных систем таких чисел и функций, которые зависят лишь от заданных величин, входящих в дифференциальные уравнения и предельные условия,которыми определяются фундаментальные функции первого или второго класса, независимо от введенного метода Шварца–Пуанкаре функции $f(x)$.

Все вышесказанное можем резюмировать в виде следующей теоремы:

Каждому данному промежутку $[a, b]$, двум данным непрерывным функциям $p(x)$ и $q(x)$, из которых первая остается положительной в этом промежутке, и совокупностям постоянных α, β, γ или ρ и τ соответствует определенный,для каждой из этих совокупностей особый, ряд вещественных характеристических чисел (соответственно первого и второго классов)

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \tag{96}$$

модули которых удовлетворяют условиям

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant \dots \leqslant l_k \leqslant \dots \tag{96$_1$}$$

и беспредельно возрастают с возрастанием значка k.

Каждому числу λ_k того и другого класса соответствует определенная фундаментальная функция V_k соответственно первого или второго класса, удовлетворяющая уравнению

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)] V_k(x) = 0, \; a \leqslant x \leqslant b, \tag{97}$$

и для чисел первого класса предельным условиям

$$V_k'(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \quad V_k'(a) = \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b), \tag{98}$$

а для чисел второго класса – условиям

$$V_k(b) = \rho V_k(a), \quad V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a) + \tau V_k(a). \tag{99}$$

Числа λ_k первого класса служат вещественными корнями целой трансцендентной функции $\omega(\lambda)$, определяемой уравнением (α) теоремы п. 30, *а числа λ_k второго класса – такими же корнями функции $\omega(\lambda)$, определяемой уравнением (β) той же теоремы.*

Теорема имеет место в предположении, что в том и другом случае $\omega(0) \neq 0$.

Ряд (96), *содержащий в себе все возможные значения λ_k, каждому из которых отвечает определенная, не равная нулю, фундаментальная функция $V_k(x)$ того или другого класса, называется полной системой характеристических чисел первого или второго класса, а ряд соответствующих им фундаментальных функций*

$$V_1(x), \; V_2(x), \dots, \; V_k(x), \dots \tag{100}$$

– полной системой фундаментальных функций первого или второго класса, которые в том и другом случае ортогональны по отношению к функции $p(x)$ и нормальны.

33. Совокупность фундаментальных функций, принадлежащих какой-либо данной функции $f(x)$, составляет часть их полной системы.

Если ряд (100) функций $V_k(x)$, представляющий их полную систему, известен, то нетрудно установить критерий, при помощи которого можно выделить из него те фундаментальные функции, которые соответствуют какой-либо заданной функции $f(x)$.

На основании теоремы п. 30 характеристическое число λ_k всякой функции $V_k(x)$, входящей в состав ряда фундаментальных функций, соответствующих данной функции $f(x)$, служит полюсом мероморфной функции

$$V(x,\lambda) = W(x,\lambda)/\omega(\lambda), \tag{101}$$

удовлетворяющей уравнению (с) и условиям (а) или (в), причем при $\lambda=\lambda_k$ функция $W(x,\lambda)$ обращается в функцию, линейно выражающуюся через (одну или две) функции ряда (100), отвечающие характеристическому числу λ_k.

Возьмем какую-либо функцию $V_k(x)$ из ряда (100) их полной системы. Легко понять, что все рассуждения п. 25 дословно применяются не только к функции, которую мы подразумевали там под $V_1(x)$, но и к какой угодно фундаментальной функции $V_k(x)$, и приводят к следующему равенству:

$$\frac{\lambda-\lambda_k}{\omega(\lambda)} \int_a^b p(x)\, W(a,\lambda)\, V_k(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, V_k(x)\, dx = 0. \tag{102}$$

Допустим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f(x)\, V_k(x)\, dx \neq 0. \tag{103}$$

Если взятая функция $V_k(x)$ не принадлежит ряду фундаментальных функций, соответствующих функции $f(x)$, то λ_k не может быть полюсом функции $V(x,\lambda)$. Применим равенство (102) к $\lambda=\lambda_k$. Припоминая сказанное в п. 25, можем написать

$$\lim_{\lambda\to\lambda_k} \frac{\lambda-\lambda_k}{\omega(\lambda)} = \frac{1}{\omega'(\lambda)}.$$

Что же касается числителя дроби (101), то при сделанном предположении (т.е. что λ_k есть простая точка функции $V(x,\lambda)$)

$$W(x,\lambda_k) = 0.$$

Поэтому равенство (102) при $\lambda=\lambda_k$ дает

$$\int_a^b f(x)\, V_k(x)\, dx = 0,$$

что противоречит условию (103). Отсюда выводим следующую теорему:

Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству (103), *где $V_k(x)$ есть какая-либо функция, взятая из полной системы фундаментальных функций, то ее характеристическое число λ_k есть непременно полюс мероморфной функции* (101).

Иначе говоря, если какая-либо функция $V_k(x)$, взятая из ряда (100) полной системы фундаментальных функций, удовлетворяет условию (103), то она непременно принадлежит ряду фундаментальных функций, соответствующих (принадлежащих) функции $f(x)$.

34. Допустим теперь, наоборот, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f(x)\, V_k(x)\, dx = 0. \tag{104}$$

Равенство (102) обращается в такое:

$$\frac{\lambda - \lambda_k}{\omega(\lambda)} \int_a^b p(x)\, W(x,\lambda)\, V_k(x)\, dx = 0. \tag{105}$$

Здесь возможны два случая: либо λ_k есть простая точка функции $V(x, \lambda)$ причем необходимо $W(x,\lambda_k) = 0$, либо полюс функции $V(x,\lambda)$.

Последний случай возможен лишь тогда, когда числу λ_k отвечают две различные фундаментальные функции: взятая нами $V_k(x)$ и другая, отличная от нее, которая при сделанных нами обозначениях непременно будет равна одной из рядом стоящих с ней функций в ряде (100), т.е. $V_{k-1}(x)$, либо $V_{k+1}(x)$.

Очевидно, что при соблюдении условия (104) функция $W(x, \lambda)$ для $\lambda = \lambda_k$ не может обратиться в функцию, пропорциональную $V_k(x)$, так как при этом правая часть равенства (105) обращается в

$$\frac{C_k}{\omega'(\lambda_k)} \int_a^b p(x)\, V_k^2(x)\, dx \text{ *)},$$

что равняться нулю не может.

Следовательно, если $f(x)$ удовлетворяет условию (104), то при значении λ, равном λ_k, если это значение λ и служит полюсом мероморфной функции $V(x, \lambda)$, то соответствующий ему интегральный вычет (т.е. значение $W(x,\lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$) необходимо равен либо $C_{k-1} V_{k-1}(x)$, либо $C_{k+1} V_{k+1}(x)$ и ни в коем случае не может равняться $C_k\, V_k(x)$.

Отсюда выводим следующую теорему:

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f(x)\, V_k(x)\, dx = 0,$$

где $V_k(x)$ есть какая-либо из функций их полного ряда (100), *то эта функция наверное не входит в состав ряда фундаментальных функций, принадлежащих данной функции $f(x)$.*

35. Сопоставляя сказанное в предыдущем пункте с теоремой п. 33, получаем, как прямое следствие, еще следующее предложение:

Если число λ_k есть простая точка функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению (c) *и предельным условиям* (a) *или* (в), *то функция $f(x)$ непременно удовлетворяет условию*

$$\int_a^b f(x) V_k(x)\, dx = 0,$$

где $V_k(x)$ есть фундаментальная функция, соответствующая характеристическому числу λ_k.

---

*) C_k есть некоторый множитель пропорциональности, не равный нулю.

36. Возьмем первые n функций из их полной системы и предположим, что функция $f(x)$, фигурирующая в уравнении (с), удовлетворяет n условиям

$$\int_a^b f(x)\, V_1(x)\, dx = 0, \quad \int_a^b f(x)\, V_2(x)\, dx = 0, \quad \ldots, \quad \int_a^b f(x)\, V_n(x)\, dx = 0. \qquad (106)$$

Могут представиться два случая:

1°. λ_k, где k есть одно из чисел от 1 до n, есть число, которому соответствует только одна функция $V_k(x)$. В этом случае, так как $f(x)$ удовлетворяет условию $\int_a^b f(x)\, V_k(x)\, dx = 0$, число λ_k есть простая точка мероморфной функции $V(x,\lambda)$, как указано в п. 34.

2°. λ_k есть число, которому соответствуют две различные фундаментальные функции. В этом случае в ряде (93), представляющем полную систему характеристических чисел, число, предшествующее λ_k или следующее за ним, т.е. λ_{k-1} или λ_{k+1}, равно λ_k. Чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, допустим, что $\lambda_k = \lambda_{k+1}$. При этом в силу условий (106) и этого равенства будет иметь при всяком k от 1 до $n-1$:

$$\frac{\lambda - \lambda_k}{\omega(\lambda)} \int_a^b p(x)\, W(x,\lambda)\, V_k(x)\, dx = 0,$$

$$\frac{\lambda - \lambda_k}{\omega(\lambda)} \int_a^b p(x)\, W(x,\lambda)\, V_{k+1}(x)\, dx = 0.$$

Допустим, что λ_k есть полюс функции $V(x,\lambda)$. В силу первого из этих равенств $W(x,\lambda)$ может обратиться лишь в $V_{k+1}(x)$ при $\lambda = \lambda_k$, но это допущение невозможно в силу второго равенства. Следовательно, предположение, что λ_k есть полюс функции $V(x,\lambda)$, невозможно, что приводит к следующей теореме:

Если функция $f(x)$ из уравнения (с) *удовлетворяет n условиям вида* (106), *где $V_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) суть по порядку взятые фундаментальные функции из ряда их полной системы, то числа λ_1, λ_2 и т.д. до λ_{n-1} включительно не могут быть полюсами мероморфной функции $V(x, \lambda)$, определяемой уравнением* (с) *и предельными условиями* (а) *или* (в).

Так как по предыдущему функция $V(x,\lambda)$ не может иметь никаких других критических точек, кроме полюсов, и так как таковыми могут служить лишь характеристические числа их полной системы, то предыдущую теорему можно формулировать еще следующим образом:

Если функция $f(x)$ из уравнения (с) *удовлетворяет n условиям вида* (106), *где $V_k(x)$* (k = 1, 2, 3, ..., *n*) *суть по порядку взятые фундаментальные функции из ряда их полной системы, то функция $V(x,\lambda)$, определяемая уравнением* (с) *и предельными условиями вида* (а) *или* (в), *остается голоморфной во всех точках круга радиуса $|\lambda_{n-1}|$, так что абсолютное значение первого из ее полюсов больше или равно $|\lambda_{n-1}|$.*

Теоремы, указанные в последних пунктах, начиная с п. 33, имеют важное значение для дальнейших исследований, как это мы увидим впоследствии.

37. Из самого определения характеристических чисел λ_k как корней целой трансцендентной функции $\omega(\lambda)$ следует, что их модули l_k беспредельно возрастают с возрастанием значка k, о чем уже упоминалось выше.

Для дальнейшего существенно важно установить по крайней мере низший предел порядка возрастания чисел l_k по отношению к значку k. С этой целью мы выведем сейчас одно неравенство, которое будет иметь и другие, не меннее важные приложения.

Обозначим через $u(x)$ какую-либо функцию от x, непрерывную в промежутке $[a,b]$, а через $v(x)$ – функцию, удовлетворяющую уравнению

$$v''(x) - q(x)v(x) + p(x)u(x) = 0 \tag{107}$$

и предельным условиям одного из двух следующих типов:

$$v'(b) = \alpha v(a) + \beta v(b), \quad v'(a) = \gamma v(a) - \alpha v(b), \tag{108}$$

или

$$v(b) = \rho v(a), \quad v'(b) = \frac{1}{\rho} v'(a) + \tau v(a). \tag{109}$$

Интегрируя по частям и приняв в расчет уравнение (107), получаем

$$\int_a^b v'^2(x)\,dx = v(x)\,v'(x)\Big|_a^b - \int_a^b q(x)v^2(x)\,dx + \int_a^b p(x)v(x)u(x)dx. \tag{110}$$

Если $v(x)$ удовлетворяет условиям (108), то

$$v(x)\,v'(x)\Big|_a^b = \beta v^2(b) - \gamma v^2(a) + 2\alpha v(a)\,v(b); \tag{111}$$

если же $v(x)$ удовлетворяет условиям (109), то

$$v(x)v'(x)\Big|_a^b = \rho\tau v^2(a). \tag{111$_1$}$$

Какова бы ни была функция $v(x)$, непрерывная и имеющая интегрируемую производную, имеет место тождество

$$v^2(x) - v^2(\xi) = 2\int_\xi^x v(x)\,v'(x)\,dx$$

для любых двух значений x и ξ, взятых в промежутке $[a,b]$. Из этого тождества при помощи неравенства Буняковского выводим

$$v^2(\xi) \leqslant v^2(x) + 2\sqrt{\int_a^b v^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b v'^2(x)\,dx}$$

– неравенство, имеющее место при всяком данном ξ и при любом значении x в промежутке $[a,b]$. Интегрируя это неравенство по x в пределах от a до b, находим

$$v^2(\xi) \leqslant \frac{\int_a^b v^2(x)\,dx}{b-a} + 2\sqrt{\int_a^b v^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b v'^2(x)\,dx}. \tag{112}$$

Заметив, что в случае (111)

$$\left|v(x)\,v'(x)\Big|_a^b\right| \leqslant (|\beta| + |\alpha|)\,v^2(b) + (|\gamma| + |\alpha|)\,v^2(a)\ ^{*)} =$$

$$= \beta_0^2\,v^2(b) + \alpha_0^2\,v^2(a), \tag{113}$$

*) Ибо $|2\alpha v(a)v(b)| \leqslant |\alpha|\,[v^2(b) + v^2(a)]$.

выводим отсюда при помощи неравенства (112), полагая в нем $\xi = a$ и $\xi = b$, следующее неравенство:

$$|v(x)\,v'(x)\Big|_a^b| \leqslant \alpha_1 \int_a^b v^2(x)\,dx + 2\rho_0 \sqrt{\int_a^b v^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b v'^2(x)\,dx}, \qquad (113_1)$$

где α_1 и $2\rho_0$ – положительные постоянные, не зависящие от функции $v(x)$, а только от данных постоянных α, β, γ и концов a и b данного промежутка $[a, b]$.

Очевидно, что такого же вида неравенство имеет место и в случае (111_1), когда функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (109).

Итак, в обоих случаях, как при условиях (108), так и при условиях (109), имеет место неравенство (113_1).

Заметим затем, что

$$\left|\int_a^b q(x)\,v^2(x)\,dx\right| \leqslant c\int_a^b v^2(x)\,dx, \qquad (114)$$

где c есть $\max|q(x)|$ в промежутке $[a, b]$, и что

$$\left|\int_a^b p(x)\,v(x)\,u(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{V}\sqrt{U}, \qquad (115)$$

где положено

$$V = \int_a^b p(x)\,v^2(x)\,dx, \quad U = \int_a^b p(x)\,u^2(x)\,dx, \qquad (115_1)$$

из равенства (110) при помощи неравенств (113_1), (114) и (115) выводим следующее:

$$\int_a^b v'^2(x)\,dx \leqslant \mu_0^2 \int_a^b v^2(x)\,dx + 2\rho_0\sqrt{\int_a^b v^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b v'^2(x)\,dx} +$$

$$+ \rho_1 \int_a^b v^2(x)\,dx \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{V}},$$

где $\mu_0^2 = \alpha_1 + c$, а ρ_1 обозначает $\max p(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Разделив обе части этого неравенства на $\int_a^b v^2(x)\,dx$ и положив

$$X^2 = \int_a^b v'^2(x)\,dx \Big/ \int_a^b v^2(x)\,dx, \qquad (116)$$

находим окончательно

$$X^2 \leqslant \mu_0^2 + 2\rho_0 X + \rho_1\sqrt{U}/\sqrt{V}, \qquad (117)$$

– неравенство, которое мы и желали получить.

38. Возьмем k первых фундаментальных функций $V_k(x)$ из ряда (100) их полной системы и положим

$$v(x) = \alpha_1 V_1(x) + \alpha_2 V_2(x) + \ldots + \alpha_k V_k(x), \qquad (118)$$

где α_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ – какие угодно постоянные.

Приняв в расчет уравнения (97) (п. 32), которым удовлетворяют фундаментальные функции $V_k(k)$, убеждаемся, что функция $v(x)$(118) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v''(x) - q(x)v(x) + p(x)\sum_{s=1}^{k} \alpha_s \lambda_s V_s(x) = 0, \tag{119}$$

т.е. как раз уравнению (107), если положить в нем

$$u(x) = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \lambda_s V_s(x).$$

Очевидно также, что функция $v(x)$ удовлетворяет предельным условиям (108), если в (118) подразумевать под $V_k(x)$ фундаментальные функции первого класса, и предельным условиям (109), если под $V_k(x)$ подразумевать фундаментальные функции второго класса (см. (98) и (99) п. 32). Следовательно, к функции $v(x)$ (118) применимо неравенство (117) предыдущего пункта.

Так как функции $V_k(x)$ образуют систему, ортогональную по отношению к функции $p(x)$ и нормальную, то в данном случае интегралы (115_1) представляются в виде

$$V = \int_a^b p(x)v^2(x)\,dx = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s^2,$$

$$U = \int_a^b p(x)u^2(x)\,dx = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^2 \alpha_s^2.$$

Отсюда на основании условий (96_1), которым подчинены модули l_s чисел λ_s, заключаем, что

$$\frac{U}{V} \leqslant l_k^2, \tag{120}$$

каковы бы ни были постоянные α_s $(s = 1, 2, 3, \dots, k)$.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на $k-1$ составляющих, один из которых, положим первый по порядку от a к b, будет иметь длину δ, а остальные $k-2$ равны между собой, так что длина δ_s $(s = 2, 3, \dots, k-1)$ каждого из них будет $\delta_s = \dfrac{b-a-\delta}{k-2}$.

Отрезок δ подчиним только одному условию

$$\delta < \delta_s, \text{ т.е. } \delta < \frac{b-a}{k-1}. \tag{120$_1$}$$

Обозначив интеграл от какой-либо функции, распространенный на какой угодно отрезок δ, через $\int_\delta$, выберем постоянные α_s так, чтобы было

$$\int_{\delta_s} v(x)\,dx = 0 \quad (s = 2, 3, \dots, k-1), \tag{121}$$

$$\int_\delta v(x)\,dx = 0,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 = 1. \tag{122}$$

Уравнения (121) представляют, в силу (118), систему $k-1$ линейных однородных уравнений с k неизвестными α_s $(s = 1, 2, \dots, k)$. Очевидно число δ можно выбрать так, что один из определителей, составленный из коэффициентов при $k-1$ из величин α_s, будет не равен нулю. Уравнения (121) дадут тогда определенные выражения для отношений $k-1$ из величин α_s к k-й из них, после чего уравнение (122) определит и эту последнюю. При этих значениях α_s получим по формуле (118) определенную функцию $v(x)$ удовлетворяющую $k-1$ условиям (121).

39. Обращаемся теперь к п. 17 гл. II. Функция $v(x)$ будет как раз удовлетворять тем же условиям, что и функция $f(x)$ п. 17 гл. II, если положить там $n = k-1$.

Заметив, что в данном случае, в силу (120_1), число, обозначенное через l в п. 17 гл. II, равно

$$l = \delta_s = \frac{b-a-\delta}{k-2}$$

и применив к функции $v(x)$ неравенство (42_1) того же п. 17 гл. II, получим при принятых обозначениях (см. (117)):

$$X^2 \geqslant \frac{\pi^2 (k-2)^2}{(b-a-\delta)^2} \geqslant \frac{\pi^2 (k-2)^2}{(b-a)^2} = \frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2}\left(1-\frac{2}{k}\right)^2,$$

т.е.

$$X^2 \geqslant \frac{\pi^2}{9(b-a)^2} k^2 = \sigma_0^2 k^2 \text{ при всяком } k \geqslant 3. \tag{123}$$

Неравенство (117) для $k \geqslant \rho_0/\sigma_0$ при помощи (120) и (123) приводит к следующему:

$$l_k \geqslant \frac{1}{\rho_1}(X^2 - 2\rho_0 X - \mu_0^2) \geqslant \frac{1}{\rho_1}[(\sigma_0 k - \rho_0)^2 - (\rho_0^2 + \mu_0^2)].$$

Отсюда заключаем, что *при всяком*

$$k > \frac{\mu_0^2}{\sigma_0(\sqrt{\rho_0^2 + \mu_0^2} - \rho_0)}, \qquad k \geqslant 3, k \geqslant \rho_0/\sigma_0,$$

имеет место неравенство вида

$$|\lambda_k| = l_k > \tau_0^2 k^2, \tag{124}$$

где τ_0^2 есть положительная постоянная, не зависящая от k.

Неравенство (124) показывает, что числа l_k *возрастают при беспредельном возрастании значка k пропорционально его квадрату*. Это неравенство имеет существенное значение для дальнейших исследований.

ГЛАВА VI

Распространение предыдущего метода на исключительные случаи. Случай, когда постоянные α, β, γ для фундаментальных функций первого класса или постоянные ρ и τ для фундаментальных функций второго класса обращаются в бесконечность. Случай, когда $\omega(0)$ равно нулю, но $u_2'(b) - \beta u_2(b)$ для функции первого класса или $u_2(b)$ для функции второго класса отличны от нуля. Случай, когда $\omega(0)$ и $u_2'(b) - \beta u_2(b)$ для функций первого класса или $\omega(0)$ и $u_2(b)$ для функций второго класса равны нулю одновременно. Сдвиг шкалы характеристических чисел

1. В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что числа α, β, γ для фундаментальных функций первого класса и числа ρ и τ для фундаментальных функций второго класса суть определенные конечные числа (и ρ не нуль). Покажем теперь, что предыдущий метод распространяется и на все те возможные предельные случаи, когда некоторые (или все) из чисел α, β, γ или ρ и τ обращаются в бесконечность (или ρ обращается в нуль). Покажем прежде всего, что предельные условия как первого так и второго классов при всех возможных предположениях относительно постоянных α, β, γ и ρ, τ приводятся к трем основным типам.

Рассмотрим сначала случай, когда некоторая функция $V(x)$ удовлетворяет условиям первого класса

$$V'(b) = \alpha V(a) + \beta V(b), \; V'(a) = \gamma V(a) - \alpha V(b). \tag{1}$$

Возможны три предположения:

1°. Одна из постоянных α, β, γ обращается в бесконечность, две другие остаются конечными.

2°. Две из них обращаются в бесконечность, третья остается конечной.

3°. Все три обращаются в бесконечность.

2. *Первый случай.* Пусть $\alpha = \infty$, β и γ конечны. Разделив уравнения (1) на α и перейдя к пределу, получаем $V(a) = 0$, $V(b) = 0$.

Пусть $\beta = \infty$, α и γ конечны. Первое из (1) дает $V(b) = 0$, вследствие чего второе из (1) приводится к виду $V'(a) = \gamma V(a)$.

Пусть, наконец, $\gamma = \infty$, α и β конечны.

Из второго из уравнений (1) выводим, подобно предыдущему, $V(a) = 0$, после чего первое из них доставит

$$V'(b) = \beta V(b).$$

Итак, *случай 1° приводит к трем следующим типам предельных условий:*

$$V(a) = 0, \quad V(b) = 0, \tag{2}$$

$$V'(a) = \gamma V(a), \; V(b) = 0, \tag{3}$$

$$V(a) = 0, \quad V'(b) = \beta V(b). \tag{4}$$

3. *Второй случай*. Пусть $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$, γ конечно.

Возможны три предположения: либо

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0, \tag{5}$$

либо

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \alpha', \tag{5_1}$$

где α' есть конечная постоянная, отличная от нуля, либо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0. \tag{5_2}$$

Второе из уравнений (1) дает при $\alpha = \infty$:

$$V(b) = 0. \tag{6}$$

Напишем первое из уравнений (1) в виде

$$\frac{1}{\beta} V'(b) = \frac{\alpha}{\beta} V(a) + V(b). \tag{7}$$

При условии (5), переходя к пределу, получим то же равенство (6). Оба предельных условия приводятся к одному и тому же, что противоречит требованию их линейной независимости. Поэтому предположение (5) исключается из рассмотрения.

При втором предположении (5_1) уравнение (7) в соединении с (6) дает в пределе $V(a) = 0$. Получается уже найденный выше случай (2).

Наконец, при условии (5_2), представив первое из (1) в виде

$$\frac{1}{\alpha} V'(b) = V(a) + \frac{\beta}{\alpha} V(b)$$

и перейдя к пределу, получим $V(a) = 0$. Снова приходим к тому же самому случаю (2).

Предположим теперь, что $\beta = \infty$, $\gamma = \infty$, α конечно.

Представив уравнения (1) в виде

$$\frac{1}{\beta} V'(b) = \frac{\alpha}{\beta} V(a) + V(b), \quad \frac{1}{\gamma} V'(a) = V(a) - \frac{\alpha}{\gamma} V(b)$$

и перейдя к пределу, опять приходим к случаю (2).

Допустим, наконец, что $\gamma = \infty$, $\alpha = \infty$, β конечно.

Возможны три следующих предположения:

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = 0, \tag{8}$$

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \alpha', \quad \text{где } \alpha' \text{ есть конечное число, отличное от нуля,} \tag{8_1}$$

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \infty. \tag{8_2}$$

Напишем уравнения (1) в виде

$$\frac{1}{\alpha} V'(b) = V(a) + \frac{\beta}{\alpha} V(b), \quad \frac{1}{\gamma} V'(a) = V(a) - \frac{\alpha}{\beta} V(b). \tag{9}$$

При условии (8) оба уравнения приводятся в пределе к одному и тому же

$$V(a) = 0. \tag{9_1}$$

Этот случай, подобно (5), должен быть исключен.

В случае (8_1) уравнения (9) дают $V(a) = 0$, $V(b) = 0$, что приводит к случаю (2).

Наконец, для случая (8_2) перепишем второе из уравнений (1) так:

$$\frac{1}{\alpha} V'(b) = \frac{\gamma}{\alpha} V(a) - V(b).$$

Так как, в силу (8_2),

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

то в пределе $V(b) = 0$, что в соединении с (9) снова дает тот же случай (2).

4. Остается разобрать последний *случай* 3°. Пусть

$$\alpha = \infty, \quad \beta = \infty \quad \text{и} \quad \gamma = \infty.$$

Здесь возможны следующие предположения:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0, \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \tag{a_1}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \beta', \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \tag{a_2}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty, \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \tag{a_3}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0, \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma', \tag{$в_1$}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \beta', \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma', \tag{$в_2$}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty, \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma', \tag{$в_3$}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0, \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \infty, \tag{c_1}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \beta', \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \infty, \tag{c_2}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty, \qquad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \infty. \tag{c_3}$$

Для случаев (a_i) ($i = 1,2$) перепишем уравнения (1) в виде

$$\frac{1}{\alpha}V'(b) = V(a) + \frac{\beta}{\alpha}V(b),$$
$$\frac{1}{\alpha}V'(a) = \frac{\gamma}{\alpha}V(a) - V(b). \tag{10}$$

Отсюда, переходя к пределу, получаем для (a_1) и (a_2): $V(a) = V(b) = 0$.

Для случая (a_3) представим первое из уравнений (1) в виде

$$\frac{1}{\beta}V'(b) = \frac{\alpha}{\beta}V(a) - V(b), \tag{11}$$

что дает в пределе $V(b) = 0$, т.е. тот же результат, что и второе уравнение. Этот случай исключается.

В случае ($в_1$) уравнения (10) дают

$$V(a) = 0, \quad \gamma' V(a) - V(b) = 0, \quad \text{т.е. } V(b) = 0.$$

Для случая ($в_2$) получается тот же результат.

Наконец, в случае ($в_3$) уравнение (11) и второе из (10) приводят в пределе к тому же самому результату.

Для случаев (c_i) ($i = 1,2$) приводим уравнения (1) к виду

$$\frac{1}{\alpha}V'(b) = V(a) - \frac{\beta}{\alpha}V(b), \quad \frac{1}{\gamma}V'(a) = V(a) - \frac{\alpha}{\gamma}V(b).$$

В случае (c_1) оба уравнения приводятся к одному

$$V(a) = 0.$$

Этот случай не подлежит рассмотрению.

При условиях (c_2) получаем

$$V(a) - \beta' V(b) = 0, \quad V(a) = 0,$$

т.е.

$$V(a) = V(b) = 0. \tag{11_1}$$

Наконец, в случае (c_3), представив уравнения (1) в виде

$$\frac{1}{\beta}V'(b) = \frac{\alpha}{\beta}V(a) - V(b), \quad \frac{1}{\gamma}V(a) = V(a) - \frac{\alpha}{\gamma}V(b),$$

снова получаем в пределе равенства (11_1).

Сопоставляя все сказанное, приходим к заключению, что *все возможные предельные случаи условий первого класса, когда при обращении постоянных α, β и γ в бесконечность они остаются линейно независимыми, приводятся к трем указанным выше типам* (2), (3) *и* (4).

5. Рассмотрим предельные условия второго класса

$$V(b) = \rho V(a), \quad V'(b) = \frac{1}{\rho}V'(a) + \tau V(a). \tag{12}$$

Остановимся сначала на исключенном раньше случае $\rho = 0$. Уравнения (12) обращаются при этом в следующие:

$$V(b) = 0, \quad V'(a) = 0.$$

Получается частный вид равенств (3) при $\gamma = 0$.

Предположим теперь, что ρ, или τ, или оба вместе обращаются в бесконечность. Здесь возможны случаи предположения:

$$\rho = \infty, \quad \tau \text{ конечно}, \tag{a}$$

$$\rho \text{ конечно}, \quad \tau = \infty, \tag{в}$$

$$\rho = \infty \quad \text{и} \quad \tau = \infty. \tag{c}$$

Представив первое из уравнений (12) в виде $\frac{1}{\rho} V(b) = V(a)$, заключаем, приняв в расчет второе из них, что в случае (a) они приводятся к следующим:

$$V(a) = 0, \quad V'(b) = \tau V(a),$$

т.е.

$$V(a) = 0, \quad V'(b) = 0.$$

Получается частный случай условий (4) при $\beta = 0$.

Написав затем второе из (12) в виде

$$\frac{1}{\tau} V'(b) = \frac{1}{\rho\tau} V'(a) + V(a)$$

и приняв в расчет первое из них, получаем для случая (в) :

$$V(a) = V(b) = 0.$$

Наконец, изобразив уравнения (12) в виде

$$\frac{1}{\rho} V(b) = V(a), \quad \frac{1}{\tau} V'(b) = \frac{1}{\rho\tau} V'(a) + V(a),$$

убеждаемся, что в случае (c) оба условия (12) приводятся к одному

$$V(a) = 0.$$

6. Сопоставляя все сказанное в предыдущем пункте с результатом п. 4 приходим к следующему окончательному выводу:

Все возможные случаи, когда при обращении в бесконечность постоянных α, β, γ в условиях первого класса или постоянных ρ и τ в условиях второго класса эти условия остаются линейно независимыми, сводятся к трем типам (2), (3) *и* (4) *п.* 2.

Нужно, следовательно, показать, что изложенный выше метод распространяется и на следующие три класса фундаментальных функций $V_k(x)$, которые являются предельными по отношению к фундаментальным функциям предыдущей главы:

1.° *На фундаментальные функции $V_k(x)$ первого предельного класса, которые определяют уравнением*

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)] V_k(x) = 0 \tag{13}$$

и условиями

$$V_k(a)=0, \quad V_k(b)=0. \tag{14}$$

2.° *На фундаментальные функции $V_k(x)$ второго предельного класса, которые определяются тем же самым дифференциальным уравнением и условиями вида*

$$V_k'(a)=\gamma V_k(a), \quad V_k(b)=0. \tag{15}$$

3.° *На фундаментальные функции $V_k(x)$ третьего предельного класса, которые определяются тем же уравнением* (13) *и условиями*

$$V_k(a)=0, \quad V_k'(b)=\beta V_k(b). \tag{16}$$

7. Исходным пунктом метода Шварца – Пуанкаре служит исследование интеграла $V(x, \lambda)$ дифференциального уравнения

$$V''(x, \lambda)+[\lambda p(x)-q(x)]\,V(x, \lambda)+f(x)=0, \tag{17}$$

рассматриваемого как функция параметра λ.

Все выводы предыдущей главы останутся справедливыми, каковы бы ни были граничные (предельные) условия для функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению (17), если, изобразив искомую функцию в виде ряда

$$V(x,\lambda)=v_0(x)+\lambda v_1(x)+\lambda^2 v_2(x)+\ldots+\lambda^k v_k(x)+\ldots, \tag{18}$$

мы докажем:

(а) Неравенства Шварца (43) п. 14 предыдущей главы и (в) при помощи этих неравенств установим, что радиус ρ круга равномерной сходимости ряда (18) как раз равен

$$\rho=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}},$$

где W_k по-прежнему означает интеграл Шварца (см. (39) гл. V).

Вникая в анализ пп. 11–19 гл.V, убеждаемся, что, каковы бы ни были предельные условия типа

$$L(V)=0, \quad L_1(V)=0 \tag{19}$$

(см. равенства (8) п. 5 гл.IV), только что указанные предложения будут доказаны, коль скоро коэффициенты $v_k(x)$ ряда (18) удовлетворяют условию (условие ортогональности)

$$\left(v_n(x)v_m'(x)-v_m(x)v_n'(x)\right)\Big|_a^b=0,$$

каковы бы ни были целые числа n и m. Очевидно, что равенство соблюдается для всех трех случаев предельных условий (14), (15) и (16).

8. Легко видеть, далее, что все рассуждения пп. 19–37 также применяются без всяких существенных изменений и к рассматриваемым случаям, так как все эти рассуждения остаются справедливыми также для всяких предельных условий типа (19), коль скоро они удовлетворяют условию ортогональности; условия же (14), (15) и (16) принадлежат к этому типу, и, как сказано, условию ортогональности удовлетворяют.

При этом следует отметить лишь следующее обстоятельство. В рассматриваемых предельных случаях функция $V(x, \lambda)$, так же как и в предыдущей главе, представляется в виде

$$V(x, \lambda) = \frac{W(x, \lambda)}{\omega(\lambda)},$$

причем, как нетрудно убедиться, $\omega(\lambda)$ для условий (14) равна

$$\omega(\lambda) = w_2(b, \lambda)\,*). \tag{20}$$

При условии (15) она имеет вид

$$\omega(\lambda) = w_1(b, \lambda) + \gamma w_2(b, \lambda), \tag{21}$$

а при условиях (16)

$$\omega(\lambda) = w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda). \tag{22}$$

Анализ указанных выше пунктов гл.V основывается на допущении, что $\omega(0) \neq 0$.

То же самое допущение должно иметь место и в рассматриваемых теперь исключительных случаях, т.е. данные задачи в случае фундаментальных функций первого предельного класса должны, в силу (20), удовлетворять условию

$$u_2(b) \neq 0, \tag{23}$$

для функций второго предельного класса, в силу (21), условию

$$u_1(b) + \gamma u_2(b) \neq 0 \tag{23_1}$$

и, наконец, для функций третьего предельного класса, в силу (22), условию

$$u_2'(b) - \beta u_2(b) \neq 0. \tag{23_2}$$

При этих ограничениях все теоремы главы V, *изложенные в пп.* 1–37, *остаются, в силу вышеуказанного, справедливыми и для всех фундаментальных функций трех предельных классов, характеризуемых условиями* (14), (15) *и* (16).

9. Нетрудно убедиться, наконец, что и *основное неравенство* (124) *предыдущей главы для модулей характеристических чисел λ_k сохраняется и для рассматриваемых теперь исключительных* (*предельных*) *случаев.* Неравенство (124)

$$|\lambda_k| = l_k > \tau^2 k^2. \tag{24}$$

как показывает анализ п. 38 предыдущей главы, будет иметь место для всякой совокупности k функций $V_k(x)$, составляющих функцию $v(x)$ (118) (гл. V), коль скоро функции $V_k(x)$ удовлетворяют уравнениям (13) (п.6 настоящей главы) и притом таковы, что функция $v(x)$, составленная из $V_k(x)$ по формуле (118) (гл. V), удовлетворяет неравенству (117) предыдущей главы (п. 37). Это же последнее будет справедливо для всякой функции $v(x)$, которая удовлетворяет уравнению (107) (п. 37 гл. V) и

*) Всюду сохраняем обозначения предыдущей главы. См. равенства (8) и (14) этой главы.

следующему предельному неравенству:

$$|v(x)v'(x)\Big|_a^b| \leqslant \beta_0^2\ v^2(b) + \alpha_0^2\ v^2(a) \tag{25}$$

(см. неравенство (113) п. 37 гл. V *).

Очевидно, что функция $v(x)$, о которой идет речь, будет удовлетворять уравнению (107), если в формуле (118) подразумевать под $V_k(x)$ рассматриваемые нами в этой главе фундаментальные функции трех указанных выше предельных классов.

Остается только убедиться, что и неравенство (25) справедливо для всех этих функций, удовлетворяющих условиям (14), (15) и (16).

В случае условий (14) функция (118):

$$v(x) = \alpha_1\ V_1(x) + \alpha_2\ V_2(x) + \ldots + \alpha_k\ V_k(x)$$

удовлетворяет условиям $v(a) = v(b) = 0$. Следовательно,

$$|v(x)v'(x)\Big|_a^b| = 0.$$

Для условий (15) получаем $v'(a) = \gamma v(a)$, $v(b) = 0$. Поэтому

$$|v(x)v'(x)\Big|_a^b| = |\gamma|\, v^2(a).$$

Наконец, для условий (16), $v(a) = 0$, $v'(b) = \beta v(b)$, т.е.

$$|v(x)v'(x)\Big|_a^b| = |\beta|\, v^2(b).$$

Неравенство (25) соблюдается во всех случаях, а следовательно, неравенство (117) гл. V остается справедливым и для фундаментальных функций, подчиненных предельным условиям (14), (15) и (16).

Из сказанного следует, что *все рассуждения пп.* 37 *и* 38 гл. V *распространяются и на рассматриваемые исключительные (предельные) случаи и приводят к неравенству* (24).

10. Резюмируя все сказанное, можем утверждать, что *все теоремы предыдущей* V *главы справедливы для всех фундаментальных функций первого и второго классов, каковы бы ни были постоянные* α, β, γ *или* ρ *и* τ *в соответствующих предельных условиях, включая сюда и предельные случаи, когда некоторые или все из этих постоянных обращаются в бесконечность, если только соответствующая всем этим случаям целая трансцендентная функция* $\omega(\lambda)$ *не обращается в нуль при* $\lambda = 0$.

Покажем теперь, что *можно освободиться и от этого последнего ограничения.* Перепишем исходное уравнение метода Шварца – Пуанкаре

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)] + f(x) = 0 \tag{26}$$

в следующем виде:

$$V''(x) + [\mu p(x) - q_1(x)]\ V(x) + f(x) = 0, \tag{27}$$

полагая

$$\mu = \lambda + c, \quad q_1(x) = q(x) + cp(x), \tag{27$_1$}$$

*) В формуле (113) гл.V стоит один знак <, но, очевидно, вывод неравенства (117) не нарушится и при знаке равенства в формуле (25).

где c есть произвольная положительная постоянная. Уравнение (27) имеет тот же вид, что и (26), только буквы λ и q заменены буквами μ и q_1.

Рассматриваемый метод приведет ко всем тем результатам, которые были получены и раньше, если за исходный пункт возьмем вместо уравнения (26) уравнение (27) и будем рассматривать $V(x)$ как функцию параметра μ.

Ищем, согласно этому методу, интеграл уравнения (27) в виде ряда

$$V(x, \mu) = v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \ldots + \mu^k v_k(x) + \ldots \tag{28}$$

при предельных условиях

$$L(V) = 0, \quad L_1(V) = 0, \tag{29}$$

Для определения коэффициентов $v_k(x)$ ряда (28) получим уравнения

$$v_k''(x) - q_1(x) v_k(x) + p(x) v_{k-1}(x) = 0 \tag{30}$$

при предельных условиях

$$L(v_k) = 0, \quad L_1(v_k) = 0. \tag{31}$$

Определение функций $v_k(x)$ сводится к интегрированию следующего однородного линейного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (30):

$$v''(x) - q_1(x) v(x) = 0. \tag{32}$$

В рассматриваемом случае это уравнение будет играть ту самую роль, какую играло аналогичное уравнение п. 5 гл. V.

Мы можем дословно повторить все рассуждения гл.V и в данном случае, заменив лишь всюду букву λ буквой μ, а функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, представлявшие частные решения уравнения

$$v''(x) - q(x) v(x) = 0, \tag{32_1}$$

подчиненные условиям

$$u_1(a) = 1, \quad u_2(a) = 0, \quad u_1'(a) = 0, \quad u_2'(a) = 1 \tag{32_2}$$

(см., например, уравнения (13) и (14) п. 5 гл.V, – соответствующими частными решениями $v_1(x)$ и $v_2(x)$ уравнения (32), подчиненными условиям

$$\begin{aligned} U_1(a) &= 1, \qquad U_1'(a) = 0, \\ U_2(a) &= 0, \qquad U_2'(a) = 1. \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнивая уравнения (32_1) и (32), заключаем на основании (27_1), что $U_1(x)$ и $U_2(x)$ зависят от введенного нами произвольно параметра c и при $c = 0$ как раз обращаются в функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Как все рассуждения главы V были справедливы в предположении, что для условий первого класса

$$\omega(0) = u_1'(b) - \beta u_1(b) - 2\alpha + \\ + \gamma u_2'(b) - (\alpha^2 + \beta\gamma) u_2(b) \neq 0, \tag{34}$$

а для условий второго класса

$$\omega(0) = 2 - \frac{1}{\rho} u_1(b) - \rho u_2'(b) + \tau u_2(b) \neq 0, \tag{34_1}$$

так и те же рассуждения, примененные к уравнению (27), *будут справедливы* *в предположении, что соответствующие выражения, составленные из функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$, в том и другом случае будут отличны от нуля, т.е. когда для предельных условий первого класса*

$$U'_1(b) - \beta U_1(b) - 2\alpha + \gamma U'_2(b) - (\alpha^2 + \beta\gamma) U_2(b) \neq 0, \tag{35}$$

а для предельных условий второго класса

$$2 - \frac{1}{\rho} U_1(b) - \rho U'_2(b) + \tau U_2(b) \neq 0. \tag{35_1}$$

Но в данном случае левые части этих неравенств зависят от произвольного параметра c. Следовательно, если и в тех случаях, когда $\omega(0)$, т.е. выражения (34) и (34_1) обращаются в нуль, окажется возможным подобрать c так, что выражения (35) и (35_1) выйдут не равными нулю, то метод Шварца – Пуанкаре, если принять за исходный пункт уравнение (27), установит и для всех случаев, когда $\omega(0) = 0$, существование бесчисленного множества вещественных характеристических чисел

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots \tag{36}$$

и им соответствующих, не равных нулю, фундаментальных функций

$$V_1(x), \quad V_2(x), \quad \ldots, \quad V_k(x), \quad \ldots, \tag{36_1}$$

а также и все те их свойства и особенности, какие были доказаны в гл. V. Числа ряда (36) будут отличаться от характеристических чисел λ_k гл. V лишь одной и той же постоянной c, ибо в силу (27_1) при всяком k

$$\mu_k = \lambda_k + c, \tag{37}$$

т.е. вся шкала характеристических чисел λ_k гл. V будет сдвинута вправо ($c > 0$) на один и тот же отрезок c.

11. Покажем, что таким сдвигом шкалы характеристических чисел действительно можно достигнуть только что указанного результата.

Обозначим через $W_1(x, \mu)$ и $W_2(x, \mu)$ два независимых частных решения уравнения

$$V''(x) + [\mu p(x) - q_1(x)] V(x) = 0, \tag{38}$$

подчиненные условию

$$\begin{aligned} &W_1(a, \mu) = 1, \qquad && W'_1(a, \mu) = 0, \\ &W_2(a, \mu) = 0, && W'_2(a, \mu) = 1. \end{aligned} \tag{39}$$

Уравнение (38) представляет лишь другое изображение уравнения

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)] V(x) = 0,$$

а символы $W_1(x, \mu)$ и $W_2(x, \mu)$ – другое формальное изображение функций, обозначенных раньше через $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$.

Если к уравнению (27) применим рассуждения п. 19 предыдущей главы, то получим

$$V(x, \mu) = \Theta(x, \mu) \ / \ \Omega(\mu),$$

причем, очевидно,

$$\Theta(x, \mu) = W(x, \lambda), \quad \Omega(\mu) = \omega(\lambda). \tag{40}$$

Что касается выражений левых частей неравенств (35) и (35_1), то они равны соответственно значениям функции $\Omega(\mu)$ при $\mu = 0$ для предельных условий первого и второго классов, т.е. в силу второго из тождеств (40) равны

$$\Omega(0) = \omega(-c), \quad \text{ибо} \quad \mu = \lambda + c. \tag{41}$$

12. Рассмотрим теперь уравнение (32):

$$V''(x) - q_1(x)V(x) = 0, \tag{32}$$

написав его в виде

$$V''(x) - q(x)V(x) = cp(x)V(x). \tag{41_1}$$

Будем искать интеграл этого уравнения в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра c, полагая

$$V(x) = v_0(x) + cv_1(x) + c^2v_2(x) + \ldots + c^kv_k(x) + \ldots \tag{42}$$

Подставляя это выражение $V(x)$ (41_1) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях c, получим ряд уравнений для последовательного определения коэффициентов $v_k(x)$ вида

$$v_0''(x) - q(x)\,v_0(x) = 0, \tag{43}$$

$$v_k''(x) - q(x)\,v_k(x) = p(x)\,v_{k-1}(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{44}$$

Будем искать решения этих уравнений при предельных условиях двух следующих типов:

$$\begin{aligned} &v_0(a) = 1, \qquad v_0'(a) = 0,\\ &v_k(a) = 0, \qquad v_k'(a) = 0, \end{aligned} \tag{a}$$

или

$$\begin{aligned} &v_0(a) = 0, \qquad v_0'(a) = 1,\\ &v_k(a) = 0, \qquad v_k'(a) = 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Рассмотрим оба случая отдельно.

В первом случае (a) получаем, очевидно,

$$v_0(x) = u_1(x). \tag{45}$$

Положим теперь в (44) $k = 1$. Получим

$$v_1''(x) - q(x)\,v_1(x) = p(x)\,v_0(x), \tag{46}$$

$$v_1(a) = 0, \quad v_1'(a) = 0. \tag{46_1}$$

Общий интеграл неоднородного линейного уравнения (46) представляется в виде

$$v_1(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + r_1(x), \tag{47}$$

где

$$r_1(x) = u_2(x)\int_a^x p(x)\,u_1(x)\,v_0(x)\,dx - u_1(x)\int_a^x p(x)\,u_2(x)\,v_0(x)\,dx, \tag{47_1}$$

а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ представляют, напомним, частные решения уравнения (32_1), удовлетворяющие условиям (32_2) (п. 10).

Положив в (47)

$$C_1 = C_2 = 0,$$

получим решение уравнения (46):

$$v_1(x) = u_2(x) \int_a^x p(x) u_1(x) v_0(x)\, dx - u_1(x) \int_a^x p(x) u_2(x) v_0(x)\, dx, \qquad (48)$$

удовлетворяющее условиям (46_1).

Точно так же будем иметь при всяком k:

$$v_k(x) = u_2(x) \int_a^x p(x) u_1(x) v_{k-1}(x)\, dx -$$

$$- u_1(x) \int_a^x p(x) u_2(x) v_{k-1}(x)\, dx. \qquad (48_1)$$

Таким образом, при помощи (45) и (48_1) последовательно определятся простыми квадратурами все коэффициенты ряда (24), причем на основании (45), (47_1) и (48) будем иметь

$$r_1(x) = v_1(x) = u_2(x) \int_a^x p(x) u_1^2(x)\, dx - u_1(x) \int_a^x p(x) u_1(x) u_2(x)\, dx.$$

Ряд (42) будет, как известно, равномерно сходящимся при всяком x промежутка $[a, b]$ во всей плоскости переменной c и представит функцию, удовлетворяющую уравнению (32) и предельным условиям

$$V(a) = 1, \quad V'(a) = 0,$$

т.е. функцию, обозначенную нами в п. 10 через $U_1(x)$.

Итак, можем писать

$$U_1(x) = u_1(x) + c(u_2(x) \int_a^x p(x) u_1^2(x)\, dx -$$

$$- u_1(x) \int_a^x p(x) u_1(x) u_2(x)\, dx\,) + \ldots \qquad (49)$$

Применив те же соображения ко второму случаю (b), которые повторять нет надобности, получим таким же путем

$$U_2(x) = u_2(x) + c\,(\,u_2(x) \int_a^x p(x) u_1(x) u_2(x)\, dx$$

$$- u_1(x) \int_a^x p(x) u_2^2(x)\, dx\,) + \ldots \qquad (49_1)$$

13. Положим

$$r_2(x) = u_2(x) \int_a^x p(x) u_1(x) u_2(x)\, dx - u_1(x) \int_a^x p(x) u_2^2(x)\, dx \qquad (50)$$

и составим при помощи найденных выражений $U_1(x)$ и $U_2(x)$ выражения $\Omega(0)$ (35) и (35_1) для предельных условий первого и второго классов.

Рассмотрим сначала первый случай. Получаем

$$\Omega(0) = U_1'(b) - \beta U_1(b) - 2\alpha + \gamma U_2'(b) - (a^2 + \beta\gamma) U_2(b) =$$

$$= \omega(0) + c\,[r_1'(b) - \beta r_1(b) + \gamma r_2'(b) - (a^2 + \beta\gamma)\, r_2(b)] + \ldots =$$

$$= \omega(0) + c\Omega_1 + c^2\Omega_2 + \ldots \tag{51}$$

При помощи (47_1) и (50) находим

$$\Omega_1 = [u_2'(b) - \beta u_2(b)] \int_a^b p(x)\, u_1^2(x)\, dx +$$

$$+ (\alpha^2 u_1(b) - \gamma[u_1'(b) - \beta u_1(b)]) \int_a^b p(x)\, u_2^2(x)\, dx +$$

$$+ (\beta u_1(b) - u_1'(b) + \gamma\,[u_2'(b) - \beta u_2(b)] -$$

$$- \alpha^2 u_2(b)) \int_a^b p(x)\, u_1(x)\, u_2(x)\, dx. \tag{52}$$

Допустим теперь, что $\omega(0)$ равно нулю, т.е. (см. формулу (34) п. 19)

$$\gamma\,[u_2'(b) - \beta u_2(b)] - \alpha^2 u_2(b) = \beta u_1(b) - u_1'(b) + 2\alpha. \tag{53}$$

При этом равенство (52) принимает вид

$$\Omega_1 = [u_2'(b) - \beta u_2(b)] \int_a^b p(x)\, u_1^2(x)\, dx +$$

$$+ \left\{\alpha\,[\alpha u_1(b) - \gamma] - \gamma\,[u_1'(b) - \beta u_1(b) - \alpha]\right\} \int_a^b p(x)\, u_2^2(x)\, dx +$$

$$+ 2\,[\alpha + \beta u_1(b) - u_1'(b)] \int_a^b p(x)\, u_1(x)\, u_2(x)\, dx. \tag{52_1}$$

14. Преобразуем теперь коэффициент при

$$\int_a^b p(x)\, u_2^2(x)\, dx$$

в формуле (52_1) следующим образом. Уравнение (12) п. 4 гл. V в силу (14_1) п. 5 той же главы дает

$$\omega(0) = (1 + \alpha u_2(b))\,(u_1'(b) - \beta u_1(b) - \alpha) -$$

$$- (u_2'(b) - \beta u_2(b))\,(\alpha u_1(b) - \gamma) = 0,$$

откуда при помощи (53) выводим

$$(u_2'(b) - \beta u_2(b))\,(\alpha u_1(b) - \gamma) =$$

$$= (1 + \alpha u_2(b))\,(\alpha\,[1 + \alpha u_2(b)] - \gamma\,[u_2'(b) - \beta u_2(b)]).$$

Предположим сначала, что

$$u_2'(b) - \beta u_2(b) \neq 0. \tag{54}$$

В этом случае можем писать

$$\alpha(\alpha u_1(b)-\gamma)=\frac{\alpha^2[1+\alpha u_2(b)]^2}{u_2'(b)-\beta u_2(b)}-$$

$$-\frac{\alpha\gamma[1+\alpha u_2(b)]\,[u_2'(b)-\beta u_2(b)]}{u_2'(b)-\beta u_2(b)}.$$

При помощи этого соотношения и следующего (см. (53)):

$$\beta u_1(b)-u_1'(b)+\alpha=\gamma(u_2'(b)-\beta u_2(b))-\alpha(1+\alpha u_2(b)) \tag{55}$$

получаем

$$\alpha(\alpha u_1(b)-\gamma)+\gamma[\beta u_1(b)-u_1'(b)+\alpha]=$$

$$=\frac{\alpha^2[1+\alpha u_2(b)]^2-2\alpha\gamma[1+\alpha u_2(b)]\;[u_2'(b)-\beta u_2(b)]}{u_2'(b)-\beta u_2(b)}+$$

$$+\frac{\gamma^2[u_2'(b)-\beta u_2(b)]^2}{u_2'(b)-\beta u_2(b)}=\frac{(\alpha[1+\alpha u_2(b)]-\gamma[u_2'(b)-\beta u_2(b)])^2}{u_2'(b)-\beta u_2(b)},$$

или, в силу (55)

$$\alpha(\alpha u_1(b)-\gamma)+\gamma[\beta u_1(b)-u_1'(b)+\alpha]=\frac{(\beta u_1(b)-u_1'(b)+\alpha)^2}{u_2'(b)-\beta u_2(b)}.$$

При помощи этого соотношения равенство (52_1) приводится к следующему виду:

$$\Omega_1=\frac{1}{u_2'(b)-\beta u_2(b)}\int_a^b p(x)\,(u_1(x)\,[u_2'(b)-\beta u_2(b)]+$$

$$+u_2(x)[\beta u_1(b)-u_1'(b)+\alpha])^2\,dx. \tag{56}$$

Так как $u_1(x)$ и $u_2(x)$ суть два линейно независимых частных решения одного и того же линейного однородного уравнения, то подынтегральная функция равенства (56) не может равняться нулю, коль скоро соблюдается условие (54). Следовательно, $\Omega_1\neq 0$.

15. Из уравнения (51) следует, что $\Omega_1=\left.\dfrac{\partial\Omega(0)}{\partial c}\right|_{c=0}$. Поэтому, хотя при допущении, что

$$\omega(0)=0, \tag{57}$$

функция Ω (0) обращается в нуль при $c=0$, но ее первая производная по c при этом значении c не равна нулю. Отсюда заключаем, что Ω (0) не может равняться тождественно нулю при всяком c, а из тождества (41) вытекает, что и при условии (57) $\omega(\lambda)$ не может равняться тождественно нулю при всяком λ, по крайней мере при соблюдении условия (54). Кроме того, то же тождество (41) показывает, что при всяком положительном c, не равном модулю какого-либо отрицательного корня уравнения $\omega(\lambda)=0$, если таковые существуют, то $\Omega(0)\neq 0$.

Из сказанного выводим следующее заключение:

Все теоремы, установленные при помощи метода Шварца – Пуанкаре для фундаментальных функций первого класса и их характеристических чисел в предположении, что $\omega(0)\neq 0$, *справедливы и для исключительного случая, когда* $\omega(0)=0$, *коль скоро*

$$u_2'(b)-\beta u_2(b)\neq 0. \tag{58}$$

16. Покажем, наконец, что и ограничение, налагаемое на постоянную β неравенством (58), несущественно, т.е. что $\Omega(0)$ не равняется нулю при указанном выше выборе постоянной c и в том случае, когда

$$u_2'(b)-\beta u_2(b)=0. \tag{59}$$

Предположим, что постоянная β удовлетворяет условию (59). Произведем в уравнении (27) ту же операцию сдвига шкалы характеристических чисел μ_k на некоторый отрезок c', какую произвели над шкалой характеристических чисел λ_k, соответствовавших уравнению (26) (п. 10), т.е. представим уравнение (27) в виде

$$V''(x)+[\nu p(x)-q_2(x)]\,V(x)+f(x)=0, \tag{60}$$

полагая

$$\nu=\mu+c',\quad q_2(x)=q_1(x)+c'p(x), \tag{61}$$

и будем рассматривать $V(x)$ как функцию параметра ν при тех же самых предельных условиях (29) (п. 10).

Обозначим через

$$\mathbf{U}_1(x)\quad \text{и}\quad \mathbf{U}_2(x) \tag{62}$$

два независимых частных решения уравнения

$$V''(x)-q_2(x)\,V(x)=0, \tag{63}$$

подчиненные условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}_1(a)=1, && \mathbf{U}_1'(a)=0,\\ &\mathbf{U}_2(a)=0, && \mathbf{U}_2'(a)=1. \end{aligned} \tag{63_1}$$

Если положим $c'=0$, то уравнение (63) обратится в уравнение (32), а $\mathbf{U}_1(x)$ и $\mathbf{U}_2(x)$ – соответственно в функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$, удовлетворяющие условиям (33). Очевидно, что последние функции будут играть по отношению к (62) ту же самую роль, какую в рассуждениях предыдущих пунктов $u_1(x)$ и $u_2(x)$ играли по отношению к функциям $U_1(x)$ и $U_2(x)$.

17. Обозначим через $\Omega(\nu)$ целую трансцендентную функцию от ν, вещественные корни которой служат полюсами мероморфной функции $V(x,\nu)$, удовлетворяющей уравнению (60) и предельным условиям (29). Очевидно,

$$\Omega(\nu)=\Omega(\mu)=\omega(\lambda) \tag{64}$$

и, в силу (27_1) и (61),

$$\Omega(0)=\omega(-(c+c'))=\Omega(-c'). \tag{64_1}$$

Применяя к рассматриваемому случаю выводы предыдущего пункта, приходим к следующему заключению:

Если можно найти такое положительное число c, при котором

$$U_2'(b) - \beta U_2(b) \neq 0, \tag{65}$$

то $\Omega(0)$ будет, наверное, отлично от нуля, т.е. метод Шварца – Пуанкаре применим к уравнению (60) и устанавливает существование бесчисленного множества характеристических вещественных чисел

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_k,\ \ldots$$

и им соответствующих фундаментальных функций

$$V_1(x),\ V_2(x),\ \ldots,\ V_k(x),\ \ldots,$$

обладающих всеми теми свойствами, какие доказаны в V главе.

При этом из тождества (64) будет следовать, что *и в исключительном случае, когда $\omega(0)$ обращается в нуль одновременно с разностью*

$$u_2'(b) - \beta u_2(b),$$

функция $\omega(\lambda)$ не может равняться тождественно нулю при всяком λ, и поэтому, в силу того же тождества (64), *$\Omega(0)$, равное $\omega(-c)$, не будет равно нулю при всяком c и в том случае, когда*

$$u_2'(b) - \beta u_2(b) = 0. \tag{66}$$

18. Остается только показать, что существует такое положительное число c, при котором неравенство (65) наверное выполняется при условии (66). Приняв в расчет выражения (49) и (49_1) для $U_1(x)$ и $U_2(x)$, получаем

$$U_2'(b) - \beta U_2(b) = u_2'(b) - \beta u_2(b) +$$

$$+ c\,([u_2'(b) - \beta u_2(b)] \int_a^b p(x)\,u_1(x)\,u_2(x)\,dx -$$

$$- [u_1'(b) - \beta u_1(b)] \int_a^b p(x)\,u_2^2(x)\,dx) + \ldots$$

Если $u_2(x)$ удовлетворяет условию (66), то

$$A = U_2'(b) - \beta U_2(b) = -c\,[u_1'(b) - \beta u_1(b)] \int_a^b p(x)\,u_2^2(x)\,dx + \ldots, \tag{67}$$

причем выражение $u_1'(b) - \beta u_1(b)$ не может равняться нулю. Допустив противное. т.е. что $u_1'(b) - \beta u_1(b) = 0$, выводим отсюда, при помощи (66),

$$u_1(b)\,u_2'(b) - u_2(b)\,u_1'(b) = 0,$$

что невозможно, ибо $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют при всяком x условию

$$u_1(x)\,u_2'(x) - u_2(x)\,u_1'(x) = 1.$$

Из равенства (67) заключаем поэтому, что $\left.\dfrac{\partial A}{\partial c}\right|_{c=0} \neq 0$. Отсюда следует, что хотя $A\,\big|_{c=0} = 0$, но для ряда значений c, достаточно близких к нулю, A сохраняет значения, отличные от нуля.

Существование числа c, при котором

$$A = U_2'(b) - \beta U_2(b)$$

не равно нулю, доказано, а вместе с тем *доказано и утверждение* п. 17.

Итак, *метод Шварца – Пуанкаре применим во всех, без исключения, случаях, каковы бы ни были конечные постоянные α, β и γ в предельных условиях первого класса, и доказывает существование полной системы вещественных характеристических чисел λ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, среди которых может заключаться и число, равное нулю, и соответствующей этим числам полной системы фундаментальных функций $V_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ со всеми их свойствами, указанными в V главе.*

19. Переходим к случаю предельных условий второго класса. Предположим, что соответствующее этому случаю неравенство (34_1) не соблюдается (п. 10), т.е. что

$$\omega(0) = 2 - \frac{1}{\rho} u_1(b) - \rho u_2'(b) + \tau u_2(b) = 0. \tag{68}$$

При этом предположении непосредственное применение метода Шварца – Пуанкаре, развитое в предыдущей главе, также становится сомнительным. Но, так же как и в предыдущем случае, законность его применения восстанавливается, как сейчас увидим, указанным выше сдвигом шкалы характеристических чисел.

Заменяя, как и в предыдущем случае, уравнение (26) уравнением (27) и удерживая прежние обозначения, пояснять которые вновь нет надобности, составим выражение $\Omega(0)$, соответствующее предельным условиям вида

$$V(b) = \rho V(a), \quad V'(b) = \frac{1}{\rho} V'(a) + \tau V(a).$$

Получим $\rho\Omega(0) = 2\rho - U_1(b) - \rho^2 U_2'(b) + \rho\tau U_2(b)$, откуда при помощи (49) и (49_1) (п. 12) выводим

$$\rho\Omega(0) = \omega(0) + c\Big(- u_2(b) \int_a^b p(x)\, u_1^2(x)\, dx +$$

$$+ (u_1(b) - \rho^2 u_2'(b) + \rho\tau u_2(b)) \int_a^b p(x)\, u_1(x)\, u_2(x)\, dx -$$

$$- \rho(\tau u_1(b) - \rho u_1'(b)) \int_a^b p(x)\, u_2^2(x)\, dx\Big) + \ldots$$

Из равенства (68) следует, во-первых,

$$u_1(b) - \rho^2 u_2'(b) + \rho\tau u_2(b) = -2(\rho - u_1(b))$$

и, во-вторых, если предположим, что $u_2(b) \neq 0$,

$$\rho(\tau u_1(b) - \rho u_1'(b)) = \frac{(\rho - u_1(b))^2}{u_2(b)} \text{ *)}.$$

*) Из равенства $\rho^2 u_2'(b) = 2\rho - u_1(b) + \rho\tau u_2(b)$, учитывая, что $u_1(b) u_2'(b) = 1 + u_2(b) u_1'(b)$, выводим $\rho u_2(b)\, [\rho u_1'(b) - \tau u_1(b)] = 2\rho u_1(b) - u_1^2(b) - \rho^2 = -(\rho - u_1(b))^2$, откуда и следует равенство, указанное в тексте.

Следовательно,

$$\rho\Omega(0)=\omega(0)-\frac{c}{u_2(b)}\Big(u_2^2(b)\int_a^b p(x)u_1^2(x)\,dx+$$

$$+2u_2(b)(\rho-u_1(b))\int_a^b p(x)u_1(x)u_2(x)\,dx+$$

$$+(\rho-u_1(b))^2\int_a^b p(x)u_2^2(x)\,dx\Big)+\ldots$$

или, при условии (68),

$$\rho\Omega(0)=-\frac{c}{u_2(b)}\int_a^b p(x)\left(u_2(b)u_1(x)+[\rho-u_1(b)]\,u_2(x)\right)^2dx+\ldots$$

Отсюда, повторяя дословно рассуждения пп. 14 и 15, заключаем, что $\Omega(0)$ *не может равняться тождественно нулю при всяком* c, *т.е.* $\omega(\lambda)$ *не может равняться тождественно нулю при всяком* λ *и в том случае, когда* $\omega(0)$ *равно нулю, по крайней мере при условии, что*

$$u_2(b)\neq 0. \tag{69}$$

Отсюда вытекает, что, *по крайней мере при соблюдении условия* (69), *метод Шварца – Пуанкаре применим к уравнению* (29) *и в том случае, когда для условий второго класса* $\omega(0)$ *равно нулю, если подразумевать под* c *в этом уравнении любое положительное число, не равное модулю отрицательных корней функции* $\omega(\lambda)$, *если таковые существуют (или какое угодно положительное число, если* $\omega(\lambda)$ *не допускает отрицательных корней).*

20. Остается показать, что и условие (69) несущественно. Это достигается совершенно таким же приемом, как и в предыдущем случае предельных условий первого класса.

Заменяем уравнение (27) уравнением (60) (п. 16). Для этого уравнения в силу (49_1), если допустить, что

$$u_2(b)=0, \tag{70}$$

получаем

$$U_2(b)=-cu_1(b)\int_a^b p(x)u_2^2(x)\,dx+\ldots$$

Но при условии (70) непременно $u_1(b)\neq 0$, ибо $u_1(b)u_2'(b)-u_1'(b)u_2(b)=$ $=1$. Следовательно, $\left.\dfrac{\partial U_2(b)}{\partial c}\right|_{c=0}\neq 0$, т.е. $U_2(b)$ заведомо не нуль для ряда значений c, достаточно близких к нулю.

Отсюда заключаем, что и в том случае, когда для уравнения (26)

$$\omega(0)=0,\quad u_2(b)=0,$$

соответствующее выражение $\Omega(0)$ для уравнения (27) не равно нулю при всяком c.

Следовательно, *метод Шварца – Пуанкаре всегда применим к уравнению* (27) *в случае предельных условий второго класса и доказывает существование полной системы вещественных характеристических чисел, среди которых может быть и число, равное нулю, и соответствующей этим числам пол-*

ной системы фундаментальных функций второго класса, каковы бы ни были конечные числа (из которых первое не равно нулю) ρ и τ в только что упомянутых условиях.

21. В предыдущих рассуждениях мы предполагали числа α, β, γ, и ρ, τ конечными и ρ не равным нулю. Чтобы исчерпать вопрос, необходимо исследовать особо и все возможные предельные случаи, указанные в пп. 1 – 10 этой главы.

Мы уже видели, что все эти случаи сводятся к трем различным типам предельных условий вида (14), (15) и (16) (п. 7) и что в первом случае (равенство (14)) метод Шварца – Пуанкаре несомненно применим, если (см. п. 8)

$$u_2(b) \neq 0; \tag{23}$$

во втором (равенство (15)) – если

$$u_1(b) + \gamma u_2(b) \neq 0; \tag{23_1}$$

в третьем (равенство (16)) – если

$$u_2'(b) - \beta u_2(b) \neq 0. \tag{23_2}$$

Покажем теперь, что *изложенный выше прием сдвига шкалы характеристических чисел применим с некоторыми изменениями и упрощениями и к рассматриваемым предельным случаям, когда неравенства* (23), (23_1) *и* (23_2) *не имеют места.*

22. Допустим, что для предельных условий первого класса

$$u_2(b) = 0. \tag{71}$$

Заменим уравнение (26) уравнением (27). Метод Шварца – Пуанкаре будет применим к этому последнему уравнению при условиях (14), если возьмем для c какое-либо такое значение, при котором

$$U_2(b) \neq 0. \tag{72}$$

Но если имеет место равенство (71), то, на основании (49_1) (п. 12),

$$U_2(b) = -cu_1(b) \int_a^b p(x)\, u_2^2(x)\, dx + \ldots \tag{73}$$

Так как $u_2(b)$ и $u_1(b)$ одновременно не могут равняться нулю, то из (73) заключаем, что $\left.\dfrac{\partial U_2(b)}{\partial c}\right|_{c=0} \neq 0$, т.е. что $U_2(b)$ не может равняться нулю тождественно при всяком c хотя и обращается в нуль при $c = 0$.

Придерживаясь обозначений п. 11, можем написать следующее тождество: $W_2(x, 0) = U_2(x)$, откуда $W_2(b, 0) = U_2(b)$. Но $W_2(x, \mu) = w_2(x, \lambda)$. Следовательно (см. второе из равенств (40) п. 11), $U_2(b) = W_2(b, 0) = w_2(b, -c)$.

Отсюда следует, что $U_2(b)$ *остается не равным нулю при всяком положительном* c, *не равном модулю какого-либо отрицательного корня уравнения*

$$w_2(b, \lambda) = 0,$$

если таковые существуют (или при всяком положительном c, *если функция* $w_2(b, \lambda)$ *не имеет отрицательных корней).*

Выбрав в уравнении (27) c указанным способом и применив к этому уравнению метод Шварца–Пуанкаре, что возможно в силу (72), *докажем* *существование полной системы вещественных характеристических чисел* μ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *и им соответствующих фундаментальных функций* $V_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *первого предельного класса, независимо от ограничения* (69), *поставленного в п. 19.*

23. Предположим теперь, что для условий второго предельного класса (равенство (15) п. 6)

$$u_1(b) + \gamma u_2(b) = 0. \tag{74}$$

Из равенств (49) и (49_1) (п. 12) при помощи (74) выводим

$$B = U_1(b) + \gamma U_2(b) = c\,(u_2(b) \int_a^b p(x) u_1^2(x)\,dx -$$

$$-[u_1(b) - \gamma u_2(b)] \int_a^b p(x) u_1(x) u_2(x)\,dx - \gamma u_1(b) \int_a^b p(x) u_2^2(x)\,dx\,) + \ldots$$

$$\ldots = c u_2(b) \int_a^b p(x)\,[u_1(x) + \gamma u_2(x)]^2\,dx + \ldots,$$

т.е.

$$\left.\frac{\partial B}{\partial c}\right|_{c=0} \neq 0.$$

Кроме того, на основании тех же самых соображений, что и в предыдущем пункте, можем писать

$$B = U_1(b) + \gamma U_2(b) = W_1(b, 0) + \gamma W_2(b, 0) =$$
$$= w_1(b, -c) + \gamma w_2(b, -c).$$

Отсюда следует, что *B остается не равным нулю при всяком положительном c, не равном модулю какого-либо отрицательного корня уравнения*

$$w_1(b, \lambda) + \gamma w_2(b, \lambda) = 0,$$

если таковые существуют (или при всяком положительном c, если таких корней нет).

Выбрав в уравнении (27) c указанным образом и применив к этому уравнению метод Шварца – Пуанкаре, что возможно, ибо при этом будет соблюдено неравенство

$$U_1(b) + \gamma U_2(b) \neq 0,$$

докажем существование полной системы вещественных характеристических чисел μ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *и им соответствующих фундаментальных функций второго предельного класса, какова бы ни была постоянная γ в равенстве* (15).

24. Что касается фундаментальных функций третьего предельного класса (равенство (16) п. 6), то все данные для распространения метода Шварца – Пуанкаре на тот исключительный случай, когда $u_2'(b) - \beta u_2(b) = 0$, уже имеются в предыдущих исследованиях. В п. 18 уже доказано существование положительных значений c, при которых $A = U_2'(b) - \beta U_2(b)$ остается не равным нулю. Заметив теперь, подобно тому, как и в предыдущем пункте, что

$$A = U_2'(b) - \beta U_2(b) = W_2'(b, 0) - \beta W_2(b, 0) = w_2'(b, -c) - \beta w_2(b, -c),$$

заключаем, что A отлично от нуля при всяком положительном c, не равном модулю какого-либо из отрицательных корней уравнения

$$w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda) = 0,$$

если таковые существуют (или при всяком $c > 0$, если таких корней нет).

Выбрав c указанным образом и применив к уравнению (27) метод Шварца – Пуанкаре, что возможно, ибо при этом соблюдается неравенство

$$U_2'(b) - \beta U_2(b) \neq 0,$$

докажем существование полной системы характеристических чисел μ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *и им соответствующих фундаментальных функций* $V_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *третьего предельного класса, какова бы ни была постоянная* β *в условиях* (16) (п. 6).

25. Заканчивая эту главу, отметим, пользуясь случаем, замечательное свойство частных решений $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$ дифференциального линейного уравнения вида

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{75}$$

подчиненных условиям

$$w_1(a, \lambda) = 1, \quad w_2(a, \lambda) = 0, \quad w_1'(a, \lambda) = 0, \quad w_2'(a, \lambda) = 1$$

(см. п. 3 гл. V). Исследования предыдущих глав сейчас же приводят к следующим заключениям:

Целые трансцендентные функции, составленные из функций $w_1(x, \lambda)$, $w_2(x, \lambda)$ и их первых производных при $x = b$, вида

$$w_1'(b, \lambda) - \beta w_1(b, \lambda) - 2\alpha + \gamma w_2'(b, \lambda) - (\alpha^2 + \beta\gamma)\, w_2(b, \lambda), \tag{76}$$

$$2\rho - w_1(b, \lambda) - \rho^2 w_2'(b, \lambda) + \tau\rho w_2(b, \lambda), \tag{77}$$

$$w_1(b, \lambda) + \gamma w_2(b, \lambda), \tag{78}$$

$$w_2'(b, \lambda) - \beta w_2(b, \lambda), \tag{79}$$

$$w_2(b, \lambda) \tag{80}$$

все имеет бесчисленное множество вещественных корней λ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), модули которых l_k удовлетворяют условию

$$l_k > \tau^2 k^2, \tag{81}$$

где τ^2 есть конечное число, не зависящее от k. Это справедливо при всяких конечных значениях постоянных α, β, τ и при ρ не равном нулю, каковы бы ни были функции $p(x)$ и $q(x)$, непрерывные в промежутке $[a, b]$, из которых первая $p(x)$ остается неотрицательной в этом промежутке*).

Если же функция $q(x)$ сохраняет в промежутке $[a, b]$ лишь неотрицательные значения, то все вещественные корни функции (80) неотрицательны.

Если $p(x)$ и $q(x)$ обе неотрицательны в промежутке $[a, b]$ *), а постоянная $\beta < 0$, то все вещественные корни функции (80) положительны; если $\gamma > 0$, то тем же свойством обладают и вещественные корни функции (78).

Если при только что указанном свойстве функций $p(x)$ и $q(x)$ постоянные α, β и γ подчинены условиям $\beta < 0$, $\gamma > 0$, $\alpha^2 + \beta\gamma \leqslant 0$, то все вещественные корни функции (76) положительны.

---

*) $p(x) > 0$ для $x \in (a, b)$. (*Прим. ред.*)

Наконец, если при этом $\tau\rho \leqslant 0$, $\rho \neq 0$, то положительны и все вещественные корни функции (77).

В формулах (76), (78) и (79) постоянные α, β и γ могут равняться нулю.

Как следствие сказанного, получается следующее предложение:

Функции

$$w_1(b, \lambda), \quad w_1'(b, \lambda), \quad w_2(b, \lambda) \text{ и } w_2'(b, \lambda) \tag{82}$$

имеют бесчисленное множество вещественных корней, модули которых удовлетворяют условию (81), если функция $p(x)$ не отрицательна в промежутке $[a, b]$, а $q(x)$ только непрерывна.

Нетрудно убедиться, наконец, что в случае, когда и $q(x)$ не отрицательна, вещественные корни функций (82) положительны.

ГЛАВА VII

Определение характеристических чисел, каждому из которых может соответствовать фундаментальная функция, обращающаяся в нуль на одном из концов данного промежутка $[a, b]$, когда эти функции не принадлежат к функциям трех предельных классов. Необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять те характеристические числа, каждому из которых могут соответствовать две различные фундаментальные функции. Алгоритм для последовательного вычисления всех характеристических чисел и полной системы фундаментальных функций первого и второго классов. Выделение из полной системы тех характеристических чисел, каждому из которых отвечают две различные фундаментальные функции. Фундаментальные функции трех предельных классов и их характеристические числа

1. Для дальнейших исследований необходимо решить следующий вопрос: могут ли фундаментальные функции, не принадлежащие к одному из трех предельных классов (см. п. 6 предыдущей главы), обращаться в нуль на одном из концов данного промежутка $[a, b]$, и если могут, то при каких условиях? Подобно предыдущему, рассмотрим отдельно случаи функций первого и второго классов.

Начнем с функций первого класса, определяемых уравнениями

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\, V_k(x) = 0 \tag{1}$$

и предельными условиями

$$V_k'(b) - \alpha V_k(a) - \beta V_k(b) = 0, \quad V_k'(a) - \gamma V_k(a) + \alpha V_k(b) = 0. \tag{2}$$

Каждая фундаментальная функция $V_k(x)$ представляется при помощи частных решений $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$ (см. п. 3 гл. V) в виде

$$V_k(x) = C_1^{(k)} w_1(x, \lambda_k) + C_2^{(k)} w_2(x, \lambda_k), \tag{3}$$

где $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$ – определенные постоянные.

Допустим, что при некоторых значениях характеристических чисел λ_k функция $V_k(x)$ при соблюдении условий (2) обращается в нуль при $x = a$. Приняв в расчет условия (8) п. 3 гл. V, которым подчинены функции $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$, заключаем из (3), что для рассматриваемых значений λ_k $C_1^{(k)} = 0$ и функция $V_k(x)$ имеет вид

$$V_k(x) = C_2^{(k)} w_2(x, \lambda_k). \tag{4}$$

Так как $V_k(x)$ должна удовлетворять условиям (2), а $C_2^{(k)}$ не нуль, то, подставив выражение (3) в уравнения (2), заключаем, что *сделанное допущение возможно лишь для тех значений λ_k, которые одновременно удовлетворяют двум следующим уравнениям*:

$$w_2'(b, \lambda_k) - \beta w_2(b, \lambda_k) = 0, \quad 1 + \alpha w_2(b, \lambda_k) = 0. \tag{5}$$

При этом уравнение характеристических чисел $\omega(\lambda_k) = 0$ удовлетворяется само собой.

Итак, *только такие фундаментальные функции первого класса могут удовлетворять одновременно условию*

$$V_k(a) = 0 \tag{6}$$

и условиям (2), *характеристические числа которых служат вещественными корнями, общими для двух уравнений* (5).

2. Условие (6), очевидно, не всегда совместимо с основными условиями (2). Второе из уравнений (5) показывает, например, что *равенство* (6) *невозможно при* $\alpha = 0$.

Для тех значений λ_k, при которых (когда это возможно) $V_k(a)$ *обращается в нуль,* $V_k(b)$ *наверное не равно нулю.*

В противном случае мы имели бы, как следует из условий (2),

$$V_k'(b) = V_k'(a) = 0,$$

что невозможно, если $V_k(x)$ – не тождественный нуль, ибо линейное однородное уравнение второго порядка (1) не может иметь интеграла, отличного от нуля и обращающегося при начальном значении $x = a$ в нуль одновременно со своей производной.

3. Рассмотрим теперь случай фундаментальных функций второго класса, определяемых тем же уравнением (1) и следующими предельными условиями:

$$V_k(b) = \rho V_k(a), \quad V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a) + \tau V_k(a). \tag{7}$$

Если $V_k(a) = 0$, то в силу первого из (7) необходимо и $V_k(b) = 0$. При этом второе из (7) принимает вид

$$V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a), \tag{8}$$

причем

$$V_k'(a) \neq 0. \tag{8_1}$$

Подобно тому, как в предыдущем случае, из (3) заключаем, что при сделанном предположении

$$V_k(x) = C_2^{(k)} w_2(x, \lambda_k). \tag{9}$$

Отсюда следует, что $V_k(x)$ может обращаться в нуль при $x = a$ лишь для тех значений λ_k, которые служат в то же время корнями уравнения $w_2(b, \lambda_k) = 0$. Подставив затем выражение (9) для $V_k(x)$ в (8), получаем $\rho w_2'(b, \lambda_k) - 1 = 0$.

Итак, *фундаментальные функции второго класса могут обращаться в нуль при $x = a$ только для тех вещественных корней функции $\omega(\lambda)$, которые служат в то же время вещественными корнями, общими для двух уравнений вида*

$$w_2(b, \lambda) = 0, \quad \rho w_2'(b, \lambda) - 1 = 0. \tag{10}$$

4. Как мы уже знаем, каждому характеристическому числу λ_k может, вообще говоря, соответствовать либо одна, либо две различные фундаментальные функции (пп. 24 и 28 гл. V). Найдем необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять те из характеристических чисел их полной системы, каждому из которых могут отвечать по две линейно независимые фундаментальные функции.

В п. 3 гл. V было указано, что всякая фундаментальная функция определяется равенством (10), где постоянные C_1 и C_2 для функций первого класса должны удовлетворять уравнениям 11. Очевидно, что, коль скоро эти уравнения при каком либо λ_k, равном корню функции $\omega(\lambda)$ (равенство (12) и (12_1) п. 3 гл. V), дадут определенное значение для отношения C_2/C_1 (или C_1/C_2), формула

$$V(x) = C_1 w_1(x, \lambda) + C_2 w_2(x, \lambda) \tag{10_1}$$

доставит единственное (определенное) выражение для фундаментальной функции, отвечающей этому числу λ_k, ибо произвольный множитель C_1 (или C_2), который войдет при этом в выражение $V(x)$, определится из условия нормальности.

Такому характеристическому числу λ_k будет соответствовать одна и только одна фундаментальная функция. Это обстоятельство будет всегда иметь место, коль скоро по крайней мере один из элементов определителя системы двух линейных однородных относительно C_1 и C_2 уравнений (12) (п. 3 гл. V) не равен нулю.

Следовательно, *две различные фундаментальные функции могут отвечать лишь тем значениям λ, которые обращают в нуль все элементы только что упомянутого определителя.*

Это условие – необходимое.

Понятно, что *оно является и достаточным*: уравнения (11) (п. 3 гл. V) удовлетворяются при этом при всяких C_1 и C_2 и равенство (10_1) доставит для рассматриваемых значений λ_k две различные функции, удовлетворяющие всем условиям задачи. За такие функции мы можем принять две какие угодно линейно независимые комбинации из функций $w_1(x, \lambda_k)$ и $w_2(x, \lambda_k)$.

Таким образом, приходим к заключению, что только тем значениям λ могут соответствовать по две различные фундаментальные функции первого класса, которые являются корнями, общими для следующих четырех уравнений:

$$\begin{aligned} &w_1'(b,\lambda) - \beta w_1(b,\lambda) - \alpha = 0, && \text{(a)}\\ &w_2'(b,\lambda) - \beta w_2(b,\lambda) = 0, && \text{(b)}\\ &\alpha w_1(b,\lambda) - \gamma = 0, && \text{(c)}\\ &1 + \alpha w_2(b,\lambda) = 0. && \text{(d)} \end{aligned} \qquad (11)$$

5. Нетрудно убедиться, что эти четыре уравнения равносильны трем, ибо одно из них есть прямое следствие двух других. Умножив (a) на w_2 (b, λ), (b) на $w_1(b, \lambda)$ и вычтя результаты, получаем

$$w_1(b,\lambda)\, w_2'(b,\lambda) - w_2(b,\lambda)\, w_1'(b,\lambda) + \alpha w_2(b,\lambda) = 0,$$

откуда при помощи равенства (9) п. 3 гл. V выводим уравнение (d).

Поэтому можем утверждать, что *по две линейно независимые фундаментальные функции первого класса могут соответствовать лишь тем характеристическим числам, которые служат вещественными корнями, общими для трех следующих уравнений*:

$$\begin{aligned} &w_2'(b,\lambda) - \beta w_2(b,\lambda) = 0,\\ &\alpha w_1(b,\lambda) - \gamma = 0,\\ &1 + \alpha w_2(b,\lambda) = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Всякому же другому характеристическому числу, взятому из их полной системы, будет отвечать одна и только одна фундаментальная функция.

Обратно, *всякому вещественному значению λ_k, служащему корнем, общим для трех уравнений* (12), *когда таковой существует, непременно соответствуют две различные фундаментальные функции.*

Очевидно, что всякий корень, общий для трех уравнений (12), есть в то же время корень уравнения

$$\omega(\lambda) = 0, \qquad (13)$$

ибо прямым следствием уравнений (12) является и четвертое из уравнений (11), причем уравнение (13), очевидно, отождествляется.

При этом уравнения (11) п. 4 гл. V отождествляются при каких угодно значениях C_1 и C_2 и, следовательно, всякому вещественному значению λ_k, служащему корнем уравнений (12) этого пункта, действительно соответствуют две линейно независимые фундаментальные функции, как это показано в предыдущем пункте.

Заметим, что уравнения (12), очевидно, невозможны при $\alpha = 0$.

Поэтому, *каждому характеристическому числу λ_k для функций первого класса, подчиненных предельным условиям вида*

$$V_k'(b) = \beta V_k(b), \quad V_k'(a) = \gamma V_k(a),$$

всегда соответствует одна и только одна фундаментальная функция.

Это именно обстоятельство имеет место в задаче об охлаждении неоднородного стержня (см. п. 11 гл. IV).

6. В случае фундаментальных функций второго класса обращаемся к уравнениям (20) п. 8 гл. V. Повторяя рассуждения п. 4, убеждаемся, что соответствие одному и тому же характеристическому числу двух различных фундаментальных функций второго класса возможно тогда и только тогда, когда это число является одним из вещественных корней, общих для следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & w_1(b, \lambda) - \rho = 0, && \text{(a)} \\ & w_1'(b, \lambda) - \tau = 0, && \text{(b)} \\ & w_2'(b, \lambda) - \frac{1}{\rho} = 0, && \text{(c)} \\ & w_2(b, \lambda) = 0. && \text{(d)} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Легко видеть также, что эти уравнения сводятся к трем следующим:

$$w_1(b, \lambda) - \rho = 0, \quad w_1'(b, \lambda) - \tau = 0, \quad w_2(b, \lambda) = 0, \qquad (15)$$

ибо уравнение (c) есть прямое следствие уравнений (a), (d) и следующего:

$$w_1(b, \lambda)\, w_2'(b, \lambda) - w_2(b, \lambda)\, w_1'(b, \lambda) = 1.$$

Итак, *по две различные фундаментальные функции могут иметь лишь те характеристические числа, которые служат вещественными корнями, общими для трех уравнений* (15); *всякому такому корню соответствуют непременно по две различные фундаментальные функции, всем же остальным характеристическим числам их полной системы соответствует каждому по одной и только по одной фундаментальной функции второго класса.*

7. Сравнивая уравнения (5) с (12) для функций первого класса и уравнения (10) с (14) для функций второго класса, видим, что в обоих случаях одна из двух фундаментальных функций, отвечающих одному и тому же характеристическому числу (когда это возможно), непременно принадлежит к тем, которые обращаются в нуль при $x = a$. Так как линейное однородное уравнение второго порядка не может допускать двух независимых между собой решений, которые обращались бы одновременно в нуль при $x = a$, то вторая фундаментальная функция, отвечающая тому же характеристическому числу, необходимо отлична от нуля при этом значении x. Это одинаково справедливо для функций обоих классов.

Обозначим через

$$\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots, \lambda_m'', \ldots \qquad (\alpha)$$

ряд вещественных чисел (если такие числа существуют), который, вообще говоря, может быть ограниченным или неограниченным, удовлетворяющих одновременно уравнениям (5) (или (10)). Остальные числа полной системы характеристических чисел (за исключением чисел (α)) обозначим через

$$\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_k', \ldots \qquad (\beta)$$

которая представится, таким образом, совокупностью двух рядов чисел (α) и (β). Каждому числу ряда (α) будет соответствовать только одна фундаментальная функция (первого или второго класса), удовлетворяющая условиям

$$V_k(a) = 0, \quad V_k'(a) \neq 0, \quad V_k(b) \neq 0. \qquad (16)$$

Каждому числу ряда (β) будут соответствовать лишь такие фундаментальные функции, для которых

$$V_k(a) \neq 0. \tag{17}$$

Обозначим через

$$\lambda_1''', \lambda_2''', \ldots, \lambda_l''', \ldots \tag{γ}$$

ряд вещественных корней, общих для уравнений (12) или (15) (когда таковые существуют).

Так как уравнения (5) и (10) составляют соответственно лишь часть последних уравнений, то числа ряда (γ) составляют лишь часть чисел ряда (α) и каждое из чисел (γ) непременно войдет в состав ряда (α). Числам ряда (γ), входящим в состав ряда (α), будет соответствовать та из двух фундаментальных функций, которая удовлетворяет условиям (16). Другая фундаментальная функция, принадлежащая тому же числу ряда (γ), непременно будет заключаться в ряде функций, соответствующих числам (β), ибо она должна удовлетворять условию (17). Поэтому числа (γ) войдут по одному разу и в состав чисел (β), причем каждому числу этого ряда, так же как и каждому числу ряда (α), будет соответствовать одна и только одна фундаментальная функция.

Если мы каким бы то ни было способом найдем все числа ряда (α) и все числа ряда (β), то совокупность этих чисел даст полную систему характеристических чисел, а числа, одинаковые в том и другом из этих рядов (α) и (β), дадут все числа ряда (γ), т.е. те характеристические числа, каждому из которых соответствуют по две линейно независимые фундаментальные функции (первого или второго класса).

Покажем, что *метод Шварца – Пуанкаре дает алгоритм для последовательного вычисления всех чисел рядов* (α) *и* (β)*, а следовательно, и всех характеристических чисел их полной системы, причем сравнением чисел, получаемых таким путем в рядах* (α) *и* (β)*, отделятся сами собой и числа* (γ)*, как равные между собой.*

8. Будем теперь рассматривать отдельно фундаментальные функции первого и второго классов.

Возьмем какую-либо определенную функцию $f(x)$ и применим к уравнению

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) + f(x) = 0 \tag{18}$$

при предельных условиях первого класса

$$\begin{aligned} &V'(b) - \alpha V(a) - \beta V(b) = 0, \\ &V'(a) - \gamma V(a) + \alpha V(b) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

метод Шварца – Пуанкаре, изложенный в гл. V и VI.

Найдем модуль l_r некоторого характеристического числа λ_r, где r обозначает целое число, по формуле

$$l_r = |\lambda_r| = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}},$$

где W_k, напомним, суть интегралы Шварца. Определение знака λ_r, когда для характеристических чисел возможны отрицательные значения, можно достигнуть непосредственной подстановкой найденного числа в уравнение характеристических чисел $\omega(\lambda) = 0$, что, теоретически говоря, не представляет затруднений.

Интегральный вычет, соответствующий простому полюсу λ_r, мероморфной функции $V(x, \lambda)$, определяемой условиями (18) и (19), доставит соответствующую числу λ_r фундаментальную функцию $V_r(x)$.

9. Найдя таким путем одну какую-либо фундаментальную функцию первого класса $V_r(x)$, составим функцию $f_1(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$f_1''(x) - q(x) f_1(x) + p(x)\, V_r(x) = 0. \tag{20}$$

Общий интеграл этого уравнения при помощи частных решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ соответствующего ему однородного уравнения представится в виде

$$\begin{gathered} f_1(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + r(x), \\ r(x) = u_1(x) \int_a^x p(x)\, u_2(x)\, V_r(x)\, dx - u_2(x) \int_a^x p(x)\, u_1(x)\, V_r(x)\, dx. \end{gathered} \tag{21}$$

Пусть $V_k(x)$ – какая-либо фундаментальная функция, взятая из их полной системы и отличная от $V_r(x)$ $(k \neq r)$. Умножив (20) на $V_k(x)dx$ и проинтегрировав результат в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b f_1''(x)\, V_k(x)\, dx - \int_a^b q(x) f_1(x)\, V_k(x)\, dx = 0, \tag{22}$$

ибо, в силу ортогональности фундаментальных функций,

$$\int_a^b p(x)\, V_k(x)\, V_r(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq r.$$

Так как

$$\int_a^b f_1''(x)\, V_k(x)\, dx = (f_1'(x) V_k(x) - f_1(x) V_k'(x)) \Big|_a^b + \int_a^b f_1(x) V_k''(x)\, dx,$$

то в силу уравнения (1) (п. 1) при всяком k

$$\begin{gathered} \int_a^b f_1''(x) V_k(x)\, dx - \int_a^b q(x) f_1(x) V_k(x)\, dx + \\ + \lambda_k \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx = (f_1'(x) V_k(x) - f_1(x) V_k'(x)) \Big|_a^b. \end{gathered} \tag{23}$$

Отсюда при помощи (22) и условий (2) (п. 1) выводим

$$\begin{gathered} \lambda_k \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx = V_k(b)\, [\, f_1'(b) - \\ - \alpha f_1(a) - \beta f_1(b)] - V_k(a)\, [\, f_1'(a) - \gamma f_1(a) + \alpha f_1(b)] \end{gathered} \tag{24}$$

– равенство, справедливое при всяком k, не равном r. Умножаем теперь

(20) на $V_r(x)\,dx$ и интегрируем от a до b. Получаем

$$\int_a^b f_1''(x)V_r(x)\,dx - \int_a^b q(x)f_1(x)V_r(x)\,dx + 1 = 0, \tag{25}$$

ибо $\int_a^b p(x)V_r^2(x)dx = 1$. Полагая в (23) $k = r$ и принимая в расчет равенство (25), находим

$$\lambda_r \int_a^b p(x)f_1(x)V_r(x)\,dx = 1 + V_r(b)\,[f_1'(b) -$$

$$-\alpha f_1(a) - \beta f_1(b)] - V_r(a)\,[f_1'(a) - \gamma f_1(a) + \alpha f_1(b)]. \tag{26}$$

10. Определим постоянные C_1 и C_2 выражения (21) при помощи следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &f_1'(b) - \alpha f_1(a) - \beta f_1(b) = 0, \\ &f_1'(a) - \gamma f_1(a) + \alpha f_1(b) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Определитель этой системы линейных относительно C_1 и C_2 уравнений равен, очевидно, $\omega(0)$. Не нарушая общности задачи, можем считать, что $\omega(0) \neq 0$. В самом деле, если бы оказалось, что при данных $p(x)$, $q(x)$, α, β, γ $\omega(0)$ обращается в нуль, то при помощи сдвига шкалы характеристических чисел (см. пп. 10 – 19 гл. VI) мы всегда можем перейти от уравнения (18) к уравнению

$$V''(x) + [\mu p(x) - q_1(x)]\,V(x) + f = 0,$$

где, напомним, $\mu = \lambda + c$, $q_1(x) = q(x) + cp(x)$, и соответственно от уравнения (20) к уравнению

$$f_1''(x) - q_1(x)f_1(x) + p(x)V_r(x) = 0,$$

выбрав постоянную c так, что определитель $\Omega\,(0)$ системы (27) будет наверное отличен от нуля.

Таким образом, можем утверждать, что уравнения (27) всегда дадут определенные и единственные значения для C_1 и C_2. Получим определенную функцию $f_1(x)$, для которой в силу (24) и (26) будем иметь

$$\lambda_r \int_a^b p(x)f_1(x)V_r(x)\,dx = 1 - V_r(a), \tag{28}$$

$$\lambda_k \int_a^b p(x)f_1(x)V_k(x)\,dx = -V_k(a), \quad k \neq r. \tag{28_1}$$

11. Обозначим фундаментальные функции, соответствующие числам ряда (α) (п. 7), через

$$V_1^{(2)}(x),\quad V_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ V_m^{(2)}(x),\ \ldots, \tag{α_1}$$

а фундаментальные функции, отвечающие числам ряда (β), – через

$$V_1^{(1)}(x),\ V_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ V_k^{(1)}(x),\ \ldots \tag{β_1}$$

Совокупность рядов (α_1) и (β_1) составит, очевидно, полную систему фундаментальных функций первого класса.

Положим

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{V_r(a) - 1}{\lambda_r} V_r(x). \tag{29}$$

Приняв в расчет (28) и (28_1), убедимся, что функции $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\lambda_r \int_a^b p(x)\varphi(x)V_r(x)\,dx = 0, \\ &\lambda_k \int_a^b p(x)\varphi(x)V_k(x)\,dx = -V_k(a) \quad \text{при} \quad k \neq r. \end{aligned} \tag{29_1}$$

Последнее равенство показывает, что для любой функции $V_s^{(2)}$ ($s = 1, 2, \ldots, m$), взятой из ряда (α_1),

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)V_s^{(2)}(x)\,dx = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, m), \tag{30}$$

а для любой функции ряда (β_1), за исключением $V_r(x)$, если такая принадлежит функциям этого ряда,

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)V_k^{(1)}(x)\,dx = -V_k^{(1)}(a) \neq 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{31}$$

Что же касается функции $V_r(x)$, то, к какому бы из двух рядов (α_1) или (β_1) она ни принадлежала, всегда

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)V_r(x)\,dx = 0. \tag{32}$$

12. Применим теперь алгоритм Шварца – Пуанкаре к последовательному вычислению характеристических чисел и соответствующих им фундаментальных функций, принадлежащих данной функции

$$p(x)\varphi(x), \tag{33}$$

определяемой равенством (29) (см. п. 30 гл. V и пп. 10–19 гл. VI).

Принимая в расчет теоремы пп. 33 – 34 гл. V и равенства (30), (31) и (32), убеждаемся, что ни функция $V_r(x)$ (известная уже) и ни одна из функций ряда (α_1) не может принадлежать функции (33); наоборот, каждая из функций ряда (β_1), за исключением известной функции $V_r(x)$, если таковая входит в состав этого ряда, непременно принадлежит функции (33).

Поэтому *алгоритм Шварца – Пуанкаре, когда за исходное уравнение возьмем уравнение вида*

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\,V(x) + p(x)\varphi(x) = 0, \tag{33_1}$$

приведет, как показано в гл. V, к последовательному вычислению всех чисел ряда (β), за исключением уже известного числа λ_r, если оно принадлежит этому ряду, и не даст ни одного из чисел, входящих в состав ряда (α); при этом последовательно определятся и все фундаментальные функции ряда (β_1) и только эти функции *).

---

*) За исключением уже известной функции $V_r(x)$, если таковая оказалась бы принадлежащей ряду (β_1).

13. Составим теперь функцию $f_2(x)$, удовлетворяющую тому же самому дифференциальному уравнению

$$f_2''(x) - q(x) f_2(x) + p(x) V_r(x) = 0, \tag{34}$$

что и функция $f_1(x)$ п. 9, но следующим предельным условиям:

$$\begin{aligned} &f_2'(b) - \alpha f_2(a) - \beta f_2(b) = 1, \\ &f_2'(a) - \gamma f_2(a) + \alpha f_2(b) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Каковы бы ни были данные задачи $p(x)$, $q(x)$, α, β и γ, всегда найдем единственную, вполне определенную функцию $f_2(x)$ удовлетворяющую поставленным условиям, как это следует из тех же самых соображений, какие были указаны в п. 10.

Заменив в формулах (24) и (26), справедливых для всякой функции, удовлетворяющей уравнению вида (34), функцию $f_1(x)$ через $f_2(x)$ и приняв во внимание условия (35), получим

$$\lambda_r \int_a^b p(x) f_2(x) V_r(x)\, dx = V_r(b) + 1,$$

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_2(x) V_k(x)\, dx = V_k(b) \quad \text{при} \quad k \neq r.$$

Положив затем $f_3(x) = f_2(x) - \dfrac{V_r(b) + 1}{\lambda_r} V_r(x)$, получим функцию, удовлетворяющую таким условиям:

$$\lambda_r \int_a^b p(x) f_3(x) V_r(x)\, dx = 0, \tag{36}$$

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_3(x) V_k(x)\, dx = V_k(b) \quad \text{при} \quad k \neq r.$$

Отсюда следует на основании (16) (п. 7), что для любой функции $V_s^{(2)}(x)$ ряда (α_1), соответствующего ряду характеристических чисел ряда (α), за исключением функции $V_r(x)$, если бы таковая и оказалась принадлежащей ряду (α_1), имеет место неравенство

$$\int_a^b p(x) f_3(x) V_s^{(2)}(x)\, dx \neq 0. \tag{37}$$

14. Возьмем какое-либо число n уже известных нам функций

$$V_k^{(1)}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

по порядку от первой до n-й, ряда (β_1) и составим функцию

$$\psi(x) = f_3(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k^{(1)}(x), \tag{38}$$

где $A_k = \int_a^b p(x) f_3(x) V_k^{(1)}(x) dx$. Приняв в расчет ортогональность и нормальность фундаментальных функций, а также равенство (36) и (37), из (38) выводим

$$\int_a^b p(x)\,\psi(x) V_k^{(1)}(x)\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

и

$$\int_a^b p(x)\,\psi(x) V_s^{(2)}(x)\,dx \neq 0 \tag{39$_1$}$$

для любой функции $V_s^{(2)}(x)$ ряда (α_1), за исключением функции $V_r(x)$, если таковая оказывается принадлежащей этому ряду. Для функции же $V_r(x)$, к какому бы из двух рядов (α_1) или (β_1) она ни принадлежала, всегда

$$\int_a^b p(x)\,\psi(x) V_r(x)\,dx = 0. \tag{39$_2$}$$

15. Применим алгоритм Шварца – Пуанкаре к последовательному вычислению характеристических чисел и им соответствующих фундаментальных функций, принадлежащих функции

$p(x)\,\psi(x)$.

Приняв во внимание равенства (39), (39$_1$) и (39$_2$) и повторив рассуждения предыдущего пункта, убеждаемся, что при этом будут последовательно получаться лишь числа ряда (α), модуль которых меньше $|\lambda_n|$, и не получится ни одного числа, принадлежащего ряду (β), ни числа (уже известного) λ_r, к какому бы из этих двух рядов оно ни принадлежало.

Так как все сказанное справедливо при каком угодно n, то, *взяв n достаточно большим, мы вычислим указанным способом какое угодно число характеристических чисел ряда (α), а следовательно, и соответствующих им фундаментальных функций ряда (α_1) (по порядку начиная с первой), за исключением числа λ_r и функции $V_s(x)$, уже известных.*

16. При помощи описанных выше операций мы найдем сначала некоторое число λ_r и соответствующую ему функцию $V_r(x)$, затем последовательно все числа λ_s' и им соответствующие функции $V_s^{(1)}(x)$ и, наконец, все числа λ_k'' и соответствующие функции $V_k^{(2)}(x)$ (за исключением уже известных числа λ_r и функции $V_r(x)$).

Совокупность всех найденных таким путем характеристических чисел дает полную систему этих чисел, а совокупность всех отвечающих этим числам функций – полную систему фундаментальных функций.

Отметим следующую особенность изложенного приема: *он позволяет отдельно вычислить все числа, которым соответствуют функции, обращающиеся в нуль при $x = a$, и отдельно все те числа, соответствующие функции которых не равны нулю при $x = a$.*

Когда таким путем вычислены эти две группы характеристических чисел, из которых составляется их полная система, то *сейчас же выделяются и все те характеристические числа λ_s'''* $(s = 1, 2, \ldots, l)$ (ряд (γ) п. 7), *каждому из которых отвечают по две различные фундаментальные функции; это суть те числа, которые оказываются одинаковыми и в той и в другой из полученных указанным способом двух групп,* как уже сказано в конце п. 7.

Все нужные для такого вычисления действия сводятся к отысканию двух независимых частных решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ линейного однородного уравнения второго порядка

$$V''(x) - q(x)V(x) = 0 \; ^{*}),$$

подчиненных условиям

$$u_1(a) = 1, \quad u_1'(a) = 0, \quad u_2(a) = 0, \quad u_2'(a) = 1,$$

и к ряду квадратур.

17. Аналогичный прием с соответствующими изменениями применим и к вычислению полной системы характеристических чисел и фундаментальных функций второго класса. Разобъем, подобно предыдущему, все характеристические числа полной системы на две группы чисел (α) и (β) (см. п. 7).

В рассматриваемом случае числа первой группы (α) представляют собой вещественные корни, общие для уравнений (10) (п. 3). Каждому числу этой группы соответствует фундаментальная функция второго класса, удовлетворяющая условиям

$$V_k(a) = V_k(b) = 0, \quad V_k'(a) \neq 0; \tag{40}$$

каждому числу группы (β) отвечает фундаментальная функция, для которой

$$V_k(a) \neq 0. \tag{41}$$

Совокупность рядов (α) и (β) составит полную систему характеристических чисел для функций второго класса. Те характеристические числа λ_s''', каждому из которых отвечают по две фундаментальные функции, войдут в состав как ряда (α), так и ряда (β).

18. Подразумевая под $f(x)$ какую-либо функцию, применим к уравнению (18) (п. 8) метод Шварца – Пуанкаре при предельных условиях вида

$$V(b) = \rho V(a), \quad V'(b) = \frac{1}{\rho} V'(a) + \tau V(a). \tag{42}$$

Найдем некоторое определенное характеристическое число и ему соответствующую фундаментальную функцию, которые обозначим, как и в п. 8 через λ_r и $V_r(x)$.

Составляем затем функцию $f_1(x)$ п. 9, причем для всякой функции $V_k(x)$ второго класса, взятой произвольно из их полной системы, но не равной $V_r(x)$, получим равенства (22) и (23) (п. 9), из которых при помощи условий (42) выводим для рассматриваемого случая:

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\,dx =$$

$$= V_k(a)\,[\rho f_1'(b) - \tau f_1(b) - f_1'(a)] - \frac{V_k'(a)}{\rho}\,[f_1(b) - \rho f_1(a)]. \tag{43}$$

---

*) Или уравнения

$$V''(x) - [q(x) + cp(x)]\,V(x) = 0,$$

где c есть соответствующим образом выбранная положительная постоянная.

Определим постоянные C_1 и C_2 в выражении $f_1(x)$ (21) при помощи условий

$$f'_1(b) - \frac{1}{\rho} f'_1(a) - \tau f_1(a) = \frac{1}{\rho}, \qquad\qquad (43_1)$$

$$f_1(b) - \rho f_1(a) = 0.$$

Рассуждая совершенно так же, как и для случая фундаментальных функций первого класса, можем считать определитель этих уравнений отличным от нуля. Получим вполне определенную функцию $f_1(x)$, удовлетворяющую в силу (43) условиям

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\,dx = V_k(a) \qquad (44)$$

при всяком k, не равном r.

Для случая $k = r$ равенства (23), (25) и (43_1) дают

$$\lambda_r \int_a^b p(x) f_1(x) V_r(x)\,dx = V_r(a) + 1. \qquad (45)$$

19. Придерживаясь тех же обозначений, что и в п. 11 разобъем все фундаментальные функции на две группы (α_1) и (β_1), из которых первые удовлетворяют условиям (40), вторые – условиям (41), и введем функцию

$$\varphi(x) = f_1(x) - \frac{V_r(a) + 1}{\lambda_r} V_r(x).$$

К какому бы из двух рядов (α_1) или (β_1) ни принадлежала функция $V_r(x)$, всегда будем иметь в силу (45),

$$\int_a^b p(x)\varphi(x) V_r(x)\,dx = 0. \qquad (46)$$

Для всякой другой функции $V_s^{(2)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ ряда (α_1), удовлетворяющий условиям (40), получим, приняв в расчет (44),

$$\int_a^b p(x)\varphi(x) V_s^{(2)}(x)\,dx = 0, \qquad (47)$$

а для всякой функции $V_s^{(1)}(x)$ ряда (β_1), отличной от $V_r(x)$, будем иметь, в силу (44) и (41),

$$\int_a^b p(x)\varphi(x) V_k^{(1)}(x)\,dx \neq 0. \qquad (47_1)$$

Если применим теперь алгоритм Шварца – Пуанкаре к уравнению (33_1) *при предельных условиях* (42), *то получим последовательно все числа ряда* (β) *и им соответствующие функции ряда* (β_1), *за исключением уже известной функции* $V_r(x)$, *если бы она оказалась в ряде* (β_1), *и только эти числа и функции.*

Ни одно из чисел ряда (α), а следовательно, и ни одна из функций ряда (α_1), при этом вычислении появиться не может в силу условий (47). Это вытекает из тех же самых соображений, которые указаны в п. 12.

20. Составим теперь функцию $f_2(x)$, удовлетворяющую уравнению (34) (п. 13) и предельным условиям

$$f_2'(b) - \frac{1}{\rho} f_2'(a) - \tau f_2(a) = \frac{\tau}{\rho},$$
$$f_2(b) - \rho f_2(a) = 1, \tag{48}$$

что согласно с предыдущим всегда возможно. Заменив в (43) $f_1(x)$ через $f_2(x)$ и приняв в расчет (48), получим

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_2(x) V_k(x)\, dx = -\frac{V_k'(a)}{\rho}$$

для всякой фундаментальной функции второго класса, не равной $V_r(x)$. Для этой последней тем же путем, что и в п. 18 получим следующее равенство:

$$\lambda_r \int_a^b p(x) f_2(x) V_r(x)\, dx = 1 - \frac{V_r'(a)}{\rho}.$$

Если положим затем

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{\rho - V_r'(a)}{\rho\lambda_r} V_r(x),$$

то получим функцию, удовлетворяющую условиям

$$\lambda_r \int_a^b p(x) f_3(x) V_r(x)\, dx = 0, \tag{49}$$

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_3(x) V_k(x)\, dx = -\frac{V_k'(a)}{\rho} \quad \text{при} \quad k \neq r. \tag{49_1}$$

21. Возьмем теперь какое угодно число n, по порядку начиная с первой, функций $V_k^{(1)}(x)$ из ряда (β_1) и составим функцию

$$\psi(x) = f_3(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k^{(1)}(x),$$

$$A_k = \int_a^b p(x) f_3(x) V_k^{(1)}(x)\, dx.$$

Очевидно,

$$\int_a^b p(x)\, \psi(x) V_k^{(1)}(x)\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

и, на основании (40) и (49_1),

$$\int_a^b p(x)\, \psi(x) V_s^{(2)}(x)\, dx = -\frac{[V_s^{(2)}(a)]'}{\lambda_k \rho} \neq 0$$

для любой функции ряда (α_1). Кроме того, в силу (49),

$$\int_a^a p(x)\, \psi(x) V_r(x)\, dx = 0.$$

Три последние формулы показывают, что если мы применим алгоритм Шварца – Пуанкаре к последовательному вычислению характеристических чисел и им соответствующих фундаментальных функций второго класса, принадлежащих функции $p(x)\psi(x)$, то получим все характеристические числа ряда (α), модуль которых меньше $|\lambda_n|$, не пропустив ни одного из них, и все соответствующие функции ряда (α_1), за исключением уже известной функции $V_r(x)$, если бы она оказалась в ряде (α_1).

Увеличивая произвольно число n, мы вычислим таким путем последовательно какое угодно число характеристических чисел ряда (α), не пропустив ни одной из них (кроме уже известной функции $V_r(x)$), причем ни одно из чисел ряда (β), а следовательно и ни одна из функций ряда (β_1), появиться не может.

Совокупность полученных характеристических чисел и фундаментальных функций при помощи указанных операций, из которых каждая дает одно число и одну ему соответствующую функцию, доставит полные системы и тех и других.

Числа, одинаковые в рядах (α) и (β), будут те, каждому из которых соответствуют по две различные фундаментальные функции; эти последние будут найдены в соответствующих местах вычисляемых указанным способом рядов функций (α_1) и (β_1).

Все замечания, сделанные в п. 16 относятся к рассматриваемому случаю фундаментальных функций второго класса.

22. Задача о вычислении полной системы характеристических чисел и фундаментальных функций значительно упрощается в различных частных случаях. Так, если в условиях первого класса (19) $\alpha = 0$, то, как указано выше (п. 2), ни одна из фундаментальных функций не может обратиться в нуль при $x = a$ и каждому из характеристических чисел соответствует одна и только одна фундаментальная функция (п. 5). В этом случае равенств (29_1) п. 11 заключаем, что любая функция $V_k(x)$ из их полной системы удовлетворяет условию

$$\int_a^a p(x)\varphi(x)V_k(dx) \neq 0,$$

за исключением функции $V_r(x)$, которая удовлетворяет первому из равенств (29_1).

Отсюда следует, что *в рассматриваемом случае все функции полной системы, за исключением уже известной функции $V_r(x)$, принадлежат одной и той же функции*

$$p(x)\varphi(x), \tag{33}$$

где $\varphi(x)$ есть функция, определяемая уравнениями (29), (20) *и* (27), *а все характеристические числа полной системы, за исключением, быть может, λ_r, принадлежат ряду (β).*

Поэтому, *зная число λ_r и ему соответствующую функцию $V_r(x)$, стоит применить алгоритм Шварца – Пуанкаре один раз к последовательному вычислению характеристических чисел и фундаментальных функций, принадлежащих функции* (33), *чтобы найти систему тех и других.*

23. Столь же просто решается задача и для случая фундаментальных функций трех предельных классов (п. 7 гл. VI).

Пусть, например, $V_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) суть функции второго предельного класса, определяемые условиями (13) и (15) (п. 7 гл. VI). В этом случае равенства (22), (23) и (25), справедливые для всяких фундаментальных функций, дают

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_1(a) V_k(x)\, dx =$$

$$= - V_k(a) [f_1'(a) - \gamma f_1(a)] - f_1(b) V_k'(b), \quad k \neq r,$$

и

$$\lambda_r \int_a^b p(x) f_1(x) V_r(x)\, dx =$$

$$= - V_r(a) [f_1'(a) - \gamma f_1(a)] - f_1(b) V_k'(b) + 1,$$

где, напомним, $f_1(x)$ есть какое-либо решение уравнения (20). Подчинив это решение условиям

$$f_1'(a) - \gamma f_1(a) = 0, \quad f_1(b) = 1, \tag{50}$$

что на основании предыдущего всегда возможно (пп. 21–25 гл. VI), получим для любой фундаментальной функции рассматриваемого класса, не равной $V_r(x)$,

$$\lambda_k \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx = - V_k'(b),$$

т.е.

$$\int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx \neq 0 \quad \text{при} \quad k \neq r, \tag{51}$$

ибо $V_k'(b)$ не может обращаться в нуль.

Для функции же $V_r(x)$ будем иметь

$$\int_a^b p(x) f_1(x) V_r(x)\, dx = \frac{1 - V_r'(b)}{\lambda_r}. \tag{51_1}$$

Составим теперь функцию

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{V_r'(b) - 1}{\lambda_r} V_r(x). \tag{52}$$

Приняв в расчет (51) и (51_1), получаем

$$\int_a^b p(x) \varphi(x) V_k(x)\, dx \neq 0 \quad \text{при} \quad k \neq r; \quad \int_a^b p(x) \varphi(x) V_r(x)\, dx = 0.$$

Эти равенства показывают, что *все функции $V_k(x)$ рассматриваемого класса, за исключением $V_r(x)$, принадлежат функции $p(x)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ определяется формулой* (52), *а $f_1(x)$ есть функция, вполне определяемая уравнениями* (20) *и* (50).

Применив алгоритм Шварца – Пуанкаре к последовательному вычислению фундаментальных функций второго предельного класса и их характеристических чисел, принадлежащих функции $p(x)\varphi(x)$, найдем полную систему этих чисел и функций (включая сюда известную функцию $V_r(x)$).

24. Совершенно так же докажем, что *все* фундаментальные функции первого предельного класса (см. уравнения (13) и (14) п. 7 гл. VI), не считая одной из них $V_r(x)$, принимаемой за известную, принадлежат функции

$$p(x)\,\varphi(x) = \left(f_1(x) + \frac{V'_r(b) - 1}{\lambda_r}\; V_r(x) \right) p(x), \tag{53}$$

где $f_1(x)$ есть решение уравнения (20), вполне определяемое предельными условиями

$$f_1(a) = 0, \quad f_1(b) = 1\ ^{*}),$$

а все фундаментальные функции третьего класса (см. уравнения (13) и (16) п. 7 гл. VI) принадлежат функции

$$p(x)\,\varphi(x) = p(x) \left(f_1(x) - \frac{V'_r(a) + 1}{\lambda_r}\; V_r(x) \right),$$

где $f_1(x)$ есть функция, вполне определяемая уравнением (20) и условиями (53_1) $f'_1(b) - \beta f_1(b) = 0$, $f_1(a) = 1$**).

Поэтому *алгоритм Шварца – Пуанкаре, примененный к вычислению характеристических чисел и им соответствующих фундаментальных функций, принадлежащих функции* (53), *даст полную систему этих чисел и функций первого, а тот же алгоритм, примененный к функции* (53_1), *определит полную систему чисел и функций второго предельного класса.*

ГЛАВА VIII

Значение условий ортогональности в общей теории фундаментальных функций. Неприложимость этой теории к общему случаю, когда условия ортогональности не соблюдаются. Различные частные примеры

1. В конце гл. IV было указано, что предельные условия, которым должны подчиняться искомые фундаментальные функции $V_k(x)$, в самом общем случае распадаются на два класса:

$$1^\circ \qquad \begin{aligned} V'_k(b) &= \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \\ V'_k(a) &= \gamma V_k(a) + \delta V_k(b). \end{aligned} \tag{1}$$

---

*) Таким же свойством обладает и функция

$$\varphi(x) = f_1(x) - \frac{1 + V'_r(a)}{\lambda_r}\; V_r(x),$$

где $f_1(x)$ есть решение уравнеиия (20), определяемое условиями $f_1(b) = 0$, $f_1(a) = 1$.

**) Функцию $\varphi(x)$ можно заменить также следующей:

$$\varphi(x) = f_1(x) - \frac{1 + V_r(b)}{\lambda_r}\; V_r(x),$$

где $f_1(x)$ есть функция, определяемая тем же уравнением (20) и условиями $f'_1(b) - \beta f_1(b) = 1$, $f_1(a) = 0$.

$$2^\circ. \quad \begin{aligned} &V_k(b) = \rho V_k(a), \\ &V_k'(b) = \sigma V_k'(a) + \tau V_k(b). \end{aligned} \tag{2}$$

Во всех последующих исследованиях, начиная с гл. V, мы ограничились предположением, что для условий первого класса

$$\alpha + \delta = 0, \tag{3}$$

а для условий второго класса

$$\rho\sigma - 1 = 0. \tag{4}$$

При соблюдении этих равенств фундаментальные функции обоих классов оказываются ортогональными по отношению к характеристической функции $p(x)$, входящей в основное дифференциальное уравнение

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\, V_k(x) = 0, \tag{5}$$

которому удовлетворяют все фундаментальные функции $V_k(x)$.

Равенства (3) и (4), вытекающие из условия (1) п. 1 гл. V, мы будем также называть *условиями ортогональности.* Эти условия или равносильное им равенство

$$\int\limits_a^b p(x)\, V_m(x)\, V_n(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n$$

играют существенную роль при выводе всех теорем предыдущих глав.

Спрашивается, возможно ли распространить предыдущую теорию на самый общий случай, когда в условиях первого класса постоянная δ не равна $-\alpha$, а произведение $\rho\sigma$ в условиях второго класса не равно единице?

2. Само собой разумеется, что соображения пп. 4 – 7 предыдущей главы остаются справедливыми и для общего случая. Интеграл уравнения (5), удовлетворяющий условиям (1) или (2), всегда представится в виде

$$V_k(x) = C_1^{(k)} w_1(x, \lambda_k) + C_2^{(k)} w_2(x, \lambda_k), \tag{6}$$

где $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$ – постоянные, определяемые для функций первого класса уравнениями

$$\begin{aligned} &C_1^{(k)} [w_1'(b, \lambda_k) - \beta w_1(b, \lambda_k) - \alpha] + C_2^{(k)} [w_2'(b, \lambda_k) - \beta w_2(b, \lambda_k)] = 0, \\ &- C_1^{(k)} [\gamma + \delta w_1(b, \lambda_k)] + C_2^{(k)} [1 - \delta w_2(b, \lambda_k)] = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

а для функций второго класса – уравнениями

$$\begin{aligned} &C_1^{(k)} [w_1(b, \lambda_k) - \rho] + C_2^{(k)} w_2(b, \lambda_k) = 0, \\ &C_1^{(k)} [w_1'(b, \lambda_k) - \tau] + C_2^{(k)} [w_2'(b, \lambda_k) - \sigma] = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

которые при соблюдении условий (3) и (4) совпадают соответственно с уравнениями (11) п. 3 и (20) п. 8 гл. V.

Останавливаясь на предположении, что не все коэффициенты при $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$ в уравнениях (7) и (8) равны нулю, приходим к заключению, что искомые функции возможны лишь для таких значений параметра λ, которые служат корнями уравнения

$$\omega(\lambda) = w_1'(b, \lambda) - \beta w_1(b, \lambda) - (\alpha - \delta) + \gamma w_2'(b, \lambda) + (\alpha\delta - \beta\gamma)\, w_2(b, \lambda) = 0 \tag{9}$$

в случае предельных условий первого класса и корнями уравнения

$$\omega(\lambda) = 1 + \rho\sigma - \sigma w_1(b, \lambda) - \rho w_2'(b, \lambda) + \tau w_2(b, \lambda) = 0 \tag{10}$$

в случае предельных условий второго класса.

Если $\omega(\lambda)$ не есть тождественный нуль при всяком λ, то уравнения (9) и (10) имеют бесчисленное множество корней, каждому из которых будет соответствовать функция $V_k(x)$, изображаемая равенством (6), каковы бы ни были постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ или ρ, σ и τ.

Мы показали, что при соблюдении условий ортогональности (3) и (4) $\omega(\lambda)$ не может равняться нулю тождественно и что уравнения (9) и (10) имеют бесчисленное множество вещественных корней, которым соответствует в каждом случае определенная совокупность вещественных функций $V_k(x)$.

Покажем, что *эти существенные для всей теории положения необходимо имеющие место при соблюдении условий ортогональности, могут оказаться несправедливыми для общего случая, когда условия* (3) *и* (4) *не соблюдаются.*

3. Для выяснения дела достаточно будет рассмотреть несколько простейших частных примеров, не входя в соображения общего характера.

Применим только что указанный в предыдущем пункте прием к определению фундаментальных функций, удовлетворяющих уравнению

$$V''(x) + \lambda^2 V(x) = 0 \tag{11}$$

и предельным условиям

$$V(\pi) - V(0) = 0, \quad V'(\pi) + V'(0) = 0. \tag{12}$$

Мы имеем здесь частный случай уравнений (5) и (2), когда

$$\begin{aligned} &p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad a = 0, \quad b = \pi, \\ &\rho = 1, \quad \sigma = -1, \quad \tau = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

причем $\rho\sigma - 1 = -2$, т.е. *условие ортогональности* (4) *не соблюдается.*

В данном случае

$$w_1(x, \lambda) = \cos \lambda x, \quad w_2(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}. \tag{14}$$

Подставив (13) и (14) в выражение $\omega(\lambda)$ (10), убеждаемся что в *данном случае* $\omega(\lambda)$ *есть тождественный нуль.* Уравнения (8) приводятся к одному и дают $C_2^{(k)} = \dfrac{1 - \cos \pi\lambda}{\lambda \sin \pi\lambda} C_1^{(k)}$, после чего равенство (6) доставит

$$V(x) = \cos \lambda x + \frac{1 - \cos \pi\lambda}{\lambda \sin \pi\lambda} \sin \lambda x = \cos \lambda x + \operatorname{tg} \frac{\lambda\pi}{2} \, \frac{\sin \lambda x}{\lambda}.$$

т.е. определенную (не равную нулю) функцию при всяком λ, не равном 1, 3, 5, ..., удовлетворяющую уравнению (11) и условиям (12). За такую функцию можем принять также

$$V(x) = \cos \lambda (x - \pi/2),$$

которая будет удовлетворять всем поставленным требованиям при всяком λ.

4. Для другого примера будем искать интеграл уравнения (11) при следующих предельных условиях:

$$V(\pi) = 0, \quad V(\pi) - V(0) = 0. \tag{15}$$

Опять имеем случай предельных условий второго класса, когда $\rho = 0$, $\sigma = 0$, $\tau = 1$, причем опять не соблюдается условие (4).

Уравнение (10) принимает вид (при помощи (14))

$$\omega(\lambda) = 1 + \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} = 0.$$

Это уравнение не имеет ни одного вещественного корня.

5. В гл. V было доказано, что все характеристические числа служат простыми вещественными полюсами мероморфной относительно λ функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$V''(x, \lambda) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) + f = 0$$

и предельным условиям вида (1) или (2), а интегральные вычеты этих полюсов пропорциональны соответствующим фундаментальным функциям. Это основное для всей теории предложение безусловно справедливо лишь при соблюдении условий ортогональности и, вообще говоря, не будет иметь места, коль скоро эти последние условия не выполняются.

Так, например, будем искать интеграл уравнения

$$V''(x, \lambda) + \lambda^2 V(x, \lambda) + f(x) = 0, \tag{16}$$

подчиненный условиям (12). Общий интеграл уравнения (16) имеет вид

$$V(x, \lambda) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + r(x, \lambda), \tag{17}$$

где

$$r(x, \lambda) = \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \int_0^x f(x) \sin \lambda x \, dx - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x f(x) \cos \lambda x \, dx. \tag{17_1}$$

Подставив (17) и (17_1) в условия (12), получим следующие уравнения, которым должны удовлетворять постоянные C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} &C_1(\cos \lambda\pi - 1) + C_2 \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\cos \lambda\pi}{\lambda} B - \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} A = 0, \\ &- C_1 \lambda \sin \lambda\pi + C_2(\cos \lambda\pi + 1) - \sin \lambda\pi B - \cos \lambda\pi A = 0, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

где

$$A = \int_0^\pi f(x) \cos \lambda x \, dx, \quad B = \int_0^\pi f(x) \sin \lambda x \, dx. \tag{19}$$

Уравнения (18), вообще говоря, несовместимы. Если же функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\theta(\lambda) = \sin \lambda\pi B + (\cos \lambda\pi - 1) A = 0, \tag{20}$$

то одно из них будет следствием другого.

Первая часть равенства (20) есть, вообще говоря, целая трансцендентная функция от λ, вид которой зависит от заданной функции $f(x)$, причем может случиться, что для некоторых из этих функций $\theta(\lambda)$ обратится в тождественный нуль, для других $\theta(\lambda)$ будет отлично от нуля.

В первом случае одно из уравнений (18) доставит выражение одной из постоянных C_1 и C_2 через другую, которая останется, вообще говоря, произвольной. Равенство (17) доставит два различных решения поставленной задачи.

Во втором случае не может существовать функции $V(x, \lambda)$ при неопределенном λ, удовлетворяющей уравнению (16) и предельным условиям (12). Такие функции оказываются при этом возможными лишь для отдельных значений λ, которые являются корнями целой трансцендентной функции $\theta(\lambda)$.

6. Положим для примера $f(x) = 1$. Имеем

$$A = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda}, \quad B = \frac{1 - \cos \lambda\pi}{\lambda}.$$

В данном случае, очевидно, $\theta(\lambda) = 0$ тождественно.

Первое из уравнений (18) дает

$$C_1 = C_2 \frac{\operatorname{ctg}(\lambda\pi/2)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2},$$

вследствие чего получаем, по формуле (17),

$$V(x, \lambda) = C_2 \frac{\sin \lambda x + \operatorname{ctg}(\lambda\pi/2)\cos \lambda x}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}. \tag{21}$$

Одним из решений задачи будет функция $V(x, \lambda) = -1/\lambda^2$. Это есть мероморфная функция от λ, имеющая единственный полюс $\lambda = 0$ и притом второй кратности. Кроме этого решения существует и другое, независимое от него и получающееся из (21) при C_2, не равном нулю. Один из полюсов этого другого решения также равен нулю, и кратность его также равна двум. Подобные же результаты получим для функций $f(x) = \cos x$, $\sin x$ и т.п.

7. Положим затем $f(x) = x$. В этом случае

$$A = \int_0^\pi x \cos \lambda x \, dx = \frac{\pi \sin \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\cos \lambda\pi - 1}{\lambda^2},$$

$$B = \int_0^\pi x \sin \lambda x \, dx = -\frac{\pi \cos \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda^2}$$

и, в силу (20),

$$\theta(\lambda) = \frac{4}{\lambda^2} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \left(\sin \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\lambda\pi}{2} \cos \frac{\lambda\pi}{2} \right) = 0.$$

Получается уравнение, имеющее бесчисленное множество вещественных корней

$$\lambda_k = 2k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

и бесчисленное множество комплексных корней. Только для этих особенных значений λ уравнение (16) и допускает в рассматриваемом случае решения, удовлетворяющие условиям (12), причем получается бесчисленное множество вещественных и комплексных решений.

8. Рассмотрим еще следующую задачу: найти интеграл уравнения

$$V''(x) + \lambda^2 V(x) = 0 \tag{22}$$

при предельных условиях

$$V'(\pi) - V(0) = 0, \quad V'(0) - V(\pi) = 0. \tag{23}$$

Мы имеем здесь частный случай предельных условий первого класса (1), причем

$$a = 0, \quad b = \pi, \quad \alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \delta = 1,$$

$$\alpha + \delta = 2 \neq 0,$$

т.е. условие ортогональности не соблюдается.

Равенство (9) дает

$$\omega(\lambda) = \frac{(1 - \lambda^2)\sin\lambda\pi}{\lambda} = 0$$

– уравнение, имеющее один корень $\lambda_1' = 1$ второй кратности и бесчисленное множество простых корней $\lambda_k' = k$ *) $(k = 2, 3, \ldots)$.

Получается бесчисленное множество положительных чисел

$$\lambda_k = k^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

каждому из которых соответствует определенная функция $V_k(x)$, удовлетворяющая условиям

$$V_k''(x) + \lambda_k V_k(x) = 0,$$

$$V_k'(\pi) - V_k(0) = 0, \quad V_k'(0) - V_k(\pi) = 0.$$

Функции $V_k(x)$ в данном случае, конечно, неортогональны. Числу $\lambda_k = 1$ отвечает функция

$$V_1(x) = C_1(\sin x - \cos x), \tag{24}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Несмотря на то, что условия ортогональности не соблюдаются, окончательный результат вполне аналогичен с тем, который был получен и в общей теории ортогональных фундаментальных функций.

Однако общая теория Шварца – Пуанкаре к рассматриваемому случаю, как сейчас увидим, непосредственно не прилагается.

9. Когда условия ортогональности соблюдаются, то все числа λ_k должны быть простыми полюсами мероморфной функции $V(x, \lambda)$ удовлетворяющей уравнению

$$V''(x, \lambda) + \lambda^2 V(x, \lambda) + f(x) = 0,$$

общий интеграл которого определяется формулой (17).

---

*) Корни $\lambda_k' = \pm k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ здесь не различаются, поскольку в дальнейшем значение имеют лишь числа $(\lambda_k)^2$. (*Прим. ред.*)

Подставив выражение (17) в уравнения (23), получим

$$-C_1(1+\lambda\sin\lambda\pi)+C_2\cos\lambda\pi = B\sin\lambda\pi + A\cos\lambda\pi,$$

$$-C_1\lambda\cos\lambda\pi + C_2(\lambda-\sin\lambda\pi) = B\cos\lambda\pi - A\sin\lambda\pi.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{(\lambda\sin\lambda\pi - 1)B + A\lambda\cos\lambda\pi}{(1-\lambda^2)\sin\lambda\pi},$$

$$C_2 = \frac{-B\cos\lambda\pi + A(\lambda+\sin\lambda\pi)}{(1-\lambda^2)\sin\lambda\pi}.$$

Искомая функция $V(x,\lambda)$ представится в виде

$$V(x,\lambda) = \cos\lambda x\,\frac{A\lambda\cos\lambda\pi + B(\lambda\sin\lambda\pi - 1)}{(1-\lambda^2)\sin\lambda\pi} +$$

$$+\sin\lambda x\,\frac{A(\lambda+\sin\lambda\pi) - B\cos\lambda\pi}{\lambda(1-\lambda^2)\sin\lambda\pi} + r(x).$$

Это есть мероморфная функция от λ; все ее полюсы простые, за исключением полюса *) $\lambda_1 = 1$, который оказывается полюсом второй кратности.

Итак, $V(x,\lambda)$, как и в теории ортогональных функций, представляется в виде $V(x,\lambda) = W(x,\lambda)/\omega(\lambda)$, но $\lambda = \lambda_1 = 1$ есть корень второй кратности функции $\omega(\lambda)$, причем $W(x,\lambda_1) = W(x,1)$ в нуль не обращается, ибо, как легко убедиться,

$$W(x,1) = (B+A)(\sin x - \cos x),$$

т.е. обращается в функцию $V_1(x)$ (24), соответствующую числу $\lambda_1 = 1$, которое является, следовательно полюсом второй кратности функции $V(x,\lambda)$.

10. Определим, наконец, функцию $V(x,\lambda)$, удовлетворяющую тому же уравнению (25) при предельных условиях

$$V(\pi)=0,\quad V'(\pi) - V(0) = 0$$

(равенство (15) п. 4). Получим

$$V(x,\lambda) = A\,\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + r(x) - B\,\frac{\sin\lambda x\cos\lambda\pi + \lambda\cos\lambda x}{\lambda\omega(\lambda)} = \frac{W(x,\lambda)}{\omega(\lambda)},$$

где, как легко убедиться,

$$A = \int_0^\pi f(x)\cos\lambda x\,dx,\quad B = \int_0^\pi f(x)\sin\lambda x\,dx,$$

$$r(x) = \frac{\cos\lambda x}{\lambda}\int_0^x f(x)\sin\lambda x\,dx - \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\int_0^x f(x)\cos\lambda x\,dx,$$

$$\omega(\lambda) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + 1.$$

*) См. сноску на предыдущей странице (*Прим. ред.*)

Функция $V(x, \lambda)$ есть мероморфная функция λ, но не имеет ни одного вещественного полюса. При всяком же комплексном полюсе λ_k *) числитель $W(x, \lambda)$ в выражении $V(x, \lambda)$ обращается в комплексную же функцию

$$V_k(x) = \cos \lambda_k \pi \sin \lambda_k x + \lambda_k \cos \lambda_k x,$$

которая, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$V_k''(x) + \lambda_k^2 V_k(x) = 0$$

и условиям $V_k(\pi) = 0$, $V_k'(\pi) - V_k(0) = 0$.

Получается как раз тот случай, который невозможен при соблюдении условий ортогональности.

11. Теория интегрирования дифференциальных уравнений при соблюдении известного рода условий на пределах, играющая в настоящее время видную роль в анализе и особенно в теории функций вещественной переменной, развилась на почве попыток применить математический анализ к решению простейших задач физики, и, прежде всего, задачи о колебании упругой струны (Эйлер, Бернулли, Лагранж).

Последующие авторы (Фурье, Штурм, Лиувилль, Ляме и др.), постепенно переходя от простейших задач к более сложным, но руководствуясь постоянно при постановке этих задач соображениями физического характера, положили начала (Пуанкаре) той теории, которая развита выше в обобщенном и усовершенствованном виде.

Именно благодаря тому, что во всех вопросах физического характера на первый план по чисто физическим соображениям выдвигается необходимость удовлетворить известным по наблюдению условиям, которые имеют место на границах той среды, в которой происходит изучаемое физическое явление, и была создана упомянутая выше задача об интегрировании дифференциальных уравнений.

С другой стороны, именно благодаря тому, что во всех задачах физики предельные условия, определяющие задачу, обладают некоторыми особенностями и, в частности, удовлетворяют условиям ортогональности, и удалось подметить те общие начала, которые лежат в основе этих вопросов, и развить их в общую теорию, одинаково важную и для чистой математики, и для физики.

Предыдущие немногочисленные и простейшие примеры достаточно ясно показывают, с каким разнообразием случаев и трудностями пришлось бы столкнуться первоначальным исследователям, если бы их внимание, всегда направляемое соображениями чисто физического характера, не сосредоточилось вследствие этого как раз на тех задачах, где некоторые упрощающие вопрос условия и, в частности, условия ортогональности оказались сами собой выполненными.

Из этих же примеров явствует, что те незначительные ограничения, которые мы наложили с самого начала на постоянные α, β, γ и δ или ρ, σ и τ (равенства (3) и (4)), не носят формального характера, лишь упрощающего изложение, а лежат в самой сущности теории, общие заключения которой перестают быть справедливыми при устранении этих ограничений.

---

*) То есть для соответствующего корня функции $\omega(\lambda)$.

ГЛАВА IX

Задача о разложении произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям первого и второго классов. Ряды, составленные из этих функций по закону Фурье, и их основное свойство. Один частный вид функции $f(x)$, разлагающейся в равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям. Вытекающая отсюда на основании общих теорем главы II абсолютная замкнутость всякой системы фундаментальных функций. Общая теорема о разложимости всякой функции в ряд типа Фурье по каким угодно функциям, образующим ортогональную и абсолютно замкнутую систему, когда квадратичная погрешность от производного ряда не превосходит некоторого данного числа. Применение этой теоремы к случаю фундаментальных функций. Общая теорема о разложении всякой функции, удовлетворяющей условию Коши, в равномерно сходящиеся ряды по фундаментальным функциям

1. Пусть $V_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ есть полная система каких-либо фундаментальных функций (первого, второго или трех предельных классов), ортогональная и нормальная. Предположим, что некоторая функция $f(x)$ разлагается в бесконечный ряд по функциям $V_k(x)$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x), \tag{1}$$

где A_k суть некоторые постоянные.

Предположим, что ряд правой части этого равенства сходится равномерно. Умножая (1) на $p(x) V_k(x) dx$ и интегрируя результат в пределах от a до b, получим

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Таким образом, если возможно разложение какой-либо функции $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд вида (1), то постоянные A_k (коэффициенты разложения) должны иметь только что указанный вид.

Всякий ряд вида (1), коэффициенты которого определяются равенствами (2), мы будем называть *рядом, составленным из фундаментальных функций по закону Фурье, или просто рядом типа Фурье, а коэффициенты* A_k (2) – *коэффициентами Фурье*.

2. Первая из задач, задача (A), поставленных в п. 15 гл. IV, разрешена во всей полноте предыдущими исследованиями. Нам предстоит теперь перейти к решению второй из указанных там задач, задачи (B), о разложении произвольных функций в ряды типа Фурье по фундаментальным функциям. При этом мы будем рассматривать преимущественно разложения равномерно сходящиеся, как имеющие особое значение по своим приложениям в математической физике.

Итак, предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x)$ сходится равномерно в промежутке $[a, b]$, так что сумма его представляет некоторую непрерывную функцию от x в этом промежутке. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, и положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x) + \rho_n(x), \tag{3}$$

где n – какое-либо целое число. При сделанных допущениях функция $\rho_n(x)$ остается непрерывной при всяком n и при беспредельном возрастании n стремится к некоторому определенному пределу который обозначим через $R(x)$.

Можем писать

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) + R(x). \tag{4}$$

Из этого равенства сейчас же следует, что непрерывная функция $R(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_a^b p(x) R(x) V_k(x)\, dx = 0 \tag{5}$$

при всяком целом числе k.

3. Применим метод Шварца – Пуанкаре к определению функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$V''(x, \lambda) + [\lambda p(x) - q(x)] V(x, \lambda) + p(x) R(x) = 0$$

и предельным условиям $L(V) = 0$, $L_1(V) = 0$ того самого вида, которым удовлетворяют и рассматриваемые нами фундаментальные функции $V_k(x)$. Если мы примем в расчет равенства (5) и теорему п. 36 гл. V, то придем к заключению, что искомая функция $V(x, \lambda)$ должна оставаться голоморфной внутри круга любого радиуса $l_{n-1} = |\lambda_{n-1}|$, каково бы ни было число n, а так как числа l_k возрастают беспредельно с возрастанием значка k (см. теорему п. 39 гл. V), то $V(x, \lambda)$ должна быть голоморфной во всей плоскости переменного λ.

Придерживаясь обозначений гл. V, будем подразумевать под W_k интегралы Шварца, соответствующие функции $p(x)R(x)$. На основании теоремы п. 23 гл. V радиус ρ голоморфности функции $V(x, \lambda)$ точно равен

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}}.$$

Так как интегралы Шварца всегда удовлетворяют неравенствам (43) п. 14 гл. V, то на основании этих неравенств

$$\rho \leqslant \sqrt{W_{-1}} / \sqrt{W_0}, \tag{6}$$

где, напомним,

$$W_{-1} = \int_a^b p(x) R^2(x)\, dx, \qquad W_0 = \int_a^b p(x) v_0^2(x)\, dx,$$

а $v_0(x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению

$$v_0''(x) - q(x)\,v_0(x) + p(x)\,R(x) = 0 \tag{7}$$

и предельным условиям

$$L(v_0) = 0, \quad L_1(v_0) = 0.$$

Так как по предыдущему ρ должно быть больше любого положительного числа A, сколь бы велико оно ни было, то в силу (6) должно быть $\sqrt{W_{-1}}\,/\,\sqrt{W_0} \geqslant A$, т.е.

$$W_0 \leqslant \frac{\int\limits_a^b p(x)\,R^2(x)\,dx}{A^2} < \epsilon,$$

где ϵ есть наперед заданное положительное число, ибо числитель правой части этого неравенства есть конечное положительное число либо нуль.

Это неравенство показывает, что

$$\int\limits_a^b p(x)\,v_0^2(x)\,dx = 0,$$

а так как функция $p(x)$ непрерывна и положительна *), а $v_0(x)$ есть функция необходимо непрерывная, то $v_0(x) = 0$ тождественно. Поэтому, в силу (7), $R(x) = 0$, т.е., на основании (4),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x).$$

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Ряд типа Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \int\limits_a^b p(x) f(x) V_k(x)\,dx, \tag{8}$$

представляет разложение непрерывной функции $f(x)$ по фундаментальным функциям $V_k(x)$, к какому бы классу эти функции ни принадлежали, всякий раз, когда он сходится равномерно в данном промежутке $[a, b]$.

4. Будем теперь подразумевать под $f(x)$ функцию, имеющую в промежутке $[a, b]$ производные двух первых порядков и удовлетворяющую тем же предельным условиям

$$L(f) = 0, \quad L_1(f) = 0, \tag{9}$$

что и фундаментальные функции $V_k(x)$. Приняв в расчет дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют фундаментальные функции $V_k(x)$, получаем

$$A_k = \int\limits_a^b p(x) f(x) V_k(x)\,dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_a^b f(x)\,(q(x)\,V_k(x) - V_k''(x))\,dx,$$

*) Бо́льшая часть установленных ниже результатов относится к случаю положительных $p(x)$. (*Прим. ред.*)

откуда интегрированием по частям выводим

$$A_k = -\frac{1}{\lambda_k}\left[f(x)V_k'(x) - f'(x)V_k(x)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_a^b p(x)\,\theta(x)\,V_k(x)\,dx,$$

где

$$\theta(x) = \frac{q(x)f(x) - f''(x)}{p(x)}.$$

Так как $f(x)$ удовлетворяет условиям (9), то $\left[f(x)V_k'(x) - f'(x)V_k(x)\right]_a^b =$ $= 0$ и, следовательно, $A_k = B_k/\lambda_k$, где положено

$$B_k = \int\limits_a^b p(x)\theta(x)V_k(x)\,dx.$$

Ряд (8) представится в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k V_k(x)}{\lambda_k}. \tag{10}$$

5. Напишем уравнение фундаментальных функций так:

$$V_k''(x) - q(x)V_k(x) + \lambda_k p(x)V_k(x) = 0.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (29) п. 11 гл. V, только функция $p(x)v_{k-1}(x)$ заменена здесь функцией $\lambda_k p(x)V_k(x)$. Кроме того, функция $V_k(x)$ удовлетворяет предельным условиям

$$L(V_k) = 0, \quad L_1(V_k) = 0$$

того же самого вида, что и функция $v_k(x)$ только что упомянутого п. 11 гл. V (см. равенство (29_1) п. 11 гл. V). Поэтому, заменив в равенстве (37) п. 12 гл. V $v_{k-1}(x)$ через $\lambda_k V_k(x)$, можем писать, сохраняя обозначения этого пункта,

$$V_k(x) = \lambda_k \{u_1(x)N_k(x) - u_2(x)M_k(x) +$$

$$+ \omega_1(x)N_k(b) - \omega_2(x)M_k(b)\} \tag{11}$$

или, в силу (38_1) (п. 13 гл. V),

$$V_k(x) = \lambda_k \int\limits_a^b p(\xi)\psi(x,\xi)V_k(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Положив $C_k(x) = \int\limits_a^b p(\xi)\psi(x,\xi)V_k(\xi)\,d\xi$ и приняв в расчет (10), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k C_k(x). \tag{13}$$

6. Сравним ряд (13) со следующим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|\,|C_k(x)|. \tag{14}$$

Имеем $|B_k||C_k(x)| \leqslant \frac{1}{2}(B_k^2 + C_k^2(x))$. На основании теоремы п. 2 гл. 1 заключаем, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(x)$$

суть ряды сходящиеся и второй из них сходится при всяком x, причем, в силу неравенства (8) того же п. 2 гл. 1,

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(x) \leqslant \int_a^b p(x)\,\psi^2(x,\xi)\,d\xi.$$

Так как $\psi(x,\xi)$ есть функция непрерывная при x из $[a,b]$ и ξ из $[a,b]$, то $|\psi(x,\xi)| \leqslant M^2$, где M есть конечное число. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(x) \leqslant M^2 Q^2, \quad Q^2 = \int_a^b p(x)\,dx. \tag{15}$$

Из сказанного следует, что *ряд* (14) *сходится при всяком x, взятом в промежутке* $[a,b]$.

Обозначив через $R_n(x)$ остаточный член этого ряда, можем писать

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k||C_k(x)|,$$

откуда по лемме Коши (неравенство (23) п. 5 гл. 1)

$$R_n(x) \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} B_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} C_k^2(x)},$$

т.е., в силу (15),

$$R_n(x) \leqslant MQ\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} B_k^2}. \tag{16}$$

Приняв опять во внимание то обстоятельство, что числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2$ есть ряд сходящийся, можем утверждать, что при всяком $n \geqslant n_0$, где n_0 есть некоторое достаточно большое число, имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} B_k^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{M^2 Q^2} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

где ϵ – наперед заданное положительное число.

Это неравенство и (16) приводят к следующему:

$$R_n(x) \leqslant \epsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

Отсюда следует, что *ряд* (14) *сходится равномерно при всяком x, лежащем в промежутке* $[a,b]$. Отсюда же на основании известной теоремы Коши заключаем, что *ряд* (13) *сходится абсолютно и равномерно в промежутке* $[a,b]$. Отсюда при помощи теоремы п. 3 выводим следующую:

Всякая функция $f(x)$, имеющая производные первых двух порядков, из которых последняя только интегрируема в $[a,b]$, и удовлетворяющая пре-

дельным условиям (9), *разлагается во всем промежутке* $[a, b]$ *в абсолютно и равномерно сходящийся ряд типа Фурье, расположенный по фундаментальным функциям* $V_k(x)$, *к какому бы классу эти функции ни принадлежали.*

7. Итак, для всякой функции $f(x)$, подчиненной условиям только что доказанной теоремы, имеет место следующее равномерное разложение

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x).$$

Отсюда, умножая на $p(x) f(x) dx$ и интегрируя результат от a до b, сейчас же выводим уравнение замкнутости

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Следовательно, *всякая полная система рассматриваемых нами фундаментальных функций есть система замкнутая по отношению к любой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей условиям теоремы предыдущего пункта.*

Покажем, что функции $V_k(x)$ образуют систему, замкнутую по отношению к любой функции $f(x)$, имеющей только производные двух первых порядков, независимо от того, удовлетворяет ли эта функция предельным условиям (9) или нет. Введем полином

$$F(x) = \alpha(x-a)^2 + \beta(x-a)^2 (x - a - \epsilon), \tag{17}$$

где α и β – две пока не определенные постоянные.

Каковы бы ни были α и β, этот полином всегда удовлетворяет условиям

$$F(a) = 0, \quad F'(a) = 0. \tag{18}$$

Определим α и β при помощи следующих уравнений:

$$F(a+\epsilon) = f(a+\epsilon), \quad F'(a+\epsilon) = f'(a+\epsilon). \tag{19}$$

Получим следующие уравнения для α и β:

$$\epsilon^2 \alpha = f(\alpha + \epsilon), \quad \epsilon^3 \beta = \epsilon f'(a+\epsilon) - 2f(a+\epsilon). \tag{20}$$

Найдем высший предел модуля $F(x)$ при изменении x от a до $a + \epsilon$. Очевидно из (17), что $\max |F(x)| \leqslant \epsilon^2 |\alpha| + \epsilon^3 |\beta|$. Но, в силу (20), $\epsilon^2 |\alpha| \leqslant \leqslant M$, $\epsilon^3 |\beta| \leqslant 2M + M_1$, где M и M_1 обозначают $\max |f(x)|$ и $|f'(x)|$ в промежутке $[a, b]$. Следовательно, для промежутка $[a, a+\epsilon]$

$$\max |F(x)| < 3M + M_1 = N. \tag{21}$$

Составим затем полином

$$F_1(x) = \alpha_1 (b-x)^2 + \beta_1 (b-x)^2 (b - \epsilon - x),$$

где α_1 и β_1 – две пока не определенные постоянные. Очевидно,

$$F_1(b) = 0, \quad F_1'(b) = 0. \tag{22}$$

Определим эти постоянные при помощи условий

$$F_1(b-\epsilon) = f(b-\epsilon), \quad F_1'(b-\epsilon) = f'(b-\epsilon), \tag{23}$$

что дает

$$\epsilon^2 \alpha_1 = f(b-\epsilon), \quad \epsilon^3 \beta_1 = 2f(b-\epsilon) - \epsilon f'(b-\epsilon).$$

Отсюда, подобно предыдущему, заключаем, что в промежутке $[b-\epsilon, b]$

$$\max |F_1(x)| \leqslant \epsilon^2 |\alpha_1| + \epsilon^3 |\beta_1| \leqslant 3M + M_1 = N. \tag{24}$$

8. Составим функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = F(x) \quad &\text{при} \quad &a \leqslant x \leqslant a+\epsilon, \\ &\varphi(x) = f(x) \quad &\text{при} \quad &a+\epsilon \leqslant x \leqslant b-\epsilon, \\ &\varphi(x) = F_1(x) \quad &\text{при} \quad &b-\epsilon \leqslant x \leqslant b, \end{aligned} \tag{25}$$

где под $f(x)$ подразумевается какая-либо функция, подчиненная одному только требованию, что она допускает производные двух первых порядков в промежутке $[a, b]$. Равенства (19) и (23) показывают, что введенная нами функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной в промежутке $[a, b]$, ибо такова же, в силу сделанных предположений, и функция $f(x)$. Кроме того, очевидно на основании (18) и (22), что

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi(b) = \varphi'(b) = 0.$$

Следовательно, $\varphi(x)$ несомненно удовлетворяет условиям

$$L(\varphi) = 0 \quad \text{и} \quad L_1(\varphi) = 0.$$

Легко видеть, наконец, что $\varphi(x)$ имеет и производную второго порядка (всюду, кроме точек $x = a+\epsilon$ и $x = b-\epsilon$), интегрируемую в промежутке от a до b. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы п. 6. Следовательно (п. 7), всякая полная система фундаментальных функций замкнута по отношению к функции $\varphi(x)$, т.е.

$$S_n(\varphi) \leqslant \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0, \tag{26}$$

где η^2 есть произвольно заданное положительное число.

9. Применим основное неравенство (10) п. 4 гл. II к функциям $F(x) = f(x)$, $\Phi(x) = \varphi(x)$. Получим

$$\sqrt{S_n(f)} \leqslant \sqrt{S_n(\varphi)} + \sqrt{\int_a^b p(x)(f(x) - \varphi(x))^2 dx}. \tag{27}$$

Приняв в расчет (25), можем писать

$$\int_a^b p(x)(f(x) - \varphi(x))^2 dx = G + H,$$

где

$$G = \int_a^{a+\epsilon} p(x)(f(x) - \varphi(x))^2 dx = \int_a^{a+\epsilon} p(x)(f(x) - F(x))^2 dx,$$

$$H = \int_{b-\epsilon}^b p(x)(f(x) - \varphi(x))^2 dx = \int_{b-\epsilon}^b p(x)(f(x) - F_1(x))^2 dx.$$

Обозначая через P_0 $\max p(x)$ в промежутке $[a, b]$ и принимая во внимание неравенство (21), находим

$$G \leqslant P_0(M+N)^2 \epsilon, \quad H \leqslant P_0(M+N)^2 \epsilon.$$

Следовательно,

$$\int_a^b p(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx \leqslant 2P_0(M+N)^2\epsilon = \left(\frac{\eta}{2}\right)^2.$$

Сопоставляя это неравенство и неравенства (26) и (27), выводим

$$\sqrt{S_n(f)} \leqslant \eta \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{27₁}$$

Отсюда следует, что *всякая полная система фундаментальных функций есть система замкнутая по отношению к любой функции $f(x)$, подчиненной лишь следующим условиям:* (a) *функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной и* (b) *имеет вторую производную, интегрируемую в промежутке $[a, b]$.*

Отсюда, основываясь на общей теореме п. 9 гл. II, приходим к следующей:

Всякая полная система рассматриваемых нами фундаментальных функций $V_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ есть система абсолютно замкнутая.

10. Докажем теперь одну теорему, справедливую для любой системы функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x), \tag{28}$$

ортогональных по отношению к некоторой неотрицательной функции $p(x)$ в данном промежутке $[a, b]$. Допустим для простоты, что система (28) не только ортогональна, но и нормальна.

Пусть $f(x)$ есть функция, удовлетворяющая во всех точках от a до b условию

$$f(x) = \int_a^x f'(z)\,dz + A, \tag{29}$$

где A есть некоторая постоянная, а символ $f'(z)$ обозначает некоторую функцию, интегрируемую в промежутке $[a, b]$, которая, в частности, может быть и производной от функции $f(z)$ в обычном смысле слова. Положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(x) + \rho_n(x),$$

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x)\varphi_k(x)\,dx. \tag{30}$$

Предполагая затем, что функции $\varphi_k(x)$ имеют первые производные, положим еще

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k'(x) + \rho_n'(x). \tag{31}$$

Здесь $\varphi_k'(x)$ обозначает производную от $\varphi_k(x)$ в обычном смысле, а $\rho_n'(x)$ есть некоторая функция, обращающаяся в обыкновенную производную от $\rho_n(x)$, если $f'(x)$ представляет такую же производную от $f(x)$. Вообще же, это будет интегрируемая функция, обладающая следующим свойством. Из равенства (29) следует, что

$$A = f(a). \tag{32}$$

Проинтегрировав (31) в пределах от a до x и приняв в расчет равенства (29), (30) и (32), находим

$$\rho_n(x) = \int_a^x \rho_n'(x)\,dx + \rho_n(a),$$

следовательно, $\rho_n'(x)$ играет по отношению к $\rho_n(x)$ ту же роль, что и функция $f'(x)$ по отношению к $f(x)$.

Припоминая сказанное в п. 13 гл. I, можем в дальнейшем применять к функциям $f(x)$ и $\rho_n(x)$ все формулы интегрирования по частям так, как если бы эти функции имели производные $f'(x)$ и $\rho_n'(x)$, взятые в обычном смысле. Условимся поэтому называть уравнение (31) *производным от уравнения* (30), а интеграл

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx \tag{33}$$

— *квадратичной погрешностью ряда, производного от ряда*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(x). \tag{34}$$

11. Предположим, что квадратичная погрешность ряда, производного от ряда (34), удовлетворяет условию

$$S_n^{(1)}(f) \leqslant C^2, \tag{35}$$

где C^2 есть конечное число, не зависящее от n. Пусть ξ и x – две какие-либо точки промежутка $[a, b]$. На основании сказанного в предыдущем пункте можем писать следующее тождество:

$$\rho_n^2(\xi) = \rho_n^2(x) - 2\int_\xi^x \rho_n(x)\rho_n'(x)\,dx \tag{35$_1$}$$

(ср. аналогичное тождество п. 37 гл. V). Отсюда, приняв во внимание (33), выводим

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \rho_n^2(x) + 2\sqrt{S_n^{(1)}(f)}\;\sqrt{\int_a^b \rho_n^2(x)\,dx}\ ^{*)}. \tag{36}$$

Предположим теперь, что *функция $p(x)$ не обращается в нуль ни в одной из точек промежутка* $[a, b]$. В таком случае

$$\int_a^b \rho_n^2(x)\,dx = \int_a^b \frac{p(x)\,\rho_n^2(x)}{p(x)}\,dx \leqslant \frac{S_n(f)}{p_0},$$

где, напомним, p_0 означает $\min p(x)$ в промежутке $[a, b]$. Неравенство (36) при помощи (35) приводится к такому:

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \rho_n^2(x) + \frac{2C}{\sqrt{p_0}}\sqrt{S_n(f)}.$$

---

*) Ибо $\int_\xi^x \rho_n'^2\,dx \leqslant \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx$, $\int_\xi^x \rho_n^2(x)\,dx \leqslant \int_a^b \rho_n^2(x)\,dx$.

Умножим это неравенство на $p(x)\,dx$ и интегрируем результат по x в пределах от a до b. Получим

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \frac{S_n(f)}{Q^2} + \frac{2C}{\sqrt{p_0}} \sqrt{S_n(f)} \tag{36_1}$$

— неравенство, имеющее место при любом ξ, принадлежащем промежутку $[a, b]$. Отсюда при помощи (27_1) выводим

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \frac{\eta^2}{Q^2} + \frac{2C}{\sqrt{p_0}}\, \eta = \epsilon^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 .$$

Это неравенство приводит к следующей теореме:

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Коши

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \mu\, |x' - x|, \tag{37}$$

где μ есть положительная постоянная, не зависящая от положения точек x' и x в промежутке $[a, b]$, разлагается в этом промежутке в равномерно сходящийся ряд типа Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \varphi_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x)\, dx,$$

какова бы ни была абсолютно замкнутая система ортогональных и нормальных функций $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, коль скоро квадратичная погрешность производного ряда

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b \Big[f'(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k\, \varphi_k'(x)\Big]^2 dx \leqslant C^2, \tag{38}$$

где C^2 — конечное число, не зависящее от n.

12. Рассмотрим квадратичную погрешность (38) производного ряда для фундаментальных функций $V_k(x)$. Начнем с функций первого класса.

Заменив в формулах (30) и (31) $\varphi_k(x)$ через $V_k(x)$, получаем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x) + \rho_n(x),$$

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x)\, V_k(x)\, dx, \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(x) + \rho_n'(x). \tag{39}$$

Отсюда

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'(x)\, \rho_n'(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} A_k \int_a^b V_k'(x)\, \rho_n'(x)\, dx. \tag{40}$$

Интегрируя по частям и приняв в расчет уравнение, которому удовлетворяет функция $V_k(x)$, находим

$$\int_a^b V_k'(x)\, \rho_n'(x)\, dx = \rho_n(b) V_k'(b) - \rho_n(a)\, V_k'(a) - \int_a^b \rho_n(x)\, V_k''(x)\, dx =$$

$$= \rho_n(b)\, V_k'(b) - \rho_n(a)\, V_k'(a) - \int_a^b q(x)\, \rho_n(x)\, V_k(x)\, dx,$$

ибо при всяком k от 1 до n

$$\int_a^b p(x)\,\rho_n(x)\,V_k(x)\,dx = 0\text{*)}. \tag{41}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int_a^b V_k'(x)\,\rho_n'(x)\,dx = \rho_n(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(b) -$$

$$- \rho_n(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(a) - \int_a^b q(x)\,\rho_n(x) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x)\,dx. \tag{42}$$

Воспользуемся теперь предельными условиями

$$V_k'(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \quad V_k'(a) = \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b),$$

которым удовлетворяют фундаментальные функции первого класса. Получим

$$K_n = \rho_n(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(b) - \rho_n(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(a) =$$

$$= \beta\rho_n(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(b) - \gamma\rho_n(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) +$$

$$+ \alpha \left[\rho_n(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) + \rho_n(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(b) \right], \tag{43}$$

откуда при помощи (39) выводим

$$K_n = \gamma\rho_n^2(a) - \beta\rho_n^2(b) - 2\alpha\rho_n(a)\,\rho_n(b) +$$

$$+ (\alpha f(a) + \beta f(b))\,\rho_n(b) - (\gamma f(a) - \alpha f(b))\,\rho_n(a). \tag{43$_1$}$$

Заметив далее, что, в силу того же равенства (39),

$$\int_a^b q(x)\,\rho_n(x) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b q(x)\,\rho_n(x)\,(f(x) - \rho_n(x))\,dx, \tag{43$_2$}$$

и приняв в расчет (43), (43$_1$) и (42), приводим (40) к виду

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'(x)\,\rho_n'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\rho_n(x)\,(f(x) -$$

$$- \rho_n(x))\,dx - \gamma\rho_n^2(a) + \beta\rho_n^2(b) + 2\alpha\rho_n(a)\,\rho_n(b) -$$

$$- [\alpha f(a) + \beta f(b)]\,\rho_n(b) + [\gamma f(a) - \alpha f(b)]\,\rho_n(a). \tag{44}$$

---

*) Умножив (39) на $p(x)V_k(x)\,dx$ и интегрируя результат в пределах от a до b, приходим к равенству (41), приняв в расчет выражения коэффициентов A_k и условия ортогональности и нормальности функций $V_k(x)$ (см. равенства (2) и (3) п. 1 гл. I).

13. Имеем

$$|2\alpha\rho_n(a)\rho_n(b)| \leqslant |\alpha|(\rho_n^2(a)+\rho_n^2(b)),$$

$$|(\alpha f(a)+\beta f(b))\rho_n(b)| \leqslant \frac{1}{2}([\alpha f(a)+\beta f(b)]^2+\rho_n^2[b]),$$

$$|(\gamma f(a)-\alpha f(b))\rho_n(a)| \leqslant \frac{1}{2}([\gamma f(a)-\alpha f(b)]^2+\rho_n^2(a)). \tag{45}$$

Далее,

$$|\int_a^b q(x)\rho_n(x)f(x)\,dx| \leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b \frac{q^2(x)}{p(x)}f^2(x)\,dx \int_a^b p(x)\rho_n^2(x)\,dx\right)^{1/2} = H\sqrt{S_n(f)}, \tag{46}$$

где $H^2=\int_a^b \frac{q^2(x)}{p(x)}f^2(x)\,dx$ есть конечная положительная постоянная, ибо по условию $p(x)$ не обращается в нуль в промежутке $[a,b]$.

Обозначив затем через G максимум функции $|q(x)|/p(x)$ в рассматриваемом промежутке, получаем

$$|\int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx| \leqslant GS_n(f). \tag{47}$$

Наконец, в силу неравенства Буняковского

$$|\int_a^b f'(x)\rho_n'(x)\,dx| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{S_n^{(1)}(f)}\sqrt{\int_a^b f'^2(x)\,dx} = 2\rho_0\sqrt{S_n^{(1)}(f)}. \tag{48}$$

Положительные числа ρ_0, G и H зависят лишь от данных постоянных α, β, γ и значений функций $f(x)$ и $f'(x)$ и не зависят от n.

При помощи (45), (46), (47) и (48) выводим из (44) следующее неравенство:

$$S_n^{(1)}(f) \leqslant 2\rho_0\sqrt{S_n^{(1)}(f)} + GS_n(f) + H\sqrt{S_n(f)} + \alpha_1^2\rho_n^2(a) +$$

$$+\beta_1^2\rho_n^2(b)+\gamma_1^2, \tag{49}$$

где

$$\alpha_1^2 = |\gamma|+|\alpha|+\frac{1}{2},\quad \beta_1^2=|\beta|+|\alpha|+\frac{1}{2},$$

$$\gamma_1^2=\frac{1}{2}\{[\alpha f(a)+\beta f(b)]^2+[\gamma f(a)-\alpha f(b)]^2\}$$

суть, очевидно, постоянные, не зависящие от n.

14. Обращаемся снова к неравенству (36_1) (п.11). Полагая в нем $\xi = a$ и $\xi = b$, получаем

$$\rho_n^2(a) \leqslant \alpha_2^2 S_n(f) + \beta_2^2 \sqrt{S_n(f)},$$
$$\rho_n^2(b) \leqslant \alpha_2^2 S_n(f) + \beta_2^2 \sqrt{S_n(f)}\ , \tag{49_1}$$

где положено для простоты $\alpha_2^2 = 1/Q^2$, $\beta_2^2 = 2C/\sqrt{\rho_0}$. При помощи неравенств преобразуем (49) к виду

$$S_n^{(1)}(f) \leqslant 2\rho_0 \sqrt{S_n^{(1)}(f)} + \alpha_3^2 S_n(f) + \beta_3^2 \sqrt{S_n(f)} + \gamma_1^2\ ,$$

где

$$\alpha_3^2 = G + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\alpha_2^2\ ,\quad \beta_3^2 = H + \alpha_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2$$

– конечные постоянные, не зависящие от n.

Так как, наконец, при всяком n

$$S_n(f) \leqslant \int_a^b p(x) f^2(x)\,dx = L^2, \tag{49_2}$$

то окончательно

$$S_n^{(1)}(f) \leqslant 2\rho_0 \sqrt{S_n^{(1)}(f)} + \sigma_0^2\ , \tag{50}$$

где $\sigma_0^2 = \gamma_1^2 + \alpha_3^2 L^2 + \beta_3^2 L$ есть конечное положительное число, не зависящее от n.

Неравенство (50) показывает, что $\sqrt{S_n^{(1)}(f)}$ должно заключаться между нулем и положительным корнем уравнения $x^2 - 2\rho_0 x - \sigma_0^2 = 0$, т.е. $\sqrt{S_n^{(1)}(f)} \leqslant \rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 + \sigma_0^2}$, или

$$S_n^{(1)}(f) \leqslant C^2. \tag{51}$$

Итак, для фундаментальных функций первого класса квадратичная погрешность производного ряда удовлетворяет требованиям теоремы п. 11 (неравенство (38)), *коль скоро функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши* (37).

15. Переходим к фундаментальным функциям второго класса. Равенства (40) и (42) справедливы для какой угодно системы фундаментальных функций $V_k(x)$. Так как для функций второго класса

$$V_k(b) = \rho\, V_k(a),\quad V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a) + \tau\, V_k(a), \tag{52}$$

то будем иметь при помощи таких же преобразований, как и в п. 12,

$$K_n = \left[\frac{\rho_n(b)}{\rho} - \rho_n(a)\right] \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(a) + \tau\rho_n(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) =$$

$$= \left[\frac{\rho_n(b)}{\rho} - \rho_n(a)\right] (f'(a) - \rho_n'(a)) + \tau\rho_n(b)\, [f(a) - \rho_n(a)]. \tag{53}$$

Но, в силу (39),

$$f(b)=\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(b)+\rho_n(b),$$

$$f(a)=\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a)+\rho_n(a),$$

откуда при помощи первого из равенств (52) выводим

$$\rho_n(b)-\rho\,\rho_n(a)=f(b)-\rho f(a).$$

Допустим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(b)-\rho f(a)=0.$$

При этом $\rho_n(b)-\rho\,\rho_n(a)=0$ и, следовательно, $K_n=\tau f(a)\rho_n(b)-$ $-\tau\rho_n(b)\rho_n(a)$, т.е.

$$|K_n|\leqslant \alpha_1^2\ \rho_n^2(a)+\beta_1^2\ \rho_n^2(b)+\gamma_1^2\ , \tag{54}$$

где, очевидно, $\alpha_1^2=\dfrac{|\tau|}{2}$, $\beta_1^2=|\tau|$, $\gamma_1^2=\dfrac{|\tau|}{2}f^2(a)$ суть конечные постоянные, не зависящие от n.

При помощи этого неравенства и неравенств (46), (47) и (48), которые, очевидно, справедливы для любой системы фундаментальных функций $V_k(x)$, получим и для фундаментальных функций второго класса то же самое неравенство (49) (п.13). Из этого неравенства, повторяя дословно рассуждения п.14 получим неравенство (51).

Следовательно, *для фундаментальных функций второго класса квадратичная погрешность производного ряда выполняет требование теоремы* п. 11 *если только функция* $f(x)$ *удовлетворяет неравенству Коши и предельному условию вида*

$$f(b)-\rho f(a)=0. \tag{54}$$

16. Остается рассмотреть случаи фундаментальных функций трех предельных классов (п.6 гл. VI), к которым предыдущий анализ непосредственно не применяется, ибо предполагает постоянные α,β,γ,ρ и τ конечными и ρ отличным от нуля.

Пусть $V_k(x)$ суть фундаментальные функции первого предельного класса, подчиненные условиям (равенства (14) п. 6 гл. VI)

$$V_k(a)=0,\quad V_k(b)=0. \tag{55}$$

Допустим, что функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству Коши, подчинена условиям $f(a)=0$, $f(b)=0$. В этом случае, в силу (39) и (55), $\rho_n(a)=\rho_n(b)=0$. Равенство (40) принимает следующий простой вид:

$$S_n^{(1)}(f)=\int_a^b f'(x)\,\rho_n'(x)\,dx+\int_a^b q(x)\,\rho_n(x)\,(f(x)-\rho_n(x))\,dx,$$

откуда при помощи (46), (47), (48) и (49) выводим

$$S_n^{(1)}(f)\leqslant 2\rho\sqrt{S_n^{(1)}(f)}+GS_n(f)+H\sqrt{S_n(f)}\leqslant 2\rho_0\sqrt{S_n^{(1)}(f)}+\sigma_0^2, \tag{56}$$

где $\sigma_0^2=GL^2+HL$.

Неравенство (56) показывает, что *для фундаментальных функций первого предельного класса квадратичная погрешность производного ряда выполняет требование теоремы п.*11, *если только функция* $f(x)$ *удовлетворяет неравенству Коши и предельным условиям вида*

$$f(a) = f(b) = 0. \tag{57}$$

17. В случае фундаментальных функций второго предельного класса, удовлетворяющих предельным условиям

$$V_k'(a) = \gamma V_k(a), \quad V_k(b) = 0 \tag{58}$$

(равенства (15) п.6 гл. VI), предположим, что $f(b) = 0$. При этом условии, как показывают равенства (39) и второе из (58), $\rho_n(b) = 0$ и, в силу первого из (58) и (43),

$$-K_n = \gamma \rho_n(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(a) = \gamma \rho_n(a) [f(a) - \rho_n(a)],$$

т.е.

$$|K_n| \leqslant |\gamma| \rho_n^2(a) + |\gamma \rho_n(a) f(a)| \leqslant \frac{3|\gamma|}{2} \rho_n^2(a) + \frac{|\gamma|}{2} f^2(a).$$

Отсюда при помощи первого из (49_1) выводим

$$|K_n| \leqslant \alpha_0^2 S_n(f) + \beta_0^2 \sqrt{S_n(f)} + \gamma_0^2 . \tag{59}$$

Так как, в силу (40), (42) и (43_2),

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'(x) \rho_n'(x) dx - \int_a^b q(x) \rho_n(x) (f(x) - \rho_n(x)) dx - K_n,$$

то, на основании (46), (47), (48) и (49_2),

$$S_n^{(1)}(f) < 2\rho_0 \sqrt{S_n^{(1)}(f)} + \sigma_0^2 . \tag{60}$$

Отсюда, как и в предыдущих случаях, заключаем, что *для фундаментальных функций второго предельного класса квадратичная погрешность производного ряда удовлетворяет требованиям теоремы п.* 11 (*неравенства* (38)), *если только функция* $f(x)$ *удовлетворяет неравенству Коши и предельному условию вида* $f(b) = 0$.

18. Фундаментальные функции третьего предельного класса определяются предельными условиями (равенства (16) п.6 гл. VI)

$$V_k'(b) = \beta V_k(b) . \quad V_k(a) = 0,$$

которые получаются из (58) заменой буквы γ через β, буквы a буквой b и наоборот. Поэтому стоит только во всех формулах предыдущего пункта сделать указанную замену букв, чтобы получить соответствующие формулы, относящиеся к фундаментальным функциям третьего предельного класса. При этом в конечном итоге получится, очевидно, такой результат: если функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству Коши, подчиняется еще предельному условию

$$f(a) = 0,$$

то для нее имеет место неравенство (60).

Таким образом, убеждаемся, что *и для фундаментальных функций третьего предельного класса квадратичная погрешность производного ряда удовлетворяет требованиям теоремы* п. 11 (*неравенства* (38)), *если только функция* $f(x)$, *удовлетворяющая неравенству Коши, подчиняется еще условию* $f(a) = 0$.

19. Результаты установленные в пп. 13, 14, 15, 16 и 17, приводят в связи с общей теоремой п.11 к следующим теоремам:

1. *Всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая неравенству* (37) *Коши, разлагается во всем промежутке* $[a, b]$ *в равномерно сходящийся ряд*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x) dx, \tag{61}$$

по фундаментальным функциям $V_k(x)$ *первого класса.*

2. *Всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая неравенству Коши и предельному условию*

$$f(b) - \rho f(a) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ *в равномерно сходящийся ряд вида* (61) *по фундаментальным функциям* $V_k(x)$ *второго класса.*

3. *Всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая неравенству Коши и предельным условиям*

$$f(a) = f(b) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ *в равномерно сходящийся ряд вида* (61) *по фундаментальным функциям* $V_k(x)$ *первого предельного класса.*

4. *Всякая функция* $f(x)$, *подчиненная неравенству Коши и предельному условию*

$$f(b) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ *в равномерно сходящийся ряд вида* (61) *по фундаментальным функциям* $V_k(x)$ *второго предельного класса.*

5. *Всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая неравенству Коши и предельному условию*

$$f(a) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ *в равномерно сходящийся ряд вида* (61) *по фундаментальным функциям третьего предельного класса.*

Все эти теоремы справедливы, каковы бы ни были конечные постоянные α, β, γ *и* ρ, τ *в предельных условиях, которым удовлетворяют фундаментальные функции первого и второго классов* (*причем* $\rho \neq 0$), *и каковы бы ни были функции* $p(x)$ *и* $q(x)$, *подчиненные следующим условиям:* $p(x)$ *и* $q(x)$ *непрерывны в промежутке* $[a, b]$ *и первая из них остается положительной в точках этого промежутка.*

ГЛАВА X

Исследование случая, когда все характеристические числа фундаментальных функций положительны. Доказательство сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2$. Высший предел для модулей коэффициентов ряда Фурье A_k. Высший предел для квадратичной погрешности ряда, составленного по закону Фурье из фундаментальных функций. Абсолютная замкнутость всякой полной системы фундаментальных функций, характеристические числа которых положительны. Вывод теорем о разложении произвольных функций в равномерно сходящиеся ряды типа Фурье, расположенные по фундаментальным функциям. Высший предел остаточного члена этих разложений, когда положительная характеристическая функция $p(x)$ не обращается в нуль в данном промежутке; обобщение на случай, когда функция $p(x)$ имеет конечное число нулей в этом промежутке. Распространение теорем о разложении на случай, когда непрерывная функция $p(x)$ не отрицательна

1. Исследованиями предыдущей главы вопрос о разложении произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям разрешен с достаточной общностью для каких угодно ортогональных фундаментальных функций. Задача, взятая в таком общем виде, представляет по преимуществу интерес чисто аналитический, в вопросах же математической физики приходится иметь дело исключительно с фундаментальными функциями, все характеристические числа которых неотрицательны, как это изложено в конце гл. IV. Это обстоятельство несомненно будет иметь место, как показано в той же гл. IV, если постоянные α, β, γ для функций первого класса удовлетворяют условиям

$$\beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad \alpha^2 + \beta\gamma \leqslant 0, \tag{1}$$

а постоянные ρ и τ для функций второго класса — условию

$$\rho\tau \leqslant 0 \tag{2}$$

(условия (14_1) и (15) пп.9 и 10 гл. IV), а функция $p(x)$ и $q(x)$ того дифференциального уравнения, которому удовлетворяют все фундаментальные функции, обе остаются неотрицательными в данном промежутке $[a, b]$. Все эти условия, как мы видели в гл. IV, действительно соблюдаются во всех главнейших задачах математической физики.

Само собой разумеется, что общие результаты предыдущей главы сейчас же распространяются и на только что упомянутые частные случаи, однако для этих последних можно указать другой метод решения вопроса, который приводит к новым и важным следствиям, которые не вытекают из предыдущих соображений более общего характера.

Изложению этого второго метода, специально применимого к условиям (1) и (2) и представляющего интерес не только для математической физики, но и с точки зрения чистого анализа, мы и посвятим настоящую главу.

2. Будем предполагать, как и в предыдущей главе, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши. Возьмем, как и раньше, равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x) + \rho_n(x) \tag{3}$$

и, сохраняя обозначения п.10 предыдущей главы, составим равенство

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(x) + \rho_n'(x), \tag{4}$$

которое, придерживаясь прежней терминологии, будем называть *производным от равенства* (3), а ряд правой его части – *производным от ряда правой части* (3).

Выводы, полученные при помощи приемов, изложенных в предыдущей главе, существенным образом зависели от свойства интеграла

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx, \tag{5}$$

который для краткости мы назвали *квадратичной погрешностью производного ряда*, а именно от его свойства не превосходить некоторого конечного числа, не зависящего от n. Мы вывели это свойство, общее для всех фундаментальных функций $V_k(x)$, рассматривая выражение $S_n^{(1)}(f)$, данное равенством (40) п. 12 предыдущей главы.

Мы составим теперь другое выражение для квадратичной погрешности производного ряда, рассмотрение которого приведет к решению задачи (B) о разложении произвольных функций по фундаментальным функциям $V_k(x)$, в случае соблюдения условий (1) и (2), а также и для функций всех трех предельных классов, с такими важными подробностями, которые не вытекают из формул предыдущей главы.

3. Равенство (4) дает непосредственно

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'^2(x)\,dx - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_a^b f'(x) V_k'(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \int_a^b V_k'^2(x)\,dx + 2\sum A_n A_m \int_a^b V_n'(x) V_m'(x)\,dx, \tag{6}$$

где последняя сумма распространяется на все различные целые значения n и m от 1 до n. Применяя интегрирование по частям и принимая во внимание дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют одинаково все фундаментальные функции всех классов, и условия их ортогональности и нормальности, получаем

$$\int_a^b f'(x) V_k'(x)\,dx = f(x) V_k'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) V_k''(x)\,dx$$

$$= f(x) V_k'(x)\Big|_a^b - \int_a^b q(x) f(x) V_k(x)\,dx + \lambda_k A_k,$$

$$\int_a^b V_k'^2(x)\,dx = V_k(x) V_k'(x)\Big|_a^b - \int_a^b q(x) V_k^2(x)\,dx + \lambda_k,$$

$$\int_a^b V_n'(x) V_m'(x)\,dx = V_n(x) V_m'(x)\Big|_a^b - \int_a^b q(x) V_n(x) V_m(x)\,dx.$$

Во всех этих равенствах лишь первые члены будут иметь различный вид для фундаментальных функций различных классов, остальные же будут сохранять всегда один и тот же вид. При помощи этих равенств приводим (6) к следующему виду:

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'^2(x)\,dx - 2f(x) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(x)\Big|_a^b + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k(x) V_k'(x)\Big|_a^b$$

$$+ 2\,\Sigma A_n A_m V_n(x) V_m'(x)\Big|_a^b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2 + \int_a^b q(x) \Big\{ 2 \sum_{k=1}^{n} A_k f(x) V_k(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k^2(x) - 2\Sigma A_n A_m V_n(x) V_m(x) \Big\}\,dx.$$

Заметив затем, что

$$[f(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x)]^2 = \rho_n^2(x) = f^2(x) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k f(x) V_k(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k^2(x) + 2\,\Sigma A_n A_m V_n(x) V_m(x),$$

получаем

$$S_n^{(1)}(f) = K_n + \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,(f^2(x) - \rho_n^2(x))\,dx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2. \quad (7)$$

где положено

$$K_n = -2f(x) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(x)\Big|_a^b +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k(x) V_k'(x)\Big|_a^b + 2\Sigma A_n A_m V_n(x) V_m'(x)\Big|_a^b. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) справедливы для фундаментальных функций какого угодно класса.

4. Предположим, что $V_k(x)$ суть фундаментальные функции первого класса, определяемые предельными условиями

$$V_k'(b) = \alpha V_k(a) + \beta V_k(b), \quad V_k'(a) = \gamma V_k(a) - \alpha V_k(b).$$

Пользуясь этими равенствами, приводим выражение K_n к виду

$$K_n = 2\alpha \Big\{ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k(a) V_k(b) + \Sigma A_n A_m V_m(a) V_n(b) +$$

$$+ \Sigma A_n A_m V_m(b) V_n(a) - f(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) - f(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(b) \Big\} +$$

$$+ \beta \Big\{ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k^2(b) + 2\Sigma A_n A_m V_m(b) V_n(b) - 2f(b) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(b) \Big\} -$$

$$- \gamma \Big\{ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k^2(a) + 2\Sigma A_n A_m V_m(a) V_n(a) - 2f(a) \sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) \Big\}.$$

Нетрудно видеть, что правая часть этого равенства может быть представлена в виде

$$2\alpha\Big[f(a)-\sum_{k=1}^{n}A_kV_k(a)\Big]\Big[f(b)-\sum_{k=1}^{n}A_kV_k(b)\Big]-$$

$$-2\alpha f(a)f(b)+\beta\Big[f(b)-\sum_{k=1}^{n}A_kV_k(b)\Big]^2-$$

$$-\gamma\Big[f(a)-\sum_{k=1}^{n}A_kV_k(a)\Big]^2-\beta f^2(b)+\gamma f^2(a),$$

или, при помощи (3),

$$K_n=2\alpha\rho_n(a)\rho_n(b)-2\alpha f(a)f(b)+\beta\rho_n^2(b)-\gamma\rho_n^2(a)-\beta f^2(b)+\gamma f^2(a).$$

Таким образом, для фундаментальных функций первого класса равенство (7) может быть преобразовано в такое:

$$S_n^{(1)}(f)+\int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx+\gamma\rho_n^2(a)-\beta\rho_n^2(b)-$$

$$-2\alpha\rho_n(a)\rho_n(b)=\int_a^b f'^2(x)\,dx+\int_a^b q(x)f^2(x)\,dx+$$

$$+\gamma f^2(a)-\beta f^2(b)-2\alpha f(a)f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_kA_k^2. \tag{9}$$

5. Предположим теперь, что постоянные α, β, γ удовлетворяют условиям (1) (п. 1), а функция $q(x)$ остается, как и $p(x)$, неотрицательной в промежутке $[a, b]$.

В таком случае выражения

$$M^2=\int_a^b f'^2(x)\,dx+$$

$$+\int_a^b q(x)f^2(x)\,dx+\gamma f^2(a)-\beta f^2(b)-2\alpha f(a)f(b), \tag{10}$$

$$N_n^2=S_n^{(1)}(f)+\int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx+$$

$$+\gamma\rho_n^2(a)-\beta\rho_n^2(b)-2\alpha\rho_n(a)\rho_n(b)$$

остаются всегда положительными, каковы бы ни были функции $f(x)$ и $\rho_n(x)$. Все члены ряда $\sum_{k=1}^{n}\lambda_kA_k^2$ также неотрицательны, ибо при сделанных условиях все числа λ_k неотрицательны. Из равенства (9) сейчас же вытекает, что при всяком n

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_kA_k\leqslant M^2,$$

где M^2 есть конечное число, независящее от n.

Следовательно, *если постоянные* α, β, γ *удовлетворяют условиям*

$$\beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad \alpha^2 + \beta\gamma \leqslant 0, \tag{1}$$

функции $p(x)$ *и* $q(x)$ *обе остаются неотрицательными в промежутке* $[a, b]$, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2, \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx, \tag{11}$$

есть ряд всегда сходящийся, какова бы ни была функция $f(x)$, *удовлетворяющая условию Коши.*

6. Так как ряд (11) сходится, то

$$\lambda_k A_k^2 \leqslant \epsilon^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

т.е.

$$|A_n| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Отсюда, в силу неравенства (124) гл. V (п. 39),

$$|A_n| \leqslant \frac{\epsilon}{\tau_0 n} = \sigma \frac{\epsilon}{n} \qquad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

Следовательно, *если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши, то коэффициенты* A_n *Фурье для фундаментальных функций* $V_k(x)$ *первого класса при соблюдении условий предыдущей теоремы убывают с возрастанием их значка n не медленнее, чем* $1/n$, *т.е. при бесконечно большом n суть бесконечно малые порядка не ниже, чем* $1/n$.

7. Выведем теперь одно неравенство, необходимое для дальнейшего. Обозначим через x, y; ξ, η четыре переменные аргумента. Нетрудно убедиться непосредственным вычислением в справедливости следующего тождества:

$$[\gamma x\xi - \beta y\eta - \alpha(y\xi + x\eta)]^2 - [\gamma x^2 - \beta y^2 - 2\alpha xy] \times$$
$$\times [\gamma\xi^2 - \beta\eta^2 - 2\alpha\xi\eta] = (\alpha^2 + \beta\gamma)(y\xi - x\eta)^2.$$

Отсюда следует, что при соблюдении условий (1) (п. 1)

$$[\gamma x\xi - \beta y\eta - \alpha(y\xi + x\eta)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant [\gamma x^2 - \beta y^2 - 2\alpha xy]\ [\gamma\xi^2 - \beta\eta^2 - 2\alpha\xi\eta] \tag{12}$$

при всяких вещественных значениях аргументов x, y, ξ и η.

8. Применим метод Шварца – Пуанкаре к определению функции $V(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$V''(x, \lambda) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x, \lambda) + p(x)\, \rho_n(x) = 0 \tag{13}$$

и предельным условиям

$$\begin{aligned} &V'(b) - \alpha V(a) - \beta V(b) = 0,\\ &V'(a) - \gamma V(a) + \alpha V(b) = 0. \end{aligned} \tag{13$_1$}$$

Полагая

$$V(x, \lambda) = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \ldots + \lambda^k v_k(x) + \ldots, \tag{13$_2$}$$

получим следующие уравнения для определения $v_0(x)$:

$$v_0''(x) - q(x)\,v_0(x) + p(x)\,\rho_n(x) = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &v_0'(b) - \alpha v_0(a) - \beta v_0(b) = 0,\\ &v_0'(a) - \gamma v_0(a) + \alpha v_0(b) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

(ср. гл. V, п. 11).

Основываясь на исследованиях гл. V и VI, можем утверждать, что, каковы бы ни были данные функции $p(x)$ и $q(x)$ и конечные постоянные α, β, γ, существует единственная определенная функция $v_0(x)$, удовлетворяющая уравнению (14) и предельным условиям (15).

Заметив, что, в силу уравнения (14),

$$\int_a^b v_0'^2(x)\,dx = v_0(x)\,v_0'(x)\Big|_a^b - \int_a^b q(x)\,v_0^2(x)\,dx + \int_a^b p(x)\,v_0(x)\,\rho_n(x)\,dx,$$

получим, приняв в расчет (15),

$$\begin{aligned} &\int_a^b v_0'^2(x)\,dx + \gamma v_0^2(a) - \beta v_0^2(b) - 2\alpha v_0(a)\,v_0(b) +\\ &+ \int_a^b q(x)\,v_0^2(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,v_0(x)\,\rho_n(x)\,dx. \end{aligned} \tag{16$_1$}$$

Так как α, β и γ удовлетворяют неравенствам (1), а функция $q(x)$ предполагается неотрицательной, то левая часть этого равенства положительна. Поэтому, воспользовавшись неравенством Буняковского, можем писать

$$\begin{aligned} &\int_a^b r_0'^2(x)\,dx + \gamma v_0^2(a) - \beta v_0^2(b) - 2\alpha r_0(a)\,v_0(b) +\\ &+ \int_a^b q(x)\,v_0^2(x)\,dx \leqslant \sqrt{W_0}\,\sqrt{S_n(f)}, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$S_n(f) = W_{-1} = \int_a^b p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx,$$

$$W_0 = \int_a^b p(x)\,v_0^2(x)\,dx$$

суть два первых интеграла Шварца.

9. Преобразуем теперь интеграл $S_n(f)$ при помощи уравнения (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \int_a^b p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx = \int_a^b \rho_n(x)\,[q(x)\,v_0(x) - v_0''(x)]\,dx =\\ &= -\rho_n(x)\,v_0'(x)\Big|_a^b + \int_a^b v_0'(x)\,\rho_n'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,v_0(x)\,\rho_n(x)\,dx, \end{aligned} \tag{18}$$

что возможно в предположении, что функция $f(x)$, а следовательно и $\rho_n(x)$, удовлетворяет условию Коши. Отсюда, приняв в расчет (15), получаем

$$S_n(f) = \int_a^b v_0'(x)\,\rho_n'(x)\,dx +$$

$$+ \int_a q(x)\,v_0(x)\,\rho_n(x)\,dx + \gamma v_0(a)\,\rho_n(a) -$$

$$- \beta v_0(b)\,\rho_n(b) - \alpha[v_0(a)\,\rho_n(b) + v_0(b)\,\rho_n(a)]\,. \tag{18$_1$}$$

Воспользуемся неравенством (12), положив в нем

$$x = v_0(a), \qquad y = v_0(b),$$

$$\xi = \rho_n(a), \qquad \eta = \rho_n(b).$$

Получим

$$H_n^2 = (\gamma v_0(a)\,\rho_n(a) - \beta v_0(b)\,\rho_n(b) - \alpha[v_0(a)\,\rho_n(b) +$$

$$+ v_0(b)\,\rho_n(a)])^2 \leqslant [\gamma v_0^2(a) - \beta v_0^2(b) - 2\alpha v_0(a)\,v_0(b)] \times$$

$$\times [\gamma\rho_n^2(a) - \beta\rho_n^2(b) - 2\alpha\rho_n(a)\,\rho_n(b)]\,. \tag{19}$$

С другой стороны, так как интеграл правой части равенства (18$_1$) есть предел суммы

$$\Sigma\left\{ v_0'(x_k)\,\rho_n'(x_k) + v_0(x_k)\sqrt{q(x_k)}\,\rho_n(x_k)\,\sqrt{q(x_k)}\right\}\Delta x_k,$$

то, применив к этой сумме неравенство Коши*) и перейдя затем к пределу, получим

$$G_n^2 = \left(\int_a^b v_0'(x)\,\rho_n'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,v_0(x)\,\rho_n(x)\,dx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b v_0'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,v_0^2(x)\,dx\right) \times$$

$$\times \left(\int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\rho_n^2(x)\,dx\right). \tag{20}$$

Положим

$$A = \gamma v_0^2(a) - \beta v_0^2(b) - 2\alpha v_0(a)\,v_0(b),$$

$$A_1 = \int_a^b v_0'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,v_0^2(x)\,dx,$$

$$B = \gamma\rho_n^2(a) - \beta\rho_n^2(b) - 2\alpha\rho_n(a)\,\rho_n(b),$$

$$B_1 = \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\rho_n^2(x)\,dx.$$

Все эти величины при сделанных предположениях относительно α, β, γ и $q(x)$, очевидно, неотрицательны.

Из равенства (18$_1$) при помощи неравенств (19) и (20) выводим

$$S_n^2(f) \leqslant (\sqrt{A}\,\sqrt{B} + \sqrt{A_1}\,\sqrt{B_1})^2,$$

*) Неравенство (23) гл. I, п. 5.

а отсюда при помощи неравенства Коши

$$S_n^2(f) \leqslant (A + A_1)(B + B_1) = \{\gamma v_0^2(a) - \beta v_0^2(b) - 2\alpha v_0(a) v_0(b) +$$

$$+ \int_a^b v_0'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) v_0^2(x)\,dx\} \{\gamma \rho_n^2(a) - \beta\rho_n^2(b) - 2\alpha\rho_n(a)\rho_n(b) +$$

$$+ \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx\}. \tag{21}$$

10. Обращаемся теперь к равенству (9) п. 4. Приняв в расчет обозначения (10), выводим из него

$$N_n^2 \leqslant M^2. \tag{22}$$

С другой стороны, неравенство (21) при помощи (17) доставляет

$$S_n^2(f) \leqslant N_n^2 \sqrt{W_0}\sqrt{S_n(f)},$$

откуда на основании (22) следует, что $S_n^2(f) \leqslant M^2 \sqrt{W_0}\sqrt{S_n(f)}$, или

$$S_n(f) \leqslant M^2 \frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{S_n(f)}} = M^2 \frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{W_{-1}}}. \tag{22_1}$$

Это существенно важное для теории неравенство имеет место для всякой данной функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству Коши, и для всякой полной системы фундаментальных функций, принадлежащей к той их группе, которая характеризуется следующими условиями: постоянные α, β, γ предельных условий первого класса удовлетворяют неравенствам

$$\beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad \alpha^2 + \beta\gamma \leqslant 0, \tag{1_1}$$

а функции $p(x)$ и $q(x)$ основного дифференциального уравнения всех фундаментальных функций

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)] V_k(x) = 0$$

обе неотрицательны в промежутке $[a, b]$.

11. Возвращаемся к уравнению (13) (п. 8). Мы знаем, что интеграл этого уравнения есть голоморфная функция параметра λ внутри круга радиуса

$$\rho = \lim_{k\to\infty} (\sqrt{W_{k-1}} / \sqrt{W_k}),$$

где W_k суть интегралы Шварца, соответствующие функции

$$p(x)\rho_n(x) \tag{23}$$

уравнения (13), которые удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{S_n(f)}} \leqslant \frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{W_0}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k-1}}} \leqslant \ldots$$

(гл. V, п. 23, и неравенства (43) п. 14). Отсюда

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{W_{k-1}}}{\sqrt{W_k}} \leqslant \frac{\sqrt{S_n(f)}}{\sqrt{W_0}}.$$

Но мы уже заметили, что функция (23) удовлетворяет n неравенствам (41) (п. 12 гл. IX), где $V_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) суть по порядку взятые функции из их полной системы. Поэтому, на основании теоремы п. 36 и неравенства (124) п. 39 гл. V

$$\rho \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \tau_0^2 n^2$$

(см. п. 3 предыдущей главы). Следовательно,

$$\frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{S_n(f)}} \leqslant \frac{1}{\tau_0^2 n^2}.$$

Сопоставляя это неравенство в (22_1), получаем окончательно

$$S_n(f) \leqslant \frac{M^2}{\tau_0^2 n^2} = \frac{N^2}{n^2}, \tag{24}$$

где N^2 есть конечное число, независящее от n.

Таким образом, *квадратичная погрешность при приближенном вычислении всякой функции $f(x)$, подчиненной единственному условию удовлетворять неравенству Коши, при помощи формулы* (3), *убывает обратно пропорциональному квадрату числа n членов суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x),$$

коль скоро фундаментальные функции $V_k(x)$ принадлежат рассматриваемой нами группе функций первого класса (см. п. 10).

12. Неравенство (24) показывает также, что всякая полная система фундаментальных функций первого класса, принадлежащая к только что упомянутой группе, есть система замкнутая по отношению ко всякой функции $f(x)$, подчиненной условию Коши, а следовательно, и подавно замкнута по отношению ко всякой функции, имеющей первую производную, интегрируемую в промежутке $[a, b]$. Отсюда на основании общей теоремы п. 9 гл. 11 выводим теорему:

Всякая полная система фундаментальных функций первого класса, когда постоянные α, β, γ удовлетворяют неравенствам (1_1), а функции $p(x)$ и $q(x)$ остаются обе неотрицательными в промежутке $[a, b]$, есть система абсолютно замкнутая.

Эта теорема представляет собой, очевидно, частный случай общей теоремы, доказанной в п. 9 предыдущей главы, но метод доказательства, изложенный здесь, имеет то преимущество, что не только устанавливает замкнутость рассматриваемых нами в этой главе фундаментальных функций, но дает в то же время (для случая, когда $f(x)$ удовлетворяет условию Коши) и высший предел квадратичной погрешности, характеризующий, так сказать, порядок замкнутости, за который можно принять величину $1/n^2$.

Этот результат, важный для дальнейших исследований, не может быть получен при помощи метода, изложенного в предыдущей главе, который устанавливает только, что $S_n(f)$ стремится к нулю при беспредельном возрастании значка n, но не определяет порядка малости этой величины по отношению к n.

13. Применим тот же прием к фундаментальным функциям второго класса, определяемым предельными условиями вида

$$V_k(b) = \rho V_k(a),$$
$$V_k'(b) = \frac{1}{\rho} V_k'(a) + \tau V_k(a), \tag{25}$$

где, напомним, ρ есть конечная, не равная нулю постоянная. При помощи этих соотношений выводим из (8) (п. 3)

$$K_n = \rho\tau\left\{-2\frac{f(b)}{\rho}\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k^2(a) +\right.$$

$$\left.+ 2\Sigma A_n A_m V_m(a) V_n(a)\right\} + 2\left(f(a) - \frac{f(b)}{\rho}\right)\sum_{k=1}^{n} A_k V_k'(a). \tag{26}$$

Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(b) = \rho f(a). \tag{27}$$

Заметив, что

$$-2f(a)\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 V_k^2(a) +$$

$$+ 2\Sigma A_n A_m V_m(a) V_n(a) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(a) - f(a)\right)^2 - f^2(a) = \rho_n^2(a) - f^2(a),$$

и приняв в расчет (27), выводим из (26)

$$K_n = \rho\tau(\rho_n^2(a) - f^2(a)).$$

При этом равенство (7) (п. 3) обращается в такое:

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx -$$

$$- \int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx + \rho\tau(\rho_n^2(a) - f^2(a)) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2.$$

Положив

$$T_n = S_n^{(1)}(f) + \int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx - \rho\tau\rho_n^2(a), \tag{28}$$

приводим предыдущее равенство к виду

$$T_n = \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx - \rho\tau f^2(a) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2. \tag{29}$$

Допустим, что

$$\rho\tau \leqslant 0. \tag{30}$$

В таком случае, как показывает равенство (28),

$$T_n > 0^{*}).$$

Положим

$$0 \leq \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx - \rho\tau f^2(a) = M^2. \tag{30$_1$}$$

Очевидно, M^2 есть конечное положительное число, не зависящее от n. При сделанных предположениях равенство (29) приводит к неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2 \leq M^2,$$

так как все числа λ_k положительны.

Это неравенство показывает, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2$ *сходится для всякой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей условию Коши, коль скоро числа* ρ *и* τ *уравнений* (25) *подчинены неравенству*

$$\rho\tau \leq 0, \tag{30}$$

а функция $f(x)$ – *предельному условию вида*

$$f(b) - \rho f(a) = 0. \tag{31}$$

14. Будем теперь искать интеграл уравнения (13) в виде ряда (13$_2$), заменив предельные условия (13$_1$) п. 8 следующими:

$$V'(b) = \rho V(a), \quad V'(b) = \frac{1}{\rho} V'(a) + \tau V(a).$$

Для определения функции $v_0(x)$ получим в рассматриваемом случае то же уравнение (14) п. 8, а предельные условия (15) заменятся такими:

$$v_0(b) = \rho v_0(a), \quad v_0'(b) = \frac{1}{\rho} v_0'(a) + \tau v_0(a).$$

При этом из уравнения (16) выводим

$$0 \leq \int_a^b v_0'^2(x)\,dx - \rho\tau v_0^2(a) + \int_a^b q(x) v_0^2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b p(x) v_0(x) \rho_n(x)\,dx \leq \sqrt{W_0}\,\sqrt{S_n(f)}. \tag{32}$$

С другой стороны, формула (18), справедливая для всяких фундаментальных функций, приводится в рассматриваемом теперь случае к виду **)

$$S_n(f) = -\rho\tau\rho_n(a) v_0(a) +$$

$$+ \int_a^b v_0'(x) \rho_n'(x)\,dx + \int_a^b q(x) v_0(x) \rho_n(x)\,dx.$$

---

*) Функция $q(x)$ предполагается неотрицательной в промежутке $[a, b]$.

**) Так как функция $\rho_n(x)$ удовлетворяет, в силу (25) и (31), условию $\rho_n(b) - \rho\rho_n(a) = 0$.

Отсюда при условии (30) выводим

$$S_n^2(f) \leqslant \left(-\rho\tau\rho_n^2(a) + \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\rho_n^2(x)\,dx \right) \times$$

$$\times \left(-\rho\tau v_0^2(a) + \int_a^b v_0'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,v_0^2(a)\,dx \right).$$

Заметив, что, в силу (28), (29) и (30_1),

$$-\rho\tau\rho_n^2(a) + \int_a^b \rho_n'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\rho_n^2(x)\,dx \leqslant M^2,$$

и приняв в расчет (32), получаем

$$S_n(f) \leqslant M^2 \frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{S_n(f)}} \tag{33}$$

– неравенство того же вида, как и для фундаментальных функций первого класса (неравенство (22_1) п. 10).

Из этого неравенства, повторив дословно рассуждения п. 10, выводим следующее:

$$S_n(f) \leqslant \frac{M^2}{\tau_0^2 n^2} = \frac{N^2}{n^2}, \tag{34}$$

где N^2 есть число, независящее от n. Отсюда заключаем, что *любая полная система фундаментальных функций второго класса рассматриваемой нами группы**) *замкнута по отношению ко всякой функции* $f(x)$, *имеющей первую производную, интегрируемую в данном промежутке* $[a, b]$, *и удовлетворяющей условию* (31).

15. Легко освободиться от этого последнего ограничения. Пусть $f(x)$ есть какая угодно функция с интегрируемой в промежутке $[a, b]$ первой производной, но не удовлетворяющая условию (31). Возьмем полином

$$F(x) = \alpha(x-a)^2, \tag{35}$$

где α есть некоторая постоянная. Определим α при помощи условия

$$F(a+\epsilon) = f(a+\epsilon),$$

где ϵ есть некоторое наперед заданное положительное число. Получаем

$$\alpha\epsilon^2 = f(a+\epsilon), \tag{36}$$

причем для значений x в промежутке от a до $a+\epsilon$ будем иметь

$$\max |F(x)| \leqslant |\alpha|\,\epsilon^2 \leqslant M_0, \tag{36_1}$$

где под M можем подразумевать $\max |f(x)|$ в промежутке $[a,b]$.

Точно так же, взяв полином

$$F_1(x) = \alpha_1(b-x)^2 \tag{37}$$

и определив постоянную α_1 из условия $F_1(b-\epsilon) = f(b-\epsilon)$, получим

$$\alpha_1\epsilon^2 = f(b-\epsilon), \tag{37_1}$$

*) Когда $p(x) > 0$, $p(x) \neq 0$, $q(x) > 0$, $\rho\tau < 0$.

причем для промежутка от $b-\epsilon$ до b будем иметь

$$\max |F_1(x)| \leqslant |\alpha_1| \epsilon^2 \leqslant M_0. \tag{37_2}$$

Составим теперь функцию $\varphi(x)$, подчинив ее следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi(x)=F(x) && \text{при} && a \leqslant x \leqslant a+\epsilon, \\ &\varphi(x)=f(x) && \text{при} && a+\epsilon \leqslant x \leqslant b-\epsilon, \\ &\varphi(x)=F_1(x) && \text{при} && b-\epsilon \leqslant x \leqslant b. \end{aligned} \tag{38}$$

Функция $\varphi(x)$, очевидно, удовлетворяет условию

$$\varphi(b)-\rho\varphi(a)=0, \tag{39}$$

ибо

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0, \tag{39_1}$$

непрерывна и имеет интегрируемую в промежутке $[a, b]$ первую производную.

16. Так как функция $\varphi(x)$, определяемая условиями (38), удовлетворяет уравнению (39), то, как указано в предыдущем пункте,

$$S_n(\varphi) \leqslant \frac{M^2}{\tau_0^2 n^2}, \tag{40}$$

где, на основании (30_1) и (39_1),

$$M^2 = \int_a^b \varphi'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\varphi^2(x)\,dx.$$

Приняв в расчет (38), получаем

$$\int_a^b \varphi'^2(x)\,dx = \int_a^{a+\epsilon} F'^2(x)\,dx +$$

$$+\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f'^2(x)\,dx + \int_{b-\epsilon}^{b} F_1'^2(x)\,dx.$$

Так как

$$F'(x)=2\alpha(x-a), \quad F_1'(x)=-2\alpha_1(b-x),$$

то, в силу (36_1) и (37_2),

$$F'^2(x) \leqslant \frac{4\alpha^2\epsilon^4}{\epsilon^2} \leqslant \frac{4M_0^2}{\epsilon^2}, \quad F_1'^2(x) \leqslant \frac{4\alpha_1^2\epsilon^4}{\epsilon^2} \leqslant \frac{4M_0^2}{\epsilon^2}$$

и

$$\int_a^{a+\epsilon} F'^2(x)\,dx + \int_{b-\epsilon}^{b} F_1'^2(x)\,dx \leqslant \frac{8M_0^2}{\epsilon}.$$

Обозначив через M_1 max модуля $f'(x)$ в промежутке $[a, b]$, получим

$$\int_a^b \varphi'^2(x)\,dx \leqslant \frac{8M_0^2}{\epsilon} + M_1^2(b-a).$$

Следовательно,

$$M^2 \leqslant \frac{8M_0^2}{\epsilon} + q_0(b-a)M_0^2 + M_1^2(b-a),$$

ибо $|\varphi(x)| \leqslant M_0$ в промежутке $[a, b]$. Таким образом, можем написать

$$M^2 \leqslant \frac{\tau_0^2 A^2}{\epsilon} + \tau_0^2 B^2,$$

где A^2 и B^2 – две конечные положительные постоянные, и, в силу (40),

$$S_n(\varphi) \leqslant \frac{A^2}{\epsilon n^2} + \frac{B^2}{n^2}. \tag{41}$$

17. Применяем теперь неравенство (27) п. 9 предыдущей главы к рассматриваемому случаю. Имеем, в силу (36_1), (37_2) и (38),

$$\int_a^b p(x)\,(f(x) - \varphi(x))^2\,dx \leqslant 4M^2 P_0 \epsilon. \tag{42}$$

Из неравенства (27) следует, что

$$S_n(f) \leqslant 2S_n(\varphi) + 2\int_a^b p(x)\,(f(x) - \varphi(x))^2\,dx,$$

а отсюда, при помощи (41) и (42),

$$S_n(f) \leqslant \frac{2A^2}{\epsilon n^2} + 8M_0^2 P_0 \epsilon + \frac{2B^2}{n^2}.$$

Это неравенство имеет место при всяком n и при произвольно заданном ϵ. Положив $\epsilon = 1/n$, получим

$$S_n(f) < \frac{K^2}{n}, \tag{43}$$

где K^2 есть положительная постоянная, не зависящая от n.

Это неравенство показывает, что рассматриваемые нами фундаментальные функции второго класса образуют замкнутую систему по отношению ко всякой функции $f(x)$, имеющей интегрируемую производную в промежутке $[a, b]$. Отсюда, так же как и в п. 12, выводим следующую теорему:

Всякая полная система фундаментальных функций второго класса в случае, когда функции $p(x)$ и $q(x)$ и числа ρ и τ удовлетворяют условиям

$$p(x) \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0 \quad \text{в промежутке } [a, b], \qquad \rho\tau \leqslant 0, \tag{44}$$

есть система абсолютно замкнутая.

18. Полученный результат не представляет ничего нового и является частным случаем общей теоремы, доказанной в предыдущей главе. Но неравенства (43) и в особенности (34), которые в рассматриваемом случае приводят к только что указанной теореме, не могут быть выведены из общих исследований предыдущей главы.

Именно, имея в виду установить неравенство (34), мы и изложили особый прием доказательства теоремы предыдущего пункта. Важное значение этого неравенства выяснится в последующих пунктах.

19. Рассмотрим, наконец, фундаментальные функции трех предельных классов, соответствующие функциям $p(x)$ и $q(x)$, подчиненным условиям (44).

Очевидно, что для фундаментальных функций первого предельного класса, удовлетворяющих условиям

$$V_k(a) = 0, \quad V_k(b) = 0 \tag{45}$$

(см. равенства (14) п. 6 гл. VI, условие

$$V_k(x)V_k'(x)\Big|_a^b \leqslant 0$$

(см. п. 16 гл. IV) всегда соблюдается. Следовательно, все характеристические числа λ_k этих функций при выполнении условий (44) положительны.

Для фундаментальных функций второго и третьего предельных классов в силу (15) и (16) гл. VI, п. 6, получаем

$$V_k(x)V_k'(x)\Big|_a^b = -\gamma V_k^2(a) \leqslant 0,$$

если $\gamma \geqslant 0$, и

$$V_k(x)V_k'(x)\Big|_a^b = \beta V_k^2(b) \leqslant 0,$$

если $\beta \leqslant 0$. Поэтому все характеристические числа фундаментальных функций первого предельного класса при соблюдении условий (44) всегда положительны.

Характеристические числа функций второго предельного класса при тех же условиях положительны, если $\gamma \geqslant 0$, и, наконец, для фундаментальных функций третьего предельного класса характеристические числа положительны, если $\beta \leqslant 0$.

20. Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$f(a) = f(b) = 0, \tag{46}$$

и применим формулы (7) и (8) (п. 3) к фундаментальным функциям первого предельного класса. Получаем, в силу (45),

$$S_n^{(1)}(f) = \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x)(f^2(x) - \rho_n^2(x))\,dx - \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k^2,$$

т.е.

$$S_n^{(1)}(f) + \int_a^b q(x)\,\rho_n^2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k^2.$$

Отсюда следует, что *для фундаментальных функций первого предельного класса* (при условии $q(x) \geqslant 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2 \leqslant M^2,$$

где

$$M^2 = \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx$$

есть конечная положительная постоянная, не зависящая от n, коль скоро функция $f(x)$, подчиненная условию Коши, удовлетворяет равенствам (46).

Заметив, что формула (46_1) получается из (9), если положить в последней $\alpha = \beta = \gamma = 0$, легко понять, что все рассуждения пп. 4–13 применяются с соответствующими упрощениями и к рассматриваемому случаю и приводят к следующему заключению:

Для всякой полной системы фундаментальных функций первого предельного класса имеет место неравенство вида

$$S_n(f) \leqslant N^3 / n^2, \tag{47}$$

где N^2 есть положительная, не зависящая от n постоянная, коль скоро функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству Коши и условиям (46).

21. Для фундаментальных функций второго предельного класса, подчиненных условиям (15) гл. VI,

$$V_k(b) = 0, \quad V_k'(a) = \gamma V_k(a),$$

равенства (7) и (8) дают

$$S_n^{(1)}(f) + \int_a^b q(x)\,\rho_n^2(x)\,dx + \gamma\rho_n^2(a) =$$

$$= \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx + \gamma f^2(a) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2,$$

если предположить, что

$$f(b) = 0. \tag{48}$$

Предыдущее равенство отличается от (9) п. 4 лишь отсутствием членов, зависящих от постоянных множителей α и β.

При условии

$$\gamma \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0 \tag{49}$$

оно приводит к неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2 \leqslant M^2, \tag{50}$$

где

$$M^2 = \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx + \gamma f^2(a) \tag{50_1}$$

есть конечная положительная постоянная, не зависящая от n.

Все дальнейшие рассуждения пп. 4–13, очевидно, приложимы и к рассматриваемому теперь случаю и приводят к следующему результату:

Если в предельных условиях, характеризующих фундаментальные функции второго предельного класса, постоянная γ неотрицательна и $q(x) \geqslant 0$, то

$$S_n(f) \leqslant N^3 / n^2, \tag{47}$$

какова бы ни была функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Коши и равенству (48).

22. Наконец, в случае фундаментальных функций третьего предельного класса, подчиненных условиям (16) гл. VI

$$V_k(a) = 0, \quad V_k'(b) = \beta V_k(b),$$

из (7) и (8) выводим

$$S_n^{(1)}(f) + \int_a^b q(x)\rho_n^2(x)\,dx - \beta\rho_n^2(b) =$$

$$= \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx - \beta f^2(b) - \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k^2, \tag{50$_2$}$$

если предположить, что

$$f(a) = 0. \tag{51}$$

Отсюда следует, что если

$$\beta \leqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0, \tag{52}$$

то

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k^2 \leqslant M^2,$$

где

$$M^2 = \int_a^b f'^2(x)\,dx + \int_a^b q(x) f^2(x)\,dx - \beta f^2(b)$$

есть конечная положительная постоянная, не зависящая от n.

Все рассуждения пп. 4–13 также приложимы и к рассматриваемому случаю и приводят к следующему результату:

Если в предельных условиях, характеризующих фундаментальные функции третьего предельного класса, постоянная β неположительна и $q(x) \geqslant 0$, то

$$S_n(f) \leqslant N^3 / n^2, \tag{47}$$

какова бы ни была функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Коши и равенству (51).

23. При помощи неравенства (47), заметим между прочим, легко выводится приемами, аналогичными изложенному в пп. 15–18, следующая теорема:

Всякая полная система фундаментальных функций каждого из трех предельных классов, характеристические числа которых положительны, есть система абсолютно замкнутая.

Теорема эта является, очевидно, частным случаем общей теоремы, доказанной иным приемом в предыдущей главе.

24. Будем теперь рассматривать совместно такие полные системы фундаментальных функций пяти различных классов, все характеристические числа которых неотрицательны, т.е. будем всегда предполагать, что

$$p(x) \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0$$

и что постоянные α, β, γ, ρ, τ для каждого из пяти рассматриваемых классов удовлетворяют соответственно условиям (1) и (2) п. 1.

Под функцией $f(x)$ будем подразумевать функцию, удовлетворяющую условию Коши во всех пяти случаях и соответственно предельному условию (31), если речь идет о фундаментальных функциях второго класса, условиям (46), когда речь идет о фундаментальных функциях первого предельного класса, условию (48) для фундаментальных функций второго и условию (51) для функций третьего предельного класса.

Для всякой такой системы фундаментальных функций и соответствующей функции $f(x)$, подчиненной только что указанным условиям, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, |A_k|$ *будет сходящимся, причем при всяком n*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k^2 \leqslant M^2, \tag{53}$$

а квадратичная погрешность $S_n(f)$ будет удовлетворять одному и тому же неравенству вида

$$S_n(f) \leqslant N^2/n^2. \tag{54}$$

Кроме того, из формул (9), (28) и (29), (46_1), (47_1) и (50_2) будет следовать, что во *всех рассматриваемых случаях*

$$S_n^{(1)}(f) \leqslant M^2. \tag{55}$$

25. Воспользуемся снова тождеством (36) п. 11 гл. IX, которое дает

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \rho_n^2(x) + 2\sqrt{\int_\xi^x \rho_n^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_\xi^x \rho_n'^2(x)\,dx}\ ^{*)}. \tag{56}$$

Предположим, что функция $p(x)$, оставаясь неотрицательной в $[a, b]$ обращается в нуль в некотором числе m точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Исключим из всей совокупности точек, принадлежащих промежутку $[a, b]$, все точки промежутков

$$[\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta], \ [\alpha_2 - \delta, \alpha_2 + \delta], \ \ldots, \ [\alpha_m - \delta, \alpha_m + \delta],$$

где δ есть некоторое наперед заданное достаточно малое число. Во всех точках оставшихся промежутков

$$[a, \alpha_1 - \delta], \ [\alpha_1 + \delta, \alpha_2 - \delta], \ \ldots, \ [\alpha_m + \delta, b] \tag{57}$$

функция $p(x)$ нигде не обращается в нуль и в каждом из них имеет определенный минимум не равный нулю. Возьмем какой-либо из этих промежутков

$$[\alpha_k + \delta, \alpha_{k+1} - \delta]. \tag{58}$$

*) Под ξ и x подразумеваем две какие-либо точки промежутка $[a, b]$.

Если условимся считать, что

$$\alpha_0 + \delta = a, \quad \alpha_{m+1} - \delta = b,$$

то, давая в интервале (58) числу k все значения от 0 до m, исчерпаем все по порядку интервалы (57). Обозначим через p_k $\min p(x)$ в промежутке (58), через P_0 — наименьшее из всех значений p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$).

Предположим, что ξ и x суть две точки, принадлежащие промежутку (58). Можем писать

$$\int_\xi^x \rho_n^2(x)\,dx = \int_\xi^x \frac{1}{p(x)}\,p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p_k}\int_\xi^x p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{p_k}\,S_n(f).$$

Кроме того, очевидно,

$$\int_\xi^x \rho_n'^2(x)\,dx \leqslant S_n^{(1)}(f) \leqslant M^2.$$

Неравенство (56), примененное к любой паре точек ξ и x, принадлежащих промежутку (58), дает

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \rho_n^2(x) + \frac{2M}{\sqrt{P_k}}\sqrt{S_n(f)}.$$

Умножив это неравенство на $p(x)dx$ и проинтегрировав результат по всему промежутку (58), получим

$$\rho_n^2(\xi)\int_{\alpha_k+\delta}^{\alpha_{k+1}-\delta} p(x)\,dx \leqslant \int_{\alpha_k+\delta}^{\alpha_{k+1}-\delta} p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx +$$

$$+\frac{2M}{\sqrt{P_k}}\sqrt{S_n(f)}\int_{\alpha_k+\delta}^{\alpha_{k+1}-\delta} p(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \frac{S_n(f)}{K} + \frac{2M}{\sqrt{P_k}}\sqrt{S_n(f)},$$

где положено $K = \int_{\alpha_k+\delta}^{\alpha_{k+1}-\delta} p(x)\,dx$. Но, очевидно, $K \geqslant p_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \geqslant p_k\alpha$, где α означает длину наименьшего из промежутков $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ не равно по предположению нулю ни при каком k. Поэтому для любой точки ξ промежутка (58)

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \frac{S_n(f)}{\alpha p_k} + \frac{2M}{\sqrt{p_k}}\sqrt{S_n(f)}$$

и, следовательно,

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \frac{S_n(f)}{\alpha P_0} + \frac{2M}{\sqrt{P_0}}\sqrt{S_n(f)}. \tag{59}$$

Это неравенство справедливо для любой точки ξ любого из промежутков (57), т.е. для любой точки совокупности E точек, образуемой промежутками (57), общая длина которых равна $b - a - 2m\delta$. Предыдущее неравенство при помощи (47) приводится к такому:

$$\rho_n^2(\xi) \leqslant \frac{N}{n\sqrt{P_0}}\left(\frac{N}{n\alpha\sqrt{P_0}} + 2M\right) = \frac{L^2}{n}, \qquad (59_1)$$

где под L^2 можно, очевидно, подразумевать, положительное число, не зависящее от n, ибо

$$\frac{N}{\sqrt{P_0}}\left(\frac{N}{n\alpha\sqrt{P_0}} + 2M\right) \leqslant \frac{N}{\sqrt{P_0}}\left(\frac{N}{\alpha\sqrt{P_0}} + 2M\right)$$

при всяком $n \geqslant 1$.

Неравенство (59_1) дает

$$|\rho_n(\xi)| \leqslant L/\sqrt{n} \qquad (60)$$

для всякой точки ξ совокупности E. Отсюда заключаем, что *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx,$$

сходится равномерно во всех точках совокупности E для всех фундаментальных функций рассматриваемого нами типа, коль скоро функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству Коши и соответствующим условиям п. 24.

Сумма этого ряда равна $f(x)$ в любой точке x совокупности E, и погрешность приближенного вычисления этой функции при помощи суммы $\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x)$ для всех точек совокупности E численно меньше, чем $L/\sqrt{n}$.

26. Для задач математической физики наибольший интерес представляет, как упоминалось выше, случай, когда $p(x)$ не обращается в нуль ни в одной из точек промежутка $[a, b]$. В этом случае неравенство (59) справедливо для любой точки промежутка $[a, b]$, причем под P_0 следует подразумевать наименьшее значение $p(x)$ в этом промежутке. Неравенство (60), следовательно, имеет место для любой точки промежутка $[a, b]$ и приводит к следующей теореме:

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству Коши и соответствующим предельным условиям п. 24, *разлагается во всем промежутке $[a, b]$ в равномерно сходящийся ряд вида*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x),$$

причем численная величина погрешности приближенного вычисления функции $f(x)$ при помощи суммы $\sum_{k=1}^{n} A_k V_k(x)$ не превосходит числа $L/\sqrt{n}$, где L есть конечное положительное число, не зависящее от n.

Эта теорема справедлива для всех фундаментальных функций п. 24, *все характеристические числа которых неотрицательны, а функция $p(x)$ не обращается в нуль ни в одной из точек промежутка $[a, b]$.*

Таким образом, примененный в этой главе метод не только дает теорему о разложении заданной функции $f(x)$ в ряд Фурье, расположенный по фундаментальным функциям с неотрицательными характеристическими числами, но и высший предел модуля остаточного члена этого разложения, порядок которого оказывается не ниже $1/\sqrt{n}$.

27. Если оставить в стороне вопрос об определении высшего предела погрешности, то возможность разложения произвольных функций в ряды по функциям $V_k(x)$, рассматриваемый в этой главе, может быть установлена при более общих предположениях относительно функции $p(x)$.

В п. 5 гл. IX было показано, что всякая фундаментальная функция $V_k(x)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$V_k(x) = \lambda_k \int_a^b p(\xi)\psi(x, \xi)V_k(\xi)\,d\xi, \tag{60$_1$}$$

где $\psi(x, \xi)$ есть функция от x и ξ, определяемая формулами (38′), (38″) и (38‴) п. 13 гл. V.

Будем рассматривать $\psi(x, \xi)$ как функцию переменной ξ в промежутке $[a, b]$. Нетрудно убедиться, что $\psi(x, \xi)$ остается непрерывной относительно ξ при всяком значении x, взятом в промежутке $[a, b]$, и имеет в этом промежутке интегрируемую производную по ξ, причем

$$\int_a^b \psi^2(x, \xi)\,d\xi \leqslant A, \quad \int_a^b \psi_\xi'^2(x, \xi)\,d\xi \leqslant A,$$

где A есть число, не зависящее от x, а $\psi_\xi'(x, \xi)$ означает первую производную от $\psi(x, \xi)$, взятую по переменной ξ. Кроме того, нетрудно удостовериться, что для фундаментальных функций второго класса функция $\psi(x, \xi)$ удовлетворяет условию

$$\psi(x, b) - \rho\psi(x, a) = 0$$

при всяком x, для фундаментальных функций первого предельного класса условиям $\psi(x, b) = 0$, $\psi(x, a) = 0$ и для фундаментальных функций второго и третьего предельных классов соответственно условиям

$$\psi(x, b) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x, a) = 0.$$

28. Рассматривая теперь x как параметр, положим

$$\psi(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n} B_k(x)V_k(\xi) + \rho_n(\xi),$$

где

$$B_k(x) = \int_a^b p(\xi)\psi(x, \xi)V_k(\xi)\,d\xi. \tag{61}$$

Принимая во внимание сказанное в предыдущем пункте, убеждаемся, что к функции $\psi(x, \xi)$ применимо неравенство (53) п. 24, т.е. при всяком n

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k^2(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\int_a^b p(\xi)\psi(x, \xi)V_k(\xi)\,d\xi\right)^2 \leqslant M^2(x), \tag{62}$$

где под $M^2(x)$ следует подразумевать выражение

$$M^2(x) = \int_a^b \psi_\xi'^2(x,\xi)\,d\xi + \int_a^b q(\xi)\psi^2(x,\xi)\,d\xi +$$
$$+\gamma\psi^2(x,a) - \beta\psi^2(x,b) - 2\alpha\psi(x,a)\,\psi(x,b) \tag{63}$$

для функций первого класса и

$$M^2(x) = \int_a^b \psi_\xi'^2(x,\xi)\,d\xi + \int_a^b q(\xi)\psi^2(x,\xi)\,d\xi - \rho\tau\psi^2(x,a)$$

для функций второго класса.

Для фундаментальных функций трех предельных классов можем принять, согласно с изложенным выше, то же выражение (63), условившись считать: для функций первого предельного класса $\alpha=\beta=\gamma=0$, для функций второго предельного класса $\alpha=\beta=0$ и для функций третьего предельного класса $\alpha=\gamma=0$.

Принимая в расчет свойства функции $\psi(x,\xi)$, указанные в предыдущем пункте, заключаем, что во всех случаях

$$M^2(x) \leqslant M^2,$$

где M^2 *есть число, не зависящее ни от* n, *ни от* x. Формулу (62) можем заменить следующей:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k^2(x) \leqslant M^2 \tag{64}$$

при всяком x, принадлежащем промежутку $[a,b]$.

29. При помощи (60_1) и (61) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x),\quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\,dx,$$

можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k B_k(x). \tag{65}$$

Имеем

$$\lambda_k\,|A_k B_k(x)| \leqslant \frac{\lambda_k}{2}\,(A_k^2 + B_k^2(x)).$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2$, как доказано выше, сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2(x)$ сходится в силу (64), то *ряд* (65) *сходится абсолютно при всяком* x *в промежутке* $[a,b]$.

Легко видеть, что *этот ряд сходится и равномерно в рассматриваемом промежутке*. В силу сходимости ряда (65) можем писать

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k A_k B_k(x)$. Но

$$|R_n(x)| < \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k A_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k B_k^2(x)\right)^{1/2}.$$

В силу (64) имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k B_k^2(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2(x) < M^2.$$

С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2$ есть по предыдущему ряд сходящийся. Следовательно, при всяком n, бóльшим некоторого числа n_0, можем положить

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k A_k^2 < \frac{\epsilon^2}{M^2} \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Из сказанного следует, что

$$|R_n(x)| < \epsilon \quad \text{при} \quad n > n_0,$$

где ϵ — наперед заданное положительное число. Это неравенство показывает, что *при сделанных в п. 24 условиях относительно функции $f(x)$ ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x) \tag{α}$$

сходится абсолютно и равномерно во всем промежутке $[a, b]$ для всех фундаментальных функций с неотрицательными характеристическими числами.

30. Если применим теперь в расчет только что доказанное предложение в общую теорему п. 3 гл. IX, то придем к следующей теореме:

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству Коши, разлагается во всем промежутке $[a, b]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx, \tag{66}$$

по фундаментальным функциям $V_k(x)$ первого класса, коль скоро функции $p(x)$ и $q(x)$ и постоянные α, β, γ, входящие в дифференциальные уравнения и предельные условия, определяющие эти функции, удовлетворяют условиям

$$p(x) \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad a < x < b, \tag{67}$$
$$\beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad \alpha^2 + \beta\gamma < 0.$$

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству Коши и условию

$$f(b) - \rho f(a) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (66) по фундаментальным функциям $V_k(x)$ второго класса, коль скоро функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (67), а постоянные ρ и τ соответствующих предельных условий — неравенству

$$\rho\tau < 0.$$

Всякая функция $f(x)$, подчиненная неравенству Коши и условиям

$$f(a) = f(b) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (66) по фундаментальным функциям первого предельного класса, коль скоро функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (67).

Всякая функция $f(x)$, подчиненная условию Коши и следующему: $f(b) = 0$, разлагается во всем промежутке $[a, b]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (66) по фундаментальным функциям $V_k(x)$ второго предельного класса, если функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют неравенствам (67), а постоянная γ соответствующих предельных условий – неравенству $\gamma \geqslant 0$.

Наконец, всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Коши и следующему:

$$f(a) = 0,$$

разлагается во всем промежутке $[a, b]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (66) по фундаментальным функциям $V_k(x)$ третьего предельного класса, если функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют неравенствам (67), а постоянная β соответствующих предельных условий – следующему: $\beta \leqslant 0$.

31. Заметим, что эту теорему можно вывести, не прибегая к теореме п. 3 гл. IX (относящейся специально к фундаментальным функциям $V_k(x)$), при помощи одной общей теоремы, справедливой для какой угодно абсолютно замкнутой системы ортогональных и нормальных функций.

Пусть

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x),\ \ldots \tag{68}$$

есть такая система; пусть $p(x) \geqslant 0$ есть ее характеристическая функция, так что

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0,\quad m \neq n,$$

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_k^2(x)\,dx = 1.$$

Пусть $f(x)$ – какая-либо функция, интегрируемая в промежутке $[a, b]$. Положив

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(x) + \rho_n(x),\quad A_k = \int_a^b p(x)\,f(x)\,\varphi_k(x)\,dx, \tag{69}$$

будем иметь, в силу абсолютной замкнутости системы (68),

$$S_n(f) = \int_a^b p(x)\,\rho_n^2(x)\,dx \leqslant \epsilon^2 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{70}$$

Пусть $\Theta(x)$ есть какая угодно другая функция, интегрируемая в промежутке $[a, b]$. Умножив (69) на $p(x)\,\Theta(x)$ и интегрируя результат от a до b,

получим

$$\int_a^b p(x)\Theta(x)\Big(f(x)-\sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(x)\Big)\,dx=\int_a^b p(x)\,\Theta(x)\,\rho_n(x)\,dx, \tag{71}$$

$$\Big|\int_a^b p(x)\Theta(x)\rho_n(x)\,dx\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{S_n(f)}\sqrt{\int_a^b p(x)\Theta^2(x)\,dx}\leqslant A\epsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant n_0, \tag{71_1}$$

где

$$A^2=\int_a^b p(x)\Theta^2(x)\,dx$$

есть конечное число, не зависящее от n.

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$ и такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\varphi_k(x) \tag{72}$$

сходится равномерно в некотором промежутке $[\alpha,\beta]$, лежащем внутри $[a,b]$, и представляет собой некоторую непрерывную функцию в этом промежутке, которую обозначим через $F(x)$, так что

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(x)+R_n(x), \tag{73}$$

причем в силу равномерной сходимости ряда (79) будем иметь

$$|R_n(x)|\leqslant\epsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant n_0,\ \ \alpha\leqslant x\leqslant\beta. \tag{74}$$

Предположим, что

$$\Theta(x)=0 \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant\alpha \quad \text{и} \quad \beta\leqslant x\leqslant b, \tag{75}$$

а в промежутке $[\alpha,\beta]$ принимает какие угодно значения. При помощи (73) и (75) выведем из (71) и (71_1)

$$\Big|\int_\alpha^\beta p(x)\Theta(x)(f(x)-F(x))\,dx\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\int_\alpha^\beta p(x)\,\Theta(x)\,R_n(x)\,dx\Big|+A\epsilon.$$

Но, в силу (74),

$$\Big(\int_a^b p(x)\Theta(x)R_n(x)\,dx\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant A^2\int_\alpha^\beta p(x)R_x^2(x)\,dx\leqslant A^2Q^2\epsilon^2 \quad \text{при} \quad n\geqslant n_0.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\Theta(x)\,(f(x)-F(x))\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant A\,(Q+1)\,\epsilon = \epsilon' \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

какова бы ни была функция $\Theta(x)$, интегрируемая в промежутке $[\alpha, \beta]$. Положим

$$\Theta(x) = f(x) - F(x).$$

Получим из (76)

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,(f(x)-F(x))^2\,dx = 0,$$

откуда в силу непрерывности функций $f(x)$ и $F(x)$ выводим

$$f(x) = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x)$$

для всех точек x промежутка $[\alpha, \beta]$.

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Для какой угодно абсолютно замкнутой системы ортогональных и нормальных в промежутке $[a, b]$ функций $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ с характеристической функцией $p(x)$, неотрицательной в $[a, b]$, в любом промежутке $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри $[a, b]$, имеет место (равномерное) разложение вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x)\,dx,$$

если непрерывная функция $f(x)$ такова, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x)$ сходится равномерно в промежутке $[\alpha, \beta]$.

32. Эта теорема, непосредственно вытекающая из теории замкнутости, значительно упрощает решение многих вопросов о разложении непрерывных функций в ряды типа Фурье, расположенные по функциям $\varphi_k(x)$ данного вида, образующим ортогональную и абсолютно замкнутую систему.

Пользуясь этой теоремой, нет надобности производить суммирование данного ряда, а достаточно лишь доказать его равномерную сходимость, чтобы сейчас же заключить отсюда, что сумма его равна действительно данной функции $f(x)$ для всех значений x, где ряд, о котором идет речь, сходится равномерно.

Примером применения указанной теоремы может служить и теорема, установленная в п. 30. В самом деле, выше было установлено, что все фундаментальные функции $V_k(x)$ образуют абсолютно замкнутую систему. С другой стороны, в конце п. 29 доказано, что для всех фундаментальных функций, рассматриваемых в этой главе, ряд (α) сходится равномерно во всем промежутке $[a, b]$, коль скоро функция $f(x)$ удовлетворяет условиям п. 30 (или 24).

Из сопоставления этих предложений и только что доказанной общей теоремы сейчас же и выводится теорема, приведенная в п. 30.

33. Вопрос о разложении произвольных функций в ряды типа Фурье по фундаментальным функциям $V_k(x)$ можно считать разрешенным в общем виде при достаточно общих предположениях относительно разлагаемой функции $f(x)$.

Единственным ограничением, как видно из предыдущего, является требование, что функция $f(x)$ удовлетворяла неравенству Коши, которое можно считать выполняющимся в большинстве практических приложений (когда, например, кривая задается чертежом).

Весьма важным преимуществом изложенных выше методов является и та общность условий относительно функций $p(x)$ и $q(x)$, при которых решается задача. В большинстве случаев эти функции, имеющие определенный физический смысл, задаются эмпирически и в большинстве случаев удовлетворяют лишь условию непрерывности, т.е. тому единственному условию*), которого и требует изложенный выше анализ.

34. Первые попытки решения задачи (B) в 1837 г. (Journal de Liouville, T.J, II) для частного случая фундаментальных функций первого класса, когда

$$\alpha=0,\ \ \beta<0,\ \ \gamma>0,$$

принадлежат Лиувиллю. Но прием Лиувилля оказался неудовлетворительным и задача оставалась нерешенной в течение 60 лет.

В 1896 г. в статье "Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня" (Сообщ. Харьк. Общ.) я дал ее решение, развив соответствующим образом метод, который я назвал методом Шварца – Пуанкаре, при сравнительно общих предположениях относительно разлагаемой функции $f(x)$ и функций $p(x)$ и $q(x)$.

Эти первоначальные исследования получили затем дальнейшее развитие в упомянутом в п. 9 гл. V мемуаре "Problème de refroidissement d'une barre hétérogène" и затем в заметке "Sur un problème d'Analyse intimemete lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène" в Comptes Rendus (8 avril, 1907). В этих статьях я ограничивался исключительно частным случаем функций Штурма – Лиувилля.

Обобщение этого метода на случай каких угодно фундаментальных функций с неотрицательными характеристическими числами и ее усовершенствование составляют предмет настоящей главы этого сочинения.

В 1913 г. я предложил другой прием решения задачи (B), также основанный на теории замкнутости, но применимый ко всем фундаментальным функциям $V_k(x)$ без только что упомянутого ограничения характеристических чисел**). Гл. IX настоящего сочинения дает изложение этого последнего метода в усовершенствованном и обобщенном виде.

35. Существуют и другие приемы решения рассматриваемой задачи, основанные на так называемом асимптотическом представлении функций данного вида, по которым производится разложение в ряды типа Фурье произ-

---

*) Не считая условия положительности этих функций, которое не может доставить никаких затруднений в практических приложениях.

Предыдущий анализ можно распространить и на некоторые случаи прерывных функций $p(x)$ и $q(x)$, но на этом мы не будем останавливаться.

**) W. Stekloff (V. Steklov). Sur certaines questions qui se rattachent à plusieurs problèmes de la Physique Mathématique (см. п. 9 гл. V).

вольно заданных функций. Одним из таких приемов пытался решить задачу и сам Лиувилль.

Обобщение и развитие идей Лиувилля, давшие строгое решение задачи в случае функций Штурма – Лиувилля, принадлежат А. Кнезеру (Mathem, Annalen, Bd. 58, 60 и 63), который пользовался в своих исследованиях методами Дю-Буа-Реймона и Дини.

В 1907 г. в мемуаре "Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre etc." (Сообщ. Харьк. Мат. Общ., 1907) я распространил метод О. Бонэ и Г. Дарбу для полиномов Лежандра и Якоби на многие другие случаи и, в частности, на вывод асимптотических выражений для функций Штурма – Лиувилля. Пользуясь этими выражениями и теорией замкнутости, я дал особый метод решения задачи (B) с той же общностью, какая достигнута в настоящее время для обыкновенных тригонометрических рядов Фурье.

В заметке, появившейся в 1910 г. в Rendic. d. R. Accad. dei Lincei ("Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions de Sturm – Liouville"), этот метод был затем мною значительно упрощен и обобщен.

36. Во всех разнообразных методах упомянутых выше авторов и в теории, изложенной в настоящем сочинении, существенную роль играют условия ортогональности рассматриваемых фундаментальных функций, на что обращено особое внимание в гл VIII. Распространение этой теории на самый общий случай, когда в предельных уравнениях, характеризующих фундаментальные функции, условия ортогональности не соблюдаются, представляется крайне затруднительным.

Но в применении к математической физике такого рода обобщения и не имеют особого значения: во всех задачах, как указано выше (гл. V, п. 2), условия ортогональности выполняются и являются, таким образом, естественным следствием физического смысла этих задач.

Далее, во всех известных или мыслимых задачах математической физики фундаментальные функции и им соответствующие характеристические числа должны быть вещественными (в большинстве случаев последние, кроме того, положительными). Это обстоятельство, как показано в гл. VIII, может не иметь места при несоблюдении условий ортогональности.

Наконец, в этом последнем случае станет сомнительной и сама определенность физической задачи даже в том предположении, что соответствующие характеристические числа и фундаментальные функции окажутся все вещественными, в чем легко убедиться из рассуждений гл. IV и V.

37. Однако с точки зрения чистого анализа изучение вопроса в самом общем виде не лишено интереса, но требует применения особых, более общих методов.

Один такой метод был намечен еще Коши в 1827 г. в "Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de Physique Mathématique" и применен А. Пуанкаре к решению задачи (B) (при исследовании некоторых аналогичных вопросов в пространстве трех измерений) в его известном мемуаре "Sur les équations de la Physique Mathématique" (Rendic. di Palermo, 1894).

Этот метод получил дальнейшее развитие и обобщение в работах Биркгофа (Trans. Americ. Society, 1908, и Rendic. di Palermo, 1913), а также в диссертации Я.Д. Тамаркина "О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды" (Петроград, 1917). В этих исследованиях рассматриваются особого рода частные решения дифференциальных линейных уравнений какого угодно порядка, коэффициенты которых зависят от некоторого параметра. Для случая уравнений второго порядка, при соблюдении условий ортогональности и при некоторых других частных предположениях, эти решения обращаются в фундаментальные функции $V_k(x)$ рассматриваемые в настоящем сочинении. Задача (В) решается в общем виде, причем получаются разложения, вообще говоря, отличные от разложений типа Фурье, которые могут совпадать с последними лишь при выполнении только что упомянутых дополнительных ограничений. В частном случае дифференциальных уравнений второго порядка получаются при этом результаты, аналогичные тем, которые даны мною в статьях, указанных в конце п. 35.

38. Таким образом, изыскания, основанные на идеях, отличаются весьма большой общностью, вводя в круг исследований такие вопросы, которые не поддаются решению при помощи методов, изложенных в настоящем сочинении. Но если ограничиться конкретным случаем рассматриваемых нами ортогональных фундаментальных функций $V_k(x)$, то методы, употребленные нами, окажутся более выгодными во многих отношениях.

Во-первых, анализ представляется несравненно более простым, не требующих тех сложных рассуждений весьма общего характера, которые в применении к рассматриваемому нами конкретному случаю не дают ничего нового.

Во-вторых, наш анализ при всей своей простоте приводит к результатам в некоторых отношениях более общим, которые не могут быть получены при помощи методов, основанных на идеях Коши – Пуанкаре.

Благодаря неизбежному для этих методов употреблению асимптотических выражений функций $V_k(x)$ приходится рассматривать лишь ограниченный класс этих функций, характеристическая функция которых $p(x)$ остается положительной, не обращаясь в нуль ни в одной из точек данного промежутка, и притом допускает непрерывные производные двух первых порядков.

По крайней мере, известные в настоящее время приемы вывода соответствующих асимптотических выражений для функций $V_k(x)$ справедливы лишь при соблюдении только что указанных ограничений относительно функции $p(x)$.

Предложенные нами методы не нуждаются в выводе асимптотических выражений для функций $V_k(x)$, который и сам по себе представляется довольно сложным, распространяются на все случаи, когда функция $p(x)$ остается положительной и только непрерывной в данном промежутке, а для случая фундаментальных функций с заведомо неотрицательными характеристическими числами требуется лишь, чтобы функция $p(x)$ была непрерывна и неотрицательна.

Все эти случаи в силу сказанного выше исключаются из рассмотрения при употреблении методов Коши – Пуанкаре, а эти-то случаи и представляют наибольший интерес в приложениях к математической физике.

Наконец, в-третьих, предложенный нами метод, основанный исключительно на теории замкнутости, не только доказывает возможность самого разложения данной функции по функциям $V_k(x)$, но во многих случаях дает возможность определить размеры погрешности, которая совершается при этом разложении, если остановить его на каком-нибудь n-м члене, чего опять-таки не дает метод Коши – Пуанкаре.

Правда, выигрывая в простоте анализа, в общности предположений относительно свойств характеристической функции $p(x)$ и т.д., мы несколько теряем в общности тех условий, которым приходится подчинять разлагаемую функцию.

Мы разрешаем задачу (B) в предположении, что эта функция удовлетворяет условию Коши, а методы более общего характера, о которых идет речь, требуют для равномерности разложения, чтобы разлагаемая функция была только непрерывна и ограниченной вариации. Но, во-первых, различие между этими двумя условиями мало чувствительно, а во-вторых, в применении к задачам математической физики наше условие, само по себе достаточно общее, оказывается более чем достаточным.

Принимая во внимание все сказанное выше и то обстоятельство, что главной целью нашего сочинения является изучение таких вопросов интегрирования дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), которые, представляя интерес с точки зрения чистого анализа, находили бы ближайшее к основным задачам математической физики, мы не будем останавливаться на сложных изысканиях упомянутого выше общего характера, имеющих по преимуществу отвлеченно-математический интерес.

ГЛАВА XI

Приложение предыдущей теории к решению основных задач математической физики для тел линейных размеров. Задачи первого типа, дифференциальные уравнения которых содержат только первую производную по времени от искомых функций. Задачи второго типа, характеризуемые дифференциальными уравнениями, содержащими только вторую производную по времени от неизвестных функций. Условия определенности решения рассматриваемых задач. Приемы их решения

1. В гл. III мы установили подразделение главнейших задач математической физики на три типа (п. 10 гл. III). Припоминая теперь все изложенное в гл. III и IV, мы можем формулировать это подразделение следующим образом.

К первому типу относятся задачи, когда требуется определить неизвестную функцию U от двух переменных t и x, удовлетворяющую при всех положительных значениях t (время) и значениях x, заключенных в данном промежутке $[a, b]$, дифференциальному уравнению

$$p(x)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x)U, \qquad (A)$$

начальному условию

$$U|_{t=0} = f(x) \tag{1}$$

и предельным условиям двух следующих классов:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(b, t)}{\partial x} - \alpha U(a, t) - \beta U(b, t) = 0, \\ &\frac{\partial U(a, b)}{\partial x} - \gamma U(a, t) + \alpha U(b, t) = 0, \end{aligned} \tag{a}$$

или

$$\begin{aligned} &U(b, t) = \rho U(a, t), \\ &\frac{\partial U(b, t)}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U(a, t)}{\partial x} + \tau U(a, t), \end{aligned} \tag{b}$$

где α, β, γ, ρ, τ суть постоянные, которые в предельных случаях могут обращаться в нуль или в бесконечность. По самому физическому смыслу задач нужно при этом допустить, что эти постоянные в условиях (a) удовлетворяют неравенствам

$$\beta \leqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0, \quad \alpha^2 + \beta\gamma \leqslant 0, \tag{2}$$

причем знаку равенства в одном из первых двух из этих соотношений должен соответствовать знак равенства в третьем, а в условиях (b) – неравенству

$$\rho\tau \leqslant 0. \tag{2_1}$$

Что же касается функций $p(x)$ и $q(x)$ в уравнении (A), то они должны быть положительными и неопределенными в промежутке $[a, b]$.

В этой общей задаче заключаются все различные физические задачи, относящиеся к теории теплоты, т.е. задачи, в которых изучаются законы тепловых явлений в телах линейных измерений.

2. Ко второму типу задач относятся задачи, когда искомая функция U от тех же переменных t и x удовлетворяет уравнению

$$p(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x)\, U, \tag{B}$$

следующим начальным условиям:

$$U|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = f_1(x) \tag{3}$$

и предельным условиям того же самого вида (a) или (b), что и в предыдущем случае, и при тех же самых предположениях относительно постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \tau$ и функций $p(x)$ и $q(x)$.

К этому типу принадлежат различные задачи теории звука (упругости), света, электричества и магнетизма.

3. Наконец, к третьему типу можно отнести всевозможные задачи о так называемых установившихся процессах.

При этом определение неизвестной функции, не зависящей от времени t, приводится к интегрированию обыкновенного линейного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 U(x)}{dx^2} - q(x)\, U(x) = 0.$$

Начальные условия при этом сами собой отпадают, а предельные условия (a) и (b) заменяются некоторыми другими. Самый общий вид этих условий получится, если в правых частях равенств (a) и (b) заменим нули заданными постоянными, а функцию $U(x, t)$ двух переменных t и x – функцией $U(x)$, зависящей только от x.

Очевидно, что задачи этого типа (об установившихся процессах) для тел линейных размеров особого интереса не представляют и разрешаются весьма просто на основании начал общей теории интегрирования обыкновенных линейных уравнений, почему мы на них и не будем останавливаться.

4. Рассмотрим задачу первого типа.

В п. 12 и 13 гл. IV был уже указан общий прием ее решения. Все дело сводится к определению фундаментальных функций $V_k(x)$ и характеристических чисел λ_k. Коль скоро последние найдены, то искомое решение представится формулой (23) п. 13 гл. IV, если выберем постоянные A_k так, чтобы имело место разложение (24) п. 14 той же главы. Существование характеристических чисел λ_k и им соответствующих фундаментальных функций и общие приемы их определения установлены исследованиями гл. V – VIII.

Вопрос о возможности разложения вида (24) разрешен в гл. IX и X, причем нужно предположить, что заданная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы п. 30 гл. X, каковые будем предполагать выполненными.

Задача будет решена во всех случаях, когда мы докажем, что ряд

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\lambda_k t}\, V_k(x), \tag{4}$$

где теперь должны положить

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx,$$

и ряды, которые получаются из него почленным дифференцированием один раз по переменной t и дважды по переменной x, сходятся равномерно при всех положительных значениях t и при всех значениях x, принадлежащих промежутку $[a, b]$.

Действительно, коль скоро это будет доказано, то на основании известной теоремы будем иметь

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t}\, V_k(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\lambda_k t}\, \frac{\partial V_k(x)}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\lambda_k t}\, \frac{\partial^2 V_k(x)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Так как уравнение (B) по физическому смыслу задачи должно удовлетворяться для всех значений x в промежутке $[a, b]$ и лишь для значений t бо́льших нуля, то сходимость рядов (5), (6) и (7) достаточно установить только для $t > 0$. Так как рассматриваемые ряды построены именно так, что они формально удовлетворяют и уравнению (A), и условиям (a) или (b), то они будут удовлетворять действительно (а не только формально) всем этим уравнениям, коль скоро их равномерная сходимость будет установлена, и поэтому функция $U(x, t)$, определяемая рядом (4), представит действительное решение задачи.

5. Так как данная функция $f(x)$ предполагается удовлетворяющей условиям теоремы п. 30 гл. X, то ряд

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x)$$

на основании этой теоремы сходится в промежутке $[a, b]$ не только равномерно, но и абсолютно, к какому бы классу ни принадлежали функции $V_k(x)$, притом на основании той же теоремы будет выполнено начальное условие (1).

Так как, далее, постоянные α, β, γ и ρ, τ подчиняются соответственно условиям (2) и (2_1), то все λ_k суть числа неотрицательные. Отсюда следует, что ряд (4), сходящийся абсолютно и равномерно при $t = 0$, и подавно *сходится абсолютно и равномерно при всяком положительном* t, ибо, начиная с некоторого значения $k = k_0$ $(k_0 = 1)$,

$$e^{-\lambda_k t} < 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0, \quad t > 0,$$

что непосредственно вытекает из неравенства (124) гл. V.

6. Рассмотрим теперь ряды (5) и (7). Мы знаем (п. 29 предыдущей главы), что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k V_k(x)|$$

сходится равномерно в промежутке $[a, b]$. Но в силу вышесказанного

$$\lambda_k e^{-\lambda_k t} < 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0', \quad t > 0,$$

где k_0' есть некоторое достаточно большое целое число. Отсюда сейчас же следует, что *ряд* (5) *сходится абсолютно и равномерно в промежутке* $[a, b]$ *при всяком* $t > 0$.

Что же касается ряда (7), то он в силу уравнений, которым удовлетворяют функции $V_k(x)$, приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k''(x) =$$

$$= q(x) \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k(x) - p(x) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k^{-\lambda_k t} V_k(x).$$

Так как на основании только что доказанного каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} V_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно в промежутке $[a, b]$, коль скоро $t > 0$, то ряд левой части предыдущего равенства сходится равномерно при тех же условиях.

Итак, *ряд* (7) *сходится равномерно в промежутке* $[a, b]$ *при всяком* $t > 0$.

7. Остается рассмотреть условия равномерной сходимости ряда (6):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k'(x). \tag{6_1}$$

В п. 5 гл. IX (равенство (11) показано, что

$$V_k(x) = \lambda_k \{ u_1(x) N_k(x) - \\ - u_2(x) M_k(x) + \omega_1(x) N_k(b) - \omega_2(x) M_k(b) \}, \tag{8}$$

где, напомним (см. п. 12 гл. V),

$$M_k(x) = \int_a^x p(\xi) u_1(\xi) V_k(\xi) d\xi, \\ N_k(x) = \int_a^x p(\xi) u_2(\xi) V_k(\xi) d\xi, \tag{9}$$

а $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ суть функции от x, непрерывные в промежутке $[a, b]$ вместе с их производными двух первых порядков.

Из равенства (8) выводим

$$V_k'(x) = \lambda_k \{ u_1'(x) N_k(x) - \\ - u_2'(x) M_k(x) + \omega_1'(x) N_k(b) - \omega_2'(x) M_k(b) \}. \tag{10}$$

Подставив это выражение в (6_1), напишем ряд S в виде

$$S = u_1'(x) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} N_k(x) - u_2'(x) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} M_k(x) + \\ + \omega_1'(x) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} N_k(b) - \omega_2'(x) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} M_k(b). \tag{11}$$

8. Обозначим через $\Theta(\xi)$ функцию, определяемую следующими условиями:

$$\Theta(\xi) = u_2(\xi) \quad \text{при} \quad a \leqslant \xi \leqslant x,$$
$$\Theta(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant \xi \leqslant b.$$

Можем писать, приняв во внимание (9),

$$N_k(x) = \int_a^b p(\xi) \Theta(\xi) V_k(\xi) d\xi.$$

Применив неравенство (8) гл. I к ортогональной системе функций $V_k(\xi)$ и заменив в нем $f(x)$ через $\Theta(\xi)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} N_k^2(x) \leqslant \int_a^b p(\xi) \Theta^2(\xi) d\xi = \int_a^x p(\xi) u_2^2(\xi) d\xi.$$

Отсюда следует, что при всяком x

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k^2(x) < K^2, \tag{12}$$

где K^2 есть число, не зависящее от x, ибо

$$\int_a^x p(\xi)\, u_2^2(\xi)\, d\xi \leqslant m_0^2 \int_a^b p(\xi)\, d\xi,$$

где m_0 есть max $|u_2(\xi)|$ в промежутке $[a, b]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\, |N_k(x)|. \tag{13}$$

Так как $|A_k N_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(A_k^2 + N_k^2(x))$ и каждый из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} N_k^2(x)$ сходится, то ряд (13) также сходится при всяком x в промежутке $[a, b]$. Обозначив его остаточный член через $R_n(x)$, можем писать

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|\, |N_k(x)| \leqslant \sqrt{S_n(f)}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} N_k^2(x)},$$

откуда в силу (12) и абсолютной замкнутости системы функций $V_k(x)$ заключаем, что

$$R_n(x) \leqslant K\epsilon = \epsilon' \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

где ϵ' есть наперед заданное положительное число, не зависящее от x, а n_0 – некоторое соответствующим образом выбранное целое число.

Следовательно, ряд (13) сходится равномерно в промежутке $[a, b]$. Так как, далее, при достаточно большом k и при $t > 0$ $\lambda_k e^{-\lambda_k t} < 1$, то и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k t}\, |A_k N_k(x)|$$

сходится равномерно в рассматриваемом промежутке. Отсюда следует, что *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} N_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно в промежутке $[a, b]$ *при всяком* $t > 0$.

Совершенно таким же способом докажем, что и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} M_k(x)$$

сходится равномерно в промежутке $[a, b]$ при $t > 0$.

Что же касается рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} N_k(b) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} M_k(b),$$

то они не зависят от x и абсолютная их сходимость при $t > 0$ вытекает непосредственно из абсолютной замкнутости функций $V_k(x)$

Из сказанного следует, что *ряд S, определяемый равенством* (11), *сходится равномерно* (*и абсолютно*) в *промежутке* $[a, b]$ *при всяком* $t > 0$*).

9. В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям п. 30 предыдущей главы, что было необходимо для доказательства того, что ряд

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} V_k(x) \tag{13$_1$}$$

сходится равномерно при $t = 0$ и сумма его равна данной функции $f(x)$.

На абсолютной и равномерной сходимости ряда

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k(x)$$

мы и основывали доказательство равномерной сходимости рядов (13_1), (5) и (7) при $t > 0$.

Но нетрудно убедиться, что *при положительном t, не равном нулю, эти ряды, равно как и ряд* (6), *сходятся абсолютно и равномерно, какова бы ни была функция $f(x)$, подчиненная единственному условию быть интегрируемой в промежутке $[a, b]$, т.е. ряд* (13_1) *представляет при всех значениях $t > 0$ и для значений x, принадлежащих промежутку $[a, b]$, непрерывную функцию от t и x, имеющую непрерывную первую производную по t и такие же производные двух первых порядков по x, удовлетворяющую уравнению* (A) *и предельным условиям* (a) *или* (b) (*при* $t > 0$).

Легко понять, что сходимость рядов (13_1), (5) и (7) будет установлена при только что указанных условиях, если мы докажем, что при этих же условиях ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} V_k(x) \tag{14}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство этого предложения уже имеется в пп. 5 и 6 гл. IX. В самом деле, ряд (14) при помощи формулы (12) п. 5 этой главы представляется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} C_k(x). \tag{15}$$

Так как при достаточно большом k и $t > 0$

$$\lambda_k^2 e^{-\lambda_k t} < 1,$$

то ряд (15) или, что то же, ряд (14) будет сходиться абсолютно и равномерно, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\ |C_k(x)|$ сходится равномерно.

Но сходимость этого ряда для всякой функции $f(x)$, интегрируемой в промежутке $[a, b]$, вытекает непосредственно из абсолютной замкнутости фундаментальных функций $V_k(x)$ и доказывается совершенно так же, как и равномерная сходимость ряда (14) п. 6 гл. IX.

---

*) В пп. 5–8 доказано, что ряды (4) – (7) сходятся равномерно по (t, x) на множестве $(a \leqslant x \leqslant b,\ \delta \leqslant t \leqslant T)$ при любых δ и T, $0 < \delta < T$. (*Прим. ред.*)

Итак, ряды (13_1), (5) и (7) сходятся при $t > 0$ равномерно в промежутке $[a, b]$, какова бы ни была функция $f(x)$, интегрируемая в этом промежутке.

Что касается ряда (6), то его равномерная сходимость при том же самом условии относительно функции $f(x)$ уже доказана в п. 8, ибо приведенное там доказательство основано исключительно на абсолютной замкнутости функций $V_k(x)$.

Предложение, высказанное вначале этого пункта, можно считать доказанным.

10. Из сказанного следует, что дополнительные ограничения свойств функции $f(x)$ необходимы лишь для доказательства того, что функция $U(x, t)$, определяемая рядом (13_1), действительно удовлетворяет начальному условию (1). Это же последнее условие, как указано выше, будет действительно выполнено, если функция $f(x)$ подчиняется условиям п. 30 предыдущей главы.

Сопоставляя все предыдущее, приходим, таким образом, к следующему результату:

Общая задача об охлаждении твердых тел линейных размеров вполне разрешается по методу Эйлера – Бернулли, причем искомая температура тела $U(x, t)$, *изображаемая рядом* (13_1), *действительно удовлетворяет всем требованиям, определяющим задачу,* т.е. *дифференциальному уравнению* (A), *предельным условиям* (a) *или* (b) *и начальному условию* (1), *если только начальная температура тела, т.е. функция* $f(x)$, *удовлетворяет неравенству Коши и тем дополнительным предельным условиям для случая фундаментальных функций второго или третьего предельного класса, которые указаны в* п. 30 гл. X*).

11. Переходим теперь к исследованию задач второго типа, когда искомая функция $U(x, t)$ определяется дифференциальным уравнением (B), начальными условиями (3) п. 2 и теми же самыми предельными условиями (a) или (b) п. 1.

Решение задачи получается при помощи того же самого обобщенного метода Эйлера – Бернулли, что и в предыдущем случае.

Ищем частное решение уравнения (B) в виде

$$U(x, t) = V(x)\, W(t). \tag{16}$$

Подставив это выражение $U(x, t)$ в (B), получаем

$$\frac{1}{W(t)}\;\frac{d^2 W(t)}{dt^2} = \frac{\dfrac{d^2 V(x)}{dx^2} - q(x)}{p(x)V(x)},$$

откуда выводим

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\, V(x) = 0 \tag{17}$$

$$W''(t) + \lambda W(t) = 0,$$

где λ есть некоторый параметр.

---

*) Выше доказано, что функция $U(x, t)$ (13_1) принадлежит $C(a \leqslant x \leqslant b,\ t \geqslant 0) \cap$ $\cap\ C^{2,1}(a \leqslant x \leqslant, b,\ t > 0)$; решение задачи в этом классе, очевидно, единственно. (*Прим. ред.*)

Последнее из этих уравнений дает

$$W(t) = A\cos t\sqrt{\lambda} + B\sin t\sqrt{\lambda}.$$

Следовательно, в силу (16),

$$U(x,t) = (A\cos t\sqrt{\lambda} + B\sin t\sqrt{\lambda})\,V(x),$$

где A и B суть две произвольные постоянные.

Полученное выражение для $U(x,t)$ будет удовлетворять и предельным условиям (a) или (b), если подчиним функцию $V(x)$ еще следующим условиям:

$$V'(b) = \alpha V(\alpha) + \beta V(b),$$

$$V'(a) = \gamma V(a) - \alpha V(b)$$

в случае равенств (a);

$$V(b) = \rho V(a), \quad V'(b) = \frac{1}{\rho}V'(a) + \tau V(a)$$

в случае равенств (b).

Определение функции $V(x)$ приводится, как видим, опять к разысканию характеристических чисел λ_k и фундаментальных функций $V_k(x)$, т.е. к вопросу, уже вполне разрешенному предыдущими исследованиями.

Зная в каждом частном случае эти числа λ_k и им соответствующие функции $V_k(x)$, получим для каждого такого числа и ему соответствующей функции частное решение вида

$$U_k(x,t) = (A_k\cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k\sin t\sqrt{\lambda_k})\,V_k(x).$$

Общее решение, формально удовлетворяющее и уравнению (B) и предельным условиям (a) или (b), представится в виде ряда

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k\sin t\sqrt{\lambda_k})\,V_k(x), \tag{18}$$

где суммирование распространяется на все фундаментальные функции $V_k(x)$, принадлежащие к их полной системе.

12. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(B_k\cos t\sqrt{\lambda_k} - A_k\sin t\sqrt{\lambda_k})\sqrt{\lambda_k}\,V_k(x), \tag{19}$$

получающийся из (18) почленным дифференцированием по t, при $t = 0$ обращается в $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,B_kV_k(x)$, ряд же (18) при том же значении $t = 0$ дает $\sum_{k=1}^{\infty}A_kV_k(x)$.

Если теперь в формуле (18) выберем постоянные A_k и B_k так, чтобы было

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kV_k(x) = f(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,B_kV_k(x) = f_1(x), \tag{20}$$

то ряд (18) представит формальное решение задачи, ибо он будет удовлетворять формально уравнению (B), начальным условиям (3) и требуемым задачей предельным условиям.

Если удастся доказать, что при выборе постоянных A_k и B_k при помощи условий (20) ряд (18) и ряды, получаемые из него двукратным дифференцированием по t и по x, сходятся равномерно в промежутке $[a, b]$ при всяком положительном t, то функция $U(x, t)$, определяемая этим рядом, и представит одно из решений задачи.

13. Мы уже указывали, что для всякой задачи математической физики, если она только правильно поставлена, может существовать одно и только одно определенное решение.

Выясним прежде всего, подобно тому, как это было сделано для задач первого типа, те условия, при которых поставленное требование действительно выполняется, т.е. когда уравнением (B), начальными условиями (3) и предельными условиями (a) или (b) (включая сюда и предельные случаи, когда постоянные α, β, γ, ρ, τ могут обращаться в нуль или в бесконечность) задача вполне определяется.

Начнем со случая предельных условий (a) первого класса.

Допустим, что существуют две различные функции U_1 и U_2, удовлетворяющих уравнениям (B), (3) и (a)*).

Функция

$$V(x, t) = U_1 - U_2 \tag{21}$$

будет удовлетворять следующим: уравнению того же вида

$$p(x)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q(x)V, \tag{22}$$

тем же предельным условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(b, t)}{\partial x} - \alpha V(a, t) - \beta V(b, t) = 0,\\ &\frac{\partial V(a, t)}{\partial x} - \gamma V(a, t) + \alpha V(b, t) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

и начальным условиям

$$V(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V(x, 0)}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

при всяком x, принадлежащем промежутку $[a, b]$.

14. Умножим (22) на $\dfrac{\partial V}{\partial t}\,dt$ и проинтегрируем результат от $t = 0$ до какого-нибудь t.

Приняв в расчет (24), получим

$$\frac{p(x)}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^t q(x)\frac{\partial V^2}{\partial t}\,dt =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dt - \frac{q(x)}{2}V^2(x, t).$$

*) Считается, что функции U_1 и U_2 принадлежат $C(a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t)$. (*Прим.ред.*)

Отсюда

$$\frac{1}{2}\int_a^b p(x)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx =$$

$$= \int_a^b dx\left(\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dt\right) - \frac{1}{2}\int_a^b q(x)V^2(x,t)\,dx. \tag{25}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_a^b dx\left(\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dt\right) = \int_0^t dt\left(\int_a^b \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\right). \tag{26}$$

Но

$$\int_a^b \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\,dx =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Следовательно, в силу (26),

$$\int_a^b dx\left(\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dt\right) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b dt - \frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{27}$$

где в последнем интеграле под t нужно подразумевать значение t, равное верхнему пределу интегралов, взятых по t, входящих в это равенство, ибо

$$\int_a^b\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx\Bigg|_{t=0} = 0$$

в силу первого из условий (24), показывающего, что $\dfrac{\partial V(x,0)}{\partial x} = 0.$

При помощи (26) и (27) приводим равенство (25) к виду

$$\frac{1}{2}\int_a^b p(x)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b q(x)V^2(x,t)\,dx = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b dt. \tag{28}$$

Эта формула справедлива для всякой функции $V(x,t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (B) и начальным условиям (24), каковы бы ни были предельные условия.

15. Предполагая теперь, что функция $V(x,t)$ подчиняется предельным условиям (23) (первого класса), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\gamma V^2(a,b) + \beta V^2(b,t) + 2\alpha V(a,t)V(b,t)\right\},$$

откуда

$$\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_a^b dt = \frac{1}{2}\left\{-\gamma V^2(a,t)+\beta V^2(b,t)+2\alpha V(a,t)V(b,t)\right\},$$

ибо, в силу первого из (24), $V(a,0)=0$, $V(b,0)=0$. Отсюда заключаем, что если постоянные α, β, γ удовлетворяют условиям

$$\beta<0,\quad \gamma>0,\quad \alpha^2+\beta\gamma\leqslant 0, \tag{29}$$

то $\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_a^b dt = -A^2$, где A^2 есть величина положительная либо нуль.

Равенство (28) дает

$$\int_a^b\left(p(x)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+q(x)V^2(x,t)\right)dx+2A^2=0.$$

Если при этом в промежутке $[a,b]$

$$p(x)>0,\quad q(x)\geqslant 0, \tag{30}$$

то необходимо $V(x,t)=0$ тождественно, т.е., в силу (21), $U_1=U_2$.

Как видим, *достаточные условия определенности задач второго типа (неравенства* (29) *и* (30)) *оказываются теми же, что и для задач теории тепла.*

16. Допустим теперь, что функция $V(x,t)$ подчинена предельным условиям (b) второго класса. В этом случае

$$\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_a^b = \frac{\partial V(b,t)}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V(a,t)}{\partial x}+\tau V(a,t)\right)-$$

$$-\frac{\partial V(a,t)}{\partial t}\frac{\partial V(a,t)}{\partial x}.$$

Но, в силу первого из (b),

$$\frac{\partial V(b,t)}{\partial t}=\rho\frac{\partial V(a,t)}{\partial t}.$$

Поэтому $\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_a^b=\frac{\rho\tau}{2}\frac{\partial V^2(a,t)}{\partial t}$ и

$$\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_a^b dt=\frac{\rho\tau}{2}V^2(a,t),$$

ибо $V(a,0)=0$.

Равенство (28) приводится к виду

$$\int_a^b\left(p(x)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+q(x)V^2(x,t)\right)dx-\rho\tau V^2(a,t)=0.$$

Отсюда следует, что если

$$\rho\tau\leqslant 0,\quad p(x)>0,\quad q(x)\geqslant 0, \tag{31}$$

то необходимо $V=U_1-U_2=0$.

Получаются опять те же самые условия определенности задачи, что и в соответствующей задаче тепла.

17. Остается рассмотреть три предельных случая, когда условия (a) и (b) приводятся к следующим:

$$V(a, t) = 0, \quad V(b, t) = 0; \tag{a_1}$$

$$V(a, t) = 0, \quad \frac{\partial V(b, t)}{\partial x} = \beta V(b, t); \tag{b_1}$$

$$V(b, t) = 0, \quad \frac{\partial V(a, t)}{\partial x} = \gamma V(a, t). \tag{c_1}$$

В случае (a), очевидно,

$$\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b = 0, \quad \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b dt = 0.$$

В случае (b_1)

$$\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b = \frac{\beta}{2}\frac{\partial V^2(b, t)}{\partial t},$$

т.е.

$$\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b = \frac{\beta}{2} V^2(b, t),$$

ибо, в силу (24), $V(b, 0) = 0$.

В случае (c_1)

$$\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial V^2(a, t)}{\partial t},$$

т.е.

$$\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\Bigg|_a^b dt = -\frac{\gamma}{2} V^2(a, t),$$

ибо $V(a, 0) = 0$.

Отсюда при помощи (28) заключаем, что для случая (a_1) всегда

$$V = U_1 - U_2 = 0,$$

коль скоро

$$p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \tag{32}$$

для случая (b_1)

$$V = U_1 - U_2 = 0,$$

если

$$\beta \leqslant 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \tag{33}$$

и, наконец, для случая (c_1)

$$V = U_1 - U_2 = 0,$$

если

$$\gamma \geqslant 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0. \tag{34}$$

Получается опять тот же результат, что и для соответствующих задач тепла.

18. *Таким образом, во всех случаях, когда удовлетворяются условия* (29), (30), или (31), или (32), (33); (34), задача допускает одно и только одно определенное решение.

При этом, как известно уже, все числа λ_k оказываются неотрицательными и искомая функция $U(x, t)$ представляется совокупностью членов, периодических относительно времени t (ряд (18)), что совпадает с физическими требованиями тех идеальных задач теории звука, света, электричества и т.п., которые характеризуются дифференциальными уравнениями типа (B).

Единственно возможное решение представится равенством (18), если мы докажем все положения, намеченные в п. 12.

Основываясь на результатах, установленных в гл. X, можем утверждать, что условия (20) будут действительно выполнены во всех рассматриваемых теперь случаях, если предположить, что функции $f(x)$ и $f_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы п. 30 гл. X. При этом постоянные A_k и B_k представятся в виде

$$\begin{aligned} A_k &= \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx, \\ B_k &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx = \frac{C_k}{\sqrt{\lambda_k}} \end{aligned} \tag{35}$$

и формулы (20) дадут равномерное разложение функций $f(x)$ и $f_1(x)$ по функциям $V_k(x)$ во всем промежутке $[a, b]$.

Останется только установить те условия относительно заданных функций $f(x)$ и $f_1(x)$, при которых ряд (18) и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по t и по x, сходятся равномерно в промежутке $[a, b]$ при $t > 0$, т.е. найти достаточные условия равномерной сходимости следующих рядов:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,(B_k \cos t\sqrt{\lambda_k} - A_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\, V_k(x), \\ S_2 &= -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,(B_k \sin t\sqrt{\lambda_k} + A_k \cos t\sqrt{\lambda_k})\, V_k(x), \end{aligned} \tag{36}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\, V_k'(x), \tag{36$_1$}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\, V_k''(x) = \\ &= q(x) \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\, V_k(x) - \\ &- p(x) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,(A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\, V_k(x), \end{aligned} \tag{36$_2$}$$

где под A_k и B_k следует подразумевать постоянные, определяемые равенствами (35).

19. Решение вопроса об условиях абсолютной и равномерной сходимости аналогичных рядов для задач первого типа (теория теплоты) значительно облегчалось благодаря входившему в них множителю $e^{-\lambda_k t}$.

В данном случае роль этого множителя играют тригонометрические функции $\cos t\sqrt{\lambda_k}$ и $\sin t\sqrt{\lambda_k}$, что значительно усложняет исследование и приводит к необходимости наложить на заданные функции $f(x)$ и $f_1(x)$ некоторые дополнительные ограничения сверх указанных в предыдущем пункте, от которых трудно освободиться.

Рассматривая ряды (36), (36_1) и (36_2), замечаем, что если для какого-либо класса функций $f(x)$ и $f_1(x)$ будет установлена равномерная сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k V_k'(x)|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,|A_k V_k(x)|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,|A_k V_k(x)| \tag{37}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k V_k'(x)|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,|B_k V_k(x)|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,|B_k V_k(x)| \tag{37_1}$$

в промежутке $[a, b]$, то тем самым будет доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов (36), (36_1) и (36_2) для того же класса функций $f(x)$ и $f_1(x)$ при всяком t *). При этом для сходимости вторых из рядов (37) и (37_1) достаточно лишь доказать сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |A_k V_k(x)| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,|B_k V_k(x)|.$$

Но, в силу второго из (35),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,|B_k V_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,|C_k V_k(x)|. \tag{38}$$

Поэтому, если будет доказана равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |A_k V_k(x)| \tag{39}$$

для какого-либо класса функций $f(x)$, то отсюда сама собой будет вытекать и равномерная сходимость ряда (38) для всякой функции $f_1(x)$, подчиненной тем же условиям, что и $f(x)$.

Итак, *дело сводится к определению достаточных условий равномерной сходимости ряда* (39) *в промежутке* $[a, b]$. *Для всех функций* $f(x)$ *и* $f_1(x)$, *удовлетворяющих этим условиям, ряды* (36) *и* (36_2) *будут сходиться абсолютно и равномерно в промежутке* $[a, b]$ *при всяком* t.

20. При исследовании этого вопроса мы ограничимся простейшим случаем граничных условий первого класса (a) и предельным случаем (a_1) как имеющими непосредственное приложение к классической задаче о колебании упругих струн. Приемы доказательства сходимости ряда (39) для

*) И равномерная сходимость этих рядов в $(a \leqslant x \leqslant b,\ t \geqslant 0)$. (*Прим. ред.*)

других случаев будут, по существу, те же самые, что и для двух указанных выше.

Итак, допустим, что функции $V_k(x)$ ряда (39) определяются уравнениями

$$V_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)]\, V_k(x) = 0, \tag{40}$$

$$V_k'(b) - \alpha V_k(a) - \beta V_k(b) = 0,$$

$$V_k'(a) - \gamma V_k(a) + \alpha V_k(b) = 0. \tag{41}$$

При помощи (40) получаем

$$\lambda_k A_k = \lambda_k \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx = \int_a^b q(x) f(x) V_k(x)\, dx - \int_a^b f(x) V_k''(x)\, dx. \tag{42}$$

Имеем, интегрируя по частям,

$$\int_a^b f(x) V_k''(x) dx = (f(x) V_k'(x) - f'(x) V_k(x)) \Big|_a^b + \int_a^b f''(x) V_k(x)\, dx. \tag{43}$$

Мы допускаем, следовательно, что *функция* $f(x)$ *имеет вторую производную.*

Допустим, кроме того, что *функция* $f(x)$ *удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функции* $V_k(x)$, *т.е. что*

$$\begin{aligned} &f'(b) - \alpha f(a) - \beta f(b) = 0,\\ &f'(a) - \gamma f(a) + \alpha f(b) = 0. \end{aligned} \tag{43_1}$$

При этом

$$(f(x) V_k'(x) - f'(x) V_k(x)) \Big|_a^b = 0$$

и формулы (41) и (42) приводят к следующей:

$$\lambda_k A_k = \int_a^b [q(x) f(x) - f''(x)] V_k(x)\, dx.$$

Сделаем, наконец, еще следующие предположения:

1^0. *Вторая производная* $f''(x)$ *удовлетворяет неравенству Коши*

$$|f''(x') - f''(x)| \leqslant \mu\, |x' - x|. \tag{44}$$

2^0. *Функция* $p(x)$ *положительна и не обращается в нуль ни в одной из точек промежутка* $[a, b]$.

3^0. *Функции* $p(x)$ *и* $q(x)$*) *не только непрерывны, но также подчиняются условию Коши, т.е.*

$$|p(x') - p(x)| \leqslant \mu_1 |x' - x|, \quad |q(x') - q(x)| \leqslant \mu_2 |x' - x|, \tag{44_1}$$

где μ, μ_1, μ_2 *суть числа*, не зависящие от положения точек x' и x в промежутке $[a, b]$.

*) Само собой разумеется, что $q(x)$ остается неотрицательной в промежутке $[a, b]$.

При этом функция

$$\varphi(x) = \frac{q(x)f(x) - f''(x)}{p(x)} \tag{45}$$

будет непрерывной функцией, также удовлетворяющей условию Коши.

Легко убедиться, что

$$[\varphi(x') - \varphi(x)]\, p(x)p(x') =$$
$$= p(x)q(x')\,[f(x') - f(x)] - p(x)\,[f''(x') - f''(x)] + [p(x') - p(x)]\, f''(x) +$$
$$+ f(x)\left\{p(x)\,[q(x') - q(x)] - q(x)\,[p(x') - p(x)]\right\}.$$

Так как в данном случае несомненно

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \mu_0\, |x' - x|,$$

где μ_0 есть число, не зависящее от положения точек x' и x, то, обозначая через P_0 и Q_0 $\max p(x)$ и $q(x)$, через p_0 $\min p(x)$, через M и M_2 $\max |f(x)|$ и $|f''(x)|$ в промежутке $[a, b]$ и положив

$$g = \frac{P_0(Q_0\mu_0 + \mu + \mu_2) + \mu_1(M_2 + MQ_0)}{p_0^2}\,,$$

получаем, при помощи (44) и (44_1),

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| \leqslant g\, |x' - x|, \tag{46}$$

где g есть, очевидно, число, не зависящее от положения точек x' и x в рассматриваемом промежутке $[a, b]$.

Приняв в расчет (45), можем писать

$$\lambda_k A_k = \int_a^b p(x)\varphi(x)V_k(x)\,dx = A'_k, \tag{47}$$

где $\varphi(x)$ есть функция, удовлетворяющая условию (46).

21. Воспользуемся опять формулой (60_1) п. 27 и обозначениями п. 28 предыдущей главы. Получаем, при помощи (47),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k V_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A'_k B_k(x).$$

Ряд правой части этого равенства отличается лишь обозначением от ряда (65) п. 29 предыдущей главы.

Повторив дословно приведенные в указанных пунктах этой главы рассуждения, убеждаемся, что *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, |A'_k B_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, |A_k V_k(x)|$$

при сделанных в предыдущем пункте предположениях относительно функции $f(x)$ *и функций* $p(x)$ *и* $q(x)$ *сходится равномерно в промежутке* $[a, b]$.

Отсюда на основании сказанного в конце п. 19 заключаем, что *ряды* (36) *и* (36_2) *сходятся абсолютно и равномерно в промежутке* $[a, b]$ *при всяком* t, *если предположить, что функция* $f_1(x)$ *удовлетворяет тем же условиям* (43_1) *и* (44), *что и функция* $f(x)$.

22. Заметим, что для функции $f_1(x)$ условие (44) несущественно.

Ряд (38) будет сходиться равномерно, если $f_1(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной, допускает вторую производную, интегрируемую в промежутке $[a, b]$, и удовлетворяет условиям

$$f_1'(b) - \alpha f_1(a) - \beta f_1(b) = 0,$$

$$f_1'(a) - \gamma f_1(a) + \alpha f_1(b) = 0.$$

В самом деле, приняв в расчет выражение (35) для C_k, получаем, подобно предыдущему,

$$\lambda_k C_k = \int_a^b p(x)\varphi_1(x)V_k(x)\,dx = C'_k,$$

где $\varphi_1(x) = \dfrac{q(x)f_1(x) - f_1''(x)}{p(x)}$, и затем, на основании (60_1) п.27 гл.X и (38),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \,|B_k V_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\; |C'_k B_k(x)|.$$

Но $\sqrt{\lambda_k}\;|C'_k B_k(x)| \leqq \dfrac{1}{2}\,(C'^2_k + \lambda_k B_k^2(x))$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C'^2_k$ сходится, какова бы ни была интегрируемая функция $\varphi(x)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2(x)$ сходится при всяком x в промежутке $[a, b]$, как указано в п. 28 гл. X, то ряд (38) также сходится.

Доказав его сходимость, докажем затем приемом, указанным в п. 29 предыдущей главы, что ряд (38) сходится не только абсолютно, но и равномерно.

23. Остается еще доказать сходимость первых из рядов (37) и (37_1). В силу второго из уравнений (35) достаточно установить только сходимость первого из них.

Мы только что доказали абсолютную и равномерную сходимость ряда (36_2), обозначенного через S_4. Поэтому можем утверждать, что ряд $\int_a^x S_4\,dx$ сходится также абсолютно и равномерно. Но, в силу (36_1),

$$\int_a^x S_4\,dx = S_3 - S_3\,|_{x=a}, \tag{47_1}$$

где $S_3\,|_{x=a} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\,V'_k(a)$.

Приняв в расчет второе из уравнений (41), получаем

$$S_3\,|_{x=a} = \alpha S_0(a) + \beta S_0(b),$$

где положено вообще

$$S_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \cos t\sqrt{\lambda_k})\,V_k(x).$$

Так как на основании вышесказанного этот ряд сходится абсолютно и равномерно во всем промежутке $[a, b]$, то ряд $S_3 |_{x=a}$ сходится абсолютно.

Отсюда на основании (47_1) заключаем, что ряд S_3 сходится равномерно в промежутке $[a, b]$.

24. Сопоставляя все сказанное в этом и предыдущих пунктах, приходим к следующему результату:

Функция $U(x, t)$, определяемая рядом

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos t\sqrt{\lambda_k} + B_k \sin t\sqrt{\lambda_k})\, V_k(x), \tag{48}$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \int_a^b p(x) f(x) V_k(x)\, dx, \\ B_k &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b p(x) f_1(x) V_k(x)\, dx, \end{aligned} \tag{48_1}$$

а $V_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ представляет полную систему фундаментальных функций первого класса, есть непрерывная функция вместе со своими производными первых двух порядков по t и x, действительно удовлетворяющих уравнению (B), *начальным условиям* (3) *и предельным условиям* (a), *если заданные функции $p(x)$ и $q(x)$ и произвольные функции $f(x)$ и $f_1(x)$ обладают следующими свойствами*:

$f(x)$ и $f_1(x)$ непрерывны вместе со своими первыми производными и каждая из них удовлетворяет условиям

$$F'(b) - \alpha F(a) - \beta F(b) = 0,$$

$$F'(a) - \gamma F(a) + \alpha F(b) = 0,$$

вторая производная от $f(x)$ подчиняется неравенству Коши, а вторая производная от $f_1(x)$ только интегрируема в промежутке $[a, b]$.

Функция $p(x)$ положительна (не обращается в нуль), $q(x)$ неотрицательна, и обе удовлетворяют условию Коши в рассматриваемом промежутке.

Решение задачи, даваемое рядом (48), *есть единственно возможное.*

Как видим, строгое решение задач математической физики второго типа получается при бóльших ограничениях, по сравнению с задачами теории тепла, как свойств функций $p(x)$ и $q(x)$, входящих в основное уравнение (B), так и в особенности свойств задаваемых произвольно функций $f(x)$ и $f_1(x)$, освободиться от которых затруднительно.

25. Остановимся еще на задаче, требующей определить функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (B), начальным условиям (3) и граничным условиям

$$U(a, t) = 0, \quad U(b, t) = 0. \tag{a_1}$$

В частности, при $q(x) = 0$ получается задача о колебании неоднородной струны данной длины $b - a = l$, закрепленной в концах.

В случае $p(x) = a^2$ получается такая же задача об однородной струне, изучение которой положило, как известно, начало всем современным теориям математической физики и привело к решению многих связанных с этими теориями важных вопросов анализа.

Решение, как и в общем случае, представится рядом (18) (или (48)), если в нем под $V_k(x)$ подразумевать фундаментальные функции, определяемые уравнениями

$$V''_k(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)] V_k(x) = 0, \tag{49}$$

$$V_k(b) = 0, \quad V_k(a) = 0. \tag{50}$$

Вопрос, как и в предыдущем случае, сводится к определению условий, при которых действительно выполняются начальные условия (20), а ряды (38) и (39) сходятся равномерно.

На основании теоремы п. 30 предыдущей главы заключаем, что условия (20) несомненно будут выполнены, если функции $f(x)$ и $f_1(x)$ имеют первые производные и удовлетворяют равенствам

$$\left.\begin{aligned} &f(a) = f(b) = 0, \\ &f_1(a) = f_1(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{50$_1$}$$

что мы и будем предполагать.

Остается найти условия, достаточные для равномерной сходимости рядов (38) и (39).

26. Предположим, что $f(x)$ имеет вторую производную.

Формулы (42) и (43) дают, в силу (50$_1$),

$$\lambda_k A_k = \int_a^b p(x)\varphi(x) V_k(x)\, dx = A'_k, \tag{51}$$

где, как и в п. 20, функция $\varphi(x)$ определяется равенством (45).

Применив снова формулу (60$_1$) п. 27 предыдущей главы, получаем, при помощи (51),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |A_k V_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |A'_k B_k(x)|. \tag{39}$$

Мы уже знаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2(x)$$

есть ряд сходящийся. Что же касается ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A'^2_k,$$

то на основании теоремы п. 24 гл. X он будет сходящимся, если функция $\varphi(x)$ обращается в нуль для пределов a и b промежутка $[a, b]$ и удовлетворяет условию Коши. Последнее условие будет соблюдено, если функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ подчиняются требованиям 1^0, 2^0 и 3^0 п. 20, а условия

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

на основании (50_1) и (45) приводятся к таким:

$$f''(a) = f''(b) = 0.$$

Из сказанного вытекает (ср. п. 21), что ряд (39) при соблюдении только что указанных условий сходится равномерно.

Что же касается равномерной сходимости ряда (38), то она доказывается в данном случае совершенно так же, как и в п. 22, при одном условии, что функция $f_1(x)$ имеет вторую производную, интегрируемую в промежутке $[a, b]$.

Таким образом, *функция* $U(x, t)$, *определяемая рядом* (48), *где коэффициенты* A_k *и* B_k *имеют вид* (48_1), *а* $V_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *представляют полную систему фундаментальных функций первого предельного класса, есть непрерывная функция со своими производными двух первых порядков по переменным* t *и* x, *действительно удовлетворяющая уравнению* (B), *начальным условиям* (3) *и граничным условиям вида*

$$U(a, t) = 0,$$

$$U(b, t) = 0,$$

если функции $p(x)$, $q(x)$ *уравнения* (B) *и произвольно задаваемые функции* $f(x)$ и $f_1(x)$ *обладают следующими свойствами:*

функция $p(x)$ *положительна,* $q(x)$ *неотрицательна, и обе удовлетворяют неравенству Коши в промежутке* $[a, b]$;

функции $f(x)$ и $f_1(x)$ *непрерывны со своими первыми производными и удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} &f(a) = 0, \\ &f(b) = 0, \\ &f_1(a) = 0, \\ &f_1(b) = 0; \end{aligned} \qquad (52)$$

Кроме того, функция $f(x)$ *имеет вторую производную, подчиненную неравенству Коши и обращаются в нуль при* $x = a$ *и* $x = b$, *а* $f_1(x)$ *имеет вторую производную, только интегрируемую в промежутке* $[a, b]$.

Решение, даваемое рядом (48), *есть единственно возможное.*

27. Заметим, что ограничения, налагаемые на заданные функции $f(x)$ и $f_1(x)$ уравнениями (52), вытекают из самой сущности задачи.

В самом деле, $f(x)$ и $f_1(x)$ представляют соответственно начальные (при $t = 0$) отклонения упругой струны от положения равновесия и скорости, которые сообщаются отклоненным точкам в начальный момент времени.

Так как струна предполагается закрепленной в концах, то, понятно, и в начальный момент времени эти величины должны равняться нулю, что аналитически и выражается равенствами (52).

Наиболее стеснительными условиями, не вытекающими непосредственно из физического смысла задачи, является требование о существовании непрерывных производных двух первых порядков от функции $f(x)$ и $f_1(x)$ и в особенности требование, чтобы $f''(x)$ обращалась в нуль на концах промежутка $[a, b]$.

Нетрудно видеть, что эти дополнительные ограничения являются прямым следствием того, что в данного рода задачах приходится доказывать абсолютную и равномерную сходимость рядов (36), (36_1) и (36_2) и при $t = 0$, тогда как в задачах первого типа (теории теплоты) благодаря входящему в каждый член соответствующих рядов множителю $e^{-\lambda_k t}$ легко устанавливается их сходимость как раз для значений t, больших нуля.

Вообще, необходимость доказывать равномерную сходимость рассматриваемых рядов вытекает из самой сущности метода Ляме – Фурье (Эйлера – Бернулли), дающего выражение искомой функции $U(x, t)$ в виде бесконечного ряда (48) (или ряда (4) в случае задач), просуммировать который или преобразовать к виду, удобному для дифференцирования, в общем случае не представляется возможным.

По необходимости приходится изображать производные по t и x от функции $U(x, t)$ рядами, составленными из производных от членов ряда (48), которым определяется функция $U(x, t)$, что возможно лишь при равномерной сходимости рядов (36), (36_1) и (36_2) (или (5), (6) и (7)). Отсюда именно и вытекают указанные выше дополнительные ограничения свойств функций $f(x)$ и $f_1(x)$, обуславливаемые не физическими требованиями задачи, а методом ее решения.

К сожалению, никакого другого приема, столь же общего и столь же соответствующего существу дела, как изложенный выше, не существует, и во всех немногочисленных простейших частных случаях*), подвергнутых исследованию, окончательное решение обыкновенно приводится к изображению искомой функции при помощи рядов (48) или (4).

Однако строгого обоснования рассматриваемого приема для общего случая и выяснения тех достаточных условий, при наличии которых применение его является несомненно законным, до сих пор не было дано.

Теоремы пп. 10, 24 и 26 пополняют этот пробел, сводя число дополнительных ограничений, налагаемых на функции $f(x)$ и $f_1(x)$, к возможно меньшему.

28. В тех простейших случаях, когда представляется возможность найти сумму ряда (48), оказывается возможным получить решение задачи при несколько более общих условиях относительно задаваемых функций $f(x)$ и $f_1(x)$.

Такие случаи весьма немногочисленны, и их основным типом служит классическая задача о колебании упругой однородной струны, которая получается, если в указанной выше общей задаче принять $p(x) = 1/a^2$, $q(x) = 0$. В этом случае $a = 0$, $b = l$, где l означает длину струны, закрепленной в точках 0 и l, а

$$V_k(x) = \frac{a\sqrt{2}}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$A_k = \frac{\sqrt{2}}{al} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \qquad B_k = \frac{\sqrt{2}}{a^2 k\pi} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

*) К таковым принадлежат задача о колебании однородной струны при различных предельных условиях простейшего вида, задача об охлаждении однородного твердого стержня и т.п.

и, по формуле (48),

$$U(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{ka\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+$$
$$+\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{ka\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{53}$$

Это есть известная формула Эйлера – Бернулли.

29. В рассматриваемом простейшем примере этот ряд легко суммируется, причем, как известно, получается следующий результат:

$$U(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at), \tag{54}$$

где

$$\varphi(x+at)=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} f_1(\xi)\,d\xi,$$
$$\psi(x-at)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} f_1(\xi)\,d\xi, \tag{54_1}$$

а функции $f(x)$ и $f_1(x)$ продолжаются за пределы промежутка $[0,l]$, где они заданы, так, чтобы $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ вышли периодическими функциями от ξ с периодом $2l$*). Отсюда видим, что *функция* $U(x,t)$, *определяемая рядом* (53) *или, что то же, формулами* (54) *и* (54_1), *действительно дает решение задачи лишь в том случае, если функция* $f(x)$ *имеет производные двух первых порядков, а функция* $f_1(x)$ *– производную первого порядка, причем, как это следует из физических требований задачи, нужно допустить, что* $f(x)$ и $f_1(x)$ *удовлетворяют условиям* (52).

30. Этот классический пример показывает, что только что указанные ограничения свойств функций $f(x)$ и $f_1(x)$ вызываются самой сущностью задачи и что нет оснований рассчитывать на возможность освободиться от некоторых из них при исследовании общего случая.

Сравнивая затем результат, полученный для рассматриваемого простейшего случая, с общими теоремами п. 26 или 24, можем признать дополнительные ограничения, которые несомненно должны возникать при самой общей постановке вопроса и которые действительно имеются в этих теоремах, сравнительно незначительными и устранимыми лишь в частных, наиболее простых случаях, подобных указанному в предыдущем пункте.

---

*) Не останавливаясь на хорошо известном доказательстве, отсылаем читателя к соч. акад. А.Н. Крылова "О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах" (С.-Петербург, 1913, стр. 145), а также трактату Жордана (C. Jordan "Cours d'Analyse" (Paris, 1887, T. III, стр. 392)).

ЧАСТЬ II

Основные задачи математической физики для тел трех измерений

ГЛАВА I

Потенциал объемных масс и его основные свойства. Теорема Пуассона. Преобразование объемных интегралов и теоремы Грина. Гармонические функции и их основные свойства. Решение задачи Дирихле для сферы по методу Шварца. Теорема Вито Вольтерра. Потенциал простого слоя и его основные свойства. Производные двух первых порядков и нормальные производные от потенциала простого слоя. Теорема Пуассона и относящиеся сюда неравенства А.М. Ляпунова. Потенциал двойного слоя и его основные свойства. Теоремы А.М. Ляпунова о нормальных производных потенциала двойного слоя

1. В первой части сочинения изложены подробно общие приемы решения основных задач математической физики для простого случая тел линейных размеров. Мы перейдем теперь к изучению более сложного вопроса о методах решения подобных же задач, примеры которых были указаны в гл. II части I, для тел трех измерений. Мы уже видели, что простейшими типами этих задач являются так называемые задачи Дирихле и К. Неймана (или основная задача гидродинамики). Сюда же следует отнести и задачу о распределении электричества на замкнутых кондукторах или задачу Робена, которую, как увидим ниже, можно рассматривать как частный случай задачи Дирихле. К решению этих последних задач сводится решение всех других главнейших задач теории тепла, света, звука, электричества и т.п. Поэтому мы займемся прежде всего изложением методов решения задач Дирихле, К. Неймана и Робена. При этом необходимо придется пользоваться не только основными теоремами теории притяжения (потенциала), излагаемыми в общих трактатах по механике, но многими свойствами различного типа потенциалов, которые с надлежащей строгостью и общностью установлены сравнительно недавно, преимущественно трудами акад. А.М. Ляпунова, и до настоящего времени еще не введены в общие курсы механики и анализа. Поэтому, прежде чем приступить к главному предмету наших исследований, мы, напомнив уже известные предложения из теории притяжения, изложим обстоятельно доказательства только что упомянутых новых теорем и неравенств, относящихся к теории так называемых потенциалов простого и двойного слоев.

2. Обозначим через (D) область пространства, ограниченную некоторой замкнутой поверхностью (S) и заполненную массами, взаимодействующими по закону Ньютона. Обозначим через μ плотность этих масс, которая будет, вообще говоря, функцией координат ξ, η, ζ точек объема (D), ограниченного поверхностью (S). Мы предположим, что μ *есть непрерывная функция координат* *). Обозначим через $d\tau$ элемент этого объема, через

*) В замыкании области (D). (*Прим. ред.*)

r — расстояние какой-либо точки ξ, η, ζ области (D) от некоторой другой точки x, y, z пространства, в которой предположим сосредоточенной массу, равную единице.

Точка x, y, z будет притягиваться массами, заполняющими объем (D), с некоторой силой, *потенциалом* которой называется интеграл

$$U = \int \frac{\mu d\tau}{r} , \tag{1}$$

распространенный на весь объем (D). Здесь $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$, $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ и интегрирование ведется по переменным ξ, η, ζ.

Потенциал U есть функция переменных x, y, z непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка по x, y, z во всем бесконечном пространстве и обращающаяся в нуль для бесконечно удаленных (от начала координат) точек, так что

$$R\,|U| < M, \tag{2}$$

$$R^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| < M, \quad R^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| < M, \quad R^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| < M, \tag{2_1}$$

где M есть конечная постоянная, а R обозначает расстояния точки x, y, z от начала координат.

Если обозначим через X, Y, Z проекции на оси координат силы, с которой точка $M(x, y, z)$ притягивается телом (D), то получим

$$\begin{gathered} X = \frac{\partial U}{\partial x} = \int \mu \frac{\xi - x}{r^3} d\tau, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \int \mu \frac{\eta - y}{r^3} d\tau, \\ Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \int \mu \frac{\zeta - z}{r^3} d\tau . \end{gathered} \tag{3}$$

3. Частные производные второго порядка по x, y, и z от функции U остаются непрерывными для всех точек, лежащих вне области (D), и удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

вне области (D).

Для точек x, y, z, лежащих в области (D) (внутри замкнутой поверхности (S), ограничивающей область (D)), эти производные при одном только условии непрерывности функции μ, вообще говоря, теряют определенный смысл, но если допустить, что μ имеет частные производные $\frac{\partial \mu}{\partial \xi}, \frac{\partial \mu}{\partial \eta}, \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$, непрерывные внутри (S), то вторые частные производные от U по координатам x, y, z будут конечны и определены во всех точках области (D) и удовлетворяют уравнению

$$\Delta U = -4\pi\mu \tag{5}$$

в области (D), которое носит название *уравнения Пуассона.*

Доказательство этой общеизвестной теоремы можно найти в любом трактате по теории притяжения и во многих курсах анализа *). Условие непрерывности первых частных производных от функции μ есть одно из достаточных условий справедливости только что высказанной теоремы и может быть заменено другими условиями более общего характера.

Одно из таких условий указано впервые Гёльдером в его диссертации "Beiträge zur Potentialtheorie" (Inauguraldissertation, Stuttgart, 1882). Мы формулируем теорему Гельдера следующим образом:

Если вокруг точки $M(x, y, z)$ области (D) *можно построить такую область* (D_1), *целиком лежащую внутри* (D), *что для всякой пары точек* $M'(x', y', z')$ *и* $M''(x'', y'', z'')$ *области* (D_1) *функция* μ *удовлетворяет условию*

$$|\mu(x'', y'', z'') - \mu(x', y', z')| < \beta r^{\alpha},$$

где β *и* $\alpha < 1$ *суть две определенные постоянные, а* r *есть расстояние между точками* M'' *и* M', *то вторые частные производные функции* U *(потенциал объемных масс плотности* μ *) имеют определенные значения в точке* $M(x, y, z)$ *и удовлетворяют в этой точке уравнению Пуассона.*

Доказательство Гёльдера довольно сложно и может быть заменено более простым, которое я и приведу в следующем пункте **).

4. Пусть m – какая-либо точка области (D). Допустим, что около этой точки можно описать сферу (Σ) некоторого определенного радиуса R такую, что для точки m и всякой другой точки m_1 внутри (Σ) имеет место неравенство

$$|\mu - \mu_1| < \beta d^{\alpha}, \tag{6}$$

где μ и μ_1 обозначают значения плотности в точках m и m_1, а d есть расстояние между ними.

Опишем вокруг точки m другую сферу (σ) достаточно малого радиуса ρ и обозначим через $d\tau_1$ элемент объема шара, ограниченного сферой (σ), через $d\tau_2$ – элемент объема остальной части области (D), ограниченной данной поверхности (S). Потенциал масс, заполняющих с плотностью μ область (D), на точку x, y, z представится в виде

$$U = \int \frac{\mu'}{r} d\tau_2 + \int \frac{\mu'}{r} d\tau_1,$$

где μ' – значение плотности μ в переменной точке ξ, η, ζ области (D), откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(m) = \int \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau_2 + \int \frac{\mu'(\xi - x)}{r^3} d\tau_1. \tag{7}$$

Возьмем внутри сферы (σ) другую точку m_1, достаточно близкую к m; не нарушая общности, можем предположить, что точка m_1 находится на положительном направлении оси x на расстоянии δ от точки m, причем δ подчинено единственному условию $\delta < \rho$. Положим

$$X_1(m) = \int \frac{\mu'(\xi - x)}{r^3} d\tau_1. \tag{8}$$

*) См., например, Жордана (Jordan) "Cours d'Analyse", T. II (Paris, 1894, p. 196).

**) В доказательство этого утверждения внесены некоторые изменения. (*Прим. ред.*)

Обозначим через r_1 расстояние точки m_1 от переменной точки ξ, η, ζ объема, ограниченного сферой (σ). Величина предыдущего интеграла $X_1(m)$ для точки m_1 представится в виде

$$X_1(m_1) = \int \frac{\mu'(\xi - x - \delta)}{r_1^3}\, d\tau_1 .$$

Из этих двух равенств выводим

$$I = \frac{X_1(m_1) - X_1(m)}{\delta} = \int \frac{\mu'}{\delta}\left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right) d\tau_1 . \tag{9}$$

Положив

$$I_1 = \int (\mu' - \mu)\left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta},$$

можем писать

$$I = \mu \int \left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta} + I_1 . \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int \left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta}$$

представляет собой значение второй частной производной по x от потенциала однородной сферы с плотностью, равной единице, на точку x, y, z. Как известно (см. любой курс теории притяжения),

$$\lim_{\delta \to 0} \int \left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta} = -\frac{4\pi}{3},$$

следовательно,

$$\lim_{\delta \to 0} \mu \int \left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta} = -\frac{4\pi}{3}\mu . \tag{11}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_1, который можно написать в виде

$$I_1 = \int (\mu' - \mu)(\xi - x - \delta)\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta} - \int (\mu' - \mu)\frac{d\tau_1}{r^3} = K + K' . \tag{12}$$

Если обозначим через $d\omega$ элемент поверхности сферы радиуса единица, то получим

$$d\tau_1 = r^2\, d\omega\, dr . \tag{13}$$

В силу (6) и (13)

$$\int |\mu' - \mu| \frac{d\tau_1}{r^3} \leqslant \beta \int d\omega \int_0^\rho r^{\alpha - 1}\, dr = \frac{4\pi\beta}{\alpha}\rho^\alpha \tag{14}$$

и, следовательно

$$|K'| = |\int (\mu' - \mu) \frac{d\tau_1}{r_1^3}| \leqslant \int |\mu' - \mu| \frac{d\tau_1}{r^3} \leqslant \frac{4\pi\beta}{\alpha} \rho^{\alpha}. \tag{15}$$

Рассмотрим, наконец, интеграл

$$K = \int (\mu' - \mu)(\xi - x - \delta)\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta}. \tag{16}$$

Имеем

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{(r^2 - r_1^2)(r^2 + rr_1 + r_1^2)}{\delta r_1^3 r^3 (r + r_1)} = \frac{(2(\xi - x) - \delta)(r^2 + rr_1 + r_1^2)}{r^3 r_1^3 (r + r_1)},$$

откуда

$$\left|\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)\right| \leqslant \frac{(r^2 + rr_1 + r_1^2)}{r^3 r_1^3} \leqslant \frac{3(r^2 + r_1^2)}{2r^3 r_1^3},$$

ибо $|\xi - x| \leqslant r$, $|\xi - x - \delta| \leqslant r_1$, $rr_1 \leqslant (r^2 + r_1^2)/2$. Приняв в расчет эти неравенства и (6), получаем

$$|K| \leqslant \frac{3\beta}{2} \int r^{\alpha}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{rr_1^2}\right)d\tau_1. \tag{17}$$

Подобно предыдущему, можем писать

$$\int r^{\alpha - 3} d\tau_1 = \int d\omega \int_0^{\rho} r^{\alpha - 1} dr = \frac{4\pi}{\alpha}\rho^{\alpha}. \tag{18}$$

Опишем около точки m_1 другую сферу (σ') радиуса $\rho + \delta$ и обозначим через $d\tau_1'$ элемент объема шара, ограниченного этой сферой. Тогда

$$\int r^{\alpha - 1} \frac{d\tau_1}{r_1^2} \leqslant \int r^{\alpha - 1} \frac{d\tau_1'}{r_1^2} = \int d\omega \int_0^{\rho + \delta} r^{\alpha - 1} dr_1,$$

ибо $d\tau_1' = r_1^2\, d\omega dr_1$. Но

$$\int_0^{\rho + \delta} r^{\alpha - 1} dr_1 = \int_0^{\delta} r^{\alpha - 1} dr_1 + \int_{\delta}^{\rho + \delta} r^{\alpha - 1} dr_1.$$

Легко понять, что в первом из этих интегралов $r \geqslant \delta - r_1$, а во втором $r \geqslant r_1 - \delta$. Поэтому, помня, что $\alpha < 1$, получаем

$$\int_0^{\delta} r^{\alpha - 1} dr_1 \leqslant \int_0^{\delta} (\delta - r_1)^{\alpha - 1} dr_1 = \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha},$$

$$\int_{\delta}^{\rho + \delta} r^{\alpha - 1} dr_1 \leqslant \int_{\delta}^{\rho + \delta} (r_1 - \delta)^{\alpha - 1} dr_1 = \frac{\rho^{\alpha}}{\alpha},$$

т.е.

$$\int_0^{\rho+\delta} r^{\alpha-1}\, dr_1 \leqslant \frac{\delta^\alpha + \rho^\alpha}{\alpha}$$

и

$$\int r^{\alpha-1} \frac{d\tau_1}{r_1^2} \leqslant \frac{4\pi}{\alpha} (\delta^\alpha + \rho^\alpha).$$

Это неравенство вместе с (17) и (18) приводит к следующему:

$$|K| \leqslant \frac{6\pi\beta}{\alpha} (\delta^\alpha + 2\rho^\alpha). \tag{19}$$

Заметив, что в силу (12), $I_1 = K' + K$, выводим отсюда, при помощи (15) и (19),

$$|I_1| \leqslant \frac{6\pi\beta}{\alpha}\left(\delta^\alpha + \frac{8}{3}\rho^\alpha\right) \leqslant N_1 \rho^\alpha, \tag{20}$$

где N_1 есть конечное число. Это неравенство справедливо при любом δ, которое подчинено единственному условию $\delta < \rho$.

Очевидно, что последнее неравенство остается справедливым и в случае, когда точка m_1 находится на отрицательном направлении оси x $(-\rho < < \delta < 0)$.

Докажем, что существует производная по x функции $X = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ в точке m:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \lim_{\delta \to 0} \frac{X(m_1) - X(m)}{\delta} = \int \mu' \frac{\partial^2 (1/r)}{\partial x^2}\, d\tau_2 + \lim_{\delta \to 0} I. \tag{21}$$

Прежде всего покажем, что если ρ стремится к нулю, то интеграл в правой части предыдущего равенства стремится к определенному пределу. Для этого достаточно показать, что интеграл от функции $\mu' \dfrac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}$, распространенный на область, заключенную между двумя концентрическими сферами с радиусами ρ и ρ' и общим центром в точке m, стремится к нулю, когда ρ и ρ' стремятся к нулю одновременно.

Обозначая через $d\tau_2'$ элемент объема этой области, можем писать

$$\int \mu' \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}\, d\tau_2' = \mu \int \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}\, d\tau_2' + \int (\mu' - \mu) \left[\frac{3(x-\xi)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] d\tau_2',$$

где по-прежнему μ' есть значение плотности μ для точек рассматриваемой области, на которую распространяется интегрирование, а μ — значение плотности в точке m. Мы знаем, что первый интеграл правой части последнего равенства равен нулю*); что же касается второго, то, приняв во внимание

*) См., например, Жордана (C. Jordan) "Cours d'Analyse" (Paris, 1894, p. 201).

неравенство (6) и заметив что $\left|\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right|<\frac{4}{r^3}$, $d\tau_2'=r^2\,d\omega dr$, убеждаемся, что модуль его меньше, чем $4\beta\int d\omega\int\limits_{\rho'}^{\rho} r^{\alpha-1}\,dr=\frac{16\pi\beta}{\alpha}(\rho^\alpha-$ $-\rho'^\alpha)$. Слеповательно,

$$\lim_{\rho,\rho'\to 0}\int\mu'\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}d\tau_2'=0$$

Таким образом, доказано, что интеграл правой части равенства (21) стремится к определенному пределу при $\rho\to 0$ (обозначим его через I_x) и что

$$\lim_{\rho'\to 0}\left|\int\mu'\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}d\tau_2'\right|\leqslant\frac{16\pi\beta}{\alpha}\rho^\alpha=N_2\rho^\alpha. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь разность

$$\epsilon(\delta)=\left|\frac{X(m_1)-X(m)}{\delta}-I_x+\frac{4\pi}{3}\mu\right|.$$

При произвольном ρ, $\rho>|\delta|$, приняв в расчет (7) и (9), получаем

$$\epsilon(\delta)=\left|I+\frac{4\pi}{3}\mu+\frac{1}{\delta}\left[\int\mu'\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}d\tau_2-\int\mu'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\tau_2\right]-\right.$$

$$\left.-\int\mu'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}d\tau_2-\lim_{\rho'\to 0}\int\mu'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}d\tau_2'\right|$$

и, в силу (10), (20) и (22),

$$\epsilon(\delta)\leqslant|I_1|+\left|\int\left(\frac{\xi-x-\delta}{r_1^{\,3}}-\frac{\xi-x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta}+\frac{4\pi}{3}\right||\mu|+$$

$$+\left|\int\mu'\left(\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)\frac{d\tau_2}{\delta}-\int\mu'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}d\tau_2\right|+$$

$$+\left|\lim_{\rho'\to 0}\int\mu'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}d\tau_2'\right|\leqslant$$

$$\leqslant(N_1+N_2)\rho^\alpha+|\mu|\left|\int\left(\frac{\xi-x-\delta}{r_1^3}-\frac{\xi-x}{r^3}\right)\frac{d\tau_1}{\delta}+\frac{4\pi}{3}\right|+$$

$$+\left|\int\mu'\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)d\tau_2\right|=$$

$$=(N_1+N_2)\rho^\alpha+\epsilon_1(\delta,\rho)+\epsilon_2(\delta,\rho).$$

Возьмем произвольное положительное число ϵ' и выберем число ρ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $(N_1 + N_2)\,\rho^{\alpha} < \epsilon'/3$. Далее, при этом фиксированном ρ выберем положительное число δ_0 столь малым, чтобы для всех чисел δ, удовлетворяющих неравенству $|\delta| < \delta_0$, были выполнены неравенства

$$\epsilon_1(\delta,\rho) = |\mu| \left| \int \left(\frac{\xi - x - \delta}{r_1^3} - \frac{\xi - x}{r^3} \right) \frac{d\tau_1}{\delta} + \frac{4\pi}{3} \right| < \epsilon'/3 \qquad (\text{см. (11)})$$

и

$$\epsilon_2(\delta,\rho) = \left| \int \mu' \left(\frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \right) d\tau_2 \right| < \epsilon'/3.$$

Таким образом, $\epsilon(\delta)$ является величиной, стремящейся к нулю одновременно с δ, т.е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = I_x - \frac{4\pi}{3}\mu. \tag{23}$$

Из всего сказанного выше следует, что *если плотность объемных масс удовлетворяет условию Гельдера, то в любой точке внутри этих масс вторая производная от потенциала U по x имеет определенное значение.*

Совершенно так же можно доказать и следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = I_y - \frac{4\pi}{3}\mu, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = I_z - \frac{4\pi}{3}\mu, \tag{25}$$

где

$$I_y = \lim_{\rho \to 0} \int \mu' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} d\tau_2, \quad I_z = \lim_{\rho \to 0} \int \mu' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} d\tau_2.$$

Сложив равенства (23), (24) и (25), получим $\Delta U = -4\pi\mu$, ибо, как известно, при всяком ρ

$$\int \mu \Delta \frac{1}{r} d\tau_2 = 0,$$

а следовательно,

$$I_x + I_y + I_z = \lim_{\rho \to 0} \int \mu' \Delta \frac{1}{r} d\tau_2 = 0.$$

Таким образом, *функция U при условии Гельдера относительно плотности μ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi\mu$ внутри поверхности* (*S*) (в области (*D*)).

5. Нетрудно установить высшие пределы для значений потенциала U и его первых частных производных в области (D) (внутри поверхности (S)).

Мы будем считать функцию μ, в соответствии с ее физическим смыслом (плотность), положительной во всех точках области (D), причем потенциал U (равенство (1)) будет также положительной функцией во всем пространстве. Очевидно,

$$U \leqslant \mu_0 \int \frac{d\tau}{r},$$

где μ_0 есть max μ в области (D) *).

Если обозначим через l радиус шара, объем которого равен объему данного тела, то как нетрудно убедиться,

$$0 < \int \frac{d\tau}{r} \leqslant 2\pi l^2. \tag{26}$$

Поэтому

$$0 < U \leqslant 2\pi\mu_0 l^2. \tag{27}$$

Так как $|(\xi - x)/r| \leqslant 1$, то $|X| = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \leqslant \mu_0 \int \frac{d\tau}{r^2}$. Но

$$\int \frac{d\tau}{r^2} \leqslant 4\pi l. \tag{28}$$

Следовательно,

$$|X| = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \leqslant 4\pi\mu_0 l. \tag{29}$$

Этими неравенствами придется пользоваться впоследствии.

6. Будем подразумевать теперь под U какую угодно функцию координат x, y, z непрерывную с ее частными производными первого порядка как внутри, так и вне некоторой замкнутой поверхности (S), разграничивающей все пространство на две области (D) и (D'), из которых первая лежит внутри поверхности (S), вторая – вне ее. Поверхность (S) мы будем называть иногда *границей* областей (D) и (D'), причем эта поверхность может состоять и из совокупности нескольких отдельных замкнутых поверхностей. При переходе через границу (S) как сама функция U, так и ее первые частные производные могут испытывать разрыв.

Вообще говоря, можно предполагать, что U не будет стремиться к определенному пределу, когда мы будем приближаться с точкой x, y, z к какой-либо точке поверхности (S) по тому или иному пути, что предел этот существует с одной и не существует с другой стороны (S), что величина его зависит от пути, по которому мы подходим к поверхности (S); можно допустить, что пределы эти существуют, но выражение U, если в него непосредственно подставим значения координат соответствующей точки поверхности, не имеет смысла, или, наоборот, это последнее выражение для U получает определенное значение, но отличное от его соответствующих (для данной точки поверхности (S)) предельных значений функции U, и т.п.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь тот случай, когда функция U стремится к определенным пределам во всех точках поверхности (S),

*) В замыкании области (D). (*Прим. ред.*)

если мы будем приближаться к точкам этой поверхности как с внутренней, так и с внешней стороны, что предельные значения U на поверхности (S) не зависят от пути, по которому мы подходим к точкам (S), и что U стремится равномерно к своим пределам для всех точек поверхности (S). Мы предположим также, что функция U принимает определенные значения во всех точках (S), когда мы в выражение функции U подставим непосредственно вместо x, y, z координаты любой точки поверхности (S).

Предел, к которому стремится U, когда мы будем подходить к какой-либо точке (S) с внутренней стороны, мы обозначим через U_i; предел, к которому стремится U, когда мы будем приближаться к точкам (S) с ее внешней стороны, обозначим через U_e. Значения функции U на самой поверхности (при непосредственной подстановке в выражение U координат точек поверхности (S)) будем обозначать через $\overline{U}$, или просто через U (без черты наверху), когда отсутствие черты сверху U не может вызвать по ходу дела никаких недоразумений.

7. Мы будем предполагать в дальнейшем, что поверхность (S) имеет определенную касательную плоскость в каждой точке, и обозначать через n направление *внешней нормали* к (S), т.е. то направление нормали, которое идет от точки поверхности (S) в область (D'), внешнюю относительно (S). Прямо противоположное направление нормали будем называть *внутренней нормалью*. Обозначим через α, β, и γ углы, составляемые направлением n (внешней нормалью) с осями координат.

Возьмем какую-либо точку M' внутри (S), лежащую на нормали к (S) в точке $M(x, y, z)$, достаточно близкую к этой последней точке, и составим выражение

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma, \tag{30}$$

где частные производные от U суть функции координат точки M'. Предположим, что M', двигаясь по нормали, приближается к M. Предел, к которому стремится при этом выражение (30), мы будем обозначать, если таковой существует, через $\dfrac{\partial U_i}{\partial n}$ и будем называть *внутренней нормальной производной от U* в точке x, y, z поверхности (S).

Если предположим, что точка M' лежит на нормали к (S) с ее внешней стороны и, двигаясь по этой нормали, стремится к точке M, то предел, к которому будет стремиться выражение (30), если таковой существует, будем обозначать через $\dfrac{\partial U_e}{\partial n}$ и называть *внешней нормальной производной от U* в точке x, y, z поверхности (S).

Значение выражения (30), которое оно получит, если в него непосредственно подставить координаты x, y, z точки M поверхности (S), мы будем обозначать просто через $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ и называть *значением нормальной производной от U на поверхности (S)* *).

*) Разумеется, если при этом выражение (30) имеет определенный смысл.

8. Возьмем две функции U и V, из которых каждая имеет нормальные производные на поверхности (S) (внутреннюю и внешнюю) и, кроме того, определенные вторые частные производные как внутри, так и вне поверхности (S) (во всех точках областей (D) и (D'), исключая точки самой поверхности (S)). Имеет место слудующая формула преобразования одного объемного интеграла в два других: один объемный же, а другой поверхостный:

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau=-\int U\Delta V d\tau+\int U_i\frac{\partial V_i}{\partial n}ds, \tag{31}$$

где по-прежнему $d\tau$ означает элемент объема (D), а ds – элемент поверхности (S), на которую распространяется последний интеграл правой части этого равенства. Так как левая часть равенства (31) симметрична относительно функций U и V, то можем также писать

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau=-\int V\Delta U d\tau+\int V_i\frac{\partial U_i}{\partial n}ds. \tag{32}$$

Из равенств (31) и (32) вытекает следующая формула Грина:

$$\int(U\Delta V-V\Delta U)d\tau=\int\left(U_i\frac{\partial V_i}{\partial n}-V_i\frac{\partial U_i}{\partial n}\right)ds. \tag{33}$$

9. Предположим, в частности, что функции U и V удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta U=0,\quad \Delta V=0$$

внутри (D). При этом равенство (33) приводится к виду

$$\int\left(U_i\frac{\partial V_i}{\partial n}-V_i\frac{\partial U_i}{\partial n}\right)ds=0. \tag{34}$$

Положив здесь $V=1$, получим

$$\int\frac{\partial U_i}{\partial n}ds=0 \tag{35}$$

– равенство, имеющее место для любой функции U, удовлетворяющей уравнению Лапласа внутри области (D).

Из равенства (34) выводится также следующая важная формула Грина, справедливая для всех точек области (D):

$$U=\frac{1}{4\pi}\int U_i\frac{\cos\varphi}{r^2}ds+\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U_i}{\partial n}\frac{1}{r}ds, \tag{36}$$

где r есть расстояние точки x, y, z, к которой относится значение U, от переменной точки ξ, η, ζ поверхности (S), а φ есть угол, составляемый направлением, идущим от точки M (x, y, z) к точке ξ, η, ζ, с направлением нормали n к (S) в этой последней точке. Интегрирование в интегралах правой части этого равенства совершается по переменным ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

10. Допустим теперь, что функции U и V, подчиненные условиям п. 8 в области (D') (вне поверхности (S)), обращаются в нуль для бесконечно удаленных точек и удовлетворяют условиям (2) и (2_1). Если обозначим через $d\tau'$ элемент объема области (D'), то будем иметь

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau'=$$

$$=-\int U\Delta V d\tau'-\int U_e\frac{\partial V_e}{\partial n}ds=-\int V\Delta U d\tau'-\int V_e\frac{\partial U_e}{\partial n}ds, \tag{37}$$

где объемные интегралы распространяются на все точки пространства, внешнего относительно поверхности (S) (на всю область (D')), а поверхностные – на всю поверхность (S).

Из этого равенства вытекает следующая важная формула Грина, имеющая место для всякой функции U, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta U=0$ в области (D'):

$$U=-\frac{1}{4\pi}\int U_e\frac{\cos\varphi}{r^2}ds-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U_e}{\partial n}\frac{1}{r}ds, \tag{38}$$

аналогичная формуле (36).

Всякую функцию U, подчиненную условиям п.п. 6 и 8 и удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри области (D), будем называть *гармонической функцией в области* (D) (внутри поверхности (S)). Всякую функцию U, подчиненную условиям пп. 6 и 8 вне поверхности (S), неравенствам (2) и (2_1) и удовлетворяющую уравнению Лапласа во всех точках области (D'), будем называть *гармонической функцией в области* (D') (вне поверхности (S))*).

11. Предположим, что поверхность (S) есть сфера радиуса R, и применим формулу Грина (36) к точке, лежащей в центре этой сферы. Получим

$$U=\frac{1}{4\pi R^2}\int U_i\,ds. \tag{39}$$

Из этого равенства выводится следующая теорема:

Теорема I. *Отличная от постоянной гармоническая функция в какой-либо области (D), ограниченной замкнутой поверхностью (S), не может иметь ни максимума, ни минимума внутри (S).*

Иначе говоря, *наибольшие и наименьшие значения всякой гармонической в какой бы то ни было области (D) функции U необходимо лежат на поверхности (S), ограничивающей эту область.*

12. Формулы Грина приводят еще к следующим важным теоремам.

Теорема II. *Может существовать одна и только одна функция U, гармоническая внутри данной области (D), ограниченной замкнутой поверхностью (S), и принимающая на самой поверхности наперед заданные значения, т.е.*

---

*) Неравенства (2) и (2_1) следуют из стремления решения $U(x, y, z)$ уравнения Лапласа к нулю при $(x, y, z)\to\infty$. (*Прим. ред.*)

удовлетворяющая условиям

$$\Delta U = 0 \quad \textit{внутри}\,(S),$$
$$U_i = f \ \textit{на поверхности}\ (S), \tag{40}$$

где f есть заданная функция координат точек поверхности (S): эту функцию f в дальнейшем будем предполагать непрерывной.

Теорема III. *Может существовать одна и только одна функция U, гармоническая вне поверхности (S) (в области (D')) и принимающая наперед заданные значения на этой поверхности, т.е. удовлетворяющая условиям*

$$\Delta U = 0 \ \textit{вне}\ (S),$$
$$U_e = f \ \textit{на поверхности}\ (S). \tag{41}$$

Эти теоремы можно рассматривать также как прямые следствия теоремы I.

Определение гармонической функции U, подчиненной условиям (40) при данной поверхности (S), составляет *внутреннюю задачу Дирихле;* определение гармонической функции U, подчиненной условиям (41) для данной поверхности (S) составляет *внешнюю задачу Дирихле.*

13. При помощи формулы (36) получается простое решение внутренней задачи Дирихле в случае, когда поверхность (S) есть сфера данного радиуса R, указанное впервые Шварцем.

Если обозначим через l расстояние точки x, y, z, лежащей где-либо внутри сферы, от ее центра, то функция U, удовлетворяющая условиям

$$\Delta U = 0 \ \text{внутри сферы},$$
$$U_i = f \ \text{на поверхности сферы},$$

где f есть заданная функция координат точек поверхности сферы, представится в виде

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \int\!\!\int f \frac{R^2 - l^2}{r^3}\, ds. \tag{42}$$

Здесь ds есть элемент поверхности сферы $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и интегрирование по переменным ξ, η, ζ распространяется на всю поверхность сферы.

14. Наконец, при помощи формулы Шварца (42) и теоремы I без труда доказывается следующая теорема, впервые указанная итальянским геометром Вито Вольтерра.

Теорема IV. *Обозначим через $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_k, \ldots$ бесконечный ряд функций, гармонических внутри данной поверхности (S). Пусть $U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \ldots, U_{ki}, \ldots$ суть предельные значения, которые принимают функции U_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) на поверхности (S).*

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_{ki}$ сходится равномерно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ также сходится равномерно во всех точках внутри поверхности (S) (в области (D)) и представляет собой гармоническую функцию.

15. Другой основной задачей математической физики является, как уже упоминалось, задача К. Неймана (или основная задача гидродинамики),

которая, так же как и задача Дирихле, распадается на две: на задачи *внутреннюю и внешнюю.*

В первом случае требуется определить гармоническую функцию внутри данной замкнутой поверхности (S) при условии, что внутренняя нормальная производная искомой функции принимает наперед заданные значения на самой поверхности, т.е. требуется найти функцию координат, удовлетворяющую условиям

$$\Delta U = 0 \text{ внутри } (S),$$
$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S), \tag{43}$$

где f по-прежнему есть заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S).

Равенство (35) сейчас же приводит к заключению, что эта задача может иметь решение только в том случае, когда функция f подчинена условию

$$\int f ds = 0. \tag{44}$$

Если это условие соблюдено, то возможно существование функции U, удовлетворяющей уравнениям (43). При помощи формулы Грина (31), подобно тому, как и в случае задачи Дирихле, легко устанавливается следующая теорема.

Теорема V. *Гармоническая функция U внутри данной замкнутой поверхности* (S) *определяется условиями* (43) *и* (44) *вполне до некоторой добавочной произвольной постоянной.*

Во втором случае (внешняя задача К. Неймана) требуется определить гармоническую функцию U при помощи условий

$$\Delta U = 0 \text{ вне поверхности } (S), \quad \frac{\partial U_e}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S). \tag{45}$$

В этом случае задача возможна, какова бы ни была заданная функция f точек поверхности (S), и формула Грина (37) приводит к следующей теореме.

Теорема VI. *Может существовать одна и только одна гармоническая вне данной замкнутой поверхности* (S) *(в области* (D')*) функция U, удовлетворяющая условиям* (45).

16. Заметим, что задачи Дирихле и К. Неймана представляют собой частные случаи следующей, более общей задачи:

Найти такую гармоническую функцию внутри или вне данной замкнутой поверхности (S), которая удовлетворяла бы соответственно условиям

$$U_i = f \text{ на одной части поверхности } (S),$$
$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = f_1 \text{ на другой, оставшейся части } (S), \tag{46}$$

или

$$U_e = f \text{ на одной части } (S),$$
$$\frac{\partial U_e}{\partial n} = f_1 \text{ на другой ее части}, \tag{47}$$

где f и f_1 суть две заданные функции точек поверхности (S).

В этом случае при помощи формул преобразования Грина (31) и (37) выводится такая теорема.

Теорема VII. *Может существовать одна и только одна гармоническая внутри или вне данной замкнутой поверхности* (S) *функция, удовлетворяющая соответственно условиям* (46) *или* (47).

Доказательства всех указанных теорем можно найти в любом трактате по теории притяжения и в большинстве курсов механики и анализа *).

17. Предположим теперь, что притягивающие массы распределены сплошным образом на некоторой поверхности (S) с плотностью μ, которая будет некоторой функцией точек этой поверхности **). Потенциалом V этих масс на какую-либо точку x, y, z пространства с массой, равной единице, называется интеграл вида

$$V = \int \frac{\mu}{r}\, ds, \tag{48}$$

где ds есть элемент поверхности (S), на которую распространяется интегрирование.

Слагающими по осям координат силы, с которой материальная поверхность (S) притягивает точку x, y, z будут частные производные первого порядка от V по координатам x, y, z.

Функция V от x, y, z остается, как известно, непрерывной во всем пространстве, так что $V_i = V_e = \overline{V}$ на поверхности (S). В бесконечно удаленных точках V обращается в нуль со своими частными производными по тому же закону, что и функция U (потенциал объемных масс; неравенства (2) и (2_1)). Частные производные от V непрерывны внутри и вне поверхности (S) ***) и удовлетворяют уравнению Лапласа

$\Delta V = 0$ внутри и вне поверхности (S),

т.е. *потенциал поверхностных масс представляет гармоническую функцию координат как внутри, так и вне поверхности* (S).

Частные производные от V по координатам и нормальная производная этой функции испытывают разрыв при переходе точки через поверхность (S) и, вообще говоря, могут не иметь определенного смысла для точек этой поверхности, если не подчинить ее некоторым ограничениям.

До сих пор мы подчиняли поверхность (S) одному условию, что она

(a) *имеет определенную касательную плоскость в каждой ее точке.*

Мы введем теперь еще следующие дополнительные условия:

---

*) См., например,

Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. – Leipzig, 1876.

C. Neumann. Untersuchungen über das Potential. – Leipzig, 1877.

H. Poincaré. Théorie du Potentiel Newtonien. – Paris, 1899.

P. Duhem. Lecons sur l' Électricité et le Magnétisme. – Paris, 1891, т.I.

P. Appell. Traité de Mécanique rationelle. – Paris, 1922, т.III.

C. Jordan. – Cours d' Analyse. – Paris, 1913, т.II.

E. Picard. Traité d' Analyse. – Paris, 1901, т.I.

A. Korn. Abhandlungen zur Potentialtheorie. – Berlin, 1901.

**) Функция μ всегда предполагается интегрируемой. (*Прим. ред.*)

***) Мы всегда будем рассматривать лишь замкнутые поверхности и для сокращения слово "замкнутый" будем опускать.

(b) *Пусть p_0 и p — две какие-либо точки поверхности (S), ϑ есть угол между внешними нормалями к (S) в этих точках, r_0 — расстояние между ними. Для любых двух точек p_0 и p поверхности (S) имеет место неравенство вида*

$$\vartheta < a r_0, \tag{49}$$

где a есть положительное число, не зависящее от положения точек p_0 и p на поверхности (S).

(c) *Около каждой точки p_0 поверхности (S) можно описать сферу достаточно малого, но определенного радиуса D (одинакового для всех точек поверхности), такую, что любая прямая, параллельная нормали n к (S) в точке p_0, пересечет часть поверхности (S), заключающуюся внутри сферы, только в одной точке*).*

Поверхности, удовлетворяющие этим общим условиям, мы будем называть *поверхностями Ляпунова.*

18. Предположим точку p настолько близкой к p_0, что

$$a r_0 < 1, \tag{50}$$

и угол ϑ достаточно малым.

Имеем, в силу условия (b),

$$\cos\vartheta \geqslant 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 > 1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^2 \tag{50_1}$$

и

$$\frac{1}{\cos\vartheta} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^2} = 1 + \frac{a^2 r_0^2}{2\left(1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^2\right)},$$

откуда на основании (50) выводим

$$1/\cos\vartheta < 1 + a^2 r_0^2 \tag{51_1}$$

— неравенство, которое можно заменить равенством вида

$$1/\cos\vartheta = 1 + \theta a^2 r_0^2, \quad 0 \leqslant \theta < 1.$$

Примем за плоскость $\xi\eta$ плоскость, касательную к (S) в точке p_0, и опишем около p_0 сферу радиуса $R < D$, которая вырежет на поверхности (S) площадку (σ), все точки которой будут лежать внутри сферы; начало координат поместим в точке p_0. Координата ζ всех точек площадки (σ) будет, в силу условий (a) — (c), непрерывной и однозначной функцией переменных ξ и η, имеющей непрерывные производные первого порядка во всех точках рассматриваемой площадки.

Как известно,

$$\frac{1}{\cos\vartheta} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}.$$

*) Далее удобно считать, что $D \leqslant 1/a$. (*Прим. ред.*)

Отсюда при помощи (51_1) выводим

$$\frac{1}{\cos\vartheta}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}<1+a^2r_0^2. \qquad (52)$$

Введем вместо прямоугольных полярные координаты, полагая $\xi=\rho\cos\omega$, $\eta=\rho\sin\omega$. Имеем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}=\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\cos\omega+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\sin\omega,$$

откуда на основании известной леммы Коши

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\leqslant\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2.$$

С другой стороны, неравенство (52) при условии (50) дает

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2<2a^2r_0^2+a^4r_0^4<3a^2r_0^2. \qquad (52_1)$$

Следовательно, для всех точек площадки (σ) $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right|<ar_0\sqrt{3}$, т.е. (ибо $ar_0<1$) $|\zeta|<\rho\sqrt{3}$. Так как

$$r_0^2=\sqrt{\rho^2+\zeta^2}, \qquad (53)$$

то

$$r_0<2\rho \qquad (53')$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right|<\rho\,2a\sqrt{3}, \qquad (53_1)$$

или

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}=\theta'\rho 2a\sqrt{3},$$

где θ' есть величина, численно меньшая единицы $(|\theta'|<1)$. Отсюда, интегрируя по ρ от 0 до какого-либо ρ и заметив, что $\zeta=0$ при $\rho=0$, получаем

$$|\zeta|<\rho^2a\sqrt{3}=b\rho^2, \qquad (54)$$

где b есть положительное число.

19. Составим выражение нормальной производной от потенциала V, определяемого равенством (48) для точек поверхности (S) *).

---

*) Имеется ввиду (см. также п. 7) следующее.

Возьмем произвольную точку $p_0\in S$ и обозначим через n и внешнюю нормаль к поверхности S в этой точке. В любой точке $P\notin S$ функция V имеет производную по направлению n и эта производная выражается формулой

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P=-\int\frac{\mu\cos\psi}{r^2}\,ds_p,$$

Обозначая через ψ угол, составляемый направлением $\overline{pp_0}$, идущим от переменной точки p к точке p_0 с внешней нормалью n к поверхности (S) в точке p_0, получим при принятых нами обозначениях (для точки p_0):

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\int \frac{\mu \cos\psi}{r_0^2}\, ds.$$

Построим теперь цилиндр вращения радиуса $R < D$, ось которого направлена по нормали n к поверхности (S) в точке p_0, и обозначим через (σ) площадку, вырезанную этим цилиндром, а остальную часть поверхности (S) обозначим через (S') *).

Подразумевая затем под $d\sigma$ поверхностный элемент площадки (σ), под ds' – такой же элемент части (S'), можем писать

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\int \frac{\mu \cos\psi}{r_0^2}\, ds' - \int \frac{\mu \cos\psi}{r_0^2}\, d\sigma.$$

Так как $\cos\psi = (z - \zeta)/r_0 = -\zeta/r_0$, ибо в нащем случае $z = 0$ **), то

$$-\int \frac{\mu \cos\psi}{r_0^2}\, d\sigma = \int \frac{\mu\zeta}{r_0^3}\, d\sigma.$$

Вводя опять полярные координаты ρ и ω с началом в точке p_0 и с осью ζ, направленной по нормали n к поверхности (S) в точке p_0, заметив, что $d\sigma = \rho d\rho d\omega/\cos\vartheta$, и приняв в расчет (53), можем писать

$$\int \frac{\mu\zeta}{r_0^3}\, d\sigma = \int \frac{\mu\zeta\rho\, d\rho\, d\omega}{\cos\vartheta\, (\rho^2 + \zeta^2)^{3/2}}.$$

Неравенства (50) и (50_1) показывают, что

$$\cos\vartheta > 1/2; \qquad (54_1)$$

Окончание сноски

где r – расстояние от точки P до переменной точки $p \in S$, а ψ – угол между векторами $\overline{pP}$ и n. Под значением нормальной производной потенциала V в точке $p_0 \in S$ понимается значение в точке p_0 интеграла, стоящего в правой части последней формулы; далее доказывается, что этот интеграл сходится (для любой $p_0 \in S$), если плотность μ ограничена.

В настоящее время для обсуждаемого понятия используется термин "прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности S"; см., например, учебник В.С. Владимирова "Уравнения математической физики" (М., Наука, 1981, стр. 407). (*Прим. ред.*)

*) Здесь и всюду далее в подобных построениях рассматривается пересечение цилиндра достаточно малого радиуса R с шаром радиуса D (из условия (с) п.17). Удобно считать, что $R < D/2$. Тогда площадка (σ) однозначно проектируется на плоскость, касательную к поверхности (S) в точке p_0. При этом из установленных в п.18 свойств поверхности (S) вытекает (напомним, что $D < 1/a$), что проекция площадки (σ) на касательную плоскость ξ,η является кругом радиуса R и (σ) описывается уравнением $\zeta = \zeta(\xi,\eta)$, $\xi^2 + \eta^2 < R^2$, где функция ζ удовлетворяет неравенствам п.18, в частности неравенству (54). (*Прим. ред.*)

**) Начало координат находится в точке p_0.

при этом будет иметь силу и неравенство (54). При помощи этих неравенств из предыдущего равенства выводим

$$\left| \int \frac{\mu \zeta}{r_0^3} \, d\sigma \right| \leqslant 2 \mu_0 b \int d\rho d\omega = 8 \pi \mu_0 b R, \tag{55}$$

где μ_0 есть высшая граница функции μ на поверхности (S). Тогда

$$\lim_{R \to 0} \int \frac{\mu \cos \psi}{r_0^2} \, d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что *нормальная производная от потенциала V сохраняет определенные значения во всех точках любой поверхности Ляпунова при одном условии, что плотность μ притягивающих масс есть ограниченная функция точек этой поверхности.*

20. Выведем теперь одно неравенство А. М. Ляпунова *), необходимое для дальнейшего, которое покажет в то же время, что *нормальная производная*

$$\frac{\partial V}{\partial n} = - \int \frac{\mu \cos \psi}{r^2} \, ds \tag{56}$$

есть непрерывная функция координат точек поверхности (S) при сделанном предположении относительно плотности μ.

Возьмем на площадке (σ) другую точку p_1 и обозначим через δ расстояние между точками p_0 и p. Обозначим интеграл (56) для простоты через J, значение его для точек p_0 и p_1 – соответственно через J^0 и J'. Части интеграла J^0, распространенные на поверхности (σ) и (S'), обозначим соответственно через J_σ^0 и J_s^0, а через J_σ' и J_s' – соответствующие части интеграла J'. При сделанных обозначениях можем писать $J' = J_\sigma' + J_s'$, $J^0 = J_\sigma^0 + J_s^0$, откуда

$$J' - J^0 = J_\sigma' - J_\sigma^0 + (J_s' - J_s^0) \quad \text{и}$$

$$|J' - J^0| \leqslant |J_\sigma'| + |J_\sigma^0| + |\Delta|, \tag{57}$$

где положено

$$\Delta = J_s' - J_s^0. \tag{58}$$

Очевидно (см. предыдущий пункт),

$$J_\sigma^0 = - \int \frac{\mu \cos \psi}{r_0^2} d\sigma = \int \frac{\mu \zeta}{r_0^3} \, d\sigma.$$

Поэтому, в силу (55)

$$|J_\sigma^0| \leqslant 8 \pi \mu_0 b R. \tag{56_1}$$

21. Обозначим теперь через ψ_1 угол, составляемый направлением, идущим от переменной точки p к точке p_1 с внешней нормалью n_1 к поверхности

*) Неравенство (83_1) п.26: изложение доказательства этого неравенства несколько изменено. (*Прим. ред.*)

(S) в точке p_1, через r_1 – расстояние точки p от точки p_1. Можем писать

$$J'_\sigma = -\int \frac{\mu \cos \psi_1}{r_1^2} \, d\sigma. \qquad (59)$$

Построим цилиндр вращения, осью которого служит нормаль n_1 к (S) в точке p_1, а радиус равен R_1 и обозначим через (σ_1) площадку, вырезанную этим цилиндром на поверхности(S) *). Проекция контура, ограничивающего площадку (σ), на плоскость, касательную к (S) в точке p_0, есть круг радиуса R с центром в точке p_0; проекция контура, ограничивающего площадку (σ_1), на плоскость, касательную к (S) в p_1, есть круг радиуса R_1.

Положим

$$R_1 = 4R. \qquad (60)$$

При этом, очевидно, вся площадка (σ) будет целиком лежать внутри площадки (σ_1) **) и будет иметь место неравенство

$$\int \frac{|\cos \psi_1|}{r_1^2} \, d\sigma < \int \frac{|\cos \psi_1|}{r_1^2} \, d\sigma_1,$$

где через $d\sigma_1$ обозначен поверхностный элемент площадки (σ_1), на которую распространяется второй интеграл. Так как

$$|J'_\sigma| \leqslant \mu_0 \int \frac{|\cos \psi_1|}{r_1^2} \, d\sigma,$$

то, в силу предыдущего неравенства,

$$|J'_\sigma| \leqslant \mu_0 \int \frac{|\cos \psi_1|}{r_1^2} \, d\sigma_1.$$

Применив к этому интегралу дословно рассуждения п.19, убеждаемся при помощи (60), что

$$\int \frac{|\cos \psi_1|}{r_1^2} \, d\sigma_1 < 8\pi b R_1 = 32 \pi b R,$$

т.е.

$$|J'_\sigma| \leqslant 32 \pi \mu_0 b R. \qquad (61)$$

22. Рассмотрим теперь выражение Δ (58). Дадим R некоторое определенное значение R_0 ***)и обозначим через Δ_0 соответствующее значение Δ. Величину Δ при всяком другом R можем изобразить так:

$$\Delta = (\Delta - \Delta_0) + \Delta_0. \qquad (62)$$

---

*) Как и в п.19, (σ_1)– часть поверхности (S), лежащая в пересечении цилиндра вращения радиуса $R_1 < D/2$ с шаром радиуса D с центром в точке p_1. (*Прим. ред.*)

**) Площадка (σ) лежит (см. п. 18) в шаре радиуса $2R$ с центром в точке p_0, а этот шар содержится в шаре радиуса $R_1 = 4R < D/2$ с центром в точке $p_1 \in (\sigma)$, а следовательно, и в пересечении шара радиуса D с центром в точке p_1 и построенного в этом пункте цилиндра радиуса R_1. (*Прим. ред.*)

***) Конечно, такое,при котором неравенства (56_1) и (61) удовлетворяются.

Цилиндр вращения радиуса R_0 вырежет на поверхности (S) площадку (σ_0); оставшуюся часть поверхности (S) обозначим через (S_0), а поверхностный элемент этой части – через ds_0. При этом можем писать

$$\Delta_0 = \int \mu \left(\frac{\cos \psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} \right) ds_0. \tag{63}$$

Здесь интегрирование распространяется на всю часть (S_0) поверхности (S), а ψ_1, ψ_0, r_1, r_0 представляют значения ψ и r для точек p_1 и p_0.

За плоскость $\xi\eta$ по-прежнему принимаем плоскость, касательную к (S) в точке p_0, за ось ζ – направление n в точке p_0, за начало координат – точку p_0. Координаты точки p_1 обозначим через ξ_1, η_1, ζ_1, координаты переменной точки p, лежащей вне площадки (σ_0) – через ξ, η, ζ; при этом $r_0 = pp_0$, $r_1 = pp_1$, ψ_0 есть угол, составляемый направлением $\overline{pp_0}$ с направлением n, а ψ_1 – угол, составляемый направлением $\overline{pp}_1$ с направлением n_1 внешней нормали к (S) в точке p_1. Имеем

$$\cos (n_1 \xi) = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} \cos \vartheta,$$

$$\cos (n_1 \eta) = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1} \cos \vartheta, \qquad \cos (n_1 \zeta) = \cos \vartheta, \tag{64}$$

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1}\right)^2}} .$$

Далее,

$$\cos \psi_1 = \cos (r_1, n_1) = \cos (r_1 \xi) \cos (n_1 \xi) +$$

$$+ \cos (r_1 \eta) \cos (n_1 \eta) + \cos (r_1 \zeta) \cos (n_1 \zeta). \tag{65}$$

Заметив, что $-\cos (r_1 \xi) = (\xi - \xi_1)/r_1$, $-\cos (r_1 \eta) = (\eta - \eta_1)/r_1$, $-\cos (r_1 \zeta) = (\zeta - \zeta_1)/r_1$, и приняв в расчет (64), выводим из (65)

$$-r_1 \cos = \psi_1 = \left[\zeta - \zeta_1 - (\xi - \xi_1) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} - (\eta - \eta_1) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1} \right] \cos \vartheta.$$

Легко убедиться, далее, что $r_0 \cos \psi_0 = -\zeta$. Это равенство и (65) приводят к следующему:

$$r_1 \cos \psi_1 - r_0 \cos \psi_0 = +\zeta_1 \cos \vartheta + \left[(\xi - \xi_1) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} + \right.$$

$$\left. + (\eta - \eta_1) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1} \right] \cos \vartheta + \zeta (1 - \cos \vartheta).$$

Отсюда

$$| r_1 \cos \psi_1 - r_0 \cos \psi_0 | < | \zeta | \; | 1 - \cos \vartheta | + | \zeta_1 | + | H |, \tag{66}$$

где положено $H = (\xi - \xi_1)\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} + (\eta - \eta_1)\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1}$. Но по лемме Коши

$$|H| < \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1}\right)^2}.$$

Предполагая точку p_1 достаточно близкой к p_0 *), замечаем на основании (52_1), что

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1}\right)^2} < a\sqrt{3}\ \delta.$$

С другой стороны, так как размеры поверхности (S) предполагаются конечными, то

$$\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} = \rho_1 < L, \tag{67}$$

где L есть конечное число. Поэтому

$$|H| < aL\sqrt{3}\ \delta. \tag{68}$$

Далее, в силу (50_1),

$$|1 - \cos\vartheta| < \frac{1}{2}a^2\delta^2 < a\delta/2 \tag{69}$$

и, в силу (54),

$$|\zeta_1| < b\rho_1^2 < b\delta^2 < \frac{b}{a}\delta. \tag{70}$$

Заметив, наконец, что наряду с неравенством (67) всегда можно считать, что $|\zeta| < L$, получаем, приняв в расчет (69) и (70),

$$|\zeta_1| + |\zeta(1 - \cos\vartheta)| < \left(\frac{b}{a} + \frac{aL}{2}\right)\delta \quad \text{и, на основании (68),}$$

$$|\zeta(1 - \cos\vartheta)| + |\zeta_1| + |H| < \left[\frac{b}{a} + La\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\right]\delta = A\delta,$$

где A есть конечная постоянная, не зависящая от положения точки p_0 на поверхности (S).

Это неравенство и (66) приводит к следующему:

$$\frac{|r_1\cos\psi_1 - r_0\cos\psi_0|}{r_0^3} < \frac{A\delta}{R_0^3} \tag{71}$$

для всякой точки $p(\xi, \eta, \zeta)$, лежащей вне площадки (σ_0) на части (S_0) по-

*) Достаточно считать, что точка p_1 лежит на площадке (σ_0). Тогда $\delta < 2R_0 < D/4 < D \leqslant 1/a$ и справедливы оценки п.18. (*Прим. ред.*)

верхности (S), ибо для всякой такой точки

$$r_0 > R_0. \tag{72}$$

23. Найдем теперь высший предел модуля выражения

$$r_1 \cos\psi_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) = \cos\psi_1 \frac{(r_0 - r_1)(r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)}{r_1^2 r_0^3} \tag{71_1}$$

для точек p, лежащих вне площадки (σ_0). Имеем

$$\frac{r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2}{r_1^2 r_0^3} = \frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{r_0^2 r_1} + \frac{1}{r_0 r_1^2}.$$

Точку p_1 всегда можно выбрать столь близкой к p_0, что будет $\delta / R_0 < 1/2$. Тогда, в силу (72), $r_1 \geqslant r_0 - \delta > R_0/2$ для всех точек $p(\xi, \eta, \zeta)$ части (S_0), т.е. $1/r_1 < 2/R_0$, $1/r_1^2 < 4/R_0^2$. При этом получим

$$\frac{r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2}{r_1^2 r_0^3} = \frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{r_0^2 r_1} + \frac{1}{r_0 r_1^2} < \frac{7}{R_0^3}.$$

Заметив, наконец, что $|r_1 - r_0| \leqslant \delta$, получаем окончательно

$$\left| r_1 \cos\psi_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\right| \leqslant \frac{7}{R_0^3}\delta. \tag{73}$$

Представив выражение, стоящее в скобках под интегралом (63), в виде

$$\frac{\cos\psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} = r_1 \cos\psi_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) + \frac{r_1 \cos\psi_1 - r_0 \cos\psi_0}{r_0^3} \tag{73_1}$$

выводим из него при помощи (71) и (73) неравенство

$$\left|\frac{\cos\psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\right| < \frac{A+7}{R_0^3}\delta \text{ и затем из (63)}$$

$$|\Delta_0| \leqslant \mu_0 \frac{B}{R_0^3}\delta, \tag{74}$$

где $B = (A+7) S_0 < (A+7) S$, а S_0 и S обозначают величины поверхностей (S_0) и (S).

24. Рассмотрим, наконец разность $\Delta - \Delta_0$, где

$$\Delta = \int \mu \left(\frac{\cos\psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\right) ds',$$

а ds' обозначает поверхностный элемент той части поверхности (S), которая остается за выключением из нее площадки (σ), вырезанной цилиндром вращения с радиусом R и с осью, направленной по нормали n к (S) в точке p_0.

Предположим, что

$$R < R_0, \tag{75}$$

и обозначим через (S_1) пояс поверхности (S), ограниченный контурами площадок (σ) и (σ_0), через ds_1 – поверхностный элемент этого пояса. Получим $\Delta - \Delta_0 = \int \mu \left(\frac{\cos \psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} \right) ds_1$, где интегрирование распространяется на все точки $p(\xi, \eta, \zeta)$ пояса (S_1). Пользуясь введенными раньше цилиндрическими координатами ρ и ω, можем писать

$$\Delta - \Delta_0 = \int_0^{2\pi} d\omega \int_R^{R_0} \mu \left(\frac{\cos \psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} \right) \frac{\rho d\rho}{\cos \vartheta} . \tag{75$_1$}$$

Имеем

$$\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} = \frac{r_0 - r_1}{r_0 r_1} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_0 r_1} + \frac{1}{r_0^2} \right).$$

Всегда можно положить $\delta < R/2$, причем неравенство (72_1) будет само собой удовлетворено в силу (75). Тогда для всех точек пояса (S_1)

$$|r_0 - r_1| \leqslant \delta, \quad r_0 \geqslant \rho > R, \quad r_1 \geqslant r_0 - \delta \geqslant \rho - \delta > \rho/2 > 0.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| \leqslant \frac{3\delta}{r_1 \rho (\rho - \delta)^2} \leqslant \frac{12}{r_1 \rho^3} \delta$$

и

$$\left| r_1 \cos \psi_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \right| \leqslant \frac{12}{\rho^3} \delta. \tag{76}$$

Так как, очевидно, аналогично неравенству (71) для всех точек пояса (S_1) справедливо неравенство

$$|r_1 \cos\psi_1 - r_0 \cos \psi_0| / r_0^3 \leqslant A\delta / \rho^3,$$

то, приняв в расчет неравенство (76) и равенство (73_1), получаем

$$\left| \frac{\cos \psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} \right| \leqslant (12 + A) \frac{\delta}{\rho^3} = \frac{C\delta}{\rho^3}, \tag{77}$$

где C есть конечное положительное число.

25. При помощи неравенств (77) и (54_1) получаем

$$\left| \int_R^{R_0} \mu \left(\frac{\cos \psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos \psi_0}{r_0^2} \right) \frac{\rho \, d\rho}{\cos \vartheta} \right| \leqslant 2C\mu_0 \delta \int_R^{R_0} \frac{d\rho}{\rho^2} \leqslant \frac{2C\mu_0}{R} \delta . \tag{78}$$

Поэтому (см. равенство (75_1))

$$| \Delta_0 - \Delta | \leqslant \frac{4\pi C\mu_0}{R}\delta. \tag{79}$$

Будем считать, что выбранное в п.22 число $R_0 \leqslant 1/2$, и возьмем произвольную точку p_1 на поверхности (S) такую, что расстояние δ между точками p_1 и p_0 подчинено условию

$$\delta < R_0^2. \tag{80}$$

Положим

$$R = \sqrt{\delta}. \tag{81}$$

В силу (80) так выбранное число R удовлетворяет неравенству (75) и соблюдено принятое нами условие $\delta < R/2$ (ибо $R^2 < RR_0 \leqslant R/2$). При этом неравенство (79) приведется к виду

$$|\Delta - \Delta_0| \leqslant \mu_0 K\, \delta^{1/2},$$

где K есть определенная постоянная, не зависящая ни от положения точки p_0 на поверхности (S), ни от δ.

26. Это последнее неравенство и (74) дают, при помощи (62) и (80),

$$|\Delta| \leqslant |\Delta - \Delta_0| + |\Delta_0| \leqslant \mu_0\left(\frac{B}{R_0^2}+K\right)\delta^{1/2} = N\mu_0\delta^{1/2}, \tag{82}$$

где $N = K + B/R_0^2$ есть определенное число, одинаковое для всех точек поверхности (S).

При сделанном выборе R (равенство (81)) из (56_1) и (61) получаем $|J_\sigma^0| + |J_\sigma'| \leqslant 40\pi b\mu_0\delta^{1/2}$ и при помощи (82) и (57) приходим к неравенству

$$|J' - J^0| \leqslant Q\mu_0\,\delta^{1/2}, \tag{83}$$

где Q есть, очевидно, определенное число, не зависящее ни от μ_0, ни от δ, ни от положения точки p_0 на поверхности (S).

Это неравенство доказывает следующую теорему.

Теорема Ляпунова (первая). *Для всякой поверхности (S) Ляпунова нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ от потенциала масс, распределенных по поверхности (S) с плотностью μ, удовлетворяет условию*

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - \frac{\partial V}{\partial n}\right| \leqslant Q\mu_0\delta^{1/2}\ ^{*)}, \tag{83$_1$}$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ представляют значения этих производных в двух смежных точках (S), находящихся на расстоянии δ, и есть, следовательно, непрерывная функция точек рассматриваемой поверхности при одном усло-

---

*) Справедливость неравенства (83_1) для точек поверхности (S), находящихся на расстоянии $\delta \geqslant R_0^2$, очевидна. (*Прим. ред.*)

вии, что плотность μ притягивающих масс есть ограниченная функция координат *).

27. Переходим теперь к исследованию свойств внутренней и внешней нормальных производных $\frac{\partial V_i}{\partial n}$ и $\frac{\partial V_e}{\partial n}$ от потенциала простого слоя V.

Возьмем точку P внутри поверхности (S) на нормали к ней в точке p_0 и величину выражения (см. п. 7)

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma$$

в точке P обозначим через $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P$. Рассмотрим разность

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - \frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - J. \tag{84}$$

При сделанном нами выборе координатной системы (см. п. 18) $\cos\alpha = \cos\beta = 0, \cos\gamma = 1$ и

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P = \int \mu\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,ds, \tag{85}$$

$$J = \int \mu\,\frac{\zeta}{r_0^3}\,ds, \tag{85$_1$}$$

где r (в первой формуле) обозначает расстояние переменной точки $p(\xi, \eta, \zeta)$ поверхности (S) от точки P, а r_0 (во второй формуле) – расстояние точки p от точки p_0.

Строим опять цилиндр вращения радиуса R с осью, направленной по нормали n к (S) в точке p_0 (см. п. 19), и через $d\sigma$ и ds_1 обозначаем поверхностные элементы площадки (σ), вырезанной цилиндром, и оставшейся части (S_1) поверхности (S).

Можем писать

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P &= \int \mu\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,ds_1 + \int \mu\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,d\sigma,\\ J &= \int \mu\,\frac{\zeta}{r_0^3}\,ds_1 + \int \mu\,\frac{\zeta}{r_0^3}\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Обозначим интегралы правой части первого равенства соответственно через I_1 и I_2, а интегралы второго – через K_1 и K_2. Рассмотрим разность

$$I_1 - K_1 = \int \mu\zeta\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)ds_1 - z\int \frac{\mu}{r^3}\,ds_1. \tag{87}$$

Выбрав точку P достаточно близкой к точке p_0, положим $|z| = \epsilon$. Так

---

*) См. также А. Ляпунова (A. Liapounoff), "Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet" (Journal des Mathématiques, Paris, 1898).

как для всех точек части поверхности (S_1) $r \geqslant R^*)$, $r_0 \geqslant R$, $|r-r_0| \leqslant \epsilon$, то

$$\left| z \int \frac{\mu}{r^3} ds_1 \right| \leqslant \frac{\mu_0 S_1}{R^3} \epsilon \leqslant \frac{\mu_0 S}{R^3} \epsilon \tag{88}$$

и

$$\left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| = \frac{|r-r_0|}{rr_0} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{rr_0} + \frac{1}{r^2} \right) \leqslant \frac{3}{R^4} \epsilon. \tag{88$_1$}$$

Следовательно,

$$\left| \int \mu\zeta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) ds_1 \right| \leqslant \mu_0 \frac{3LS}{R^4} \epsilon^{**}). \tag{89}$$

Из (87), (88) и (89) выводим неравенство

$$|I_1 - K_1| \leqslant \mu_0 \frac{S}{R^4} (R + 3L) \epsilon = \mu_0 \frac{N'}{R^4} \epsilon, \tag{89$_1$}$$

где N' есть определенное число.

28. Обращаемся к разности

$$I_2 - K_2 = \int \mu\zeta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) d\sigma - z \int \frac{\mu}{r^3} d\sigma = H - H_1. \tag{89$_2$}$$

Вводя опять цилиндрические координаты ρ, ω и ζ с началом в точке p_0 и заметив, что для всех точек площадки (σ), на которую распространяются интегралы последнего равенства, $|r_0 - r| \leqslant \epsilon$, $r_0 \geqslant \rho$, $r \geqslant \rho$, получаем при помощи (88$_1$) $\left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| \leqslant \frac{3}{r\rho^3} \epsilon$. Следовательно, в силу (54),

$$|H| = \left| \int \mu \zeta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) d\sigma \right| \leqslant 3b \mu_0 \epsilon \int \frac{d\sigma}{r\rho}.$$

Так как, далее, на основании (54$_1$) $d\sigma = \dfrac{\rho d\rho d\omega}{\cos\vartheta} \leqslant 2\rho d\rho d\omega$, то

$$|H| \leqslant 6b\mu_0 \epsilon \int \frac{d\rho d\omega}{r}. \tag{90}$$

Имеем $r^2 = \rho^2 + (\zeta + \epsilon)^2 = \rho^2 + \zeta^2 + \epsilon^2 + 2\zeta\epsilon$, где в силу (54) $\rho^2 + 2\zeta\epsilon > > \rho^2(1 - 2b\epsilon) > 0$ при достаточно малом ϵ (и $\rho \neq 0$). Поэтому

$$r^2 \geqslant \rho^2 + \epsilon^2 + 2\zeta\epsilon = (\rho^2 + \epsilon^2)(1 - \lambda),$$

где положено $\lambda = -2\zeta\epsilon/(\rho^2 + \epsilon^2)$. Очевидно,

$$|\lambda| < 2b\epsilon < 1. \tag{90$_1$}$$

---

*) Так как $R < D/2$ (см. п. 19), то для справедливости этого неравенства достаточно положить $\epsilon < R$. (*Прим. ред.*).

**) Так как $|\zeta| < L$. См. п. 22.

Далее

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{\sqrt{\rho^2+\epsilon^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \qquad (90_2)$$

Так как $1/\sqrt{1-\lambda} < 1/\sqrt{1-|\lambda|}$, а $|\lambda|$ всегда можно сделать меньшим $1/2$, выбрав достаточно малым ϵ*), то можем считать, что

$$1/r < \sqrt{2}/\sqrt{\rho^2+\epsilon^2}, \qquad (90_3)$$

причем неравенство (90) приведется к такому:

$$|H| < 6\sqrt{2}\,b\mu_0\epsilon\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{d\rho d\omega}{\sqrt{\rho^2+\epsilon^2}} = 12\sqrt{2}\,\pi b\mu_0\epsilon\int_0^R \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+\epsilon^2}} =$$

$$= 12\sqrt{2}\,\pi b\mu_0\epsilon\,[\ln(R+\sqrt{R^2+\epsilon^2}) - \ln\epsilon]. \qquad (91)$$

Каково бы ни было положительное число β, всегда $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon^\beta[\ln(R+\sqrt{R^2+\epsilon^2}) - \ln\epsilon] = 0$. Поэтому, каково бы ни было число ϵ (из рассматриваемого интервала), всегда можем положить $12\sqrt{2}\,\pi b\epsilon^\beta[\ln(R+\sqrt{R^2+\epsilon^2}) - \ln\epsilon] < A$, где A есть число, не зависящее от ϵ. При этом неравенство (91) примет вид

$$|H| < A\mu_0\epsilon^\alpha, \qquad (92)$$

где $\alpha = 1-\beta > 0$ *есть произвольное число, лежащее между* 0 *и* 1.

29. Напишем интеграл

$$H_1 = z\int(\mu/r^3)\,d\sigma = -\epsilon\int(\mu/r^3)\,d\sigma\text{**})$$

в виде

$$H_1 = -\epsilon\mu^0\int\frac{d\sigma}{r^3} - \epsilon\int\frac{\mu-\mu^0}{r^3}\,d\sigma, \qquad (93)$$

подразумеваем под μ^0 значение плотности μ в точке p_0.

Преобразуя первый интеграл к полярным координатам и принимая во внимание равенство (51), получаем

$$\int\frac{d\sigma}{r^3} = \int\frac{\rho d\rho d\omega}{r^3\cos\vartheta} = \int\frac{\rho d\rho d\omega}{r^3} + \theta a^2\int\frac{r_0^2\,\rho d\rho d\omega}{r^3}. \qquad (94)$$

Но, в силу (54),

$$r_0^2 = \rho^2 + \zeta^2 < (1+b^2\rho^2)\rho^2 < h\rho^2, \qquad (94_1)$$

где под h можем подразумевать определенное положительное число, не зависящее от ρ. Поэтому

$$Q_1 = \theta a^2\int\frac{r_0^2\,\rho d\rho d\omega}{r^3} < \theta h a^2\int\frac{\rho^3 d\rho d\omega}{r^3} < \theta h a^2\int d\rho d\omega = 2\pi\theta h a^2 R, \qquad (95)$$

ибо в пределах интегрирования $r \geqslant \rho$.

---

*) Стоит положить $\epsilon < 1/(4b)$.

**) Напоминаем, что $z = -\epsilon$.

30. Так как $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{(\rho^2+\epsilon^2-r^2)}{w^{5/2}}$; где величина w заключена между r^2 и $\rho^2+\epsilon^2$, то принимая во внимание (90_3) и (54), получаем

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}}\right| \leqslant \frac{6\sqrt{2}\,|\rho^2+\epsilon^2-r^2|}{(\rho^2+\epsilon^2)^{5/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6\sqrt{2}\,[b^2\rho^4+2\epsilon b\rho^2]}{(\rho^2+\epsilon^2)^{5/2}} \leqslant \frac{C'\rho^2+C''\epsilon}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}}, \tag{95_1}$$

где C' и C'' суть, очевидно, определенные положительные числа, одинаковые для всех точек поверхности (S). Первый интеграл правой части равенства (94) можем поэтому переписать в виде

$$\int \frac{\rho d\rho d\omega}{r^3} = (1+g''\epsilon)\int \frac{\rho d\rho d\omega}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}} + g'\int \frac{\rho^3 d\rho d\omega}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}},$$

где $g' = C'\theta'$, $|\theta'| \leqslant 1$, $g'' = C''\theta''$, $|\theta''| \leqslant 1$.

Так как

$$I = \int \frac{\rho^3}{(\rho^3+\epsilon^2)^{3/2}}\,d\rho d\omega \leqslant 2\pi R, \tag{96}$$

а

$$\int \frac{\rho d\rho d\omega}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\epsilon} - \frac{2\pi}{\sqrt{R^2+\epsilon^2}},$$

то, на основании (94) и (95),

$$\epsilon\int \frac{d\sigma}{r^3} = 2\pi + \epsilon Q, \tag{97}$$

где $Q = Q_1 + g'I + 2\pi\left(g'' - \dfrac{1+g''\epsilon}{\sqrt{R^2+\epsilon^2}}\right)$. Причем, в силу (95) и (96),

$$|Q| \leqslant 2\pi\left(ha^2R + C'R + C'' + \frac{1}{R}\right) = B, \tag{98}$$

где B есть определенное число при всяком определенным образом выбранном R.

Заметим также, что

$$|\epsilon Q| \leqslant 2\pi\,(ha^2R\epsilon + C'R\epsilon + C''\epsilon + 1) \leqslant B_0, \tag{98_1}$$

где B_0 — определенное число, не зависящее ни от выбора ϵ и R (достаточно малых, удовлетворяющих указанным выше условиям), ни от расположения точки p_0 на поверхности (S).

31. До сих пор мы ограничивались одним предположением, что плотность μ есть ограниченная функция точек поверхности (S). Допустим теперь, что μ *остается непрерывной на этой поверхности.*

В этом случае, при достаточно малом R, будем иметь

$$\left|\int \frac{\mu-\mu^0}{r^3}\,d\sigma\right| < \eta \int \frac{d\sigma}{r^3}$$

и, на основании (97) и (98_1),

$$|Q'| = \epsilon \left|\int \frac{\mu-\mu^0}{r^3}\,d\sigma\right| < \tau\eta, \tag{99}$$

где $\tau = 2\pi + B_0$ есть определенное число, а η — положительное число, стремящееся к нулю одновременно с R.

Из равенств (93), (97) и последнего выводим $H_1 = -2\pi\mu^0 - \epsilon Q\mu^0 - Q'$. Заметив, что $I_2 - K_2 = H - H_1$ (см. (89_2)), получаем

$$I_2 - K_2 = 2\pi\mu^0 + H + \epsilon Q\mu^0 + Q' = 2\pi\mu^0 + Q_1', \tag{100}$$

где, в силу (92), (98) и (99),

$$|Q_1'| < A\mu_0\epsilon^\alpha + \epsilon B\mu_0 + \tau\eta \tag{101}$$

Так как, далее, $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - J = I_1 - K_1 + I_2 - K_2$, то на основании (100) $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - J - 2\pi\mu^0 = I_1 - K_1 + Q_1'$. Отсюда, приняв в расчет (89_1) и (101), выводим

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - J - 2\pi\mu^0\right| \leqslant \left(\frac{\mu_0 N'}{R^4} + B\mu_0\right)\epsilon + A\mu_0\epsilon^\alpha + \tau\eta. \tag{101_1}$$

Мы всегда можем выбрать сначала R столь малым, что $\tau\eta$ сделается меньшим наперед заданного положительного числа $\epsilon'/2$. Выбрав указанным способом R, мы можем затем взять точку P столь близко к точке p_0 поверхности (S), что выражение $\left(\frac{\mu_0 N'}{R^4} + B\mu_0\right)\epsilon + A\mu_0\epsilon^\alpha$ также сделается меньшим числа $\epsilon'/2$. При этом будем иметь

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - J - 2\pi\mu^0\right| < \epsilon'. \tag{102}$$

Из этого неравенства вытекает следующая формула Пуассона:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = J + 2\pi\mu^0, \tag{103}$$

где, напоминаем, $J = \frac{\partial V}{\partial n} = -\int \frac{\mu\cos\psi}{r^2}\,ds$.

Точно так же, взяв точку P' на нормали n с внешней стороны поверхности (S) и повторив с соответствующими изменениями предыдущие рассуждения, получим

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = J - 2\pi\mu^0. \tag{104}$$

Из (103) и (104) вытекает и следующее равенство:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = 4\pi\mu^0. \tag{105}$$

Таким образом, *справедливость формул Пуассона доказана для всякой поверхности* (S) *Ляпунова, коль скоро плотность потенциала* V *простого слоя есть непрерывная функция координат точек этой поверхности.*

32. Предположим теперь, что функция μ не только непрерывна, но еще удовлетворяет условию

$$|\mu - \mu^0| < Nr_0^\beta, \tag{105_1}$$

где N есть число, не зависящее от положения точек p и p_0 на поверхности (S), β – такое же число и притом меньшее единицы.

При этом, в силу (94_1) и (54_1),

$$|Q'| = \epsilon \left| \int \frac{\mu - \mu^0}{r^3}\, d\sigma \right| < N\epsilon \left| \int \frac{r_0^\beta}{r^3}\, d\sigma \right| < Nh^{\beta/2}\, \epsilon \int \frac{\rho^\beta}{r^3}\, d\sigma <$$

$$< 2\, Nh^{\beta/2}\, \epsilon \int \frac{\rho^{1+\beta}}{r^3}\, d\rho d\omega.$$

Из (95_1), как и в п. 30, будем иметь

$$\int \frac{\rho^{1+\beta}}{r^3}\, d\rho d\omega = (1 + g''\epsilon) \int \frac{\rho^{1+\beta}}{(\rho^2 + \epsilon^2)^{3/2}}\, d\rho d\omega +$$

$$+ g' \int \frac{\rho^{3+\beta}}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}}\, d\rho d\omega < 2\pi\,(1 + \epsilon C'') \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+\epsilon^2)^{\frac{3-\beta}{2}}} + 2\pi C' \int_0^R \rho^\beta\, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi\,(1 + \epsilon C'')}{1 - \beta} \left[\frac{1}{\epsilon^{1-\beta}} - \frac{1}{(R^2+\epsilon^2)^{\frac{1-\beta}{2}}} \right] + \frac{2\pi\, C'}{1+\beta}\, R^{1+\beta} <$$

$$< \frac{2\pi\,(1 + \epsilon\, C'')}{1 - \beta}\, \epsilon^{\beta - 1} + \frac{2\pi\, C'}{1 + \beta}\, R^{1+\beta}.$$

Следовательно,

$$|Q'| < 2\, Nh^{\beta/2} \left[\frac{2\pi(1 + \epsilon\, C'')}{1 - \beta}\, \epsilon^\beta + \frac{2\pi\, C'}{1 + \beta}\, R^{1+\beta}\, \epsilon \right] < NL_1\, \epsilon^\beta,$$

где L_1 есть определенное число. Отсюда, как и в п. 31, получаем

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_p - J - 2\pi\mu^0 \right| = \left| I_1 - K_1 + H + \epsilon\mu^0 Q + Q' \right| <$$

$$< \left(\frac{\mu_0\, N'}{R^4} + \mu_0 B \right) \epsilon + A\mu_0 \epsilon^\alpha + NL_1 \epsilon^\beta.$$

Выбрав определенным образом R, получим, что

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_p - J - 2\pi\mu^0 \right| < \left[NL_1 + \mu_0 L_2 \right] \epsilon^\beta = L\epsilon^\beta, \tag{106}$$

ибо α есть произвольное число, меньшее единицы (п. 28); под L, очевидно, можем подразумевать определенное конечное число, одинаковое для всех точек поверхности (S).

Подобным же образом докажем и другое неравенство Ляпунова

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p'} - J + 2\pi\mu^0 \right| \leqslant L\epsilon^\beta, \tag{107}$$

где P' есть точка, лежащая на нормали n к поверхности (S) с ее внешней стороны и достаточно близкая к точке p_0.

Неравенства (106) *и* (107), *справедливые для всякой поверхности Ляпунова, коль скоро плотность* μ *простого слоя* V *удовлетворяет неравенству* (105_1), *весьма важны для наших дальнейших исследований**).

Так как число L не зависит от положения точки p_0 на поверхности (S), то из неравенств (106) и (107) заключаем, что $\left(\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)_p$ и $\left(\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)_{p'}$ стремятся к своим пределам $\dfrac{\partial V_i}{\partial n}$ и $\dfrac{\partial V_e}{\partial n}$ равномерно для всех точек поверхности; иначе говоря, *потенциал простого слоя* V *при указанных выше условиях имеет правильные нормальные производные* (*внутреннюю и внешнюю*) *на поверхности* (S).

Резюмируя все сказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема Ляпунова (вторая). *Потенциал простого слоя*

$$V = \int \frac{\mu}{r} ds,$$

плотность которого μ *подчинена условию* (105_1), *удовлетворяет для всякой поверхности Ляпунова неравенствам* (106) *и* (107) *и, следовательно, имеет правильные нормальные производные* (*внутреннюю и внешнюю*) $\dfrac{\partial V_i}{\partial n}$ *и* $\dfrac{\partial V_e}{\partial n}$, *удовлетворяющие уравнениям Пуассона*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} + 2\pi\mu^0, \tag{108}$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} - 2\pi\mu^0, \tag{109}$$

где μ^0 – *плотность в той точке поверхности* (S), *к которой относятся производные* $\dfrac{\partial V_i}{\partial n}, \dfrac{\partial V_e}{\partial n}$ *и* $\dfrac{\partial V}{\partial n}$.

---

*) В доказательства неравенств (106) и (107) внесены изменения. (*Прим. ред.*).

33. *Потенциалом двойного слоя* называется функция координат x, y, z, определяемая поверхностным интегралом вида

$$W=\int \frac{\mu \cos \varphi}{r^2}\, ds, \tag{110}$$

распространенным по переменным ξ, η, ζ на всю данную поверхность (S) *). Функция μ называется *напряжением двойного слоя;* мы будем предполагать μ *непрерывной* функцией точек поверхности (S).

В трактатах по теории притяжения строго доказываются следующие теоремы.

Теорема VIII. *Функция W непрерывна со своими частными производными по координатам x, y, z во всех точках пространства внутри и вне поверхности (S) и представляет собой гармоническую функцию как внутри, так и вне этой поверхности. Эта функция сохраняет определенные значения для всех точек поверхности (S), равно как и определенные значения предельных выражений W_i и W_e, но при переходе точки x, y, z через любую точку p_0 поверхности (S) она испытывает разрыв, причем*

$$W_i = W + 2\pi\mu^0, \quad W_e = W - 2\pi\mu^0, \tag{111}$$

где под W подразумевается значение этой функции для точки p_0.

Теорема Гаусса. *Если напряжение $\mu = 1$, то для любой точки поверхности (S)*

$$W=\int \frac{\cos \varphi}{r^2}\, ds = 2\pi, \tag{112}$$

для любой точки, лежащей внутри (S),

$$W=\int \frac{\cos \varphi}{r^2}\, ds = 4\pi, \tag{112$_1$}$$

а для любой точки, лежащей вне (S),

$$W=\int \frac{\cos \varphi}{r^2}\, ds = 0. \tag{112$_2$}$$

Останавливаться на доказательстве этих основных в теории притяжения теорем мы не станем; читатель может найти их в любом трактате по теории притяжения **).

34. В большинстве сочинений по теории притяжения и анализу доказывают также, что при указанных выше условиях потенциал двойного слоя W имеет определенные внешнюю и внутреннюю нормальные производные $\frac{\partial W_i}{\partial n}$ и $\frac{\partial W_e}{\partial n}$ во всех точках поверхности (S), причем $\frac{\partial W_i}{\partial n} = \frac{\partial W_e}{\partial n}$.

Однако это утверждение, вообще говоря, несправедливо.

Даже для простейшего случая конвексных поверхностей (т.е. таких, которые пересекаются любой прямой не более чем в двух точках) мож-

---

*) Мы употребляем обозначения, принятые в п. 9 и там объясненные.

**) См., например, Пикар (Emile Picard) "Traité d' Analyse" (Paris, 1891, pp. 121, 127), также и другие сочинения, указанные выше (примечание к п. 16).

но подыскать сколь угодно примеров, когда нормальные производные потенциала двойного слоя с непрерывным напряжением μ обращаются в бесконечность в некоторых точках поверхности.

Приведу для примера один, простейший. Предположим, что замкнутая конвексная поверхность (S) имеет плоскую часть (σ), ограниченную, например, кругом радиуса R*). Поверхностный элемент этой части (S) обозначим через $d\sigma$, поверхностный элемент оставшейся части (S) – через ds_1. Можем писать

$$W = \int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,ds = \int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma + \int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,ds_1 = W_1 + W_2.$$

Поместим начало координат в центре площадки (σ) (в точке p_0), за ось z возьмем направление нормали n к поверхности (S) в точке p_0 и на этом направлении нормали возьмем точку P внутри (S), находящуюся на расстоянии $|z|$ от точки p_0. Имеем

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = \frac{\partial W_{1i}}{\partial n} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial n} = \lim_{z\to 0}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial n}\right)_P + \left(\frac{\partial W_2}{\partial n}\right)_P\right].$$

Очевидно, выражение $\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial n}\right)_P$ стремится к определенному пределу, когда P приближается к p_0 (при $z\to 0$). Нормальная производная $\dfrac{\partial W_i}{\partial n}$ будет иметь определенное значение в точке p_0 тогда и только тогда, когда будет существовать определенный предел $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial n}\right)_P = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\partial W_1}{\partial z}$.

Допустим, что для точек площадки (σ)

$$\mu = \lambda\rho,$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, λ – определенное число. Имеем $\cos\varphi = |z|/\sqrt{\rho^2+z^2}$, $r^2 = \rho^2 + z^2$, $d\sigma = \rho\,d\rho\,d\omega$. Следовательно,

$$W_1 = 2\pi\lambda\,|z|\int_0^R \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi\lambda\,|z|\left\{-\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} + \ln\left(R+\sqrt{R^2+z^2}\right) - \ln\sqrt{z^2}\right\}.$$

Очевидно, что производная по z от функции

$$-z\left[\ln\left(R+\sqrt{R^2+z^2}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

сохраняет определенное значение при $z = 0$, но производная по z от остальной части $z\ln(-z)$, равная $\ln z + 1$, обращается в бесконечность при $z = 0$.

---

*) Строго говоря, такая поверхность не удовлетворяет приведенному выше условию конвексности. Однако, как легко видеть, в этом примере плоскую часть поверхности можно заменить, например, частью сферы достаточно большого радиуса. (*Прим. ред.*)

Одно условие непрерывности функции μ, как видим на приведенном простом примере, оказывается недостаточным для существования нормальных производных от потенциала двойного слоя. Выяснение достаточных условий, при которых потенциал двойного слоя действительно имеет внутреннюю и внешнюю нормальные производные, и строго определенное решение этого вопроса даны были впервые только в 1898 г. Ляпуновым в его уже цитированном мемуаре "Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet", анализ которого мы подробно разовьем в следующих пунктах.

35. Возьмем по-пержнему какую-либо точку p_0 на какой-либо поверхности Ляпунова и примем ее за начало прямоугольной системы координат, ось z которой направим по нормали n к поверхности (S) в точке p_0. Взяв, как в предыдущем пункте точку P на этой нормали, получим $\left(\dfrac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \dfrac{\partial W}{\partial z}$, причем z будет считаться положительным, когда P лежит вне поверхности (S), и отрицательным, когда P лежит внутри (S).

Возьмем вместо W функцию

$$W_1 = \int \frac{(\mu - \mu^0)\cos\varphi}{r^2}\, ds = \int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\, ds - \mu^0 \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds. \qquad (111')$$

На основании теоремы Гаусса можем писать

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \frac{\partial W_1}{\partial z}, \qquad (112')$$

где, в силу $(111')$,

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = \int (\mu - \mu^0)\left(\frac{\partial\cos\varphi}{\partial z}\,\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\,\frac{\partial r}{\partial z}\cos\varphi\right) ds. \qquad (113)$$

Взяв какую-либо другую точку p поверхности (S) с координатами ξ, η, ζ и обозначив через n' направление внешней нормали к (S) в этой последней точке, получаем

$$\cos\varphi = \frac{\xi}{r}\cos(n'x) + \frac{\eta}{r}\cos(n'y) + \frac{\zeta - z}{r}\cos(n'z), \qquad (114)$$

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2. \qquad (114_1)$$

Отсюда $\dfrac{\partial r}{\partial z} = -\dfrac{\zeta - z}{r}$, $\dfrac{\partial\cos\varphi}{\partial z} = \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\zeta - z}{r}\,(\xi\cos(n'x) + \eta\cos(n'y) + (\zeta - z)\cos(n'z)) - \dfrac{1}{r}\cos(n'z)$. Следовательно,

$$\frac{\partial\cos\varphi}{\partial z}\,\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\,\frac{\partial r}{\partial z}\cos\varphi = \frac{\zeta - r}{r^4 r}(\xi\cos(n'x) + \eta\cos(n'y) + (\zeta - z)\cos\vartheta) + \frac{2(\zeta - z)}{r^3 r}\cos\varphi - \frac{\cos\vartheta}{r^3}, \qquad (115)$$

ибо согласно принятому обозначению $\cos(n'z) = \cos(n'n) = \cos\vartheta$.

Так как

$$(\zeta - z)/r = -\cos(\overline{pP}, n) = -\cos\psi, \tag{115$_1$}$$

то правая часть равенства (115) при помощи (114) приводится к виду

$$-\frac{\cos\vartheta + 3\cos\varphi\cos\psi}{r^3}.$$

Приняв в расчет только что сказанное и равенства (112′), (113) и (115), получаем

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = -\frac{\partial W_1}{\partial z} = \int \frac{\mu - \mu^0}{r^3}(\cos\vartheta + 3\cos\varphi\cos\psi)\,ds. \tag{116}$$

36. Строим опять (см. п. 19) цилиндр вращения радиуса R с осью, направленной по оси z (по нормали n к (S) в точке p_0), и воспользуемся следующими обозначениями Ляпунова.

Интеграл правой части равенства (116), распространенный на всю часть (S_0) поверхности (S), лежащую вне площадки (σ), вырезанной только что построенным цилиндром, обозначим через

$$\Omega(z, R). \tag{117}$$

При этом можем писать

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \Omega(z, 0). \tag{118}$$

Тот же интеграл правой части равенства (116), распространенный на площадку (σ), представится в виде разности

$$\Omega(z, 0) - \Omega(z, R). \tag{119}$$

Предельное значение $-\left(\dfrac{\partial W}{\partial n}\right)_P$, когда точка P совпадает с точкой p_0, представится в виде

$$\Omega(0, 0), \tag{120}$$

а интеграл правой части равенства (116) *), распространенный на площадку (σ) — в виде

$$\Omega(0, 0) - \Omega(0, R). \tag{121}$$

37. Рассмотрим сначала разность (119).

Вводя опять цилиндрические координаты ρ, ω и ζ, можем писать

$$\Omega(z, 0) - \Omega(z, R) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \left(1 + \frac{3\cos\varphi\cos\psi}{\cos\vartheta}\right)\frac{\mu - \mu^0}{r^3}\,\rho\,d\rho. \tag{122}$$

Обозначим теперь через r_0 расстояние переменной точки p от точки p_0, через φ_0 — угол, составляемый направлением $\overline{p_0p}$ с нормалью n' в точке p. Так как

$$\cos\varphi_0 = \frac{\xi}{r_0}\cos(n'x) + \frac{\eta}{r_0}\cos(n'y) + \frac{\zeta}{r_0}\cos(n'z), \tag{122$_1$}$$

*) Для случая, когда точка P совпадает с p_0.

то равенство (114) можно представить в виде $r\cos\varphi = r_0\left(\frac{\xi}{r_0}\cos(n'x) + \frac{\eta}{r_0}\cos(n'y) + \frac{\zeta}{r_0}\cos(n'z)\right) - z\cos(n'z) = r_0\cos\varphi_0 - z\cos\vartheta$. Приняв во внимание это выражение $\cos\varphi$ и равенства (114_1) и (115_1), получаем

$$\frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3\cos\varphi\cos\psi}{\cos\vartheta}\right) =$$
$$= \frac{\rho^2 - 2z^2}{r^5} + \frac{1}{r^5}\left(\zeta^2 + r\zeta - 3(\zeta - z)\frac{r_0\cos\varphi_0}{\cos\vartheta}\right).$$

Аналогично неравенству (95_1) имеем $\left|\frac{1}{r^5} - \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\right| \leqslant \frac{C'\rho^2 + C''|z|}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$ т.е. $\frac{1}{r^5} = \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}(1 + g_1\rho^2 + g_2|z|)$, где $|g_1| \leqslant C'$, а $|g_2| \leqslant C''$. Отсюда

$$\frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3\cos\varphi\cos\psi}{\cos\vartheta}\right) = \frac{\rho^2 - 2z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}(1 + g_1\rho^2 + g_2|z|) +$$
$$+ \frac{1}{r^5}\left(\zeta^2 + z\zeta - 3(\zeta - z)\frac{r_0\cos\varphi_0}{\cos\vartheta}\right). \tag{123}$$

38. Найдем высший предел модуля выражения последней строки этого равенства.

Обозначим через α угол, составляемый радиус-вектором ρ точки p с нормалью n' к (S) в этой точке. Имеем

$$\frac{\xi}{r_0}\cos(n'x) + \frac{\eta}{r_0}\cos(n'y) =$$
$$= \frac{\rho}{r_0}(\cos\omega\cos(n'x) + \sin\omega\cos(n'y)) = \frac{\rho\cos\alpha}{r_0}.$$

При помощи этого соотношения и равенства (122_1) получаем

$$r_0\cos\varphi_0 = \rho\cos\alpha + \zeta\cos\vartheta. \tag{124}$$

Заметив, далее, что $\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} = \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\cos\omega + \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\sin\omega$, выводим из этого равенства при помощи (64) *) следующее: $\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$. Следовательно, в силу (124), $\frac{r_0\cos\varphi_0}{\cos\vartheta} = \zeta - \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}$. Отсюда при помощи ($53_1$) и (54)

*) С заменой в них n_1 на n', а ξ_1, η_1 и ζ_1 на ξ, η и ζ.

выводим неравенство

$$\left| \frac{r_0 \cos\varphi_0}{\cos\vartheta} \right| \leqslant (2a\sqrt{3} + b)\rho^2 = c\rho^2, \tag{124$_1$}$$

где c есть определенное число.

При помощи этого неравенства и (54) получаем

$$\left| \zeta^2 + z\zeta - 3(\zeta - z)\frac{r_0 \cos\varphi_0}{\cos\vartheta} \right| \leqslant c_1\rho^4 + c_2|z|\rho^2,$$

где c_1 и c_2 суть, очевидно, определенные числа, одинаковые для всех точек поверхности (S).

Приняв, наконец, в расчет неравенство (90_3), приходим к следующему:

$$\left| \frac{1}{r^5}\left(\zeta^2 + z\zeta - 3(\zeta - z)\frac{r_0 \cos\varphi_0}{\cos\vartheta} \right) \right| \leqslant 2^{5/2}\frac{c_1\rho^4 + c_2|z|\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{5/2}\frac{c_1(\rho^2 + z^2)^2 + c_2|z|(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Поэтому можем положить

$$\frac{1}{r^5}\left(\zeta^2 + z\zeta - 3(\zeta - z)\frac{r_0 \cos\varphi_0}{\cos\vartheta} \right) =$$

$$= 2^{5/2}\theta\,\frac{c_1(\rho^2 + z^2)^2 + c_2|z|(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}},$$

где θ есть величина, подчиненная условию $|\theta| \leqslant 1$.

39. При помощи предыдущего равенства можем написать (123) в виде

$$\frac{1}{r^3}\left(1 + 3\frac{\cos\varphi\cos\psi}{\cos\vartheta} \right) = \frac{\rho^2 - 2z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{Q}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}, \tag{125}$$

где положено $Q = (g_1\rho^2 + g_2|z|)(\rho^2 - 2z^2) + 2^{5/2}\theta[c_1(\rho^2 + z^2)^2 + c_2|z|(\rho^2 + z^2)]$.

Так как, очевидно, $|\rho^2 - 2z^2| \leqslant 2(\rho^2 + z^2)$, то

$$|Q| \leqslant A|z|(\rho^2 + z^2) + B(\rho^2 + z^2)^2, \tag{126}$$

где A и B суть определенные числа.

Равенства (122) и (125) приводят к такому:

$$\Omega(z, 0) - \Omega(z, R) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{(\rho^2 - 2z^2)\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}(\mu - \mu^0)\,d\rho +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{\rho Q}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}(\mu - \mu^0)\,d\rho. \tag{127}$$

40. Заменим в только что полученном равенстве z на $-z$. Получим

$$\Omega(-z,0)-\Omega(-z,R)=\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^R\frac{(\rho^2-2z^2)\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}(\mu-\mu^0)\,d\rho+$$

$$+\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^R\frac{\rho Q'}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}(\mu-\mu^0)\,d\rho, \tag{128}$$

где $Q'=(g_1'\rho^2+g_2'|z|)(\rho^2-2z^2)+2^{5/2}\theta'[c_1(\rho^2+z^2)^2+c_2|z|\cdot(\rho^2+z^2)]$, $|\theta'|\leqslant 1$, причем, очевидно,

$$|Q'|\leqslant A\,|z|(\rho^2+z^2)+B(\rho^2+z^2)^2. \tag{129}$$

Вычитая равенства (127) и (128) одно из другого, получаем

$$\Omega(z,0)-\Omega(-z,0)=\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^R\frac{\rho Q_1}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}(\mu-\mu^0)\,d\rho+$$

$$+[\Omega(z,R)-\Omega(-z,R)],$$

где положено $Q_1=Q-Q'=[(g_1-g_1')\rho^2+(g_2-g_2')|z|](\rho^2-2z^2)+$ $+2^{5/2}\theta_1[c_1(\rho^2+z^2)^2+c_2|z|(\rho^2+z^2)]$, $\theta_1=\theta-\theta'$, $|\theta_1|\leqslant 2$. Отсюда заключаем на основании (126) и (129), что

$$|Q_1|\leqslant 2A|z|(\rho^2+z^2)+2B(\rho^2+z^2)^2. \tag{130}$$

Так как функция μ предполагается непрерывной на поверхности (S), то, выбрав R достаточно малым, будем иметь

$$|\mu-\mu^0|\leqslant\eta \tag{131}$$

для всех точек площадки (σ). При помощи этого неравенства и (130) получаем

$$|K|=\left|\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^R\frac{\rho Q_1}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}(\mu-\mu^0)\,d\rho\right|\leqslant$$

$$\leqslant 4\pi\eta\left\{A|z|\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+B\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right\}.$$

Но

$$|z|\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}=|z|\left(\frac{1}{\sqrt{z^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)<1,$$

$$\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}}=\sqrt{R^2+z^2}-\sqrt{z^2}<R.$$

Следовательно,

$$|K|\leqslant 4\pi\eta(A+BR)=\epsilon/2,$$

где под ϵ можем подразумевать наперед заданное положительное число, стремящееся к нулю одновременно с R.

С другой стороны, очевидно, что разность $\Omega(z, R) - \Omega(-z, R)$ стремится к нулю при $z \to 0$, каково бы ни было R, отличное от нуля. Выбрав R указанным выше способом, можем выбрать затем такое положительное число δ, что будем иметь

$$|\Omega(z, R) - \Omega(-z, R)| < \epsilon/2$$

для всех z, таких что $|z| < \delta$.

Так как $\Omega(z, 0) - \Omega(-z, 0) = K + [\Omega(z, R) - \Omega(-z, R)]$, то при сделанном выборе R и z получаем

$$|\Omega(z, 0) - \Omega(-z, 0)| < \epsilon. \tag{132}$$

Но

$$\lim_{z \to +0} \Omega(z, 0) = -\frac{\partial W_e}{\partial n}, \quad \lim_{z \to +0} \Omega(-z, 0) = -\frac{\partial W_i}{\partial n}. \tag{133}$$

Неравенство (132) доказывает, таким образом, следующую теорему.

Теорема Ляпунова (третья). *Если потенциал двойного слоя, распределенного по поверхности Ляпунова с непрерывным напряжением μ, имеет определенную нормальную производную с одной стороны поверхности (т.е. внутреннюю или внешнюю), то он необходимо имеет определенную же нормальную производную и с другой ее стороны (т.е. соответственно, внешнюю или внутреннюю) и обе эти производные равны между собой.*

41. Допустим теперь, что непрерывная функция μ удовлетворяет еще при всех значениях $\rho < D_1 < D$ следующему условию:

$$\left| \int_0^{2\pi} (\mu - \mu^0)\, d\omega \right| < \lambda \rho^{\beta+1}, \tag{134}$$

где λ и $\beta \leqslant 1$ суть положительные числа, не зависящие ни от ρ, ни от положения точки p_0 на поверхности (S). В таком случае

$$\left| \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{(\rho^2 - 2z^2)\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} (\mu - \mu^0)\, d\rho \right| < 2\lambda \int_0^R \frac{\rho^{\beta+2}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\, d\rho <$$

$$< 2\lambda \int_0^R \rho^{\beta-1}\, d\rho = \frac{2\lambda}{\beta} R^\beta. \tag{135}$$

Будем теперь подразумевать под η максимум $|\mu - \mu^0|$ на площадке (σ). В таком случае неравенство (131) будет справедливым при всяком данном R и, совершенно так же, как в п. 40, мы докажем неравенство

$$\left| \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{\rho Q}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} (\mu - \mu^0)\, d\rho \right| \leqslant 4\pi \rho (A + BR).$$

При помощи этого неравенства и (135) выводим из (127) следующее:

$$|\Omega(z, 0) - \Omega(z, R)| < \frac{2\lambda}{\beta} R^\beta + 4\pi\eta(A + BR), \tag{136}$$

имеющее место при всяком достаточно малом (см. п. 19) положительном R.

42. Рассмотрим теперь интеграл того же вида, что и в формуле (116), но распространенный на пояс, высекаемый из поверхности (S) двумя цилиндрами вращения радиусов R и $R_1 < R$ и с общей осью, направленной по нормали n к поверхности (S) в точке p_0. При принятых в п. 36 обозначениях он представится в виде $\Omega(z, R_1) - \Omega(z, R)$. Заменив в (127) R через R_1 и вычтя из (127) полученный результат, будем иметь

$$\Omega(z, R_1) - \Omega(z, R) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{R_1}^{R} \frac{(\rho^2 - 2z^2)\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} (\mu - \mu^0)\, d\rho +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\omega \int_{R_1}^{R} \frac{\rho Q}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} (\mu - \mu^0)\, d\rho,$$

откуда, полагая $z = 0$, выводим

$$\Omega(0, R_1) - \Omega(0, R) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\omega \int_{R_1}^{R} (\mu - \mu^0) \frac{d\rho}{\rho^2} + \int_0^{2\pi} d\omega \int_{R_1}^{R} (\mu - \mu^0) \frac{Q_0}{\rho^4}\, d\rho, \tag{137}$$

где $Q_0 = (2^{5/2}\theta c_1 + g_1)\rho^4$ есть значение Q при $z = 0$. При помощи этого выражения Q_0 и неравенства (131) получаем

$$\left| \int_0^{2\pi} d\omega \int_{R_1}^{R} (\mu - \mu^0) \frac{Q_0}{\rho^4}\, d\rho \right| \leqslant A_1 R\eta,$$

а приняв во внимание условие (134), заключаем, что

$$\left| \int_0^{2\pi} d\omega \int_{R_1}^{R} (\mu - \mu^0) \frac{d\rho}{\rho^2} \right| < \frac{\lambda}{\beta} R^\beta.$$

Последние два неравенства и формула (137) приводят к неравенству

$$|\Omega(0, R_1) - \Omega(0, R)| < \frac{\lambda}{\beta} R^\beta + A_1 R\eta. \tag{138}$$

Отсюда следует, что $\Omega(0, R)$ при сделанном условии (134) относительно функции μ стремится к определенному пределу при $R \to 0$.

Обозначим этот предел через L_0*). Так как неравенство (138) справедливо при всяком $R_1 < R$, то, полагая в нем $R_1 = 0$, получаем

$$|\Omega(0, R) - L_0| \leqslant \frac{\lambda}{\beta} R^\beta + A_1 R\eta. \tag{139}$$

43. Напишем теперь разность $\Omega(z, 0) - L_0$ в виде

$$\Omega(z, 0) - L_0 = [\Omega(z, 0) - \Omega(z, R)] + [\Omega(0, R) - L_0] + [\Omega(z, R) - \Omega(0, R)].$$

Отсюда при помощи (136) и (139) выводим

$$|\Omega(z, 0) - L_0| < \frac{3\lambda}{\beta} R^\beta +$$

$$+ \eta(A_1 R + 4\pi A + 4\pi BR) + |\Omega(z, R) - \Omega(0, R)|. \tag{140}$$

Очевидно, что каково бы ни было R, не равное нулю, разность $\Omega(z, R) - \Omega(0, R)$ всегда стремится к нулю одновременно с z, будет ли при этом z оставаться положительным или отрицательным.

---

*) Под значением интеграла, стоящего в правой части равенства (116) при $P = p_0$, т.е. под $\Omega(0, 0)$ (см. п. 36), понимается этот предел L_0. (*Прим. ред.*)

Выберем теперь R так, чтобы было

$$\frac{3\lambda}{\beta} R^{\beta} + \eta[(A_1 + 4\pi B)R + 4\pi A] < \frac{\epsilon}{2},$$

где ϵ — наперед заданное положительное число, что всегда возможно, ибо при $R = 0$ разность $\mu - \mu^0$, а следовательно и η, также обращается в нуль. Выбрав указанным способом R, выбираем затем не зависящее от R число z столь малым, чтобы было

$$|\Omega(z, R) - \Omega(0, R)| < \epsilon/2,$$

что в силу вышесказанного всегда возможно. При этом неравенство (140) обратится в следующее:

$$|\Omega(z, 0) - L_0| < \epsilon,$$

откуда следует, что

$$\lim_{z \to 0} \Omega(z, 0) = L_0,$$

т.е. $\Omega(z, 0)$ стремится к определенному пределу L_0 независимо от того, будет ли при этом z оставаться положительным или отрицательным.

Из сказанного, приняв во внимание равенства (133), заключаем, что *для всякой поверхности Ляпунова потенциал двойного слоя имеет в каждой ее точке определенные внутреннюю и внешнюю нормальные производные, равные между собой, коль скоро напряжение μ слоя удовлетворяет условию* (134).

Так как, далее, число ϵ отнюдь не зависит от выбора точки p_0 на поверхности (S), то *эти нормальные производные суть правильные**).

Условие (134) *является достаточным для существования определенных нормальных производных от потенциала двойного слоя.*

44. Полученные результаты установлены впервые, как упомянуто выше, Ляпуновым. Нетрудно дополнить теорему Ляпунова, показав, *что условие* (134) *существенно*; *для существования определенных нормальных производных от потенциала двойного слоя недостаточно требовать выполнения условия* (134) *с* $\beta = 0$.

Поверхность (S) примера, рассмотренного в п. 34, очевидно, удовлетворяет всем условиям Ляпунова.

Напряжение $\mu = \lambda\rho$ есть непрерывная функция координат на площадке (σ) и всегда может быть сделано таковой же на всей остальной части (S). Но в рассматриваемом частном случае

$$\int_0^{2\pi} (\mu - \mu^0)\, d\omega = \lambda \int_0^{2\pi} \rho\, d\omega = 2\pi\lambda\rho,$$

т.е. при достаточно малом ρ

$$\left| \int_0^{2\pi} (\mu - \mu^0)\, d\omega \right| > 2\pi\lambda'\rho^{\beta+1}$$

каковы бы ни были положительные числа β и λ'.

---

*) Отметим, что при этом предельное значение $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{p_0} = \frac{\partial W_e}{\partial n_e} = \frac{\partial W_i}{\partial n} = -L_0$ является непрерывной на (S) функцией. (*Прим. ред.*)

Условие (134) не удовлетворяется, и потенциал двойного слоя не имеет нормальных производных в точке p_0. Сопоставляя все сказанное в этом пункте и в конце предыдущего, приходим к следующей теореме.

Обобщенная теорема Ляпунова (четвертая). *Для того чтобы потенциал двойного слоя имел правильные внутреннюю и внешнюю нормальные производные в каждой точке какой-либо поверхности Ляпунова, достаточно, чтобы напряжение μ этого слоя оставалось непрерывным во всех точках поверхности и удовлетворяло в любой точке p_0 и при значениях $\rho < D$ условию*

$$\left| \int_0^{2\pi} (\mu - \mu^0)\, d\omega \right| < \lambda \rho^{\beta + 1}, \tag{141}$$

где λ и β суть положительные числа, не зависящие ни от ρ, ни от положения точки p_0 (напряжение в которой равно μ^0) на рассматриваемой поверхности, причем выполнение условия (141) *с $\beta = 0$ не гарантирует существования внутренней и внешней нормальных производных потенциала двойного слоя.*

45. Докажем, наконец, еще две теоремы, относящиеся к теории потенциала двойного слоя, которые необходимы для строгого и общего решения основных задач математической физики. Для этой цели придется установить предварительно новый ряд неравенств, справедливых для всякой поверхности Ляпунова.

Возьмем какую-либо точку p_0 поверхности (S) и снова воспользуемся цилиндрами вращения радиусов

$$R_0 \quad \text{и} \quad R < R_0 < D/2 \qquad \text{(см. п. 19)}, \tag{141_1}$$

общей осью которых служит нормаль к (S) в точке p_0, и следующими обозначениями.

Площадку, вырезаемую цилиндром радиуса R_0 на поверхности (S), обозначим через (σ_0), площадку, вырезаемую цилиндром радиуса R, – через (σ), через (σ_1) – пояс поверхности, ограниченный контурами площадок (σ_0) и (σ); часть поверхности (S), остающуюся за выключением из нее площадки (σ_0), обозначим через (S_1). Возьмем точку p_1 на площадке (σ) и обозначим через r_1 расстояние точки p_1 от точки p_0. Расстояние точек p_0 и p_1 от какой-либо точки p поверхности (S) обозначим соответственно через r_0 и r. Угол, составляемый направлением $\overline{p_1 p}$ с внешней нормалью n в точке p, обозначим через φ, а через φ_0 обозначим угол, составляемый направлением $\overline{p_0 p}$ с той же нормалью n. Начало прямоугольной системы координат ξ, η, ζ поместим в точке p_0, приняв за ось ζ направление внешней нормали n_0 к поверхности (S) в точке p_0. Координаты переменной точки p обозначим через ξ, η, ζ, координаты точки p_1 – через ξ_1, η_1 и ζ_1.

Предположим, что точка p лежит на площадке (σ). Имеем

$$r \leqslant r_1 + r_0. \tag{142}$$

Возьмем точку p_1 достаточно близкой к точке p_0 и положим $r_1 < R/2$. Вводя по-прежнему цилиндрические координаты ρ и ω с началом в точке p_0 и с осью, направленной по нормали n_0, получаем (п. 18) $r_0 < 2\rho$. При этом неравенство (142) дает

$$r < 2\rho + R/2 < 5R/2. \tag{143}$$

Приняв

$$R < 2D/5, \tag{144}$$

будем иметь

$$r < D, \quad r_1 \leqslant D/5. \tag{145}$$

Возьмем теперь полярные координаты ρ' и ω' с началом в точке p_1 и с осью, направленной по внешней нормали n_1 к (S) в точке p_1, и обозначим через ξ', η', ζ' прямоугольные координаты точки p по отношению к системе координат с началом в p_1 и осью ζ', направленной по n_1. Так как при сделанных условиях на основании (145) точка p находится внутри сферы радиуса D с центром в p_1, то, по предыдущему (равенство (54) п. 18),

$$|\zeta'| \leqslant b\rho'^2. \tag{146}$$

Обозначив через ϑ' угол между нормалями n и n_1, можем писать $r\cos\varphi = \xi'\cos(n\xi') + \eta'\cos(n\eta') + \zeta'\cos(n\zeta') = \left(\xi \dfrac{\partial\zeta'}{\partial\xi'} + \eta' \dfrac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\right)\cos\vartheta' + \zeta'\cos\vartheta'$. Отсюда, в силу (52_1) и (146), $|r\cos\varphi| \leqslant \left(\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\right)^2} + |\zeta'|\right)\cos\vartheta' \leqslant (a\sqrt{3}\rho' r + b\rho'^2)\cos\vartheta' \leqslant a'r^2\cos\vartheta'$, т.е.

$$|\cos\varphi| \leqslant a'r\cos\vartheta' \leqslant a'r. \tag{147}$$

Точно так же докажем, что для любой точки p, лежащей на площадке (σ), при сделанных допущениях,

$$|\cos\varphi_0| \leqslant a'r_0\cos\vartheta \leqslant a'r_0, \tag{147_1}$$

где ϑ есть угол между нормалями n и n_0.

Заметим еще, что для точек p и p_1, лежащих на площадке (σ_0),

$$|\zeta| < b\rho^2, \quad |\zeta_1| < b\rho_1^2, \tag{147_2}$$

где $\rho_1 = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$. Отсюда

$$|\zeta\zeta_1| < b^2\rho^2\rho_1^2 < \rho_1^2/4, \tag{148}$$

если предположить, например, что $b^2\rho^2 < b^2R_0^2 < 1/4$, что всегда возможно.

46. Предположим теперь, что точка p находится на площадке (σ_1). Обозначая через α угол между направлениями $\overline{p_0p_1}$ и $\overline{p_0p}$, получаем $r^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1\cos\alpha$. Так как по предположению,

$$r_1 < R/2 \tag{148_1}$$

и так как *для всякой точки p, лежащей вне площадки* (σ), $R < \rho$, то

$$r_1 < \rho/2 \leqslant r_0/2. \tag{148_2}$$

При этом из известного разложения по полиномам Лежандра

$$\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1\cos\alpha}} = \sum_0^\infty P_n(\cos\alpha)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n$$

выводим $r_0/r = 1 + (r_1/r_0)\cos\alpha + 2\theta r_1^2/r_0^2$, где θ есть величина, численно меньшая единицы. Отсюда легко получаем следующие неравенства:

$$\left|\frac{r_0^3}{r^3} - 1 - 3\frac{r_1}{r_0}\cos\alpha\right| < 23\frac{r_1^2}{r_0^2}, \tag{149}$$

$$\left|\frac{r_0^3}{r^3} - 1\right| < 14\frac{r_1}{r_0}, \quad \frac{r_0^3}{r^3} < 9. \tag{149$_1$}$$

Но $\cos\alpha = \dfrac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1}{r_0 r_1}$. Следовательно, $3(r_1/r_0)\cos\alpha = 3(\xi\xi_1 + \eta\eta_1)/r_0^2 + 3\zeta\zeta_1/r_0^2$. При помощи этого равенства и неравенства (148) и (149) выводим $\left|\dfrac{r_0^3}{r^3} - 1 - 3\dfrac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1}{r_0^2}\right| < 23\dfrac{r_1^2}{r_0^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{\rho_1^2}{r_0^2} < 24\dfrac{r_1^2}{r_0^2}$

и, на основании (148_1),

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1}{r_0^5}\right| < 6\frac{R^2}{r_0^5}. \tag{150}$$

Неравенства же (149_1) дают

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < 14\frac{r_1}{r_0^4} < 7\frac{R}{r_0^4}, \quad \frac{1}{r^3} < \frac{9}{r_0^3}. \tag{150$_1$}$$

47. Обозначим теперь значения потенциала двойного слоя

$$W = \int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,ds$$

в точках p_0 и p_1 соответственно через W_0 и W_1 и рассмотрим разность

$$W_1 - W_0 = \int \mu\left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right)ds.$$

Выбираем точку p_1 указанным выше способом и обозначим интегралы того же вида, что и в правой части этого равенства, но распространенные на площадки (σ), (σ_1) и часть (S_1) поверхности (S), соответственно через J, J_1 и J', причем будем иметь

$$W_1 - W_0 = J + J_1 + J'. \tag{151}$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int \mu\left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right)d\sigma,$$

распространенный на площадку (σ). Так как в этом случае переменная точка p, по координатам которой ξ, η, ζ совершается интегрирование, остается всегда на площадке (σ), то имеют место неравенства (147) и (147_1), которые дают

$$|J| \leqslant a'\mu_0\left(\int \frac{\cos\vartheta'}{r}\,d\sigma + \int \frac{\cos\vartheta}{r_0}\,d\sigma\right), \tag{152}$$

где под μ_0 можно подразумевать максимум μ на всей поверхности (S).

Воспользуемся опять построением п. 21, обозначив через $d\sigma'$ поверхностный элемент площадки (σ'), вырезаемой на (S) цилиндром вращения радиуса $R_1 = 4R$ с осью, направленной по нормали n_1; величина R подчинена одному условию (144), которое может быть заменено, например, равенством $R = D/10$, причем получим

$$R_1 = 2D/5 < D/2. \tag{153}$$

При этом предположении получаем

$$\int \frac{\cos\vartheta'}{r}\, d\sigma \leqslant \int \frac{1}{r} d\sigma < \int \frac{d\sigma'}{r}.$$

Но

$$\int \frac{d\sigma'}{r} = \int \frac{\rho' d\rho' d\omega'}{r\cos\vartheta_1},$$

где ϑ_1 есть угол между нормалями n и n_1 в точках p и p_1.

Так как $r \geqslant \rho'$ и в силу (153) имеет место неравенство (см. п. 19) $\cos\vartheta_1 > 1/2$, то

$$\int \frac{\cos\vartheta'}{r}\, d\sigma \leqslant \int \frac{d\sigma'}{r} \leqslant 2\int d\rho' d\omega' = 4\pi R_1 = 16\pi R.$$

Очевидно, далее, что

$$\int \frac{\cos\vartheta}{r_0}\, d\sigma \leqslant \int d\rho d\omega = 2\pi R.$$

Эти неравенства и (152) приводят к следующему:

$$|J| \leqslant 18\pi a'\mu_0 R = aR, \tag{154}$$

где a есть определенное число, одинаковое для всех точек p_0 поверхности (S).

48. Переходим к интегралу

$$J_1 = \int \mu\left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right)d\sigma_1,$$

распространенному на площадку (σ_1). Имеем

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} = \frac{r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0}{r^3} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)r_0\cos\varphi_0. \tag{155}$$

Из очевидных равенств

$$\left.\begin{aligned} r\cos\varphi &= (\xi - \xi_1)\cos(n\xi) + (\eta - \eta_1)\cos(n\eta) + (\zeta - \zeta)\cos(n\zeta), \\ r_0\cos\varphi_0 &= \xi\cos(n\xi) + \eta\cos(n\eta) + \zeta\cos(n\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

выводим

$$r_0\cos\varphi_0 - r\cos\varphi = \xi_1\cos(n\xi) + \eta_1\cos(n\eta) + \zeta_1\cos(n\zeta) =$$

$$= \left(-\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} - \eta_1\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \zeta_1\right)\cos\vartheta. \tag{156_1}$$

Отсюда

$$|r_0 \cos\varphi_0 - r\cos\varphi| \leqslant \Big(\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}\ \times$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2} + |\zeta_1|\Big) \cos\vartheta \leqslant (br_1^2 + a\sqrt{3}\, r_1 r_0)\cos\vartheta,$$

и так как для всех точек p площадки (σ_1) соблюдается неравенство (148_2), то

$$|r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0| \leqslant \left(\frac{b}{2} + a\sqrt{3}\right) r_1 r_0 \cos\vartheta = b' r_1 r_0 \cos\vartheta.$$

Воспользовавшись, наконец, вторым из неравенств (150_1), находим

$$\left|\frac{r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0}{r^3}\right| \leqslant 9b' \frac{r_1}{r_0^2}\cos\vartheta. \tag{157}$$

Далее, второе из равенств (156) дает

$$|\cos\varphi_0| \leqslant (a\sqrt{3} + b)\, r_0 \cos\vartheta. \tag{157_1}$$

При помощи этого неравенства и (150_1) получаем

$$\left|\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_0\cos\varphi_0\right| \leqslant 14(a\sqrt{3}+b)\frac{r_1}{r_0^2}\cos\vartheta = b''\frac{r_1}{r_0^2}\cos\vartheta. \tag{157_2}$$

Из (155), (157) и (157_2) выводим неравенство

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| \leqslant (9b' + b'')\frac{r_1}{r_0^2}\cos\vartheta = a''\frac{r_1}{r_0^2}\cos\vartheta,$$

справедливое для всех точек p площадки (σ_1). Следовательно,

$$|J_1| \leqslant a''\mu_0 r_1 \int \frac{\cos\vartheta}{r_0^2}\, d\sigma_1 = a''\mu_0 r_1 \int_0^{2\pi} d\omega \int_R^{R_0} \frac{\rho\, d\rho}{r_0^2} \leqslant$$

$$\leqslant a''\mu_0 r_1 \int_0^{2\pi} d\omega \int_R^{R_\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi a''\mu_0 r_1 \ln\frac{R_0}{R} \tag{158}$$

49. Найдем, наконец, высший предел модуля интеграла

$$J' = \int \mu\left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right) ds_1,$$

распространенного на всю часть (S_1) поверхности (S).

Из равенства (156_1), справедливого для любой точки p, выводим

$$|r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0| <$$

$$< \sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}\ \sqrt{\cos^2(n\xi) + \cos^2(n\eta)} + |\zeta_1| < r_1 + br_1^2 < cr_1,$$

где c есть определенная постоянная. Следовательно,

$$\left|\frac{r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0}{r^3}\right| < \frac{c}{R_0^3} r_1 = c' r_1, \tag{159}$$

так как для всякой точки p, лежащей в части (S_1) поверхности (S), $r > R_0$.

Далее,

$$\left| r_0 \cos\varphi_0 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \right| < \frac{|r - r_0|}{r^3 r_0^2} (r_0^2 + r_0 r + r^2) < c'' r_1, \tag{159$_1$}$$

так как $|r - r_0| < r_1$, а $1/r$ и $1/r_0$ в части (S_1) не превосходят некоторого определенного предела.

При помощи (159), (159$_1$) и (155) получаем

$$|J'| \leqslant \mu_0 S_1 (c' + c'') r_1 = c_1 r_1, \tag{160}$$

где c_1 есть определенная постоянная.

50. Сопоставляя неравенства (154), (158) и (160), получаем

$$|J| + |J_1| + |J'| \leqslant aR + c_1 r_1 + 2\pi a'' \mu_0 r_1 \ln \frac{R_0}{R}.$$

Что же касается r_1, то оно подчинено лишь условию $r_1 < R/2$.

Всегда можем положить $R = 3r_1$, причем будем иметь

$$|J| + |J_1| + |J'| \leqslant hr_1 + gr_1 |\ln r_1|,$$

где h и g — определенные постоянные. Так как для любого $\beta < 1$ всегда можно подыскать число g_1 такое, что будет иметь место неравенство $r_1 |\log r_1| < g_1 r_1^\beta$, то предыдущее неравенство можно заменить таким:

$$|J| + |J_1| + |J'| < \lambda r_1^\beta.$$

Очевидно, что это неравенство можно считать справедливым для всякого достаточно малого r_1, а числа λ и $\beta < 1$ — не зависящими от положения точек p_0 и p_1 на поверхности (S).

Равенство (151) дает при этом $|W_1 - W_0| < \lambda r_1^\beta$ — неравенство, справедливое для всякой точки p_0 поверхности (S) и для всякой точки p_1, расстояние которой от p_0 не превосходит некоторого определенного предела.

Таким образом, приходим к следующей теореме, доказанной впервые А. Корном*) в частном предположении $\beta \leqslant 1/2$ и обобщенной затем Ляпуновым**).

Теорема А. Корна, обобщенная Ляпуновым. *Какова бы ни была поверхность (S) Ляпунова, около каждой ее точки p_0 можно описать сферу достаточно малого, но определенного радиуса D_1 (одинакового для всех точек поверхности (S)), такую, что для всякой точки p поверхности (S), лежащей внутри этой сферы, потенциал двойного слоя*

$$W = \int \frac{\mu \cos\varphi}{r^2} \, ds$$

удовлетворяет неравенству

$$|W - W_0| \leqslant \lambda r^\beta,$$

где β — произвольное число, меньшее единицы, а λ — определенное число,

---

*) A. K o r n. Abhandlungen zur Potentialtheorie, Bd. I. — pp. 5–8.

**) A. L i a p o u n o f f. Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet. — Сообщ. Харьк. Матем. Общ., 2 сер., 1902, т. VII.

не зависящее от положения точек p_0 и p_1, при одном условии, что функция μ остается ограниченной на поверхности (S).

51. Предположим теперь, что напряжение μ потенциала двойного слоя W обладает следующим свойством:

Для всякой точки p_0 поверхности (S) и для всякой другой точки p_1 (той же поверхности), расстояние которой от точки p_0 не превосходит некоторого, хотя бы и достаточно малого, но определенного предела D_1, не зависящего от положения p_0 на (S), имеет место неравенство

$$|\mu' - \mu^0| < \lambda r_1^\beta, \tag{161}$$

где λ и $\beta < 1$ суть данные числа μ' и μ^0 — значения μ в точках p_1 и p_0, а r_1 — по-прежнему расстояние $p_0 p_1$.

Разность $W_1 - W_0$ есть некоторая функция полярных координат ρ и ω точки p_1. Дадим ρ некоторое, достаточно малое значение, при котором соблюдается условие (161), и найдем высший предел модуля выражения

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (W_1 - W_0)\, d\omega. \tag{162}$$

Подынтегральная функция всегда может быть представлена в виде

$$W_1 - W_0 = \int \left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} \right)(\mu - \mu^0)\, ds, \tag{163}$$

так как по теореме Гаусса

$$\int \left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} \right) ds = 0.$$

Обозначая теперь через J, J_1 и J' интеграл правой части равенства (163), распространенный соответственно на площадки (σ), (σ_1) и на часть (S_1) поверхности (S), можем писать

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (W_1 - W_0)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_1 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J' d\omega. \tag{164}$$

Интегралы J, J_1 и J' отличаются от интегралов того же обозначения предыдущих пунктов только тем, что функция μ последних заменена здесь разностью $\mu - \mu^0$.

Поэтому, применив к интегралу J дословно рассуждения п. 47, предполагая при этом, что все поставленные там условия относительно величин R_0, R и r_1 выполнены, получим

$$|J| \leqslant 18\pi a' \mu_0 R,$$

где под μ_0 теперь нужно подразумевать максимум модуля разности $\mu - \mu^0$ на площадке (σ).

Предполагая R выбранным так, что во всех точках (σ) условие (161) удовлетворяется, что всегда возможно, получаем

$$|J| < 18\pi a' \lambda R r'^\beta,$$

где r' есть расстояние от p_0 той точки площадки (σ), где $|\mu - \mu^0|$ имеет наибольшее значение. Отсюда на основании (143) выводим

$$|J| < 18\pi a'\lambda \left(\frac{5}{2}\right)^{\beta} R^{\beta+1} = aR^{\beta+1}, \tag{165}$$

где a есть определенная постоянная.

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} J d\omega \right| < aR^{\beta+1}. \tag{165$_1$}$$

52. Найдем теперь высшие пределы модулей двух остальных интегралов равенства (164). Равенства (155) и (156$_1$) дают

$$\frac{\cos\varphi}{r^3} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^3} =$$

$$= \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_0 \cos\varphi_0 - \frac{\zeta_1 \cos\vartheta}{r^3} + \left(\xi_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \eta_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right) \frac{\cos\vartheta}{r^3}.$$

Положив

$$\Omega = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1}{r_0^5}\right) r_0 \cos\varphi_0 - \zeta_1 \frac{\cos\vartheta}{r^3} +$$

$$+ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\left(\xi_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \eta_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\cos\vartheta, \tag{166}$$

проведем предыдущее равенство к виду

$$\frac{\cos\varphi}{r^3} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^3} = 3\frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1}{r_0^4} \cos\varphi_0 +$$

$$+ \left(\xi_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \eta_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right) \frac{\cos\vartheta}{r_0^3} + \Omega. \tag{166$_1$}$$

Так как от ω зависят только величины r, ξ_1 и η_1 и $\xi_1 = \rho\cos\omega$, $\eta_1 = \rho\sin\omega$, то

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\varphi}{r^3} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^3}\right) d\omega = \int_0^{2\pi} \Omega d\omega. \tag{167}$$

Приняв во внимание равенство (167), получаем

$$\int_0^{2\pi} J_1 d\omega = \int (\mu - \mu^0) \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right) d\omega\right] d\sigma_1 =$$

$$= \int (\mu - \mu^0) \left(\int_0^{2\pi} \Omega d\omega\right) d\sigma_1. \tag{168}$$

Заметив, что $\left|\xi_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \eta_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| < \rho\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2} < a\sqrt{3}\rho r_0 < a\sqrt{3}\, r_1 r_0$, и учитывая неравенства (150), (157$_1$), (147$_2$) и (150$_1$), выводим из (166)

$$|\Omega| < (6(a\sqrt{3}+b)R^2 + 9br_1^2 + 7a\sqrt{3}Rr_1)\cos\vartheta/r_0^3,$$

откуда, на основании (148_1), $|\Omega| < a' \dfrac{\cos\vartheta}{r_0^3} R^2$, где a' есть определенная постоянная.

Всегда можем взять R_0 столь малым, что неравенство (161) будет соблюдаться для всех точек площадки (σ_1), т.е. $|\mu - \mu^0| < \lambda r_0^\beta$. При помощи этого неравенства и предыдущего получаем

$$\left| \int (\mu - \mu^0) \left(\int_0^{2\pi} \Omega \, d\omega \right) d\sigma_1 \right| \leqslant 2\pi\lambda a' R^2 \int \frac{\cos\vartheta}{r_0^{3-\beta}} \, d\sigma_1. \tag{169}$$

Но, подразумевая теперь под ρ и ω полярные координаты переменной точки p площадки (σ_1), можем писать

$$\int \frac{\cos\vartheta}{r_0^{3-\beta}} \, d\sigma_1 = \int_0^{2\pi} d\omega \int_R^{R_0} \frac{\rho \, d\rho}{r_0^{3-\beta}} \leqslant \int_0^{2\pi} d\omega \int_R^{R_0} \frac{d\rho}{\rho^{2-\beta}} =$$

$$= \frac{2\pi}{1-\beta} \left(\frac{1}{R^{1-\beta}} - \frac{1}{R_0^{1-\beta}} \right) < \frac{2\pi}{1-\beta} R^{\beta-1}.$$

Следовательно,

$$\left| \int (\mu - \mu^0) \left(\int_0^{2\pi} \Omega \, d\omega \right) d\sigma_1 \right| < \frac{4\pi^2\lambda a'}{1-\beta} R^{\beta+1},$$

т.е. в силу (168),

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} J_1 \, d\omega \right| < \frac{2\pi\lambda a'}{1-\beta} R^{\beta+1} = a'' R^{\beta+1}, \tag{169_1}$$

где a'' – новая определенная постоянная.

53. Рассмотрим последний интеграл равенства (164).

Подобно предыдущему имеем

$$\int_0^{2\pi} J' \, d\omega = \int (\mu - \mu^0) \left(\int_0^{2\pi} \Omega \, d\omega \right) ds_1. \tag{170}$$

Заметим, что неравенство (150) справедливо для всякой точки, лежащей вне площадки (σ), т.е. и для точек части (S_1) поверхности (S), на которую распространяется последний интеграл; равенство (166_1) также справедливо для любой точки $p(\xi, \eta, \zeta)$ поверхности (S). Так как для любой точки p части (S_1) $\left| \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r_0^3} \right| < cr_1$, где c есть определенное число, и $\left| \left(\xi_1 \dfrac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \right.\right.$ $\left.\left. + \eta_1 \dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta} \right) \cos\vartheta \right| = |\xi_1 \cos(n\xi) + \eta_1 \cos(n\eta)| \leqslant r_1$, то

$$\left| \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \left(\xi_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \eta_1 \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \right) \cos\vartheta \right| < cr_1^2.$$

Далее, на основании (150) для любой точки p части (S_1)

$$\left|\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_0^3}-3\,\frac{\xi\xi_1+\eta\eta_1}{r_0^5}\right)r_0\cos\varphi\right|<c'R^2,$$

где c' есть также определенная постоянная. Наконец,

$$\left|\zeta_1\,\frac{\cos\vartheta}{r^3}\right|<c''r_1^2.$$

При помощи этих последних трех неравенств, положив, как и в п. 50,

$$R=3r_1, \tag{171}$$

выводим из (166)

$$|\Omega|<hr_1^2.$$

При этом равенство (170) дает

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}J'd\omega\right|\leqslant 2\mu_0 hS_1r_1^2<gr_1^2. \tag{172}$$

Из равенства (164) при помощи (165_1), (169_1), (172) и (171) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(W_1-W_0)\,d\omega\right|<\lambda_1 r_1^{\beta+1},$$

где λ_1 есть определенное число.

Очевидно, что для точки p_1 соблюдается неравенство (53′) п. 18, вследствие чего только что полученное неравенство можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(W_1-W_0)\,d\omega\right|\leqslant 2^{\beta+1}\lambda_1\rho^{\beta+1}=\lambda'\rho^{\beta+1}.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема Ляпунова (пятая). *Если напряжение μ потенциала двойного слоя таково, что около каждой точки p_0 поверхности (S) как центра можно описать такую сферу, хотя бы и весьма малого, но определенного (одинакового для любой точки p_0) радиуса*

$$D_1<D,$$

что для всякой точки p этой поверхности, лежащей внутри сферы, имеет место неравенство

$$|\mu-\mu^0|<\lambda r^\beta,\quad \beta<1,$$

то потенциал двойного слоя удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(W-W_0)\,d\omega\right|<\lambda'\rho^{\beta+1}, \tag{173}$$

где ρ есть расстояние точки p от нормали к (S) в точке p_0.

ГЛАВА II

Конвексные поверхности.
Основная задача электростатики (задача о распределении электричества). Решение этой задачи методом Робена. Принцип Робена. Решение основной задачи гидродинамики (задачи Неймана) методом Робена

1. В настоящей главе мы будем рассматривать один частный вид поверхностей Ляпунова, присоединив к условиям (a), (b) и (c) (п. 17 гл. I) еще одно дополнительное ограничение. Предположим, что поверхность (S) удовлетворяет еще следующему условию:

(d) *Все точки поверхности* (S), *какова бы ни была точка* p_0 *этой поверхности, лежит по ту сторону плоскости, касательной к* (S) *в точке* p_0, *в которую направлена внутренняя нормаль к* (S') *в точке* p_0.

Мы будем называть такие поверхности *конвексными*.

Возьмем какую-либо другую точку p на поверхности (S) и обозначим через ψ угол, составляемый направлением $\overline{pp_0}$ с внешней нормалью n_0 в точке p_0, а через φ – угол, составляемый направлением $\overline{p_0p}$ с нормалью n в точке p. Очевидно, что для конвексной поверхности, где бы ни находились на ней точки p и p_0, углы ψ и φ меньше $\pi/2$, т.е. при всяком положении точек p и p_0 на поверхности (S)

$$\cos\psi > 0, \quad \cos\varphi > 0. \tag{1}$$

Около каждой точки p_0 как центра можно описать сферу радиуса $R < D$, достаточно малого, но определенного и не зависящего от положения этой точки на поверхности, такую, что для любой точки p той же поверхности, лежащей вне площадки (σ), вырезанной упомянутой сферой на поверхности (S), будет

$$\cos\varphi \geqslant m_0, \quad \cos\psi \geqslant m_0 \quad \text{вне площадки } (\sigma), \tag{2}$$

где m_0 есть определенная положительная постоянная. Кроме того, для любой точки p вне (σ) будем иметь

$$\frac{\cos\psi}{r} \leqslant \frac{1}{R} \quad \text{вне площадки } (\sigma),$$

ибо для всякой такой точки расстояние $p_0p = r \geqslant R$.

Предположим теперь, что точка p находится на площадке (σ). Принимая точку p_0 за начало прямоугольной системы координат ξ, η, ζ с осью ζ, направленной по нормали n_0, получаем $r\cos\psi = -\zeta$. Так как ζ удовлетворяет неравенству (54) гл. I (п. 18), то

$$0 < \frac{\cos\psi}{r} < b \quad \text{на площадке } (\sigma).$$

Обозначив через $1/D_0$ наибольшую из величин $1/D$ и b, будем иметь

$$\frac{\cos\psi}{r} \leqslant \frac{1}{D_0} \quad \text{для всех точек } p_0 \text{ и } p \text{ поверхности } (S). \tag{3}$$

2. Под задачей *о распределении электричества* понимается следующая задача:

Найти такую плотность ρ электрических масс, распределенных по поверхности (S), чтобы слой этих масс не оказывал действия на точки, лежащие внутри поверхности, иначе говоря:

Найти такую плотность ρ потенциала простого слоя

$$V = \int \frac{\rho}{r}\, ds, \tag{4}$$

что функция V постоянная для всех точек внутри (S).

Эта задача называется также *основной задачей электростатики* или задачей *о равновесии электричества на данном кондукторе.*

Рассматриваемая задача представляет собой частный случай внешней задачи Дирихле: найти гармоническую вне поверхности (S) функцию V в виде потенциала простого слоя (4) при условии $V_e = \text{const}$ на поверхности (S).

Если такая функция V будет найдена, то по теореме Пуассона (равенства (108) и (109) гл. I)*)

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = 4\pi\rho. \tag{5}$$

В данном случае $V_e = V_i = \text{const}$ на поверхности (S), т.е. $V = \text{const}$ внутри (S) и

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = 0. \tag{6}$$

При этом равенство (5) дает решение задачи

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_e}{\partial n}.$$

Но решение может быть получено и непосредственно, не переходя через задачу Дирихле.

Применив к потенциалу V формулу (108) (гл. I) и учитывая (6), получаем для определения ρ следующее уравнение:

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\rho\cos\psi}{r^2}\, ds. \tag{7}$$

Это уравнение будем называть *уравнением Робена.* Уравнение (7) есть так называемое теперь *интегральное уравнение,* к решению которого, таким образом, сводится задача.

Вообще, первые попытки решить задачу электростатики методом последовательных приближений принадлежат, если не ошибаюсь, немецкому физику Бееру**), но задача была поставлена надлежащим образом и обстоятельно изложен метод ее решения только в 1887 г. молодым французским ученым Робеном***), который привел ее решение к интегральному уравнению (7),

---

*) Рассматриваются только непрерывные плотности ρ. (*Прим. ред.*)

**) См. C. N e u m a n n. Untersuchungen über das Potential. – Leipzig, 1887, Cap. 6

***) G. R o b i n. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, T.CIV (1887). Также "Oeuvres scientifiques de G. R o b i n" (Paris, 1899, p. 60).

воспользовался для его решения методом последовательных приближений, идея которого принадлежит Коши, а для доказательства сходимости полученных приближений – методом так называемых арифметических средних К. Неймана*). Исследования Робена до сих пор излагаются без всяких дополнений в трактатах по теории притяжения и по анализу (см., например, E. Picard, "Traité d'Analyse", последнее издание), но они страдают одним существенным недостатком, на который не обращают внимания.

Уравнение (7) допускает очевидное решение

$$\rho = 0,$$

но требуется найти или доказать существование положительной функции ρ, *удовлетворяющей уравнению* (7), *отличной от нуля.*

Этого доказательства метод Робена не дает и устанавливает лишь следующее положение: если существует решение уравнения (7), отличное от нуля, то оно может быть найдено путем последовательных приближений по приему Робена, но вопрос о том, возможно ли на самом деле такое решение, оставляет открытым. Решение же этого вопроса имеет существенное значение для математической физики по соображениям, развитым в гл. III части I.

Мне удалось пополнить этот недочет еще в 1897 г. для случая поверхностей, мало уклоняющихся от сферы, а затем и для конвексных поверхностей с конечной и определенной кривизной в каждой точке**). В 1900 г. я распространил полученный результат и на все поверхности Ляпунова***).

В настоящей главе мы изложим решение задачи для *конвексных* поверхностей Ляпунова (п. 1), имея в виду попутно изложить и метод арифметических средних К. Неймана, общее же решение вопроса для каких угодно поверхностей Ляпунова, когда только что упомянутый метод неприменим, дадим в одной из последующих глав.

3. Сущность метода последовательных приближений, который Робен применил к решению уравнения (7), в общем виде может быть выражен следующим образом.

Остановимся для простоты на случае одной неизвестной функции u, зависящей от какого-либо числа m независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

---

*) Теория интегральных уравнений получила широкое распространение с начала девятисотых годов, благодаря преимущественно трудом Фредгольма и Гильберта, приоритет же введения в науку этих уравнений приписывают иногда итальянскому математику Вито Вольтерра, изучавшему линейное интегральное уравнение с одной переменной в 1896 г. в мемуаре "Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti" (Annali di Matematica, T. XXV).

Как видим, Робен раньше других (за 9 лет до Вито Вольтерра) воспользовался интегральным уравнением для решения одной из важных задач математической физики и указал способ его решения при помощи метода последовательных приближений.

**) В.А. Стеклов. К вопросу о существовании конечной и непрерывной внутри данной области функции координат, удовлетворяющей уравнению Лапласа и т.д. – Сообщ. Харьк. Матем. Общ., 2 сер. 1897, т. V.

W. Stekloff. Sur le probléme de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann. – Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris и Сообщ. Харьк. Матем. Общ., 2 сер., 1897, T. VI.

***) W. Stekloff. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathematique. – Annales de Toulouse, 2 s., 1900, T. II.

В. Стеклов. Общие методы решения основных задач математической физики. – Диссертация на степ. доктора, Харьков, 1901.

Допустим, нам известно, что если совершим над искомой функцией u некоторую определенную аналитическую операцию, которую обозначим через $\Omega(u)$, то она должна быть равной некоторой другой, также определенной аналитической операции Ω_1, совершенной над функцией u и независимыми переменными $t_1, t_2, \ldots, t_m$, от которых эта функция зависит, так что

$$\Omega(u) = \Omega_1(u, t_1, t_2, \ldots, t_m). \tag{8}$$

Если мы подставим в Ω_1 вместо u какое-либо определенное его выражение в переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, то правая часть уравнения (8) обратится в определенную функцию от этих переменных. Предположим операцию Ω такой, что если положить

$$\Omega(u) = f(t_1, t_2, \ldots, t_m), \tag{8_1}$$

где f есть некоторая определенная функция от переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, то можно найти выражение функции u при помощи также определенной операции ω, совершенной над этими переменными, т.е. $u = \omega(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Подставим в правую часть уравнения (8) вместо u какую-либо произвольно взятую (но определенную) функцию от переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, которую обозначим через u_0, и обозначим соответствующее значение u через u_1. Получим уравнение

$$\Omega(u_1) = \Omega_1(u_0, t_1, t_2, \ldots, t_m),$$

из которого на основании только что сказанного выводим $u_1 = \omega(u_0, t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Подставляем затем в (8) вместо u только что полученное выражение u_1, получим новую функцию u_2, определяемую уравнением $\Omega(u_2) = \Omega_1(u_1, t_1, t_2, \ldots, t_m)$, которое дает, как и в первом случае $u_2 = \omega(u_1, t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Полученное выражение u_2 снова подставляем вместо u в правую часть уравнения (8); получим $\Omega(u_3) = \Omega_1(u_2, t_1, t_2, \ldots, t_m)$ и отсюда $u_3 = \omega(u_2, t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Продолжая таким образом далее, после k указанных действий получим $u_k = \omega(u_{k-1}, t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Оказывается, что во всех известных нам конкретных случаях, будет ли уравнение (8) представлять собой алгебраическое уравнение, или дифференциальное, или интегральное, или функциональное, или некоторую смешанную их комбинацию и т.п., составляемые указанным выше приемом функции

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots \tag{9}$$

при совершенно произвольном выборе исходной функции u_0 с увеличением числа k указанных действий будут все более приближаться к искомой функции u, удовлетворяющей уравнению (8), если таковая существует. В пределе при $k \to \infty$ получим, вообще говоря, как раз искомую функцию u.

Во всех известных случаях оказывается, что ряд

$$u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_k - u_{k-1}) + \ldots$$

сходится равномерно и, следовательно, представляет искомую функцию $u = \lim\limits_{k \to \infty} u_k$, действительно удовлетворяющую уравнению (8).

Этот замечательный прием решения уравнений различных типов, получивший название *метода последовательных приближений*, был указан впервые Коши для дифференциальных уравнений; этот же прием был употреблен

Гауссом при решении задачи об определении орбит планет и комет по трем наблюдениям. Общность и первостепенное его значение были выяснены только в конце прошлого столетия, главным образом изысканиями Пуанкаре, Пикара и др. Только что описанный метод и применил Робен к решению основного уравнения электростатики (7).

4. Подставим в правую часть уравнения (7) вместо ρ произвольно взятую непрерывную функцию ρ_0. Получим

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \int \rho_0 \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

Подставляя туда же вместо ρ только что полученную функцию ρ_1, находим

$$\rho_2 = \frac{1}{2\pi} \int \rho_1 \frac{\cos\psi}{r^2} ds$$

и т.д.; вообще

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds. \tag{10}$$

Само собой разумеется, априори нельзя утверждать, что рассматриваемый прием всегда дает действительное решение задачи, а потому в каждом данном случае необходимо это доказывать.

В рассматриваемой задаче, как уже упоминалось, одно очевидное решение $\rho = 0$ несомненно существует. Употребленный нами прием может как раз привести к этому последнему, и если этот прием вообще приводит в данном случае к решению задачи, то естественно предположить, что при некотором выборе исходной функции ρ_0 и должно получиться именно это решение $\rho = 0$.

С другой стороны, очевидно, что если какая-либо функция ρ, не равная тождественно нулю, удовлетворяет уравнению (7), то ему же удовлетворяет и функция $C\rho$, где C есть какая угодно постоянная.

Таким образом, уравнение (7) не вполне определяет искомую функцию. Но указанная неопределенность исчезнет, если мы поставим условие, чтобы ρ, кроме уравнения (7), удовлетворяло еще и следующему:

$$\int \rho\, ds = M, \tag{11}$$

где M есть заданная постоянная, что физически равносильно, очевидно, предположению, что наперед задается масса электрического слоя, который должен находиться в равновесии на поверхности (S). При этом дополнительном условии исключится само собой и решение $\rho = 0$. Задача сводится, следовательно, к определению функции ρ, удовлетворяющей уравнению (7) при условии (11). Это последнее налагает некоторое ограничение на произвол выбора исходной функции ρ_0.

В правой части равенства (10) интегрирование совершается по переменным ξ, η, ζ и, следовательно, ρ_k есть функция координат той постоянной точки поверхности (S), расстояние которой от переменной точки $p(\xi, \eta, \zeta)$ обозначено через r. Если обозначим координаты этой постоянной, по отношению к интегрированию, точки через x, y, z, то ρ_k будет функцией этих последних координат. Обозначим теперь через ds' элемент поверхности (S), если будем брать интеграл по переменным x, y, z от какой-либо функции этих переменных, распространяя его на всю поверхность (S).

Умножаем (10) на ds' и интегрируем результат по всей поверхности (S). Так как ρ_k есть непрерывная функция координат, то, меняя порядок интегрирования в правой части равенства, получаем

$$\int \rho_k ds' = \frac{1}{2\pi} \int ds' \left(\int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds \right) = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \left(\int \frac{\cos\varphi}{r^2} ds' \right) ds,$$

ибо в интеграле с элементом ds' постоянной считается точка $p(\xi, \eta, \zeta)$, а переменной – точка x, y, z, а потому угол ψ обращается в угол φ. Отсюда на основании теоремы Гаусса выводим

$$\int \rho_k ds' = \int \rho_{k-1} ds \tag{12}$$

– равенство, справедливое при всяком k и приводящее к такому:

$$\int \rho_k ds = \int \rho_0 ds. \tag{12_1}$$

Если искомая функция ρ определяется равенством $\rho = \lim\limits_{k \to \infty} \rho_k$, то должно быть

$$\int \rho\, ds = \int \rho_0 ds,$$

т.е., при соблюдении условия (11),

$$\int \rho_0 ds = M. \tag{13}$$

Сопоставляя все сказанное, приходим к заключению, что для решения задачи о распределении электричества методом Робена необходимо доказать следующую теорему.

Теорема I. *При произвольном выборе исходной функции ρ_0, подчиненной условию* (13), *последовательно определяемые уравнением* (10) *функции ρ_k стремятся при беспредельном возрастании k к определенной функции ρ, действительно удовлетворяющей уравнению* (7) *и условию* (11).

5. Кроме того необходимо еще доказать, что *полученное таким образом решение есть единственно возможное.*

Для этого стоит только показать, что может существовать одна и только одна не равная нулю функция ρ, удовлетворяющая одновременно уравнению (7) и условию (11). Допустим противное, что существуют две различные, отличные от нуля функции ρ_1 и ρ_2, из которых каждая удовлетворяет уравнению (7) и условию (11). Положим

$$\rho' = \rho_1 - \rho_2. \tag{14}$$

Очевидно, функция ρ' должна удовлетворять условиям

$$\rho' = \frac{1}{2\pi} \int \rho' \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad \int \rho' ds = 0. \tag{15}$$

Составим потенциал простого слоя V' с плотностью ρ':

$$V' = \int \frac{\rho'}{r} ds.$$

По теореме Пуассона

$$\frac{\partial V_i'}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n} = \frac{\partial V_i'}{\partial n} + \int \rho' \frac{\cos\psi}{r^2} ds = 2\pi\rho',$$

откуда, в силу (15), $\dfrac{\partial V_i'}{\partial n} = 0$, т.е.

$$V' = C \quad \text{внутри } (S), \tag{16}$$

где C есть постоянная. Положим

$$V_1 = \int \frac{\rho_1}{r}\, ds. \tag{17}$$

Так как ρ_1 также удовлетворяет уравнению Робена, то

$$V_1 = C_1 \quad \text{внутри } (S), \tag{17_1}$$

где C_1 — другая постоянная, которая должна быть отлична от нуля, ибо ρ_1 предполагается не равным нулю.

В самом деле, если бы C_1 было нулем, то гармоническая функция V_1 была бы нулем во всем пространстве (см. теорему I гл. I), причем мы имели бы

$$\frac{\partial V_{1i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{1e}}{\partial n} = 0. \tag{18}$$

Но по теореме Пуассона из (17) выводим $\dfrac{\partial V_{1i}}{\partial n} - \dfrac{\partial V_{1e}}{\partial n} = 4\pi\rho_1$. Отсюда следует, что равенство (18) невозможно, если ρ_1 не нуль; следовательно C_1 не нуль.

Умножаем равенство (16):

$$\int \frac{\rho'}{r}\, ds = C$$

на $\rho_1 ds'$ и интегрируем результат по всей поверхности (S). Получаем, в силу (17), (17_1) и (15),

$$CM = \int \rho_1 \left(\int \frac{\rho'}{r}\, ds \right) ds' = \int \rho' \left(\int \frac{\rho_1}{r}\, ds' \right) ds = C_1 \int \rho' ds = 0,$$

т.е.

$$V' = C = \int \frac{\rho'}{r}\, ds = 0.$$

Отсюда на основании теоремы Пуассона заключаем, что $\rho' = 0$, т.е. $\rho_1 = \rho_2$, что и доказывает следующую теорему.

Теорема II. *Может существовать одна и только одна функция* ρ, *удовлетворяющая уравнению Робена* (7) *и условию* (11).

6. Переходим теперь к доказательству теоремы I. Взяв какую угодно функцию ρ_0, составим последовательно ряд функций

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int \rho_0 \frac{1}{r}\, ds, \\ V_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_1}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_k &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds. \end{aligned} \tag{19}$$

Для рассматриваемых нами поверхностей по теоремам Ляпунова (гл. 1) существуют нормальные производные от всех функций $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и, следовательно, составление этих функций только что указанным способом всегда возможно.

Из этих равенств сейчас же выводим следующие:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \int \rho_0 \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,\\
\frac{\partial V_2}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_1}{\partial n} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial V_k}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Сравнивая эти равенства с (10), видим, что

$$
\rho_k = \frac{\partial V_k}{\partial n} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{21}
$$

Таким образом, *все функции ρ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) являются нормальными производными на поверхности (S) от потенциалов простого слоя V_k, определяемых равенствами* (19).

Применим к гармонической функции V_{k-1} формулу Грина (36) гл. I. Получаем для всех точек внутри (S):

$$
V_{k-1} = \frac{1}{4\pi} \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V_{k-1,i}}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds.
$$

Предположим, что точка, к которой относится выражение V_{k-1} левой части этого равенства, приближается к какой-либо точке поверхности (S), и перейдем к пределу. Обозначив первый и второй интегралы правой части соответственно через W и W', можем писать $4\pi V_{k-1,i} = W_i + W_i'$. Но в силу свойств потенциалов простого и двойного слоя (пп. 17 и 33 гл. I, равенство (111)) $V_{k-1,i} = V_{k-1}$, $W_i' = W'$, $W_i = W + 2\pi V_{k-1}$, где в правых частях подразумеваются значения соответствующих функций на поверхности (S). Эти равенства и предыдущие приводят к следующему:

$$
V_{k-1} = \frac{1}{2\pi} \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1,i}}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds,
$$

имеющему место на поверхности.

Применив к последнему из равенств (19), заменив в нем k на $k-1$, теорему Пуассона, получаем

$$
2\pi V_{k-1} = \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds - \int \frac{\partial V_{k-2}}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds,
$$

откуда при помощи тех же равенств (19) выводим

$$
V_k = \frac{1}{2\pi} \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{22}
$$

— замечательное соотношение, устанавливающее весьма простую связь между значениями двух последовательных потенциалов V_k и V_{k-1} для точек поверхности (S).

7. Возьмем потенциал двойного слоя

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \tag{22$_1$}$$

и выведем одно общее неравенство, лежащее в основе так называемого метода арифметических средних К. Неймана.

Будем рассматривать значения функции W на поверхности (S). Разобьем эту поверхность на две части (α) и (β) так, чтобы для всех точек части (α) функция μ заключалась между M и $(M+m)/2$, а для всех точек части (β) — между m и $(M+m)/2$. Здесь под M и m подразумеваются соответственно наибольшее и наименьшее значения μ на всей поверхности (S).

Возьмем какую-либо определенную точку s на поверхности (S) и значение W в этой именно точке будем обозначать через W_s. Имеем

$$W_s = \frac{1}{2\pi} \int_{(\alpha)} \mu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{(\beta)} \mu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \tag{23}$$

где символами $\int\limits_{(\alpha)}$ и $\int\limits_{(\beta)}$ мы обозначаем интегралы, распространенные соответственно на части (α) и (β) поверхности (S)*). Обозначим через $I_s^{(\alpha)}$ и $I_s^{(\beta)}$, соответствующие значения интеграла

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \tag{24}$$

для точки s **).

По теореме Гаусса для любой точки s поверхности (S)

$$I_s^{(\alpha)} + I_s^{(\beta)} = 2\pi. \tag{25}$$

Из равенства (23), учитывая сделанные предположения о пределах, между которыми заключаются значения функции μ на частях (α) и (β) поверхности (S), выводим

$$2\pi W_s \leqslant M I_s^{(\alpha)} + \frac{M+m}{2} I_s^{(\beta)},$$

или, в силу (25)

$$W_s \leqslant M - \frac{M-m}{4\pi} I_s^{(\beta)}. \tag{26}$$

С другой стороны, подобным же путем убеждаемся, что

$$2\pi W_s \geqslant \frac{M+m}{2} I_s^{(\alpha)} + m I_s^{(\beta)}$$

*) Под интегралами по (α) и (β) удобно понимать интегралы Лебега. (*Прим. ред.*).

**) То есть интегралы вида (24), распространенные соответственно на части (α) и (β), для точки s.

и, на основании (25),

$$W_s \geqslant m + \frac{M - m}{4\pi} \quad I_s^{(\alpha)}. \tag{26'}$$

Применим последнее в какой-либо другой точке s_1 поверхности (S). Получаем

$$W_{s_1} \geqslant m + \frac{M - m}{4\pi} \quad I_{s_1}^{(\alpha)}.$$

Вычтя это равенство из (26), находим

$$W_s - W_{s_1} \leqslant (M - m)\left(1 - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s_1}^{(\alpha)}}{4\pi}\right). \tag{26$_1$}$$

8. Положим

$$\lambda = \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s_1}^{(\alpha)}}{4\pi} \quad . \tag{27}$$

Так как в силу теоремы Гаусса

$$0 \leqslant I_{s_1}^{(\alpha)} \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant I_s^{(\beta)} \leqslant 2\pi,$$

где бы ни лежали точки s и s_1 на поверхности (S) и каковы бы ни были части поверхности (α) и (β), то

$$\frac{I_s^{(\beta)} + I_{s_1}^{(\alpha)}}{4\pi} \leqslant 1. \tag{28}$$

Опишем теперь около точек s и s_1, как центров, сферы достаточно малого радиуса $R < D$ и обозначим через (σ) и (σ_1) площадки, вырезаемые этими сферами на поверхности (S). Площадка (σ_1) может либо целиком лежать на части (α), либо захватить только часть ее. Обозначим, вообще, часть площадки (σ_1), принадлежащую части (α), через (σ_1'), а часть (α), лежащую вне (σ_1), – через (α'). Имеем

$$(\alpha) = (\sigma_1') + (\alpha'). \tag{29}$$

Для рассматриваемых нами поверхностей (см. п. 1) будем иметь для точек части (α') : $\cos\varphi \geqslant m_0$. Поэтому $I_{s_1}^{(\alpha')} = \int\limits_{(\alpha')} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \geqslant \frac{m_0}{D_1^2}\,(\alpha')$, ибо r остается меньшим некоторого числа D_1, так как размеры поверхности (S) конечны. Отсюда, в силу (29),

$$I_{s_1}^{(\alpha')} \geqslant \frac{m_0}{D_1^2} \; [(\alpha) - (\sigma_1')] \geqslant \frac{m_0}{D_1^2} \quad [(\alpha) - (\sigma_1)],$$

ибо, очевидно, $(\sigma_1') \leqslant (\sigma_1)$.

Так как, далее, $I_{s_1}^{(\alpha)} \geqslant I_{s_1}^{(\alpha')}$, то

$$I_{s_1}^{(\alpha)} \geqslant \frac{m_0}{D_1^2} \; [(\alpha) - (\sigma_1)].$$

Совершенно так же докажем, что и

$$I_s^{(\beta)} \geqslant \frac{m_0}{D_1^2}\ [(\beta) - (\sigma)],$$

т.е.

$$\lambda = \frac{I_{s_1}^{(\alpha)} + I_s^{(\beta)}}{4\pi} \geqslant \frac{m_0}{4\pi D_1^2}\ [(\alpha) + (\beta) - (\sigma) - (\sigma_1)] =$$

$$= \frac{m_0}{4\pi D_1^2}\ [(S) - (\sigma) - (\sigma_1)], \tag{30}$$

где (S) означает площадь всей поверхности. Отсюда заключаем, что λ,*оставаясь меньшим* 1, *не опускается ниже известного предела, отличного от нуля, где бы ни находились точки* s *и* s_1 *на площадках* (α) *и* (β) *и каковы бы ни были эти площадки.*

Итак, на основании (28) и (30),

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{31}$$

где λ_0 *есть число, меньшее единицы и отличное от нуля.*

9. Обращаясь теперь к неравенству (26_1) и учитывая (31) и обозначение (27), можем писать

$$W_s - W_{s_1} \leqslant (M - m)(1 - \lambda_0) = (M - m)\tau,$$

где τ есть положительное число, меньшее единицы.

Если теперь обозначим через M_1 и m_1 максимум и минимум функции W на поверхности (S), то получим

$$M_1 - m_1 \leqslant (M - m)\tau,\ \tau < 1. \tag{32}$$

Это и есть *основное неравенство К. Неймана, справедливое для всякой конвексной поверхности* *).

Заметим еще, что из неравенств (26) и (26′) вытекают неравенства

$$M_1 \leqslant M,\quad m_1 \geqslant m, \tag{33}$$

так как $\dfrac{M-m}{4\pi} I_s^{(\beta)}$ и $\dfrac{M-m}{4\pi} I_s^{(\alpha)}$ всегда неотрицательны.

10. Будем обозначать значение ρ_k в какой-либо определенной точке s поверхности (S) через ρ_{ks}; значение ρ_k соответствующее частному предположению, что начальная функция

$$\rho_0 = 1, \tag{34}$$

обозначим через ρ_{ks}^0, а значение V_k при этом значении ρ_0 – через V_{ks}^0. По предыдущему (равенство (21)) $\rho_{ks} = \dfrac{\partial V_{ks}}{\partial n}$, $\rho_{ks}^0 = \dfrac{\partial V_{ks}^0}{\partial n}$, где в правых частях равенств подразумеваются значения нормальных производных от V_k и V_k^0 в точке s поверхности (S).

---

*) Для неконвексных поверхностей это неравенство, вообще говоря, не имеет места.

Из равенств (10), последовательно определяющих функции ρ_k ($k=1,2,3,\ldots$), следует, что для рассматриваемых нами поверхностей в силу (1) все ρ_k будут положительными, если $\rho_0>0$.

Следовательно, при условии (34),

$$\rho^0_{ks}>0 \tag{35}$$

при всяком k и для всякой точки s поверхности (S). При этом, как показывают равенства (19), будем иметь $V^0_{ks}<0$ при всяком k и для всякой точки s.

Так как в силу (22) значения функций V^0_k ($k=2,3,\ldots$) на поверхности (S) связаны соотношениями

$$V^0_k \mp \frac{1}{2\pi}\int V^0_{k-1}\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \quad (k=2,3,\ \ldots),$$

то их численные значения, которые обозначим через v^0_k, подчинены условиям

$$v^0_k=\frac{1}{2\pi}\int v^0_{k-1}\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \tag{36}$$

для всех точек поверхности (S)*).

С другой стороны, в силу (19) и (36) можем писать

$$|V^0_k|=v^0_k=\frac{1}{2\pi}\int\rho^0_{k-1}\,\frac{ds}{r}. \tag{37}$$

Что же касается величин ρ^0_k ($k=1,2,\ldots$), то они связаны между собой соотношениями

$$\rho^0_k=\frac{1}{2\pi}\int\rho^0_{k-1}\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds. \tag{38}$$

11. Положим

$$M^0_k=\max v^0_k=\max|V^0_k|,\quad m^0_k=\min v^0_k=\min|V^0_k|.$$

Применив к равенству (36) метод К. Неймана, заключаем, что

$$M^0_k\leqslant M^0_{k-1}\leqslant M^0_{k-2}\leqslant\ \ldots\ \leqslant M^0_1=L, \tag{39}$$

$$m^0_k\geqslant m^0_{k-1}\geqslant m^0_{k-2}\geqslant\ \ldots\ \geqslant m^0_1=l, \tag{39$_1$}$$

где

$$\left.\begin{aligned} L &=M^0_1=\max\ \frac{1}{2\pi}\int\frac{ds}{r},\\ l &=m^0_1=\min\ \frac{1}{2\pi}\int\frac{ds}{r}\end{aligned}\right\}\ \text{на поверхности } (S).$$

L и l суть определенные числа, зависящие от вида поверхности (S), причем не только L, но и l *отлично от нуля.*

*) Напомним, что для рассматриваемых нами поверхностей всегда $\cos\varphi>0$.

Из равенства (38) при помощи (3), (35), (37) и (39) выводим еще следующее:

$$\rho_k^0 \leqslant \frac{1}{2\pi D_0} \int \rho_{k-1}^0 \frac{ds}{r} \leqslant \frac{M_k^0}{D_0} \leqslant \frac{L}{D_0}. \tag{40}$$

12. Применим теперь метод арифметических средних К. Неймана к равенству (10), которое отличается от (22) (или от равенства общего типа (22_1)) только тем, что в нем угол φ заменен углом ψ, причем исходную функцию ρ_0 будем предполагать какой угодно.

Напишем равенство (10) в виде

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}^0} \rho_{k-1}^0 \frac{\cos\psi}{r^2} ds \tag{41}$$

и обозначим через N_{k-1} и n_{k-1} максимум и минимум отношения ρ_{k-1}/ρ_{k-1}^0 на поверхности (S), каковые несомненно существуют, так как ρ_{k-1} и ρ_{k-1}^0 непрерывны, а *последнее всегда положительно и в нуль на поверхности* (S) *не обращается.*

Разделим эту поверхность на две части (α) и (β) так, чтобы в первой из них было

$$\frac{N_{k-1} + n_{k-1}}{2} \leqslant \frac{\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}^0} \leqslant N_{k-1}, \tag{42}$$

а во второй

$$n_{k-1} \leqslant \frac{\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}^0} \leqslant \frac{N_{k-1} + n_{k-1}}{2}. \tag{42_1}$$

Придерживаясь принятых обозначений (см. п. 7), можем писать (равенство (41))

$$\rho_{ks} \leqslant N_{k-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\alpha)} \rho_{k-1}^0 \frac{\cos\psi}{r^2} ds +$$

$$+ \frac{N_{k-1} + n_{k-1}}{2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\beta)} \rho_{k-1}^0 \frac{\cos\psi}{r^2} ds. \tag{43}$$

Обозначим теперь интеграл $\frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1}^0 \frac{\cos\psi}{r^2} ds$, отнесенный к какой-либо точке s поверхности (S), через J_{ks}, а интегралы того же вида, распространенные на части (α) и (β) и отнесенные к той же точке s, — соответственно через $J_{ks}^{(\alpha)}$ и $J_{ks}^{(\beta)}$. Имеем

$$J_{ks} = J_{ks}^{(\alpha)} + J_{ks}^{(\beta)}.$$

При помощи этого равенства и неравенств (42) и (42_1) из (43) выводим тем же способом, что и в п. 7, для двух каких угодно точек s и s_1 поверхности (S):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ks}}{J_{ks}} &\leqslant N_{k-1} - \frac{N_{k-1} - n_{k-1}}{2} \frac{J_{ks}^{(\beta)}}{J_{ks}}, \\ \frac{\rho_{ks_1}}{J_{ks_1}} &\geqslant n_{k-1} + \frac{N_{k-1} - n_{k-1}}{2} \frac{J_{ks_1}^{(\alpha)}}{J_{ks_1}}, \end{aligned} \tag{44}$$

а отсюда

$$\frac{\rho_{ks}}{\rho_{ks}^0} - \frac{\rho_{ks_1}}{\rho_{ks_1}^0} \leqslant (N_{k-1} - n_{k-1}) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{J_{ks}^{(\beta)}}{J_{ks}} + \frac{J_{ks_1}^{(\alpha)}}{J_{ks_1}} \right) \right]. \qquad (45)$$

13. Возьмем какую-либо точку p_0 на поверхности (S) и опишем около нее, как центра, сферу радиуса $R < D$, как это сделано в п. 1. Часть поверхности, лежащую вне площадки (σ), вырезанной этой сферой, обозначим через (S_0). Очевидно (равенство (38)),

$$\rho_k^0 > \frac{1}{2\pi} \int_{(S_0)} \rho_{k-1}^0 \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds.$$

Отсюда при помощи (2) выводим

$$\rho_k^0 > \frac{m_0}{2\pi D_1} \int_{(S_0)} \frac{\rho_{k-1}^0}{r}\, ds = \frac{m_0}{2\pi D_1} \left[\int \frac{\rho_{k-1}^0}{r}\, ds - \int_{(\sigma)} \frac{\rho_{k-1}^0}{r}\, ds \right]. \qquad (46)$$

Учитывая (40), получаем

$$\int_{(\sigma)} \frac{\rho_{k-1}^0}{r}\, ds \leqslant \frac{L}{D_0} \int_{(\sigma)} \frac{ds}{r} < \frac{L}{D_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{r \cos\vartheta} <$$

$$< \frac{2L}{D_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R d\rho\, d\omega = \frac{4\pi RL}{D_0}, \qquad (47)$$

так как, напомним, $r \geqslant \rho$, $\cos\vartheta > 1/2$ для всех точек площадки (σ).

Далее, в силу (37),

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho_{k-1}^0}{r}\, ds = v_k^0 \geqslant m_k^0,$$

т.е., на основании (39_1),

$$\int \frac{\rho_{k-1}^0}{r}\, ds \geqslant 2\pi m_k^0 \geqslant 2\pi l. \qquad (47_1)$$

Неравенства (46), (47) и (47_1) приводит к следующему:

$$\rho_k^0 > \frac{m_0}{D_1} \left[l - \frac{2RL}{D_0} \right],$$

которое имеет место при всяком $R < D$.

Всегда можно положить $R < lD_0/(4L)$, причем будем иметь $\rho_k^0 > m_0 l/(2D_1)$. Отсюда, заметив, что

$$\rho_{ks}^0 = J_{ks}, \qquad (47')$$

выводим

$$J_{ks} > \frac{m_0 l}{2D_1} = Q, \qquad (48)$$

где Q есть определенное число, отличное от нуля.

14. Возьмем опять две какие-либо точки s и s_1 на поверхности (S) и опишем около них сферы достаточно малого радиуса $R < D$, подобно тому, как в п. 8.

Пользуясь обозначениями этого пункта, можем писать $J_{ks_1}^{(\alpha)} \geqslant J_{ks_1}^{(\alpha')}$. Заметив, что

$$J_{ks} = \frac{1}{2\pi} \int J_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

получаем при помощи (48), (29) и (2), так же как и в п. 8,

$$J_{ks_1}^{(\alpha')} = \frac{1}{2\pi} \int_{(\alpha')} J_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{Qm_0}{2\pi D_1^2} \int_{(\alpha')} ds = \frac{Qm_0}{2\pi D_1^2} [(\alpha) - (\sigma_1)].$$

Точно так же доказывается и неравенство

$$J_{ks}^{(\beta)} \geqslant \frac{Qm_0}{2\pi D_1^2} [(\beta) - (\sigma)].$$

С другой стороны, на основании (47') и (40) для любой точки s

$$J_{ks} \leqslant L/D_0. \tag{48$_1$}$$

Следовательно,

$$\frac{J_{ks}^{(\beta)}}{J_{ks}} + \frac{J_{ks_1}^{(\alpha)}}{J_{ks_1}} \geqslant \frac{m_0 Q D_0}{2\pi L D_1^2} [(\alpha) + (\beta) - (\sigma) - (\sigma_1)] =$$

$$= \frac{m_0 Q D_0}{2\pi L D_1^2} [(S) - (\sigma) - (\sigma_1)] = 2\lambda_0',$$

где λ_0' есть определенное число, отличное от нуля.

Очевидно, далее, что*)

$$\frac{1}{2} \left[\frac{J_{ks}^{(\beta)}}{J_{ks}} + \frac{J_{ks_1}^{(\alpha)}}{J_{ks_1}} \right] < 1.$$

Таким путем приходим к заключению, что

$$1 - \frac{1}{2} \left[\frac{J_{ks}^{(\beta)}}{J_{ks}} + \frac{J_{ks_1}^{(\alpha)}}{J_{ks_1}} \right] < 1 - \lambda_0' = \tau,$$

где τ *есть положительное число, меньшее единицы*, т.е. что, в силу (45),

$$N_k - n_k \leqslant (N_{k-1} - n_{k-1})\tau. \tag{49}$$

15. Предположим теперь, что исходная функция ρ_0 в равенствах (10) удовлетворяет условию

$$\int \rho_0\, ds = 0.$$

---

*) Отсюда между прочим, само собой вытекает неравенство $\lambda_0' < 1$.

При этом в силу (12_1) будем иметь при всяком k:

$$\int \rho_k ds = 0,$$

т.е. каждая из функций ρ_k (при всяком k) непременно принимает на поверхности (S) как положительные, так и отрицательные значения. Тем же свойством обладает и функция

$$\rho_k / J_k, \tag{50}$$

ибо, как показано выше, J_k остается положительным во всех точках поверхности (S). Поэтому

$$|\rho_k| / J_k \leqslant N_k - n_k, \tag{51}$$

так как максимум N_k функции (50) непременно положителен, а ее минимум n_k отрицателен.

Положим в неравенстве (49) последовательно $k = 2, 3, \ldots, k$ и перемножим между собой полученные таким путем $k - 1$ неравенств. Получим $N_k - n_k \leqslant (N_1 - n_1)\tau^{k-1}$. Это неравенство и (51) приводят к следующему:

$$|\rho_k| \leqslant J_k (N_1 - n_1)\tau^{k-1}. \tag{52}$$

Но $N_1 - n_1 \leqslant 2 \max(|\rho_1| / J_1)$, где*)

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \int \rho_0 \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad J_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos\psi}{r^2} ds = \rho_1^0.$$

На основании (48) $J_1 > Q$. С другой стороны, в силу (40),

$$|\rho_1| \leqslant \frac{R_0}{2\pi} \int \frac{\cos\psi}{r^2} ds = R_0 \rho_1^0 \leqslant \frac{R_0 L}{D_0},$$

где R_0 обозначает максимум $|\rho_0|$ на поверхности (S). Следовательно,

$$N_1 - n_1 \leqslant \frac{2R_0 L}{D_0 Q} = K,$$

где K есть определенная постоянная, зависящая только от вида поверхности (S).

Приняв, наконец, во внимание (47′) и (40), получаем

$$J_k = \rho_k^0 \leqslant L / D_0.$$

При помощи двух последних неравенств выводим из (52)

$$|\rho_k| \leqslant K \frac{L}{D_0} \tau^{k-1} = N\tau^k = R_0 N_1 \tau^k, \tag{52′}$$

где N_1 есть, очевидно, определенная постоянная, не зависящая от k, а только от вида поверхности (S). Это неравенство доказывает следующую важную для задачи теорему.

Теорема III. *Если исходная функция ρ_0 в равенствах*

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \tag{53}$$

---

*) См. равенство (47′) (п. 13).

последовательно определяющих функции ρ_k, удовлетворяет условию

$$\int \rho_0\, ds = 0, \tag{53$_1$}$$

то при всяком k

$$|\rho_k| \leqslant N\tau^k = R_0 N_1 \tau^k, \tag{54}$$

где N – число, не зависящее от k, R_0, есть максимум $|\rho_0|$ на поверхности (S), а τ есть положительное число, меньшее единицы, так что

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0.$$

16. Предположим теперь, что исходная функция ρ_0 в равенствах (53) остается неотрицательной во всех точках поверхности (S) и удовлетворяет условию (равенство (13) п. 4)

$$\int \rho_0\, ds = M \neq 0.$$

Положим

$$\rho_k' = \rho_k - \rho_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Функции ρ_k' удовлетворяют, очевидно, уравнениям

$$\rho_k' = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1}' \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds$$

$$(k = 2, 3, \ldots),$$

причем исходной функцией при последовательном вычислении функций ρ_k' здесь служит функция $\rho_1' = \rho_1 - \rho_0$, которая в силу равенства (12$_1$) п. 4 подчинена условию

$$\int \rho_1'\, ds = 0.$$

Применяя к функциям ρ_k' теорему III, получаем

$$|\rho_k'| \leqslant N\tau^{k-1}. \tag{55}$$

Отсюда следует, что *ряд*

$$\rho = \rho_0 + \rho_1' + \rho_2' + \ldots + \rho_k' + \ldots \tag{55$_1$}$$

сходится абсолютно и равномерно во всех точках поверхности (S), т.е. представляет непрерывную на поверхности (S) функцию ρ, и что

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho.$$

Таким образом, доказывается следующее предложение.

Теорема IV. *Если в равенствах (53) последовательно определяющих функции ρ_k, исходная функция ρ_0 не равна нулю и остается неотрицательной на поверхности (S), то ρ_k при беспредельном возрастании k стремится равномерно к определенному пределу, не равному нулю*), который представляет собой непрерывную и неотрицательную функцию координат точек поверхности (S).*

---

*) Так как $\int \rho_k ds = \int \rho_0\, ds = M$ при всяком k, а последний интеграл не равен нулю.

17. Остается только доказать, что функция ρ, определяемая бесконечным рядом (55_1), действительно удовлетворяет и уравнению Робена

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds \tag{56}$$

и условию

$$\int \rho ds = M, \tag{57}$$

где M есть заданное число.

На основании теоремы IV мы можем найти такое достаточно большое целое число k_0, что будет

$$|\rho - \rho_k| < \epsilon \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0, \tag{58}$$

где ϵ есть наперед заданное положительное число. Представим равенство (12_1), имеющее место при всяком k, в виде

$$\int (\rho_k - \rho + \rho) ds - M = 0,$$

или

$$\int \rho ds - M = \int (\rho - \rho_k) ds.$$

Отсюда на основании (58) выводим

$$|\int \rho ds - M| < \epsilon S = \epsilon'$$

— неравенство, равносильное равенству (57).

Напишем затем равенство (53) в виде

$$\rho - \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds =$$

$$= (\rho - \rho_k) + \frac{1}{2\pi} \int (\rho_{k-1} - \rho) \frac{\cos\psi}{r^2} ds. \tag{59}$$

Имеем, приняв во внимание неравенства (3) п. 1 и (58),

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int (\rho_{k-1} - \rho) \frac{\cos\psi}{r^2} ds \right| < \frac{\epsilon}{2\pi D_0} \int \frac{ds}{r} \leqslant \epsilon \frac{L}{D_0}.$$

При помощи этого неравенства и (58) из (59) выводим

$$\left| \rho - \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds \right| < \epsilon \left(1 + \frac{L}{D_0}\right) = \epsilon'',$$

где ϵ'' есть произвольно заданное положительное число. Отсюда сейчас же вытекает равенство (56). Из равенства (56) следует, что функция ρ положительна.

Таким образом, получаем следующую основную теорему электростатики.

Теорема V. *Возьмем произвольно функцию ρ_0, неотрицательную во всех точках конвексной поверхности (S) Ляпунова и подчиненную условию*

$$\int \rho_0 ds = M,$$

где M есть заданное положительное число, и составим последовательно ряд *функций* ρ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *по формулам*

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

Вычислив функции ρ_k, *составим ряд*

$$\rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots$$

Этот ряд представит непрерывную и положительную функцию ρ *координат точек поверхности* (S), *удовлетворяющую уравнению Робена* (56) *и условию* (57), *т.е. плотность электрического слоя, находящегося в равновесии на поверхности* (S) (*не оказывающего действия на точки, лежащие внутри* (S)).

Таким образом, предложенное нами видоизменение метода Робена вполне разрешает основную задачу электростатики (задачу о распределении электричества) для всякой конвексной поверхности Ляпунова, характерные свойства которой указаны в п. 1 *).

Можно показать, что предыдущий метод применим и к тому случаю, когда поверхность (S) имеет плоские части конечных размеров, причем условия п. 1 непосредственно не выполняются, но мы на этом останавливаться не будем, так как впоследствии покажем, что метод Робена распространяется на какие угодно (неконвексные) поверхности Ляпунова.

18. Вникая в изложенный выше анализ, легко видеть, что для полного решения основной задачи электростатики достаточно установить справедливость неравенства

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| < N\tau^k, \tag{60}$$

где N и τ суть определенные числа, из которых второе (τ) меньше единицы и не зависит от выбора исходной функции ρ_0. Для любой поверхности (S), для которой будет установлено это неравенство, носящее название *принципа Робена*, задача о распределении электричества будет разрешена.

Мы уже показали (п. 16), что при соблюдении условия (60) ρ_k стремится к определенному пределу ρ при беспредельном возрастании k, причем этот предел может быть нулем или величиной, не равной тождественно нулю, в зависимости от выбора исходной функции ρ_0. Мы сказали также,

---

*) Условие неотрицательности функции ρ_0 в теореме V не является существенным: при доказательстве сходимости последовательности ρ_k (п. 17) оно не использовалось, а положительность предельной функции ρ немедленно вытекает из сформулированного утверждения и теоремы единственности (теорема II п. 5).

Отметим также, что доказанными утверждениями (теоремы II–V) полностью исследована разрешимость интегрального уравнения (56) в классе неотрицательных функций. Доказано (теорема V), что для любого $M > 0$ существует положительное решение уравнения (56), удовлетворяющее условию (57); при $M = 0$ существование решения очевидно, $\rho \equiv 0$. В п. 5 установлена единственность неотрицательного решения задачи (56), (57).

Более того, приведенные рассуждения доказывают теорему I (а в частности, и существование решения) при произвольных (в том числе и отрицательных) значениях постоянной M и, как уже отмечалось, при произвольной непрерывной исходной функции ρ_0. Без условия неотрицательности установлена в п. 5 и единственность решения задачи (56), (57): при доказательстве единственности нулевого решения (в случае $M = 0$) достаточно воспользоваться существованием решения ρ_1 задачи (56), (57) с $M \neq 0$, например, с $M = 1$. (*Прим. ред.*)

что прямым следствием принципа Робена (неравенство (60)) является неравенство (58), которое и приводит к окончательному решению основной задачи электростатики*).

Покажем теперь, что *для любой поверхности, к которой приложим принцип Робена, вполне разрешается и основная задача гидродинамики* (*задача К. Неймана*).

Легко убедиться, что из принципа Робена сейчас же вытекает следующее предложение:

Если начальная функция ρ_0 *в равенствах* (53) *подчинена условию* $\int \rho_0 ds = 0$, *то*

$$|\rho_k| < N\tau^k. \tag{62}$$

В этом случае $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k$ представляет функцию, удовлетворяющую условиям

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad \int \rho ds = 0.$$

Такая функция, как показано в п. 5, необходимо равна тождественно нулю. При этом неравенство (61) (см. примечание к этому пункту), являющееся непосредственным следствием принципа Робена, обращается в неравенство (62), которое поэтому также является прямым следствием принципа Робена.

19. Изменим теперь несколько обозначения, переменив букву ρ_0 в уравнениях (53) на f, и составим ряд

$$\mu = f + \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + \ldots + \epsilon^k\rho_k + \ldots, \tag{63}$$

где, следовательно,

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad \rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{63$_1$}$$

Если функция f удовлетворяет условию

$$\int f ds = 0 \tag{64}$$

то на основании предыдущего имеет место неравенство (62). Отсюда следует, что ряд (63) при условии (64) сходится абсолютно и равномерно на поверхности (S) при всех значениях параметра ϵ, удовлетворяющих условию $|\epsilon| \leqslant 1$.

Так как к поверхности (S) по предположению применим принцип Робена, то при $\epsilon = -1$ ряд

$$\begin{aligned}(f + \epsilon\rho_1) + (\epsilon^2\rho_2 + \epsilon^3\rho_3) + \ldots + (\epsilon^{2k}\rho_{2k} + \epsilon^{2k+1}\rho_{2k+1}) + \ldots \\ \ldots = (f - \rho_1) + (\rho_2 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+1}) + \ldots\end{aligned} \tag{65}$$

---

*) В самом деле, можем писать $\rho = \rho_k + (\rho_{k+1} - \rho_k) + (\rho_{k+2} - \rho_{k+1}), \ldots$, откуда в силу (60),

$$|\rho - \rho_k| < N\tau^{k+1}(1 + \tau + \tau^2 + \ldots) = \frac{N\tau^{k+1}}{1-\tau} = N_1\tau^k, \tag{61}$$

т.е. при $k > k_0$, где k_0 есть достаточно большое число, $|\rho - \rho_k| < \epsilon$.

сходится абсолютно и равномерно и в том случае, когда условие (64) не выполняется.

Предположим сначала, что функция f удовлетворяет условию (64), и составим потенциал V простого слоя с плотностью $\mu/(2\pi)$:

$$V = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mu}{r}\, ds. \tag{66}$$

По теореме Пуассона

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \mu + \frac{\partial V}{\partial n} = \mu - \frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds. \tag{67}$$

Так как в данном случае ряд (63) сходится равномерно, то

$$\frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds + \epsilon \frac{1}{2\pi} \int \rho_1 \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds + \ldots$$

$$\ldots + \epsilon^k \frac{1}{2\pi} \int \rho_k \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds + \ldots,$$

т.е., в силу (63_1),

$$\frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = \rho_1 + \epsilon\rho_2 + \epsilon^2\rho_3 + \ldots + \epsilon^k \rho_{k+1} + \ldots$$

и

$$\mu - \frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = -\rho_1 + f - \epsilon(\rho_2 - \rho_1) - \epsilon^2(\rho_3 - \rho_2) + \ldots$$

$$\ldots - \epsilon^k (\rho_{k+1} - \rho_k).$$

При $\epsilon = 1$ получаем

$$\mu - \frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = f - \rho_1 - (\rho_2 - \rho_1) -$$

$$-(\rho_3 - \rho_2) - \ldots - (\rho_{k+1} - \rho_k) - \ldots = f - \lim_{k\to\infty} \rho_k = f, \tag{68}$$

ибо при условии (64) на основании предыдущего $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = 0$.

Равенства (67) и (68) дают

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Функция V, определяемая равенством (66), *дает, следовательно, решение внутренней задачи Неймана.*

20. Рассмотрим теперь внешнюю задачу Неймана, т.е. будем искать гармоническую вне поверхности (S) функцию V, удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S), \tag{69}$$

где f — какая угодно заданная (непрерывная) функция координат.

Положим

$$\mu = (f - \rho_1) + (\rho_2 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+1}) + \ldots \tag{70}$$

и составим потенциал простого слоя

$$V = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\mu}{r} ds. \tag{71}$$

Применив опять теорему Пуассона, получаем

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} + \mu = \frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2} ds + \mu. \tag{72}$$

Так как по предыдущему ряд (70) сходится равномерно на поверхности (S), то в силу (63_1),

$$\frac{1}{2\pi} \int \mu \frac{\cos\psi}{r^2} ds = (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_3 - \rho_4) + \ldots + (\rho_{2k+1} - \rho_{2k+2}) + \ldots$$

При помощи этого равенства и (70) выводим из (72)

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f - \rho_2 + (\rho_2 - \rho_4) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+2}) + \ldots = f - \lim_{k\to\infty} \rho_{2k+2}. \tag{73}$$

Здесь нужно различать два случая: когда интеграл

$$\int f ds \tag{73_1}$$

равен нулю и когда этот интеграл отличен от нуля.

В первом случае $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{2k+2} = 0$ и равенство (73) обращается в (69). При этом потенциал простого слоя (71) даст решение внешней задачи Неймана.

Во втором случае $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{2k+2} = \rho$, где ρ есть плотность электрического слоя, находящегося в равновесии на поверхности (S) и подчиненного условию

$$\int \rho ds = \int f ds \neq 0. \tag{73'}$$

Потенциал V (см. (71)) дает гармоническую вне (S) функцию, удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f - \rho. \tag{74}$$

Положим

$$P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} ds,$$

$$V' = V - P = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\mu + \frac{\rho}{2}\right) \frac{ds}{r}. \tag{75}$$

Имеем $\dfrac{\partial P_i}{\partial n} - \dfrac{\partial P_e}{\partial n} = \rho$, т.е. $\dfrac{\partial P_e}{\partial n} = -\rho$. При помощи этого равенства и

(74) получаем (равенство (75))

$$\frac{\partial V_e'}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n} + \rho = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Следовательно, *функция V', определяемая равенством* (75), *дает решение внешней задачи К. Неймана, когда интеграл* (73$_1$) *от заданной функции f не равен нулю.*

Сопоставляя все сказанное в двух последних пунктах, приходим к следующим теоремам.

Теорема VI. *Пусть f есть заданная непрерывная функция точек поверхности (S), подчиненная условию*

$$\int f ds = 0.$$

Вычисляем последовательно ряд функций ρ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ по формулам

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad \rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{76}$$

Составляем функцию

$$\mu = f + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots \tag{76$_1$}$$

и потенциал простого слоя

$$V = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mu}{r} ds. \tag{77}$$

Полученная таким путем функция V есть функция, гармоническая внутри (S) и удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

т.е. дает решение внутренней задачи К. Неймана для всякой конвексной поверхности Ляпунова.

Теорема VII. *Пусть f – какая угодно непрерывная функция точек поверхности (S). Положим*

$$\int f ds = M,$$

где M – какое угодно число, в частности нуль. Составляем, как и в предыдущей теореме, последовательно ряд функций ρ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ по формулам (76). *Полагаем*

$$\mu = (f - \rho_1) + (\rho_2 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+1}) + \ldots \tag{77$_1$}$$

и

$$\rho = f + (\rho_1 - f) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots$$

и составляем затем потенциал простого слоя

$$V = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\mu + \frac{\rho}{2}\right) \frac{ds}{r}. \tag{78}$$

Полученная функция V представляет собой функцию, гармоническую вне поверхности (S) и удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

т.е. решает внешнюю задачу К. Неймана для всякой конвексной поверхности Ляпунова.

21. Заметим, что на основании того, что сказано в п. 18, можно высказать следующую, более общую теорему.

Теорема VIII. *Функция V, определенная равенством* (77) *теоремы* VI, *решает внутреннюю задачу К. Неймана для всякой поверхности, к которой приложим принцип Робена (неравенства* (60)), *а функция, определенная равенством* (78) *теоремы* VII, *дает решение внешней задачи К. Неймана для всякой поверхности, обладающей только что указанным свойством.*

Можно было бы сначала доказать эту общую теорему, а затем, показав, что принцип Робена действительно имеет место для конвексных поверхностей Ляпунова*), вывести из этой общей теоремы, как следствия, теоремы VI и VII, но мы предпочли иной, как нам кажется, более естественный ход рассуждений, который сам собой привел нас к представлению о принципе Робена и выяснил его важное значение.

ГЛАВА III

Принцип К. Неймана как непосредственное следствие принципа Робена. Решение задач Дирихле и Неймана для всех поверхностей Ляпунова, к которым приложим принцип Робена, методом Неймана. Приложение к конвексным поверхностям Ляпунова. Преобразование потенциала простого слоя в потенциал двойного и обратно. Задача Гаусса — Дирихле. Условия существования нормальных производных от гармонических функций, представляющих решение задачи Дирихле.

1. В предыдущей главе мы доказали, что принцип Робена применим ко всем конвексным поверхностям Ляпунова, но не подлежит сомнению, что этот принцип справедлив и для поверхностей более общего типа. Поэтому в настоящей главе мы рассмотрим сначала, вообще, все такие поверхности Ляпунова, для которых так или иначе может быть доказан принцип Робена и в которых конвексные поверхности заключаются как частный случай. Все общие результаты, которые получатся как следствие применения этого принципа, будут справедливы для любой поверхности, коль скоро мы убедимся, что принцип Робена к ней прилагается. Впоследствии мы докажем применимость этого принципа для всех поверхностей Ляпунова и таким об-

*) Что на самом деле и сделано нами в предыдущих пунктах.

разом распространим, в силу сказанного, все полученные в этой и предыдущей главах результаты на все поверхности Ляпунова (п. 17, гл. I).

2. Пусть f есть какая угодно интегрируемая функция координат точек поверхности (S). Составим, следуя К. Нейману, ряд потенциалов двойного слоя по формулам*)

$$W_0 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2} ds,$$

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int \overline{W}_0 \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \tag{1}$$

. . . .

$$W_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

На основании теоремы Корна – Ляпунова**) и пятой теоремы последнего (гл. I) потенциал W_1 в любой точке p_0 поверхности (S) удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (\overline{W}_1 - \overline{W}_1^0) d\omega \right| < \lambda\rho^{\beta+1},$$

где $\overline{W}_1^0$ представляет значение $\overline{W}_1$ в точке p_0. Отсюда, руководствуясь четвертой теоремой Ляпунова, заключаем, что W_2 имеет правильные нормальные производные на поверхности (S), причем

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial n} = \frac{\partial W_{2e}}{\partial n} = L_0. \tag{2}$$

Составим затем ряд потенциалов простого слоя по формулам

$$v_2 = V_2 = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{L_0}{r} ds, \tag{3}$$

$$V_k = -\frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{ds}{r}, \tag{3$_1$}$$

где, вообще,

$$\rho_k = \frac{\partial V_k}{\partial n} \tag{4}$$

и, как показано в предыдущей главе,

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds. \tag{5}$$

Составим, наконец, ряд потенциалов двойного слоя, последовательно

---

*) Мы употребляем обозначения, принятые в пп. 6 и следующих за ним гл. I.

**) Функция f интегрируема по Риману и, следовательно, ограничена на (S). (*Прим. ред.*)

определяемых равенствами

$$v_3 = \frac{1}{2\pi} \int \bar{v}_2 \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \ \ldots, \ v_k = \frac{1}{2\pi} \int \bar{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds. \tag{6}$$

Для дальнейшего важно установить некоторые соотношения между функциями W_k, V_k и v_k, что мы и сделаем в последующих пунктах.

3. Применим к функции W_2 формулу Грина (36) гл. I (п. 9). Получим

$$2W_2 = \frac{1}{2\pi} \int W_{2i} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \frac{1}{2\pi} \int \frac{L_0}{r} ds \quad \text{внутри } (S). \tag{7}$$

Заметив, что по свойствам потенциала двойного слоя (равенство (111) гл. I, теорема VIII) $W_{2i} = \overline{W}_2 + \overline{W}_1$, подставив это выражение W_{2i} в формулу (7) и приняв во внимание равенства (1) и (3), получаем

$$v_2 = V_2 = W_3 - W_2 \quad \text{внутри } (S). \tag{8}$$

Докажем, что *равенство*

$$V_k = W_{k+1} - W_k \quad \textit{внутри } (S), \tag{8_1}$$

только что установленное для $k = 2$, *справедливо при всяком* k, *большем двух.*

Покажем прежде всего, что функции v_k и W_k связаны соотношением

$$v_k = W_{k+1} - W_{k-1} \tag{9}$$

при всяком $k = 3, 4, \ldots$ Равенство (8) дает $v_{2i} = \bar{v}_2 = W_{3i} - W_{2i}$, ибо v_2 как потенциал простого слоя остается непрерывным во всем пространстве. Применив опять равенство (111) гл. I к потенциалам двойного слоя W_3 и W_2, получим $W_{3i} - W_{2i} = \overline{W}_3 + \overline{W}_2 - (\overline{W}_2 + \overline{W}_1) = \overline{W}_3 - \overline{W}_1$ и, следовательно, $\bar{v}_2 = \overline{W}_3 - \overline{W}_1$. Подставив это выражение в первое из равенств (6) и приняв во внимание равенства (1), получаем

$$v_3 = W_4 - W_2. \tag{10}$$

Докажем, что равенство (9), только что установленное для случая $k = 3$, справедливо при всяком k.

Допустим, что оно справедливо при каком-нибудь определенном k. Имеем $\bar{v}_k = \overline{W}_{k+1} - \overline{W}_{k-1}$. Подставив это выражение $\bar{v}_k$ в равенство (6) после замены в нем k на $k+1$ и приняв во внимание (1), получаем

$$v_{k+1} = W_{k+2} - W_k.$$

Следовательно, равенство (9), справедливое при каком-нибудь k, справедливо и при k, на единицу большем. Так как оно доказано при $k = 3$, то оно справедливо при всяком k, равном или бо́льшем 3.

4. При решении задачи о распределении электричества в предыдущей главе доказано, что функции V_k, определяемые равенствами (3) и (3_1), связаны между собой соотношениями

$$\overline{V}_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \quad (k = 3, 4, \ldots) \tag{11}$$

(гл. II, п. 6, равенство (22)). Для функций же v_k, определяемых формулами (6), имеем

$$\bar{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int \bar{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds. \tag{12}$$

При $k = 3$ получаем, приняв во внимание равенство (3),

$$V_3 = \bar{v}_3 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Предположим, что равенство

$$V_k = \bar{v}_k \quad \text{на поверхности } (S), \tag{13}$$

только что установленное для $k = 3$, справедливо при каком-нибудь k. Заменяя в (11) и (12) k на $k + 1$ и учитывая (13), убеждаемся, что

$$V_{k+1} = \bar{v}_{k+1} \quad \text{на поверхности } (S).$$

Отсюда заключаем, что равенство (13) справедливо при всяком k.

5. Обращаясь теперь к формулам (6), можем писать, на основании известных свойств потенциала двойного слоя, $\bar{v}_{ki} = \bar{v}_k + \bar{v}_{k-1}$, откуда, приняв во внимание (13) и непрерывность потенциала простого слоя во всем пространстве, выводим

$$v_{ki} = \bar{V}_k + \bar{V}_{k-1} = V_{ki} + V_{k-1,i}.$$

С другой стороны, равенство (9) дает

$$v_{ki} = W_{k+1,i} - W_{k-1,i}.$$

Эти равенства показывают, что две гармонические внутри (S) функции $V_k + V_{k-1}$ и $W_{k+1} - W_{k-1}$ принимают одинаковые значения во всех точках поверхности (S). Отсюда на основании известных свойств гармонических функций (гл. I) заключаем, что

$$V_k + V_{k-1} = W_{k+1} - W_{k-1} \quad \text{внутри } (S). \tag{14}$$

Это равенство справедливо при всяком k, начиная с $k = 3$.

Допустим, что равенство (8_1) справедливо при каком-нибудь k. Заменив в (14) k на $k + 1$, получаем

$$V_{k+1} + V_k = W_{k+2} - W_k \quad \text{внутри } (S).$$

Вычитая отсюда (8_1), находим

$$V_{k+1} = W_{k+2} - W_{k+1} \quad \text{внутри } (S).$$

Отсюда заключаем, что *равенство* (8_1) *действительно справедливо при всяком* k, *начиная с* $k = 2$.

6. Допустим теперь, что к поверхности (S) приложим принцип Робена, выражаемый неравенством (60) предыдущей главы. Так как за исходную функцию при последовательном определении функций ρ_k по формулам (5) принята функция $L_0 = \dfrac{\partial W_{2i}}{\partial n}$, удовлетворяющая условию (гл. I, равенство (35)) $\int L_0 ds = 0$, то, как показано в предыдущей главе,

$$|\rho_k| < N\tau^k, \quad 0 < \tau < 1.$$

При помощи этого неравенства из (3_1) выводим

$$|V_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int |\rho_{k-1}| \frac{ds}{r} < \frac{N\tau^{k-1}}{2\pi} \int \frac{ds}{r} \leq NL\tau^{k-1} = N_1\tau^k, \quad (14_1)$$

где N_1 есть, очевидно, число, не зависящее от k. Отсюда при помощи (8_1) и известных свойств потенциала двойного слоя выводим

$$|W_{k+1,i} - W_{k,i}| = |\overline{W}_{k+1} - \overline{W}_{k-1}| < N_1\tau^k = N'\tau^{k+1} \quad (15)$$

Положим

$$W'_k = \overline{W}_k - \overline{W}_{k-1} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots). \quad (15_1)$$

Так как $W'_k + W'_{k-1} = \overline{W}_k - \overline{W}_{k-2}$, то, в силу (15),

$$|W'_k + W'_{k-1}| < N'\tau^k. \quad (16)$$

Составим функцию

$$W' = W'_2 - (W'_3 + W'_2) + (W'_4 + W'_3) - (W'_5 - W'_4) + \ldots \quad (17)$$

На основании (16) этот ряд сходится абсолютно и равномерно во всех точках поверхности (S). Следовательно,

$$W' = \lim_{k\to\infty} (-1)^k W'_k = \lim_{k\to\infty} (-1)^k (\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}), \quad (18)$$

или

$$W' = \lim_{k\to\infty} (-1)^k W_{ke}.$$

Составим теперь потенциал двойного слоя

$$W = \frac{1}{2\pi} \int W' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds. \quad (19)$$

Так как ряд (17) сходится равномерно на поверхности (S), то

$$W = \frac{1}{2\pi} \int W'_2 \frac{\cos\varphi}{r^2} ds - \frac{1}{2\pi} \int (W'_3 + W'_2) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int (W'_4 + W'_3) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds - \ldots,$$

или, в силу (15_1) и (1),

$$W = W_3 - W_2 - (W_4 - W_3 + W_3 - W_2) + (W_5 - W_4 + W_4 - W_3) - \ldots$$

Отсюда, учитывая (15_1), получаем

$$\overline{W} = W'_3 - (W'_4 + W'_3) + (W'_5 + W'_4) - \ldots =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1} W'_k = \lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1} (\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1} W_{ke}. \quad (20)$$

Сопоставляя это равенство с (18), получаем $\overline{W} = -W'$. Но из (19) следует, что $W_i = \overline{W} + W'$, т.е., на основании предыдущего равенства, $W_i = 0$.

Следовательно, во всех точках области (D), ограниченной поверхностью (S) (гл. 1), $W = 0$.

Потенциал двойного слоя W, определяемый равенством (19), имеет, следовательно, внутреннюю нормальную производную $\dfrac{\partial W_i}{\partial n} = 0$. На основании третьей теоремы Ляпунова заключаем, что и $\dfrac{\partial W_e}{\partial n} = 0$. Отсюда, припоминая основные свойства гармонических функций, заключаем, что $W = 0$ тождественно. Следовательно,

$$\overline{W} = 0.$$

Это равенство на основании (20) можно написать в виде

$$W'_3 - (W'_4 + W'_3) + (W'_5 + W'_4) - \ldots + (-1)^{k-1}(W'_k + W'_{k-1}) =$$
$$= (-1)^{k-1} W'_k = (-1)^{k-1} [(W'_{k+1} - W'_k) - (W'_{k+2} - W'_{k+1}) + \ldots].$$

Отсюда при помощи (15_1) и (16) выводим

$$|W'_k| = |\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}| < N_0 \tau^k, \tag{21}$$

где N_0 есть число, не зависящее от k. Это неравенство выражает так называемый *принцип К. Неймана*, который, как видим, является простым следствием принципа Робена.

На основании доказанного в предыдущей главе можем, следовательно, утверждать, что неравенство (21) (принцип Неймана) имеет место для любой конвексной поверхности Ляпунова. Сопоставляя все сказанное, можем высказать следующую теорему.

Теорема I. *Если поверхность Ляпунова (S) такова, что функции ρ_k, определяемые последовательно по формуле*

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

какова бы ни была исходная непрерывная функция ρ_0, удовлетворяют неравенству (принцип Робена)

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| < \lambda \tau^k,$$

где τ есть число, меньшее единицы и не зависящее ни от k, ни от исходной функции ρ_0, то функции, вычисляемые последовательно по формулам (потенциалы двойного слоя)

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \ \ldots, \ W_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \tag{22}$$

необходимо удовлетворяют неравенству

$$|\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}| < N_0 \tau^k,$$

какова бы ни была функция f, интегрируемая на поверхности (S).

Это неравенство, выражающее принцип К. Неймана, всегда имеет место для всякой конвексной поверхности Ляпунова.

7. Неравенство (21) сейчас же приводит к решению задачи Дирихле методом, впервые примененным К. Нейманом к конвексным поверхностям.

Рассмотрим ряд

$$\mu' = \frac{1}{2} \left[f + \epsilon W_1' + \epsilon^2 W_2' + \ldots + \epsilon^k W_k' + \ldots \right], \tag{23}$$

где

$$W_1' = \overline{W}_1 - f. \tag{24}$$

W_k' $(k = 2, 3, \ldots)$ определяются равенствами (15_1), а W_k – равенствами (22).

Предположим, что к поверхности (S) приложим принцип Неймана (21). В этом случае ряд (23) сходится абсолютно и равномерно во всех точках поверхности (S) при всех значениях параметра ϵ, удовлетворяющих условию $|\epsilon| \leqslant 1$.

Пусть f есть непрерывная функция координат точек поверхности (S), при этом ряд (23) также представляет непрерывную функцию μ' тех же переменных. Составим потенциал двойного слоя

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \mu' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds. \tag{25}$$

Имеем

$$W_i = \overline{W} + \mu' \quad \text{на поверхности } (S).$$

Но для точек поверхности (S), в силу (15_1) и (22),

$$\frac{1}{4\pi} \int W_k' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \frac{1}{4\pi} \int \overline{W}_k \frac{\cos\varphi}{r^2} ds -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \frac{1}{2} (\overline{W}_{k+1} - \overline{W}_k) = \frac{W_{k+1}'}{2}.$$

Следовательно,

$$\overline{W} = \frac{1}{2} (\overline{W}_1 + \epsilon W_2' + \epsilon^2 W_3' + \ldots + \epsilon^{k-1} W_k' + \ldots) \tag{25_1}$$

и, на основании (24),

$$W_i = f + \frac{\epsilon + 1}{2} (W_1' + \epsilon W_2' + \epsilon^2 W_3' + \ldots + \epsilon^{k-1} W_k' + \ldots). \tag{26}$$

Положив $\epsilon = -1$, получим

$$W_i = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Следовательно, *функция* (25) *при* $\epsilon = -1$ *решает внутреннюю задачу Дирихле, ибо представляет собой гармоническую функцию внутри* (S) *как потенциал двойного слоя и обращается в заданную (непрерывную) функцию* f *на самой поверхности.*

Функция μ' представляется в виде ряда

$$\mu' = \frac{1}{2} \left[f - (\overline{W}_1 - f) + (\overline{W}_2 - \overline{W}_1) - \ldots + (-1)^k (\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}) + \ldots \right].$$

Так как, в силу принципа Неймана (21), ряд правой части последнего равенства сходится равномерно на поверхности (S), то можем его интегрировать почленно, причем, учитывая опять формулы (22), получим решение внутренней задачи Дирихле в виде ряда

$$W = \frac{1}{2}\ (W_1 - (W_2 - W_1) + (W_3 - W_2) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1} (W_k - W_{k-1}) + \ldots).$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема II. *Пусть f есть заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S). Составляем ряд потенциалов двойного слоя по формулам*

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$
$$W_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{27}$$

и положим

$$W = \frac{1}{2}\ (W_1 - (W_2 - W_1) + (W_3 - W_2) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} (W_k - W_{k-1}) + \ldots). \tag{28}$$

Полученная таким путем функция W есть гармоническая функция внутри (S) и обращается на поверхности (S) в заданную функцию f, коль скоро к поверхности (S) применим принцип Робена или, что все равно, принцип Неймана. Функция W представляет собой потенциал двойного слоя с напряжением

$$\mu' = \frac{1}{4\pi}\ (f - (\overline{W}_1 - f) + (\overline{W}_2 - \overline{W}_1) - \ldots +$$
$$+ (-1)^k (\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}) + \ldots). \tag{29}$$

В частности, функция W, изображаемая рядом (28), разрешает внутреннюю задачу Дирихле для всякой конвексной поверхности Ляпунова.

8. Возвращаемся к равенству (25), из которого выводим $W_e = \overline{W} - \mu'$, откуда, в силу (23), (24) и (25_1),

$$W_e = \frac{1-\epsilon}{2}\ (W_1' + \epsilon W_2' + \ldots + \epsilon^{k-1} W_k' + \ldots).$$

Полагая $\epsilon = 1$, получаем $W_e = 0$, т.е. при $\epsilon = 1$ потенциал W представляет гармоническую вне поверхности (S) функцию, обращающуюся в нуль на самой поверхности. В этом случае W представляет потенциал двойного слоя, допускающий внешнюю нормальную производную, которая равна нулю, ибо и сама функция W равна нулю вне поверхности (S). По третьей теореме Ляпунова заключаем, что и $\dfrac{\partial W_i}{\partial n} = 0$, т.е., в силу известных свойств гармонических функций (гл. I),

$$W = \text{const} = C \quad \text{внутри } (S).$$

Положим теперь в (26) $\epsilon = 1$. Получим

$$W_i = f + W_1' + W_2' + \ldots + W_k' + \ldots = C.$$

– равенство, которое перепищем так:

$$f + W_1' + W_2' + \ldots + W_k' - C = -(W_{k+1}' + W_{k+2}' + \ldots).$$

Отсюда при помощи (24) и (15_1) выводим

$$\overline{W}_k - C = -(W_{k+1}' + W_{k+2}' + \ldots)$$

и затем, при помощи (21),

$$|\overline{W}_k - C| < \frac{N_0 \tau^{k+1}}{1-\tau} = \lambda \tau^k \tag{30}$$

– неравенство, являющееся прямым следствием принципа Неймана (или, что все равно, принципа Робена).

9. Так как к поверхности (S) по предположению применим принцип Робена, то мы можем считать известной плотность ρ электрического слоя, находящегося в равновесии на данной поверхности*).

Применим равенство (27) к точкам поверхности (S). Имеем

$$\overline{W}_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds.$$

Умножим это равенство на $\rho\, ds$ и интегрируем результат по всей поверхности (S). Получим, меняя в правой части порядок интегрирования и замечая, что при этом угол φ обращается в ψ,

$$\int \rho \overline{W}_k ds = \frac{1}{2\pi} \int \rho \left(\int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \right) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \overline{W}_{k-1} \left(\int \rho \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds \right) ds = \int \rho \overline{W}_{k-1} ds.$$

Это равенство, справедливое при всяком k, дает

$$\int \rho \overline{W}_k\, ds = \int \rho f ds.$$

---

*) Напомним, что ρ удовлетворяет уравнению Робена

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds. \tag{30'}$$

Конечно, берется ненулевое решение этого уравнения, т.е. $\int \rho ds \neq 0$.

Подразумевая под C постоянную неравенства (30), перепишем полученное равенство следующим образом:

$$C \int \rho ds - \int \rho f ds = \int \rho (C - \bar{W}_k)\, ds.$$

Отсюда при помощи (30) выводим

$$| C \int \rho ds - \int \rho f ds | < \lambda \tau^k \int |\rho|\, ds$$

– неравенство, справедливое при любом k. Следовательно,

$$C = \int \rho f ds \,/\, \int \rho ds\,. \tag{31}$$

Таким образом, определяется постоянная C неравенства (30), т.е. тот постоянный предел, к которому стремятся значения $\bar{W}_k$ при беспредельном возрастании k.

10. Зная величину постоянной C, мы можем теперь разрешить методом Неймана и внешнюю задачу Дирихле для любой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Неймана (или Робена).

Составим функцию

$$\mu' = f + (\bar{W}_1 + f - 2C) + (\bar{W}_2 + \bar{W}_1 - 2C) + \ldots + (\bar{W}_k + \bar{W}_{k-1} - 2C) + \ldots \tag{32}$$

Неравенство (30) дает

$$| \bar{W}_k + \bar{W}_{k-1} - 2C | \leqslant | \bar{W}_k - C | + | \bar{W}_{k-1} - C | <$$

$$< \frac{\lambda(1+\tau)}{\tau} \tau^k = \lambda' \tau^k\,.$$

Следовательно, ряд (32) сходится абсолютно и равномерно на поверхности (S).

Составим функцию

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2}\, ds, \tag{32'}$$

причем вследствие равномерной сходимости ряда (32) можем писать, интегрируя почленно,

$$W = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int (\bar{W}_k +$$

$$+ \bar{W}_{k-1} - 2C) \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \Big)\text{*)}\,. \tag{32$_1$}$$

Применим это равенство к точкам, лежащим вне поверхности (S) (в области (D')). Приняв во внимание теорему Гаусса и равенства (27), получаем

$$W = -\frac{1}{2}(W_1 + (W_2 + W_1) + (W_3 + W_2) + \ldots + (W_k + W_{k-1}) + \ldots). \tag{33}$$

*) Здесь $\bar{W}_0 = f$. (*Прим. ред.*)

Таким образом, получаем другое изображение функции W в виде ряда (33), равномерно сходящегося во всех точках области (D).

Равенство $(32')$ дает $W_e = \bar{W} + \mu'/2$. Из (32_1) получаем, при помощи (27),

$$\bar{W} = -\frac{1}{2}(\bar{W}_1 + (\bar{W}_2 + \bar{W}_1 - 2C) + (\bar{W}_3 + \bar{W}_2 - 2C) + \ldots$$

$$\ldots + (\bar{W}_k + \bar{W}_{k-1} - 2C) + \ldots).$$

Эти два последних равенства и (32) приводят к следующему:

$$W_e = f - C. \tag{34}$$

Пусть ρ есть какая-либо определенная (отличная от тождественного нуля) функция, удовлетворяющая уравнению Робена. Положим

$$V = \int \frac{\rho}{r} ds.$$

Мы знаем, что V представляет гармоническую функцию вне поверхности (S), удовлетворяющую условию

$$V_e = C_0, \tag{35}$$

где $C_0 \neq 0$ есть определенная постоянная, равная значению функции V для точек, лежащих внутри (S).

Положим $U = W + \alpha V$, где α есть некоторая постоянная. Составленная таким образом функция U есть гармоническая вне (S) и удовлетворяет условию (равенства (34) и (35))

$$U_e = W_e + \alpha V_e = f + \alpha C_0 - C.$$

Положив $\alpha = C/C_0$, получим функцию $U = W + \dfrac{C}{C_0} V$, гармоническую вне (S) и удовлетворяющую условию

$$U_e = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

т.е. решение внешней задачи Дирихле методом К.Неймана.

Получаем следующую теорему.

Теорема III. *Пусть f есть заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S). Обозначим через $\rho \not\equiv 0$ определенную функцию, представляющую плотность электрического слоя, находящегося в равновесии на поверхности (S), и положим*

$$V = \int \frac{\rho}{r} ds,$$

$$C = \int \rho f ds / \int \rho ds, \tag{35$_1$}$$

а через C_0 обозначим постоянное значение потенциала V внутри (S). Составляем ряд потенциалов Неймана по формулам (27) (теорема II) и при помощи них функцию

$$W = \frac{C}{C_0} V - \frac{1}{2}(W_1 + (W_2 + W_1) + (W_3 + W_2) + \ldots + (W_k + W_{k-1}) + \ldots). \tag{36}$$

Функция, изображаемая этим сходящимся равномерно вне поверхности (S) рядом, есть гармоническая вне (S) и удовлетворяет условию

$$W_e = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

т.е. представляет решение внешней задачи Дирихле для всякой поверхности Ляпунова, к которой применим принцип Робена.

Функция W может быть представлена в виде

$$W = \frac{C}{C_0} \int \frac{\rho}{r}\, ds - \frac{1}{4\pi} \int \mu' \, \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \tag{36_1}$$

где

$$\mu' = f + (\bar{W}_1 + f - 2C) + (\bar{W}_2 + \bar{W}_1 - 2C) + \ldots + (\bar{W}_k + W_{k-1} - 2C) + \ldots \tag{36_2}$$

В частности, полученная таким путем функция W дает решение внешней задачи Дирихле для всякой конвексной поверхности Ляпунова.

11. В предыдущей главе мы доказали, что основная задача гидродинамики (внутренняя и внешняя задачи К. Неймана) решается методом Робена для всякой поверхности Ляпунова, к которой применим принцип Робена.

Гармоническая функция V внутри или вне данной поверхности (S), удовлетворяющая соответственно условиям

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f, \qquad \int f ds = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \tag{$36'$}$$

или

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S), \tag{$36''$}$$

представляется при этом в виде потенциала простого слоя с плотностью $\frac{\mu'}{2\pi}$, или $-\frac{1}{2\pi}(\mu' + \frac{\rho}{2})$, где μ' соответственно внутренней или внешней задаче определяется рядами (76_1) и (77_1) предыдущей главы.

При помощи только что изложенного метода, дающего решение внутренней и внешней задач Дирихле, можно получить решение задачи Неймана в иной форме, а именно в форме потенциала двойного слоя.

Если при помощи этого метода мы найдем функцию U, гармоническую внутри или вне поверхности (S) и принимающую на самой поверхности те же значения, что и потенциал простого слоя V, удовлетворяющий условиям $(36')$ или $(36'')$, то полученная функция U и представит, очевидно, решение задачи Неймана в виде потенциала двойного слоя. При этом мы получим частный случай более общей задачи о преобразовании данного потенциала простого слоя (внутри или вне поверхности (S)) в потенциал двойного слоя, решение которой также легко достигается при помощи теорем II и III.

12. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу, когда ищется функция V, удовлетворяющая уравнениям

$$\Delta V = 0 \quad \text{внутри } (S), \tag{37}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S), \tag{37_1}$$

где f есть заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S), подчиненная условию

$$\int f ds = 0 . \tag{38}$$

Составляем функции V_k при помощи равенств (гл. II, п. 6, равенство (19))

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{f}{r} ds, \\ V_k &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{ds}{r} . \end{aligned} \tag{39}$$

Так как ряд (76_1) теоремы VI предыдущей главы сходится равномерно, то функцию V, заданную равенством (77) той же теоремы, можно представить при помощи только что написанных равенств в виде ряда

$$V = -V_1 - V_2 - \dots - V_k - \dots , \tag{40}$$

сходящегося абсолютно и равномерно (см. неравенство (14_1) п. 6).

Рассмотрим потенциалы Неймана, соответствующие случаю, когда $f = \bar{V}$. Имеем, в силу (40),

$$\bar{W}_1 = \frac{1}{2\pi} \int \bar{V} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = -\frac{1}{2\pi} \int \bar{V}_1 \frac{\cos\varphi}{r^2} ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int \bar{V}_2 \frac{\cos\varphi}{r^2} ds - \dots - \frac{1}{2\pi} \int \bar{V}_k \frac{\cos\varphi}{r^2} ds - \dots ,$$

или, на основании установленных в предыдущей главе соотношений (22) (п. 6),

$$\bar{W}_1 = -\bar{V}_2 - \bar{V}_3 - \dots - \bar{V}_{k+1} - \dots$$

Точно так же убеждаемся, что, вообще,

$$\bar{W}_k = -\bar{V}_{k+1} - \bar{V}_{k+2} - \dots$$

Из этих равенств и (40) выводим

$$W'_k = \bar{W}_k - \bar{W}_{k-1} = \bar{V}_k \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{41}$$

Заменив теперь в равенстве (29) теоремы II функцию f на V, получаем, при помощи (40) и (41),

$$4\pi\mu' = -\bar{V}_1 - \bar{V}_2 - \dots - \bar{V}_k - \dots - \bar{V}_1 + \bar{V}_2 - \dots (-1)^k \bar{V}_k + \dots$$

$$\dots = -2(\bar{V}_1 + \bar{V}_3 + \dots + \bar{V}_{2k-1} + \dots).$$

Поэтому потенциал двойного слоя W, дающий по теореме II решение задачи Дирихле, представится в виде

$$W = -\frac{1}{2\pi} \int (\bar{V}_1 + \bar{V}_3 + \dots + \bar{V}_{2k-1} + \dots) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds . \tag{42}$$

Полученная функция W удовлетворяет условию $W_i = V_i$, т.е.

$W = V$ внутри (S).

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = \frac{\partial V_i}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S).$$

Следовательно, равенство (42) дает решение внутренней задачи Неймана в виде потенциала двойного слоя. Получаем следующую теорему.

Теорема IV. *Пусть f есть заданная непрерывная функция коодинат точек поверхности (S), подчиненная условию*

$$\int f ds = 0 . \qquad (38_1)$$

Составляем ряд потенциалов простого слоя по формулам

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{f}{r} ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{ds}{r} \qquad (43)$$

и положим

$$W = -\frac{1}{2\pi}\int \mu'' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \qquad (44)$$

где

$$\mu'' = \overline{V}_1 + \overline{V}_3 + \ldots + \overline{V}_{2k-1} + \ldots \qquad (45)$$

Потенциал двойного слоя W, определяемый равенствами (44) и (45), дает решение внутренней задачи К. Неймана для всякой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена, т.е. удовлетворяет уравнениям

$$\Delta W = 0 \text{ внутри } (S), \qquad (46)$$
$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S).$$

В частности, функция W решает внутреннюю задачу Неймана для всякой конвексной поверхности Ляпунова.

13. Таким образом, если функция f удовлетворяет условию (38_1), то потенциал двойного слоя W только что доказанной теоремы имеет определенную (и непрерывную) внутреннюю нормальную производную на поверхности (S). По третьей теореме Ляпунова он необходимо имеет и внешнюю нормальную производную, причем на основании (46),

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = \frac{\partial W_i}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S).$$

Следовательно, функция W (см. (44)) дает решение и внешней задачи Неймана, ибо

$\Delta W = 0$ вне поверхности (S).

Но это справедливо лишь для случая, когда заданная функция f подчинена условию (38_1), которое необходимо для возможности внутренней задачи Неймана и не обязательно для задачи внешней.

Рассмотрим общий случай, когда условие (38_1) не соблюдается. На основании теоремы VII (см. также теорему VIII) предыдущей главы решение внешней задачи Неймана представляется в виде потенциала простого слоя

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho}{r}ds - \frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu}{r}ds = -P + V', \tag{47}$$

где μ есть функция, определяемая рядом (77_1) предыдущей главы. Рассмотрим функцию

$$V' = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu}{r}ds \text{ *)}, \tag{47_1}$$

которая может быть представлена рядом $V' = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + \ldots$ $\ldots + (V_{2k-1} - V_{2k}) + \ldots$ Так как V' есть потенциал простого слоя, то на поверхности (S)

$$\bar{V}' = V'_e = (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) + (\bar{V}_3 - \bar{V}_4) + \ldots + (\bar{V}_{2k-1} - \bar{V}_{2k}) + \ldots \tag{48}$$

Определим методом Неймана гармоническую вне (S) функцию U', удовлетворяющую условию

$$U'_e = V'_e = \bar{V}' \text{ на поверхности } (S).$$

Искомую функцию получим по формуле (36_1) теоремы III, если в функции μ', определяемой рядом (36_2), положим**) $f = \bar{V}'$.

Установим связь между значениями функций V_k и потенциалами W_k Неймана для точек поверхности (S). Приняв во внимание равномерную сходимость ряда (48) и равенства (22) предыдущей главы, получаем

$$\bar{W}_1 = \frac{1}{2\pi}\int\bar{V}'\frac{\cos\varphi}{r^2}ds = (\bar{V}_2 - \bar{V}_3) + (\bar{V}_4 - \bar{V}_5) + \ldots$$

---

*) Гармоническая в области D' функция V' удовлетворяет граничному условию $\frac{\partial V'_e}{\partial n} = f - \rho$, причем $\int (f-\rho)\,ds = 0$ (см. п. 20 гл. II). В силу приведенного в начале этого пункта замечания она совпадает с потенциалом двойного слоя W из теоремы IV:

$$V' = -\frac{1}{2\pi}\int\mu'\frac{\cos\varphi}{r^2}ds,$$

где μ' определяется равенством (45), в котором $V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{f-\rho}{r}ds$, а $V_k (k = 2, 3, \ldots)$ определяются формулами (43). Такое представление функции V' вместе с равенством (47) дают утверждение теоремы V.

В настоящем пункте приводится другое доказательство этого утверждения (в его изложение внесены некоторые изменения). (*Прим. ред.*)

**) В теореме III в качестве функции ρ можно брать любое не равное тождественно нулю решение уравнения (30'). Здесь, как и в формуле (47), берется $\rho = \lim_{k\to\infty}\rho_k$, $\rho_0 = f$, т.е. решение, удовлетворяющее условию $\int\rho\,ds = \int f\,ds$. (*Прим. ред.*)

Точно так же находим, вообще,

$$\bar{W}_k = (\bar{V}_{k+1} - \bar{V}_{k+2}) + (\bar{V}_{k+3} - \bar{V}_{k+4}) + \ldots$$

Отсюда*)

$$\bar{W}_1 + \bar{V}' = \bar{V}_1 + 2P, \quad \bar{W}_k + \bar{W}_{k-1} = \bar{V}_k + 2P.$$

Пользуясь этими соотношениями, из (36_2) выводим

$$\mu' = (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) + (\bar{V}_3 - \bar{V}_4) + \ldots + (\bar{V}_1 + 2P - 2C +$$

$$+ \bar{V}_2 + 2P - 2C) + (\bar{V}_3 + 2P - 2C + \bar{V}_4 + 2P - 2C) + \ldots$$

$$\ldots = 2\,[(\bar{V}_1 + 2P - 2C) + (\bar{V}_3 + 2P - 2C) + \ldots + (\bar{V}_{2k-1} + 2P - 2C) + \ldots].$$

Подставив это выражение μ' в (36_1), получим

$$U' = \frac{C}{C_0} \int \frac{\rho}{r}\, ds - \frac{1}{2\pi} \int [(\bar{V}_1 + 2P - 2C) +$$

$$+ (\bar{V}_3 + 2P - 2C) + \ldots + (\bar{V}_{2k-1} + 2P - 2C) + \ldots]\, \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds. \tag{49}$$

Обозначим $V_k + 2P$ через V_k^0;

$$V_1^0 = V_1 + 2P = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{f}{r} ds + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho}{r}\, ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{f-\rho}{r} ds. \tag{43_1}$$

$$V_k^0 = V_k + 2P = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{ds}{r} + \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{ds}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial (V_{k-1} + 2P)}{\partial n} \frac{ds}{r} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1}^0}{\partial n} \frac{ds}{r},$$

т.е. функции V_k^0 получаются по формулам (43) с заменой в первой из них f на $f - \rho$. При этом равенство (49) примет вид

$$U' = \frac{C}{C_0} \int \frac{\rho}{r}\, ds - \frac{1}{2\pi} \int [(\bar{V}_1^0 - 2C) +$$

$$+ (\bar{V}_3^0 - 2C) + \ldots + (V_{2k-1}^0 - 2C) + \ldots]\, \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds. \tag{49'}$$

---

*) $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{V}_k = -\frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{ds}{r} = -2P$. (*Прим. ред.*)

Определим постоянную C. Из формулы (35_1), заменяя в ней f на V' (см. (48)), получаем

$$C = \int \rho \overline{V}' ds \;/\; \int \rho\, ds = [(\int \rho \overline{V}_1 ds - \int \rho \overline{V}_2 ds) + \ldots$$

$$\ldots + (\int \rho \overline{V}_{2k-1} ds - \int \rho \overline{V}_{2k} ds) + \ldots] \;/\; \int \rho\, ds. \tag{50}$$

Умножаем теперь равенство (22) предыдущей главы:

$$\overline{V}_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds$$

на ρds и интегрируем результат по всей поверхности (S). Изменив порядок интегрирования и заметив, что при этом угол φ переходит в угол ψ, получаем

$$\int \rho \overline{V}_k ds = \frac{1}{2\pi} \int \rho \left(\int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \right) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \overline{V}_{k-1} \left(\int \frac{\rho \cos\psi}{r^2} ds \right) ds = \int \rho \overline{V}_{k-1} ds. \tag{50_1}$$

Следовательно, в силу (50), $C = 0$ и равенство (49′) приводится к виду

$$U' = -\frac{1}{2\pi} \int (\overline{V}_1^0 + \overline{V}_3^0 + \ldots + \overline{V}_{2k-1}^0 + \ldots) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Приняв во внимание равенство (47), получаем функцию W:

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} ds - \frac{1}{2\pi} \int (\overline{V}_1^0 + \overline{V}_3^0 + \ldots + \overline{V}_{2k-1}^0 + \ldots) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Функция W, гармоническая вне поверхности (S), удовлетворяет условию $W_e = V_e$, т.е.

$W = V$ в области (D').

Следовательно, W имеет внешнюю нормальную производную $\dfrac{\partial W_e}{\partial n}$, причем

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S),$$

т.е. дает решение внешней задачи Неймана. Получаем следующую теорему.

Теорема V. *Пусть f есть какая угодно непрерывная функция точек поверхности (S). Составляем ряд потенциалов простого слоя по формулам* (43) *предыдущей теоремы с заменой в них f на $f - \rho$ и положим*

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} ds - \frac{1}{2\pi} \int \mu'' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \tag{51}$$

где ρ есть плотность электрического слоя, находящегося в равновесии *на поверхности* (S), *удовлетворяющая условию*

$$\int \rho\, ds = \int f\, ds\,,$$

а

$$\mu'' = \overline{V}_1 + \overline{V}_3 + \ldots + \overline{V}_{2k-1} + \ldots$$

Функция W, *определяемая равенством* (51), *есть гармоническая вне поверхности* (S) *и удовлетворяет условию*

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S)\,,$$

т.е. дает решение внешней задачи Неймана для всякой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена.

В частности, W *представляет решение внешней задачи Неймана для любой конвексной поверхности.*

14. Укажем еще один прием решения основной задачи гидродинамики, который получается независимо от задачи Дирихле и предложен К. Нейманом. Положим

$$v_1 = \frac{\epsilon}{4\pi} \int \frac{f}{r}\, ds\,, \qquad |\epsilon| \leqslant 1\,, \tag{51_1}$$

и составим ряд потенциалов двойного слоя по формулам

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \qquad (k = 2, 3, \ldots)\,. \tag{52}$$

Рассмотрим ряд

$$\mu''' = \overline{v}_1 + \epsilon \overline{v}_2 + \epsilon^2 \overline{v}_3 + \ldots + \epsilon^{k-1} \overline{v}_k + \ldots \tag{53}$$

Составим ряд потенциалов простого слоя V_k $(k = 1, 2, \ldots)$ по формулам (19) предыдущей главы, положив в них $\rho_0 = -\dfrac{\epsilon}{2} f$. Из самого определения функций v_k получаются следующие равенства для точек поверхности (S):

$$\overline{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Сравнивая эти равенства с соотношениями

$$\overline{V}_k = \frac{1}{2\pi} \int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \quad (k = 2, 3, \ldots)\,,$$

установленными в предыдущей главе (равенства (22)), получаем

$$\overline{v}_k = \overline{V}_k = V_{k\,i} = V_{k\,e} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{54}$$

Предположим сначала, что f удовлетворяет условию

$$\int f\, ds = 0. \tag{55}$$

Так как к поверхности (S) по предположению применим принцип Робена, но (ср. п. 6, неравенство (14_1))

$$|\overline{V}_k| < N_1 \tau^k . \qquad (55_1)$$

При помощи этого неравенства и равенства (54) заключаем, что *ряд (53) сходится абсолютно и равномерно во всех точках поверхности* (S), *пока* $|\epsilon| < 1$, *если только функция f удовлетворяет условию* (55).

15. Предположим теперь, что условие (55) не выполняется, а $\epsilon = -1$. В этом случае

$$\mu''' = (\overline{v}_1 - \overline{v}_2) + (\overline{v}_3 - \overline{v}_4) + \ldots + (\overline{v}_{2k-1} - \overline{v}_{2k}) + \ldots, \qquad (56)$$

или, в силу (54),

$$\mu''' = (\overline{v}_1 - \overline{V}_2) + (\overline{V}_3 - \overline{V}_4) + \ldots + (\overline{V}_{2k-1} - \overline{V}_{2k}) + \ldots$$

Но по самому определению функций V_k (равенства (19) предыдущей главы), имеем

$$\overline{V}_{2k-1} - \overline{V}_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int (\rho_{2k} - \rho_{2k-1}) \frac{ds}{r} .$$

Так как к поверхности (S) приложим принцип Робена (неравенство (60) гл. II), то $|\overline{V}_{2k-1} - \overline{V}_{2k}| < NL\tau^{2k}$. Отсюда следует, что *ряд* (56) *сходится абсолютно и равномерно на поверхности* (S), *какова бы ни была непрерывная функция* f.

16. После этого составляем потенциал двойного слоя

$$W' = \frac{1}{2\pi} \int \mu''' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds. \qquad (57)$$

Предположим сначала, что функция f удовлетворяет условию (55). Так как при этом ряд (53) сходится равномерно, то, интегрируя почленно и приняв во внимание равенства (52), получаем

$$W' = v_2 + \epsilon v_3 + \epsilon^2 v_4 + \ldots + \epsilon^{k-1} v_{k+1} + \ldots \qquad (58)$$

Положим

$$W = \epsilon W' + v_1 . \qquad (58_1)$$

Имеем при $\epsilon = 1$, на основании известных свойств потенциалов простого и двойного слоя, $W_e = \overline{W}' - \mu''' + v_{1e} = \overline{W}' - \mu''' + \overline{v}_1$. Но, в силу (58) и (53), $\overline{W}' - \mu''' = (\overline{v}_2 - \overline{v}_1) + (\overline{v}_3 - \overline{v}_2) + \ldots + (\overline{v}_k - \overline{v}_{k-1}) + \ldots$ Следовательно,

$$\overline{W}_e = \overline{v}_1 + (\overline{v}_2 - \overline{v}_1) + (\overline{v}_3 - \overline{v}_2) + \ldots + (\overline{v}_k - \overline{v}_{k-1}) + \ldots = \lim_{k\to\infty} v_k = 0,$$

ибо к поверхности (S) приложим принцип Неймана *). Отсюда следует, что

$$W = 0 \text{ вне поверхности } (S), \qquad (59)$$

т.е.

$$W' = -v_1 \quad \text{вне } (S). \qquad (60)$$

---

*) Или, если угодно, в силу равенств (54) и (55_1).

Так как v_1 есть потенциал простого слоя, то он имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial v_{1e}}{\partial n}$ на поверхности (S). Из равенства (60) заключаем, что в данном случае и потенциал двойного слоя W' имеет такую же нормальную производную $\frac{\partial W'_e}{\partial n}$. Следовательно, на основании третьей теоремы Ляпунова (гл. I) существует и внутренняя нормальная производная от W', причем

$$\frac{\partial W'_i}{\partial n} = \frac{\partial W'_e}{\partial n}. \tag{60_1}$$

При помощи этого равенства из (58_1) выводим

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} - \frac{\partial W_e}{\partial n} = \frac{\partial v_{1i}}{\partial n} - \frac{\partial v_{1e}}{\partial n} = f,$$

а так как, в силу (59), $\frac{\partial W_e}{\partial n} = 0$, то

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Следовательно, функция W, определяемая равенствами (58_1), (57), (53) и (51), дает при $\epsilon = 1$ решение внутренней задачи Неймана. Получаем следующую теорему.

Теорема VI. *Пусть f есть заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S), причем $\int f ds = 0$.*

Положим

$$v_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f}{r} ds \tag{61}$$

и составим ряд потенциалов Неймана по формулам

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int \bar{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{61_1}$$

Положим затем

$$W = v_1 + \frac{1}{2\pi} \int \mu''' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \tag{62}$$

где μ''' есть функция, определяемая следующим абсолютно и равномерно сходящимся рядом:

$$\mu''' = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \ldots + \bar{v}_k + \ldots \tag{63}$$

Построенная таким путем функция W удовлетворяет уравнению

$\Delta W = 0$ *внутри* (S)

и условию

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S),$$

т.е. решает внутреннюю задачу К. Неймана для всякой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена.

В частности, функция W дает решение внутренней задачи К. Неймана для любой конвексной поверхности.

17. Допустим теперь, что условие (55) не имеет места, и положим в формулах (57) и (58_1) $\epsilon = -1$, причем μ''' представится в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда (56) п. 15. В этом случае

$$W' = (v_2 - v_3) + (v_4 - v_5) + \ldots + (v_{2k} - v_{2k+1}) + \ldots$$

Подобно предыдущему получаем

$$-W_i' = -\overline{W}' - \mu''' = (\overline{v}_3 - \overline{v}_1) + (\overline{v}_5 - \overline{v}_3) + \ldots + (\overline{v}_{2k+1} - \overline{v}_{2k-1}) + \ldots$$

и

$$W_i = v_{1\,i} - \overline{W}' - \mu''' =$$

$$= \overline{v}_1 - \overline{W}' - \mu''' = \overline{v}_1 + (\overline{v}_3 - \overline{v}_1) + \ldots + (\overline{v}_{2k+1} - \overline{v}_{2k-1}) + \ldots$$

Так как по доказанному в п. 15 ряд правой части этого равенства сходится абсолютно и равномерно, то $W_i = \lim\limits_{k\to\infty} \overline{v}_{2k+1}$. Так как, далее, к поверхности (S) приложим принцип Робена, а следовательно, и принцип Неймана, то, в силу неравенства (30) *)

$$W_i = \lim_{k\to\infty} \overline{v}_k = C, \tag{64}$$

где C есть постоянная, определяемая равенством (31), в котором для рассматриваемого случая функцию f нужно заменить функцией

$$v_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,ds.$$

Подставляя вместо f в (31) это выражение v_1, получим

$$C = -\frac{1}{4\pi}\int \rho\left(\int \frac{f}{r}\,ds\right)ds \Big/ \int \rho\,ds =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int f\left(\int \frac{\rho}{r}\,ds\right)ds \Big/ \int \rho\,ds = -\frac{C_0}{4\pi}\int f ds \Big/ \int \rho\,ds, \tag{64_1}$$

$$C_0 = \int \frac{\rho}{r}\,ds.$$

---

*) Потенциалы двойного слоя v_k отличаются от таких же потенциалов W_k теоремы II только тем, что в первых за исходную функцию вместо f взята функция

$$v_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,ds.$$

Равенство (64) показывает, что

$$W = v_1 - W' = C \quad внутри\ (S), \tag{65}$$

откуда $\dfrac{\partial W_i'}{\partial n} = \dfrac{\partial v_{1\,i}}{\partial n}$.

Таким образом, потенциал двойного слоя W' имеет внутреннюю нормальную производную, а следовательно, и внешнюю, причем

$$\frac{\partial W_i'}{\partial n} = \frac{\partial W_e'}{\partial n}. \tag{65$_1$}$$

При помощи этого равенства из уравнения

$$W = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,ds - W'$$

выводим

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} - \frac{\partial W_e}{\partial n} = -f.$$

Но, в силу (65), $\dfrac{\partial W_i}{\partial n} = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Таким образом, функция W, определяемая равенством (65), дает решение внешней задачи К. Неймана, какова бы ни была заданная функция f, непрерывная на поверхности (S). Получаем следующую теорему.

Теорема VII. *Пусть f есть какая угодно заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S). Полагаем*

$$v_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,ds \tag{66}$$

и составляем ряд потенциалов двойного слоя по формулам

$$v_k = \frac{1}{2\pi}\int \bar{v}_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{66$_1$}$$

Положим затем

$$W = v_1 - \frac{1}{2\pi}\int \mu'''\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds, \tag{67}$$

где μ''' есть функция, определяемая следующим абсолютно и равномерно сходящимся рядом:

$$\mu''' = (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (\bar{v}_3 - \bar{v}_4) + \ldots + (\bar{v}_{2k-1} - \bar{v}_{2k}) + \ldots \tag{68}$$

Построенная таким образом функция W удовлетворяет уравнению

$\Delta W = 0$ *вне поверхности* (S)

и условию

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S),$$

т.е. дает решение внешней задачи К. Неймана для всякой поверхности, к которой приложим принцип Робена.

В частности, функция W решает внешнюю задачу К. Неймана для всякой конвексной поверхности.

18. Указанный в двух последних пунктах метод решения основной задачи гидродинамики (задачи К. Неймана) заслуживает особого внимания, так как построение искомой функции, как показывают теоремы VI и VII, не требует предварительного решения задачи о распределении электричества и все дело сводится только к составлению потенциалов v_1 и v_k ($k = 2, 3, \ldots$) по формулам (61), (61_1) или (66) и (66_1).

Замечу еще, что в данном случае доказательство существования нормальных производных от потенциала двойного слоя

$$W' = \frac{1}{2\pi} \int \mu''' \frac{\cos\varphi}{r^3} ds$$

и равенство (60_1) (или (65_1)) можно получить независимо от третьей теоремы Ляпунова, как это показано в моем сочинении "Общие методы решения основных задач математической физики" (Харьков, 1901, стр. 93 и след.) *).

19. Мы видели (пп. 7 и 10, теоремы II и III), что метод Неймана дает решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя, а для внешней задачи это решение представляется, вообще говоря, в виде алгебраической суммы некоторого потенциала двойного слоя и потенциала простого слоя, находящегося в равновесии на данной поверхности (S).

Если функцию f, в которую должна обращаться на поверхности (S) гармоническая внутри или вне ее функция W, мы зададим в виде потенциала простого слоя, то рассматриваемый метод Неймана даст, очевидно, решение задачи о преобразовании данного потенциала простого слоя в потенциал двойного слоя, принимающий на поверхности (S) либо те же значения, что и данный потенциал простого слоя, либо отличающиеся от них на некоторую постоянную. Но более простое решение о преобразовании потенциала простого слоя в потенциал двойного уже имеется в исследованиях пп. 16 и 17.

В самом деле, равенство (65) дает

$$W' = v_1 - C \text{ внутри } (S),$$

или, на основании (57) и (66),

$$-\frac{1}{2\pi} \int \mu''' \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f}{r} ds + C,$$

---

*) См. также

В.А. Стеклов Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. – Annales de Toulouse, 2 sér., 1900, т. 2, pp. 246 etc.

или, в силу теоремы Гаусса,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\left(\mu''' + \frac{C}{2}\right)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds = \frac{1}{4\pi}\int\frac{f}{r}\,ds \text{ внутри } (S),$$

где μ''' есть функция, определяемая рядом (68) теоремы VII. *Это равенство и решает задачу, когда требуется преобразовать данный потенциал простого слоя в потенциал двойного внутри данной поверхности* (S).

Далее, если функция f удовлетворяет условию (55), то равенство (60) дает

$$-\frac{1}{2\pi}\int\mu'''\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds = v_1 = \frac{1}{4\pi}\int\frac{f}{r}\,ds \text{ вне } (S).$$

Если заданная функция f, пропорциональная плотности данного простого слоя, не удовлетворяет условию (55), то следует положить

$$v_1 = \frac{1}{4\pi}\int\frac{f-\rho}{r}\,ds,$$

где ρ есть плотность электрического слоя, находящегося в равновесии на поверхности (S), подчиненная условию $\int\rho\,ds = \int f\,ds$. В этом случае плотность потенциала v_1 удовлетворяет равенству (55) и мы получаем, подобно предыдущему,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\mu'''\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds = \frac{1}{4\pi}\int\frac{f-\rho}{r}\,ds \text{ вне } (S), \tag{69}$$

где μ''' есть функция, определяемая рядом (63) теоремы VI.

В рассматриваемом случае, когда функция f не удовлетворяет условию (55), данный потенциал простого слоя не может быть полностью преобразован в потенциал двойного слоя, но, как показывает равенство (69), всегда можно найти такой потенциал двойного слоя, который будет отличаться во всех точках вне поверхности (S) от заданного потенциала простого слоя на потенциал электрического слоя, находящегося в равновесии на данной поверхности. *Равенство* (69) *представляет решение задачи о преобразовании данного потенциала простого слоя в потенциал двойного для точек, лежащих вне плоскости* (S).

20. Рассмотрим теперь задачу, обратную предыдущей и необходимую для дальнейших изысканий. *Дан потенциал двойного слоя, найти потенциал простого слоя, принимающий внутри или вне данной поверхности* (S) *те же значения, что и данный.* Задача, вообще говоря, не всегда возможна.

Пусть, в самом деле,

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int f\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \tag{70}$$

есть заданный потенциал двойного слоя. Если существует потенциал простого слоя $V = \int\frac{\mu}{r}\,ds$ *), удовлетворяющий, например, условию

$$V = W_1 \text{ внутри } (S),$$

*) С непрерывной плотностью μ. (*Прим. ред.*)

то функция W_1 необходимо должна иметь внутреннюю нормальную производную, ибо таковую имеет потенциал простого слоя V. Это требование будет соблюдаться в том случае, когда заданная функция f в выражении (70) удовлетворяет условию (141) четвертой теоремы Ляпунова (гл. I, п. 44).

То же самое условие должно быть соблюдено и для случая, когда требуется преобразовать данный потенциал двойного слоя в потенциал простого для точек, лежащих вне поверхности (S).

Пусть W_1 (см. (70)) есть данный потенциал двойного слоя, где f – какая угодно непрерывная на поверхности (S) функция, подчиненная условию (141) гл. I. Положим

$$L_0 = \frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1e}}{\partial n} \tag{71}$$

и определим методом Робена (гл. II, теорема VI) функцию V, гармоническую внутри (S) и удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = -L_0 \text{ на поверхности } (S).$$

По теореме VI гл. II получаем

$$V = \frac{1}{2\pi} \int (-L_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots) \frac{ds}{r},$$

где ρ_k суть функции, определяемые равенствами (76) (гл. II), если в первом из них заменить букву f на $-L_0$. Положив $U = W_1 + V$, получим гармоническую внутри (S) функцию, удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \text{ на поверхности } (S).$$

Отсюда заключаем, что

$$W_1 + V = \text{const} = C \text{ внутри } (S).$$

Обозначим через ρ плотность электрического слоя, находящегося в равновесии на поверхности (S), удовлетворяющую условию

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho}{r} ds = C.$$

При помощи этого соотношения предыдущее *равенство* приводится к виду

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = -\frac{1}{2\pi} \int (-\rho - L_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots$$

$$\ldots + \rho_k + \ldots) \frac{ds}{r} \quad \text{внутри } (S) \tag{72}$$

и дает решение задачи, когда ищется потенциал простого слоя, принимающий внутри (S) те же значения, что и данный потенциал двойного слоя.

21. Найдем теперь методом Робена потенциал простого слоя V вне поверхности (S), удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = L_0 \text{ на поверхности } (S).$$

Так как в данном случае $\int L_0\, ds = 0$, то на основании соображений п. 20, гл. II, получаем

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int (L_0 - \rho_1 + \rho_2 - \rho_3 + \ldots + (-1)^k \rho_k + \ldots)\frac{ds}{r}.$$

Положим $U = W_1 - V$. Очевидно,

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = 0 \text{ на поверхности } (S),$$

т.е. на основании известных свойств гармонических функций,

$$W_1 = V \text{ вне } (S),$$

или

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds = -\frac{1}{2\pi}\int (L_0 - \rho_1 + \rho_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \rho_k + \ldots)\frac{ds}{r} \quad \text{вне } (S). \qquad (73)$$

Это равенство дает решение задачи для случая, когда ищется потенциал простого слоя, принимающий вне (S) *те же самые значения, что и данный потенциал двойного слоя.*

22. В теоремах II и III мы указали решение внутренней и внешней задач Дирихле в виде потенциала двойного слоя. Пользуясь результатами предыдущих пунктов, нетрудно получить решение следующей задачи:

Найти внутри или вне поверхности (S) *потенциал простого слоя, принимающий на самой поверхности наперед заданные значения, т.е. получить решение задачи Дирихле в виде потенциала простого слоя.*

Поставленную таким образом задачу Дирихле мы будем называть *задачей Гаусса.*

Решение, которое мы изложим, требует, однако, чтобы функция f, в которую должен обращаться искомый потенциал простого слоя, удовлетворяла условию (141) гл. I, которое мы будем предполагать выполненным.

Мы называем рассматриваемую задачу задачей Гаусса, так как она непосредственно вытекает из известных его исследований, опубликованных в 1839 г. в мемуаре "Allgemeine Lehrsätze in Beziehung arf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats des Entfernung wirkenden Kräfte". Метод Гаусса, сводящий вопрос к разысканию условий минимума некоторого интеграла, недостаточен во многих отношениях и получил некоторое обоснование только в последнее время. Мы укажем сейчас строгое решение задачи Гаусса для всех поверхностей Ляпунова, к которым применим принцип Робена, а в дальнейшем докажем справедливость этого решения для каких угодно поверхностей Ляпунова.

Теорема II дает решение задачи Дирихле в виде ряда

$$W = \frac{1}{2} W_1 - \frac{1}{2} [(W_2 - W_1) - (W_3 - W_2) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k (W_k - W_{k-1}) + \ldots], \tag{74}$$

где, напомним, W_k суть функции, определяемые равенствами (27) п. 7. Пользуясь обозначениями п. 20, составляем ряд функций

$$V_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{L_0}{r} ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{ds}{r} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{75}$$

Повторив рассуждения п. 3, мы докажем равенство

$$-V_k = W_{k+1} - W_k \quad \text{внутри } (S),$$

которое в рассматриваемом случае будет, очевидно, справедливо для всех значений k, начиная с $k = 1$.

Вследствие этого определенная равенством (74) гармоническая внутри (S) функция W, обращающаяся в f на поверхности (S), представится в виде

$$W = \frac{1}{2} W_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k V_{k-1} = \frac{1}{2} W_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} V_k.$$

С другой стороны, равенство (72) дает, в силу (75),

$$\frac{1}{2} W_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} ds + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} ds + \sum_{k=1}^{\infty} V_{2k-1},$$

или, на основании (75),

$$W = -\frac{1}{2\pi} \int \left[-\frac{\rho}{2} - L_0 + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \rho_{2k} + \ldots \right] \frac{ds}{r} \quad *). \tag{76}$$

Потенциал простого слоя W (см. (76)) есть гармоническая функция как внутри, так и вне поверхности (S) и удовлетворяет условию

$$W_i = W_e = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Таким путем приходим к теореме.

Теорема VIII. *Пусть f есть заданная непрерывная функция точек поверхности* (S), *подчиненная условию* (141) *главы* I. *Положим* $\frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1e}}{\partial n} = L_0$

---

*) Напомним, что ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится равномерно на поверхности (S), вследствие чего замена суммы интегралов интегралом от суммы допустима. Плотность ρ определена в п. 20.

и составим ряд функций V_k по формулам

$$V_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{L_0}{r}\,ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\frac{ds}{r} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

где, вообще, $\rho_k = \dfrac{\partial V_k}{\partial n}$.

Потенциал простого слоя

$$W = -\frac{1}{2\pi}\int\left[-\frac{\rho}{2} - L_0 + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \rho_{2k} + \ldots\right]\frac{ds}{r} \tag{77}$$

удовлетворяет условиям

$\Delta W = 0$ *внутри и вне поверхности* (S),

$W_i = W_e = f$ *на поверхности* (S),

т.е. представляет решение задачи Гаусса для всякой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена.

В частности, функция W решает задачу Гаусса для любой конвексной поверхности.

23. Из только что доказанной теоремы выводим, как следствие, принимая во внимание известные свойства потенциала простого слоя, следующее предложение:

Если заданная непрерывная на поверхности (S) функция f такова, что выполняется условие (141) главы I, или, если потенциал двойного слоя

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int f\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \tag{78}$$

имеет правильные нормальные производные (внутреннюю, а, следовательно, и внешнюю) на поверхности (S), то гармоническая внутри или вне поверхности (S) функция W, обращающаяся на этой поверхности в заданную функцию f, имеет правильные внутреннюю и внешнюю нормальные производные

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = L_0 + \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \ldots + (-1)^{k-1}\rho_k + \ldots,$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = -\rho - L_0 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_k + \ldots$$

Таким образом, существование правильных нормальных производных от потенциала двойного слоя W_1, определяемого равенством (78), есть условие, *достаточное* для существования таких же нормальных производных от функции W, представляющей решение задачи Дирихле.

24. Покажем, что это *условие не только достаточно, но и необходимо**).

*) В доказательство этого утверждения, а также в доказательство аналогичного утверждения п. 25 внесены изменения (*Прим. ред.*)

По теореме II решение внутренней задачи Дирихле можно представить в виде (п. 7)

$$W = W_1 - W_2 + \frac{1}{2}\left\{W_3 - (W_4 - W_3) + \ldots + (-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1}) + \ldots\right\} =$$

$$= W_1 - W_2 + A. \tag{79}$$

В п. 2 показано, что функция W_2 удовлетворяет условию (141) гл. I и, следовательно, функция W_3 всегда имеет правильные нормальные производные, какова бы ни была функция f, непрерывная на поверхности (S).

С другой стороны, на основании теоремы II функция

$$A = \frac{1}{2}\left\{W_3 - (W_4 - W_3) + \ldots + (-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1}) + \ldots\right\} \tag{80}$$

является гармонической внутри (S) и обращается на поверхности (S) в функцию $\overline{W}_2$. В силу утверждения п. 23 функция A имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial A_i}{\partial n}$. Следовательно, из существования правильной нормальной производной $\frac{\partial W_i}{\partial n}$ функции W вытекает существование правильной нормальной производной функции

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2\pi}\int (f - \overline{W}_1)\frac{\cos\varphi}{r^2}ds. \tag{81}$$

Опять используя утверждение п. 23, получаем, что решение $\widetilde{W}$ задачи Дирихле с граничной функцией $f - \overline{W}_1$ (обращающиеся на поверхности (S) в функцию $f - \overline{W}_1$) имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial \widetilde{W}_i}{\partial n}$ на этой поверхности.

По теореме II

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_2 + \widetilde{A} = W_1 - 2W_2 + W_3 + \widetilde{A}, \tag{82}$$

где

$$\widetilde{W}_1 = \frac{1}{2\pi}\int (f - \overline{W}_1)\frac{\cos\varphi}{r^2}ds = W_1 - W_2,$$

$$\widetilde{W}_k = \frac{1}{2\pi}\int \widetilde{W}_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}ds = W_k - W_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

а

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2}\left\{\widetilde{W}_3 - (\widetilde{W}_4 - \widetilde{W}_3) + \ldots + (-1)^{k-1}(\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_{k-1}) + \ldots\right\}.$$

Так как функция $\widetilde{A}$, как и функция A, имеет правильную нормальную производную на (S), то существует правильная нормальная производная и функции

$$W_1 - 2W_2 \tag{83}$$

(существование правильной нормальной производной функции W_3 отмечалось выше). Но тогда и функция

$$W_1 = 2(W_1 - W_2) - (W_1 - 2W_2)$$

имеет правильную нормальную производную как разность функций, обладающих этим свойством.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема IX. *Для того чтобы функция W, удовлетворяющая внутри данной поверхности (S) уравнению Лапласа и обращающаяся на самой поверхности в заданную непрерывную функцию f, имела правильную нормальную производную*

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} \text{ на поверхности } (S),$$

необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds$$

имел такую же нормальную производную $\dfrac{\partial W_{1i}}{\partial n}$.

25. Легко предусмотреть, что такая же теорема должна иметь место и для случая внешней задачи Дирихле. Приведем вкратце ее доказательство.

По теореме III решение внешней задачи Дирихле можно представить в виде

$$W = -W_1 - W_2 - \frac{1}{2}\left\{W_3 + (W_4 + W_3) + \ldots + (W_k + W_{k-1}) + \ldots\right\} +$$

$$+ \frac{C}{C_0}\int \frac{\rho}{r}\, ds = -W_1 - W_2 + B. \tag{84}$$

Здесь функция B представляется в виде суммы потенциала простого слоя с непрерывной плотностью и решения внешней задачи Дирихле с граничной функцией $\overline{W}_2$, удовлетворяющей условию (141) гл. 1. Следовательно, она имеет (см. п. 23) правильную нормальную производную $\dfrac{\partial B_e}{\partial n}$.

Таким образом, из существования правильной нормальной производной $\dfrac{\partial W_e}{\partial n}$ вытекает существование правильных нормальных производных (внешней, а следовательно, и внутренней) функции $W_1 + W_2$. Отсюда, как и в предыдущем пункте, следует существование внутренней, а следовательно и внешней, правильной нормальной производной потенциала двойного слоя W_1.

Получаем следующую теорему.

Теорема X. *Для того чтобы функция W, удовлетворяющая вне поверхности (S) уравнению Лапласа и обращающаяся в данную непрерывную* *функцию f на самой поверхности, имела правильную нормальную производную $\frac{\partial W_e}{\partial n}$, необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя*

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int\int f \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \tag{85}$$

имел такую же нормальную производную.

26. Две последние теоремы справедливы для всякой поверхности Ляпунова, к которой применим принцип Робена, в частности, для всякой конвексной поверхности. Другой прием доказательства этих теорем был дан А.М. Ляпуновым в его неоднократно цитированном мемуаре 1898 г. "Sur certaines questions etc." *).

Что же касается задачи Гаусса и задач о преобразовании потенциала простого слоя в потенциал двойного слоя и обратно, то изложенное выше их решение было указано мною сначала в краткой заметке в "Comptes Rendus" в 1899 г., а затем подробно изложено в 1900 г. в упомянутом выше мемуаре, опубликованном в "Annales de Toulouse", и в сочинении "Общие методы решения основных задач математической физики"**).

Метод Неймана, как показано выше, дает решение задачи Дирихле всякий раз, когда функция f, в которую должна обращаться искомая гармоническая функция, подчинена единственному условию непрерывности. При этом общем предположении потенциал W_1 (см. (85)) может, вообще говоря, не иметь нормальных производных, что нами отмечено в гл. I сочинения. Теоремы IX и X показывают, что в этих случаях и функция, представляющая решение задачи Дирихле, также не будет иметь определенных нормальных производных во всех точках данной поверхности.

В п. 12 гл. I нами высказаны две теоремы, устанавливающие, что может существовать одна и только одна гармоническая внутри или вне данной поверхности (S) функция, обращающаяся в наперед заданную функцию на самой поверхности. Доказательство этих теорем основывается обыкновенно на формулах преобразования Грина (32) и (37) гл. I. Но эти формулы, несомненно, справедливы только при условии, что гармонические функции U и V, к которым они применяются, имеют правильные нормальные производные на данной поверхности.

В силу только что сказанного обычный прием доказательства этих теорем не устанавливает их во всей общности при единственном условии непрерывности функции f на поверхности (S). Однако теоремы, о которых идет речь, справедливы в самом общем случае.

Наиболее простое доказательство, не требующее вышеупомянутого ограничения функции f, получается, если их рассматривать как прямое следствие теоремы I гл. I.

---

*) См. A. Liapounoff, loc. cit., pp. 283–293.

**) W. Stekloff. Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. – Comptes Rendus, 19 févr., 1899.

W. Stekloff. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. – Annales de Toulouse, 1900, pp. 270, 271.

В. Стеклов. Общие методы и т.д., с. 180.

ГЛАВА IV

Некоторые простейшие задачи математической физики, связанные с задачами Дирихле и Неймана. Функция Грина и ей подобные. Определение высших и низших пределов отношения некоторых объемных и поверхностных интегралов

1. К решению задач Дирихле и Неймана приводится решение большинства задач математической физики, из которых в этой главе мы рассмотрим только простейшие.

Прежде всего остановимся на самой задаче Неймана, применения которой в различных областях математической физики весьма многочисленны и важны. Особенно широкое применение она встречает в гидродинамике, вследствие чего и называется иногда *основной задачей гидродинамики.*

Все возможные движения идеальной жидкости (без трения, невязкой) разделяются на два обширных класса, которым посвящается особое внимание в трактатах по динамике жидкостей; это так называемые движения с потенциалом скоростей (невихревые) и движения вихревые.

Отнесем жидкую массу, ограниченную какой-либо поверхностью (S) (или, в предельном случае, заполняющую все пространство), к какой-либо прямоугольной системе координат, через u, v, w обозначим проекции на оси координат скорости какой-либо точки x, y, z жидкой массы и составим разности

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\omega_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\omega_3. \tag{1}$$

Возможны два случая: 1) когда величины ω_1, ω_2, ω_3 равны нулю или 2) когда они отличны от нуля.

В первом случае выражение

$$udx+v\,dy+wdz \tag{2}$$

является полным дифференциалом некоторой функции V (когда может зависеть не только от координат x, y, z, но и от времени t) и, следовательно, u, v, w представляются в виде *)

$$u=\frac{\partial V}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial V}{\partial y}, \quad w=\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

Получается особый род движения жидкости, при котором скорости ее точек являются частными производными по координатам от одной и той же функции V. Эта функция называется *потенциалом скоростей невихревого движения жидкости.* Это движение будет определено, если по условиям задачи нам удастся найти функцию V. Для несжимаемых жидкостей (не газов) V должно удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta V=0$ во всех точках жидкой массы, на границах же ее должны выполняться те или иные условия в зависимости от рода задачи.

---

*) Рассматриваемая область предполагается поверхностно односвязной (*Прим. ред.*)

Жидкость может быть заключена внутри твердого замкнутого сосуда или иметь свободную поверхность, находящуюся под определенным давлением, в жидкость может быть погружено твердое тело, находящееся под действием данных сил или движущееся наперед заданным образом, и т.п. В большинстве случаев, как, например, в задаче о движении жидкости, заполняющей некоторые полости внутри твердого тела, о движении твердого тела в жидкости и др., граничные условия, выраженные аналитически, приводятся к виду

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} \text{ или } \frac{\partial V_e}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S), \tag{4}$$

где f есть заданная функция, например, нормальная составляющая скоростей точек полости, заключающей жидкость, или точек поверхности твердого тела, погруженного в жидкость, и т.п.

Задача о движении жидкости сводится, как видим, к решению задачи К. Неймана.

2. Если ω_i $(i = 1, 2, 3)$ – не нули, то получается так называемое вихревое движение жидкости, теория которого разработана трудами Коши, Гельмгольца, В. Томсона (лорда Кельвина) и др. и положена последним в основу его известной теории вихревого строения атомов.

Вихревое движение обладает многими замечательными свойствами, о которых нет надобности распространяться в настоящем сочинении. Мы остановимся только на одном из основных его свойств, имеющем непосредственное отношение к задачам наших исследований и выражающемся следующим образом.

Теорема I. *Вихревое движение жидкости, заключенной внутри данного сосуда, движущегося известным образом, или заполняющей все пространство (так называемой беспредельной массы жидкости), определяется вполне, если во всех точках жидкости будут известны величины ω_1, ω_2 и ω_3, называемые слагающими по осям координат вихревой скорости точек жидкости* (или, короче, слагающими вихря по осям координат).

Эта общая теорема впервые доказана мною в мемуаре "Sur la théorie de tourbillons" *) в 1908 г., и доказательство приводится в конце концов также к решению задачи К. Неймана.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ суть заданные функции координат. Положим

$$\rho_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad \rho_2 = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \rho_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \tag{5}$$

$$\sigma_1 = \omega_1 - \rho_1, \quad \sigma_2 = \omega_2 - \rho_2, \quad \sigma_3 = \omega_3 - \rho_3. \tag{6}$$

Определим такие функции u_1, v_1 и w_1, чтобы во всех точках поверхности (S), ограничивающей жидкую массу, соблюдалось условие**)

$$\sigma_1 \cos\alpha + \sigma_2 \cos\beta + \sigma_3 \cos\gamma = 0, \tag{7}$$

---

*) W. S t e k l o f f. Sur la théorie des tourbillons. – Annales de Toulouse, 2 sér., 1908, т. X.

**) α, β и γ суть углы нормали к поверхности (S) с осями координат.

которое можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\sigma_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\sigma_3 = 0 \text{ на поверхности } (S), \tag{8}$$

если $f(x, y, z) = 0$ есть уравнение этой поверхности. Существует бесчисленное множество функций u_1, v_1, w_1, удовлетворяющих условию (8).

3. Положим теперь

$$u = U + u_1, \quad v = V + v_1, \quad w = W + w_1, \tag{9}$$

где u_1, v_1, w_1 – уже известные функции, определенные в предыдущем пункте. Подставив эти выражения u, v и w в уравнения (1) и условие несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

получим следующие уравнения для определения функции U, V и W:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \sigma_1, \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = \sigma_2, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \sigma_3, \tag{11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + H = 0, \tag{12}$$

где

$$H = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}. \tag{13}$$

Уравнения (11) имеют тот же вид, что и (1), но здесь функции σ_1, σ_2, σ_3 удовлетворяют условию (7).

Положим

$$\begin{aligned} 4\pi S_1 &= \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\sigma_3}{r}d\tau - \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\sigma_2}{r}d\tau, \\ 4\pi S_2 &= \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\sigma_1}{r}d\tau - \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\sigma_3}{r}d\tau, \\ 4\pi S_3 &= \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\sigma_2}{r}d\tau - \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\sigma_1}{r}d\tau \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$U = S_1 + \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V = S_2 + \frac{\partial P}{\partial y}, \quad W = S_3 + \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{15}$$

Легко убедиться, что функции (15) удовлетворяют уравнениям (11) при всяком P. Последнее определится, если выражения (15) подставим в (12), причем получим

$$\Delta P + H = 0, \tag{16}$$

где

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \tag{17}$$

4. Так как движение сосуда, содержащего жидкость и ограниченного поверхностью (S), задано, то скорости жидкости u, v и w, кроме уравнений (1), должны удовлетворять еще в каждый момент времени t условию

$$u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma = f_1\,(x, y, z, t) \text{ на поверхности } (S), \tag{18}$$

где f_1 есть известная функция, представляющая нормальную составляющую скорости точки x, y, z поверхности (S). Это равенство при помощи (9) и (15) приводится к виду

$$\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial P_i}{\partial n} = f', \tag{19}$$

где положено

$$f' = f_1 - (S_1 + u_1)\cos\alpha - (S_2 + v_1)\cos\beta - (S_3 + w_1)\cos\gamma. \tag{20}$$

Из сказанного заключаем, что скорости u, v, w точек жидкой массы будут известны, если будет найдена функция P, удовлетворяющая условиям

$$\Delta P + H = 0 \text{ внутри } (S), \tag{21}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial n} = f' \quad \text{на поверхности } (S). \tag{22}$$

Доказательство теоремы п. 2 сводится, таким образом, к решению задачи, представляющей простое видоизменение задачи Неймана и носящей название *преобразованной задачи Неймана* (problème de Neumann transformé).

5. С этой задачей приходится встречаться не только в рассматриваемом вопросе гидродинамики, но и во многих других отделах математической физики, как, например, в аналитической теории тепла, в теории упругости и др. Такова, например, задача об установившейся температуре в твердом однородном теле, ограниченном какой-либо поверхностью (S), лучеиспускательная способность которой равна нулю. Общий случай, когда лучеиспускательная способность его поверхности — не нуль, также требует решения ряда рассматриваемых задач, как будет показано ниже. Общая задача об охлаждении твердого тела также существенным образом зависит от решения задачи Неймана.

В рассматриваемой нами задаче гидродинамики функции u_1, v_1, w_1 всегда можно выбрать так, что они будут иметь не только первые, но и вторые непрерывные производные по координатам внутри поверхности (S), причем $H = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z}$ будет иметь первые производные внутри (S). Мы рассмотрим более общий случай, когда в уравнении (21) функция H непрерывна и удовлетворяет условию (6) п. 4 гл. I (условию Гельдера).

Умножаем уравнение (21) на $d\tau$ и интегрируем результат по всему объему, ограниченному поверхностью (S). Получаем, в силу (22),

$$\int H d\tau + \int \Delta P d\tau = \int H d\tau + \int \frac{\partial P_i}{\partial n} ds = \int H d\tau + \int f' ds = 0. \qquad (23)$$

Таким образом, задача вообще возможна лишь тогда, когда заданные функции H и f', каковы бы они ни были, удовлетворяют условию (23). Заметим сначала, что в рассматриваемом нами вопросе гидродинамики это условие соблюдается.

В этом частном случае

$$\int H d\tau = \int (u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta + w_1 \cos\gamma)\, ds$$

и, в силу (20),

$$\int f' ds = \int f_1\, ds - \int \left[(S_1 + u_1)\cos\alpha + (S_2 + v_1)\cos\beta + (S_3 + w_1)\cos\gamma\right] ds.$$

Следовательно,

$$\int H d\tau + \int f' ds = \int f_1\, ds - \int \left[S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + S_3 \cos\gamma\right] ds. \qquad (24)$$

Но $f_1 = (u_0 + qz - ry)\cos\alpha + (v_0 + rx - pz)\cos\beta + (w_0 + py - qx)\cos\gamma =$
$= U_0 \cos\alpha + V_0 \cos\beta + W_0 \cos\gamma$, где u_0, v_0, w_0, p, q и r суть данные функции t, не зависящие от координат *). Применяя к первому интегралу правой части равенства (24) известную формулу преобразования поверхностного интеграла в объемный, получим

$$\int f_1\, ds = \int \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial W_0}{\partial z}\right) d\tau = 0.$$

Точно так же находим, при помощи (14),

$$\int (S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + S_3 \cos\gamma)\, ds = \int \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} + \frac{\partial S_3}{\partial z}\right) d\tau = 0.$$

Следовательно, на основании (24) условие (23) действительно выполняется.

Предлагая теперь, что это условие выполнено, каковы бы ни были заданные функции H и f', положим

$$P = V + P', \quad P' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{H}{r} d\tau. \qquad (25)$$

P' есть потенциал объемных масс, имеющий, как указано в гл. I, непрерывные частные производные первого порядка во всем пространстве, а следовательно, и правильную нормальную производную $\dfrac{\partial P'_i}{\partial n}$ на поверхности (S).

---

*) f_1 есть нормальная составляющая скорости точки x, y, z твердого сосуда, содержащего жидкость, поэтому u_0, v_0, w_0 суть проекции на оси координат скорости начала координатной системы, а p, q и r – проекции вращательной скорости сосуда около этой точки.

С другой стороны, на основании теоремы Гельдера, доказанной в п. 4 гл. I , P' при сделанном условии относительно функции H удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta P' + H = 0 \text{ внутри } (S).$$

Поэтому, подставив (25) в уравнение (21), получим следующее уравнение для определения функции V:

$$\Delta V = 0 \text{ внутри } (S),$$

а условие (22) обратится в такое:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f' - \frac{\partial P'_i}{\partial n} = f \text{ на поверхности } (S).$$

Очевидно, в силу (23), f подчинено условию

$$\int f\, ds = 0.$$

Задача об определении функции P сведена, таким образом, к задаче Неймана. Так как эта последняя решена нами в предыдущей главе для всякой поверхности (S), к которой приложим принцип Робена, то и *основную теорему теории вихревого движения жидкости можем считать доказанной, и задачу теории тепла об установившейся температуре, разрешенной для всякой поверхности, удовлетворяющей только что указанному условию.*

6. Общая задача об установившейся температуре приводится к определению функции v при помощи уравнений

$$\Delta v + \varphi = 0 \text{ внутри } (S), \tag{26}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + h v_i = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \tag{27}$$

где φ есть заданная внутри (S) функция координат, которую будем предполагать подчиненной условию Гельдера (п. 4 гл. I), а h есть положительная постоянная.

Эту задачу рассматривал Пуанкаре в своем известном мемуаре "Sur les équations de la physique mathématique", опубликованном в "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo" в 1894г., предложив следующий прием ее решения.

Положим

$$v = v_0 + h v_1 + h^2 v_2 + \ldots + h^k v_k + \ldots, \tag{28}$$

где v_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ суть некоторые функции координат. Подставив это выражение v в (26) и (27) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра h, получим следующую систему уравнений для последовательного определения функции v_k:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v_0 + \varphi = 0 \text{ внутри } (S),\\ &\frac{\partial v_{0i}}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } (S) \end{aligned}\right\} \tag{28_1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v_k = 0 \text{ внутри } (S) \ (k = 1, 2, 3, \ldots),\\ &\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + v_{k-1,i} = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Определение функции v_0 приводится *) к решению задачи п. 4, а всех остальных функций v_k $(k = 1, 2, 3, ...)$– непосредственно к решению задачи Неймана. На основании исследований предыдущих глав мы можем последовательно определить все эти функции, пользуясь либо методом Неймана, изложенным в гл. III, либо методом, указанным в гл. II этого сочинения.

В своих исследованиях Пуанкаре должен был пользоваться методом Неймана, так как последний из только что упомянутых приемов в его общем виде еще не был известен, вследствие чего анализ Пуанкаре не мог быть признан совершенно строгим. Метод Неймана дает изображение искомых функций в виде потенциалов двойного слоя, но до появления исследований А.М. Ляпунова оставались невыясненными условия, при которых эти потенциалы допускают правильные нормальные производные даже для конвексных поверхностей. Поэтому оставалось недосказанным, что функция v, определяемая рядом (28), действительно имеет нормальную производную $\dfrac{\partial v_i}{\partial n}$ и притом представляющую в виде сходящегося ряда

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial v_{0i}}{\partial n} + h\frac{\partial v_{1i}}{\partial n} + h^2\frac{\partial v_{2i}}{\partial n} + ... + h^k\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + ...,$$

т.е. что эта функция v на самом деле (а не только формально) удовлетворяет условию (27).

Однако и в настоящее время доказательства только что указанных положений при употреблении метода Неймана представляют значительные затруднения. Все эти затруднения мне удалось устранить, воспользовавшись для решения задачи теоремой VI гл. II, которая позволяет представить искомую функцию в виде потенциала простого слоя и, таким образом, разрешить задачу со всей строгостью. В то же время оказалось возможным определенно указать весьма обширный класс поверхностей, к которым, как будет показано ниже, принадлежат все поверхности Ляпунова, несомненно допускающих применение только что упомянутого приема решения рассматриваемой задачи.

Результаты этих исследований были сообщены мною в краткой заметке в "Comptes Rendus" 15 окт. 1900 г. **) и затем изложены в сочинении "Общие методы решения основных задач математической физики".

7. Предположим сначала, что функция φ удовлетворяет условию

$$\int \varphi \, d\tau = 0. \tag{30}$$

Определение функции v_0 представляет задачу пп. 4 и 5 при частном предположении $f' = 0, H = \varphi$. Функция v_0, следовательно, имеет вид

$$v_0 = v'_0 + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\varphi}{r}d\tau = v'_0 + w, \tag{31}$$

---

*) При частном предположении, что $f' = 0$.

**) W. Stekloff. Le problème des températures stationnaires. – Paris, 15 oct. 1900; см. также мой мемуар "Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique" (Annales de l' École Normale. – Paris, 1902, т. XIX, chap. II).

где v'_0 есть функция, подчиненная условиям

$$\Delta v_0' = 0 \text{ внутри } (S),$$

$$\frac{\partial v'_{0i}}{\partial n} = -\frac{\partial w_i}{\partial n} \text{ на поверхности } (S).$$

По теореме VI гл. II v'_0 представится в виде потенциала простого слоя, причем можем, очевидно, положить

$$v'_0 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu_0}{r}\, ds + C_0 = v''_0 + C_0,$$

где C_0 – произвольная постоянная, а μ_0 представляется рядом (76_1) гл. II, в котором f нужно заменить на $-\frac{\partial w_i}{\partial n}$. По формуле (31) получаем

$$v_0 = v''_0 + w + C_0.$$

Определив постоянную C_0 при помощи равенства $C_0\, S + \int (v''_0 + w)\, ds = 0$, получим функцию v_0, удовлетворяющую уравнениям (28_1) и условию $\int v_0\, ds = 0$. При этом станет возможным определение функции v_1 по формулам (76), (76_1) и (77) теоремы VI гл. II, если в них заменить f на $-v_0$.

Вообще, каждая из функций v_k определяется уравнениями (29) до некоторой произвольной постоянной C_k, которую всегда будем определять условием

$$\int v_k\, ds = \int (C_k + v'_k)\, ds = 0, \tag{32}$$

где под v'_k подразумевается потенциал простого слоя

$$v'_k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu_k}{r}\, ds \tag{32_1}$$

с плотностью

$$\mu_k = -v_{k-1} + \rho_1^{(k-1)} + \rho_2^{(k-1)} + \ldots + \rho_m^{(k-1)} + \ldots, \tag{33}$$

причем $\rho_m^{(k-1)}$ суть функции, определяемые последовательно по формулам (76) теоремы VI гл. II, если в них за исходную функцию вместо f взять функцию $-v_{k-1}$.

Таким путем последовательно определим все функции v_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), удовлетворяющие уравнениям (29) и условиям

$$\int v_k\, ds = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{34}$$

8. Так как к поверхности (S) приложим принцип Робена, а функция v_{k-1} подчинена условию (34), по теореме III гл. II имеем неравенство

$$|\rho_m^{(k-1)}| \leqslant M_{k-1}\, N_1 \tau^m, \tag{34_1}$$

которое выводится из (54) (гл. II) *), если в нем заменить R_0 на

$$M_{k-1} = \max|v_{k-1}| \quad \text{на поверхности } (S)$$

и значок k на m. При помощи этого неравенства из (33) выводим

$$|\mu_k| \leqslant M_{k-1}\,[1 + N_1(\tau + \tau^2 + \ldots + \tau^m + \ldots)] =$$

$$= M_{k-1}\left[1 - N_1 + \frac{N_1}{1-\tau}\right] = \lambda M_{k-1}, \tag{35}$$

где λ есть определенная постоянная, зависящая исключительно от вида поверхности (S). Равенство (32_1) дает затем

$$|v_k'| \leqslant \frac{\lambda M_{k-1}}{2\pi}\max\int\frac{ds}{r} = \frac{\lambda L}{2\pi}M_{k-1} = \lambda' M_{k-1},$$

где λ' есть постоянная того же свойства, что и λ. Это неравенство и равенство (32) приводят к неравенству

$$|C_k| \leqslant \lambda' M_{k-1}. \tag{35_1}$$

Следовательно,

$$|v_k| \leqslant |v_k'| + |C_k| < 2\lambda' M_{k-1} = \lambda_1 M_{k-1}. \tag{36}$$

Отсюда

$$M_k \leqslant \lambda_1 M_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В этом неравенстве под M_k можно подразумевать максимум модуля функции v_k во всей области (D), приняв во внимание теорему I гл. I.

Последнее неравенство дает

$$M_k \leqslant \lambda_1^k M_0, \tag{36_1}$$

на основании чего заключаем, что ряд

$$|v_0| + h|v_1| + h^2|v_2| + \ldots + h^k|v_k| + \ldots$$

сходится равномерно во всех точках области (D) для всех значений h, удовлетворяющих условию

$$h < 1/\lambda_1. \tag{37}$$

Следовательно, ряд (28) сходится абсолютно и равномерно в области (D) при тех же значениях h.

---

*) В теореме III гл. II доказывается справедливость неравенства (54) в предположении конвексности поверхности S. Доказательство этого неравенства в рассматриваемом случае содержится в п.18 гл. II; при этом предполагается, что постоянная N в неравенстве (60) гл. II может быть представлена в виде $N = R_0 N_1$, где $R_0 = \max|\rho_0|$, а N_1 не зависит от функции ρ_0. (*Прим. ред.*)

9. Обозначим через $\rho^{(k)}$ плотность электрического слоя, находящегося в равновесии на поверхности (S), подчиненную условию

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho^{(k)}}{r}\,ds. \tag{38}$$

На основании теорем V и VIII гл. II мы можем определить плотность ρ электрического слоя, находящегося в равновесии на рассматриваемой поверхности, удовлетворяющую условию $\int\rho\,ds = M$, где M есть заданная постоянная. Зная функцию ρ, положим $\frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho}{r}ds = C$. Функция $\rho^{(k)}$ может отличаться от ρ только постоянным множителем, положим, q, так что $\rho^{(k)} = q\rho$. Из равенства (38) получаем

$$q = \frac{C_k}{C}, \quad \rho^{(k)} = \frac{C_k}{C}\rho = c_k\rho, \tag{39}$$

т.е.

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int\frac{c_k\rho}{r}\,ds.$$

На основании этого функцию v_k можем представить в виде потенциала простого слоя

$$v_k = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_k + c_k\rho}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_k'}{r}\,ds, \tag{39$_1$}$$

где $\mu_k' = \mu_k + c_k\rho$, а μ_k выражается рядом (33).

Из (39) и (35_1) следует, что $|c_k| \leqslant \frac{\lambda'}{C} M_{k-1}$. Обозначая через α максимум $|\rho|$ на поверхности (S) и приняв во внимание неравенства (35) и (36_1), получаем

$$|\mu_k'| \leqslant \left(\lambda + \frac{\lambda'\alpha}{C}\right) M_{k-1} = \lambda_2 M_{k-1} \leqslant \lambda_2 M_0 \lambda_1^{k-1},$$

где λ_2 есть постоянная, зависящая исключительно от свойств поверхности (S). Отсюда заключаем, что ряд

$$\mu = \mu_1' + h\mu_2' + \ldots + h^{k-1}\mu_k' + \ldots \tag{40}$$

сходится на поверхности (S) абсолютно и равномерно при том же условии относительно параметра h, что и ряд (28), т.е. пока $h < 1/\lambda_1$. На основании этого можем писать для всех значений h, удовлетворяющих только что указанному условию,

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_1'}{r}ds + \frac{h}{2\pi}\int\frac{\mu_2'}{r}ds + \ldots + \frac{h^{k-1}}{2\pi}\int\frac{\mu_k'}{r}ds + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu}{r}\,ds = V, \tag{41}$$

и так как $v = v_0 + h(v_1 + hv_2 + \ldots + h^{k-1} v_k + \ldots)$, то, в силу (39_1) и (41),

$$v = v_0 + hV. \tag{42}$$

Так как V есть потенциал простого слоя, то для всякой поверхности Ляпунова он имеет правильную нормальную производную

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} \text{ на поверхности } (S).$$

Поэтому на основании (42) такую же производную имеет и функция v, а именно

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = h\frac{\partial V_i}{\partial n}, \tag{42_1}$$

ибо, в силу (28_1), $\dfrac{\partial v_{0i}}{\partial n} = 0$.

10. Равенство (42) показывает, что найденная нами функция v действительно удовлетворяет уравнению (26). Остается только доказать, что она удовлетворяет и условию (27).

Имеем, на основании свойств потенциала простого слоя (гл. I),

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu\cos\psi}{r^2}\,ds + \mu. \tag{43}$$

Принимая во внимание равномерную сходимость ряда из (40), получаем

$$\int \frac{\mu\cos\psi}{r^2}\,ds = \int \frac{\mu_1'}{r^2}\cos\psi\,ds + h\int \frac{\mu_2'}{r^2}\cos\psi\,ds + \ldots +$$
$$+ h^{k-1}\int \frac{\mu_k'}{r^2}\cos\psi\,ds + \ldots$$

Но, в силу (29),

$$\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_k'\cos\psi}{r^2}\,ds + \mu_k' = -v_{k-1,i},$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu_k'\cos\psi}{r^2}\,ds = v_{k-1,i} + \mu_k'.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu\cos\psi}{r^2}\,ds =$$
$$= (v_{0i} + \mu_1') + h(v_{1i} + \mu_2') + \ldots + h^{k-1}(v_{k-1,i} + \mu_k') + \ldots = S$$

и, на основании (43), $\dfrac{\partial V_i}{\partial n} = \mu - S$.

Так как для значений h, удовлетворяющих условию (37), ряды μ и S сходятся, то можем писать

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = [\mu_1' - (v_{0i} + \mu_1')] + h[\mu_2' - (v_{1i} + \mu_2')] + \ldots + h^{k-1}[\mu_k' -$$

$$- (v_{k-1,i} + \mu_k')] + \ldots = - [v_{0i} + hv_{1i} + \ldots + h^{k-1} v_{k-1,i} + \ldots] = - v_i .$$

Отсюда при помощи (42_1) выводим

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv_i = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Таким образом, доказано, что *функция v, выражаемая рядом* (28), *даст действительное решение задачи, по крайней мере для значений параметра h, меньших некоторого определенного числа $1/\lambda_1$.*

11. Мы сделали для простоты предположение, что функция φ в уравнении (26) подчинена условию (30), но легко убедиться, что это ограничение несущественно.

Допустим, в самом деле, что φ есть какая угодно заданная функция координат. Положим

$$v = u + \frac{C}{h}, \tag{44}$$

где C есть некоторая постоянная. Задача сведется к определению функции u, для которой после подстановки этого выражения v в (26) и (27) получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u + \varphi = 0 \quad \text{внутри } (D), \\ &\frac{\partial u_i}{\partial n} + hu_i + C = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Мы имеем здесь частный случай следующей более общей задачи: *Найти функцию v при помощи условий*

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v + \varphi = 0 \qquad \textit{внутри } (D), \\ &\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv_i + f = 0 \quad \textit{на поверхности } (S), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где f есть заданная функция координат точек этой поверхности.

Положив, как и в п.6,

$$v = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \ldots + h^k v_k + \ldots ,$$

получим для определения v_0 уравнения

$$\Delta v_0 + \varphi = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial n} + f = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

а для всех других функций v_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) те же самые уравнения (29).

Определение функций v_0 представляет общую задачу п.4, решенную в п.5, которая возможна, если функция φ и f связаны соотношением (см. равенство (23) п.5)

$$\int \varphi\, d\tau = \int f\, ds.$$

Дальнейший ход решения задачи будет тот же самый, что и задачи п.6.

Возвращаясь к частному случаю уравнений (45), заключаем, что определение функции u сделается возможным, если определим постоянную C при помощи условия $CS = \int \varphi d\tau$. Выбрав C указанным способом, найдем указанным выше приемом функцию u, действительно удовлетворяющую уравнениям (45), а затем при помощи соотношения (44) и искомую функцию v, удовлетворяющую уравнениям (26) и (27) при произвольно заданной функции φ.

12. Нетрудно, наконец, убедиться, что *задача п.6 или, общее, п.11 не может допускать никакого иного решения, кроме найденного выше.*

Допустив существование двух различных функций v_1 и v_2, одновременно удовлетворяющих уравнениям (46), положим $u = v_1 - v_2$. Функция u должна, очевидно, удовлетворять уравнениям

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n} + hu_i = 0. \tag{47}$$

Положив в формуле (32) гл. I $U = V = u$, получим, при помощи (47),

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau + h \int u_i^2\, ds = 0,$$

откуда следует, что необходимо $u = 0$, ибо по условию $h > 0$. Следовательно, необходимо $v_1 = v_2$.

13. Существование функции v (и притом единственной), удовлетворяющей уравнениям (26) и (27), доказано лишь для значений h, меньших $1 / \lambda_1$. Покажем, что задача допускает решение при всяком данном положительном h.

Рассмотрим предварительно частный случай уравнений (46), когда $\varphi = 0$, но f есть какая угодно непрерывная функция на поверхности (S). Положим, подобно предыдущему, $v = u + C/h$. Для определения u получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \quad \text{внутри } (S), \\ &\frac{\partial u_i}{\partial n} + hu_i + f + C = 0 \text{ на поверхности } (S). \end{aligned} \tag{48}$$

Положив затем

$$u = u_0 + hu_1 + h^2 u_2 + \ldots + h^k u_k + \ldots, \tag{49}$$

находим следующие уравнения для u_0:

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{внутри } (S),$$

$$\frac{\partial u_{0i}}{\partial n} + f + C = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

а для всех остальных u_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) те же самые уравнения, что и для функций v_k в п.6. Выбрав пока неопределенную постоянную C, удовлетворяющую условию $\int (f + C)\, ds = 0$, сделаем возможным определение функции u_0, которое сводится к решению задачи Неймана.

Повторив опять дословно рассуждения предыдущих пунктов, докажем, что ряд (49) представит действительное решение уравнений (48) *).

14. Воспользуемся теперь следующим приемом Пуанкаре **).

Обозначим через g максимум модуля f на поверхности (S) и положим $w_1 = v - g/h$. Подставив следующее отсюда выражение v в уравнения

$$\Delta v = 0 \quad \text{внутри } (S),$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + h v_i + f = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \tag{49$_1$}$$

получим

$$\Delta w_1 = 0 \quad \text{внутри } (S),$$
$$\frac{\partial w_{1i}}{\partial n} + h w_{1i} + g + f = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \tag{50}$$

Точно так же, положив $w_2 = v + g/h$, найдем, при помощи (49$_1$),

$$\Delta w_2 = 0 \quad \text{внутри } (S),$$
$$\frac{\partial w_{2i}}{\partial n} + h w_{2i} - g + f = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \tag{51}$$

На основании теоремы I гл. I максимум и минимум гармонических внутри (S) функций w_1 и w_2 непременно находятся на поверхности (S), причем в точках, соответствующих максимуму этих функций, нормальные производные $\dfrac{\partial w_{1i}}{\partial n}$ и $\dfrac{\partial w_{2i}}{\partial n}$ должны быть, очевидно, неотрицательными, в точках же, соответствующих минимуму этих функций, – неположительными.

Применим равенство (50) к какой-либо точке, где w_1 достигает максимума. Так как при этом $\dfrac{\partial w_{1i}}{\partial n} \geqslant 0$ и $g + f \geqslant 0$, то необходимо

$$w_{1i} = v_i - g/h \leqslant 0. \tag{52}$$

Применив же равенство (51) к точке, где w_2 имеет минимум, и заметив, что при этом $\dfrac{\partial w_{2i}}{\partial n} \leqslant 0$ и $f - g \leqslant 0$, заключаем, что

$$w_{2i} = v_i + g/h \geqslant 0.$$

---

*) При $h < 1/\lambda_1$.

**) H. Poincaré. Sur les équations de la Physique mathématique. – Rendiconti del Circolo di Palermo, 1894, p. 99.

Неравенства (52) и последнее показывают, что для всех точек поверхности (S)

$$|v_i| \leqslant g/h \quad \text{на поверхности } (S). \tag{53}$$

15. Обозначим через h_0 какое-либо определенное значение h, меньшее $1/\lambda_1$, и положим $h = h_0 + \eta$. Будем искать функцию v, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{gathered} \Delta v + \varphi = 0 \quad \text{внутри } (S), \\ \frac{\partial v_i}{\partial n} + (h_0 + \eta) v_i = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \end{gathered} \tag{54}$$

в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра η,

$$v = v_0 + \eta v_1 + \eta^2 v_2 + \ldots + \eta^k v_k + \ldots \tag{54_1}$$

При помощи (54) получаем следующие уравнения для последовательного определения функций v_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{gathered} \Delta v_0 + \varphi = 0 \quad \text{внутри } (S), \\ \frac{\partial v_{0i}}{\partial n} + h_0 v_{0i} = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \end{gathered} \tag{55}$$

$$\begin{gathered} \Delta v_k = 0 \quad \text{внутри } (S), \\ \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + h_0 v_{ki} + v_{k-1,i} = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \end{gathered} \tag{55_1}$$

Определение функции v_0 представляет задачу п. 6 (уравнения (26) и (27)). Так как

$$h_0 < 1/\lambda_1, \tag{56}$$

то мы можем найти функцию v_0 приемом, указанным в предыдущих пунктах.

Найдя v_0, определим затем последовательно $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. Определение каждой из функций v_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, как показывают уравнения (55_1), сводится к решению задачи п. 11 (уравнение (46) при $\varphi = 0$). Так как h_0 удовлетворяет условию (56), то указанным в этом пункте приемом мы найдем и v_k при всяком k, начиная с $k = 1$.

Подразумевая в (54_1) под v_k таким образом найденные функции, получим ряд, формально удовлетворяющий уравнениям (54).

16. В уравнениях (55_1) роль функции f уравнений (49_1) играет функция $v_{k-1,i}$. Обозначая, вообще, через M_k максимум модуля функции v_{ki}, получаем, применив к рассматриваемому случаю неравенство (53), $|v_k| \leqslant M_{k-1}/h_0$. Отсюда

$$\begin{gathered} M_k \leqslant M_{k-1}/h_0 \quad \text{и} \\ M_k \leqslant M_0 / h_0^k . \end{gathered} \tag{57}$$

Сравнивая ряд (54_1) с рядом

$$M_0 + \eta M_1 + \eta^2 M_2 + \ldots + \eta^k M_k + \ldots,$$

заключаем при помощи (57), что ряд (54_1) сходится абсолютно и равномерно на поверхности (S) при всех значениях η, удовлетворяющих условию $\eta < h_0$.

Так как v_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ суть гармонические функции внутри (S), то из сказанного на основании теоремы IV гл. I заключаем, что ряд (54_1) сходится равномерно во всей области (D), ограниченной поверхностью (S), причем ряд $V = v_1 + \eta v_2 + \ldots + \eta^{k-1} v_k + \ldots$ представит гармоническую функцию внутри (S).

Ряд (54_1) представится в виде $v = v_0 + V$. Отсюда, приняв во внимание первое из уравнений (55), заключаем, что найденная функция v удовлетворяет уравнению (26). Повторив затем с незначительными изменениями рассуждения пп. 7, 8 и 9, мы докажем, что v удовлетворяет и условию (27).

Таким образом, докажем существование функции v, удовлетворяющей уравнениям (26) и (27) для значений $h < 2/\lambda_1$, ибо постоянную h_0 можно взять сколь угодно близкой к $1/\lambda_1$.

Если обозначим затем через h_0 число, достаточно близкое к $2/\lambda_1$, и применим к уравнениям (54) те же самые рассуждения, убедимся в существовании функции v, удовлетворяющей уравнениям (26) и (27) при $h < 3/\lambda_1$, и, продолжая повторять эти рассуждения какое-либо число n раз, докажем существование функции v, решающей задачу об установившейся температуре (уравнения (26) и (27)), при всяком $h < n/\lambda_1$, где n – какое угодно целое число; иначе говоря, при всяком положительном h.

Сопоставляя все вышесказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема II. *Для всякой поверхности, к которой приложим принцип Робена, и, в частности, для всякой конвексной поверхности Ляпунова существует единственная вполне определенная функция v, решающая общую задачу об установившемся тепловом состоянии твердого тела (однородного), т.е. удовлетворяющая условиям*

$$\Delta v + \varphi = 0 \qquad \text{внутри } (S), \tag{58}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + h v_i + f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S), \tag{58_1}$$

где (S) есть поверхность, ограничивающая тело, h – какая угодно положительная постоянная, а φ и f – две произвольно заданные функции, первая внутри (S), подчиненная условию Гельдера, а вторая на поверхности (S), подчиненная условию непрерывности.

17. Напишем уравнение (58_1) в виде

$$v_i + \frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_i}{\partial n} + f\right) = 0$$

и рассмотрим предельный случай, когда h стремится к бесконечности.

В пределе уравнение примет вид *) $v_i = 0$. Получим задачу об установившейся температуре в однородном теле, лучеиспускательная способность

---

*) Выражение $\dfrac{\partial v_i}{\partial n} + f$ предполагается конечным.

поверхности которого бесконечно велика. Задача приводится к определению функции v при помощи уравнений

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \text{внутри } (S),$$

$$v_i = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Положив, как в п.7,

$$v = u + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varphi}{r}\, d\tau = u + w,$$

сводим задачу на определение функции u при помощи условий

$$\Delta u = 0 \text{ внутри } (S),$$

$$u_i = -w_i \quad \text{на поверхности } (S),$$

т. е. к задаче Дирихле. На основании теоремы II (п.7) гл. III мы можем решить эту задачу методом Неймана для всякой поверхности, к которой применим принцип Робена.

В рассматриваемом случае w (заданная функция) как потенциал объемных масс имеет непрерывные частные производные по координатам во всем пространстве. При этом по четвертой теореме Ляпунова (гл. I) потенциал двойного слоя

$$W_1 = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{w \cos \varphi}{r^2}\, ds \tag{59}$$

имеет правильные нормальные производные на поверхности (S).

На основании теоремы VIII предыдущей главы мы можем решение рассматриваемой задачи представить в виде потенциала простого слоя по формуле (77), если будем там подразумевать под L_0 нормальную производную от потенциала W_1, определяемого равенством (59) *).

18. Рассмотрим теперь следующую задачу:

Найти внутри данной поверхности (S) такую функцию от двух систем координат ξ, η, ζ и x: y, z, которая остается непрерывной вместе со своими частными производными первого и второго порядка по переменным ξ, η, ζ во всех точках внутри (S), за исключением точки $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$, где она обращается в бесконечность как $\dfrac{1}{4\pi r}$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, *и которая удовлетворяет внутри (S) (за исключением указанной точки) уравнению Лапласа, а на поверхности (S) обращается в нуль.*

Функция, удовлетворяющая этим условиям, называется *функцией Грина*, которую мы будем обозначать через $G(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta)$ или иногда просто через G. Эта функция, как известно, играет весьма важную роль в анализе и в его различных приложениях к математической физике. Однако до сравнительно недавнего времени не было строго установлено даже само сущест-

*) Рассматриваемая задача приводится, следовательно, к задаче Гаусса.

вование этой функции для более или менее общего класса поверхностей, не говоря уже о различных ее свойствах, которыми тем не менее постоянно пользовались при различных изысканиях. Полученные выше результаты позволяют нам доказать основные свойства этой функции с надлежащей строгостью для всех поверхностей, к которым применим принцип Робена, а затем распространить полученные выводы на все поверхности Ляпунова.

Положим

$$G = \Gamma + \frac{1}{4\pi r}. \tag{60}$$

Так как G должно удовлетворять уравнению Лапласа, то Γ также удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Gamma = 0 \quad \text{внутри } (S) \tag{61}$$

и притом представляет собой функцию от ξ, η, ζ, непрерывную вместе со своими производными первых двух порядков по ξ, η и ζ во всех точках внутри (S), где бы ни находилась точка x, y, z внутри рассматриваемой поверхности *). Точку x, y, z будем называть *полюсом* функции Грина.

Так как, далее, функция G должна обращаться в нуль на поверхности (S), то функция Γ должна удовлетворять условию

$$\Gamma = -\frac{1}{4\pi r} \quad \text{на поверхности } (S). \tag{62}$$

Определение функции Грина G сведено к отысканию функции Γ при помощи уравнений (61) и (62), т.е. к частному случаю задачи Дирихле, когда

$$f = -\frac{1}{4\pi r}. \tag{63}$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае мы имеем дело с задачей Гаусса, ибо при любом положении полюса функции G *внутри* поверхности (S) функция f имеет определенные производные по ξ, η и ζ на поверхности (S); они удовлетворяют условию Гельдера, и, следовательно, функция f, как и функция w в п.17, удовлетворяет условию (141) (гл. I).

На основании теоремы VIII предыдущей главы функция Γ представится в виде потенциала простого слоя по формуле (77), где под L_0 нужно подразумевать нормальную производную от потенциала двойного слоя

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

а в этом последнем под f – функцию, определяемую равенством (63). Отсюда сейчас же следует, что функция Грина имеет правильные нормальные производные на поверхности (S).

Таким путем приходим к следующей важной теореме.

Теорема III. *Для всякой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена, и , в частности, для всякой конвексной поверхности су-*

---

*) Отметим, что это рассуждение использует теорему об устранении особенности и доказывает единственность функции Грина. Доказательство теоремы III на него не опирается. (*Прим. ред.*)

ществует функция Грина, которая может быть представлена в виде потенциала простого слоя и которая имеет, следовательно, правильные внутреннюю и внешнюю нормальные производные на рассматриваемой поверхности.

Коль скоро доказано существование нормальных производных от функции Грина, можно считать строго установленной и теорему Римана.

Теорема Римана. *Функция Грина симметрична относительно переменных x, y, z, и ξ, η, ζ, т.е.*

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z).$$

Доказательство, излагаемое в сочинении Римана "Schwere, Electricität und Magnetismus" (Hannover, 1880, стр.143), становится вполне строгим на основании предыдущей теоремы.

19. Только после того, как установлено существование правильных нормальных производных от функции Грина на поверхности (S) (теорема III), можно с надлежащей строгостью доказать известную формулу, представляющую в весьма простом виде решение задачи Дирихле при помощи функции Грина. Ввиду важного значения этой формулы приведем сначала обычное ее доказательство.

Предположим, что функция f подчинена условию теоремы IX предыдущей главы. В этом случае функция U, гармоническая внутри (S) и обращающаяся в f на поверхности (S), будет иметь правильные нормальные производные на этой поверхности, вследствие чего к функции U можно применить формулу (36) гл. I, которую можно представить в виде

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int f\frac{\partial(1/r)}{\partial n}ds + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U_i}{\partial n}\,\frac{ds}{r}. \tag{64}$$

Применим теперь равенство (34) гл. I к функциям U и $V = \Gamma$. Так как

$$U_i = f, \quad \Gamma = -\frac{1}{4\pi r} \text{ на поверхности } (S),$$

то

$$\int f\frac{\partial \Gamma_i}{\partial n}\,ds = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U_i}{\partial n}\,\frac{ds}{r},$$

вследствие чего равенство (64) принимает вид

$$U = -\int f\left(\frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)ds,$$

т.е., на основании (60),

$$U = -\int f\frac{\partial G_i}{\partial n}\,ds \tag{65}$$

для любой точки x, y, z, лежащей внутри поверхности (S).

Изложенный прием доказательства требует, чтобы функция f была ограничена условием теоремы IX, т.е. чтобы задача Дирихле могла быть сведена к задаче Гаусса. Если же это условие не соблюдается, т.е. функция f подчиняется единственному условию непрерывности, то равенство может, вообще говоря, потерять смысл, ибо $\frac{\partial U_i}{\partial n}$ может обращаться в бесконечность. Во всяком случае, для того чтобы иметь право воспользоваться преобразованием Грина, которое приводит к равенству (64), необходимы дополнительные, довольно сложные исследования о свойствах функций $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_P$ или $\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_P$, когда точка P, достаточно близкая к поверхности (S) стремится к некоторой точке p, лежащей на этой поверхности *).

20. Результаты, полученные нами в предыдущих главах, позволяют устранить эти затруднения и доказать справедливость формулы (65) для какой угодно непрерывной функции f, не прибегая к равенству Грина (64).

На основании теоремы VIII предыдущей главы функция Γ может быть представлена в виде

$$\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\int(-\rho - L_0 + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \rho_{2k} + \ldots)\frac{ds}{r}, \tag{66}$$

где под L_0 нужно теперь подразумевать внутреннюю нормальную производную от потенциала двойного слоя $-\frac{1}{8\pi^2}\int\frac{1}{r_0}\frac{\cos\varphi}{r_1^2}\,ds$, а под ρ_k — функции, определяемые последовательно при помощи уравнений

$$\rho_1 = -\frac{1}{2\pi}\int L_0\frac{\cos\psi}{r_1^2}\,ds, \quad \rho_k = \frac{1}{2\pi}\int\rho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r_1^2}\,ds. \tag{67}$$

В последних трех интегралах под r_0 подразумевается расстояние точки x, y, z от точек ξ'', η'', ζ'' поверхности (S), под r_1 — расстояние точки ξ', η', ζ' этой поверхности от тех же точек ξ'', η'', ζ'', по которым совершается интегрирование, а в интеграле (66) под r подразумевается расстояние точки ξ, η, ζ от точек ξ', η', ζ' и интегрирование совершается по этим последним переменным.

Очевидно, L_0 и ρ_k суть функции от x, y, z и ξ', η', ζ', а $\cos\psi/r_1^2$ и $\cos\varphi/r_1^2$ от переменных x, y, z не зависят (суть функции ξ', η', ζ' и ξ'', η'', ζ''). Производные от ρ_k по x, y, z, очевидно, связаны между собой соотношениями того же вида, что и сами функции ρ_k, а именно

$$\frac{\partial\rho_k}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\rho_{k-1}}{\partial x}\frac{\cos\psi}{r_1^2}\,ds \text{ и т.д. для } y \text{ и } z, \tag{68}$$

$$\frac{\partial^2\rho_k}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial^2\rho_{k-1}}{\partial x^2}\frac{\cos\psi}{r_1^2}\,ds \text{ и т.д. для } y \text{ и } z,$$

ибо функция $\cos\psi/r_1^2$, как сказано, не зависит от x, y, z.

*) Такие исследования относительно функции $\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_P$ были приведены в 1897 г. известным польским ученым Зарембой (S. Z a r e m b a) в его мемуаре "Sur le problème de Dirichlet" (Annales de l'École Normale, 3 sér., T. XIV, p. 251)

Легко видеть далее, что функции $\frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 L_0}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 L_0}{\partial z^2}$ удовлетворяют тому же условию, что и L_0, т.е.

$$\int \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2}\, ds = 0 \qquad \text{и т.д. для } y \text{ и } z .$$

Вследствие этого мы можем к ряду

$$-\frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \rho_{2k}}{\partial x^2} + \ldots$$

и таким же рядам для y и z применить дословно те самые рассуждения, при помощи которых в гл. II доказывалась равномерная сходимость ряда $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_k + \ldots$ Таким путем докажем, что рассматриваемые ряды сходятся абсолютно и равномерно во всех точках ξ', η', ζ' поверхности (S).

На основании этого получаем равенство

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \int \left(-\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \rho_{2k}}{\partial x^2} + \ldots \right) \frac{ds}{r}$$

и такие же равенства для y и z. Отсюда на основании известных свойств потенциала простого слоя и равенств (68) выводим

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x^2} + \ldots$$

и такие же равенства для y и z.

С другой стороны, из (66) следует, что $\frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} = L_0 + \rho_1 - \rho_2 + \ldots$ $\ldots + (-1)^{k+1} \rho_k + \ldots$ Так как ряды, получаемые почленным дифференцированием по x, y, z этого ряда, в силу только что сказанного сходятся равномерно, то

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} \right) = \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x^2} + \ldots$$

Такие же равенства имеют место и для y, и для z.
Следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \right) \qquad \text{и т.д. для } y \text{ и } z .$$

При помощи этих соотношений убеждаемся, что *функция U, определяемая равенством*

$$U = -\int f \frac{\partial G_i}{\partial n} ds = -\int f \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds , \tag{69}$$

есть гармоническая функция внутри (S) от переменных x, y, z.

Совершенно так же доказывается, что *функция*

$$U = \int\int f \frac{\partial G_e}{\partial n} ds \tag{70}$$

есть гармоническая функция вне поверхности (S) *от тех же переменных* x, y, z.

Равенства (69) *и* (70) *справедливы для любой точки* x, y, z, *лежащей внутри, соответственно вне* (S), *какова бы ни была функция* f, *непрерывная на поверхности* (S).

21. Докажем теперь, что гармонические функции U, определяемые равенствами (69) или (70), обращаются в заданную функцию f на поверхности (S), коль скоро эта функция непрерывна во всех точках этой поверхности. Приведем простейшее доказательство, предложенное А.М. Ляпуновым*).

Предположим сначала, что

$$f = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 , \tag{71}$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 суть координаты какой-либо точки p_0 поверхности (S). Чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, рассмотрим равенство (69); все сказанное будет непосредственно приложимо и к равенству (70).

На основании теоремы I гл. I можем утверждать, что гармоническая внутри (S) функция U, обращающаяся в функцию f (71) на самой поверхности (S), положительна во всех точках области (D).

Возьмем на нормали к (S) в точке p_0 точку P_0, лежащую внутри (S) на расстоянии δ от p_0. Для функции f, очевидно, соблюдается неравенство (173) гл. I , ибо в данном случае для точки p_0

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f - f_0)\, d\omega \leqslant \text{const}\, \rho^2 .$$

Следовательно, U имеет определенную нормальную производную в этой точке. Поэтому, если обозначим значение U в точке P_0 через U_0, то будем иметь

$$|U_0 - f_0| < A\delta , \tag{71$_1$}$$

где A есть определенное число, а f_0 – значение f в точке p_0 поверхности (S) **).

Будем подразумевать в дальнейшем для удобства под n внутреннюю нормаль к поверхности (S). Так как функция G положительна внутри (S) ***) и обращается в нуль на самой поверхности, то

$$\frac{\partial G_i}{\partial n} \geqslant 0 \tag{72}$$

во всех точках поверхности (S).

---

*) A. Liapounoff. Sur certaines questions etc. – Journal de Mathématiques, 1898, p. 308.

S. Zaremba. Sur le problème de Dirichlet. – Annales de l'École Normale, 1897, T. XIV, p. 251.

**) Нетрудно показать, что число A можно выбрать не зависящим от расположения точки p_0 на поверхности (S). (*Прим. ред.*)

***) Доказательство этого элементарного предложения общеизвестно. См., например, H. Poincaré, "Théorie du potentiel Newtonien" (Paris, 1899, p. 160).

Опишем около точки p_0 сферу достаточно малого радиуса R и обозначим через $d\sigma$ элемент площадки (σ), вырезаемой этой сферой на поверхности (S), через ds_1 – элемент остальной части поверхности. Формулы (71) и (72) показывает, что функция

$$U = \int f \frac{\partial G_l}{\partial n} ds \qquad (72_1)$$

положительна во всех точках области (D) *).

Следовательно,

$$U_0 \geqslant \int f \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 \geqslant R^2 \int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 , \qquad (73)$$

ибо для всех точек части поверхности (S), внешней относительно (σ), $f > R^2$. С другой стороны, заметив, что $f_0 = 0$ в точке p_0, из (71_1) получаем $U_0 < A\delta$. Это последнее неравенство и (73) дают

$$\int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 < A \frac{\delta}{R^2} . \qquad (74)$$

22. Будем подразумевать теперь под f какую угодно функцию, непрерывную на поверхности (S).

Как известно,

$$\int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds = 1 , \qquad (75)$$

где бы ни находилась точка x, y, z в области (D) **). Поэтому, обозначая через f_0 значение f в точке p_0, можем писать для точки P_0:

$$U_0 - f_0 = \int (f - f_0) \frac{\partial G_l}{\partial n} ds = \int (f - f_0) \frac{\partial G_l}{\partial n} d\sigma + \int (f - f_0) \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 . \qquad (76)$$

Так как f есть непрерывная функция, то выбрав R достаточно малым, будем иметь $|f - f_0| < \epsilon$ для всех точек площадки (σ), на которую распространяется первый интеграл предыдущего равенства. Поэтому, на основании (72) и (75),

$$\left| \int (f - f_0) \frac{\partial G_l}{\partial n} d\sigma \right| \leqslant \epsilon \int \frac{\partial G_l}{\partial n} d\sigma \leqslant \epsilon \int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds = \epsilon . \qquad (77)$$

---

*) Так как функция f, определенная формулой (71), очевидно, удовлетворяет в любой точке поверхности (S) условию (173) гл. I, то по доказанному в п. 19 гармоническая в области (D) функция U, удовлетворяющая граничному условию $U_l = f$ (на поверхности (S)), представляется в виде (72_1). (*Прим. ред.*)

**) В самом деле, если n есть направление внутренней нормали, то, в силу (60),

$$\int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds = \int \frac{\partial \Gamma_l}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r^2} ds ,$$

откуда на основании теоремы Гаусса $\int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds = 1$.

Обозначим через M максимум модуля f на поверхности (S). Имеем $|f - f_0| \leqslant 2M$. Следовательно, на основании (74),

$$\left| \int (f - f_0) \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 \right| \leqslant 2M \int \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 < 2MA \frac{\delta}{R^2}.$$

Так как δ и R суть две произвольно задаваемые, не зависящие друг от друга величины, то, выбрав указанным выше способом R, положим затем $\delta = aR^3$, где a есть некоторая положительная постоянная. Получим

$$\left| \int (f - f_0) \frac{\partial G_l}{\partial n} ds_1 \right| < 2MAaR.$$

При помощи этого последнего неравенства и (77) выводим из (76)

$$|U_0 - f_0| < \epsilon + 2MAa^{2/3}\delta^{1/3} = \eta,$$

где η есть число, стремящееся к нулю одновременно с δ. Отсюда следует, что функция U, определяемая формулой (72_1), стремится к f_0, тогда точка P_0 приближается к точке p_0 по нормали к (S) в этой точке. Это справедливо для любой точки p_0 поверхности (S), и число η не зависит от положения этой точки на рассматриваемой поверхности.

Следовательно, *функция U стремится равномерно к f во всех точках (S); U есть гармоническая внутри (S) функция, обращающаяся в заданную непрерывную функцию f на поверхности (S).*

Точно так же докажем, что *функция U, определяемая равенством* (70), *есть гармоническая вне (S) и обращается в f на самой поверхности.*

Мы предполагали, что точка P_0 приближается к p_0 по нормали к (S) в точке p_0. Покажем, что *в любой точке p_0 поверхности (S) функция U принимает соответствующее значение f_0, по какому бы пути ни приближалась некоторая точка P с внутренней стороны поверхности (S) к точке p_0.*

Пусть p есть какая-либо точка на (S), достаточно близкая к p_0, а P есть точка, лежащая внутри (S) на нормали к (S) в точке p на расстоянии δ от p. По предыдущему $|U - f| < \eta$, где U и f суть значения этих функций соответственно в точках P и p. Так как f непрерывна на поверхности (S), то при достаточной близости p к p_0 будем иметь $|f - f_0| < \eta$. Следовательно, $|U - f_0| < 2\eta$, откуда и вытекает высказанное выше утверждение.

Таким образом, приходим к теореме.

Теорема IV. *Для всякой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена, и, в частности, для всякой конвексной поверхности функция*

$$U = \int f \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

дает решение внутренней или внешней задачи Дирихле, если под символом $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ подразумевать соответственно внутреннюю или внешнюю нормальную производную от функции Грина, а под n – внутреннюю или внешнюю нормаль к поверхности (S), какова бы ни была непрерывная функция f, в *которую должна обращаться на этой поверхности искомая гармоническая функция U.*

23. Применим полученные выше результаты еще к доказательству существования двух функций, аналогичных функции Грина, которые встречают полезные приложения при решении различных вопросов математической физики. Одна из этих функций была введена мною в статье "О дифференциальных уравнениях математической физики" *), другая – Пуанкаре в его уже цитированном мемуаре "Sur les équations de la Physique mathématique".

Обозначим через J функцию, определяемую следующими условиями:

1°. *Функция J зависит от двух систем координат x, y, z и ξ, η, ζ, непрерывна по x, y, z вместе с ее частными производными двух первых порядков внутри поверхности (S), за исключением точки $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$, где J обращается в бесконечность таким образом, что разность $J - \dfrac{1}{4\pi r}$ ограничена.*

2°. *Функция J удовлетворяет уравнению $\Delta J = \dfrac{1}{D}$ внутри (S) **), где D есть объем области (D), ограниченной поверхностью (S).*

3°. *На поверхности (S) функция J удовлетворяет условию $\dfrac{\partial J_i}{\partial n} = 0$.*

4°. И, наконец, следующему:

$$\int J d\tau = 0 ,$$

где через $d\tau$ обозначен элемент объема области (D) при интегрировании по переменным x, y, z.

Обозначим элементарный объем той же области при интегрировании по переменным ξ, η, ζ через $d\tau_1$ и положим

$$J = J_1 - \frac{1}{4\pi D}\int\frac{d\tau_1}{r} = J_1 - \frac{W}{D} . \tag{78}$$

Задача сводится к определению функции J_1, удовлетворяющей условиям

$$\Delta J_1 = 0 \quad \text{внутри } (S) ,$$

$$\frac{\partial J_{1i}}{\partial n} = \frac{1}{D}\,\frac{\partial W_i}{\partial n} \quad \text{на поверхности } (S). \tag{79}$$

Положив, наконец,

$$J_1 = J_2 + \frac{1}{4\pi r} , \tag{80}$$

сведем задачу к определению гармонической внутри (S) функции J_2

---

*) Математический сборник, Москва, т. XIX , 1896. Различные приложения этой и некоторых других подобных функций были указаны мною в докладах на съезде естествоиспытателей и врачей в Киеве в 1898 г.

**) Конечно, за исключением указанной точки $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$. (*Прим. ред.*)

при условии

$$\frac{\partial J_{2i}}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)_i}{\partial n} + \frac{1}{D}\frac{\partial W_i}{\partial n} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} + \frac{1}{D}\frac{\partial W_i}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S)\,.$$

Здесь φ обозначает угол, составляемый направлением, идущим от точки ξ,η,ζ, лежащей внутри (S), к точке x, y, z поверхности (S), с внешней нормалью n к (S) в этой последней точке.

Так как по теореме Пуассона $\Delta W = -1$, то $\int \Delta W d\tau = \int \frac{\partial W_i}{\partial n} ds = -D$.

При помощи этого равенства и теоремы Гаусса получаем

$$\int f ds = 0\,. \tag{81}$$

Задача сведена к задаче Неймана, которая возможна в силу (81).

Пользуясь приемом, указанным в теореме VI гл. II, определим функцию J_2 в виде потенциала простого слоя, причем функция $J_2 + C$, где C есть какая угодно функция переменных ξ,η,ζ, будет также решением задачи.

Функция J представится на основании (78) и (80) в виде $J = J_2 - \frac{W}{D} + \frac{1}{4\pi r} + C$. Определив C при помощи уравнения

$$C = \frac{1}{D^2}\int W d\tau - \frac{1}{D}\int J_2\, d\tau - \frac{W(\xi,\eta,\zeta)}{D}\,,$$

получим искомую функцию J, удовлетворяющую всем поставленным условиям 1°, 2°, 3°, и 4°.

Пользуясь приемом Римана, примененным им к доказательству симметричности функции Грина, докажем, что *функция J также симметрична относительно переменных x, y, z и ξ,η,ζ* *).

Легко видеть, что решение задачи об установившемся тепловом состоянии однородного твердого тела, когда лучеиспускательная способность поверхности, его ограничивающей, равна нулю, представляется (ср. уравнения (28_1) п. 6) при помощи функции J в следующем простом виде:

$$v_0 = \int J\, \varphi_1\, d\tau_1 + C\,, \tag{81_1}$$

где C – произвольная постоянная, а φ_1 есть значение φ при замене в нем переменных x, y, z на ξ,η,ζ **).

24. Переходим к доказательству существования второй из упомянутых в п. 23 функций, определяемой следующими условиями:

1°. *Функция H зависит от двух систем координат x, y, z и ξ,η,ζ и остается непрерывной во всех точках внутри данной поверхности (S) вместе*

---

*) Повторять это хорошо известное доказательство считаю излишним.

**) Предполагается, что функция φ удовлетворяет условию Гельдера и условию (30) п. 7. (*Прим. ред.*)

со своими частными производными по x, y, и z двух первых порядков, за исключением точки $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, где H обращается в бесконечность так, что разность $H - \dfrac{1}{4\pi r}$ ограничена.

2°. *Функция H удовлетворяет уравнениям*

$$\Delta H = 0 \quad \textit{внутри} \quad (S), \tag{82}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial n} + hH_i = 0 \qquad \textit{на поверхности } (S), \tag{82_1}$$

где h есть положительная постоянная.

Функция H представляет частный случай обобщенной функции G Грина, которой пользовался Пуанкаре в своем упомянутом выше мемуаре. Эта последняя определяется теми же условиями, что и функция H, с той разницей, что уравнение (82) заменяется следующим:

$$\Delta G + \xi G = 0 \quad \text{внутри} (S), \tag{83}$$

где ξ есть некоторый параметр *). Определение этой последней сведется, очевидно, к решению поставленной нами задачи, если искать функцию G в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням параметра ξ. В частности, при $\xi = 0$ функция Пуанкаре G обращается в рассматриваемую нами функцию H.

Так как исследования Пуанкаре недостаточны для строгого решения задачи о существовании рассматриваемых функций, то я изложу вкратце общий ход решения этой задачи вытекающий из предыдущих изысканий.

Положим $H = H_1 + \dfrac{C}{h} + \dfrac{1}{4\pi r}$. Задача сводится к определению непрерывной внутри (S) функции H_1 при помощи уравнений

$$\Delta H_1 = 0 \quad \text{внутри} (S), \tag{84}$$

$$\frac{\partial H_{1i}}{\partial n} + hH_{1i} + \frac{h}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} + C = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Будем искать функцию H_1 в виде ряда

$$H_1 = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \ldots + h^k v_k + \ldots$$

Для определения v_0 получаем следующие уравнения:

$$\Delta v_0 = 0 \text{ внутри } (S);$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} - C = f \text{ на поверхности } (S).$$

Это есть задача Неймана, для возможности которой необходимо положить $CS = 1$, где S есть площадь поверхности (S), ибо при этом условии $\int f ds = 0$.

---

*) См., H. Poincaré, loc. cit., p. 103.

Определив по приему теоремы VI гл. II функцию v_0', положим $v_0 = v_0' + C_0$ и определим постоянную C_0 при помощи уравнения

$$\int v_{0i}\, ds + \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r} = \int v'_{0i}\, ds + \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r} + C_0 S = 0\,. \tag{85}$$

Получим определенную функцию v_0, подчиненную условию (85).

Для определения v_1 получаем затем уравнения

$$\Delta v_1 = 0 \quad \text{внутри } (S),$$

$$\frac{\partial v_{1i}}{\partial n} + v_{0i} + \frac{1}{4\pi r} = 0 \quad \text{на поверхности } (S)\,.$$

Опять имеем задачу Неймана, которая возможна в силу равенства (85). Для определения остальных функций v_k ($k = 2, 3, \ldots$) получаем те же самые уравнения (29), что и в п. 6.

Повторяя дословно рассуждения этого последнего пункта и следующих за ним до п. 17, докажем существование функции H_1, удовлетворяющей уравнениям (84), а следовательно, и искомой функции H, определяемой условиями 1° и 2°.

25. Найденная только что указанным способом *функция* H, так же как и функция Грина G и функция J (п. 23), *симметрична относительно переменных* x, y, z и ξ, η, ζ. Доказательство то же, что и для функции Грина.

При помощи функции H функция v, определяемая уравнениями (26) и (27), представляется в следующем простом виде:

$$v = \int H \varphi_1\, d\tau_1 \quad \text{внутри } (S)\,, \tag{86}$$

где употреблены те же обозначения, что в конце п. 23.

Доказательство этой формулы настолько просто, что на нем нет надобности останавливаться.

Различные приложения функций G, J и H указаны мною сначала в кратких заметках в "Comptes Rendus" в 1898 и 1899 гг., а затем подробно развиты в нескольких мемуарах, напечатанных в "Сообщениях Харьковского Матем. Общества", в "Annales de Toulouse" в "Annales de l'École Normale" *) и в сочинении "Общие методы решения основных задач математической физики" (Харьков, 1901). Обобщение всех этих функций в связи с теорией интегральных уравнений от трех переменных и вытекающей отсюда общей теорией фундаментальных функций предложено мною

*) W. Stekloff. Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur. – Comptes Rendus, 4 avril 1898.

W. Stekloff. Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques. – Comptes Rendus, 30 janvier 1899.

W. Stekloff. Mémoire sur les fonctions harmoniques de M.H. Poincare. – Annales de Toulouse, 2 sér., T. II, 1900.

W. Stekloff. Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique. – Annales de l'École Normale, 1902.

В. Стеклов. О разложении даниой функции в ряд по гармоническим функциям. – Сообщ. Харьк. Матем. Общества, Т. VI, 1897.

в мемуаре "Théorie générale des fonctions fondamentales", опубликованном в 1905 г. в "Annales de la Faculté des Sciences de Touluse".

Из этой общей теории выводится, как частный случай, доказательство существования особого рода фундаментальных функций, при помощи которых решаются основные задачи аналитической теории тепла и теории звука (охлаждение однородного твердого тела и колебание газа внутри замкнутого сосуда), тесно связанные с задачей чистого анализа о разложении произвольно заданных функций в ряды по фундаментальным функциям. В этих последних задачах математической физики приходится иметь дело именно с функциями J и H и формулами (81_1) и (86), установленными в предыдущих пунктах, которыми мы воспользуемся в следующих частях настоящего сочинения.

26. Применим, наконец, полученные выше результаты к выводу некоторых неравенств, устанавливающих высшие или низшие пределы отношения некоторых объемных и поверхностных интегралов, которые играют важную роль при изучении вопросов, упомянутых в предыдущем пункте, и которыми нам придется воспользоваться впоследствии.

Обозначим через W функцию, вообще говоря, не гормоническую, но обладающую всеми остальными основными свойствами потенциала простого слоя, и положим

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{W}{r}\, ds. \tag{87}$$

Обозначим через dT элемент объема, когда интеграл от какой-либо функции трех переменных x, y, z распространяется на все пространство, через $d\tau'$ – элемент объема области (D'), лежащей вне поверхности (S), черз $d\tau$, как и раньше, – элемент объема области (D). При помощи формул преобразования Грина (гл. I) и известных свойств потенциала простого слоя получаем*)

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 dT = \int V \left(\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n}\right) ds = \int VW\, ds \geqslant 0. \tag{88}$$

Применим к интегралу (87) неравенство Буняковского (Шварца), доказанное нами в п. 3 гл. II части I сочинения для случая одной переменной, но справедливое для какого угодно числа переменных и для какой угодно области **).

*) Напомню, что мы всегда рассматриваем замкнутые поверхности, удовлетворяющие условиям Ляпунова (гл. I, п. 17).

**) Для случая, например, трех переменных это неравенство доказывается проще всего следующим образом.

Пусть φ и ψ – две какие угодно интегрируемые в данной области (D) функции координат x, y, z. Обозначим через $d\tau$ и $d\tau_1$ элементы области (D) при интегрировании по переменным x, y, z и ξ, η, ζ. Очевидно,

$$\int (\varphi^2 \psi_1^2 - 2\varphi\psi\varphi_1\psi_1 + \varphi_1^2\psi^2)\, d\tau\, d\tau_1 = \int (\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1)^2\, d\tau\, d\tau_1 \geqslant 0.$$

Так как левая часть этой формулы равна

$$2\left\{\int \varphi^2\, d\tau \int \psi^2\, d\tau - \left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2\right\}, \text{ то } \left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2 \leqslant \int \varphi^2\, d\tau \int \psi^2 d\tau.$$

Знак равенства может соответствовать, очевидно, лишь случаю $\varphi = \text{const}\, \psi$,

Получим

$$V^2 \leqslant \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{ds}{r} \int \frac{W^2}{r}\, ds \leqslant \frac{L}{(4\pi)^2} \int \frac{W^2}{r}\, ds.$$

Отсюда

$$\int V^2\, ds \leqslant \frac{L}{(4\pi)^2} \int W^2 \left(\int \frac{ds}{r}\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{L}{4\pi}\right)^2 \int W^2\, ds = l_0{}^2 \int W^2\, ds.$$

С другой стороны,

$$\int VW ds \leqslant \sqrt{\int V^2\, ds}\ \sqrt{\int W^2\, ds}$$

и, следовательно, в силу предыдущего неравенства

$$\int VW ds \leqslant l_0 \int W^2\, ds.$$

Это последнее неравенство и (88) дают

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dT \leqslant l_0 \int W^2\, ds. \tag{89}$$

Применим теперь формулы преобразования Грина к функциям V и W. Получим

$$\int \Sigma \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x}\, dT = \int W \left(\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n}\right) ds = \int W^2\, ds.$$

Отсюда при помощи неравенства, аналогичного неравенству Буняковского, выводим

$$\left(\int W^2\, ds\right)^2 \leqslant \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dT \int \Sigma \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dT.$$

Это неравенство и (89) приводят к следующему:

$$\int W^2\, ds \leqslant l_0 \int \Sigma \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dT.$$

Получаем следующую лемму.

Лемма I. *Для всякой функции W, непрерывной во всем пространстве, имеющей производные первого порядка, непрерывные внутри и вне данной поверхности (S), правильные нормальные производные на самой поверхности и обращающейся в бесконечности в нуль по тому же закону, как и потенциал простого слоя, имеет место неравенство вида*

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dT \Big/ \int W^2 ds \geqslant \frac{1}{l_0},$$

где $l_0 = L/(4\pi)$, а L есть максимум интеграла $\int \frac{ds}{r}$ на поверхности (S).

Эта лемма справедлива для всякой поверхности Ляпунова.

27. Обозначим через φ функцию координат, имеющую непрерывные частные производные первого порядка внутри поверхности (S) и подчиненную условию

$$\int \varphi \, d\tau = 0. \tag{90}$$

Найдем функцию ψ, удовлетворяющую уравнениям

$$\Delta \psi + \varphi = 0 \quad \text{внутри } (S),$$
$$\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \tag{91}$$

Как показано в п. 5, мы можем всегда найти такую функцию ψ для любой поверхности Ляпунова, к которой приложим принцип Робена, и в частности, для любой конвексной поверхности.

По теореме Грина имеем

$$\int \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = -\int \varphi \Delta \psi \, d\tau + \int \varphi \frac{\partial \psi_i}{\partial n} ds, \tag{92}$$

откуда, на основании (91),

$$\int \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = \int \varphi^2 \, d\tau. \tag{92$_1$}$$

Подобным же путем получаем

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int \psi \Delta \psi \, d\tau = \int \varphi \psi \, d\tau \geqslant 0. \tag{93}$$

Применим к интегралу левой части равенства (92) обобщенное неравенство Буняковского (Шварца). Получим

$$\left(\int \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau\right)^2 \leqslant \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \int \Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Отсюда на основании (92$_1$) и (93) выводим

$$(\int \varphi^2 d\tau)^2 \leqslant \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \int \varphi \psi \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \left(\int \varphi^2 \, d\tau \int \psi^2 \, d\tau\right)^{1/2}. \tag{94}$$

28. Пусть x, y, z есть какая-либо точка, лежащая внутри (S). Опишем около этой точки, как центра, сферу (σ) радиуса R и применим формулы (31) и (32) гл. I к области (D_1), ограниченной поверхностью (S) и сферой (σ), целиком лежащей внутри (S), полагая $U = w$, $V = 1/r$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, где $w = \dfrac{1}{4\pi} \int \dfrac{\varphi}{r} d\tau$*).

*) Интегрирование совершается по переменным ξ, η, ζ; функция φ удовлетворяет условиям предыдущего пункта.

Заметив, что первые частные производные w по x, y, z непрерывны во всем пространстве, что

$$\Delta w = -\varphi \quad \text{внутри } (S),$$

а в области (D_1)

$$\Delta (1/r) = 0,$$

получаем

$$\int \Sigma \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (1/r)}{\partial x} d\tau' = \int w \frac{\partial (1/r)}{\partial n} ds + \int w \frac{\partial (1/r)}{\partial n} d\sigma, \tag{95}$$

$$\int \Sigma \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (1/r)}{\partial x} d\tau' = \int \frac{\varphi}{r} d\tau' + \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} ds + \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma,$$

где через $d\tau'$ обозначен элемент объема области (D_1), через $d\sigma$ – элемент поверхности сферы (σ).

Так как направление внешней нормали n противоположно направлению R радиуса сферы, то

$$\int w \frac{\partial (1/r)}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{R^2} \int w \, d\sigma.$$

Далее,

$$\int w \frac{\partial (1/r)}{\partial n} ds = - \int w \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{1}{R} \int \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma.$$

Учитывая эти соотношения, из (95) выводим

$$\frac{1}{R^2} \int w \, d\sigma - \int w \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \int \frac{\varphi}{r} d\tau' + \frac{1}{R} \int \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma + \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} ds \tag{96}$$

– равенство, справедливое при всяком достаточно малом R.

Предположим, что R стремится к нулю, и перейдем к пределу. Получаем

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{R^2} \int w \, d\sigma = 4\pi w, \quad \lim_{R \to 0} \frac{1}{R} \int \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma = 0,$$

$$\lim_{R \to 0} \int \frac{\varphi}{r} d\tau' = \int \frac{\varphi}{r} d\tau = 4\pi w,$$

и равенство (96) обращается в следующее:

$$\int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} ds = - \int w \frac{\cos\varphi}{r^2} ds,$$

имеющее место для любой точки x, y, z, лежащей внутри (S').

Предположим, что точка x, y, z приближается к какой-либо точке поверхности (S) и перейдем к пределу. Учитывая известные свойства потенциалов простого и двойного слоя, получаем для точек поверхности (S):

$$\int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} ds = -\int w \frac{\cos\varphi}{r^2} ds - 2\pi w.$$

Но

$$4\pi |w| \leqslant \left(\int \varphi^2 d\tau \int \frac{d\tau}{r^2}\right)^{1/2} \leqslant 2\sqrt{\pi l}\, \sqrt{\int \varphi^2 d\tau}$$

и, для конвексной поверхности,

$$\int w \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \leqslant \int |w| \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \leqslant \sqrt{\pi l}\, \sqrt{\int \varphi^2 d\tau}.$$

Следовательно,

$$\left| \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} ds \right| \leqslant 2\sqrt{\pi l}\, \sqrt{\int \varphi^2 d\tau}, \text{ на поверхности } (S). \tag{97}$$

29. Как указано выше (см. п. 5 или 7), функция ψ представляется в виде

$$\psi = u + w, \tag{98}$$

где u есть функция, определяемая уравнениями

$$\Delta u = 0 \quad \text{внутри } (S), \tag{98$_1$}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = -\frac{\partial w_i}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{на поверхности } (S).$$

Применяя прием теоремы VI гл. II, получим функцию u в виде потенциала простого слоя, который можно изобразить рядом

$$u = -V_1 - V_2 - V_3 - \ldots - V_k - \ldots, \tag{99}$$

где V_k суть функции, определяемые равенствами (19) гл. II, в первом из которых нужно положить $\rho_0 = -\dfrac{\partial w}{\partial n}$, причем будем иметь

$$V_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r} ds. \tag{100}$$

Как доказано в гл. II, функции V_k связаны на поверхности (S) соотношениями (равенства (22))*)

$$V_k = \frac{1}{2\pi} \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

причем в силу основного неравенства Неймана

$$M_k - m_k \leqslant (M_{k-1} - m_{k-1})\tau, \tau < 1 \quad (k = 2, 3, \ldots), \tag{101}$$

где, напоминаем, M_k и m_k означают максимум и минимум функции V_k на поверхности (S).

---

*) Черту над буквой V всюду опускаем, ибо V_k непрерывны во всем пространстве.

Неравенства (101) дают

$$M_k - m_k \leqslant (M_1 - m_1)\,\tau^{k-1}. \tag{102}$$

Далее, в п. 14 гл. III доказано равенство

$$\int \rho V_k\, ds = \int \rho V_{k-1}\, ds.$$

Отсюда, на основании (100),

$$\int \rho V_k\, ds = \int \rho V_1\, ds = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial w}{\partial n} \left(\int \frac{\rho}{r}\, ds \right) ds = 0, \tag{103}$$

ибо $\int \frac{\rho}{r}\, ds = \text{const}$, а в силу условия (90), $\int \frac{\partial w}{\partial n}\, ds = 0$.

Равенство (103) показывает, что функции V_k ($k = 2, 3, \ldots$) необходимо меняют знак на поверхности (S), вследствие чего можем писать

$$| V_k | \leqslant M_k - m_k \tag{104}$$

– неравенство, которое на основании теоремы I гл. I имеет место для любой точки области (D).

С другой стороны, на основании (100),

$$M_1 - m_1 \leqslant 2 \max | V_1 | = \frac{1}{\pi} \max \left| \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds \right|. \tag{104_1}$$

Отсюда, приняв во внимание (102) и (104), получаем

$$| V_k | \leqslant \frac{\tau^{k-1}}{\pi} \max \left| \int \frac{\partial w}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds \right|.$$

Это последнее неравенство и (97) приводят к следующему:

$$| V_k | \leqslant \tau^{k-1}\, 2 \sqrt{\frac{l}{\pi}} \sqrt{\int \varphi^2\, d\tau} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{105}$$

30. Возвращаемся к ряду (99). Имеем

$$| u | \leqslant | V_1 | + \sum_{k=2}^{\infty} | V_k |.$$

Заметив, что неравенство (105) можно считать справедливым при всяком k, начиная с $k = 1$, получаем

$$| u | \leqslant 2 \sqrt{\frac{l}{\pi}} \sqrt{\int \varphi^2\, d\tau}\,(1 + \tau + \tau^2 + \ldots + \tau^k + \ldots) =$$

$$= \frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}(1 - \tau)} \sqrt{\int \varphi^2\, d\tau} = A \sqrt{\int \varphi^2\, d\tau}, \tag{106}$$

где A есть определенное число, зависящее исключительно от вида поверхности (S).

Из равенства (98) выводим $\psi^2 \leqslant 2(u^2 + w^2)$, откуда при помощи (106) и $w^2 \leqslant \frac{l}{4\pi}\int \varphi^2 d\tau$ (см. п. 5 гл. I)

получаем

$$\psi^2 \leqslant 2\left(A^2 + \frac{l}{4\pi}\right)\int \varphi^2 d\tau = B\int \varphi^2 d\tau$$

и

$$\int \psi^2 d\tau \leqslant BD\int \varphi^2 d\tau, \tag{107}$$

где D означает объем области (D), а $B = \frac{l}{2\pi}\left[1 + \frac{4^2}{(1-\tau)^2}\right] = \alpha^2 l$, где α есть определенное число.

Неравенство (107) и (94) (п. 27) дают

$$\int \varphi^2 d\tau \leqslant \sqrt{BD}\int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau = \alpha\sqrt{Dl}\int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Так как l означает радиус сферы, объем которой равен объему данного тела (п. 5 гл. I), то $D = 4\pi l^3/3$ и, следовательно,

$$\int \varphi^2 d\tau \leqslant \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} l^2 \int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \leqslant \beta l^2 \int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau. \tag{108}$$

31. *Это неравенство* представляет собой известную лемму Пуанкаре, доказанную им в упомянутом выше мемуаре "Sur les équations de la Physique mathématique" (Rendiconti di Palermo, 1894)*), и *имеет место для всякой конвексной поверхности и для всякой функции φ, подчиненной условию $\int \varphi\, d\tau = 0$.*

Вопрос об отыскании низшего предела отношения

$$\int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \Big/ \int \varphi^2 d\tau$$

Пуанкаре рассматривал как задачу чистого анализа (интегрального исчисления), независимо от его связи с задачами математической физики, и нашел этот предел равным $16/(9l^2)$.

Наш анализ приводит к неравенству

$$\int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \Big/ \int \varphi^2 d\tau \geqslant m/l^2, \tag{109}$$

где $m = \frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2\alpha\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + 4^2/(1-\tau)^2}}.$

---

*) См. также American Journal, т. XII.

Какова бы ни была конвексная поверхность (S), всегда $\tau < 1$, $1 - \tau < 1$, $1 + \frac{4^2}{(1-\tau)^2} > 1 + 4^2 = 17$ и следовательно, для любой конвексной поверхности $0 < m < \sqrt{3/34} < 0{,}298$. Число, соответствующее m в формуле Пуанкаре, равно $16/9$.

Различие происходит главным образом оттого, что в последней l обозначает наибольшее из расстояний между двумя точками поверхности (S), тогда как в неравенстве (109) l есть радиус сферы, объем которой равен объему данного тела (см. гл. 1, п. 5). Для дальнейших приложений нам важно лишь знать, что в неравенстве вида (109) m есть определенное число, не равное нулю и не зависящее от функции φ, причем можем подразумевать под l и наибольшее из расстояний между двумя точками поверхности (S), как это делает Пуанкаре.

32. Употребленный выше прием доказательства неравенства (109) основан на предположении, что поверхность (S) конвексна и не имеет углов или ребер, так что интересующее нас неравенство нельзя считать доказанным, например, для случая, когда (S) есть поверхность куба. Но по самому смыслу неравенства (109), левая часть которого содержит только объемные интегралы, естественно предположить, что оно справедливо всегда, коль скоро входящие в него интегралы имеют смысл.

Рассмотрим сначала следующий случай. Пусть φ_1 и φ_2 суть какие угодно заданные функции координат, непрерывные вместе со своими производными первого порядка во всей области (D), ограниченной поверхностью (S) куба, диагональ которого равна l. *)

Покажем, что неравенство (109) справедливо и для куба, если положить

$$\varphi = \alpha\varphi_1 + \varphi_2 \tag{110}$$

и выбрать постоянную α при помощи условия

$$\int \varphi\, d\tau = \alpha \int \varphi_1 d\tau + \int \varphi_2\, d\tau = 0, \tag{111}$$

где $d\tau$ есть элемент объема области (D) (куба).

Построим конвексную поверхность Ляпунова, которую обозначим через (S') целиком лежащую внутри (S). Поверхность (S') всегда можно сделать сколь угодно близкой к поверхности куба, так что объем области (D_0), заключенной между поверхностями (S) и (S'), будет сколь угодно малым. Обозначим через $d\tau'$ элемент объема, ограниченного поверхностью (S'), через $d\tau_0{}'$ – элемент объема области (D_0). Выберем постоянную α в функции (110) при помощи условия $\int \varphi d\tau' = \int (\alpha\varphi_1 + \varphi_2) d\tau' = 0$, т.е. положим

$$\alpha = -\int \varphi_2\, d\tau' \,/ \int \varphi_1\, d\tau'. \tag{112}$$

Неравенство (109), приложимое к поверхности (S'), дает

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau' \,/ \int \varphi^2\, d\tau' \geqslant m / l_1{}^2, \tag{113}$$

где l_1 есть наибольшее из расстояний между двумя точками поверхности (S').

---

*) Предполагается, что $\int \varphi_1\, d\tau \neq 0$. (*Прим. ред.*)

Рассмотрим отношение

$$I = \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \,/\, \int \varphi^2\, d\tau, \tag{113$_1$}$$

где интегралы распространяются на всю область (D) куба. Очевидно (неравенство (113)),

$$I = \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \,/\, \int \varphi^2\, d\tau \geqslant \frac{m}{l_1^2} \quad \int \varphi^2\, d\tau' \,/\, \int \varphi^2\, d\tau =$$

$$= \frac{m}{l^2} \int \varphi^2\, d\tau' \,/\, \int \varphi^2\, d\tau, \tag{114}$$

ибо $l_1 < l$. Учитывая (110) и (112), можем писать

$$\begin{aligned} &(\int \varphi_1\, d\tau')^2 \int \varphi^2\, d\tau = \int \varphi_2^2 \;\; d\tau \;(\int \varphi_1\, d\tau')^2 - \\ &- 2\int \varphi_1 \varphi_2\, d\tau \int \varphi_1\, d\tau' \int \varphi_2\, d\tau' + \int \varphi_1^2 \;\; d\tau (\int \varphi_2\, d\tau')^2 \;, \\ &(\int \varphi_1\, d\tau')^2 \int \varphi^2\, d\tau' = \int \varphi_2^2\, d\tau' \,(\int \varphi_1\, d\tau')^2 - \\ &- 2\int \varphi_1 \varphi_2\, d\tau' \int \varphi_1\, d\tau' \int \varphi_2\, d\tau' + \int \varphi_1^2 d\tau' \,(\int \varphi_2\, d\tau')^2, \end{aligned} \tag{114$_1$}$$

откуда

$$\begin{aligned} &(\int \varphi_1\, d\tau')^2 \;[\int \varphi^2\, d\tau - \int \varphi^2\, d\tau' \,] = \int \varphi_2^2\, d\tau_0 \,(\int \varphi_1\, d\tau')^2 - \\ &- 2 \int \varphi_1 \varphi_2\, d\tau_0 \int \varphi_1\, d\tau' \int \varphi_2\, d\tau' + \int \varphi_1^2 d\tau_0 \,(\int \varphi_2\, d\tau')^2. \end{aligned} \tag{115}$$

Обозначив правую часть равенства (115), которая, очевидно, неотрицательна, через λ^2, получаем $\int \varphi^2\, d\tau - \int \varphi^2\, d\tau' = \lambda^2 \,/\, (\int \varphi_1\, d\tau')^2$. Из выражения для λ^2 следует, что выбрав поверхность (S') достаточно близкой к поверхности (S) куба, будем иметь

$$\lambda^2 < \delta^2, \tag{116}$$

где δ есть произвольно заданное положительное число, стремящееся к нулю по мере приближения поверхности (S') к (S).

Таким образом, из (114) выводим

$$I \geqslant \frac{m}{l^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\int \varphi_1\, d\tau')^2 \;\; \int \varphi^2\, d\tau}\right). \tag{117}$$

Положим

$$V^2 = \int \varphi_2^2 \;\; d\tau (\int \varphi_1\, d\tau)^2 - 2\int \varphi_1 \varphi_2\, d\tau \int \varphi_1\, d\tau \int \varphi_2\, d\tau +$$
$$+ \int \varphi_1^2 d\tau\, (\int \varphi_2\, d\tau)^2,$$

$$\lambda' = \int \varphi_1\, d\tau_0 \;[\int \varphi_1 \varphi_2\;\, d\tau \;\; \int \varphi_2\, d\tau - \int \varphi_1\, d\tau \int \varphi_2^2\, d\tau \,] +$$
$$+ \int \varphi_2\, d\tau_0 \;[\int \varphi_1 \varphi_2\, d\tau \int \varphi_1\, d\tau - \int \varphi_2\, d\tau \int \varphi_1^2\, d\tau],$$

$$\lambda_1 = V_0^2 + 2\lambda',$$

где

$$V_0^2 = \int \varphi_2^2 \;\; d\tau (\int \varphi_1\, d\tau_0)^2 - 2\int \varphi_1 \varphi_2\, d\tau \int \varphi_1\, d\tau_0 \int \varphi_2\, d\tau_0 +$$
$$+ \int \varphi_1^2\, d\tau\, (\int \varphi_2\, d\tau_0)^2.$$

Очевидно, сделав поверхность (S') достаточно близкой к (S), будем иметь

$$|\lambda_1| < \delta^2. \tag{118}$$

Пользуясь указанными обозначениями, можем первое из равенств (114_1) представить в виде

$$\left(\int \varphi_1\, d\tau'\right)^2 \int \varphi^2\, d\tau = V^2 + \lambda_1,$$

причем будем иметь (неравенство (117)) $I > \dfrac{m}{l^2}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{V^2 + \lambda_1}\right)$ для всякой поверхности (S'). Сделав (S') достаточно близкой к (S), будем иметь, на основании (116) и (118),

$$I > \frac{m}{l^2}\,(1 - \epsilon), \tag{119}$$

где ϵ – наперед заданное положительное число, стремящееся к нулю, когда поверхность (S') приближается к (S).

Положим теперь

$$W^2 = \left(\int \varphi_1\, d\tau\right)^2 \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 d\tau - 2\int \varphi_1\, d\tau \int \varphi_2\, d\tau \int \Sigma \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\, d\tau +$$

$$+ \left(\int \varphi_2\, d\tau\right)^2 \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Нетрудно убедиться, что выражение I (113_1) можно представить в виде

$$I = \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \Big/ \int \varphi^2\, d\tau = (W^2 + \lambda_2) / (V^2 + \lambda_1),$$

где λ_2, как и λ_1, есть величина, которую можно сделать сколь угодно близкой к нулю, если поверхность (S') сделать достаточно близкой к (S), отношение же W^2 / V^2 представит значение отношения

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \Big/ \int \varphi^2\, d\tau,$$

если функцию φ подчинить условию

$$\int \varphi\, d\tau = 0. \tag{120}$$

Таким образом, сделав поверхность (S') достаточно близкой к (S), можем писать

$$\frac{W^2 + \lambda_2}{V^2 + \lambda_1} = \frac{W^2}{V^2}\,(1 + \epsilon'),$$

где ϵ' есть число, стремящееся к нулю одновременно с числом ϵ неравенства (119). В силу всего сказанного неравенство (119) приводится к виду

$$\frac{W^2}{V^2}\,(1 + \epsilon') > \frac{m}{l^2}\,(1 - \epsilon)$$

и имеет место при всяком положении поверхности (S') внутри (S) и достаточно близком к (S). Отсюда заключаем, что, при условии (120),

$$\frac{W^2}{V^2} = \int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 d\tau \,/\, \int \varphi^2 \, d\tau \geqslant \frac{m}{l^2} \quad , \tag{121}$$

коль скоро интегралы, входящие в выражения W^2 и V^2, имеют определенный смысл.

Легко видеть, что предыдущие соображения справедливы не только для куба, но и для всякой поверхности (S) с каким угодно числом ребер или углов, лишь бы она была конвексна.

33. Пусть теперь (S) есть какая угодно конвексная поверхность.

Предположим, что область (D)., ограниченная этой поверхностью, лежит целиком внутри куба, сторона которого равна a. Разобьем этот куб плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на q^3 малых кубов, сторона каждого из которых будет равна a / q. Любая область, общая каждому из этих малых кубов и телу (D), будет конвексна, и наибольшее расстояние между двумя ее точками не превзойдет числа $a \sqrt{3} / q$. Пусть число таких составляющих объемов, на которые разбивается объем области (D), есть $p - 1$, а функция φ представляется в виде

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_p \varphi_p, \tag{122}$$

где φ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ суть заданные функции, а α_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ – некоторые, пока неопределенные постоянные.

Обозначим через (D_1), (D_2), ..., (D_{p-1}) элементарные объемы, на которые мы разбили область (D), через A_k и B_k – интегралы вида

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 d\tau \text{ и } \int \varphi^2 d\tau,$$

распространенные на область (D_k). Имеем

$$\begin{aligned} &\int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 d\tau = A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1}, \\ &\int \varphi^2 d\tau = B_1 + B_2 + \ldots + B_{p-1}, \end{aligned} \tag{123}$$

где в левых частях подразумеваются интегралы, распространенные на всю область (D).

Обозначим через C_k интеграл вида $\int \varphi d\tau$, распространенный на область (D_k), и определим постоянные α_k при помощи уравнений

$$\begin{aligned} &C_1 = C_2 = \ldots = C_{p-1} = 0, \\ &\int \varphi^2 \, d\tau = 1. \end{aligned} \tag{124}$$

Всегда можно распорядиться составляющими объемами (D_k) так, что уравнения (124), линейные и однородные относительно α_k, дадут определенные отношения $p - 1$ этих постоянных к одной из них, после чего второе из (124) определит и эту последнюю *)

*) Для этого достаточно предположить, что система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ линейно независима. (*Прим. ред.*)

К каждой из областей (D_k) приложимо неравенство (121) предыдущего пункта, так как функция φ удовлетворяет условиям (124). Поэтому $A_k \geqslant \frac{m}{l_k^2} B_k \geqslant \frac{m}{l^2} B_k$, где l_k – наибольшее из расстояний между двумя точками поверхности, ограничивающей область (D_k), а l есть наибольшая из всех длин l_k. При помощи этих неравенств и (123) получим

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \,/\, \int \varphi^2 d\tau \geqslant \frac{m}{l^2} \geqslant \frac{m}{3a^2}\; q^2 .$$

Очевидно, $p-1 \leqslant q^3$, т.е. $q^2 \geqslant (p-1)^{2/3} = p^{2/3}(1-1/p)^{2/3} \geqslant p^{2/3} / 2^{2/3}$ при всяком $p \geqslant 2$. Следовательно, при соблюдении условий (124) будем иметь

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau / \int \varphi^2 d\tau \geqslant \frac{m}{3a^2 2^{2/3}} \quad p^{2/3} = m' p^{2/3} = L_p ,$$

где m' есть определенное число *).

34. Допустим, наконец, что поверхность (S) не конвексна.

Область (D), ограниченную этой неконвексной поверхностью, можем приблизить областью (D_1), состоящей из некоторого числа N составляющих конвексных областей.

Если по-прежнему обозначим через a сторону куба, внутри которого целиком заключается каждая из этих составляющих областей, и разобьем этот куб на q^3 составляющих кубов, а через $p-1$ обозначим по-прежнему число составляющих объемов, на которые разобьется вся область (D_1), то, рассуждая подобно предыдущему, получим, выбрав соответствующим образом постоянные α_k в выражении (122),

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \; d\tau \,/\, \int \varphi^2 d\tau \geqslant \frac{m}{3a^2}\; q^2 = L_p .$$

Так как в данном случае $p-1 \leqslant Nq^3$, то в предыдущем неравенстве под q можно подразумевать наибольшее целое число, содержащееся в $\left(\frac{p-1}{N}\right)^{1/3}$

Сопоставляя все сказанное, приходим к следующей лемме Пуанкаре.

Лемма Пуанкаре. *Пусть (D) есть область, ограниченная какой угодно замкнутой поверхностью (S), и*

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_p \varphi_p , \tag{125}$$

где φ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *суть какие угодно заданные функции координат, непрерывные со своими частными производными первого порядка во*

---

*) Последнее неравенство (переписанное в виде $\int \varphi^2 d\tau \leqslant \frac{1}{m' p^{2/3}} \int |\nabla\varphi|^2 \, d\tau$) установлено и в случае, когда система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ линейно зависима. В этой ситуации также найдется набор постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ такой, что $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 \neq 0$ и для линейной комбинации (122) справедливо обсуждаемое неравенство. Однако при этом функция φ может оказаться тождественно равной нулю и последнее условие из (124) не выполнено. (*Прим. ред.*)

всей области (D), а α_k $(k = 1, 2, \dots, p)$ — некоторые постоянные. Последними всегда можно распорядиться, определив отношения $p-1$ из них к какой-либо одной при помощи $p-1$ линейных однородных уравнений так, что будет

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \,/\, \int \varphi^2 d\tau \geqslant L_p,$$

*где число L_p имеет вид $mp^{2/3}$, а m есть определенная постоянная, не зависящая ни от p, ни от фукций φ_k *).*

35. Эта лемма приводит к ряду других аналогичных неравенств, которые играют первостепенную роль в исследованиях, имеющих цель строгого обоснования и распространения на возможно обширный класс поверхностей методов решения основных задач математической физики. Выводом главнейших из этих неравенств, которыми придется пользоваться впоследствии, мы и закончим эту главу.

Прежде всего докажем одну лемму для области (D'), внешией относительно данной поверхности (S), и для некоторого частного вида функции φ, которая установлена Зарембой в 1901 г. **).

Допустим, что функция φ, как и в предыдущем пункте, определяется равенством (125), обозначим через $d\tau'$ злемент объема области (D') и положим

$$J' = \int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau', \quad I' = \int \varphi^2 d\tau',$$

где интегрирование распространяется на все пространство, внешнее относительно поверхности (S).

---

*) Если система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ (из $C^1(\bar{D})$) линейно зависима, то функция φ может оказаться тождественно равной нулю. Напомним также, что рассматриваемая поверхность (S) удовлетворяет условиям п. 17 гл. I.

В качестве приближающей область (D) области (D_1) можно, например, взять область, содержащую (D) и являющуюся объединением конечного числа (N) достаточно малых не пересекающихся по внутренним точкам кубов (имеющих непустое пересечение с (D)). Продолжим функции из $C^1(\bar{D})$ в область (D_1) так, чтобы эта операция была линейной и имело место неравенство

$$\int_{D_1} |\nabla v|^2 d\tau_1 < C \int_{D} |\nabla v|^2 d\tau \qquad (125_1)$$

с не зависящей от функции v постоянной C. По заданным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, $p > N$ (продолженным в (D_1)), выберем указанным в пп. 32 и 33 способом постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_p$; при этом в каждом кубе, а следовательно, и в области (D_1) будет справедлива оценка

$$\int_{D_1} \varphi^2 d\tau_1 < \frac{1}{m_1 p^{2/3}} \int_{D_1} |\nabla \varphi|^2 d\tau_1 .$$

Используя неравенство (125_1), получаем требуемое неравенство с постоянной $L_p = \dfrac{m_1}{C} p^{2/3} \left(m = \dfrac{m_1}{C}\right)$. *(Прим. ред.)*

**) S. Zaremba. Sur la théorie de l' equation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin. — Bull. de l' Academie de Sciences de Cracovie, mars 1901.

В дальнейшем мы ограничимся частным предположением, что функции φ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ в выражении φ обладают всеми свойствами потенциала простого слоя по отношению к поверхности (S). При этом условии, если считать постоянные α_k какими угодно, интеграл I' может не иметь смысла, но при известном выборе этих постоянных рассматриваемый интеграл получит определенное значение. Это условие, как увидим, само собой будет соблюдено в дальнейшем анализе.

Опишем около начала координат сферу (σ) радиуса R так, чтобы поверхность (S) целиком заключалась внутри этой сферы, и обозначим элемент объема области, заключенной между поверхностями (σ) и (S), через $d\tau_0$, а элемент объема области, внешней относительно сферы (σ) – через $d\tau_0'$. Положив

$$J_1' = \int\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau_0', \quad J_2' = \int\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau_0,$$
$$I_1' = \int\varphi^2 d\tau_0', \quad I_2' = \int\varphi^2 d\tau_0, \tag{126}$$

будем иметь

$$J' = J_1' + J_2', \quad I' = I_1' + I_2'. \tag{127}$$

36. Обозначим через P_k полином Лежандра степени k от аргумента

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

где φ, ϑ, φ' и ϑ' суть сферические координаты двух точек поверхности сферы (σ') радиуса 1 с центром в начале координат, и положим

$$Y_k = \frac{2k+1}{4\pi}\int\varphi P_k d\sigma'. \tag{128}$$

Здесь $d\sigma'$ означает элемент поверхности сферы (σ'), а интегрирование по переменным φ' и ϑ' распространяется на всю поверхность (σ') *).

Как известно, Y_k есть шаровая функция порядка k от аргументов ϑ и φ, удовлетворяющая условиям

$$\int Y_k Y_m d\sigma' = 0, \quad \int Y_k P_m d\sigma' = 0, \quad m \neq k,$$
$$\int Y_k P_k d\sigma' = \frac{4\pi}{2k+1} Y_k. \tag{129}$$

Так как, в силу сделанных выше условий относительно функций φ_k, функция φ имеет непрерывные производные первого порядка во всей области (D') (вне (S)), то на поверхности сферы (σ) имеет место равномерное разложение вида **)

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k. \tag{130}$$

---

*) $V_k(\varphi, \vartheta) = \dfrac{2k+1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\varphi(R\sin\vartheta'\cos\varphi', R\sin\vartheta'\sin\varphi', R\cos\varphi') \times\right.$

$\left.\times P_k(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi'))\,d\varphi'\right]\sin\vartheta' d\vartheta'$. (*Прим. ред.*)

**) См., например,

C. J o r d a n. Cours d' Analyse. – Paris, 1913, т. II, p. 296.

E. H e i n e. – Theorie der Kugelfunctionen. – Berlin, 1878, Bd. I.

Функция $(R/\rho)^{k+1} Y_k$, где ρ есть расстояние какой-либо точки, лежащей вне сферы (σ), от ее центра, есть гармоническая вне (σ), обращается в Y_k на самой сфере и в нуль для бесконечно удаленных точек. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (R/\rho)^{k+1} Y_k, \tag{131}$$

составленный из гармонических функций, обращается на самой сфере (σ) в ряд правой части равенства (130), равномерно сходящийся, и в нуль при $\rho \to \infty$. По теореме Вито Вольтера (гл. 1) этот ряд представляет собой гармоническую функцию вне сферы (σ), принимающую на самой сфере и для бесконечно удаленных точек те же значения, что и гармоническая функция φ. Следовательно, во всех точках вне сферы (σ) функция φ (125) может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (R/\rho)^{k+1} Y_k. \tag{132}$$

37. Обозначим через Π_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) однородный многочлен от x, y, z степени k, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\Pi_k = 0$. Введя вместо прямоугольных сферические координаты ρ, ϑ и φ, получим $\Pi_k = \rho^k Q_k$, где Q_k представляет собой однородный многочлен от аргументов $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ и $\cos\vartheta$ с $2k+1$ произвольными коэффициентами, который называют *функцией Лапласа*.

Существует, следовательно, $2k+1$ линейно независимых функций Лапласа порядка k, из которых всегда можно составить $2k+1$ линейных комбинаций $X_{s,k}$ ($s = 1, 2, \ldots, 2k+1$), подчиненных условиям

$$\int X_{s,k}^2\, d\sigma' = 1, \ \int X_{s,k} X_{r,k}\, d\sigma' = 0, \ \ s \neq r. \tag{133}$$

Функции $X_{s,k}$ называются *фундаментальными шаровыми функциями*.

Всякая функция Y_k изобразится следующим образом через функции $X_{s,k}$:

$$Y_k = \sum_{s=1}^{2k+1} A_{s,k} X_{s,k},$$

где коэффициенты $A_{s,k}$ имеют вид

$$A_{s,k} = \int Y_k X_{s,k} d\sigma', \tag{134}$$

а равенство (132) представится в виде

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (R/\rho)^{k+1} \sum_{s=1}^{2k+1} A_{s,k} X_{s,k}, \tag{135}$$

причем в силу (134) и (133) будем иметь

$$A_{s,k} = \int Y_k X_{s,k} d\sigma = \int \varphi X_{s,k} d\sigma, \tag{135_1}$$

т.е. все $A_{s,k}$ суть линейные однородные функции p и постоянных α_k.

38. Полученное таким образом выражение (135) для φ показывает, что, выбрав соответствующим образом число p, всегда можно подобрать затем постоянные α_k в выражении (125) так, чтобы n первых членов ряда (135) равнялись нулю, каково бы ни было заданное число n. Для

этого стоит только подчинить постоянные $A_{s,k}$ системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&A_{1,0}=0,\\
&A_{1,1}=A_{2,1}=A_{3,1}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad (136)\\
&A_{1,n-1}=A_{2,n-1}=\ldots=A_{2n-1,n-1}=0;
\end{aligned}
$$

иначе говоря, подчинить постоянные α_k системе $1+3+5+\ldots\ldots+2n-1=$ $=n^2$ линейных однородных уравнений, причем само собой разумеется, что число p должно быть взято бо́льшим, чем n^2. Уравнения (136) определят n^2 из постоянных α_k $(k=1,2,\ldots,p)$ в виде линейных однородных функций от остальных $p-n^2$ из этих постоянных, причем φ выйдет линейной однородной функцией от $q=p-n^2$ произвольных постоянных.

Выбрав α_k указанным способом, получим

$$\varphi=\sum_{k=n}^{\infty}(R/\rho)^{k+1}\,Y_k. \tag{137}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi_e}{\partial n}=\lim_{\rho\to R}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=-\frac{1}{R}\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\,Y_k.$$

По теореме Грина

$$J_1'=\int\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau_0'=-\int\varphi\frac{\partial\varphi_e}{\partial n}d\sigma$$

и, следовательно, в силу двух предыдущих равенств и (129),

$$J_1'=\frac{1}{R}\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\int Y_k^2\,d\sigma.$$

Положив *) $A_k^2=\int Y_k^2\,d\sigma'$, находим

$$J_1'=R\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)A_k^2. \tag{138}$$

Далее, так как

$$I_1'=\int\varphi^2\,d\tau_0'=\int_R^{\infty}\rho^2 d\rho\int\varphi^2 d\sigma',$$

то, в силу (137),

$$I_1'=\sum_{k=n}^{\infty}R^{2k+2}\int_R^{\infty}\frac{d\rho}{\rho^{2k}}\int Y_k^2\,d\sigma'=R^3\sum_{k=n}^{\infty}\frac{A_k^2}{2k-1}. \tag{138$_1$}$$

Ряд правой части этого равенства сходится, а потому интеграл I_1' при сделанном выборе постоянных α_k действительно имеет определенный смысл, каковы бы ни были потенциалы простого слоя $\varphi_k(k=1,2,\ldots,p)$.

Формулы (138) и (138$_1$) сейчас же приводят к неравенству

$$J_1'/I_1'\geqslant(n+1)(2n-1)/R^2\geqslant 2n^2/R^2. \tag{139}$$

---

*) Напоминаем, что $d\sigma'$ есть элемент поверхности сферы радиуса 1.

39. Рассмотрим теперь область, ограниченную сферой (σ) и данной поверхностью (S). Как указано, после сделанного нами подчинения коэффициентов α_k уравнениям (136) функция φ оказывается линейной однородной функцией q произвольных постоянных. Применив к рассматриваемой области лемму Пуанкаре, получим

$$J_2' \,/\, I_2' \geqslant mq^{2/3}. \tag{140}$$

Числа n, p и q связаны между собой только одним соотношением $p = n^2 + q$ и в остальном совершенно произвольны. Стоит положить $n^2 \geqslant q^{2/3}$ и мы получим из (139)

$$J_1' \,/\, I_1' \geqslant 2q^{2/3} \,/\, R^2. \tag{140$_1$}$$

Из (127) при помощи (140) и (140$_1$) выводим

$$J' \,/\, I' \geqslant m'q^{2/3},$$

где m' – наименьшее из чисел m и $2/R^2$. Таким образом, получаем следующее предложение:

Пусть

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_p\varphi_p, \tag{141}$$

где φ_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) суть потенциалы простого слоя по отношению к данной поверхности (S), а α_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) – некоторые постоянные. Возьмем произвольное целое число q и другое целое число n, подчиненное условию $n \geqslant q^{1/3}$, и положим $p \geqslant n^2 + q$.

Постоянными α_k в выражении (141) всегда можно распорядиться, подчинив их системе $n^2 + q - 1$ линейных однородных уравнений, так, что будет

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau' \,\Big/ \int \varphi^2\, d\tau' \geqslant m'q^{2/3}. \tag{142}$$

40. Положим $p - n^2 - q = q + 1$. Функция φ при сделанном выше выборе коэффициентов α_k представится линейной однородной функцией от q неопределенных параметров. По лемме Пуанкаре этими последними всегда можно распорядиться так, что будем иметь неравенство

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \,\Big/ \int \varphi^2 d\tau \geqslant mq^{2/3} \tag{142$_1$}$$

одновременно с (142).

Сопоставляя это замечание с предложением предыдущего пункта, приходим к следующей лемме.

Лемма Зарембы. *Пусть*

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_p\varphi_p, \tag{141$_1$}$$

где φ_k суть потенциалы простых слоев по отношению к данной поверхности (S), а α_k – некоторые неопределенные постоянные. Возьмем произвольно целое число q, другое число n, подчиненное условию $n \geqslant q^{1/3}$, и положим $p \geqslant n^2 + 2q + 1$.

Постоянными α_k в выражении (141$_1$) всегда можно распорядиться, подчинив их системе $n^2 + 2q$ линейных однородных уравнений, так, что *будут иметь место одновременно неравенства вида*

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau' \ / \int \varphi^2 d\tau' \geqslant mq^{2/3},$$

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \ / \int \varphi^2 d\tau \geqslant mq^{2/3},$$

где m есть определенное число, не зависящее ни от q, ни от функций φ_k.

Этой леммой мы воспользуемся в следующих частях нашего сочинения.

41. Возвращаемся к задаче об установившейся температуре однородного твердого тела, когда требуется определить функцию v при помощи уравнений

$$\Delta v + \varphi = 0 \text{ внутри } (S),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv_i = 0 \text{ на поверхности } (S), h > 0. \qquad (143)$$

Предположим, что $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_p \varphi_p$, где по-прежнему α_k суть произвольные параметры. Функция v представится в виде $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p$, где каждая из функций v_k будет удовлетворять уравнениям вида (143).

Применим к функции v теорему Грина. При помощи уравнений (143) получаем

$$K = \int \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\tau + h\int v^2 ds = \int v\varphi d\tau,$$

откуда выводим

$$K^2 \leqslant \int v^2 d\tau \int \varphi^2 d\tau,$$

или

$$K^2 / (\int v^2 d\tau)^2 \leqslant \int \varphi^2 d\tau \ / \int v^2 d\tau. \qquad (144)$$

На основании леммы Пуанкаре мы можем выбрать постоянные α_k так, что будет

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\tau \ / \int v^2 d\tau \geqslant mp^{2/3}.$$

Так как, очевидно,

$$K \ / \int v^2 d\tau \geqslant \int \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\tau \ / \int v^2 d\tau \geqslant mp^{2/3},$$

то, в силу (144),

$$\int \varphi^2 d\tau \ / \int v^2 d\tau \geqslant m^2 p^{4/3}.$$

Получаем следующую лемму.

Лемма. *Если в уравнениях*

$$\Delta v + \varphi = 0 \quad \textit{внутри } (S),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv_i = 0 \quad \textit{на поверхности } (S), h > 0,$$

функция φ зависит линейным образом от p постоянных параметров, то этими последними всегда можно распорядиться так, что отношение $\int \varphi^2 d\tau \,/\, \int v^2 d\tau$ будет больше числа $m^2 p^{4/3}$, где m – постоянная, зависящая только от вида поверхности (S).

Эта лемма будет необходима при решении задачи об охлаждении однородного твердого тела.

ГЛАВА V

Фундаментальная теорема Пуанкаре – Зарембы и ее следствия. Распространение принципа Робена и общих методов решения основных задач математической физики на какие угодно поверхности Ляпунова

1. В предыдущих исследованиях мы показали, что методы Неймана и Робена дают действительное решение задачи Дирихле и Неймана для всякой конвексной поверхности или, общее, для всякой поверхности, к которой приложим так называемый принцип Робена. Рассматриваемые методы не только устанавливают факт существования функций, удовлетворяющих всем условиям этих задач, но и дают аналитическое выражение искомых функций в виде потенциалов простого или двойного слоя или в виде сходящихся рядов, члены которых вычисляются последовательно по определенному закону.

Впервые задача Дирихле поставлена была еще в 1828 г. Гауссом в его упомянутом выше мемуаре „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte”, но до второй половины прошлого века оставалась недоказанной даже сама возможность задачи. Первые исследования в этом направлении принадлежат Дирихле, который, по словам Римана, доказывал на своих лекциях (до 1857 г.) теорему о существовании функции, удовлетворяющей внутри данной области уравнению Лапласа и принимающей наперед заданные значения на поверхности, ограничивающей область, – теорему, которой Риман дал название принципа Дирихле.

Однако прием, которым по примеру Гаусса пользовался Дирихле, сводящий решение вопроса к разысканию условий минимума некоторого интеграла, как уже упоминалось выше , не удовлетворяет требованиям надлежащей строгости. Таким образом, строго говоря, даже сам принцип Дирихле оставался неустановленным и после 50-х годов прошлого столетия.

Более или менее строгое решение было впервые получено только К. Нейманом в 1870 г., которое дало не только доказательство факта существования функции, удовлетворяющей условиям задачи Дирихле, но и определенное аналитическое выражение искомой функции. Около того же времени была разрешена Нейманом и основная задача гидродинамики.

Но метод Неймана был установлен только для конвексных поверхностей с определенной касательной плоскостью и кривизной в каждой точке и основывался на недоказанном тогда предположении о существовании нормальных производных от потенциала двойного слоя.

Вопрос о возможности распространить этот метод на более обширный класс неконвексных поверхностей долгое время оставался нерешенным, и первая попытка решить этот вопрос была сделана лишь в 1896 г. Пуанкаре в его известном мемуаре „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet"*). В основу исследований Пуанкаре был положен принцип Дирихле, который был установлен самим же Пуанкаре в весьма общем виде еще в 1889 г.**) при помощи особого метода, названного им "méthode du balayade", и кроме того, анализ его был построен на допущении, что гармоническая функция, решающая задачу Дирихле, имеет правильные нормальные производные на данной поверхности и что таковые же производные существуют и для потенциалов двойного слоя, с которыми приходится иметь дело в методе Неймана.

Мы уже знаем из предыдущего, что эти допущения, вообще говоря, несправедливы и имеют силу лишь при некотором ограничении заданной функции, в которую должна обращаться на данной поверхности искомая функция, гармоническая внутри этой поверхности, причем это последнее предложение может быть строго доказано лишь для известного класса поверхностей, которым мы дали название поверхностей Ляпунова.

Таким образом, и изыскания Пуанкаре 1896 г. не дали полного решения задачи о распространении метода Неймана на неконвексные поверхности.

2. В своих изысканиях Пуанкаре воспользовался, кроме всего сказанного, особого рода точечным преобразованием, которое преобразовывает всякую замкнутую поверхность (S) с определенной касательной плоскостью в каждой ее точке в сферу (σ) радиуса 1, каждую точку внутри (S) – в определенную точку внутри сферы и каждую точку, лежащую вне (S) – в определенную же точку, лежащую вне сферы (σ). Сам Пуанкаре не дал, однако, доказательства того, что всякая поверхность (S), обладающая только что упомянутыми общими свойствами, допускает указанное преобразование, и до настоящего времени возможность преобразования Пуанкаре остается недоказанной.

Только в 1899 г. Корн отметил, что к числу поверхностей, допускающих преобразование Пуанкаре, принадлежат поверхности, конвексные по отношению к одной точке***), с определенной касательной плоскостью и кривизной в каждой точке. Таким путем было установлено, что преобразование Пуанкаре применимо к более обширному классу, чем обыкновенные конвексные поверхности, но все же оставалось (и остается) неизвестным, можно ли им пользоваться, например, для всех поверхностей Ляпунова.

В том же 1899 г., вскоре после появления в свет исследований Ляпунова о нормальных производных потенциалов простого и двойного слоя и функций, дающих решение задачи Дирихле, мне удалось доказать с надлежащей строгостью и притом независимо от принципа Дирихле, что методы

---

*) Acta Mathematica, 1, 20, Stockholm, 1896.

**) American Journal, т. XII, 1889.

***) То есть поверхности, внутри которых находится одна такая точка, что всякая прямая, через нее проходящая, пересекает поверхность только в двух точках. См.: А. К о r n. – Lehrbuch der Potentialtheorie. – Berlin, 1899, S. 236.

Неймана и Робена действительно дают решение задач о распределении электричества, Дирихле и Неймана для всех поверхностей, допускающих преобразование Пуанкаре *).

Тогда же я обратил внимание на то, что распространение рассматриваемых методов на все поверхности Ляпунова может быть установлено без посредства преобразования Пуанкаре если доказать независимо от него следующую теорему чистого анализа **):

Для всякой поверхности Ляпунова (S) *отношение интегралов*

$$\int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \;/\; \int \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

из которых первый распространяется на область (D), *ограниченную поверхностью* (S), *а второй – на все пространство, внешнее относительно* (S), *имеет конечный высший и отличный от нуля низший пределы, какова бы ни была функция* φ ***), *удовлетворяющая условию*

$$\int \frac{\partial\varphi_e}{\partial n} ds = 0.$$

Этой теореме я дал, на основании сказанного, название *фундаментальной теоремы*.

Именно для доказательства этой теоремы Пуанкаре и изобрел упомянутое выше точечное преобразование. Однако установить эту теорему интегрального исчисления независимо от преобразования Пуанкаре и тех задач математической физики, решение которых существенным образом зависит от нее, до сих пор не удалось.

В 1901 г. Заремба в мемуаре "Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin" (Bulletin de l' Académie des Sciences de Cracovie) доказал другую теорему, аналогичную фундаментальной теореме и приложимую ко всякой поверхности Ляпунова независимо от того, допускает ли она преобразование Пуанкаре или нет. При помощи этой последней теоремы оказалось возможным доказать применимость принципа Робена ко всем, без исключения, поверхностям Ляпунова, как это показано мною в мемуаре "Sur les problèms fondamentaux etc". (Annales de l' École Normale, 1902.)

3. В предыдущих главах настоящего сочинения мы доказали, что все изложенные там методы решения основных задач математической физики применимы ко всем поверхностям Ляпунова, к которым приложим принцип Робена. Для того чтобы распространить полученные выводы на все поверхности Ляпунова, остается только доказать *при помощи только что упомянутой теоремы Зарембы*, что принцип Робена приложим ко всякой поверхности Ляпунова.

---

*) W. Stekloff, "Sur les problemes fondamentaux de la Physique mathematique" (Paris, Comptes Rendus, 6 mars 1899).

**) Относящиеся сюда соображения были затем более подробно развиты в мемуаре "Les méthodes generales etc." Annales de Toulouse, 1800, в сочинении "Общие методы и т.д." (Харьков, 1901) и других упомянутых выше мемуарах.

***) Здесь φ – потенциал простого слоя; см. п. 40. (*Прим. ред.*)

Доказательству этого положения и будет посвящена настоящая глава, которую начнем с доказательства теоремы Заремба.

Заметим, что эта теорема сама по себе также представляет одно из предложений чистого анализа (интегрального исчисления), и, казалось бы, должна выводиться непосредственно из аналитических свойств функции φ и самого определения объемных интегралов, однако все попытки доказать ее независимо от некоторых особенностей дифференциальных уравнений, с которыми приходится иметь дело в математической физике, до сих пор не имели успеха. Прием Пуанкаре, основанный на упомянутом выше точечном преобразовании одного пространства в другое, легко приводит и к теореме Зарембы и носит с виду чисто аналитический характер, но, в сущности, подменяет только одну задачу другой, решить которую в общем виде столь же трудно, как и те задачи математической физики, для решения которых оно придумано.

Доказательство теоремы, аналогичной фундаментальной теореме Пуанкаре, данное Зарембой, основано также на исследовании некоторых дифференциальных уравнений, подобных тем, которые постоянно встречаются в математической физике, и на свойствах некоторых функций, представляющих обобщение потенциала объемных масс и потенциала простого слоя, но не зависит ни от преобразования Пуанкаре, ни от каких-либо иных допущений, связанных с принципами Робена или К. Неймана. Определением этих функций и выводом их главнейших свойств, необходимых для наших целей, мы прежде всего и займемся.

4. Пусть f есть заданная непрерывная функция точек поверхности (S), μ — положительная постоянная. Рассмотрим функцию F, определяемую равенством

$$F = \frac{1}{4\pi} \int f \frac{e^{-\mu r}}{r} ds. \tag{1}$$

Функция F отличается от потенциала простого слоя множителем $e^{-\mu r}$, стоящим под знаком интеграла, и при $\mu = 0$ обращается в потенциал простого слоя. Эту функцию будем называть *обобщенным потенциалом простого слоя.*

Обобщенный потенциал обладает следующими свойствами:

1°. *F есть непрерывная функция вместе со своими частными производными по координатам x, y, z как внутри, так и вне поверхности (S), причем сама функция F не испытывает разрыва и при переходе точки x, y, z через поверхность (S).*

Так как

$$\Delta \frac{e^{-\mu r}}{r} = \mu^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

то

2°. *Функция F удовлетворяет уравнению*

$$\Delta F - \mu^2 F = 0 \quad \text{внутри и вне } (S). \tag{2}$$

Повторив с незначительными изменениями рассуждения пп. 27 — 32 гл. I, убедимся, что F *имеет определенные (правильные) нормальные производные на поверхности (S), коль скоро эта поверхность удовлетворяет условиям Ляпунова.*

Теми же приемами, что и в упомянутых пунктах, докажем следующие равенства:

3°

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{\partial F}{\partial n} &= \frac{f}{2}, \\ \frac{\partial F_e}{\partial n} - \frac{\partial F}{\partial n} &= -\frac{f}{2} \end{aligned}\right\} \quad \textit{на поверхности } (S) \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{\partial F_e}{\partial n} = f \quad \textit{на поверхности } (S). \tag{4}$$

Возьмем на (S) произвольно точку p_0 и построим, как и в гл. I, цилиндр вращения радиуса $R < D$ с осью, направленной по нормали n к (S) в точке p_0. Употребляя обозначения, установленные в гл. I, можем писать

$$F = \frac{1}{4\pi} \int\!\!\int f \frac{e^{-\mu r}}{r} ds' + \frac{1}{4\pi} \int\!\!\int f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\sigma. \tag{5}$$

Так как в первом интеграле $r > R$, $e^{-\mu r} < e^{-\mu R}$ и $e^{-\mu R} \leqslant \dfrac{1}{\mu e R}$, то

$$\left| \int\!\!\int f \frac{e^{-\mu r}}{r} ds' \right| \leqslant \frac{M}{\mu} \frac{S}{eR^2}, \tag{6}$$

где S, напомним, есть площадь поверхности (S), $|f| \leqslant M$.

Воспользовавшись затем полярными координатами (гл. I), получаем

$$\left| \int\!\!\int f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\sigma \right| \leqslant \int\!\!\int |f| \frac{e^{-\mu r}}{r \cos \vartheta} \rho \, d\rho \, d\omega,$$

и так как (гл. I) $|f| \leqslant M$, $r \geqslant \rho$, $\cos\vartheta > 1/2$, то

$$\left| \int\!\!\int f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\sigma \right| \leqslant 2M \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\mu\rho} \, d\rho \, d\omega =$$

$$= \frac{4\pi M}{\mu} (1 - e^{-\mu R}) \leqslant \frac{4\pi M}{\mu}. \tag{6_1}$$

Неравенства (6) и (6_1) приводят к заключению, что

4°. *Функция F (см. (5)) удовлетворяет во всех точках поверхности неравенству*

$$|F| \leqslant \frac{A}{\mu} M. \tag{7}$$

Пользуясь теми же цилиндрическими координатами, можем писать (ср. гл. I)

$$4\pi \frac{\partial F}{\partial n} = \int\!\!\int \frac{e^{-\mu r} \zeta}{r^3} ds + \mu \int\!\!\int \frac{e^{-\mu r} \zeta}{r^2} ds \tag{8}$$

— равенство, обращающееся в равенство (85_1) п. 27 гл. I при $\mu = 0$. Подобно предыдущему имеем

$$\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^3}\,ds = \int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^3}\,ds' + \int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^3}\,d\sigma. \tag{9}$$

Так как для всех точек поверхности (S), лежащих вне площадки (σ) (в части (S') поверхности (S)), $r > R$, $|\zeta| < l_0$, то

$$\left|\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^3}\,ds'\right| \leqslant M\frac{Sl_0}{R^3}\,e^{-\mu R} \leqslant \frac{M}{\mu}\,\frac{Sl_0}{eR^4}\,. \tag{10}$$

Далее, подобно предыдущему, в силу неравенств (54) и (54_1) гл. I,

$$\left|\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^3}\,d\sigma\right| = \left|\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^3\cos\vartheta}\,\rho\,d\rho\,d\omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi Mb\int\limits_0^R e^{-\mu r}\,d\rho \leqslant 4\pi b\,\frac{M}{\mu}\,. \tag{10_1}$$

При помощи (10) и (10_1) из (9) выводим неравенство

$$\left|\int\int \frac{e^{-\mu r}}{r^3}\,ds\right| \leqslant \frac{A_1}{\mu}\,M, \tag{11}$$

где A_1 есть постоянная, зависящая только от вида поверхности (S).

Точно так же

$$\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^2}\,ds = \int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^2}\,ds' + \int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^2}\,d\sigma \tag{11_1}$$

и

$$\left|\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^2}\,ds'\right| \leqslant M\,\frac{Sl_0}{R^2}\,e^{-\mu R} \leqslant \frac{M}{\mu^2}\,\frac{4Sl_0}{e^2R^4}\,, \tag{12}$$

ибо $R^2\mu^2e^{-\mu R} \leqslant 4/e^2$. Далее,

$$\left|\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^2}\,d\sigma\right| \leqslant 2Mb\int e^{-\mu\rho}\,\rho\,d\rho\,d\omega =$$

$$= 4\pi Mb\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{R}{\mu}\,e^{-\mu R} - \frac{1}{\mu^2}\,e^{-\mu R}\right) \leqslant \frac{M}{\mu^2}\,4\pi b. \tag{12_1}$$

Из (11_1), (12) и (12_1) получаем

$$\mu\left|\int\int \frac{e^{-\mu r}\zeta}{r^2}\,ds\right| \leqslant \frac{A_2}{\mu}\,M, \tag{13}$$

где A_2 – определенное число, зависящее только от вида поверхности (S).

Сопоставляя неравенства (11) и (13) с равенством (8), получаем

$$\left|\frac{\partial F}{\partial n}\right| \leqslant \frac{A'}{\mu}\,M,$$

где A' есть число, зависящее лишь от вида поверхности (S).

Это неравенство и формулы (3) приводят к заключению, что

5°. *Нормальные производные функции F удовлетворяют неравенствам*

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{f}{2} \right| < \frac{A}{\mu} M, \quad \left| \frac{\partial F_e}{\partial n} + \frac{f}{2} \right| < \frac{A}{\mu} M, \tag{14}$$

где A есть наибольшее из чисел A' и A (неравенство (7)).

5. Рассмотрим еще функцию F', определяемую интегралом

$$F' = \frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \tag{15}$$

где φ есть заданная функция координат области (D), ограниченной поверхностью (S). Это есть *обобщенный потенциал объемных масс*, совпадающий с обыкновенным потенциалом при $\mu = 0$.

Функция F' обладает следующими свойствами, коль скоро функция φ удовлетворяет условию Гельдера (неравенство (6) гл. I, п. 4):

1°. *Функция F' непрерывна со своими частными производными первого порядка во всем бесконечном пространстве и, следовательно, имеет правильные нормальные производные, внутреннюю и внешнюю, на поверхности (S), равные между собой.*

2°. *Функция F' удовлетворяет уравнениям*

$$\begin{aligned} &\Delta F' - \mu^2 F' + \varphi = 0 \qquad \textit{внутри } (S), \\ &\Delta F' - \mu^2 F' = 0 \qquad \textit{вне } (S). \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательства этих предложений совершенно те же, что и для соответствующих предложений обыкновенного потенциала объемных масс.

Положив, наконец,

$$F'' = \frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau', \tag{15$_1$}$$

получим функцию, обладающую следующими свойствами:

1°. *Функция F'' непрерывна вместе со своими первыми производными по координатам во всем пространстве и имеет, следовательно, правильные нормальные производные, внутреннюю и внешнюю, на поверхности (S), равные между собой.*

2°. *Функция F'' удовлетворяет уравнениям*

$$\begin{aligned} &\Delta F'' - \mu^2 F'' = 0 \qquad \textit{внутри } (S), \\ &\Delta F'' - \mu^2 F'' + \varphi = 0 \qquad \textit{вне } (S). \end{aligned} \tag{16$_1$}$$

6. При помощи этих функций мы можем доказать следующую теорему.

Теорема Зарембы (первая). *Существует и притом единственная функция координат v, непрерывная вместе со своими производными внутри и вне данной поверхности Ляпунова (S), удовлетворяющая уравнениям*

$$\Delta v - \mu^2 v = 0 \qquad \textit{внутри и вне } (S), \tag{17}$$

условию

$$v_i = v_e = V \qquad \textit{на поверхности } (S) \tag{18}$$

и обращающаяся в бесконечности в нуль по закону потенциала простого слоя, где V есть потенциал простого слоя:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varphi}{r}\, ds, \tag{19}$$

плотность которого φ есть какая угодно заданная непрерывная функция координат точек поверхности (S), а μ есть произвольный параметр, больший некоторого определенного числа $2A$.

Функция v имеет правильные нормальные производные на поверхности (S).

Прежде всего легко убедиться, что *условиями теоремы функция v, если только таковая существует, определяется вполне.*

Допустив противное, предположим, что существуют две различные функции v_1 и v_2, подчиненные уравнениям (17) и (18). Функция $v' = v_1 - v_2$, очевидно, удовлетворяет тому же уравнению (17), а на поверхности (S) — условию

$$v'_i = v'_e = 0. \tag{20}$$

Теоремы Грина дают, в силу (17) и (20),

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 d\tau + \int \Sigma \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 d\tau' = -\mu^2 \int v'^2 d\tau - \mu^2 \int v'^2 d\tau',$$

т.е. $v' = 0$ тождественно, откуда и следует высказанное предложение.

7. Покажем теперь, что искомая функция v действительно существует, и найдем ее аналитическое выражение. Положим

$$F' = \frac{\mu^2}{4\pi} \int V \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau, \tag{21}$$

где V есть потенциал простого слоя, определяемый равенством (19), и

$$\frac{\partial F'_e}{\partial n} = -f. \tag{22}$$

Составим ряд функций

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \int f \frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds, \tag{23}$$

. . . .

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds.$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial n} + \lambda^2 \frac{\partial \varphi_{3i}}{\partial n} + \ldots + \lambda^{k-1} \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial n} + \ldots, \tag{24}$$

где λ есть некоторый параметр.

Обозначим через N_k максимум модуля $\dfrac{\partial \varphi_{ki}}{\partial n}$ на поверхности (S). Принимая во внимание свойство 5^0 обобщенного потенциала простого слоя, выражаемое первым из неравенств (14), получаем

$$N_k \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right) N_{k-1} = q N_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

откуда

$$N_k \leqslant q^{k-1} N_1.$$

Это неравенство показывает, что ряд

$$N_1 + \lambda N_2 + \lambda^2 N_3 + \ldots + \lambda^{k-1} N_k + \ldots$$

сходится для всех значений параметра λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| < \dfrac{1}{q} = 1 \Big/ \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{A}{\mu}\right)$. Если подчиним произвольное число μ условию

$$\mu > 2A, \tag{25}$$

то получим $1/q > 1$. При этом ряд (24) будет сходиться абсолютно и равномерно во всех точках поверхности (S) и при $\lambda = 1$. Вследствие этого ряд

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k + \ldots \tag{26}$$

также сходится равномерно во всех точках области (D) и функция Φ, изображаемая этим рядом, может быть представлена в виде обобщенного потенциала прОстого слоя

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \tag{27}$$

где положено

$$\omega = f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial n}. \tag{28}$$

Далее, так как ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial n}$ сходится абсолютно и равномерно, то, в силу (26),

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial n}\ ^{*)}. \tag{28$_1$}$$

С другой стороны, на основании (4) (свойство 3^0 обобщенного потенциала простого слоя) из (27) получаем $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \dfrac{\partial \Phi_e}{\partial n} = \omega$, откуда при

---

*) В силу свойства 5^0 (п. 4)

$$\left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{j,i}}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial \left[\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \varphi_j \right]_i}{\partial n} \right| < q \sum_{j=k}^{\infty} N_j \to 0$$

при $k \to \infty$. (*Прим. ред.*)

юмощи (28) и (28_1) выводим $-\dfrac{\partial\Phi_e}{\partial n} = f$, т.е., на основании (22),

$$\frac{\partial\Phi_e}{\partial n} = \frac{\partial F'_e}{\partial n}. \tag{29}$$

Воспользовавшись, наконец, свойством 2^0 (уравнение (2)) обобщенного потенциала простого слоя Ф, находим

$$\Delta\Phi - \mu^2\Phi = 0 \quad \text{внутри и вне } (S). \tag{30}$$

8. Положим теперь

$$w = F' - \Phi. \tag{31}$$

Приняв во внимание второе из уравнений (16) (свойство 2^0 функции F') и уравнение (30), заключаем, что

$$\Delta w - \mu^2 w = 0 \quad \text{вне } (S) \tag{32}$$

и, в силу (31) и (29),

$$\frac{\partial w_e}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \tag{32_1}$$

Кроме того, функция w, определяемая равенством (31), имеет правильные нормальные производные на поверхности (S), ибо, как указано выше, этим свойством обладают и функции F' и Ф, и обращается в бесконечности в нуль по тому же закону, что и потенциал простого слоя (ибо таковы же F' и Ф). Применяя к w преобразование Грина, получаем, в силу сказанного и равенств (32) и (32_1),

$$\int\Sigma\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\tau' + \mu^2\int w^2 d\tau' = 0,$$

т.е.

$$w = 0, \quad \Phi = F' \quad \text{вне } (S). \tag{33}$$

9. Рассмотрим теперь значения функции w внутри поверхности (S).

Сравнив выражение F' (см. (21)) с выражением (15), видим, что в рассматриваемом нами случае $\varphi = \mu^2 V$. Применив к последнему случаю уравнение (16), получаем

$$\Delta F' - \mu^2 F' + \mu^2 V = 0. \tag{34}$$

Так как, в силу (31), $\Delta w = \Delta F' - \Delta\Phi$, то,на основании (30) и (34),

$$\Delta w - \mu^2 w + \mu^2 V = 0 \quad \text{внутри } (S). \tag{34_1}$$

Так как, далее, w есть непрерывная функция во всем пространстве, то, в силу (33),

$$w_i = w = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \tag{34'}$$

Составим теперь функцию

$$\upsilon = V - w. \tag{35}$$

Так как V есть гармоническая функция, то

$$\Delta\upsilon = -\Delta w \quad \text{внутри } (S),$$

откуда, в силу (34_1), $\Delta v = \mu^2 (V - w)$, т.е., в силу (35),

$$\Delta v - \mu^2 v = 0 \quad \text{внутри } (S).$$

Так как w обращается в нуль на поверхности (S), то из (35) выводим

$$v_i = V_i \quad \text{на поверхности } (S).$$

Таким образом, *функция v, удовлетворяющая уравнению* (17) *внутри* (S) *и принимающая на самой поверхности те же значения, что и заданный потенциал V простого слоя, найдена.*

10. Докажем теперь существование функции v_1, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} &\Delta v_1 - \mu^2 v_1 = 0 \quad \text{вне } (S), \\ &v_{1e} = V_e \quad \text{на поверхности } (S). \end{aligned} \tag{36}$$

Положим

$$F'' = \frac{\mu^2}{4\pi} \int V \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau' \tag{37}$$

и

$$f = \frac{\partial F_i''}{\partial n}. \tag{38}$$

Составим ряд функций

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4\pi} \int f \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \\ \psi_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \psi_{1e}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_k &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \psi_{k-1,e}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds. \end{aligned} \tag{39}$$

Рассмотрим ряд

$$\omega_1 = f - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n}. \tag{40}$$

Второе из неравенств (14) дает, подобно предыдущему $N_k' \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right) N_{k-1}' = q N_{k-1}'$, где через N_k' обозначен максимум модуля $\frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n}$. Отсюда $N_k' \leqslant q^{k-1} N_1'$. Это неравенство показывает, что ряд $|f| + \Sigma \lambda^k N_k$ сходится, пока $|\lambda| < \frac{1}{q} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right)$, если μ удовлетворяет неравенству (25), то он сходится и при $\lambda = 1$. Отсюда следует, что ряд (40) при сделанном условии относительно μ сходится равномерно во всех точках поверхности при $\lambda = 1$. Вследствие этого ряд $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ сходится равномерно вне (S) и функция ψ, определяемая этим рядом, может быть представлена в виде

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \omega_1 \frac{e^{-\mu r}}{r} ds. \tag{41}$$

Кроме того, так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n}$ сходится равномерно на поверхности (S), то*) $\frac{\partial \psi_e}{\partial n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n}$ и, на основании (4),

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial n} - \frac{\partial \psi_e}{\partial n} = \omega_1 = f - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n},$$

откуда, в силу предыдущего равенства и (38),

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = \frac{\partial F_i''}{\partial n}. \tag{42}$$

Таким путем нами найдена функция ψ, определяемая равенством (41), удовлетворяющая условию (42) и на основании (2) уравнению

$$\Delta \psi - \mu^2 \psi = 0 \quad \text{внутри } (S). \tag{43}$$

Но выражение (37) функции F'' отличается от (15_1) только тем, что в первом φ заменено функцией $\mu^2 V$. Следовательно, в силу (16_1),

$$\Delta F'' - \mu^2 F'' = 0 \quad \text{внутри } (S). \tag{43_1}$$

11. Положим теперь

$$w_1 = F'' - \psi. \tag{44}$$

В силу (43) и (43_1) получаем

$$\Delta w_1 - \mu^2 w_1 = 0 \quad \text{внутри } (S),$$

а на основании (42) $\frac{\partial w_{1i}}{\partial n} = 0$. При этих условиях формула Грина дает

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 d\tau + \mu^2 \int w_1^2 d\tau = 0,$$

т.е.

$$w_1 = 0, \quad F'' = \psi \quad \text{внутри } (S). \tag{45}$$

Рассмотрим значения функции w_1 для точек пространства, внешнего относительно (S). Равенство (44), (2) и второе из (16_1) дают

$$\Delta w_1 - \mu^2 w_1 + \mu^2 V = 0 \quad \text{вне } (S), \tag{46}$$

а на основании (45) и непрерывности функции w_1 во всем пространстве

$$w_{1e} = 0 \quad \text{на поверхности } (S). \tag{46_1}$$

Определив функцию w_1 вне (S), полагаем

$$v_1 = V - w_1. \tag{47}$$

*) См. п. 7. (*Прим. ред.*)

Так как V есть гармоническая функция вне (S), то, в силу (46),

$$\Delta v_1 - \mu^2 v_1 = 0 \quad \text{вне } (S)$$

и, в силу (46_1) и (47),

$$v_{1e} = V_e \quad \text{на поверхности } (S). \tag{47_1}$$

Таким образом, *найдена функция v_1, удовлетворяющая уравнению* (17) *вне* (S) *и принимающая на этой поверхности те же значения, что и данный потенциал простого слоя V, для всякого значения положительной постоянной μ, большего $2A$.*

12. Нетрудно убедиться, что искомая функция v (п. 6) может быть представлена в виде обобщенного потенциала простого слоя.

Функция v_1 удовлетворяет вне (S) тому же уравнению, что и функция F' в п. 7, непрерывна со своими частными производными во всей области (D'), имеет правильную нормальную производную $\dfrac{\partial v_{1e}}{\partial n}$ и в бесконечности обращается в нуль по тому же закону, что и функция F', т.е. v_1 обладает всеми теми свойствами, которые были необходимы в пп. 7 и 8 для доказательства равенства (33). Если поэтому положим

$$f = -\frac{\partial v_{1e}}{\partial n} \tag{48}$$

и повторим дословно рассуждения указанных пунктов, то докажем существование функции

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

где под ω следует подразумевать функцию, определяемую рядом (28), в котором, равно как и в уравнениях (23), f выражается равенством (48).

Применяя к рассматриваемому случаю равенство (33), заключаем, что

$$\Phi = v_1 \quad \text{вне } (S)$$

и, следовательно, на основании (47_1),

$$\Phi_e = v_{1e} = V_e \quad \text{на поверхности } (S).$$

Но Φ есть функция, непрерывная во всем пространстве, равно как и потенциал простого слоя V, причем, какова бы ни была функция ω,

$$\Delta\Phi - \mu^2\Phi = 0 \quad \text{внутри } (S)$$

и на основании сказанного

$$\Phi_i = V_i \quad \text{на поверхности } (S).$$

Следовательно, *положив*

$$v = \frac{1}{4\pi} \int \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \tag{49}$$

получим функцию v, удовлетворяющую всем требованиям теоремы Зарембы, которая, таким образом, доказана.

13. Рассмотрим теперь следующие интегралы:

$$
\begin{aligned}
&J = \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 d\tau, \qquad J' = \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 d\tau', \\
&I = \int V^2 \, d\tau, \qquad I' = \int V^2 \, d\tau', \\
&J_1 = \int \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 d\tau + \mu^2 \int v^2 d\tau, \\
&J'_1 = \int \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 d\tau' + \mu^2 \int v^2 \, d\tau', \\
&P = \int \Sigma \, \frac{\partial V}{\partial x} \, \frac{\partial w}{\partial x} \, d\tau + \mu^2 \int Vw \, d\tau, \\
&P' = \int \Sigma \, \frac{\partial V}{\partial x} \, \frac{\partial w_1}{\partial x} \, d\tau' + \mu^2 \int Vw_1 \, d\tau', \\
&R = \int \Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\tau + \mu^2 \int w^2 \, d\tau, \\
&R' = \int \Sigma \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 d\tau' + \mu^2 \int w_1^2 \, d\tau',
\end{aligned}
\tag{50}
$$

предполагая, что плотность φ потенциала V выбрана так, что все входящие в эти формулы интегралы имеют определенный смысл.

Напомним, что функции V, v, w и w_1 связаны соотношениями

$$v = V - w \qquad \text{внутри } (S),$$

$$v = V - w_1 \qquad \text{вне } (S).$$

При помощи этих равенств и (50) получаем

$$
\begin{aligned}
&J_1 = J + \mu^2 I + R - 2P, \\
&J'_1 = J' + \mu^2 I' + R' - 2P'.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Применив к функции w формулу Грина (гл. I, п. 8) и приняв во внимание уравнения (34_1) и $(34')$, находим

$$R = \mu^2 \int Vw \, d\tau. \tag{51_1}$$

Точно так же, заметив, что V удовлетворяет уравнению Лапласа, а w — условию $(34')$, получаем

$$\int \Sigma \; \frac{\partial V}{\partial x} \, \frac{\partial w}{\partial x} \, d\tau = 0$$

и, следовательно, $P = \mu^2 \int Vw \, d\tau$, т.е. $R = P$. Совершенно так же докажем, что и

$$R' = P' = \mu^2 \int Vw_1 \, d\tau'. \tag{52}$$

Вследствие этого равенства (51) принимают вид

$$J_1 = J + \mu^2 I - R, \quad J'_1 = J' + \mu^2 I' - R'. \tag{52_1}$$

14. Составим ряд обобщенных потенциалов простого слоя по формулам

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \int \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_{0i}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \tag{53}$$

. . . .

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

где ω – какая угодно непрерывная функция точек поверхности (S)*).

Если под ω, в частности, будем подразумевать функцию п. 12, получим

$$\varphi_0 = v. \tag{53$_1$}$$

Имеем

$$\Delta \varphi_k - \mu^2 \varphi_k = 0 \quad \text{внутри и вне } (S),$$

$$\frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{k,e}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} \quad \text{на поверхности } (S). \tag{54}$$

Обозначим через $U_{k,j}$ и $U'_{k,j}$ интегралы вида

$$U_{k,j} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_j \right) d\tau,$$

$$U'_{k,j} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_j \right) d\tau' \tag{54$_1$}$$

и положим для простоты $U_{k,k} = U_{2k}$, $U'_{k,k} = U'_{2k}$, $U_{k,k+1} = U_{2k+1}$, $U'_{k,k+1} = U'_{2k+1}$. Обозначив, как принято нами, через dT злемент объема, когда интегрирование распространяется на все пространство (т.е. на области (D) и (D')), получаем

$$U_{2k+1} + U'_{2k+1} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_{k+1} \right) dT;$$

отсюда при помощи формул преобразования Грина и уравнений (54) выводим

$$U_{2k+1} + U'_{2k+1} = \int \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_{k+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{k+1,e}}{\partial n} \right) ds =$$

$$= \int \varphi_k \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds = U_{2k}.$$

Из полученного таким образом равенства

$$U_{2k} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_{k+1} \right) dT$$

при помощи неравенства Буняковского – Коши получаем, при сделанных

*) Отличная от тождественно равной нулю. (*Прим. ред.*)

нами обозначениях,

$$U_{2k}^2 \leqslant (U_{2k} + U'_{2k})(U_{2k+2} + U'_{2k+2}). \tag{55}$$

С другой стороны, применив те же самые преобразования к интегралу

$$U_{2k} + U'_{2k} = \int \left(\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \varphi_k^2 \right) dT,$$

получим

$$U_{2k} + U'_{2k} = \int \varphi_k \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} ds =$$

$$= \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_{k-1} \right) d\tau = U_{2k-1} > 0. \tag{56}$$

При помощи этого равенства неравенство (55) приводится к виду

$$U_{2k}^2 \leqslant U_{2k-1} U_{2k+1}. \tag{57}$$

Заменив в (56) k на $k+1$ и применив к полученному таким образом равенству неравенство Буняковского – Коши, найдем

$$U_{2k+1}^2 = \left\{ \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_{k+1} \right) d\tau \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int \left(\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \varphi_k^2 \right) d\tau \int \left(\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \varphi_{k+1}^2 \right) d\tau,$$

т.е. при принятых нами обозначениях

$$U_{2k+1}^2 \leqslant U_{2k} U_{2k+2}. \tag{57$_1$}$$

Неравенства (57) и (57$_1$), справедливые при всяком целом k, дают $U_{2k}/U_{2k-1} \leqslant U_{2k+1}/U_{2k} \leqslant U_{2k+2}/U_{2k+1}$. Эти неравенства приводят к следующим, аналогичным неравенствам Шварца*):

$$U_0/U_{-1} \leqslant U_1/U_0 \leqslant U_2/U_1 \leqslant \ldots \leqslant U_{k+1}/U_k \leqslant \ldots \text{**)}. \tag{58}$$

15. Положим

$$U''_{k,j+1} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial x} + \mu^2 \varphi_k \varphi_{j+1} \right) dT$$

и применим к этому интегралу и интегралу $U_{k,j}$ (равенство (54$_1$)) формулы преобразования Грина. Учитывая равенства (54), получим

$$\begin{aligned} U_{k,j} &= \int \varphi_k \frac{\partial \varphi_{j,i}}{\partial n} ds = \int \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_{j+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{j+1,e}}{\partial n} \right) ds = \int \varphi_j \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds, \\ U''_{k,j+1} &= \int \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_{j+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{j+1,e}}{\partial n} \right) ds = \int \varphi_k \frac{\partial \varphi_{j,i}}{\partial n} ds, \end{aligned} \tag{59}$$

т.е. $U_{k,j} = U''_{k,j+1}$.

---

*) См. часть I сочинения, гл. V, п. 14.

**) Здесь и далее $U_{-1} = U_0 + U'_0 = \int \varphi_0 \omega ds$. (*Прим. ред.*)

С другой стороны, те же формулы Грина и равенства (54) дают

$$U''_{k,j+1} = \int \varphi_{j+1} \left(\frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{k,e}}{\partial n} \right) ds = \int \varphi_{j+1} \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} ds,$$

$$U_{k-1,j+1} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial x} + \mu^2 \varphi_{k-1} \varphi_{j+1} \right) d\tau =$$

$$= \int \varphi_{j+1} \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} ds = \int \varphi_{k-1} \frac{\partial \varphi_{j+1,i}}{\partial n} ds, \tag{60}$$

т.е. $U_{k,j} = U_{k-1,j+1}$ и, следовательно, на основании (59) и (60),

$$\int \varphi_j \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds = \int \varphi_{j+1} \frac{\partial \varphi_{k-1,i}}{\partial n} ds \tag{61}$$

– равенство, имеющее место при всяких целых числах k и j.

Это равенство приводит к следующему:

$$\int \varphi_j \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds = \int \varphi_{i+s} \frac{\partial \varphi_{k-s,i}}{\partial n} ds,$$

где s – какое угодно целое число, не превосходящее k.

Если k четно, то, положив $k = 2s$, $j = 0$, получим

$$\int \varphi_0 \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds = \int \varphi_s \frac{\partial \varphi_{s,i}}{\partial n} ds = U_{2s} = U_k.$$

Если k нечетно, то, положив $k = 2s - 1$, $j = 0$, найдем

$$\int \varphi_0 \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds = \int \varphi_s \frac{\partial \varphi_{s-1,i}}{\partial n} ds = U_{2s-1} = U_k. \tag{62}$$

Следовательно, равенство (62) можем считать справедливым для какого угодно целого k.

16. Рассмотрим ряд

$$\omega' = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n}. \tag{63}$$

В п. 7 уже доказано, что этот ряд сходится равномерно, пока $|\lambda| < 1 \Big/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right)$. Следовательно, радиус ρ круга сходимости этого ряда*)

$$\rho \geqslant 1 \Big/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right). \tag{64}$$

*) Под радиусом ρ круга сходимости функционального ряда (63) понимается радиус наибольшего круга, внутри которого (для всех $\lambda \in \{|\lambda| < \rho\}$) ряд (63) сходится равномерно по $(x, y, z) \in S$ (он равен радиусу круга сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} \right\|_{C(S)} \lambda^k$). Далее употребляется также термин "радиус (круга) равномерной сходимости" рассматриваемого функционального ряда. (*Прим. ред.*)

Умножаем (63) на $\varphi_0\,ds$ и интегрируем результат по всей поверхности (S). Получим, на основании (62),

$$\int \varphi_0 \omega' ds = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int \varphi_0 \frac{\partial \varphi_{k,i}}{\partial n} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k U_k. \tag{65}$$

На основании известной теоремы теории рядов заключаем, что радиус ρ_1 круга сходимости этого последнего ряда не менее ρ, т.е., в силу (64), $\rho_1 \geqslant$ $\geqslant 1\Big/\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right)$.

С другой стороны, из (65) следует, что $\rho_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{U_k}{U_{k+1}}$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{U_k}{U_{k+1}} \geqslant 1\Big/\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right).$$

Но, в силу неравенств (58), $U_k/U_{k+1} \leqslant U_{-1}/U_0$ при всяком k. Следовательно,

$$U_{-1}/U_0 \geqslant 1\Big/\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right).$$

Положим в (56) $k = 0$. Получим $U_0 + U_0' = U_{-1}$. Предыдущее неравенство на основании этого приводится к следующему:

$$U_0'/U_0 \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right). \tag{65$_1$}$$

Это неравенство имеет место, какова бы ни была исходная функция ω в формулах (53).

Положив ω равным функции п. 12, получим, в силу (53_1) и (50),

$$J_1/J_1' \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mu}\right). \tag{66}$$

Знаменатель правой части этого неравенства есть величина положительная, ибо $\mu > 2A$.

17. Составим теперь ряд функций

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = \psi_0 = \frac{1}{4\pi} \int \omega \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,\\
&\psi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \psi_{0e}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\psi_k = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \psi_{k-1,e}}{\partial n} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.
\end{aligned} \tag{67}$$

Функции ψ_k как обобщенные потенциалы простого слоя удовлетворяют уравнению

$$\Delta \psi_k - \mu^2 \psi_k = 0 \quad \text{внутри и вне } (S) \tag{68}$$

и условию

$$\frac{\partial\psi_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial\psi_{k,e}}{\partial n} = -\frac{\partial\psi_{k-1,e}}{\partial n} \quad \text{на поверхности } (S) \tag{69}$$

при всех значениях k, начиная с 1, а при $k = 0$ условию

$$\frac{\partial\psi_{0i}}{\partial n} - \frac{\partial\psi_{0e}}{\partial n} = \omega \quad \text{на поверхности } (S). \tag{69_1}$$

Обозначим через $V_{k,j}$ и $V'_{k,j}$ интегралы, составленные из функций ψ_k по такому же правилу, как интегралы $U_{k,j}$ и $U'_{k,j}$ (п. 14, равенства (54_1)) были составлены из функций φ_k. Точно так же интегралы $V_{k,j}$ и $V'_{k,j}$ при $k = j$ будем обозначать через V_{2k} и V'_{2k}, а те же интегралы при $j = k + 1$ – через V_{2k+1} и V'_{2k+1}.

Совершенно так же, как и в п. 14, при помощи формул Грина и уравнений (68) и (69) получим

$$V'_{2k} = -\int \psi_k \frac{\partial\psi_{k,e}}{\partial n}\, ds = \int \psi_k \left(\frac{\partial\psi_{k+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial\psi_{k+1,e}}{\partial n} \right) ds$$

и

$$V_{2k+1} = \int \psi_k \frac{\partial\psi_{k+1,i}}{\partial n}\, ds,$$

$$V'_{2k+1} = -\int \psi_k \frac{\partial\psi_{k+1,e}}{\partial n}\, ds. \tag{70}$$

Отсюда $V'_{2k} = V_{2k+1} + V'_{2k+1}$.

С другой стороны (равенства (69)),

$$V'_{2k} = -\int \psi_k \frac{\partial\psi_{k,e}}{\partial n}\, ds = \int \psi_k \left(\frac{\partial\psi_{k+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial\psi_{k+1,e}}{\partial n} \right) ds =$$

$$= \int \left(\Sigma \frac{\partial\psi_k}{\partial x} \frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x} + \mu^2 \psi_k \psi_{k+1} \right) dT.$$

Отсюда при помощи неравенства Буняковского – Коши выводим

$$V'^2_{2k} \leqslant (V_{2k} + V'_{2k})(V_{2k+2} + V'_{2k+2}).$$

Но, опять в силу (69) и (70),

$$V_{2k} + V'_{2k} = \int \psi_k \left(\frac{\partial\psi_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial\psi_{k,e}}{\partial n} \right) ds =$$

$$= -\int \psi_k \frac{\partial\psi_{k-1,e}}{\partial n}\, ds = V'_{2k-1} > 0. \tag{71}$$

Следовательно,

$$V'^2_{2k} \leqslant V'_{2k+1} V'_{2k-1}. \tag{72}$$

Применив, наконец, неравенство Буняковского – Коши к интегралу

$$V'_{2k+1} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x} + \mu^2 \psi_k \psi_{k+1} \right) d\tau',$$

получаем

$$V'^2_{2k+1} \leqslant V'_{2k} V'_{2k+2}. \tag{72$_1$}$$

Неравенства (72) и (72$_1$) дают $V'_{2k}/V'_{2k-1} \leqslant V'_{2k+1}/V'_{2k} \leqslant V'_{2k+2}/V'_{2k+1}$. Так как эти неравенства справедливы при всяком k, то

$$V'_0/V'_{-1} \leqslant V'_1/V'_0 \leqslant V'_2/V'_1 \leqslant \ldots \leqslant V'_{k+1}/V'_k \leqslant \ldots \tag{73}$$

18. Положим теперь, подобно тому, как в п. 15,

$$V''_{k,j+1} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial x} + \mu^2 \psi_k \psi_{j+1} \right) dT$$

и применим к этому интегралу и интегралу $V'_{k,j}$ формулы Грина.

Получим, при помощи (68) и (69),

$$V'_{k,j} = -\int \psi_k \frac{\partial \psi_{j,e}}{\partial n} ds =$$

$$= \int \psi_k \left(\frac{\partial \psi_{j+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial \psi_{j+1,e}}{\partial n} \right) ds = V''_{k,j+1}. \tag{74}$$

Затем (ср. п. 15)

$$V''_{k,j+1} = \int \psi_{j+1} \left(\frac{\partial \psi_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} \right) ds = -\int \psi_{j+1} \frac{\partial \psi_{k-1,e}}{\partial n} ds,$$

$$V'_{k-1,j+1} = -\int \psi_{j+1} \frac{\partial \psi_{k-1,e}}{\partial n} ds,$$

т.е. $V''_{k,j+1} = V'_{k-1,j+1}$ и, в силу (74),

$$V'_{k,j} = V'_{k-1,j+1}. \tag{75}$$

С другой стороны, те же формулы Грина и уравнения (68) и (69) приводят к равенствам

$$V'_{k,j} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \mu^2 \psi_k \psi_j \right) d\tau' = -\int \psi_j \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} ds,$$

$$V'_{k-1,j+1} = \int \left(\Sigma \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial x} + \mu^2 \psi_{k-1} \psi_{j+1} \right) d\tau' =$$

$$= -\int \psi_{j+1} \frac{\partial \psi_{k-1,e}}{\partial n} ds,$$

откуда, на основании (75),

$$\int \psi_j \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} ds = \int \psi_{j+1} \frac{\partial \psi_{k-1,e}}{\partial n} ds.$$

Отсюда, вообще, при всяком $s \leqslant k$

$$\int \psi_j \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} ds = \int \psi_{j+s} \frac{\partial \psi_{k-s,e}}{\partial n} ds.$$

Положив здесь $j = 0$ и $k = 2s$ при четном k, получаем

$$\int \psi_0 \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} ds = \int \psi_s \frac{\partial \psi_{s,e}}{\partial n} ds = -V'_{2s} = -V'_k.$$

Положив $k = 2s - 1$ при k нечетном, находим

$$\int \psi_0 \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} ds = \int \psi_s \frac{\partial \psi_{s-1,e}}{\partial n} ds = -V'_{2s-1} = -V'_k. \tag{76}$$

Таким образом, равенство (76) справедливо при всяком k.

19. В п. 10 было доказано, что ряд

$$\omega'' = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} \tag{77}$$

сходится равномерно на поверхности (S), пока $|\lambda| < 1 \bigg/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right)$.

Умножив (77) на $\psi_0 \, ds$ и интегрируя результат по всей поверхности (S), получим, приняв во внимание (76), следующий ряд:

$$\int \omega'' \psi_0 \, ds = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int \psi_0 \frac{\partial \psi_{k,e}}{\partial n} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k V'_k,$$

радиус ρ_1 круга сходимости которого не менее ρ, радиуса круга сходимости ряда (77). Но $\rho_1 = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{V'_k}{V'_{k+1}}$. Следовательно

$$\lim_{k \to \infty} \frac{V'_k}{V'_{k+1}} \geqslant \rho \geqslant 1 \bigg/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right),$$

откуда, на основании неравенства (73),

$$V'_{-1} / V'_0 \geqslant 1 \bigg/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right).$$

Положив в (71) $k = 0$, получаем $V'_{-1} = V_0 + V'_0$. Следовательно, $1 + \dfrac{V_0}{V'_0} \geqslant 1 \bigg/ \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{A}{\mu} \right)$, или

$$V_0 / V'_0 \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mu} \right) \bigg/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right). \tag{77$_1$}$$

Положив в первом из уравнений (67) ω равным функции того же обозначения п. 12, получаем

$$J_1 / J'_1 \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mu} \right) \bigg/ \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\mu} \right).$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (66), получаем

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}+\frac{A}{\mu}\right) \leqslant J_1/J_1' \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{\mu}\right), \tag{78}$$

а неравенства (65_1) и (77_1) приводят к следующей теореме.

Теорема Зарембы (вторая). *Какова бы ни была функция ω, непрерывная на поверхности Ляпунова (S), в выражении обобщенного потенциала простого слоя*

$$v = \frac{1}{4\pi}\int \omega \frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds,$$

всегда имеют место неравенства

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}+\frac{A}{\mu}\right) \leqslant \int\left(\Sigma\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. +\mu^2 v^2\right)d\tau \Big/ \int\left(\Sigma\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 v^2\right)d\tau' \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{\mu}\right), \tag{78_1}$$

где A есть определенная постоянная, зависящая только от вида поверхности (S), а μ – положительное число, большее $2A$.

20. Возвращаемся к формулам п. 13. Предположим, что плотность φ потенциала простого слоя V задана в виде

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_p\varphi_p,$$

где φ_k – функции, непрерывные на поверхности (S), а α_k – некоторые постоянные. Потенциал V представится в виде

$$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p,$$

где v_k суть также потенциалы простого слоя.

На основании леммы Зарембы, доказанной в п. 39 предыдущей главы, мы всегда можем, задав произвольно число q, выбрать затем число p и постоянные α_k так, что одновременно будут соблюдены следующие неравенства:

$$\frac{I}{J} \leqslant \frac{1}{mq^{2/3}}, \quad \frac{I'}{J'} \leqslant \frac{1}{mq^{2/3}}. \tag{79}$$

Применим к интегралам R и R' (равенства (51_1) и (52)) неравенство Буняковского. Получаем

$$\begin{aligned} R^2 &\leqslant \mu^2 IR, & R &\leqslant \mu^2 I, \\ R'^2 &\leqslant \mu^2 I'R', & R' &\leqslant \mu^2 I'. \end{aligned} \tag{80}$$

Так как R и R' положительны, то из (52_1) следует, что $J_1 < J + \mu^2 I$, $J_1' < J' + \mu^2 I'$ и, на основании (79),

$$J_1 < J\left(1 + \frac{\mu^2}{mq^{2/3}}\right), \quad J_1' < J'\left(1 + \frac{\mu^2}{mq^{2/3}}\right). \tag{81}$$

С другой стороны, в силу (80) и (52_1),

$$J_1 \geqslant J, \quad J_1' \geqslant J'.$$

Эти последние неравенства и (81) приводят к двум следующим:

$$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J}{J'}\left(1+\frac{\mu^2}{mq^{2/3}}\right), \quad \frac{J_1}{J_1'} > \frac{J}{J'} \quad \frac{1}{1+\dfrac{\mu^2}{mq^{2/3}}} \quad .$$

Отсюда при помощи (78) выводим

$$\frac{J}{J'}\left(1+\frac{\mu^2}{mq^{2/3}}\right) > \left(\frac{1}{2}-\frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}+\frac{A}{\mu}\right),$$

$$\frac{J}{J'} \quad \frac{1}{1+\dfrac{\mu^2}{mq^{2/3}}} < \left(\frac{1}{2}+\frac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{\mu}\right),$$

или

$$J' < m'J, \quad J < m'J', \tag{82}$$

где положено $m'=\left(1+\dfrac{\mu^2}{mq^{2/3}}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{A}{\mu}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{A}{\mu}\right)$. Здесь μ – число совершенно произвольное, подчиненное единственному условию $\mu > 2A$. Положив, например $\mu^2 = q^{1/3}$ и выбрав q достаточно большим, удовлетворим предыдущему неравенству, а для m' получим выражение

$$m'=\left(1+\frac{1}{mq^{1/3}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{A}{q^{1/6}}\right)\Big/\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{q^{1/6}}\right),$$

т.е. число, зависящее только от вида поверхности (S), ибо таковы же числа m и A, и от произвольно взятого числа q.

Выбирая q достаточно большим, можем сделать число m' сколь угодно близким к единице.

Неравенства (82) доказывают следующую теорему.

Фундаментальная теорема Пуанкаре – Зарембы. *Пусть V есть потенциал простого слоя, представляющийся в виде*

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_p V_p,$$

где V_k $(k=1, 2, \ldots, p)$ суть заданные потенциалы простого слоя, а α_k $(k=1, 2, \ldots, p)$ суть некоторые постоянные. Задав произвольно целое число q, всегда можем выбрать затем число p и постоянные α_k так, что будут иметь место неравенства вида

$$\frac{1}{m'} < \int \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau' \Big/ \int \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau < m', \tag{83}$$

где число m' имеет вид

$$m'=\left(1+\frac{1}{mq^{1/3}}\right)\frac{q^{1/6}+2A}{q^{1/6}-2A}, \tag{83$_1$}$$

a m и A суть определенные постоянные, зависящие от вида поверхности (S).

Число m' при достаточно большом q (и соответственно p) может быть сделано сколь угодно близким к единице.

Неравенство (83) *справедливо для всякой поверхности Ляпунова.*

21. При помощи функции F п. 1 (обобщенный потенциал простого слоя) можно доказать ряд других неравенств, имеющих важные применения, в особенности в теории фундаментальных функций.

Предположим, что в интеграле (1) (п. 4) под f на поверхности (S) подразумеваются значения, которые принимает на этой поверхности некоторый потенциал простого слоя (или, общее, функция, обладающая свойствами потенциала простого слоя). Введем следующие обозначения:

$$K(F) = \int \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 dT, \quad K(F, f) = \int \Sigma \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dT,$$

$$L(F) = \int F^2 dT, \quad L(F, f) = \int Ff\, dT, \tag{84}$$

$$M(F) = \int F^2 ds, \quad M(F, f) = \int Ff\, ds,$$

и предположим, что функция f выбрана так, что все фигурирующие в этих формулах интегралы имеют определенный смысл.

Приняв во внимание равенства (2) и (4), получаем при помощи преобразований Грина

$$K(F) + \mu^2 L(F) = M(F, f) > 0,$$

$$K(F, f) + \mu^2 L(F, f) = M(f).$$

Применив ко второму из этих равенств неравенство Буняковского – Коши, получаем

$$M^2(f) \leq [K(F) + \mu^2 L(F)]\ [K(f) + \mu^2 L(f)],$$

откуда, в силу первого из двух предыдущих равенств,

$$M^2(f) \leq M(F, f)\ [K(f) + \mu^2 L(f)] \leq$$

$$\leq [K(f) + \mu^2 L(f)]\ [M(F) M(f)]^{1/2}. \tag{85}$$

Из равенства (1) (п. 4) выводим

$$F^2 < \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{f^2 e^{-\mu r}}{r} ds \int \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Так как, в силу (7),

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-\mu r}}{r} ds < \frac{A}{\mu},$$

ибо в данном случае $M = 1$, то

$$F^2 < \frac{A}{4\pi\mu} \int \frac{f^2 e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Отсюда

$$\int F^2\,ds = M(F) \leqslant \frac{A^2}{\mu^2} \int f^2\,ds = \frac{A^2}{\mu^2} M(f).$$

При помощи этого неравенства приводим (85) к виду

$$M(f) \leqslant \frac{A}{\mu}\,[K(f) + \mu^2 L(f)]. \tag{86}$$

Предположим, что

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

где f_k суть функции того же характера, что и f, а α_k – произвольные постоянные.

На основании леммы Зарембы (предыдущая гл., п. 40) мы можем, задав произвольно число q, подобрать затем число p и коэффициенты α_k таким образом, что будет

$$L(f) \leqslant \frac{1}{mq^{2/3}} K(f).$$

При этом неравенство (86) обратится в следующее:

$$M(f) \leqslant \frac{A}{\mu}\left(1 + \frac{\mu^2}{mq^{2/3}}\right) K(f).$$

Здесь μ – произвольное положительное число, которым можем распорядиться по усмотрению. Положив $\mu = q^{1/3}$, получим

$$M(f) \leqslant \frac{A}{q^{1/3}}\left(1 + \frac{1}{m}\right) K(f),$$

откуда, приняв во внимание обозначения (84), выводим

$$\int f^2\,ds \Big/ \left[\int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau'\right] \leqslant N/q^{1/3}.$$

Получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть f есть линейная однородная функция некоторого числа p произвольных параметров α_k:*

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

где f_k суть функции, обладающие свойствами потенциала простого слоя. Задав произвольно число q, всегда можно распорядиться выбором числа p и коэффициентов α_k так, что будет иметь место неравенство вида

$$\int f^2\,ds \Big/ \left[\int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau'\right] < N/q^{1/3}, \tag{87}$$

где N есть постоянная, зависящая только от вида поверхности (S).

Доказанная теорема справедлива для какой угодно поверхности Ляпунова.

Аналогичная теорема была указана мною впервые в 1899 г. в заметке "Sur l'existence des fonctions fondamentales", а только что доказанная –

в заметке того же заглавия в 1901 г. Более подробное доказательство опубликовано в упомянутом выше мемуаре "Sur les problèmes fondamentaux etc."*). При помощи этой теоремы мы дадим впоследствии строгое доказательство существования фундаментальных функций. Ле Руа для всякой поверхности Ляпунова.

22. Доказательство предыдущей теоремы основано только на лемме Зарембы (п. 40. гл. IV), которая будет справедлива при всяком p, удовлетворяющем условию $p \geqslant n^2 + 2q + 1$, где n есть целое число, подчиненное одному неравенству $n \geqslant q^{1/3}$.

Задав определенным образом q и затем n, положим $p' = n^2 + 2q + 1$, а за p примем число $p = p' + p''$, где p'' – какое угодно целое число.

Неравенство (87) будет иметь место, каково бы ни было целое неотрицательное число p'', коль скоро подчиним p коэффициентов α_k совокупности $p' - 1$ линейных однородных уравнений, правило составления которых указано при доказательстве леммы Зарембы. При этом остальные $p'' + 1$ коэффициентов останутся произвольными. Этими последними, выбрав соответствующим образом число p'', на основании фундаментальной теоремы Пуанкаре – Зарембы, можно распорядиться так, что будут соблюдены неравенства

$$\frac{1}{m'} < \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau' < m', \tag{88}$$

где число m' определяется равенством (83_1).

Подчиним произвольное число q условию $q^{1/6} > 4A$. При этом получим $m' < 3\left(1 + \dfrac{1}{16mA^2}\right) = m''$, где m'' есть число, зависящее только от вида данной поверхности (S). При этом из (88) получим

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau' < m'' \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau.$$

Так как при указанном выборе постоянных α_k будет одновременно соблюдено и неравенство (87), то будем иметь

$$\int f^2\, ds \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau < N(1 + m'')/q^{1/3} = Q/q^{1/3},$$

где Q есть число, зависящее исключительно от вида поверхности (S).

Получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть*

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

где f_k суть функции, обладающие свойствами потенциала простого слоя, α_k – пока неопределенные постоянные. Задав произвольно целое число q, можно распорядиться числом p и коэффициентами α_k, подчинив их системе

---

*) W. Stekloff. "Sur l'existence des fonctions fondamentales" (Paris, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 27 mars 1899 et 9 septembre 1901); см. также указанный мемуар (Annales de l'École Normale, 3 sér., T. XIX, novembre 1902, p. 495).

$p - 1$ линейных однородных уравнений, так, что для всякой поверхности Ляпунова будет иметь место неравенство вида

$$\int f^2\,ds \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau < Q/q^{1/3}, \tag{89}$$

где Q есть положительная постоянная, зависящая только от вида данной поверхности (S).

Эта теорема была доказана мною в сочинении "Общие методы решения основных задач математической физики"*) для поверхностей, допускающих преобразование Пуанкаре. При помощи это теоремы доказано мною в упомянутой выше заметке в "Comptes Rendus" (27 mars 1899) существование особого рода фундаментальных функций, полная теория которых изложена затем в последней главе диссертации "Общие методы решения и т.д." (Харьков, 1901).

Приведенное здесь доказательство устраняет существенное ограничение общности теоремы, устанавливая ее справедливость для всех поверхностей Ляпунова, независимо от преобразования Пуанкаре.

23. Применим лемму Зарембы к случаю, когда f есть гармоническая функция внутри данной поверхности (S), удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = \varphi \quad \text{на поверхности } (S), \tag{90}$$

а φ имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_p \varphi_p$$

и подчинена единственному условию $\int \varphi\, ds = 0$.

Мы знаем (гл. II), что для всякой поверхности, к которой приложим принцип Робена, функция f представляется в виде потенциала простого слоя. Мы докажем впоследствии, что это будет справедливо для любой поверхности Ляпунова, пока же, вообще, будем рассматривать поверхности, для которых решение задачи Неймана (функция f) представляется в виде потенциала простого слоя**).

Применив к рассматриваемому случаю теорему предыдущего пункта, получим при соответствующем выборе числа p и постоянных α_k:

$$\int f^2\,ds \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau < Q/q^{1/3}. \tag{89_1}$$

Но, по теореме Грина и на основании (90),

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau = \int f\varphi ds,$$

откуда

$$\left(\int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau \right)^2 \leqslant \int f^2\,ds \int \varphi^2\,ds,$$

*) Харьков, 1901, стр. 63.

**) См. формулы (77), (76_1) гл. II. (*Прим. ред.*)

или

$$\int f^2\,ds \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau \geqslant \sqrt{\int f^2\,ds} \Big/ \sqrt{\int \varphi^2\,ds}.$$

Следовательно, в силу (89_1),

$$\int f^2\,ds \,/ \int \varphi^2\,ds < Q^2/q^{2/3}.$$

Таким образом, прямым следствием предыдущей теоремы является следующая

Теорема. *Пусть*

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_p\varphi_p$$

есть функция, непрерывная на поверхности (S) *и подчиненная условию* $\int \varphi\,ds = 0$, *а* f *есть гармоническая функция внутри* (S), *удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = \varphi \quad \text{на поверхности } (S)$$

и представляющаяся в виде потенциала простого слоя. Задав сначала число q, *можно затем подобрать число* p *и коэффициенты* α_k *в выражении* φ *так, что будет иметь место неравенство вида*

$$\int f^2\,ds \,/ \int \varphi^2\,ds < Q^2/q^{2/3},$$

где Q^2 *есть число, зависящее только от вида поверхности* (S).

24. Теперь мы можем приступить к решению следующей важной задачи, которое позволит нам распространить все полученные выше результаты на все поверхности, удовлетворяющие условиям п. 17 гл. I:

Найти потенциал простого слоя V, *удовлетворяющий условию*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda\frac{\partial V}{\partial n} - 2f \quad \text{на поверхности } (S), \tag{91}$$

где λ *есть некоторый параметр, а* f *— заданная непрерывная функция координат точек поверхности* (S).

Решение этой задачи позволит нам распространить принцип Робена на все поверхности Ляпунова и в то же время приведет к теории фундаментальных функций, подробное изучение которых с их различными приложениями составит предмет следующего тома сочинения.

Будем искать решение уравнения (91) в виде ряда

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^k V_{k+1} + \ldots \tag{92}$$

Удовлетворяя условию (91), получим следующие уравнения для определения функций V_k:

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{f}{r}\,ds, \;\ldots,\; V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds, \tag{93}$$

т.е. те самые функции, которые были введены нами в п. 6 гл. II (уравнение (19)).

Рассмотрим следующие интегралы:

$$J_k = \int \Sigma \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau, \quad J'_k = \int \Sigma \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau',$$

$$J_{m,n} = \int \Sigma \frac{\partial V_m}{\partial x} \frac{\partial V_n}{\partial x} d\tau, \quad J'_{m,n} = \int \Sigma \frac{\partial V_m}{\partial x} \frac{\partial V_n}{\partial x} d\tau', \tag{94}$$

$$W_k = J_k + J'_k. \tag{94$_1$}$$

Из равенств (93) на основании известных свойств потенциала простого слоя выводим

$$\frac{\partial V_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{k,e}}{\partial n} = -2 \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \tag{95}$$

и

$$\frac{\partial V_{k-1,i}}{\partial n} = \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} - \frac{\partial V_{k-2}}{\partial n}, \quad \frac{\partial V_{k-1,e}}{\partial n} = \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k-2}}{\partial n}. \tag{95$_1$}$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_{k-1,i}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k-1,e}}{\partial n} = 2 \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}.$$

Сопоставляя это равенство с (95), получаем

$$\frac{\partial V_{k,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{k,e}}{\partial n} = -\left(\frac{\partial V_{k-1,i}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k-1,e}}{\partial n} \right). \tag{96}$$

Применим к интегралам $J_{k,k+1}$ и $J'_{k,k+1}$ преобразования Грина. Получаем

$$J_{k,k+1} = \int V_k \frac{\partial V_{k+1,i}}{\partial n} ds = \int V_{k+1} \frac{\partial V_{k,i}}{\partial n} ds,$$

$$J'_{k,k+1} = -\int V_k \frac{\partial V_{k+1,e}}{\partial n} ds = -\int V_{k+1} \frac{\partial V_{k,e}}{\partial n} ds,$$

откуда

$$J'_{k,k+1} - J_{k,k+1} = -\int V_k \left(\frac{\partial V_{k+1,i}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k+1,e}}{\partial n} \right) ds =$$

$$= -\int V_{k+1} \left(\frac{\partial V_{k,i}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k,e}}{\partial n} \right) ds. \tag{97}$$

Из этого равенства при помощи (96) выводим

$$J'_{k,k+1} - J_{k,k+1} = \int V_k \left(\frac{\partial V_{k+2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{k+2,e}}{\partial n} \right) ds.$$

Но то же преобразование Грина дает

$$J_{k,k+2} + J'_{k,k+2} = \int V_k \left(\frac{\partial V_{k+2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{k+2,e}}{\partial n} \right) ds.$$

Следовательно,

$$J'_{k,k+1} - J_{k,k+1} = J_{k,k+2} + J'_{k,k+2}. \qquad (98)$$

Применим теперь преобразование Грина к интегралу $J_{k+1} + J'_{k+1}$. Получаем

$$J_{k+1} + J'_{k+1} = \int V_{k+1} \left(\frac{\partial V_{k+1,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{k+1,e}}{\partial n} \right) ds,$$

откуда, в силу (96),

$$J_{k+1} + J'_{k+1} = -\int V_{k+1} \left(\frac{\partial V_{k,i}}{\partial n} + \frac{\partial V_{k,e}}{\partial n} \right) ds,$$

т.е., на основании (97),

$$W_{k+1} = J_{k+1} + J'_{k+1} = J'_{k,k+1} - J_{k,k+1} \qquad (99)$$

и в то же время, в силу (98),

$$W_{k+1} = J_{k+1} + J'_{k+1} = J_{k,k+2} + J'_{k,k+2} =$$

$$= \int \Sigma \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_{k+2}}{\partial x} \, dT. \qquad (100)$$

25. Равенство (99) дает

$$(J_{k+1} + J'_{k+1})^2 = J^2_{k,k+1} - 2J_{k,k+1} J'_{k,k+1} + J'^2_{k,k+1}.$$

Так как на основании неравенства Коши – Буняковского

$$J^2_{k,k+1} \leqslant J_k J_{k+1}, \quad J'^2_{k,k+1} \leqslant J'_k J'_{k+1}$$

и, кроме того,

$$2\sqrt{J_k J'_{k+1} J'_k J_{k+1}} \leqslant J_k J'_{k+1} + J'_k J_{k+1},$$

то

$$(J_{k+1} + J'_{k+1})^2 \leqslant J_k J_{k+1} + J_k J'_{k+1} + J'_k J_{k+1} + J'_k J'_{k+1} =$$

$$= (J_k + J'_k)(J_{k+1} + J'_{k+1}),$$

т.е.

$$W_{k+1}/W_k = (J_{k+1} + J'_{k+1}) / (J_k + J'_k) \leqslant 1. \qquad (101)$$

Применив затем неравенство Коши – Буняковского к равенству (100), получаем $W^2_{k+1} \leqslant W_k W_{k+2}$. Это неравенство и (101) показывают, что, какова бы ни была заданная функция f, интегралы W_k всегда удовлетворяют следующим неравенствам Шварца:

$$W_2/W_1 \leqslant W_3/W_2 \leqslant \ldots \leqslant W_{k+1}/W_k \leqslant \ldots \leqslant 1. \qquad (102)$$

26. Предположим для простоты, что λ сохраняет положительные значения, и покажем, что ряд (92) сходится абсолютно и равномерно на поверхности (S), пока $\lambda < 1$, какова бы ни была исходная функция f в равенствах (93).

Мы уже доказали в гл. II, что функция V_k связаны между собой на поверхности (S) соотношениями

$$V_k = \frac{1}{2\pi} \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds. \tag{103}$$

Пусть p_0 – какая-либо точка поверхности (S); строим опять цилиндр вращения радиуса $R < D$ с осью, направленной по нормали n к (S) в точке p_0, и обозначим, как в п. 19 гл. I, через $d\sigma$ элемент поверхности площадки (σ), вырезанной на (S) взятым цилиндром, через ds' – элемент поверхности части (S), лежащей вне (σ). Для всякой точки p площадки (σ), как показано в гл. I (неравенства (124_1) п. 38),

$$|r\cos\varphi/\cos\vartheta| \leqslant c\rho^2\,{}^{*)}, \quad \cos\vartheta > 1/2,$$

где, напомним, ρ есть расстояние точки p от оси цилиндра. Отсюда $|\cos\varphi|/r^2 \leqslant c\rho^2/r^3 \leqslant c/\rho$ и

$$K = \frac{1}{2\pi} \left| \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma \right| \leqslant 2cM_{k-1}R,$$

где M_{k-1} есть максимум $|V_{k-1}|$ на поверхности (S).

Очевидно, далее, что

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \left| \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds' \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int V_{k-1}^2 ds' \int \frac{\cos^2\varphi}{r^4} ds' \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int V_{k-1}^2 ds \int \frac{\cos^2\varphi}{r^4} ds' \right)^{1/2}.$$

Так как

$$\int \frac{\cos^2\varphi}{r^4} ds' < \frac{S}{R^4},$$

а в силу леммы I гл. IV (п. 26)

$$\int V_{k-1}^2 ds \leqslant l_0 \int \Sigma \left(\frac{\partial V_{k-1}}{\partial x} \right)^2 dT = l_0 W_{k-1},$$

то

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \left| \int V_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_1 \right| \leqslant \frac{\sqrt{Sl_0}}{2\pi R^2} \sqrt{W_{k-1}}.$$

Заметив, что $|V_k| \leqslant K + K_1$, получаем

$$M_k \leqslant A\sqrt{W_{k-1}} + BRM_{k-1}, \tag{104}$$

где A и B – определенные постоянные, зависящие только от вида поверхности (S).

Неравенство (104) справедливо при всяком k, начиная с $k = 2$.

---

*) Значок 0 всюду опускаем.

Давая в (104) значку k ряд последовательных значений и складывая полученные неравенства, умноженные на λ^{k-1}, находим

$$\sum_{k=2} \lambda^{k-1} M_k \leqslant A \sum_{k=2} \lambda^{k-1} \sqrt{W_{k-1}} +$$

$$+ BR\lambda \sum_{k=2} \lambda^{k-1} M_k + BR\lambda M_1,$$

или

$$(1 - BR\lambda) \sum_{k=2} \lambda^{k-1} M_k \leqslant A \sum_{k=2} \lambda^{k-1} \sqrt{W_{k-1}} + BR\lambda M_1. \tag{105}$$

Положим $l = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}}$. Число R всегда можно выбрать так, чтобы

$$BR < 1/l. \tag{106}$$

Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \lambda^{k-1} \sqrt{W_{k-1}}$ сходится для всех значений λ, меньших l, ибо радиус круга сходимости этого ряда равен l. Для всех этих значений λ, в силу условия (106), $1 - BR\lambda > 0$. Следовательно, на основании (105) радиус ρ' круга сходимости ряда

$$M_1 + \lambda M_2 + \lambda^2 M_3 + \ldots + \lambda^{k-1} M_k + \ldots$$

не меньше l. Итак,

$$\rho' \geqslant l.$$

Радиус ρ круга сходимости ряда (92) во всяком случае не менее ρ'. Следовательно

$$\rho \geqslant \rho' \geqslant l. \tag{107}$$

27. Умножим теперь ряд (92) на $\left(\dfrac{\partial V_{2,i}}{\partial n} - \dfrac{\partial V_{2,e}}{\partial n} \right) ds$ и интегрируем результат по всей поверхности (S). Получим ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \int V_k \left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2,e}}{\partial n} \right) ds. \tag{108}$$

Радиус ρ'' круга сходимости этого ряда не менее радиуса ρ круга сходимости ряда (92), т.е.

$$\rho'' \geqslant \rho. \tag{109}$$

Заменив в (108) λ на $-\lambda$, получим ряд $R(-\lambda)$, радиус круга сходимости которого есть также ρ''.

Радиус ρ''' круга сходимости ряда $R(\lambda) - R(-\lambda)$ во всяком случае не меньше ρ'', т.е.

$$\rho''' \geqslant \rho''. \tag{110}$$

Имеем

$$R(\lambda) - R(-\lambda) = 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2(k-1)} \int V_{2k} \left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2,e}}{\partial n} \right) ds.$$

При помощи формул преобразования Грина и равенства (96) получаем

$$\int V_{2k}\left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{2,e}}{\partial n}\right)ds=\int V_2\left(\frac{\partial V_{2k,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{2k,e}}{\partial n}\right)ds=$$

$$=-\int V_2\left(\frac{\partial V_{2k-1,i}}{\partial n}+\frac{\partial V_{2k-1,e}}{\partial n}\right)ds=$$

$$=-\int V_{2k-1}\left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n}+\frac{\partial V_{2,e}}{\partial n}\right)ds=\int V_{2k-1}\left(\frac{\partial V_{3,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{3,e}}{\partial n}\right)ds$$

и, вообще,

$$\int V_{2k}\left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{2,e}}{\partial n}\right)ds=\int V_{2k-s}\left(\frac{\partial V_{s+2,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{s+2,e}}{\partial n}\right)ds,$$

где s — какое угодно целое число, меньшее $2k$. Положив $s=k-1$, получим

$$\int V_{2k}\left(\frac{\partial V_{2,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{2,e}}{\partial n}\right)ds=$$

$$=\int V_{k+1}\left(\frac{\partial V_{k+1,i}}{\partial n}-\frac{\partial V_{k+1,e}}{\partial n}\right)ds=W_{k+1}.$$

Следовательно,

$$R(\lambda)-R(-\lambda)=2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2(k-1)}W_{k+1}.$$

Это равенство показывает, что

$$\rho'''=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}}=l.$$

Сопоставляя это неравенство с (110) и (109), заключаем, что $\rho\leqslant l$. Это последнее неравенство и (107) приводят к заключению, что

$$\rho=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}}=l. \qquad (110_1)$$

Итак, радиус равномерной сходимости ряда (92) на поверхности (S) в точности равен l, т.е. *ряд этот сходится равномерно при всех значениях параметра* λ, *модуль которых меньше единицы*, ибо, на основании неравенств (102),

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}}\geqslant 1,$$

какова бы ни была функция f. Отсюда на основании теоремы Вито Вольтерра (гл. I) заключаем, что *ряд* (92) *сходится равномерно при указанных значениях* λ *во всей области* (D) *и представляет функцию, гармоническую внутри* (S).

28. Та же теорема, имеющая место и для области (D'), внешней относительно (S), показывает, что ряд (92) сходится равномерно и вне (S) и

представляет гармоническую функцию в области (D'), пока

$$|\lambda| < 1. \tag{111}$$

Так как все V_k по самому построению суть потенциалы простого слоя, то, очевидно, $V_i = V_e = \bar{V}$, т.е. гармоническая внутри и вне (S) функция V, определяемая рядом (92) для значений λ, удовлетворяющих условию (111), непрерывна во всем пространстве и, следовательно, представляется в виде потенциала простого слоя *).

Функция V, как показывает сам способ ее построения, удовлетворяет формально условию (91). Можно показать, что она действительно удовлетворяет этому условию, какова бы ни была заданная функция f (непрерывная на поверхности (S)), для значений λ, модуль которых не превосходит некоторого числа, меньшего единицы, но мы на этом останавливаться не станем, а покажем, что *радиус сходимости ряда* (92) *может быть сделан при соответствующем выборе функции f сколь угодно большим.*

Положим

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p \tag{111_1}$$

и составим по формулам (93) функции V_k, соответствующие этому значению f. Каждая из функций V_k представится в виде линейной однородной функции от коэффициентов α_k.

Возьмем функцию

$$U = \alpha V_k + \beta V_{k+1}, \tag{112}$$

где α и β — какие угодно постоянные, а k — какое либо целое число. Функция U также будет линейной однородной функцией p параметров α_k. Положим

$$J = \int \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau, \quad J' = \int \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau'.$$

На основании теоремы Пуанкаре — Зарембы числом p и постоянными α_k можно распорядиться так, что будет

$$J \leqslant mJ', \quad J' \leqslant mJ, \tag{113}$$

где *m есть постоянная, которую можно сделать сколь угодно близкой к единице,* выбрав число p достаточно большим (см. п. 20) **).

В силу (112) получаем $J = \alpha^2 J_k + 2\alpha\beta J_{k,k+1} + \beta^2 J_{k+1}$, $J' = \alpha^2 J'_k + 2\alpha\beta J'_{k,k+1} + \beta^2 J'_{k+1}$. При помощи этих равенств приводим неравенства (113) к виду

$$\begin{aligned} &\alpha^2(mJ'_k - J_k) + 2\alpha\beta(mJ'_{k,k+1} - J_{k,k+1}) + \\ &+ \beta^2(mJ'_{k+1} - J_{k+1}) \geqslant 0, \\ &\alpha^2(mJ_k - J'_k) + 2\alpha\beta(mJ_{k,k+1} - J'_{k,k+1}) + \\ &+ \beta^2(mJ_{k+1} - J'_{k+1}) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{114}$$

---

*) См. п. 35. (*Прим. ред.*)

**) Если взять число p достаточно большим, то постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ можно выбрать не зависящими от коэффициентов α и β (*Прим. ред.*)

Заменив в первом из этих неравенств β на $-\beta$, получим

$$\alpha^2(mJ'_k - J_k) - 2\alpha\beta(mJ'_{k,k+1} - J_{k,k+1}) + \beta^2(mJ'_{k+1} - J_{k+1}) \geqslant 0.$$

Сложив это неравенство с (114), придем к следующему:

$$\alpha^2(m-1)(J_k + J'_k) + 2\alpha\beta(m+1)(J_{k,k+1} - J'_{k,k+1}) + \\ + \beta^2(m-1)(J_{k+1} + J'_{k+1}) \geqslant 0,$$

левая часть которого всегда неотрицательная квадратичная форма двух аргументов α и β. Дискриминат этой формы должен быть неотрицательным, т.е. должно иметь место неравенство

$$(m-1)^2(J_k + J'_k)(J_{k+1} + J'_{k+1}) \geqslant (m+1)^2(J_{k,k+1} - J'_{k,k+1})^2,$$

которое при помощи (99) и принятых в п. 24 обозначений приводится к виду

$$W_{k+1}/W_k \leqslant q^2, \tag{115}$$

где положено $q^2 = \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2$. Число q в силу сказанного выше может быть сделано сколь угодно близким к нулю при соответствующем выборе числа p и постоянных α_k; иначе говоря, $1/q$ можно сделать сколь угодно большим.

29. Итак, взяв какое угодно целое число k, можно найти такую совокупность (D_k) постоянных α_j, для которой в силу неравенств (102) будут соблюдаться неравенства

$$W_2/W_1 \leqslant W_3/W_2 \leqslant \ldots \leqslant W_{k+1}/W_k \leqslant q^2. \tag{116}$$

Но постоянными α_j можно распорядиться и так, чтобы имели место неравенства

$$W_2/W_1 \leqslant W_3/W_2 \leqslant \ldots \leqslant W_{k+1}/W_k \leqslant W_{k+2}/W_{k+1} \leqslant q^2. \tag{116$_1$}$$

Так как неравенство $W_{k+2}/W_{k+1} \leqslant q^2$ влечет за собой все неравенства (116) (в силу (102)), то совокупность (D_{k+1}) значений α_j, при которых имеют место неравенства (116$_1$), целиком заключается в совокупности (D_k). Увеличивая постепенно число k, получим последовательный ряд совокупности значений α_j:

$$(D_k), (D_{k+1}), \ldots, (D_{k+n}), \ldots,$$

где n есть какое угодно целое число, из которых каждая будет заключаться в каждой из всех ей предшествующих. Так как при любом данном k совокупность (D_k) есть совокупность вполне определенная, то тем же свойством обладает и совокупность (D_{k+n}), в ней заключающаяся, и это справедливо при любом n.

Отсюда следует, что существует вполне определенная совокупность таких значений α_j, для которых неравенство (115) будет справедливо при любом k*).

---

*) Если под (D_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ понимать множество векторов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, лежащих на единичной сфере p-мерного пространства (для которых справедливы неравенства (116)), то получим систему вложенных друг в друга, очевидно, замкнутых множеств, которая имеет хотя бы одну общую точку. Так как эта общая точка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ лежит на единичной сфере, то $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1 \neq 0$. (*Прим. ред.*)

Таким образом, мы можем утверждать, что существует такая совокупность значений α_j, при которых будет иметь место неравенство

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}} > \frac{1}{q},$$

где q есть число, сколь угодно близкое к нулю.

Так как по предыдущему радиус ρ круга равномерной сходимости ряда (92) как раз равен l, то *можно*, следовательно, *найти такую совокупность значений постоянных* α_k, *что рассматриваемый ряд при указанном выборе исходной функции* f (см. (111_1)) *будет равномерно сходящимся при всех значениях* λ, *модуль которых небольше наперед заданного числа* A:

30. Покажем теперь, что при указанном выборе функции f функция V, определяемая рядом (92), представляется в виде потенциала простого слоя.

В п. 26 было показано, что этот ряд сходится абсолютно для положительных значений λ, меньших l. Так как соответствующим выбором функции f, как доказано в предыдущем пункте, число l можно сделать бóльшим наперед заданного числа A, то при $\lambda = A$ ряд

$$|V_1| + \lambda |V_2| + \ldots + \lambda^k |V_k| + \ldots$$

будет сходящимся.

Следовательно, начиная с некоторого значения k, во всяком случае будем иметь $A^k \,|V_k| < C$, где C есть определенная положительная постоянная, или

$$|V_k| < C\tau^k, \tag{117}$$

где

$$\tau = 1/A \tag{117_1}$$

есть, очевидно, правильная дробь *).

Неравенство (117) можно, как легко видеть, считать справедливым при всяком k.

При помощи неравенства (117) легко доказать, что *при сделанном выборе функции f каждый из потенциалов V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) может быть представлен в виде потенциала двойного слоя во всех точках области* (D), *ограниченной поверхностью* (S).

Положим

$$\mu_k = (\bar V_k - \bar V_{k+1}) + (\bar V_{k+2} - \bar V_{k+3}) + \ldots + (\bar V_{k+2p} - \bar V_{k+2p+1}) + \ldots \tag{118}$$

Неравенство (117) дает

$$|\bar V_{k+2p} - \bar V_{k+2p+1}| < 2C\tau^k\tau^{2p} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{118_1}$$

Отсюда следует, что ряд (118) сходится абсолютно и равномерно на поверхности (S).

С другой стороны, ряд

$$|\bar V_k| + |\bar V_{k+1}| + \ldots + |\bar V_{k+2p}| + |\bar V_{k+2p+1}| + \ldots$$

также сходится равномерно на поверхности (S). Вследствие этого можем

*) Число $A > 1$ можно считать, например, натуральным. (*Прим. ред.*)

писать

$$\mu_k = \bar{V}_k - (\bar{V}_{k+1} - \bar{V}_{k+2}) - (\bar{V}_{k+3} - \bar{V}_{k+4}) + \ldots, \tag{119}$$

причем, в силу (117) и (118_1),

$$|\mu_k| \leq \frac{2C}{1-\tau^2} \tau^k = C_1 \tau^k. \tag{120}$$

Составим теперь потенциал двойного слоя

$$U_k = \frac{1}{2\pi} \int \mu_k \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

На основании известных свойств этого потенциала получаем

$$U_{k,i} = \bar{U}_k + \mu_k \quad \text{на поверхности } (S). \tag{121}$$

Но, в силу (118) и (103),

$$\bar{U}_k = (\bar{V}_{k+1} - \bar{V}_{k+2}) + (\bar{V}_{k+3} - \bar{V}_{k+4}) + \ldots$$

Сопоставляя это равенство с (121) и (119), заключаем, что

$$U_{k,i} = \bar{V}_k = V_{k,i} \quad \text{на поверхности } (S),$$

т.е. в силу известных свойств гармонических функций

$$V_k = U_k \quad \text{внутри } (S).$$

Обозначая через P точку, лежащую на нормали n к (S) в некоторой ее точке p на расстоянии δ от этой последней точки, и придерживаясь принятых в гл. I обозначений, получаем

$$\left(\frac{\partial V_k}{\partial n}\right)_P = \left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_P \tag{122}$$

— равенство, которым мы воспользуемся в следующем пункте.

31. Применим первую теорему Ляпунова (гл. I, п. 26) к потенциалу простого слоя V_k. Полагая, как и раньше $\rho_k = \dfrac{\partial V_k}{\partial n}$ и обозначая через ρ_k' и ρ_k значения этой функции в двух точках p' и p поверхности (S), лежащих на расстоянии r друг от друга, а через R_k — максимум $|\rho_k|$ на поверхности (S), получаем

$$|\rho_k' - \rho_k| \leq QR_{k-1} r^{1/2}.$$

Применим теперь неравенство (106) гл. I к потенциалу

$$V_k = -\frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{1}{r} ds.$$

В данном случае нужно положить (см. пп. 31 и 32 гл. I) $J = \rho_k$, $-2\pi\mu^0 = \rho_{k-1}$, $\mu_0 = R_{k-1}$, $N = QR_{k-2}$, $\beta = 1/2$. Таким образом, получим

$$\left| \left(\frac{\partial V_k}{\partial n}\right)_P - (\rho_k - \rho_{k-1}) \right| \leq (Q_2 R_{k-2} + Q_1 R_{k-1}) \delta^{1/2},$$

где Q_1 и Q_2 есть определенные числа, зависящие только от вида поверхности (S). Отсюда, в силу равенства (122),

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| \leqslant (Q_2 R_{k-2} + Q_1 R_{k-1})\delta^{1/2} + \left|\left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_p\right|. \tag{123}$$

32. Рассмотрим потенциал двойного слоя U_k. Повторив рассуждения п. 35 гл. I, получим

$$-\left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_p = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu_k}{r^3}(\cos\vartheta + 3\cos\varphi\cos\psi)\,ds\,^{*)}. \tag{124}$$

Отсюда

$$\left|\left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_p\right| \leqslant \frac{2(\mu_k)}{\pi}\int \frac{ds}{r^3}, \tag{125}$$

где через (μ_k) обозначен максимум $|\mu_k|$ на поверхности (S).

Построив опять, как и в гл. I, цилиндр вращения радиуса $R < D$ с осью, направленной по нормали n к поверхности (S) в точке p, и употребляя принятые там обозначения, получим

$$\int \frac{ds}{r^3} = \int \frac{ds_1}{r^3} + \int \frac{d\sigma}{r^3},$$

причем будет иметь место неравенство

$$\delta\int \frac{ds_1}{r^3} < \frac{S}{R^3}\delta,$$

которое получится из (88) гл. I (п. 27), если в нем заменить z на δ и положить $\mu = 1$, и равенство

$$\delta\int \frac{d\sigma}{r^3} = 2\pi + \delta Q,$$

вытекающее из равенства (97) той же главы (п. 30), если в нем ϵ заменить на δ. Из сказанного следует, что произведение

$$\delta\int \frac{ds}{r^3} < K',$$

где K' есть определенное число, каково бы ни было число δ.

Неравенство (125) приводит, таким образом, к следующему:

$$\left|\left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_p\right| \leqslant K\frac{(\mu_k)}{\delta},$$

откуда, в силу (120),

$$\left|\left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_p\right| < KC_1\frac{\tau^k}{\delta} = K_1\frac{\tau^k}{\delta}.$$

*) В рассматриваемом случае под знаком интеграла вместо $\mu_k - \mu_k^0$, где μ_k^0 есть величина, соответствующая μ^0 формулы (116) гл. I, пишем просто μ_k, что возможно, ибо интеграл правой части равенства (124) равен нулю, если заменить в нем μ_k на μ_k^0.

Так как δ есть величина вполне произвольная, то можем положить $\delta = c\tau^{\frac{2k}{3}}$, где c есть некоторая постоянная; положив затем

$$\sigma = \tau^{1/3}, \tag{125$_1$}$$

получим $\left|\left(\frac{\partial U_k}{\partial n}\right)_p\right| < \frac{K_1}{c}\ \sigma^k = n\sigma^k$, где n есть число, не зависящее от k, и $\delta^{1/2} = \sqrt{c}\,\sigma^k$. Сопоставляя это равенство и предыдущее неравенство с (123), получаем

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| < (A_1 R_{k-1} + A_2 R_{k-2} + n)\,\sigma^k, \tag{126}$$

где A_1 и A_2 суть две постоянные, одинаковые для всех точек поверхности (S) и не зависящие от k.

33. Неравенство (126) дает

$$R_k = \max|\rho_k| < R_{k-1} + (A_1 R_{k-1} + A_2 R_{k-2} + n)\,\sigma^k. \tag{126$_1$}$$

Здесь под R_{k-1} и R_{k-2} подразумеваются

$$\max|\rho_{k-1}| \text{ и } \max|\rho_{k-2}| \tag{127}$$

на поверхности (S).

Неравенство (126$_1$) еще более усилится, если в нем под R_{k-1} и R_{k-2} подразумевать величины, бо́льшие чем (127), причем можем положить

$$R_k = R_{k-1} + (A_1 R_{k-1} + A_2 R_{k-2} + n)\,\sigma^k\ ^{*)}.$$

Введенные таким образом числа R_k будут удовлетворять условию $R_{k-1} < R_k$ при всяком k, вследствие чего получим

$$R_k < R_{k-1}(1 + m\sigma^k) + n\sigma^k,$$

где положено $m = A_1 + A_2$. Последнее неравенство можно написать так:

$$R_k + \frac{n}{m} < \left(R_{k-1} + \frac{n}{m}\right)(1 + m\sigma^k).$$

Отсюда выводим

$$R_k + \frac{n}{m} < \left(R_0 + \frac{n}{m}\right)(1 + m\sigma)(1 + m\sigma^2)\ \ldots\ (1 + m\sigma^k).$$

Так как $\sigma < 1$, то произведение $(1 + m\sigma)(1 + m\sigma^2)\ldots(1 + m\sigma^k)$ стремится к определенному пределу $B > 1$ при беспредельном возрастании числа k. Поэтому при всяком k $R_k + \frac{n}{m} < B\left(R_0 + \frac{n}{m}\right)$. Это неравенство показывает, что R_k никогда не превосходит некоторого определенного положительного числа $L_1 = B\left(R_0 + \frac{n}{m}\right) - \frac{n}{m}$.

*) При $k \geq 2$; $R_0 = \max|f|$, $R_1 = \max|\rho_1|$. Очевидно, что при всех k справедливы неравенства $\max|\rho_k| < R_k$. (*Прим. ред.*)

Итак, $R_{k-1} < L_1$, $R_{k-2} < L_1$. При помощи этих неравенств выводим из (126)

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| < L\sigma^k \quad (\sigma < 1), \tag{128}$$

где $L = L_1(A_1 + A_2) + n$ есть определенное число, не зависящее от k.

34. Неравенство (128) по внешнему виду совпадает с неравенством, выражающим принцип Робена (неравенство (60) гл. II), но в рассматриваемом случае оно доказано не для какой угодно непрерывной функции f, а для функции f вида

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p, \tag{129}$$

где функции f_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ произвольны, но число p и постоянные α_k выбраны определенным образом.

Очевидно, что число p коэффициентов α_k можно выбрать так, что одновременно с теми линейными уравнениями, которым должны удовлетворять постоянные α_k для того, чтобы имело место неравенство (128), будет иметь место еще и следующее равенство:

$$\int f\,ds = \alpha_1 \int f_1\,ds + \alpha_2 \int f_2\,ds + \ldots + \alpha_p \int f_p\,ds = 0. \tag{129_1}$$

При этом исходная функция f в равенствах (93), последовательно определяющих все функции V_k, будет удовлетворять всем условиям, при которых справедливы рассуждения п. 18 гл. II. Повторив дословно эти рассуждения, из неравенства (128) выведем следующее:

$$|\rho^k| < L'\sigma^k, \tag{130}$$

где L' – определенное число, не зависящее ни от k, ни от положения точки p на поверхности (S).

Неравенство (130) показывает, что при сделанном выборе функций f ряд

$$f + \lambda\rho_1 + \lambda^2\rho_2 + \ldots + \lambda^k\rho_k + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно во всех точках поверхности (S), пока $|\lambda| < 1/\sigma$. Поэтому, если положим

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\,(f + \lambda\rho_1 + \lambda^2\rho_2 + \ldots + \lambda^k\rho_k + \ldots),$$

то можем писать

$$V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^{k-1}V_k + \ldots = \int \frac{\rho(\lambda)}{r}\,ds,$$

т.е. *функция V, определяемая рядом* (92), *представляется в виде потенциала простого слоя при всех значениях λ, модуль которых не превосходит числа* (см. равенства (125_1) и (117_1)) $1/\sigma = 1/\tau^{1/3} = A^{1/3} = A'$. Так как число A может быть сделано сколь угодно большим (п. 29), то таковым же свойством обладает и число A'.

Сопоставляя полученный результат с предложением п. 29, приходим к следующему выводу.

Теорема. *Положив в равенствах* (93)

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

где f_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ суть произвольные функции координат точек *верхности* (S), *непрерывные на этой поверхности, можно распорядиться выбором числа* p *и постоянных* α_k *так, что ряд*

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^{k-1} V_k + \ldots \tag{131}$$

будет сходиться равномерно во всей области (D) *(включая и точки поверхности* (S), *ограничивающей область* (D)*) и представляться в виде потенциала простого слоя при всех значениях параметра* λ *модуль которых меньше или равен наперед заданному числу* A'. *При этом потенциал простого слоя* V, *изображаемый рядом* (131), *будет действовать (а не только формально) удовлетворять на поверхности* (S) *условию*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial n} - 2f \quad \text{на поверхности } (S)\,^{*}). \tag{132}$$

35. Будем теперь подразумевать под f произвольно заданную функцию точек поверхности (S) и составим по формулам (93) функции V_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\rho_k = \dfrac{\partial V_k}{\partial n}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Положим затем

$$f_1 = \alpha_0 f + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \ldots + \alpha_p \rho_p \tag{133}$$

и составим функции

$$\begin{gathered} V_1' = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{f_1}{r}\, ds, \quad V_2' = -\frac{1}{2\pi} \int \rho_1' \frac{ds}{r}, \ldots, \\ V_k' = -\frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1}' \frac{ds}{r}, \quad \rho_k' = \frac{\partial V_k'}{\partial n} \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{134}$$

Имеем

$$V_1' = \alpha_0 V_1 + \alpha_1 V_2 + \ldots + \alpha_p V_{p+1},$$
$$V_2' = \alpha_0 V_2 + \alpha_1 V_3 + \ldots + \alpha_p V_{p+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_{k+1}' = \alpha_0 V_{k+1} + \alpha_1 V_{k+2} + \ldots + \alpha_p V_{k+p+1}.$$

Рассмотрим ряд

$$V' = V_1' + \lambda V_2' + \lambda^2 V_3' + \ldots + \lambda^{k-1} V_k' + \ldots$$

Положив

$$U_1 = V_2 + \lambda V_3 + \lambda^2 V_4 + \ldots,$$
$$U_2 = V_3 + \lambda V_4 + \lambda^2 V_5 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_p = V_{p+1} + \lambda V_{p+2} + \lambda^2 V_{p+3} + \ldots,$$

---

*) В этой теореме система функций $f_1, \ldots, f_p$, вообще говоря, не обязана быть линейно независимой. В случае, когда эта система линейно зависима, функция f может оказаться тождественно равной нулю (при $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 \neq 0$). Тогда, конечно, и построенный потенциал простого слоя V тождественно равен нулю. (*Прим. ред.*)

получим

$$V' = \alpha_0 V + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_p U_p, \tag{135}$$

где

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^{k-1} V_k + \ldots$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\lambda}(V - V_1), \\ U_2 &= \frac{1}{\lambda}(U_1 - V_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_p &= \frac{1}{\lambda}(U_{p-1} - V_p). \end{aligned} \tag{136}$$

Переписав уравнения (135) и (136) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_0 V + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_p U_p &= V', \\ V - \lambda U_1 &= V_1, \\ U_1 - \lambda U_2 &= V_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{p-1} - \lambda U_p &= V_p, \end{aligned}$$

получим систему $p+1$ линейных относительно $p+1$ величин V, U_1, $U_2, \ldots, U_p$ уравнений, разрешая которые относительно V, находим

$$V = \begin{vmatrix} V', & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_p \\ V_1, & -\lambda, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_p, & 0, & 0, & \ldots, & -\lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_p \\ 1, & -\lambda, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & -\lambda, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, -\lambda \end{vmatrix}. \tag{137}$$

Выберем постоянные α_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, p$) так, чтобы соблюдались все условия предыдущего пункта. При этом V' представится в виде потенциала простого слоя для всех значений λ, модуль которых меньше или равен A'.

Числитель правой части равенства (137), который обозначим через $P(\lambda)$, представится также потенциалом простого слоя для указанных значений λ и в то же время в виде ряда

$$P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \ldots + \lambda^k P_k + \ldots,$$

где P_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) суть также потенциалы простого слоя, сходящегося при тех же значениях λ. Знаменатель выражения V (равенство (137)) есть, очевидно, полином степени не больше p от λ с постоянными коэффициентами.

Итак,

$$V = P(\lambda)/D(\lambda). \tag{138}$$

Таким образом, для всех значений λ, меньших или равных наперед заданному числу A', функция V, определяемая рядом

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^{k-1} V_k + \ldots,$$

изображается в виде дроби (138)*).

Сопоставляя все сказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Какова бы ни была заданная непрерывная на поверхности* (S) *функция* f, *функция* V, *гармоническая внутри* (S) *и удовлетворяющая условию*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial n} - 2f \quad \text{на поверхности } (S), \tag{139}$$

есть мероморфная функция параметра λ *внутри круга любого радиуса* A, *представляющаяся в виде дроби*

$$V = P(\lambda)/D(\lambda), \tag{140}$$

где $P(\lambda)$ *есть потенциал простого слоя, а* $D(\lambda)$ – *полином некоторой степени* p, *корни которого служат, вообще говоря, полюсами функции* V.

Эта функция остается голоморфной внутри круга радиуса единица, так что наименьший из ее полюсов либо равен, либо больше единицы.

36. *Теорема имеет место для всякой поверхности Ляпунова.* Не входя в дальнейшие подробности относительно свойств функции V, рассматриваемой в качестве функции параметра λ, которые будут изложены в томе III нашего сочинения и приведут к теории фундаментальных функций, мы докажем сейчас лишь следующее предложение:

Функция V *может иметь только простые (некратные) полюсы.*

Пусть $\lambda = \lambda'$ есть какой-либо полюс функции V. Обозначим через $P^{(s)}(\lambda)$ производную порядка s от функции $P(\lambda)$ по λ. Подставив выражение (140) для V в уравнение (139), получим

$$\frac{\partial P_i(\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial P_e(\lambda)}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial P(\lambda)}{\partial n} - 2D(\lambda) f. \tag{141}$$

Отсюда, дифференцируя s раз по λ, выводим

$$\frac{\partial P_i^{(s)}(\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial P_e^{(s)}(\lambda)}{\partial n} =$$

$$= -2\lambda \frac{\partial P^{(s)}(\lambda)}{\partial n} - 2s \frac{\partial P^{(s-1)}(\lambda)}{\partial n} - 2D^{(s)}(\lambda) f. \tag{141$_1$}$$

При $\lambda = \lambda'$ функция $P(\lambda)$ и несколько ее производных по λ могут, вообще говоря, обратиться в нуль. Допустим, что первая необращающаяся в нуль производная $P(\lambda)$ по λ есть производная порядка $s+1$, так что

$$P(\lambda') = P'(\lambda') = P''(\lambda') = \ldots = P^{(s)}(\lambda') = 0, \quad P^{(s+1)}(\lambda') \neq 0. \tag{142}$$

---

*) Как показано выше (пп. 26–28), определяющий функцию V ряд (92) сходится (равномерно во всем пространстве) при $|\lambda| < 1$. Равенство (138) дает аналитическое продолжение функции V. (*Прим. ред.*)

Допустим для простоты, что λ' есть полюс второй кратности. При этом необходимо

$$
\begin{gathered}
D(\lambda') = D'(\lambda') = D''(\lambda') = \ldots = \\
= D^{(s)}(\lambda') = D^{(s+1)}(\lambda') = D^{(s+2)}(\lambda') = 0, \\
D^{(s+3)}(\lambda') \neq 0.
\end{gathered}
\tag{142_1}
$$

Полагая в уравнении (141_1) $\lambda = \lambda'$ и принимая во внимание условия (142) и (142_1), получаем, заменив s на $s+1$ и $s+2$,

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial P_i^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} - \frac{\partial P_e^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} = -2\lambda' \frac{\partial P^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n}, \\
\frac{\partial P_i^{(s+2)}(\lambda')}{\partial n} - \frac{\partial P_e^{(s+2)}(\lambda')}{\partial n} = -2\lambda' \frac{\partial P^{(s+2)}(\lambda')}{\partial n} - \\
-2(s+2) \frac{\partial P^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n}.
\end{gathered}
\tag{143}
$$

Так как по свойствам потенциала простого слоя

$$
2 \frac{\partial P^{(s)}(\lambda)}{\partial n} = \frac{\partial P_i^{(s)}(\lambda)}{\partial n} + \frac{\partial P_e^{(s)}(\lambda)}{\partial n}
$$

при всяких s и λ, то на основании этого соотношения можем представить два предыдущих равенства в виде

$$
(1+\lambda') \frac{\partial P_i^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} - (1-\lambda') \frac{\partial P_e^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} = 0,
$$

$$
(1+\lambda') \frac{\partial P_i^{(s+2)}(\lambda')}{\partial n} - (1-\lambda') \frac{\partial P_e^{(s+2)}(\lambda')}{\partial n} = -2(s+2) \frac{\partial P^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n}.
$$

Умножив пêрвое из этих уравнений на $P^{(s+2)}(\lambda')$, второе – на $P^{(s+1)}(\lambda')$, вычтя один результат из другого и проинтегрировав затем полученное уравнение по всей поверхности (S), получим при помощи известных формул Грина

$$
-2 \int P^{(s+1)}(\lambda') \frac{\partial P^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} ds = 0.
$$

Отсюда в силу первого из (143) и формул преобразования Грина выводим

$$
\int P^{(s+1)}(\lambda') \left(\frac{\partial P_i^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} - \frac{\partial P_e^{(s+1)}(\lambda')}{\partial n} \right) ds =
$$

$$
= \int \Sigma \left(\frac{\partial P^{(s+1)}(\lambda')}{\partial x} \right)^2 dT = 0.
$$

Отсюда следует, что $P^{(s+1)}(\lambda') = 0$*), т.е. $P(\lambda)$ и $D(\lambda)$ должны иметь следующий вид:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda')^{s+2} P_1(\lambda), \quad D(\lambda) = (\lambda - \lambda')^{s+3} D_1(\lambda),$$

где $P_1(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ суть функции от λ, не обращающиеся в нуль при $\lambda = \lambda'$.

Функция V, следовательно, приводится к дроби $V = P_1(\lambda)/(\lambda - \lambda') D_1(\lambda)$, где $P_1(\lambda')$ и $D_1(\lambda')$ не равны нулю. Отсюда следует, что λ' *есть необходимо простой полюс функции* V.

Таким образом, доказано, что *функция V не может иметь полюсов второй кратности.* Очевидно, что *полюсов выше второй кратности и подавно не может существовать.*

Предложение, высказанное в начале пункта, доказано. Поэтому в выражении (140) для V мы можем подразумевать под $D(\lambda)$ полином от λ, все корни которого простые, а под $P(\lambda)$ – функцию от λ, не обращающуюся в нуль для значений λ, служащих корнями полинома $D(\lambda)$.

37. На основании сказанного выше мы можем представить функцию $P(\lambda)$ в виде

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho(\lambda)}{r}\, ds, \tag{144}$$

причем уравнение (141) в силу известных свойств потенциала простого

---

*) Из равенства (141) немедленно следует, что функция V может иметь только вещественные полюсы.

Действительно, пусть λ' – полюс функции V. Тогда $D(\lambda') = 0$ и можно считать, что потенциал простого слоя $P(\lambda')$ не равен тождественно нулю. Как показано в этом пункте (мы положили $s + 1 = 0$), для всех точек поверхности (S) имеет место равенство

$$(1 + \lambda') \frac{\partial P_i(\lambda')}{\partial n} - (1 - \lambda') \frac{\partial P_e(\lambda')}{\partial n} = 0.$$

Умножая его на $\overline{P(\lambda')}$ и интегрируя полученное равенство по поверхности (S), получим

$$(1 + \mathrm{Re}\,\lambda' + i\,\mathrm{Im}\,\lambda') \int \left[\left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial y} \right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial z} \right|^2 \right] d\tau = (1 - \mathrm{Re}\,\lambda' - i\,\mathrm{Im}\,\lambda') \int \left[\left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial x} \right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial z} \right|^2 \right] d\tau'.$$

Если $\mathrm{Im}\,\lambda' \neq 0$, то отсюда вытекает, что

$$\int \left[\left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial z} \right|^2 \right] dT = 0$$

и, следовательно $P(\lambda') \equiv 0$.

Отметим также, что при $\lambda' = -1$ имеем

$$\int \left[\left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial P(\lambda')}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial P'(\lambda')}{\partial z} \right|^2 \right] d\tau' = 0$$

и $P(-1) \equiv 0$ в D', а следовательно, и во всем пространстве. То есть и точка $\lambda = -1$ не является полюсом функции V. (*Прим. ред.*)

слоя приведется к следующему:

$$\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int \rho(\lambda) \frac{\cos\psi}{r^2} ds - D(\lambda) f.$$

Положив $\lambda = 1$, получим

$$\rho(1) = \frac{1}{2\pi} \int \rho(1) \frac{\cos\psi}{r^2} ds - D(1) f. \tag{145}$$

Интегрируя это уравнение по всей поверхности (S) и учитывая известную теорему Гаусса (равенство (112) гл. I, п. 33), получим

$$D(1) \int f ds = 0.$$

Отсюда следует, что *если* $\int f ds \neq 0$, *то необходимо*

$$D(1) = 0, \tag{146}$$

т.е. $\lambda = 1$ *есть полюс функции* V; *если же*

$$\int f ds = 0, \tag{147}$$

то $\lambda = 1$ *есть необходимо простая точка функции* V.

В самом деле, допустив противное, т.е. что при условии (147) имеет место равенство (146), получим из (145)

$$\rho(1) = \frac{1}{2\pi} \int \rho(1) \frac{\cos\psi}{r^2} ds. \tag{148}$$

Далее, из равенства 137 следует, что

$$P(\lambda) = a' V' + a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_p V_p,$$

где a', a_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ суть постоянные, зависящие только от λ, и по предыдущему (пп. 35 и 34)

$$V' = -\frac{1}{2\pi} \int (f_1 + \lambda\rho_1' + \ldots + \lambda^k \rho_k' + \ldots) \frac{ds}{r},$$

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi} \int f \frac{ds}{r}, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi} \int \rho_{k-1} \frac{ds}{r}.$$

Отсюда заключаем, что

$$-\rho(\lambda) = a'(f_1 + \lambda\rho_1' + \ldots + \lambda^k \rho_k' + \ldots) + a_1 f + a_2 \rho_1 + \ldots + a_p \rho_{p-1}.$$

Так как при всяком k (см. гл. II) $\int \rho_k' ds = \int f_1 ds$, $\int \rho_k ds = \int f ds$ и по принятым в п. 35 условиям $\int f_1 ds = 0$, а ряд $f_1 + \lambda\rho_1' + \ldots + \lambda^k \rho_k' + \ldots$ сходится равномерно на поверхности (S), то

$$-\int \rho(\lambda) ds = (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) \int f ds.$$

Отсюда, следует, что, при условии (147),

$$\int \rho(1) ds = 0. \tag{149}$$

38. Итак, если функция f подчинена условию (147), то функция $\rho(1)$ есть функция, удовлетворяющая уравнениям (148) и (149), т.е. равна тож-

дественно нулю, как показано в п. 5 гл. II. При этом в силу (144) и $P(1) = 0$, что невозможно, если $\lambda = 1$ есть полюс функции V.

Таким образом, доказано, что если f удовлетворяет условию (147), то $\lambda = 1$ есть простая точка функции V; иначе говоря, ряд (92):

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^{k-1} V_k + \ldots$$

сходится равномерно на поверхности (S) (а следовательно, и внутри (S)) при $\lambda = 1$. Отсюда на основании равенства (110_1) (п. 27) заключаем, что $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\sqrt{W_k}}{\sqrt{W_{k+1}}} = l > 1$ и, следовательно, в силу неравенств (102) при всяком k

$$W_{k+1}/W_k \leqslant 1/l^2 = q^2 < 1. \tag{150}$$

Получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть f есть заданная непрерывная функция точек поверхности (S). Составляем ряд функций V_k по формулам*

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{f}{r} ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{ds}{r} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Для всякой поверхности Ляпунова отношение интегралов

$$W_{k+1}/W_k = \int \Sigma \left(\frac{\partial V_{k+1}}{\partial x} \right)^2 dT \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 dT$$

остается меньшим некоторого числа q^2, меньшего единицы, если функция f удовлетворяет условию

$$\int f ds = 0. \tag{151}$$

39. Коль скоро эта теорема установлена, то стоит повторить почти дословно рассуждения пп. 30–35, чтобы доказать, что неравенство (130) п. 34, а именно

$$|\rho_k| < L'\sigma^k \quad (\sigma < 1), \tag{152}$$

имеет место для любой поверхности Ляпунова, какова бы ни была заданная функция f, непрерывная на поверхности f и подчиненная условию (151).

Таким путем приходим к следующей теореме.

Основная теорема. *Принцип Робена, а следовательно и принцип К. Неймана, применим ко всякой поверхности Ляпунова* (п. 17 гл. I).

Сопоставляя эту теорему со всеми результатами предыдущих исследований, приходим к следующему общему заключению:

Все приемы решения основных задач математической физики, как то: задачи о распределении электричества, задачи Дирихле, Гаусса и Неймана и все вытекающие из применения этих приемов следствия, указанные в предыдущих главах, начиная с главы II, *справедливы для любой поверхности Ляпунова.*

40. Изложенное здесь доказательство основной теоремы, установившее самым ходом анализа ее естественную связь с теорией фундаментальных функций Пуанкаре, представляется более сложным, чем то, которое дано мною в 1900 г. в мемуаре "Les méthodes générales pour résoudre etc." (Annales de Toulouse), но зато устанавливает справедливость этой теремы для всех поверхностей Ляпунова независимо от того, возможно ли для них преобразование Пуанкаре или нет. Такой именно путь рассуждений пришлось избрать потому, что фундаментальную теорему Пуанкаре (см. п. 2), до сих пор строго в общем виде не доказанную, следствием которой служит неравенство (150), мы должны были заменить теоремой более частного характера, которой дали название фундаментальной теоремы Пуанкаре – Зарембы (см. п. 20).

В упомянутом выше мемуаре*) исходным пунктом рассуждений служила фундаментальная теорема Пуанкаре, которая привела сначала к неравенству (150), а затем и к принципу Робена (неравенство (152)); здесь же нами доказано сначала неравенство (150) независимо от фундаментальной теоремы Пуанкаре, которую, наоборот, мы можем вывести как следствие этого неравенства.

Имея в виду важность этой теоремы и многочисленность ее применений, я приведу в этом пункте ее простое доказательство.

Так как $\dfrac{\partial V_{1i}}{\partial n} - \dfrac{\partial V_{1e}}{\partial n} = -2f$, то условие (151) равносильно, очевидно, следующему:

$$\int \frac{\partial V_{1e}}{\partial n}\, ds = 0. \tag{153}$$

Поэтому можем утверждать, что если первый из потенциалов V_k теоремы п. 38 удовлетворяет условию (153), то имеет место неравенство (150). При этом в силу неравенств (102), справедливых для любой функции f, получаем $W_2/W_1 = (J_2 + J_2')/(J_1 + J_1') < q^2$. Применив к интегралу

$$J_{12} + J_{12}' = \int \Sigma\ \frac{\partial V_1}{\partial x}\ \frac{\partial V_2}{\partial x}\, dT$$

теорему Грина и воспользовавшись равенством (96) при $k = 2$, получим $J_{12} + J_{12}' = J_1' - J_1$, откуда $(J_1' - J_1)^2 \leqslant (J_1 + J_1')(J_2 + J_2')$ и, следовательно, $q^2 > W_2/W_1 = (J_2 + J_2')/(J_1 + J_1') \geqslant [(J_1' - J_1)/(J_1' + J_1)]^2$, или

$$|J_1' - J_1| / (J_1' + J_1) < q. \tag{154}$$

Возможны два предположения:
либо 1°

$$K = J_1'/J_1 \geqslant 1, \tag{155}$$

либо 2°

$$K = J_1'/J_1 < 1. \tag{155$_1$}$$

В первом случае неравенство (154) дает

$$(K - 1)/(K + 1) < q,$$

откуда

$$K = J_1'/J_1 < (1 + q)/(1 - q)$$

*) См. также соч. "Общие методы решения основных задач и т.д." гл. II.

и, в силу (155), $1 \leqslant J'_1 / J_1 < (1+q)/(1-q)$, а следовательно, и подавно

$$1/m = (1-q)/(1+q) < J'_1/J_1 < (1+q)/(1-q) = m.$$

Во втором случае неравенство (154) приводит к такому:

$$K = J'_1/J_1 > (1-q)/(1+q),$$

т.е., в силу (155_1), $1/m = (1-q)/(1+q) < J'_1/J_1 < 1$, а следовательно, и подавно

$$1/m = (1-q)/(1+q) < J'_1/J_1 < (1+q)/(1-q) = m.$$

Таким образом, убеждаемся, что *коль скоро потенциал простого слоя* V *удовлетворяет условию* (153), *то имеют место неравенства вида*

$$\frac{1}{m} < \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 d\tau' \Big/ \int \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 d\tau < m.$$

Это есть фундаментальная теорема Пуанкаре.

Петербург,
11 октября 1922 г.

Список трудов В.А. Стеклова по математике и механике

Сокращенные обозначения периодических изданий, где были опубликованы работы:

СХМО	– Сообщения Харьковского математического общества.
Math. Ann.	– Mathematische Annalen.
ТОФНОЛЕ	– Труды Отделения физических наук общества любителей естествознания.
CR	– Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris.
ЗХУ	– Записки Харьковского университета.
AFT	– Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
JRAM	– Journal für reine und angewandte Mathematik.
B. l'Ac. Crac.	– Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie.
ЗФМО	– Записки Императорской Академии наук по физико-математическому отделению.
AEN	– Annales scientif. de l'École normale supérieure.
RAL	– Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.
RCMP	– Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
ИАН	– Известия Академии наук.
ДАН	– Доклады Российской Академии наук.

Работы В.А. Стеклова

1. Об интерполировании некоторых произведений. – СХМО, серия 2, 1889, т. 1, № 5–6, с. 239–248.

2. О движении тяжелого твердого тела в жидкости (статья I) – СХМО, серия 2, 1891, т. 2, № 5–6, с. 209–235.

3. О движении тяжелого твердого тела в жидкости (статья II) – СХМО, серия 2, 1891, т. 2, № 5–6, с. 236–244.

4. Одна задача из теории упругости. – СХМО, серия 2, 1891, т. 3, № 1, с. 1–34.

5. О равновесии упругих цилиндрических тел. – СХМО, серия 2, 1891, т. 3, № 1, с. 42–48; № 2, с. 49–93.

6. О высших и низших пределах вещественных корней алгебраических уравнений и их отделении. – СХМО, серия 2, 1891, т. 3, № 3, с. 103–125.

7. О равновесии упругих тел вращения. – СХМО, серия 2, 1892, т. 3, № 4, с. 173–192; с. 193–251.

8. О движении твердого тела в жидкости. – СХМО, серия 2, 1893, т. 3, № 6, с. 263–264.

9. О движении твердого тела в жидкости. Диссертация на степень магистра прикладной математики. – Харьков, 1893, XVI + 234 с.

10. Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit. – Math. Ann., т. 42, 1893, с. 273–274.

11. Дополнение к сочинению: "О движении твердого тела в жидкости". – СХМО, серия 2, 1894, т. 4, № 4, с. 161–164.

12. О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости. – ТОФНОЛЕ, 1895, т. 7, вып. 2, с. 10–21.

13. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. – ТОФНОЛЕ, 1896, т. 8, вып. 2, с. 19–21.

14. О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям. – СХМО, серия 2, 1896, т. 5, № 1–2, с. 60–73.

15. Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости. – СХМО, серия 2, 1896, т. 5, № 3–4, с. 101–124.

16. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня. – СХМО, серия 2, 1896, т. 5, № 3–4, с. 136–181.

17. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. – CR, 1896, т. 123, с. 1252–1253.

18. К вопросу о существовании конечной и непрерывной внутри данной области функции координат, удовлетворяющей уравнению Лапласа, при данных значениях ее нормальной производной на поверхности, ограничивающей область. – СХМО, серия 2, 1897, т. 5, № 5–6, с. 255–286.

19. Об одном преобразовании дифференциальных уравнений движения свободной материальной точки в плоскости и его приложениях. – ТОФНОЛЕ, 1897, т. 9, вып. 1, с. 16–26.

20. О дифференциальных уравнениях математической физики. – Мат. сб., 1897, т. 19, вып. 4, с. 469–585.

21. По поводу одной теоремы Кирхгофа. – ЗХУ, 1897, кн. 4, с. 169–180.

22. О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям. – СХМО, серия 2, 1897, т. 6, № 2–3, с. 57–124.

23. Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de C. Neumann. – CR 1897, т. 125, с. 1026–1029.

24. Sur le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. – CR, 1898, т. 126, с. 215–218.
25. Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur. – CR, 1898, т. 126, с. 1022–1025.
26. О задаче Фурье. – Дневник X съезда русских естествоиспытателей и врачей в Киеве, 1898, с. 105.
27. Sur le problème de la distribution de l'électricité. – СХМО, 2 серия, 1898, т. 6, № 4–5, с. 154–159.
28. К задаче о равновесии упругих изотропных цилиндров. – СХМО, серия 2, 1898, т. 6, № 4–5, с. 160–193.
29. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. – ТОФНОЛЕ, 1899, т. 10, № 1, с. 1–3.
30. Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques. – CR, 1899, т. 128, с. 279–282.
31. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. – CR, 1899, т. 128, с. 588–591.
32. Sur l'existence des fonctions fondamentals. – CR, 1899, т. 128, с. 808–810.
33. Sur la théorie des fonctions fondamentales. – CR, 1899, т. 128, с. 984–987.
34. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. – AFT, serie 2, 1900, т. 2, с. 207–272.
35. Mémoire sur les fonctions harmoniques de M.H. Poincaré. – AFT, 2[e] série, 1900, т. 2, с. 273–303.
36. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. – CR, 1900, т. 130, с. 396–399.
37. Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. – CR, 1900, т. 130, с. 480–483.
38. Remarque relative à une Note de M.A. Korn: "Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet". – CR, 1900, т. 130, с. 826–827.
39. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (note II). – CR, 1900, т. 130, с. 1599–1601.
40. Le problème des températures stationnaires. – CR, 1900, т. 131, с. 608–611.
41. Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet. – CR, 1900, т. 131, с. 870–873.
42. Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann (note I). – CR, 1900, т. 131, с. 987–989.
43. Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann (note II). – CR, 1900, т. 131, с. 1182–1185.
44. Общие методы решения основных задач математической физики. Докторская диссертация. – Харьков: Издательство ХМО, 1901, V + 291 с.
45. Sur l'existence de fonctions fondamentales. – CR, 1901, т. 135, с. 450–453.
46. Problème de refroidissement d'une barre hétérogène. – AFT, 2[e] série, 1901, т. 3, с. 281–313.
47. Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. Bruns. – CR, 1902, т. 135, с. 526–528.
48. Sur certaines égalités remarquables. – CR, 1902, т. 135, с. 783–786.
49. Sur la représentation approchée des fonctions. – CR, 1902, т. 135, с. 848–851.
50. Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques. – CR, 1902, т. 135, с. 946–949.
51. Remarques relatives à ma Note: "Sur la représentation approchée des fonctions". – CR, 1902, т. 135, с. 1311–1313.
52. Mémoire sur la mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. – AFT, série 2[e], 1902, т. 4, с. 171–219.
53. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. – AEN, série 3, 1902, т. 19, с. 191–259, v. 455–490.
54. Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébycheff et en particulier, suivant les polynomes de Jacobi. – JRAM, 1902, т. 125, № 3, с. 207–236.
55. Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Bool. – СХМО, серия 2, 1904, т. 8, № 11–12, с. 136–144, 1904, т. 8, № 3–4, с. 145–195.
56. Sur une propriété remarquable de plusieurs développements souvent employés dans l'analyse. – CR, 1903, т. 136, с. 876–878.

57. Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Jacobi. – CR, 1903, 136, c. 1230–1232.

58. Sur la théorie des séries trigonométriques. – B. l'Ac. Crac., 1903, № 9, c. 713–740.

59. Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvet employées dans l'analyse. – ЗФМО, серия 8, 1904, т. 15, № 7, c. 1–32.

60. Sur une égalité générale commune à toutes les fonctions fondamentales. – CR, 1904, т. 136, c. 35–37.

61. Addition au mémoire "Sur la théorie des séries trigonométriques". – B. l'Ac. Crac., 1904, № 6, c. 280–283.

62. Sur la théorie générale des fonctions fondamentales. – CR, 1904, т. 138, c.1569–1571.

63. Théorie générale des fonctions fondamentales. – AFT, 2 série, 1904, т. 6, c. 351–475.

64. Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. – CR, 1905, т. 141, c. 999–1001.

65. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement (note I). – CR, 1905, т. 141, c. 1215–1217.

66. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement (note II). – CR, 1906, т.142, c. 77–79.

67. Sur une méthode nouvelle pour résoudre plusieurs problèmes sur le développement d'une fonction arbitraire en séries infinies. – CR, 1907, т. 144, c. 1329–1332.

68. Sur le problème d'analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. – CR, 1907, т. 144, c. 730–733.

69. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions. – СХМО, серия 2, 1907, т. 10, c. 97–199; русск. перев.: Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям / Редакция и комментарии Н.С. Ландкофа. – Харьков: Издательство ХГУ, 1956, c. 1–138.

70. Remarque complémentaire au Mémoire; "Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles etc. – СХМО, серия 2, 1907, т. 10, c. 201–202.

71. Sur la théorie des tourbillons. – AFT, 2-e série, 1908, т. 10, c. 271–334.

72. Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton (2 parties). – AEN, 3-e séries, 1908, т. 25, p. 469–528; 1909, т. 26, c. 275–336.

73. Sur une généralisation d'un théorème de Jacobi. – CR, 1909, т. 148, c. 153–155.

74. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Lie – Mayer. – CR, 1909, т. 148, c. 277–279.

75. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi – Lie. – CR, 1909, т. 148, c. 465–468.

76. Sur le théorème de l'existence des fonctions implicites. – CR, 1909, т. 148, c. 1085–1087.

77. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes. – AFT, série 3, 1909, т. 1, c. 145–256.

78. Об уравнениях математической физики. – Дневник XII съезда русск. естествоисп. и врачей. – М., 1910, c. 425–426.

79. Sur l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre. – RAL, 1910, т. 8, c. 159–170.

80. Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales correspondent a une équation différentielle linéaire du second ordre. – CR, 1910, т. 150, c. 452–454.

81. Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant certaines fonctions fondamentales. – CR, 1910, т. 150, c. 601–603.

82. Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries de fonctions fondamentales. – CR, 1910, т. 151, c. 800–802.

83. Solution générale du problème de développement d'une function arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm–Liouville. – RAL, 5 série, 1910, т. 19, c. 490–496.

84. Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales. – CR, 1910, т. 151, с. 974–977.

85. Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales. – CR, 1910, т. 151, с. 1116–1119.

86. Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène /Совместно с Я.Д. Тамаркиным. – RCP, 1911, т. 31, с. 341–362.

87. К теории замкнутости систем ортогональных функций, зависящих от какого угодно числа переменных. – ИАН, серия 6, 1911, т. 5, № 10, с. 754–757.

88. Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque des variables. – ЗФМО, серия 8, 1911, т. 30. № 4, с. 1–87.

89. Remarque relative à ma note: "Solution générale du problème de développement etc." – RAL, 1911, т. 20, с. 16–17.

90. О некоторых задачах анализа, связанных со многими задачами математической физики. – ИАН, серия 6, 1912, т. 6, № 17, с. 1007–1010.

91. Sur quelques questions d'analyse qui se rattachent à plusieurs problèmes de la physique mathématique. – ЗФМО, серия 8, 1913, т. 31, № 7, с. 1–85.

92. Об одном приложении теории замкнутости к задаче о разложении произвольной функции в ряды по полиномам Чебышева. – ИАН, серия 6, 1913, т. 7, № 2, с. 87–92.

93. Sur une formule générale de l'analyse et ses diverses applications. – Ann. di Mat. Pura et Appl., 3 série, 1913, т. 21, с. 65–120.

94. Sur une application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries procédant suivant les polynomes de Tchébycheff. – ЗФМО, серия 8, 1914, т. 33, № 8, с. 1–59.

95. Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture au problème de représentation approchée des fonctions et au problème des moments. – ЗФМО, серия 8, 1914, т. 32, № 4, с. 1–74.

96. Application de la théorie de fermeture à la solution de certaines questions qui se rattachent au problème de moments. – ЗФМО, серия 8, 1915, т. 33, № 9, с. 1–52.

97. По поводу одной задачи Лапласа. – ИАН, 6 серия, 1915, т. 9, № 14, с. 1515–1537.

98. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Сходимость формул механических квадратур (сообщение первое). – ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 3, с. 169 – 186.

99. Sur la théorie de fermeture. – ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 4, с. 219–226.

100. Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture. – ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 4, с. 257–265.

101. Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace – Hermite–Tchébycheff. – ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 6, с. 403–416.

102. Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébycheff–Laguerre. – ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 8, с. 633–642.

103. Sur le développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff–Laguerre. – ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 9, с. 719–738.

104. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Остаточный член формул механических квадратур (сообщение второе). – ИАН, 1916, серия 6, т. 10, с. 829–850.

105. Sur quelques applications d'une identité élémentaire. – ЗФМО, серия 8, 1916, т. 34, № 2, с. 1–52.

106. Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures (not I). – ИАН, серия 6, 1917, т. 11, № 3, с. 187–218.

107. Sur l'approximation des fonctions a l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures (note II). – ИАН, серия 6, 1917, т. 11, № 8, с. 535–566.

108. Sur l'approximation des fonctions a l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures (note III). – ИАН, серия 6, 1917, т. 11, № 10, с. 687–718.

109. Remarque sur les quadratures. – ИАН, серия 6, 1918, т. 12, № 2–3, с. 99–118.

110. Quelques remarques complémentaires sur les quadratures. – ИАН, серия 6, 1918, т. 12, № 7, с. 587–614.

111. Sur les quadratures (note I). – ИАН, 6 серия, 1918, т. 12, № 17, с. 1859–1890.

112. Sur les quadratures (note II). – ИАН, 6 серия, 1919, т. 13, № 1, с. 65–96.

113. Sur le développement des fonctions continues en séries de polynomes de Tchébycheff. – ИАН, серия 6, 1921, т. 15, № 1–18, с. 249–266.

114. Une contribution nouvelle au problème du développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff. – ИАН, 6 серия, 1921, т. 15, № 1–18, с. 267–280.

115. Une méthode de la solution du problème du développement des fonctions en séries de polynomes de Tchébycheff indépendante de la théorie de fermeture (notes I et II). – ИАН, 6 серия, 1921, т. 15, с. 281–302, с. 303–326.

116. Определение размеров и глубины залегания магнитного слоя по 4 и 6 наблюдениям. – ДАН, серия А, 1922, с. 1–4.

117. К общей теории гравитационного вариометра Этвеша. – ДАН, серия А, 1922, с. 5–6.

118. Основные задачи математической физики, ч. I. – Петроград, 1922, IV + 285 с.

119. Основные задачи математической физики, ч. II. – Петроград, 1923, II + 285 с.

120. Sopra la teorie delle quadrature dette meccaniche. – RAL, 1923, т. 32, № 7, с. 320–326.

121. Sur les problèmes de représentation des fonctions à l'aide de polynomes, du calcul approché des intégrales définies, du développement des fonctions en séries infinies suivant les polynomes et de l'interpolation, considérés au point de vue des idées de Tchébycheff. – Proc. Int. Math. Congress, Toronto, august 11–16, 1924, т. 1, с. 631–640.

122. Les recherches posthumes de Liapounoff sur les figures d'équilibre du liquide hétérogène en rotation. – Proc. Int. Math. Congress, Toronto, august 11–16, 1924, т. 2, с. 23–30.

123. Sur les mouvements spéciaux enregistrés par la station sismique Leningrad/Совместно с П.М. Никифоровым. – ДАН СССР, серия А, январь 1926, с. 5–6.

124. Über die Wiederherstellung des Netzes seismischer Stationen von USSR und über den gegenwärtigen Zustand der Arbeiten des Physikalisch-Mathematischen Instituts der Akademie der Wissenschaften. – Zeitschrift fur Geophysik, 1926, № 1, с. 12–13.

125. Sur le problème d'approximation des fonctions arbitraires à l'aide des polynomes de Tchébycheff. – ИАН, серия 6, 1926, т. 20, № 10–11, с. 857–862.

126. Théorie de fermeture et le problème de représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynomes de Tchébycheff. – Acta Math., 1926, т. 49, с. 263–299.

127. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., Л.: Госиздат, 1927, X + 419 с.