В. М. СТАРЖИНСКИЙ

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

531
С 77
УДК 534.0

Прикладные методы нелинейных колебаний. В. М. Старжинский. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 256 стр.

В книге излагаются методы исследования существенно нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Книга состоит из двух частей. В первой части дается сочетание метода Ляпунова, метода малого параметра Пуанкаре и метода усреднения. Вторая часть книги посвящена приложению теории нормальных форм к автономным системам третьего, четвертого и шестого порядков. Рассматриваются механические, физические и электромеханические примеры.

Книга предназначена для специалистов в области прикладной математики, студентов старших курсов и аспирантов физико-технических и физико-математических факультетов.

Илл. 19, библ. 609.

С $\frac{20302-037}{053(02)-77}$ 148-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть вторая

Приложение теории нормальных форм к задачам колебаний

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия в теории нелинейных колебаний можно заметить преимущественное развитие исследований, основывающихся на классических методах конца XIX — начала XX века. Примером тому является развитие метода малого параметра в монографиях А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [4], Б. В. Булгакова [25], И. Г. Малкина [79а,б], развитие метода усреднения из метода Ван-дер Поля (Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский [17, 85г], В. М. Волосов и Б. И. Моргунов [33]), новая теория возмущений В. И. Арнольда [218], основывающаяся на классических методах возмущений, метод V-функций Г. В. Каменкова [54], т. II, базирующийся на фундаментальных результатах Ляпунова — Четаева.

Вместе с тем в теорию нелинейных колебаний проникали и новые методы: асимптотические методы, развитые Н. Н. Боголюбовым, Н. М. Крыловым и Ю. А. Митропольским [17, 72, 19, 85в], функционально-аналитические методы, введенные М. А. Красносельским [67а,б; 273а — г] и его школой [68, 69], метод точечных преобразований, развитый А. А. Андроновым и А. А. Виттом [3,4] и Ю. И. Неймарком [94а,б], стробоскопический метод Н. Минорского [183а,b,с], осцилляционный метод Ф. Р. Гантмахера — М. Г. Крейна [36], метод определения условно-периодических движений А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда [261, 218]. Понятие новизны метода, разумеется, относительно, если вспомнить, например, что еще до Ван-дер Поля усреднение применяли Эйлер, Лагранж и Лаплас. Впрочем, это замечание для будущих исследователей.

Первая часть книги посвящена сочетанию методов Ляпунова, Пуанкаре и метода усреднения при изучении колебаний систем Ляпунова и систем, близких к ним. Представляет интерес исследование колебательных систем, описываемых аналитическими автономными дифференциальными уравнениями, не содержащими малый параметр. В консервативном случае (системы Ляпунова) известен метод Ляпунова определения периодических решений. Однако доставляемое методом Ляпунова периодическое решение зависит только от двух произвольных постоянных. Поэтому для систем более чем с одной степенью свободы оно не может быть общим по своей природе, кроме того, известны случаи, когда метод Ляпунова отказывает. В § I,1 развито преобразование исходной системы, намеченное Ляпуновым, при котором порядок системы понижается на две единицы и вводится параметр, равный корню квадратному из величины приведенной энергии, а сама система становится неавтономной. Если этот параметр достаточно мал, то к преобразованной квазилинейной неавтономной системе применимы методы малого параметра.

Предложенный вариант метода оказался эффективным в ряде задач, в частности, в задаче о перекачке энергии. Первым ее этапом является установление исходного периодического режима и определение областей его неустойчивости в пространстве параметров системы на основе математической теории параметрического резонанса [79б, 146]. Второй этап решения заключается в отыскании периодических режимов, возникающих при критических значениях параметров и отличных, разумеется, от исходного. Этот этап основывается на указанных выше преобразованиях и применении к преобразованной системе метода Пуанкаре определения периодических решений для неавтономных систем. Однако к преобразованной системе можно применять и другие методы малого параметра, например, метод усреднения, позволяющий провести третий этап решения — исследование переходного процесса, часто называемого перекачкой энергии. Все три этапа проиллюстрированы в гл. III на примерах пружинного маятника, маятника на упругой подвеске и бетатронных колебаний частиц в циклических ускорителях со слабой фокусировкой. Заметим, что задача о перекачке энергии основывается на общей теории колебательных цепей, развитой в гл. II.

Перейдем теперь к применению теории возмущений (§ IV, 1). Допустим, что невозмущенная нелинейная автономная система ляпуновского вида $(2k+2)$-го порядка возмущена аналитическим и достаточно малым по норме демпфированием. Проводится преобразование возмущенной системы, при котором невозмущенная система может быть преобразована в квазилинейную неавтономную систему $2k$-го порядка. Предполагается известным ее решение для достаточно малого по сравнению с единицей корня квадратного из начального значения приведенной энергии системы. Для первой и последующей поправок соответствующего (т. е. с теми же начальными условиями) решения возмущенной системы составляется полная система уравнений в вариациях по параметру — последовательность неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений $(2k + 1)$-го порядка с переменными коэффициентами. Полная система записана в операторном виде для общего конечномерного случая аналитической теории возмущений. Если известен общий интеграл невозмущенной системы, то интегрирование полной системы согласно Пуанкаре сводится к квадратурам.

Последний параграф первой части посвящен колебаниям в системах типа Ляпунова. Здесь излагаются некоторые результаты В. С. Нустрова [301а,б], о содержании которых можно составить суждение по оглавлению.

Вторая часть книги также основывается на развитии одного из классических методов конца XIX — начала XX века — теории нормальных форм (Пуанкаре, Ляпунов, Г. Дюляк, К. Л. Зигель, Ю. Мозер, В. И. Арнольд, В. А. Плисс и др.).

В работах А. Д. Брюно [234а — ц] получены обобщающие результаты по теории нормальных форм нелинейных аналитических автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Начало этому методу положил Пуанкаре [188]. На основе этой теории во второй части рассматриваются некоторые задачи колебаний, описываемые названными уравнениями.

В гл. V приводятся необходимые для читателя сведения по теории нормальных форм.

Прежде всего (гл. VI) выделяется тот класс задач, в котором нормальная форма имеет самый простой вид, доставляемый теоремой Пуанкаре, и представление решения задачи Коши в общем виде может быть осуществлено на каждом шаге приближения в эффективном виде. Сюда относятся демпфированные колебательные системы (асимптотически устойчивые по линейному приближению) с аналитическими нелинейностями общего вида. Результаты иллюстрируются примерами механических систем с одной и двумя степенями свободы.

Затем исследуются системы третьего порядка с двумя чисто мнимыми и третьим отрицательным (§ VII, 1) или нулевым (§ VII, 2) собственными значениями линейной части. Параграф VII, 1 завершается исследованием колебаний в электромеханических системах «с полутора степенями свободы».

Наконец исследуются нормальные формы и резонансы, возникающие в аналитических автономных системах четвертого (§ VIII, 1) и шестого порядка (§ VIII, 4) с двумя и соответственно тремя парами различных чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части, но, вообще говоря, неконсервативных. Приводится решение задачи Коши в общем виде с учетом квадратичных членов. Для нормальных форм третьей степени обсуждаются результаты, получаемые из критериев устойчивости А. М. Молчанова и Ю. Н. Бибикова — В. А. Плисса. Предлагается построение функции Ляпунова в случае консервативных систем, как непосредственного, так и по методу Н. Г. Четаева связки интегралов, доставляемых нормальными формами третьей степени. Результаты применяются к задаче А. Ю. Ишлинского о движении гироскопической рамы чувствительного элемента гирогоризонткомпаса (§ VIII, 2).

Обе части книги в первом приближении независимы.

Книга предназначена для математически образованных инженеров, научных работников в области механики и прикладной математики, студентов старших курсов и аспирантов физико-технических и физико-математических факультетов.

Эта книга возникла из лекций, читанных автором на инженерном потоке механико-математического факультета МГУ в 1956—76 годах. Благодаря товарищеской поддержке коллег по кафедре прикладной механики МГУ часть глав книги увидела свет в ротапринтном издании 1970—72 гг. [125].

Если автор чему-то может научить читателя в области теории колебаний и устойчивости, то этим он прежде всего обязан преждевременно ушедшим от нас Борису Владимировичу Булгакову и Николаю Гурьевичу Четаеву.

Целью предисловия было обрисовать книгу и ее место в самых общих чертах. Уместнее было бы название «Некоторые прикладные варианты методов нелинейных колебаний».

В книге принята нумерация формул по пунктам (подпараграфам), номер параграфа не указывается. При ссылке на формулу другого параграфа в номер формулы вносится номер параграфа, при ссылке на формулу другой главы впереди ставится номер главы, отделяемый запятой от последующих цифр. Это правило справедливо и при ссылках на параграфы и подпункты.

Автор

Часть первая

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ ЛЯПУНОВА

Глава I

ВВОДНАЯ

§ 1. Преобразование систем Ляпунова

В системах Ляпунова ([77а], §§ 33—45; [79а], гл. IV; [79б], гл. VII) может быть понижен порядок на две единицы, если воспользоваться интегралом энергии и выбрать за независимое переменное, как это делал Ляпунов, полярный угол в плоскости критических переменных. Преобразованная система [322д — ж, к, о, у, ф] будет неавтономной и содержащей параметр, равный квадратному корню из приведенной постоянной энергии. Если последняя достаточно мала по сравнению с единицей, то к преобразованной системе может быть применен метод Пуанкаре ([107а], т. I, гл. III) определения периодических решений неавтономных систем (см. § 2 и гл. III). Особый интерес применение метода Пуанкаре представляет в тех случаях, когда для исходной системы метод Ляпунова ([77а], §§ 34—45; [79а], §§ 26—29; [79б], гл. VII, §§ 1—4) отыскания периодических решений неприменим.

Однако к преобразованной системе можно, вообще говоря, применять и другие методы малого параметра, например, метод усреднения [30, 17, 85г, 33, 39]. Поскольку при этом исследуется более широкий круг вопросов, чем определение периодических решений, в частности, изучение переходных процессов и др., то этим и определяется полезность преобразования систем Ляпунова. Эта сторона вопроса развита в гл. III.

1.1. Общий случай [322д — ж, к, у]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Ляпунова

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n) \qquad (1.1)$$

$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь λ, p_{sr} — вещественные постоянные, а X, Y, X_1, ..., X_n суть вещественные аналитические функции x, y, x_1, ..., x_n, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка. Ляпуновым доказана **теорема** ([77а], § 42): *если*

а) *уравнение* $\det \| p_{sr} - \delta_{sr}\varkappa \| = 0$ *не имеет корней вида* $m\lambda i$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, i = \sqrt{-1}$),

б) *возможно найти формально удовлетворяющие системе* (1.1) *ряды по степеням произвольной постоянной* c

$$x = cx^{(1)} + c^2x^{(2)} + \ldots, \quad y = cy^{(1)} + c^2y^{(2)} + \ldots,$$
$$x_s = cx_s^{(1)} + c^2x_s^{(2)} + \ldots \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

причем $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots$) — *периодические функции* t *одного периода и* $x^{(k)}(t_0) = y^{(k)}(t_0) = 0$ *при* $k > 1$, *то найденные ряды абсолютно сходятся, пока* c *не превосходит некоторого предела и представляют при этих значениях* c *периодическое решение исходной системы* (1.1).

Остановимся на тех случаях, когда по крайней мере одно из этих условий нарушено и теорема Ляпунова отказывает. Нарушение условия а) означает появление «резонансного» случая, чему посвящена статья Ю. А. Рябова [316а]. Условие б) нарушается, когда в разложения $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ не входят члены x^ν и y^ν ($\nu = 2, 3, \ldots$). В последнем случае на каждом шаге определения коэффициентов любого из рядов (1.2) будут получаться тождественные нули.

Однако и в этих случаях, как будет показано в гл. III, возможно определить периодические решения системы (1.1), если они существуют. Имея в виду также сказанное во введении к параграфу, перейдем к преобразованию системы Ляпунова не подчиненной, вообще говоря, условиям а) и б). Будем предполагать для дальнейшего, что система (1.1) допускает первый интеграл [1]), который необходимо будет аналитической функцией переменных $x, y, x_1, \ldots, x_n$ ([77а], § 38; [79а], § 25; [79б], гл. VII, § 1) вида

$$H = x^2 + y^2 + W(x_1, \ldots, x_n) + S_3(x, y, x_1, \ldots, x_n) = \mu^2 \quad (\mu > 0), \tag{1.3}$$

где W — квадратичная форма. Подстановка Ляпунова

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta, \quad x_s = \rho z_s \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

приведет систему (1.1) и первый интеграл (1.3) к виду

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho^2 R(\rho, \vartheta, \mathbf{z}), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \rho\Theta(\rho, \vartheta, \mathbf{z}),$$
$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + \rho Z_s(\rho, \vartheta, \mathbf{z}) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{1.5}$$

$$\rho^2 [1 + W(\mathbf{z}) + \rho S(\rho, \vartheta, \mathbf{z})] = \mu^2. \tag{1.6}$$

---

[1]) Это входит в определение системы Ляпунова.

Здесь R, Θ, $Z_1, \ldots, Z_n$ и S — аналитические функции переменных $\rho, z_1, \ldots, z_n$ в некоторой окрестности нулевых значений, разложения которых по степеням ρ начинаются, вообще говоря, с членов нулевой степени, коэффициенты степенных рядов по $\rho, z_1, \ldots, z_n$ суть периодические функции ϑ периода 2π, являющиеся многочленами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, именно:

$$\begin{aligned} R &= \rho^{-2}\,[X(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho\mathbf{z})\cos\vartheta + \\ &\qquad\qquad + Y(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho\mathbf{z})\sin\vartheta], \\ \Theta &= \rho^{-2}\,[-X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta], \\ Z_s &= \rho^{-2}X_s(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho\mathbf{z}) - z_sR(\rho, \vartheta, \mathbf{z}) \quad (s = 1, \ldots, n), \\ S &= \rho^{-3}S_3(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho\mathbf{z}) \end{aligned} \tag{1.7}$$

и $\mathbf{z}$ есть вектор с компонентами $z_1, \ldots, z_n$.

Предположим, что $1 + W > 0$ в (1.6). Это будет иметь место для всех значений $z_1, \ldots, z_n$, если W есть определенно-положительная квадратичная форма (что имеет место для интеграла энергии) и для некоторых достаточно малых значений $z_1, \ldots, z_n$ в общем случае. Разрешим (1.6) относительно ρ, взяв одну из ветвей аналитической функции, именно — всюду имеется в виду арифметическое значение корня:

$$\begin{aligned} \rho = (1+W)^{-1/2}\mu\Big\{1 - \frac{1}{2}(1+W)^{-3/2}S(0, \vartheta, \mathbf{z})\mu + \\ + \Big[\frac{5}{8}(1+W)^{-3}S^2(0, \vartheta, \mathbf{z}) - \frac{1}{2}(1+W)^{-2}S'_\rho(0, \vartheta, \mathbf{z})\Big]\mu^2\Big\} + O(\mu^4). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Предполагая μ достаточно малым, введем фазовое время ϑ, для чего разделим последние n уравнений (1.5) на второе:

$$\frac{dz_s}{d\vartheta} = \frac{p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + \rho Z_s(\rho, \vartheta, \mathbf{z})}{\lambda + \rho\Theta(\rho, \vartheta, \mathbf{z})} \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Запишем результат подстановки разложения (1.8) в последнюю систему:

$$\begin{aligned} \lambda\frac{dz_s}{d\vartheta} &= p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + [1 + W(\mathbf{z})]^{-1/2}\Big[Z_s(0, \vartheta, \mathbf{z}) - \\ &- \frac{1}{\lambda}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n)\,\Theta(0, \vartheta, \mathbf{z})\Big]\mu + [1 + W(\mathbf{z})]^{-1} \times \\ &\times\Big\{\frac{\partial Z_s(0, \vartheta, \mathbf{z})}{\partial\rho} - \frac{1}{2}[1 + W(\mathbf{z})]^{-1}S(0, \vartheta, \mathbf{z})\,Z_s(0, \vartheta, \mathbf{z}) - \\ &\qquad - \frac{1}{\lambda}\Theta(0, \vartheta, \mathbf{z})\,Z_s(0, \vartheta, \mathbf{z}) + \\ &+ \frac{1}{\lambda}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n)\Big[\frac{1}{\lambda}\Theta^2(0, \vartheta, \mathbf{z}) - \frac{\partial\Theta(0, \vartheta, \mathbf{z})}{\partial\rho} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}(1 + W)^{-1}S(0, \vartheta, \mathbf{z})\,\Theta(0, \vartheta, \mathbf{z})\Big]\Big\}\mu^2 + O(\mu^3) \\ &\qquad (s = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1.9}$$

К системе (1.9) впервые пришел И. Г. Малкин ([79а], § 26), выписав явно лишь ее постоянную часть. И. Г. Малкин ограничивается доказательством существования периодического решения в окрестности нулевого порождающего решения. Здесь же (гл. III) будут отыскиваться периодические решения в окрестности ненулевых порождающих решений, а также исследоваться переходные процессы. Порядок системы (1.9) на две единицы ниже порядка исходной системы (1.1), а коэффициенты ее нелинейной части суть периодические функции ϑ периода 2π и аналитически зависят от $z_1, \ldots, z_n$ и малого параметра μ.

1.2. Системы уравнений второго порядка [322 к, о, у, ф]. Рассмотрим класс систем Ляпунова, описываемых $k+1$ уравнением второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dt^2}+\lambda^2u=U(u,\dot u,v_1,\ldots,v_k,\dot v_1,\ldots,\dot v_k),\\ \frac{d^2v_\varkappa}{dt^2}+a_{\varkappa 1}v_1+\ldots+a_{\varkappa k}v_k=V_\varkappa(u,\dot u,v_1,\ldots,v_k,\dot v_1,\ldots,\dot v_k)\\ (\varkappa=1,\ldots,k).\end{gathered}\tag{2.1}$$

Здесь $\lambda>0$, $a_{j\varkappa}=a_{\varkappa j}$ $(\varkappa,\ j=1,\ \ldots,\ k)$ — вещественные постоянные, а U, $V_1, \ldots, V_k$ суть вещественные аналитические функции u, $\dot u$, $v_1, \ldots, v_k$, $\dot v_1, \ldots, \dot v_k$, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка. Будем предполагать, что система (2.1) допускает первый интеграл, который необходимо будет аналитической функцией переменных u, $\dot u$, $v_1, \ldots, v_k$, $\dot v_1, \ldots$ $\ldots, \dot v_k$ ([77а], § 38; [79а], § 25) вида

$$\begin{gathered}H=\dot u^2+\lambda^2u^2+W(v_1,\ldots,v_k,\dot v_1,\ldots,\dot v_k)+\\ +S_3(u,\dot u,v_1,\ldots,v_k,\dot v_1,\ldots,\dot v_k)=\mu^2\ (\mu>0),\end{gathered}\tag{2.2}$$

где W — квадратичная форма, а S_3 означает совокупность членов не ниже третьего порядка. Подстановка Ляпунова ([77а], § 33)

$$\begin{gathered}\dot u=\rho\cos\vartheta,\quad u=\frac{1}{\lambda}\rho\sin\vartheta,\\ v_\varkappa=\rho z_\varkappa,\qquad \dot v_\varkappa=\rho z_{k+\varkappa}\qquad(\varkappa=1,\ \ldots,\ k)\end{gathered}\tag{2.3}$$

приведет систему (2.1) и первый интеграл (2.2) к виду

$$\begin{gathered}\frac{d\rho}{dt}=\rho^2R(\rho,\vartheta,\mathbf z),\quad \frac{d\vartheta}{dt}=\lambda+\rho\Theta(\rho,\vartheta,\mathbf z),\\ \frac{dz_\varkappa}{dt}=z_{k+\varkappa}+\rho Z_\varkappa(\rho,\vartheta,\mathbf z),\qquad(\varkappa=1,\ldots,k)\\ \frac{dz_{k+\varkappa}}{dt}=-a_{\varkappa 1}z_1-\ldots-a_{\varkappa k}z_k+\rho Z_{k+\varkappa}(\rho,\vartheta,\mathbf z),\end{gathered}\tag{2.4}$$

$$\rho^2\,[1+W(\mathbf z)+\rho S(\rho,\vartheta,\mathbf z)]=\mu^2.\tag{2.5}$$

Здесь R, Θ, $Z_1, \ldots, Z_{2k}$ и S, как и в п. 1.1,— аналитические функции переменных ρ, $z_1, \ldots, z_{2k}$ в некоторой окрестности нулевых значений, разложения которых по степеням ρ начинаются, вообще говоря, с членов нулевой степени, коэффициенты степенных рядов по ρ, $z_1, \ldots, z_{2k}$ суть периодические функции ϑ периода 2π, именно:

$$
\begin{aligned}
R &= \rho^{-2} U(\lambda^{-1}\rho \sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})\cos\vartheta,\\
\Theta &= -\rho^{-2} U(\lambda^{-1}\rho \sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})\sin\vartheta,\\
Z_\varkappa &= -z_\varkappa R(\rho, \vartheta, \mathbf{z}), \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k),\\
Z_{k+\varkappa} &= \rho^{-2} V_\varkappa(\lambda^{-1}\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}) - z_{k+\varkappa} R(\rho, \vartheta, \mathbf{z}),\\
S &= \rho^{-3} S_3(\lambda^{-1}\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

и $\mathbf{z}$ есть вектор с компонентами $z_1, \ldots, z_{2k}$. В предположении, что $1 + W(\mathbf{z}) > 0$ в (2.5) (см. п. 1.1), разрешим (2.5) относительно ρ:

$$
\rho = [1 + W(\mathbf{z})]^{-1/2}\mu\left\{1 - \frac{1}{2}[1 + W(\mathbf{z})]^{-3/2} S(0, \vartheta, \mathbf{z})\mu\right\} + O(\mu^3).
\tag{2.7}
$$

Предположим μ настолько малым, что правая часть второго уравнения (2.4) положительна, т. е.

$$
\lambda + \rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu)\Theta(\rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu), \vartheta, \mathbf{z}) > 0,
$$

и введем фазовое время ϑ, для чего разделим последние две группы уравнений (2.4) на второе:

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_\varkappa}{d\vartheta} &= \frac{z_{k+\varkappa} + \rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu) Z_\varkappa(\rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu), \vartheta, \mathbf{z})}{\lambda + \rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu)\Theta(\rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu), \vartheta, \mathbf{z})},\\
\frac{dz_{k+\varkappa}}{d\vartheta} &= \frac{-a_{\varkappa 1} z_1 - \ldots - a_{\varkappa k} z_k + \rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu) Z_{k+\varkappa}(\rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu), \vartheta, \mathbf{z})}{\lambda + \rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu)\Theta(\rho(\vartheta, \mathbf{z}; \mu), \vartheta, \mathbf{z})}
\end{aligned}
$$

$$
(\varkappa = 1, \ldots, k).
$$

Запишем результат подстановки разложения (2.7) в последнюю систему:

$$
\begin{aligned}
\lambda\frac{dz_\varkappa}{d\vartheta} &= z_{k+\varkappa} + \mu[1 + W(\mathbf{z})]^{-1/2}[Z_\varkappa(0, \vartheta, \mathbf{z}) - \lambda^{-1} z_{k+\varkappa}\Theta(0, \vartheta, \mathbf{z})] +\\
&\qquad + O(\mu^2), \quad (\varkappa = 1, \ldots, k), \qquad (2.8)\\
\lambda\frac{dz_{k+\varkappa}}{d\vartheta} &= -a_{\varkappa 1} z_1 + \ldots - a_{\varkappa k} z_k + \mu[1 + W(\mathbf{z})]^{-1/2}\times\\
&\qquad \times[Z_{k+\varkappa}(0, \vartheta, \mathbf{z}) + \lambda^{-1}(a_{\varkappa 1} z_1 + \ldots + a_{\varkappa k} z_k)\Theta(0, \vartheta, \mathbf{z})] + O(\mu^2).
\end{aligned}
$$

Из полученной системы исключим $z_{k+1}, \ldots, z_{2k}$; будем иметь

$$\lambda^2 \frac{d^2 z_\varkappa}{d\vartheta^2} + a_{\varkappa 1} z_1 + \ldots + a_{\varkappa k} z_k = \mu \, [1 + W(\mathbf{z})]^{-1/2} \Big[Z_{k+\varkappa} + \lambda \frac{\partial Z_\varkappa}{\partial \vartheta} + 2\lambda^{-1} (a_{\varkappa 1} z_1 + \ldots + a_{\varkappa k} z_k) \Theta -$$

$$- \lambda z'_\varkappa \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + \lambda \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial Z_\varkappa}{\partial z_j} z'_j - \lambda z'_\varkappa \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Theta}{\partial z_j} z'_j + \sum_{j=1}^{k} \left(z'_\varkappa \frac{\partial \Theta}{\partial z_{k+j}} - \frac{\partial Z_\varkappa}{\partial z_{k+j}} \right) \times$$

$$\times (a_{j1} z_1 + \ldots + a_{jk} z_k) \Big] + O(\mu^2) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \qquad (2.9)$$

Здесь в аргументах всех функций (а для частных производных после их взятия) ρ положено равным нулю, а компоненты $z_{k+1}, \ldots, z_{2k}$ вектора $\mathbf{z}$ заменены соответственно на $\lambda z'_1, \ldots, \lambda z'_k$ (штрих означает производную по ϑ). Мы учли также, что производная от $W(\mathbf{z})$, взятая в силу дифференциальных уравнений первого приближения, равна нулю, т. е.

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial W}{\partial z_j} z'_j - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial W}{\partial z_{k+j}} (a_{j1} z_1 + \ldots + a_{jk} z_k) = 0,$$

ибо $W(\mathbf{z})$, как следует из интеграла (2.2), есть интеграл невозмущенной (т. е. при $\mu = 0$) системы (2.8).

Заметим, что если $U, V_1, \ldots, V_k$ не зависят от $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_k$, как это имеет место в ряде приложений, то последняя сумма в квадратной скобке (2.9) равна нулю.

Мы не останавливаемся здесь на случае исходной системы Ляпунова второго порядка, в частности, механической системы с одной степенью свободы. Наличие первого интеграла позволяет свести интегрирование такой системы к квадратурам. Для консервативной голономной системы с одной степенью свободы периодическое решение будет зависеть от двух произвольных постоянных (например, начальных значений определяющей координаты и ее производной) и, следовательно, будет являться общим решением. Все это достаточно широко освещено в литературе. Заметим лишь, что подстановка Ляпунова (1.4) (или (2.3)), ряд (1.8) и второе уравнение (1.5) могут дать наиболее приемлемый вид периодического решения. Мы отсылаем читателя к § 4, гл. VII монографии [79б] И. Г. Малкина.

§ 2. О методе Пуанкаре определения периодических решений неавтономных квазилинейных систем

Из различных методов в теории нелинейных колебаний значительное применение получил метод малого параметра. Возникнув из теории малых возмущений в небесной механике, этот метод был изложен впервые в классическом труде Пуанкаре ([107а], т. I, гл. III). Дальнейшее развитие метода наибольшим образом связано с советскими школами и направлениями исследований. Основными в них являются работы А. А. Андронова и А. А. Витта [3,4], Б. В. Булгакова [25] и И. Г. Малкина [79а,б].

2.1. Дифференциальные уравнения порождающего решения и первых поправок. Мы хотим, не претендуя на новизну результатов, показать, что для систем с большим числом степеней свободы весьма полезным является использование аппарата теории матриц и некоторых элементарных положений теории операторов. Рассмотрим нелинейную систему k дифференциальных уравнений второго порядка, представимую в виде векторного уравнения

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}+\mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{P}_0\mathbf{v}=\mathbf{f}(t)+\mu\mathbf{g}(t,\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},\mu), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{P}_0$ суть постоянные вещественные матрицы порядка $k\times k$, при этом $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}_0$ симметрические, а матрица $\mathbf{Q}_0$ — кососимметрическая: $\mathbf{f}(t)$ — периодическая с периодом $T=2\pi/\omega$ интегрируемая кусочно-непрерывная вектор-функция; $\mathbf{g}(t,\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},\mu)$ — аналитическая вектор-функция μ при $\mu=0$, T — периодическая по t и имеющая достаточное количество производных по $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ в рассматриваемой области изменения переменных.

Будем искать T-периодические решения уравнения (1.1), являющиеся аналитическими функциями μ при $\mu=0$:

$$\mathbf{v}(t,\mu)=\mathbf{v}^{(0)}(t)+\mu\mathbf{v}^{(1)}(t)+\mu^2\mathbf{v}^{(2)}(t)+\ldots. \tag{1.2}$$

Подставляя в (1.1), получим, что порождающее решение $\mathbf{v}^{(0)}(t)$ должно удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{v}^{(0)}}{dt^2}+\mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt}+\mathbf{P}_0\mathbf{v}^{(0)}=\mathbf{f}(t), \tag{1.3}$$

а первая и вторая поправки — системам

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{v}^{(1)}}{dt^2}+\mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{v}^{(1)}}{dt}+\mathbf{P}_0\mathbf{v}^{(1)}=\mathbf{g}(t,\mathbf{v}^{(0)},\dot{\mathbf{v}}^{(0)},0),\\ \mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{v}^{(2)}}{dt^2}+\mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{v}^{(2)}}{dt}+\mathbf{P}_0\mathbf{v}^{(2)}=\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{v}}\right)_0\mathbf{v}^{(1)}+\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{v}}}\right)_0\dot{\mathbf{v}}^{(1)}+\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mu}\right)_0,\end{gathered} \tag{1.4}$$

где индекс нуль у частных производных означает, что после дифференцирования положено $\mu=0$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{(0)}$, $\dot{\mathbf{v}}=\dot{\mathbf{v}}^{(0)}$. Символами $\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{v}$ и $\partial\mathbf{g}/\partial\dot{\mathbf{v}}$ мы будем обозначать ниже матрицы соответствующих частных производных

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{v}}=\left\|\frac{\partial g_i}{\partial v_\varkappa}\right\|_1^k,\quad \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{v}}}=\left\|\frac{\partial g_i}{\partial\dot{v}_\varkappa}\right\|_1^k,\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix},\quad \mathbf{g}=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_k\end{pmatrix}.$$

Для однородной системы, отвечающей системе (1.3)

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{v}^{(0)}}{dt^2}+\mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt}+\mathbf{P}_0\mathbf{v}^{(0)}=\mathbf{0}, \tag{1.5}$$

через $\lambda_{\pm 1}, \ldots, \lambda_{\pm k}$ обозначим корни характеристического уравнения $(\lambda_{-\nu}=\overline{\lambda}_\nu)$

$$\det(\lambda^2\mathbf{M}+\lambda\mathbf{Q}_0+\mathbf{P}_0)=0 \tag{1.6}$$

и через $\mathbf{a}_\nu$ — соответствующие собственные векторы

$$(\lambda_\nu^2\mathbf{M}+\lambda_\nu\mathbf{Q}_0+\mathbf{P}_0)\mathbf{a}_\nu=\mathbf{0} \qquad (\nu=\pm 1, \ldots, \pm k).$$

Рассмотрим два случая.

2.2. Нерезонансный случай. Система (1.5) не имеет T-периодических решений,— для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_\nu \neq ip\omega \qquad (\nu=\pm 1, \ldots, \pm k;\ p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.1}$$

В этом так называемом нерезонансном случае система (1.3) (и аналогично системы (1.4) и последующие) имеет единственное T-периодическое решение (см. ниже). По теореме Пуанкаре [(107а], т. I, гл. III) (см. также [79а]) ряд (1.2) сходится при $\mu=0$, т. е. существует единственное аналитическое по μ при $\mu=0$ T-периодическое решение исходной нелинейной системы уравнений (1.1).

Получим формулу для T-периодического решения системы (1.3). Ограничимся для простоты случаем $\mathbf{Q}_0=\mathbf{0}$ и, не нарушая общности, положим $\mathbf{M}_0=\mathbf{I}_k$ и запишем уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{v}^{(0)}}{dt^2}+\mathbf{P}_0\mathbf{v}^{(0)}=\mathbf{f}(t) \qquad (\mathbf{P}_0^\tau=\mathbf{P}_0) \tag{2.2}$$

в виде векторного уравнения первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{h}(t), \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}^{(0)}\\ \dot{\mathbf{v}}^{(0)}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{I}_k\\ -\mathbf{P}_0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}=\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) с начальными условиями дается формулой (см., например, [146], п. II, 1.4)

$$\mathbf{x}(t)=e^{t\mathbf{A}}\left[\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{-s\mathbf{A}}\mathbf{h}(s)\,ds\right].$$

Отсюда найдем для

$$\mathbf{x}(t+T)=e^{T\mathbf{A}}e^{t\mathbf{A}}\left[\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{-s\mathbf{A}}\mathbf{h}(s)\,ds+\int_t^{t+T} e^{-s\mathbf{A}}\mathbf{h}(s)\,ds\right]=$$

$$=e^{T\mathbf{A}}\left[\mathbf{x}(t)+\int_t^{t+T} e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{h}(s)\,ds\right].$$

Заменим в последнем интеграле s на $\tau = T + t - s$ и выпишем необходимое и достаточное условие периодичности $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$:

$$e^{T\mathbf{A}}\left[\mathbf{x}(t) + \int_0^T e^{(\tau-T)\mathbf{A}}\mathbf{h}(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathbf{x}(t).$$

Поскольку матрица $\mathbf{I}_{2k} - e^{T\mathbf{A}}$ неособая в силу условия (2.1), то единственное T-периодическое решение системы (2.3) дается формулой

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{I}_{2k} - e^{T\mathbf{A}}]^{-1}\int_0^T e^{\tau\mathbf{A}}\mathbf{h}(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.4}$$

Для матриканта $e^{t\mathbf{A}}$ найдем в силу (2.3)

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\mathbf{P}_0}) & (\sqrt{\mathbf{P}_0})^{-1}\sin(t\sqrt{\mathbf{P}_0}) \\ -\sqrt{\mathbf{P}_0}\sin(t\sqrt{\mathbf{P}_0}) & \cos(t\sqrt{\mathbf{P}_0}) \end{pmatrix},$$

где введенные матрицы-функции определяются формулами [146], (2.3), п. I,2.1. Для первого множителя формулы (2.4) найдем

$$[\mathbf{I}_{2k} - e^{T\mathbf{A}}]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & (\sqrt{\mathbf{P}_0})^{-1}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{\mathbf{P}_0}\right) \\ -\sqrt{\mathbf{P}_0}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{\mathbf{P}_0}\right) & \mathbf{I}_k \end{pmatrix},$$

что можно проверить умножением на $\mathbf{I}_{2k} - \exp(T\mathbf{A})$. При этом для достаточно малой по норме матрицы $\sqrt{\mathbf{P}_0}$ имеем

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{\mathbf{P}_0}\right) = \frac{2}{T}(\sqrt{\mathbf{P}_0})^{-1} - \frac{1}{6}T\sqrt{\mathbf{P}_0} - \frac{1}{3^2\cdot 5}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{\mathbf{P}_0}\right)^3 - \ldots$$

Для так введенных тригонометрических матриц-функций справедливы общие формулы тригонометрии (см. [146], § I, 2). Поэтому из (2.4) получим для единственного (при условии (2.1)) T-периодического решения системы (2.2) и его производной

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{(0)}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^T (\sqrt{\mathbf{P}_0})^{-1}\sin(\tau\sqrt{\mathbf{P}_0})\,\mathbf{f}(t-\tau)\,d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sqrt{\mathbf{P}_0})^{-1}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{\mathbf{P}_0}\right)\int_0^T \cos(\tau\sqrt{\mathbf{P}_0})\,\mathbf{f}(t-\tau)\,d\tau, \\
\dot{\mathbf{v}}^{(0)}(t) &= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{\mathbf{P}_0}\right)\int_0^T \sin(\tau\sqrt{\mathbf{P}_0})\,\mathbf{f}(t-\tau)\,d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(\tau\sqrt{\mathbf{P}_0})\,\mathbf{f}(t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3. Резонансный случай. Допустим, однородная система (1.5) имеет $2d$ ($1 \leqslant d \leqslant k$) линейно-независимых T-периодических решений. Тогда будут иметь место $2d$ равенств

$$\lambda_j = ip_j\omega \qquad \left(j = \pm 1, \ldots, \pm d;\ p_{-j} = -p_j,\ \omega = \frac{2\pi}{T}\right),$$

а для остальных корней характеристического уравнения (1.6) неравенства

$$\lambda_h \neq ip\omega \qquad (h = \pm(d+1), \ldots, \pm k),$$

где p_j и p суть целые числа. Запишем $2d$ T-периодических вектор-решений системы (1.5) в комплексной форме

$$\mathbf{v}_{j0}^{(\pm)} = e^{\pm ip_j\omega t}\mathbf{a}_j \quad (j = 1, \ldots, d). \tag{3.1}$$

Выясним необходимые и достаточные условия существования T-периодических решений у системы (1.3) в рассматриваемом резонансном случае. Пусть $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ — вектор-функции, допускающие интегрируемые кусочно-непрерывные вторые производные на отрезке $[0, T]$, и значения вектор-функций и их первых производных на концах отрезка равны:

$$\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}(0), \qquad \dot{\mathbf{u}}(T) = \dot{\mathbf{u}}(0),$$
$$\mathbf{w}(T) = \mathbf{w}(0), \qquad \dot{\mathbf{w}}(T) = \dot{\mathbf{w}}(0).$$

Тогда имеет место формула [1])

$$\int_0^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}_0\mathbf{u}, \mathbf{w})\,dt = \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{Q}_0\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{P}_0\mathbf{w})\,dt. \tag{3.2}$$

Действительно, по формуле $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$ имеем

$$\int_0^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}_0\mathbf{u}, \mathbf{w})\,dt =$$
$$= \int_0^T (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{M}\mathbf{w})\,dt - \int_0^T (\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{Q}_0\mathbf{w})\,dt + \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{P}_0\mathbf{w})\,dt$$

и применяя для второго интеграла и дважды для первого интеграла интегрирование по частям, получим формулу (3.2). Допустим, что у системы (1.1) существует периодическое решение $\mathbf{v}(t, \mu)$.

---

[1]) Если

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{pmatrix},$$

то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_k\bar{\eta}_k$ (черта над скалярными величинами означает комплексно-сопряженную величину).

Подставляя его и какую-нибудь из $2d$ функций (3.1) в формулу (3.2), получим тождества по μ

$$\int_0^T (\mathbf{f}(t) + \mu \mathbf{g}(t, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mu), \mathbf{v}_{j0}^{(\pm)})\, dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, d), \tag{3.3}$$

поскольку

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}_{j0}^{(\pm)} + \mathbf{Q}_0\dot{\mathbf{v}}_{j0}^{(\pm)} + \mathbf{P}_0\mathbf{v}_{j0}^{(\pm)} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, d).$$

Полагая в (3.3) $\mu = 0$, получим

$$\int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_{j0}^{(\pm)})\, dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, d).$$

Будем предполагать эти равенства выполненными; вычтем их из тождеств (3.3) и, сократив на μ, получим тождества

$$\int_0^T (\mathbf{g}(t, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mu), \mathbf{v}_{j0}^{(\pm)})\, dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, d). \tag{3.4}$$

Положив в них $\mu = 0$ и подставив $\mathbf{v}_{j_0}^{(\pm)}$ из (3.1), получим, что порождающее решение $\mathbf{v}^{(0)}(t)$ в резонансном случае необходимо удовлетворяет следующим $2d$ условиям:

$$\psi_j \equiv \int_0^T e^{-ip_j\omega t} (\mathbf{g}(t, \mathbf{v}^{(0)}, \dot{\mathbf{v}}^{(0)}, 0), \mathbf{a}_j)\, dt = 0 \tag{3.5}$$

$$(j = \pm 1, \ldots, \pm d).$$

Порождающее решение $\mathbf{v}^{(0)}(t)$ будем искать в виде

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{w}^{(0)}(t) + \sum_{j=-d}^{d} \zeta_j e^{ip_j\omega t}\mathbf{a}_j \qquad (\zeta_{-j} = \bar{\zeta}_j,\ p_{-j} = -p_j),$$

где $\mathbf{w}^{(0)}(t)$ — некоторое частное периодическое решение системы (1.3). При этом (3.5) представляют собой систему $2d$ уравнений [1]) для определения комплексных чисел $\zeta_{-d}, \ldots, \zeta_d$ — уравнения для порождающих амплитуд. Обозначим через $\zeta_{-d}^{(0)}, \ldots, \zeta_d^{(0)}$ решение системы (3.5). Можно показать, что если якобиан системы уравнений (3.5) отличен от нуля, т. е.

$$\frac{D(\psi_{-d}, \ldots, \psi_d)}{D(\zeta_{-d}^{(0)}, \ldots, \zeta_d^{(0)})} \neq 0,$$

[1]) Эти уравнения получаются из общей в теории операторов теоремы фредгольмовского типа.

то решение (1.2) существует и является аналитическим по μ при $\mu = 0$.

Приравнивая в тождестве (3.4) члены с μ, μ^2, ..., получим

$$\chi_j \equiv \int_0^T e^{-ip_j\omega t}\left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)_0 \mathbf{v}^{(1)} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)_0 \dot{\mathbf{v}}^{(1)} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mu}\right)_0, \mathbf{a}_j\right) dt = 0$$

$$(j = \pm 1, \ldots, \pm d), \qquad (3.6)$$

где индекс нуль означает, что после дифференцирования положено $\mu = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(t)$, $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}^{(0)}(t)$.

2.4. Уравнения в вариациях для периодического невозмущенного движения. Принимая (1.2) за невозмущенное движение, составим дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mu) + \mathbf{y}$$

и выпишем их первое приближение, т. е. систему уравнений в вариациях

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + \mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \mathbf{P}_0\mathbf{y} = \mu\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)\mathbf{y} + \mu\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)\frac{d\mathbf{y}}{dt},$$

где в частных производных после дифференцирования подставлено невозмущенное движение (1.2): $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mu)$, $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}(t, \mu)$. Введем обозначения для матриц-функций

$$\mu\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right) = -\mu\mathbf{P}(t, \mu), \quad \mu\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right) = -\mu\mathbf{Q}(t, \mu).$$

Разложим эти последние в ряды по степеням μ:

$$\mu\mathbf{P}(t, \mu) = \mu\mathbf{P}_1(t) + \mu^2\mathbf{P}_2(t) + \ldots,$$
$$\mu\mathbf{Q}(t, \mu) = \mu\mathbf{Q}_1(t) + \mu^2\mathbf{Q}_2(t) + \ldots,$$

где

$$\mathbf{P}_1(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)_0, \quad \mathbf{Q}_1(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)_0, \qquad (4.1)$$

причем индекс нуль означает, что после дифференцирования положено $\mu = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(t)$, $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}^{(0)}(t)$. Представим векторное уравнение, записывающее систему уравнений в вариациях, в виде

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + [\mathbf{Q}_0 + \mu\mathbf{Q}_1(t) + \mu^2\mathbf{Q}_2(t) + \ldots]\frac{d\mathbf{y}}{dt} + [\mathbf{P}_0 + \mu\mathbf{P}_1(t) + \mu^2\mathbf{P}_2(t) + \ldots]\mathbf{y} = 0. \qquad (4.2)$$

Мы получили систему линейных дифференциальных уравнений с T-периодическими коэффициентами.

2.5. Случай различных мультипликаторов невозмущенной системы уравнений в вариациях. Рассмотрим систему уравнений в вариациях (4.2) при $\mu = 0$

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + \mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \mathbf{P}_0\mathbf{y} = 0. \tag{5.1}$$

При условиях $\mathbf{M}^\tau = \mathbf{M} > 0$, $\mathbf{P}_0^\tau = \mathbf{P}_0 > 0$, $\mathbf{Q}_0^\tau = -\mathbf{Q}_0$ все корни ее характеристического уравнения (1.6) чисто мнимы:

$$\lambda_\nu = i\omega_\nu \quad (\nu = \pm 1, \ldots, \pm k;\ \omega_{-\nu} = -\omega_\nu). \tag{5.2}$$

Допустим, что все мультипликаторы системы (5.1), отвечающие периоду T

$$\rho_\nu = e^{i\omega_\nu T} \qquad (\nu = \pm 1, \ldots, \pm k),$$

различны: $\rho_\chi \neq \rho_\nu$, т. е.

$$\omega_\chi \not\equiv \omega_\nu \qquad \left(\operatorname{mod}\omega \equiv \frac{2\pi}{T}\right) \quad (\chi, \nu = \pm 1, \ldots, \pm k).$$

Иначе говоря, каждый класс сравнимых по модулю $2\pi/T$ чисел ω_ν состоит из одного числа. Характеристические показатели системы уравнений в вариациях равны ([146], п. IV, 3.4)

$$\alpha_j(\mu) = i\omega_j - i\sigma_{jj}\operatorname{sign} j\cdot\mu + O(\mu^2) \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm k),$$

где [1])

$$\begin{gathered}\det\left[-\omega_j^2\mathbf{M} + i\omega_j\mathbf{Q}_0 + \mathbf{P}_0\right] = 0,\\ \sigma_{jj} = -\left(\left[\mathbf{P}_1^{(0)} + i\omega_j\mathbf{Q}_1^{(0)}\right]\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j\right),\\ \mathbf{P}_1^{(0)} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}_1(t)\,dt, \quad \mathbf{Q}_1^{(0)} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{Q}_1(t)\,dt\end{gathered} \tag{5.3}$$

и $\mathbf{a}_j$ суть нормированные собственные векторы

$$\begin{gathered}(-\omega_j^2\mathbf{M} + i\omega_j\mathbf{Q}_0 + \mathbf{P}_0)\mathbf{a}_j = 0,\\ ([2\omega_j\mathbf{M} - i\mathbf{Q}_0]\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j) = \operatorname{sign} j \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm k).\end{gathered} \tag{5.4}$$

Для вещественных частей характеристических показателей системы уравнений в вариациях (4.1) будем иметь в рассматриваемом случае

$$\operatorname{Re}\alpha_j(\mu) = -\operatorname{sign} j\cdot\operatorname{Im}\left[(\mathbf{P}_1^{(0)} + i\omega_j\mathbf{Q}_1^{(0)}]\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)\mu + O(\mu^2) \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm k).$$

Следовательно, *если*

$$\operatorname{sign} j\cdot\operatorname{Im}\left([\mathbf{P}_1^{(0)} + i\omega_j\mathbf{Q}_1^{(0)}]\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j\right) > 0 \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm k), \tag{5.5}$$

---

[1]) Напомним, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma\xi_\varkappa\bar{\eta}_\varkappa$ (см. сноску в п. 2.3).

т. е. для всех j, то невозмущенное движение (1.2) *асимптотически устойчиво* [77а, 145а] *при достаточно малых положительных* μ, *а если хотя бы для одного из скалярных произведений* (*при некотором* j' *из последовательности* $\pm 1, \ldots, \pm k$)

$$\operatorname{sign} j' \cdot \operatorname{Im}\,([\mathbf{P}_1^{(0)} + i\omega_{j'}\mathbf{Q}_1^{(0)}]\mathbf{a}_{j'},\ \mathbf{a}_{j'}) < 0, \tag{5.6}$$

то невозмущенное движение (1.2) *неустойчиво* [77а; 145а] *при достаточно малых положительных* μ.

Примечание. В рамках рассматриваемого случая различных мультипликаторов допустим, что

$$(\mathbf{P}_1^{(0)}\mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_j) \qquad (j = \pm 1, \ldots, \pm k)$$

вещественны. Это заведомо будет иметь место при тривиальном условии $\mathbf{P}_1^{(0)} = 0$, а также при условии $\mathbf{Q}_0 = 0$. В последнем случае $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, как собственные векторы симметрической матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_0$, вещественны и $\mathbf{a}_{-j} = \mathbf{a}_j$ ($j = 1, \ldots, k$). Поскольку $\omega_j \operatorname{sign} j > 0$ (см. (5.2)), то

$$\operatorname{Re} \alpha_j(\mu) = -\operatorname{Re}\,(\mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_j)\mu + O(\mu^2) \qquad (j = \pm 1, \ldots, \pm k).$$

Следовательно, *если для всех* j

$$\vartheta_j \equiv -\operatorname{Re}\,(\mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_j) = \\ = \frac{1}{T}\operatorname{Re}\left(\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)_0 dt \cdot \mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_j\right) < 0 \qquad (j = \pm 1, \ldots, \pm k), \tag{5.5'}$$

то невозмущенное движение (1.2) *асимптотически устойчиво при достаточно малых положительных* μ, *а если хотя бы для одного из скалярных произведений*

$$\vartheta_{j'} \equiv \frac{1}{T}\operatorname{Re}\left(\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)_0 dt \cdot \mathbf{a}_{j'},\ \mathbf{a}_{j'}\right) > 0, \tag{5.6'}$$

то невозмущенное движение неустойчиво при достаточно малых положительных μ. *Если* $\mathbf{Q}_0 = 0$, *то условия* (5.5′) *и* (5.6′) *достаточно испытывать только для одних положительных индексов и знак* Re *автоматически опускается из-за вещественности* $(\mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_j)$ ($j = 1, \ldots, k$).

2.6. Случай кратных мультипликаторов ([146], п. V, 3.4). Допустим, что система уравнений (5.1) имеет r-кратный мультипликатор ρ_0, отвечающий периоду T:

$$\rho_0 = e^{i\omega^{(0)}T}.$$

Пусть $\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_r}$ — класс корней уравнения (5.3), отвечающий этому мультипликатору, т. е.

$$\omega_j \equiv \omega^{(0)} \qquad \left(\operatorname{mod} \omega \equiv \frac{2\pi}{T}\right) \qquad (j = j_1, \ldots, j_r).$$

Итак, система уравнений (4.2) имеет при $\mu = 0$ кратный характеристический показатель $i\omega^{(0)}$. Определим целые числа m_j формулами

$$\omega_j = \omega^{(0)} + m_j \frac{2\pi}{T} \qquad (j = j_1, \ldots, j_r).$$

Представим матрицы-функции (см. (4.1))

$$\mathbf{P}_1(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)_0, \quad \mathbf{Q}_1(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)_0$$

матричными рядами Фурье в комплексной форме

$$\mathbf{P}_1(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(im\frac{2\pi}{T}\right) \mathbf{P}_1^{(m)}, \quad \mathbf{Q}_1(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(im\frac{2\pi}{T}\right) \mathbf{Q}_1^{(m)}.$$

Определим числа σ_{jh} формулами

$$\sigma_{jh} = -\left(\left[\mathbf{P}_1^{(m_h-m_j)} + i\omega_j \mathbf{Q}_1^{(m_h-m_j)}\right] \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_h\right)$$
$$(j, h = j_1, \ldots, j_r), \tag{6.1}$$

где $\mathbf{a}_j$ пронормированы условиями (5.4), а

$$\mathbf{P}_1^{(m_h-m_j)} = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i(\omega_h-\omega_j)t}\, \mathbf{P}_1(t)\, dt,$$

$$\mathbf{Q}_1^{(m_h-m_j)} = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i(\omega_h-\omega_j)t}\, \mathbf{Q}_1(t)\, dt.$$

Введем числа

$$\gamma_{jh} = \begin{cases} 0 & j \neq h, \\ 1 & j = h > 0, \\ -1 & j = h < 0 \end{cases} \qquad (j, h = j_1, \ldots, j_r)$$

и составим уравнение

$$\det \left\| \sigma_{jh} - i\chi\gamma_{jh} \right\|_{j,\, h=j_1, \ldots, j_r} = 0. \tag{6.2}$$

Если вещественные части корней этого уравнения $\chi_{j1}, \ldots, \chi_{jr}$ *отрицательны и это имеет место для всех мультипликаторов системы уравнений* (5.1), *то невозмущенное движение* (1.2) *асимптотически устойчиво* [77а, 145а] *при достаточно малых положительных* μ. *Если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнения* (6.2) *в одном из классов положительна, то невозмущенное* *движение* (1.2) *неустойчиво* [77а, 145а] *при достаточно малых положительных* μ

Для r характеристических показателей системы уравнений в вариациях (4.2), обращающихся при $\mu = 0$ в $i\omega^{(0)}$, справедлива формула

$$\alpha_j(\mu) = i\omega^{(0)} + \chi_j\mu + O(\mu^{1+\delta}) \qquad (\delta > 0;\ j = j_1, \ldots, j_r),$$

где числа χ_j являются корнями уравнения (6.2).

2.7. Примеры. Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение Ван-дер Поля

$$\ddot{\xi} + \sigma^2\xi = l\sin t + \mu(1 - \xi^2)\dot{\xi} \qquad (\sigma > 0,\ l > 0),$$

детально исследованное А. А. Андроновым и А. А. Виттом ([3], стр. 70—84). Корни характеристического уравнения (1.6) суть $\lambda = \pm i\sigma$. Исследуем оба возможных случая.

а) *Нерезонансный случай* (σ *не есть натуральное число*). Уравнение (1.3) запишется в виде

$$\ddot{\xi}^{(0)} + \sigma^2\xi^{(0)} = l\sin t$$

и допускает единственное 2π-периодическое ($T = 2\pi$) порождающее решение

$$\xi^{(0)} = \frac{l}{\sigma^2 - 1}\sin t.$$

Из первого уравнения (1.4)

$$\ddot{\xi}^{(1)} + \sigma^2\xi^{(1)} = \left[1 - \frac{l^2\sin^2 t}{(\sigma^2-1)^2}\right]\frac{l}{\sigma^2-1}\cos t$$

определится первая поправка

$$\xi^{(1)} = \frac{l}{(\sigma^2-1)^2}\left[1 - \frac{l^2}{4(\sigma^2-1)^2}\right]\cos t + \frac{l^3}{4(\sigma^2-1)^3(\sigma^2-9)}\cos 3t.$$

Все последующие члены ряда (1.2) определятся также единственным образом из второго уравнения (1.4) и последующих уравнений. Искомое решение (1.2) есть

$$\xi(t, \mu) = \frac{l\sin t}{\sigma^2 - 1} + \frac{\mu l}{(\sigma^2-1)^2}\left\{\left[1 - \frac{l^2}{4(\sigma^2-1)^2}\right]\cos t + \right.$$
$$\left. + \frac{l^2\cos 3t}{4(\sigma^2-1)(\sigma^2-9)}\right\} + O(\mu^2).$$

Для суждения об его устойчивости вычислим ϑ по формуле (5.5'):

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\xi}}[(1 - \xi^2)\dot{\xi}]\right\}_0 dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 - \frac{l^2}{(\sigma^2-1)^2}\sin^2 t\right]dt = 1 - \frac{l^2}{2(\sigma^2-1)^2},$$

и, согласно (5.5′) и (5.6′) заключим, что для достаточно малых μ и при

$$l^2 > 2(\sigma^2-1)^2 \tag{7.1}$$

найденное 2π-периодическое решение $\xi(t, \mu)$ асимптотически устойчиво, и неустойчиво, если знак неравенства обратный.

б) Резонансный случай ($\sigma = p$, *где* p — *натуральное число*). Уравнение (1.3) примет вид

$$\ddot{\xi}^{(0)} + p^2\xi^{(0)} = l \sin t$$

и допускает 2π-периодическое решение для любого p начиная с двух, что и будем предполагать в дальнейшем. Согласно п. 2.3,

$$\xi^{(0)} = \frac{l}{p^2-1}\sin t + \zeta_1 \cos pt + \zeta_2 \sin pt.$$

После очевидных вычислений определятся левые части уравнений (3.5) и сами уравнения запишутся как

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{\pi}{4}p\zeta_2\left[\zeta_1^2+\zeta_2^2+\frac{2l^2}{(p^2-1)^2}-4\right]=0,\\ \psi_2 &= \frac{\pi}{4}p\zeta_1\left[\zeta_1^2+\zeta_2^2+\frac{2l^2}{(p^2-1)^2}-4\right]=0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

При любых значениях параметров p и l уравнения допускают нулевое решение

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,$$

а при $l < \sqrt{2}\,(p^2-1)$ сверх того еще и решение

$$\zeta_1 = \zeta_1^{(0)}, \quad \zeta_2 = \zeta_2^{(0)} = \mp\sqrt{4-\frac{2l^2}{(p^2-1)^2}-\zeta_1^{(0)2}},$$

где $\zeta_1^{(0)}$ — любое из вещественных чисел, не превосходящих по модулю $\sqrt{4-2l^2/(p^2-1)^2}$. Для последнего решения якобиан п. 2.3

$$\left.\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(\zeta_1, \zeta_2)}\right|_{\zeta_1=\zeta_1^{(0)},\ \zeta_2=\zeta_2^{(0)}} = 0$$

и, основываясь на п. 2.3, нельзя утверждать, что существует аналитическое по μ при $\mu = 0$ 2π-периодическое решение, для которого порождающим решением является

$$\xi^{(0)} = \frac{l}{p^2-1}\sin t + \zeta_1^{(0)}\cos pt + \zeta_2^{(0)}\sin pt.$$

Для дополнительных исследований отсылаем читателя к [3].

Обратимся к первому решению уравнений (7.2), т. е. $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. Якобиан

$$\left.\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(\zeta_1, \zeta_2)}\right|_{\zeta_1=\zeta_2=0} = \frac{1}{4}\pi^2p^2\left[\frac{l^2}{(p^2-1)^2}-2\right]^2 \neq 0$$

при $l \neq \sqrt{2}\,(p^2-1)$, и согласно п. 2.3, существует аналитическое по μ при $\mu = 0$ решение. Из первого уравнения (1.4) будем иметь для первой поправки в случае четного p

$$\xi^{(1)} = \frac{l}{(p^2-1)^2}\left[1 - \frac{l^2}{4(p^2-1)^2}\right]\cos t + \\ + \frac{l^3}{4(p^2-1)^3(p^2-9)}\cos 3t + \eta_1 \cos pt + \eta_2 \sin pt,$$

где η_1 и η_2 определяются из уравнения (3.6). Условием устойчивости остается (7.1).

Пример 2. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений ([140], стр. 117):

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \eta_1 &= \mu\,(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)\,\dot{\eta}_1 + \mu q \cos t, \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 &= \mu\,(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)\dot{\eta}_2, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где $\mu > 0$, $q < 0$, $\omega_2 > 0$ и $\omega_2 \neq \frac{1}{2} m$ (m — натуральное число). Корни характеристического уравнения (1.6) суть

$$\lambda_{\mp 1} = \mp i, \qquad \lambda_{\mp 2} = \mp \omega_2 i$$

и, поскольку $\omega = 2\pi/T = 1$, то имеет место резонансный случай: $p_{-1} = -1$, $p_1 = 1$, $\lambda_{\mp 2} \neq pi$ (см. начало п. 2.3). Порождающее 2π-периодическое решение системы (7.3) будем искать в виде $\eta_2^{(0)} \equiv 0$,

$$\eta_1^{(0)} = \zeta_1 e^{it} + \bar{\zeta}_1 e^{-it} = 2\mathrm{Re}\,(\zeta_1 e^{it}) = 2\alpha_1 \cos t - 2\beta_1 \sin t,$$

при этом обозначено $\zeta_1 = \alpha_1 + i\beta_1$. Вычислим теперь левые части системы уравнений (3.5)

$$\psi_{-1} = 2\pi\left[\frac{1}{2} q - i\bar{\zeta}_1(1 - \zeta_1\bar{\zeta}_1)\right],$$

$$\psi_1 = 2\pi\left[\frac{1}{2} q + i\zeta_1(1 - \zeta_1\bar{\zeta}_1)\right].$$

Выпишем уравнения (3.5), складывая их и вычитая, получим

$$q_1 - 2\beta_1(1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2) = 0, \quad 2i\alpha_1(1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2) = 0.$$

Отсюда найдем, что $\alpha_1 = 0$, а β_1 должно быть корнем кубического уравнения

$$f(\beta_1) = \beta_1^3 - \beta_1 + \frac{1}{2} q = 0. \tag{7.4}$$

При $q < -4\sqrt{3}/9$ это уравнение имеет только один вещественный корень $\beta_1^{(0)} > 2\sqrt{3}/3$, а при $-4\sqrt{3}/9 < q < 0$ один положительный корень $\beta_1^{(0)}$ $(1 < \beta_1^{(0)} < 2\sqrt{3}/3)$ и два отрицательных различных корня β_1^* и β_1^{**} $(\beta_1^* < \beta_1^{**})$. Итак, порождающее решение системы (7.3) имеет вид $\eta_2^{(0)} \equiv 0$,

$$\eta_1^{(0)} = \zeta_1^{(0)} e^{it} + \bar{\zeta}_1^{(0)} e^{-it} = -2\beta_1 \sin t \qquad (\zeta_1^{(0)} = i\beta_1), \tag{7.5}$$

где β_1 удовлетворяет уравнению (7.4). Вычислим якобиан системы уравнений (3.5)

$$D = \frac{D(\psi_{-1}, \psi_1)}{D(\bar{\zeta}_1^{(0)}, \zeta_1^{(0)})} = 4\pi^2 [(1 - 2\zeta_1^{(0)}\bar{\zeta}_1^{(0)})^2 - \zeta_1^{(0)2}\bar{\zeta}_1^{(0)2}] = 4\pi^2 (3\beta_1^4 - 4\beta_1^2 + 1).$$

Якобиан D обращается в нуль только при $\beta_1 = \mp\sqrt{3}/3$ и $\beta_1 = \mp 1$. Поскольку $\beta_1^{(0)} > 1$, то при $\beta = \beta_1^{(0)}$ якобиан отличен от нуля. Далее, случай $\beta_1 = \mp 1$ невозможен, поскольку $f(\mp 1) < 0$. Поэтому якобиан D равен нулю тогда и только тогда, когда $\beta_1 = -\sqrt{3}/3$, т. е. при $q = -4\sqrt{3}/9$. Здесь этот случай исключается, как требующий дополнительного исследования. Во всех остальных случаях решение (1.3) существует и является аналитическим по μ при $\mu = 0$. Система уравнений (1.4) для первой поправки примет вид

$$\ddot{\eta}_1^{(1)} + \eta_1^{(1)} = -2\beta_1^3 \cos 3t, \qquad \ddot{\eta}_2^{(1)} + \omega_2^2 \eta_2^{(1)} = 0,$$

откуда

$$\eta_1^{(1)} = \gamma_1 e^{it} + \bar{\gamma}_1 e^{-it} + \frac{1}{4}\beta_1^3 \cos 3t, \quad \eta_2^{(1)} \equiv 0.$$

Далее нужно определить порождающую амплитуду γ_1 первой поправки, на чем мы, однако, не будем останавливаться, а перейдем к исследованию устойчивости решения (1.2).

Уравнения в вариациях (4.2) для системы (7.3) и порождающего решения (7.5) суть

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + [\mu \mathbf{Q}_1(t) + \ldots] \frac{d\mathbf{y}}{dt} + [\mathbf{P}_0 + \mu \mathbf{P}_1(t) + \ldots] \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{P}_1(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)_0 = \begin{Vmatrix} 4\beta_1^2 \sin 2t & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\right)_0 = (-1 + 2\beta_1^2 - 2\beta_1^2 \cos 2t)\,\mathbf{I}_2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}_1^{(2)} = \overline{\mathbf{P}_1^{(-2)}} = \begin{Vmatrix} -2i\beta_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1^{(0)} = (-1 + 2\beta_1^2)\,\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{Q}_1^{(2)} = \mathbf{Q}_1^{(-2)} = -\beta_1^2 \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а все остальные коэффициенты Фурье матриц-функций $\mathbf{P}_1(t)$ и $\mathbf{Q}_1(t)$ равны нулю.

Корни уравнения (5.3) суть $\omega_{-1} = 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_{-2} = -\omega_2$ и ω_2. Собственные векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ матрицы $\mathbf{P}_0$, нормированные условиями (5.4), суть

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\mathbf{e}_2.$$

Имеется класс из двух корней $\{\omega_{-1}, \omega_1\}$, соизмеримых по модулю $2\pi/T = 1$, а все остальные корни по условию $\omega_2 \neq \frac{1}{2}m$ не соизмеримы с ними и несоизмеримы между собой, и образуют два класса по одному корню: $\{\omega_{-2}\}$ и $\{\omega_2\}$. Начнем с класса из двух корней и определим целые числа m_{-1} и m_1 из выражений

$$\omega_{-1} = 0 + (-1)\cdot 1, \qquad \omega_1 = 0 + 1\cdot 1,$$

откуда $m_{-1} = -1$, $m_1 = 1$. Вычислим σ_{jh} по формулам (6.1)

$$\sigma_{-1-1} = \overline{\sigma_{11}} = \frac{i}{2}(2\beta_1^2 - 1), \quad \sigma_{-11} = \overline{\sigma_{1-1}} = \frac{1}{2}\beta_1^2 i$$

и составим уравнение (6.2)

$$\begin{vmatrix} \sigma_{-1-1} + i\chi & \sigma_{-11} \\ \sigma_{1-1} & \sigma_{11} - i\chi \end{vmatrix} = \left[\chi + \frac{1}{2}(-1 + 2\beta_1^2)\right]^2 - \frac{1}{4}\beta_1^4 = 0.$$

Корни его

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(1 - \beta_1^2), \qquad \chi_2 = \frac{1}{2}(1 - 3\beta_1^2).$$

При $\beta_1 = \beta_1^{(0)} > 1$ χ_1 и χ_2 отрицательны. При $\beta = \beta_1^* < 0$ или $\beta_1 = \beta_1^{**} < 0$ (что возможно лишь при $q > -4\sqrt{3}/9$) χ_1 положительно, ибо из (7.4) имеем

$$1 - \beta_1^{*2} = \frac{1}{2}\frac{q}{\beta_1^*} > 0, \quad 1 - \beta_1^{**2} = \frac{1}{2}\frac{q}{\beta_1^{**}} > 0.$$

В силу заключения п. 2.6 периодическое решение (1.2) с порождающими амплитудами $-2\beta_1^*$ и $-2\beta_1^{**}$ (см. (7.5)) — неустойчиво. Для суждения об устойчивости периодического решения (1.2) с порождающей амплитудой $2\beta_1^{(0)}$ надо обратиться к оставшимся двум классам $\{\omega_{-2}\}$ и $\{\omega_2\}$. Вычислим ϑ_{-2} и ϑ_2 по формуле (5.5′)

$$\vartheta_2 = -(\mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = \frac{1 - 2\beta_1^2}{2\omega_2}, \quad \vartheta_{-2} = \vartheta_2.$$

При $\beta_1 = \beta_1^{(0)} > 1$ ϑ_2 отрицательно. Таким образом, периодическое решение (1.2) с порождающей амплитудой $2\beta_1^{(0)}$ асимптотически устойчиво.

Следующий пример выделим в отдельный параграф.

§ 3. Вынужденные колебания прядильных центрифуг

3.1. Постановка задачи и уравнения движения. В производстве вискозного шелка применяется прядильная центрифуга, представляющая собой сочетание электроверетена с прядильной кружкой, укрепленной на конце вертикального консольного гибкого шпинделя. Рабочая скорость вращения шпинделя приближается в современных прядильных центрифугах к 9000 *об/мин*. Эта скорость значительно превышает ту угловую скорость, при которой начинают заметно проявляться упругие свойства шпинделя. При определенной скорости упругие восстанавливающие силы и моменты, возникающие вследствие деформации шпинделя, несущего прядильную кружку, уравновешиваются инерционными силами и моментами, обусловленными его вращением. По общепринятой терминологии гибким валом называют такой, основная собственная частота поперечных колебаний которого ниже угловой скорости его вращения. Большим достоинством центрифуг с гибким валом является их свойство самоцентрирования. При указанных рабочих оборотах возникает тенденция к устранению как статической, так и динамической неуравновешенности ротора.

Однако в устройствах с гибким валом при определенных условиях могут возникнуть неустойчивые режимы движения. Возможны также автоколебания, т. е. такие режимы, когда наряду с чисто вынужденными колебаниями от дебаланса ротора возбуждаются незатухающие колебания, происходящие с частотами, близкими к собственным частотам линеаризованной системы дифференциальных уравнений, описывающих движение устройства.

Причиной потери устойчивости режима чисто-вынужденных колебаний в закритической области может быть внутреннее трение в материале гибкого вала ([74], стр. 108—113). Согласно известному теоретическому положению силы внешних сопротивлений отодвигают границу устойчивости в область высоких частот [44, 45]. В связи с этим представляет интерес задача, состоящая в определении таких соотношений между параметрами внутреннего трения и внешних сопротивлений, при которых вынужденные колебания центрифуги оказываются асимптотически устойчивыми.

Для вывода дифференциальных уравнений движения центрифуги воспользуемся расчетной схемой, предложенной Я. И. Корытысским ([66], стр. 383). Представление о расчетной схеме прядильной электроцентрифуги типа ЭВ-3М можно получить из рис. 1.

Там же указаны координаты, определяющие положение устройства относительно неподвижной системы отсчета xuv. Ось x в действительности направлена вертикально вверх. Согласно принятой динамической модели и учитывая некоторые естественные допущения, принимаемые многими авторами [66, 74] колебания электроцентрифуги можно описать квазилинейной неавтономной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при ведущих членах. Записанная в комплексной форме, она имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{u}_1 + c_{11}u_1 - c_{12}u_2 - c_{13}u_3 = me\nu^2 \exp(i\nu t) - \\
&\qquad - \mu\{m[\dot{u}_1 + ie\nu \exp(i\nu t)](\varkappa_0 + \varkappa_1 |u_1|^2) + \\
&\qquad + hc_{11}(\dot{u}_1 - i\nu u_1) - hc_{12}(\dot{u}_2 - i\nu u_2) - hc_{13}(\dot{u}_3 - i\nu u_3)\},\\
&K_1\ddot{u}_2 - i\nu K_0\dot{u}_2 - c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 = \\
&\qquad = \mu\left[\left(\frac{1}{2} i\nu K_0\dot{u}_2 + c_{21}u_1 - c_{22}u_2 - c_{23}u_3\right)|u_2|^2 - \right.\\
&\qquad - (i\nu K_0 u_2 - 2K_1\dot{u}_2)\mathrm{Re}(\bar{u}_2\dot{u}_2) + hc_{21}(\dot{u}_1 - i\nu u_1) - \\
&\qquad \left. - hc_{22}(\dot{u}_2 - i\nu u_2) - hc_{23}(\dot{u}_3 - i\nu u_3)\right],\\
&A\ddot{u}_3 - c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + (c^0_{33} + f)u_3 = \mu[hc_{31}(\dot{u}_1 - i\nu u_1) - \\
&\qquad - hc_{32}(\dot{u}_2 - i\nu u_2) - hc^0_{33}(\dot{u}_3 - i\nu u_3) - A\varkappa_2\dot{u}_3].
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Смысл комплекснозначных координат u_j ($j = 1, 2, 3$) легко выясняется из рис. 1: $u_1 = \eta + i\xi$, где η и ξ — координаты центра

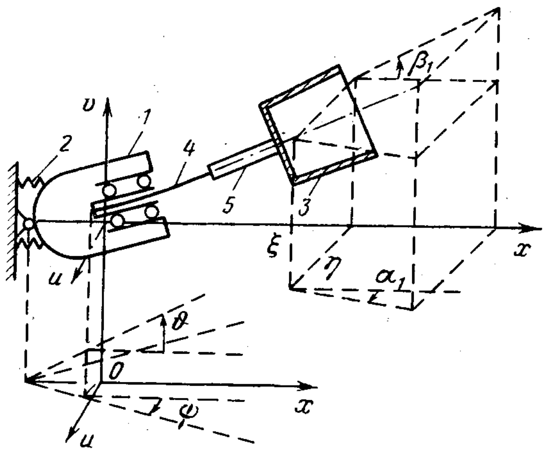

Рис. 1.

тяжести жесткой части ротора *5* вместе с прядильной кружкой *3*; $u_2 = \alpha_1 + i\beta_1$, где α_1 и β_1 — углы Резаля, характеризующие направление касательной к упругой оси вертикального консольного гибкого валика *4* в точке насадки жесткой части ротора *5*; $u_3 = \psi + i\vartheta$, где ψ и ϑ — углы, характеризующие отклонения оси корпуса электроверетена *1* от неподвижной оси x.

Постоянные коэффициенты $c_{jk} = c_{kj}$, c^0_{33} (j, $k = 1, 2, 3$) зависят от конструктивных и физических параметров устройства. Жесткость амортизаторов корпуса *2* по отношению к угловым перемещениям корпуса *1* определяется коэффициентом f. Линейный эксцентриситет e ротора считается малой величиной по сравнению с ведущими членами дифференциальных уравнений. Остальные величины, входящие в уравнения (1.1), имеют следующие значения: K_0, K_1 — соответственно полярный и экваториальный центральный моменты инерции ротора; A — экваториальный момент инерции устройства для его неподвижной точки; m — масса ротора; $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — коэффициенты внешних диссипативных сил; h — коэффициент внутреннего трения в материале гибкого валика [44, 66].

Отметим, наконец, что параметр μ введен в дифференциальные уравнения движения (1.1) для выделения членов, малых по сравнению с членами, записанными в левых частях этих уравнений.

3.2. Определение периодического решения. Как свидетельствуют экспериментальные данные, а также наблюдения за центрифугой в процессе эксплуатации, неуравновешенность ротора является причиной возникновения чисто-вынужденных колебаний устройства. Этим колебаниям соответствует периодическое решение исходных дифференциальных уравнений (1.1), определять которое будем методом Пуанкаре. Предварительно исходную систему трех дифференциальных уравнений (1.1) второго порядка относительно комплекснозначных функций u_j ($j = 1, 2, 3$) запишем в виде одного вещественного векторного уравнения (2,1.1)

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + \mathbf{Q}_0\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{P}_0\mathbf{v} = \mathbf{f}(t) + \mu\mathbf{g}(t, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}). \tag{2.1}$$

Здесь введены следующие обозначения: векторы

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = me\nu^2\begin{pmatrix} \cos\nu t \\ \sin\nu t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu\mathbf{g}(t, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = \mu\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix},$$

где $x_1 = \eta$, $x_2 = \xi$, $x_3 = \alpha_1$, $x_4 = \beta_1$, $x_5 = \psi$, $x_6 = \vartheta$, а функции μg_j ($j = 1, \ldots, 6$) находятся в результате расщепления соответствующих комплексных уравнений системы (1.1);

матрицы

$$\mathbf{M} = \operatorname{diag}(m, n, K_1, K_1, A, A), \quad \mathbf{Q}_0 = \| q_{jh} \|_1^6,$$

причем $q_{34} = K_0\nu$, $q_{43} = -K_0\nu$, а остальные элементы матрицы $\mathbf{Q}_0$ равны нулю.

В результате расщепления исходной системы комплексных уравнений (1.1) определяется матрица $\mathbf{P}_0$, которая оказывается для исследуемой системы симметрической и положительно-определенной. Элементами этой матрицы порядка 6×6 являются коэффициенты $c_{jk} = c_{kj}$, $c_{33}^0 + f$ $(j, k = 1, 2, 3)$. Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ представляет собой координаты устройства, а вектор-функция $\mu\mathbf{g}(t, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$ — периодическая по времени t с периодом $T = 2\pi/\nu$.

Будем искать T-периодическое решение уравнения (2.1) в виде ряда (2,1.2) по целым степеням малого параметра μ, ограничиваясь при этом первой поправкой к порождающему решению:

$$\mathbf{v}(t, \mu) = \mathbf{v}^{(0)}(t) + \mu\mathbf{v}^{(1)}(t) + \ldots \tag{2.2}$$

В результате применения известной процедуры (см. п. 2.1) получаем векторные дифференциальные уравнения (2,1.3) — для порождающего решения, а также (2,1.4) — для первой поправки. Характеристическое уравнение (2,1.6) для однородной системы (2,1.5) имеет следующий вид:

$$[\det(\mathbf{P}_0 - \lambda\mathbf{I}_6)]^2 + \{[(c_{11} + m\lambda^2)(c_{33}^0 + f + A\lambda^2) - c_{13}^2]K_0\nu\}^2\lambda^2 = 0.$$

Оно, очевидно, имеет чисто мнимые корни $\lambda_j = i\omega_j$ $(j = \mp 1, \ldots$ $\ldots, \mp 6)$. Предполагается, что среди этих корней нет чисел вида $ip\nu$ $(p = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots; i = \sqrt{-1})$. В этом случае уравнение для порождающего решения, а также каждое из последующих уравнений будут иметь единственное T-периодическое решение. Фактически эти решения целесообразно находить, вновь обратившись к комплексной записи исходных уравнений. Тогда порождающее решение представится следующим образом:

$$x_{2k-1}^{(0)} + ix_{2k}^{(0)} = me\nu^2 D^{-1}(\nu) D_{1k}(\nu) \exp(i\nu t) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Напомним, что $x_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, 6)$ — компоненты вектора $\mathbf{v}^{(0)}$ порождающего решения, а величина $D_{1k}(\nu)$ представляют собой алгебраические дополнения к соответствующим элементам в фундаментальном определителе

$$D(\nu) \equiv \det(-\nu^2\widetilde{\mathbf{M}} + i\nu\widetilde{\mathbf{Q}}_0 + \widetilde{\mathbf{P}}_0).$$

Здесь:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \operatorname{diag}(m, K_1, A), \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_0 = \operatorname{diag}(0, -i\nu K_0, 0),$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_0 = \begin{Vmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ -c_{13} & c_{23} & c_{33}^0 + f \end{Vmatrix}.$$

Первые поправки определятся так:

$$\mu(x_{2k-1}^{(1)} + ix_{2k}^{(1)}) = D^{-1}(\nu) \sum_{j=1}^{3} r_j D_{jk}(\nu) \quad (k = 1, 2, 3).$$

В последних формулах введены следующие обозначения: $x_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, 6)$ — компоненты вектора $\mathbf{v}^{(1)}$,

$$r_k = g_{2k-1}(t, \mathbf{v}^{(0)}, \dot{\mathbf{v}}^{(0)}) + i g_{2k}(t, \mathbf{v}^{(0)}, \dot{\mathbf{v}}^{(0)}) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Таким образом,

$$r_1 = i\nu m e\left[\varkappa_0 + \varkappa_1\left(\frac{me\nu^2 D_{11}(\nu)}{D(\nu)}\right)^2\right]\left(1 + \frac{m\nu^2 D_{11}(\nu)}{D(\nu)}\right)\exp(i\nu t),$$

$$r_2 = -\left(\frac{me\nu^2 D_{12}(\nu)}{D(\nu)}\right)^3 K_1\nu^2\left(1 - \frac{K_0}{2K_1}\right)\exp(i\nu t),$$

$$r_3 = -i\nu A\varkappa_2\frac{me\nu^2 D_{13}(\nu)}{D(\nu)}\exp(i\nu t).$$

Аналогично находятся последующие приближения.

3.3. Исследование устойчивости. Известно, что физически реализуются только устойчивые движения. Поэтому найденное в предыдущем пункте периодическое решение необходимо исследовать на устойчивость, что дает также возможность определить области существования периодических движений центрифуги. Для исследования устойчивости составим уравнения в вариациях, принимая за невозмущенное движение найденное периодическое движение.

Обозначим вектором $\mathbf{y}$ малое отклонение от невозмущенного движения; тогда возмущенное движение представится так:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mu) + \mathbf{y}.$$

Подставляя возмущенное движение в систему (2.1), запишем уравнения в вариациях в векторной форме (2,4.2), ограничиваясь при этом членами, содержащими μ в первой степени:

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + [\mathbf{Q}_0 + \mu\mathbf{Q}_1(t) + \ldots]\frac{d\mathbf{y}}{dt} + [\mathbf{P}_0 + \mu\mathbf{P}_1(t) + \ldots]\mathbf{y} = 0. \quad (3.1)$$

В исследуемом случае, как было отмечено выше, все корни характеристического уравнения чисто мнимые и все мультипликаторы системы (3.1) при $\mu = 0$, отвечающие периоду $T = 2\pi/\nu$, различны. Характеристические показатели системы (3.1) определятся формулами (2,5.3):

$$\alpha_j(\mu) = i\omega_j - i\sigma_{jj}\,\mathrm{sign}\, j\mu + O(\mu^2) \quad (j = \mp 1, \ldots, \mp 6),$$

где $\sigma_{jj} = -([\mathbf{P}_1^{(0)} + i\omega_j\mathbf{Q}_1^{(0)}]\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)$, и $\mathbf{a}_j$ — нормированные собственные векторы

$$(-\omega_j^2\mathbf{M} + i\omega_j\mathbf{Q}_0 + \mathbf{P}_0)\mathbf{a}_j = 0,$$

$$([2\omega_j\mathbf{M} - i\mathbf{Q}_0]\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j) = \mathrm{sign}\, j \quad (j = \mp 1, \ldots, \mp 6).$$

В качестве компонентов собственных векторов можно взять следующие величины:

$$a_j^{(1)} = \frac{D_{21}(\omega_j)}{D_{22}(\omega_j)} c_j, \quad a_j^{(2)} = \frac{D_{21}(\omega_j)}{D_{22}(\omega_j)}, \quad a_j^{(3)} = c_j,$$

$$a_j^{(4)} = c_j, \quad a_j^{(5)} = \frac{D_{23}(\omega_j)}{D_{22}(\omega_j)} c_j, \quad a_j^{(6)} = \frac{D_{23}(\omega_j)}{D_{22}(\omega_j)}$$

$$(j = \mp 1, \ldots, \mp 6),$$

где

$$c_j^2 = \frac{1}{4} \omega_j^{-1} \left[m \frac{D_{21}(\omega_j)^2}{D_{22}(\omega_j)^2} + K_1 \left(1 - \frac{K_0 \nu}{2K_1 \omega_j}\right) + A \frac{D_{23}(\omega_j)^2}{D_{22}(\omega_j)^2} \right]^{-1} \operatorname{sign} j,$$

а для суждения об устойчивости в случае различных мультипликаторов нормировка не существенна.

Вследствие вещественности величин $(\mathbf{P}_1^{(0)} \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)$ $(j = \mp 1, \ldots, \mp 6)$ условия асимптотической устойчивости исследуемого движения (2.2) запишутся в виде (2,5.5'):

$$\operatorname{Re} (\mathbf{Q}_1^{(0)} \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j) > 0 \qquad (j = 1, \ldots, 6).$$

Матрица $\mu \mathbf{Q}_1^{(0)}$, вычисленная для системы (2.1), такова:

$$\begin{Vmatrix} M + hc_{11} & 0 & -hc_{12} & 0 & -hc_{13} & 0 \\ 0 & M + hc_{11} & 0 & -hc_{12} & 0 & -hc_{13} \\ -hc_{12} & 0 & hc_{22} & K_1 \nu f_2^2 & hc_{23} & 0 \\ 0 & -hc_{12} & -K_1 \nu f_2^2 & hc_{22} & 0 & hc_{23} \\ -hc_{13} & 0 & hc_{23} & 0 & hc_{33}^0 + A\varkappa_2 & 0 \\ 0 & -hc_{13} & 0 & hc_{23} & 0 & hc_{33}^0 + A\varkappa_2 \end{Vmatrix},$$

где

$$M = m(\varkappa_0 + \varkappa_1 f_1^2), \quad f_k = me\nu^2 D^{-1}(\nu) D_{1k}(\nu) \qquad (k = 1, 2).$$

Условия асимптотической устойчивости чисто-вынужденных колебаний прядильной центрифуги в развернутом виде представятся следующим образом:

$$[m(\varkappa_0 + \varkappa_1 f_1^2) D_{21}(\omega_j)^2 + A\varkappa_2 D_{23}(\omega_j)^2 + \\ + hm\omega_j^2 D_{21}(\omega_j)^2 - h\omega_j (K_0 \nu - K_1 \omega_j) D_{22}(\omega_j)^2 - \\ - h(f - A\omega_j^2) D_{23}(\omega_j)^2 > 0 \qquad (j = 1, \ldots, 6).$$

Здесь $D_{2k}(\omega_j)$ — алгебраические дополнения к соответствующим элементам в фундаментальном определителе системы (2.1).

Из анализа условий асимптотической устойчивости можно сделать вывод о том, что практически в устройствах, подобных рассмотренной здесь центрифуге, силы внутреннего трения не могут нарушить асимптотической устойчивости вынужденных колебаний, вызванных неуравновешенностью ротора.

Глава II

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

Два следующих параграфа посвящены плоским колебательным цепям. В первом параграфе [322г] эти цепи свободные и целиком упругие, т. е. если речь идет о механических системах, то рассматривается система материальных точек, связанных невесомыми пружинами. В четвертом параграфе [322в] нарушается одно из этих условий, именно некоторые из пружин заменяются невесомыми стержнями, а в одном из примеров к тому же движение некоторой из масс стеснено направляющими, — колебательная цепь перестает быть и целиком упругой и свободной.

На первый взгляд это частные вопросы механических колебаний. Однако такое представление ошибочно. Даже в механических задачах можно рассматривать стержень как колебательную цепь и трудно решить, что лучше отражает действительность — сплошная или дискретная модель. Если же рассматривать и электродинамические системы, то аналогии еще более глубокие. Отошлем читателя к книге Л. И. Мандельштама [80] (ч. I, лекция 29; ч. II, лекция 12). В § III, 2 будет выяснена связь колебаний частиц в циклических ускорителях с колебаниями пружинных маятников; это лишь один из многих примеров.

§ 1. Свободные, целиком упругие колебательные цепи

1.1. Определение понятия колебательные цепи. Рассмотрим механическую систему, стесненную голономными и не зависящими явно от времени связями. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ суть лагранжевы координаты системы, а $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ — соответствующие обобщенные скорости. Допустим, что обобщенная сила, соответствующая координате q_ν, может быть представлена в виде

$$Q_\nu (q_1, \ldots, q_n) - R_\nu (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Здесь Q_ν и R_ν — непрерывные и дифференцируемые функции своих аргументов в области их определения. Для выделенных сил сопротивления будем предполагать, что их работа на любом возможном перемещении (совпадающем в рассматриваемом случае с одним из действительных) отрицательна:

$$-\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\,\dot{q}_\nu < 0. \tag{1.1}$$

Отсюда и из непрерывности следует, что

$$R_\nu(0, \ldots, 0) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

В простейшем нелинейном случае, когда $R_\nu = f(\dot{q}_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, условие (1.1) означает, что $\alpha f(\alpha) > 0$ $(\alpha \neq 0)$, а требование непрерывности означает, в частности, что $f(0) = 0$. В линейном случае условия (1.1) означают, что диссипация полная.

Кинетическая энергия T системы в силу независимости связей явно от времени будет квадратичной формой обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими лишь от лагранжевых координат

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (a_{ji} = a_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n).$$

Уравнения движения в форме Лагранжа второго рода запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = Q_\nu - R_\nu \tag{1.2}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Попытаемся по отношению к переменным $q_1, \ldots, q_r, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$ $(r \leqslant n)$ изучить устойчивость в смысле Ляпунова невозмущенного движения

$$q_\nu = q_{\nu 0}(t), \quad \dot{q}_\nu = \dot{q}_{\nu 0}(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Для возмущенного движения значения координат и скоростей обозначим

$$q_\nu = q_{\nu 0}(t) + \varkappa_\nu, \quad \dot{q}_\nu = \dot{q}_{\nu 0}(t) + \dot{\varkappa}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения (уравнения в вариациях) могут быть представлены в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(a_{\nu i})_0\frac{d^2\varkappa_i}{dt^2} + b_{\nu i}(t)\frac{d\varkappa_i}{dt} + c_{\nu i}(t)\varkappa_i\right] = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1.4}$$

где

$$b_{\nu i}(t)=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i}\right)_0+\left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j}\right)_0-\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\nu}\right)_0\right]\dot q_{j0}(t)+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i}\right)_0, \quad (1.5)$$

$$c_{\nu i}(t)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i}\right)_0\ddot q_{j0}(t)+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^2 a_{\nu k}}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial q_\nu\partial q_i}\right)_0\right]\dot q_{j0}(t)\,\dot q_{k0}(t)\right\}-\left(\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_i}\right)_0^{*}\quad (\nu, i=1,\ldots, n), \quad (1.6)$$

а индекс нуль при $a_{\nu i}$ и частных производных означает подстановку в их значения

$$q_{10}(t), \ldots, q_{n0}(t), \dot q_{10}(t), \ldots, \dot q_{n0}(t).$$

Условимся называть исходную механическую систему *«колебательной цепью»* относительно невозмущенного движения (1.3), если возможно выбрать такие лагранжевы координаты, при которых коэффициенты $(a_{\nu i})_0$, $b_{\nu i}(t)$ и $c_{\nu i}(t)$ таковы, что для некоторого натурального $m<n$

$$(a_{\nu i})_0=0 \quad (1.7)$$

$(\nu=1, \ldots, m,\ i=m+1, \ldots, n;\ \nu=m+1, \ldots, n,\ i=$
$=1, \ldots, m)$,

$$b_{\nu i}(t)=\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i}\right)_0 \quad (\nu, i=1,\ldots,n), \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i}\right)_0=0 \quad (1.9)$$

$(\nu=1, \ldots, m,\ i=m+1, \ldots, n;\ \nu=m+1, \ldots, n,\ i=$
$=1, \ldots, m)$,

$$c_{\nu i}(t)=0$$

$(\nu=1, \ldots, m,\ i=m+1, \ldots, n;\ \nu=m+1, \ldots, n,\ i=$
$=1, \ldots, m)$

для всех t, не меньших некоторого t_0. Условия (1.7) — (1.10) означают, что матрицы-функции коэффициентов системы (1.4) имеют вид

$$\begin{pmatrix}\|(a_{\nu i})_0\|_1^m & 0\\ 0 & \|(a_{\nu i})_0\|_{m+1}^n\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\|c_{\nu i}(t)\|_1^m & 0\\ 0 & \|c_{\nu i}(t)\|_{m+1}^n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\left\|\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i}\right)_0\right\|_1^m & 0\\ 0 & \left\|\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i}\right)_0\right\|_{m+1}^n\end{pmatrix}.$$

Уравнения в вариациях (1.4) при выполнении условий (1.7)—(1.10) разбиваются на две группы из m и $n-m$ уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(a_{\nu i})_0\frac{d^2\varkappa_i}{dt^2}+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial\dot q_i}\right)_0\frac{d\varkappa_i}{dt}+c_{\nu i}(t)\,\varkappa_i\right]=0 \tag{1.11}$$

$$(\nu=1,\ldots,m),$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}\left[(a_{\nu i})_0\frac{d^2\varkappa_i}{dt^2}+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial\dot q_i}\right)_0\frac{d\varkappa_i}{dt}+c_{\nu i}(t)\,\varkappa_i\right]=0 \tag{1.12}$$

$$(\nu=m+1,\ldots,n).$$

1.2. Определение положений равновесия. Простейшим примером «колебательной цепи» будет *свободная, целиком упругая колебательная цепь* относительно вертикальных колебаний (т. е. когда за невозмущенное движение принимается вертикальное колебание названной системы). На рис. 2 представлена система N материальных точек с массами $m_1,\ldots,m_N$, последовательно соединенных N пружинами (массой которых пренебрегаем) с жесткостями $c_1,\ldots,c_N$ и длинами в ненапряженном состоянии $l_1,\ldots,l_N$. Начало первой пружины закреплено в точке O, начала каждой из последующих прикреплены к невесомым шарнирам, оси которых перпендикулярны к вертикальной плоскости Oxy, что обуславливает плоский характер движения. Таким образом, на систему наложено лишь N тривиальных связей: $z_1=0,\ldots,z_N=0$ и за $2N$ лагранжевых координат примем $x_1,\ldots,x_N$, $y'_1,\ldots,y'_N$ — декартовы координаты материальных точек $m_1,\ldots,m_N$. Кинетическая энергия T в этом простейшем случае

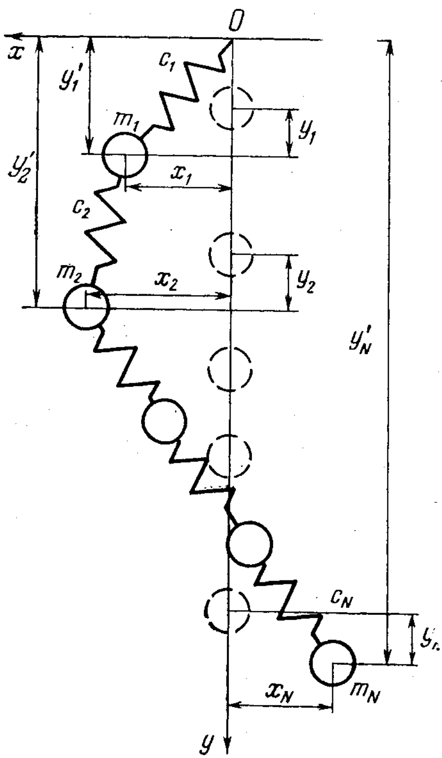

Рис. 2.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k(\dot x_k^2+\dot y_k'^2),$$

т. е. $a_{ij} = m_i\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера; $i,\ j = 1, \ldots, N$). Вычислим потенциальную энергию $V(x_1, \ldots, x_N, y_1', \ldots, y_N')$ линейных сил упругости пружин и сил тяжести

$$V = \sum_{k=1}^{N} \Big\{ -gm_k y_k' + \frac{1}{2} c_k \big[(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k' - y_{k-1}')^2 - \\ - 2l_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k' - y_{k-1}')^2}\big]\Big\}, \quad (2.1)$$

считая $x_0 = y_0' = 0$ и рассматривая всюду лишь арифметические значения корня. Начнем с определения положений равновесия системы, для чего рассмотрим систему

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = -c_k x_{k-1} + (c_k + c_{k+1}) x_k - c_{k+1} x_{k+1} - c_k l_k [(x_k - x_{k-1})^2 + \\ + (y_k' - y_{k-1}')^2]^{-1/2} (x_k - x_{k-1}) + c_{k+1} l_{k+1} [(x_{k+1} - x_k)^2 + \\ + (y_{k+1}' - y_k')^2]^{-1/2} (x_{k+1} - x_k) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_k'} = -m_k g - c_k y_{k-1}' + (c_k + c_{k+1}) y_k' - c_{k+1} y_{k+1}' - \\ - c_k l_k [(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k' - y_{k-1}')^2]^{-1/2} (y_k' - y_{k-1}') + \\ + c_{k+1} l_{k+1} [(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1}' - y_k')^2]^{-1/2} (y_{k+1}' - y_k') = 0 \ (k = 1, \ldots, N),$$

считая $c_{N+1} = l_{N+1} = 0$. Эта система допускает решение (нижнее положение равновесия)

$$x_k = 0, \quad y_k' = (l_1 + \lambda_1) + \ldots + (l_k + \lambda_k) \qquad (k = 1, \ldots, N), \quad (2.3)$$

где λ_j означает статическое удлинение j-й пружины

$$\lambda_j = (m_j + m_{j+1} + \ldots + m_N)\, g/c_j \quad (j = 1, \ldots, N).$$

Найденное положение равновесия будет изолированным. Действительно, якобиан системы уравнений (2.2) при значениях переменных (2.3) $D = D_1 \cdot D_2$, где D_1 и D_2 — определители якобиевых матриц N-го порядка

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{c_1\lambda_1}{l_1+\lambda_1} + \dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} & -\dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} & \dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} + \dfrac{c_3\lambda_3}{l_3+\lambda_3} & -\dfrac{c_3\lambda_3}{l_3+\lambda_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{c_N\lambda_N}{l_N+\lambda_N} \end{vmatrix},$$

а D_2 получается из D_1 при $l_k = 0$, $\lambda_k = 1$ ($k = 1, \ldots, N$). Воспользовавшись формулой для определителя якобиевой матрицы, найдем

$$D=\prod_{k=1}^{N}\frac{c_k^2\lambda_k}{l_k+\lambda_k}>0,$$

что и требовалось установить.

Введем переменные y_k, представляющие отклонения по вертикали k-й материальной точки от нижнего положения равновесия

$$y_k = y_k' - (l_1+\lambda_1) - \ldots - (l_k+\lambda_k) \qquad (k=1,\ldots,N). \tag{2.4}$$

В нижнем положении равновесия $x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots \ldots = y_N = 0$. Для определения положений равновесия, отличных от нижнего, запишем систему уравнений (2.2) в виде

$$\begin{gathered}
-c_k(x_k - x_{k-1})\times\\
\times\{l_k[(x_k-x_{k-1})^2+(l_k+\lambda_k+y_k-y_{k-1})^2]^{-1/2}-1\}+\\
+c_{k+1}(x_{k+1}-x_k)\{l_{k+1}[(x_{k+1}-x_k)^2+\\
+(l_{k+1}+\lambda_{k+1}+y_{k+1}-y_k)^2]^{-1/2}-1\}=0,\\
-c_k(l_k+\lambda_k+y_k-y_{k-1})\times\\
\times\{l_k[(x_k-x_{k-1})^2+(l_k+\lambda_k+y_k-y_{k-1})^2]^{-1/2}-1\}+\\
+c_{k+1}(l_{k+1}+\lambda_{k+1}+y_{k+1}-y_k)\{l_{k+1}[(x_{k+1}-x_k)^2+\\
+(l_{k+1}+\lambda_{k+1}+y_{k+1}-y_k)^2]^{-1/2}-1\}=m_kg.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Выпишем уравнения, отвечающие k, равному N,

$$\begin{gathered}
c_N(x_N-x_{N-1})\{1-l_N[(x_N-x_{N-1})^2+\\
+(l_N+\lambda_N+y_N-y_{N-1})^2]^{-1/2}\}=0,\\
c_N(l_N+\lambda_N+y_N-y_{N-1})\{1-l_N[(x_N-x_{N-1})^2+\\
+(l_N+\lambda_N+y_N-y_{N-1})^2]^{-1/2}\}=m_Ng.
\end{gathered}$$

Фигурная скобка отлична от нуля, так как в противном случае второе уравнение не может быть удовлетворено. Тогда из первого уравнения найдем $x_N = x_{N-1}$, а второе уравнение примет вид

$$c_N(l_N+\lambda_N+y_N-y_{N-1})\times\\
\times\{1-l_N|l_N+\lambda_N+y_N-y_N|^{-1}\}=m_Ng.$$

Последнее уравнение всегда имеет решение $y_N = y_{N-1}$, а при условии $\lambda_N < l_N$ и решение $y_N = y_{N-1} - 2l_N$. Будем рассматривать наиболее распространенный случай, когда статическое удлинение каждой из пружин меньше длины ее в ненапряженном состоянии

$$\lambda_k < l_k \quad (k=1,\ldots,N). \tag{2.6}$$

Поступая с уравнениями (2.5), отвечающими $k = N-1, N-2, \ldots \ldots, 1$, аналогичным образом, найдем 2^N положений равновесия свободной колебательной цепи:

$$x_1 = \ldots = x_N = 0, \tag{2.7}$$

$$y_1 = \begin{cases} 0 \\ -2l_1, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} y_1 \\ y_1 - 2l_2, \end{cases} \ldots, \quad y_N = \begin{cases} y_{N-1} \\ y_{N-1} - 2l_N. \end{cases}$$

При этом должно быть оговорено, что плоскости движения каждой из N материальных точек различны и параллельны вертикальной плоскости.

1.3. Асимптотическая устойчивость в большом нижнего положения равновесия при наличии сил сопротивления. Уравнения движения (1.2) свободной, целиком упругой колебательной цепи записываются весьма просто:

$$\begin{gathered} m_k\ddot{x}_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k} - R_k(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \ \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N), \\ m_k\ddot{y}_k = -\frac{\partial V}{\partial y_k} - R_{N+k}(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) \\ (k = 1, \ldots, N). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Обозначим через $\inf V$ наименьшее значение потенциальной энергии свободной целиком упругой колебательной цепи *среди* $2^N - 1$ *положений равновесия*, отличных от нижнего. В фазовом пространстве $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N$ определим замкнутую область G неравенством

$$T + V \leqslant \inf V.$$

Теорема. *При наличии сил сопротивления, удовлетворяющих условию* (1.1), *нижнее положение равновесия свободной, целиком упругой колебательной цепи асимптотически устойчиво для начальных отклонений*

$$x_1^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_N^{(0)}, \dot{x}_1^{(0)}, \ldots, \dot{x}_N^{(0)}, \dot{y}_1^{(0)}, \ldots, \dot{y}_N^{(0)},$$

принадлежащих области G. Последнее означает, что $T^{(0)} + V^{(0)}$ удовлетворяет неравенству

$$T^{(0)} + V^{(0)} < \inf V, \tag{3.2}$$

где в выражении $T^{(0)}$ и $V^{(0)}$ подставлено $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, \dot{y}_N = \dot{y}_N^{(0)}$.

Доказательство. Примем за функцию v теоремы 14.1 Н. Н. Красовского [70] полную энергию системы

$$v = T + V - V(0, \ldots, 0). \tag{3.3}$$

Вычислим $V(0, \ldots, 0)$ — величину потенциальной энергии в нижнем положении равновесия

$$V(0, \ldots, 0) = -\sum_{k=1}^{N} \Big\{m_k g\,[(l_1+\lambda_1)+\ldots+(l_k+\lambda_k)] + \frac{1}{2} c_k (l_k^2-\lambda_k^2)\Big\}.$$

Покажем, что $V - V(0, \ldots, 0)$ будет определенно-положительной в смысле Ляпунова функцией $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N$. Преобразуем $V - V(0, \ldots, 0)$ к виду

$$V - V(0, \ldots, 0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k \Big[(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2+2l_k(l_k+\lambda_k+ y_k-y_{k-1}) - 2l_k\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(l_k+\lambda_k+y_k-y_{k-1})^2}\Big]$$

и установим справедливость неравенств

$$(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2+2l_k(l_k+\lambda_k+y_k-y_{k-1}) \geqslant 2l_k\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(l_k+\lambda_k+y_k-y_{k-1})^2} \quad (3.4)$$

($k = 1, \ldots, N$; $x_0 = y_0 = 0$). Левая часть этих неравенств может быть представлена в виде

$$(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1}+l_k)^2+l_k(l_k+2\lambda_k)$$

и, очевидно, положительна. Возведем неравенства (3.4) в квадрат и после преобразования получим

$$[(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2+2l_k(y_k-y_{k-1})]^2 + 4l_k\lambda_k[(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2] \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Полученные неравенства достоверны, в них одновременное наличие знака равенства возможно лишь при $x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_N = 0$. Следовательно, полная энергия (3.3) системы будет определенно-положительной в смысле Ляпунова функцией всех лагранжевых координат и скоростей. Производная ее в силу уравнений (3.1) равна

$$\frac{d}{dt}[T+V-V(0, \ldots, 0)] = -\sum_{k=1}^{N}(R_k\dot{x}_k+R_{N+k}\dot{y}_k) \leqslant 0.$$

При этом в силу определения рассматриваемых сил сопротивления равенство нулю в последнем неравенстве возможно лишь в положении равновесия. Движение, начавшееся в области G, не может из нее выйти, в области же G положение равновесия будет единственным. Таким образом, выполнены условия теоремы 14.1 Н. Н. Красовского [70]. Т е о р е м а д о к а з а н а.

Примечание. Можно установить формулы для радиуса сферы или ребра куба, вписанных в замкнутую $4N$-мерную область G.

1.4. Уравнения в вариациях для вертикальных колебаний системы. Выпишем подробно уравнения (3.1)

$$\begin{aligned}
m_k\ddot{x}_k = \\
= -c_k(x_k - x_{k-1}) + c_{k+1}(x_{k+1} - x_k) + c_k l_k (x_k - x_{k-1})\times \\
\times[(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2]^{-1/2} - \\
- c_{k+1}l_{k+1}(x_{k+1} - x_k)\,[(x_{k+1} - x_k)^2 + \\
+ (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)^2]^{-1/2} - \\
- R_k(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N), \quad (4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_k\ddot{y}_k = -c_k l_k + c_{k+1}l_{k+1} - c_k(y_k - y_{k-1}) + \\
+ c_{k+1}(y_{k+1} - y_k) + c_k l_k (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})\times \\
\times[(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2]^{-1/2} - \\
- c_{k+1}l_{k+1}(l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)\times \\
\times[(x_{k+1} - x_k)^2 + (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)^2]^{-1/2} - \\
- R_{N+k}(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) \quad (k = 1, \ldots, N).
\end{aligned}$$

Допустим, что проекции на ось x сил сопротивления удовлетворяют условиям

$$R_k(0, \ldots, 0, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) \equiv 0 \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Система (4.1) допускает решение (невозмущенное движение (1.3))

$$x_k \equiv 0, \quad y_k = y_{k0}(t) \qquad (k = 1, \ldots, N); \qquad (4.2)$$

при этом $y_{k0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_{k0} + \frac{1}{m_k}R_{N+k}(0, \ldots, 0, \dot{y}_{10}, \ldots, \dot{y}_{N0}) - p_k y_{k-1,0} + \\
+ (p_k + \mu_{k+1}p_{k+1})\,y_{k0} - \mu_{k+1}p_{k+1}y_{k+1,0} = 0 \quad (4.3) \\
(k = 1, \ldots, N).
\end{aligned}$$

Здесь

$$p_k = \frac{c_k}{m_k} \qquad (k = 1, \ldots, N;\ p_{N+1} = 0),$$

$$\mu_k = \frac{m_k}{m_{k-1}} \qquad (k = 2, \ldots, N;\ \mu_{N+1} = 0).$$

Проверим выполнение условий (1.7)—(1.10) ($n = 2N$, $m = N$). Условия (1.7) и (1.8) выполнены, так как

$$a_{\nu i} = \begin{cases} m_\nu \delta_{\nu i} & (\nu = 1, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, 2N), \\ m_{\nu-N}\,\delta_{\nu i} & (\nu = N+1, \ldots, 2N;\ i = 1, \ldots, 2N). \end{cases}$$

Условие (1.9) требует, чтобы

$$\left(\frac{\partial R_k}{\partial \dot{y}_l}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial R_{N+k}}{\partial \dot{x}_l}\right)_0 = 0 \qquad (k, l = 1, \ldots, N), \tag{4.4}$$

где индекс нуль означает, что после дифференцирования подставлены значения аргументов из (4.2). Условия (4.4) будут выполнены, в частности, если R_k не зависят от $\dot{y}_l$, а R_{N+k} — от $\dot{x}_l$ (k, $l = 1, \ldots, N$). Будем предполагать условия (4.4) выполненными.

Условие (1.10) требует, чтобы

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial y_k}\right)_0 = 0 \quad (j, k = 1, \ldots, N),$$

что выполнено, так как индекс нуль означает, в частности, что после дифференцирования положено $x_1 = \ldots = x_N = 0$. Следовательно, имеют место уравнения в вариациях (1.11) и (1.12) для возмущенного движения ($x_k = 0 + \xi_k$, $y_k = y_{k0}(t) + \eta_k$; $k = 1, \ldots, N$)

$$\frac{d^2\xi_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial R_k}{\partial \dot{x}_i}\right)_0 \frac{d\xi_i}{dt} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0 \xi_i\right] = 0,$$

$$\frac{d^2\eta_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial R_{N+k}}{\partial \dot{y}_i}\right)_0 \frac{d\eta_i}{dt} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k}\right)_0 \eta_i\right] = 0,$$

$$(k = 1, \ldots, N)$$

или, в развернутой записи,

$$\frac{d^2\xi_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_k}{\partial \dot{x}_i}\right)_0 \frac{d\xi_i}{dt} - p_k\left\{1 - \left[1 + \gamma_k + \frac{1}{l_k}(y_{k0}(t) - y_{k-1,0}(t))\right]^{-1}\right\} \times$$
$$\times (\xi_{k-1} - \xi_k) + \mu_{k+1}p_{k+1}\left\{1 - \left[1 + \gamma_{k+1} + \frac{1}{l_{k+1}}(y_{k+1,0}(t) - y_{k0}(t))\right]^{-1}\right\} \times$$
$$\times (\xi_k - \xi_{k+1}) = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{d^2\eta_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_{N+k}}{\partial \dot{y}_i}\right)_0 \frac{d\eta_i}{dt} - p_k\eta_{k-1} + (p_k + \mu_{k+1}p_{k+1})\,\eta_k -$$
$$- \mu_{k+1}p_{k+1}\eta_{k+1} = 0 \tag{4.6}$$
$$(k = 1, \ldots, N).$$

Заметим, что эти уравнения выписаны, несмотря на то, что вопрос об устойчивости в большом нижнего положения равновесия при выполнении условия (1.1) решен теоремой п. 1.3. Имеются в виду, во-первых, случаи невыполнения условия (1.1) (например, при частичной диссипации), во-вторых, использование уравнений (4.5) — (4.6) для суждения об устойчивости невозмущенного движения (4.2) и, в-третьих, отсутствие сил сопротивления. К этому консервативному случаю мы и переходим.

1.5. Консервативный случай. При отсутствии сил сопротивления свободная целиком упругая колебательная цепь будет консервативной системой. Отклонения $y_{k0}(t)$ ее масс от нижнего положения равновесия при вертикальных колебаниях (невозмущенное движение) удовлетворяют системе (4.3) при $R_{N+k} \equiv 0$ ($k = 1, \ldots, N$) (описывающей малые колебания штурмовых систем [36]). Уравнение частот ω этой системы оказывается вековым уравнением некоторой якобиевой матрицы

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - (p_1 + \mu_2 p_2) & \mu_2 p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_2 p_2 & \omega^2 - (p_2 + \mu_3 p_3) & \mu_3 p_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega^2 - p_N \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнения (4.5) из системы уравнений первого приближения возмущенного движения при $R_j \equiv 0$ ($j = 1, \ldots, 2N$) будут иметь либо периодические коэффициенты, если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_N$ соизмеримы, либо почти-периодические — в противном случае. Исследование устойчивости невозмущенного движения в обоих случаях является довольно сложной задачей.

Исследование облегчается тем обстоятельством, что в консервативном случае все решения системы (4.6) ограничены. Это следует из положительности собственных значений выписанной выше якобиевой матрицы. Ограниченность решений может быть установлена и непосредственно, для чего запишем систему (4.6) при $R_{N+1} = R_{N+2} = \ldots = R_{2N} \equiv 0$ в виде

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \dot{\eta}_k,$$

$$\frac{d\dot{\eta}_k}{dt} = p_k\eta_{k-1} - (p_k + \mu_{k+1}p_{k+1})\,\eta_k + \mu_{k+1}p_{k+1}\eta_{k+1}$$

$$(k = 1, \ldots, N).$$

Рассмотрим определенно-положительную квадратичную форму переменных $\eta_1, \ldots, \eta_N, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_N$ с постоянными коэффициентами

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \mu_1 \ldots \mu_k \left[p_k(\eta_k - \eta_{k-1})^2 + \dot{\eta}_k^2\right] \qquad (\mu_1 = 1,\ \eta_0 = 0).$$

Производная ее, взятая в силу выписанных уравнений, равна нулю, что и устанавливает ограниченность решений.

1.6. Устойчивость вертикальных колебаний пружинного маятника. Однозвенная свободная, целиком упругая колебательная цепь представляет собой математический маятник массы m на пружине длиной l в ненапряженном состоянии и жесткостью c (рис. 3). Система уравнений (4.3) сводится к одному

$$m\ddot{y}_0 + cy_0 = 0.$$

и мы будем иметь для невозмущенного движения

$$x \equiv 0,\ y = y_0(t) = Y\cos\omega t \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\right).$$

Уравнения в вариациях (4.5) и (4.6) запишутся в виде

$$\ddot{\xi} + \omega^2\left[1 - \frac{1}{1+\gamma+\frac{1}{l}Y\cos\omega t}\right]\xi = 0, \quad \ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0. \tag{6.1}$$

Заметим, что выполнение условия (1.8) не является внутренним свойством самой механической системы и выбранного невозмущенного движения, а определяется также и выбором лагранжевых координат. Если в рассматриваемом примере перейти к полярным координатам, то будем иметь

$$T = \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2),$$

$$V = \frac{1}{2}c(\rho - l)^2 - mg\rho\cos\varphi,$$

и уравнения Лагранжа при отсутствии сил сопротивления запишутся в виде

$$\rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = -g\rho\sin\varphi,$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{c}{m}(\rho - l) + g\cos\varphi.$$

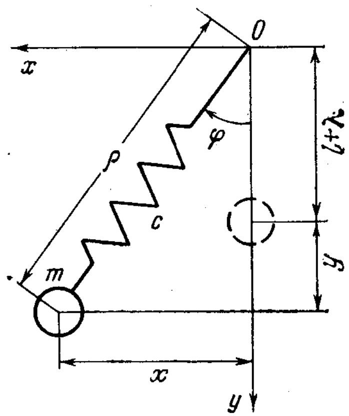

Рис. 3.

Принятое за невозмущенное движение вертикальное колебание массы m выразится теперь в прежних обозначениях как

$$\varphi = \varphi_0 \equiv 0, \quad \rho = \rho_0(t) = l + \lambda + Y\cos\omega t.$$

Формула (1.5) даст для коэффициента $b_{11}(t)$ значение

$$b_{11}(t) = 2m\rho_0\dot{\rho}_0 \not\equiv 0,$$

что и означает нарушение условия (1.8). Уравнения в вариациях для возмущенного движения ($\varphi = 0 + \Phi$, $\rho = \rho_0(t) + \mathrm{P}$) примут в полярных координатах вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} - 2\frac{\mu\sin\tau}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\frac{d\Phi}{d\tau} + \frac{\gamma}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\Phi = 0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\tau^2} + \mathrm{P} = 0 \quad \left(\gamma = \frac{\lambda}{l},\ \mu = \frac{Y}{l},\ \tau = \omega t\right).$$

Как видим, появление члена с первой производной в уравнениях в вариациях возможно и в консервативной системе.

Возвратимся к декартовым координатам и, вводя безразмерное время $\tau = \omega t$, запишем дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma + \mu\cos\tau}{1 + \gamma + \mu\cos\tau}\,\xi + [2] = 0, \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \eta + [2] = 0.$$

Здесь, как и выше, γ и μ означают безразмерные параметры, выражающие отношение статического удлинения и амплитуды вертикальных колебаний к недеформированной длине пружины

$$\gamma = \frac{\lambda}{l}, \quad \mu = \frac{Y}{l},$$

а [2] — члены второго порядка малости.

Устойчивость либо неустойчивость тривиального решения уравнений в вариациях (6.1) определяется таковой для первого из уравнений (6.1). Однако в рассматриваемом консервативном случае устойчивость тривиального решения системы (6.1) не определяет вообще устойчивости невозмущенного движения по отношению к переменным x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, так как имеет место один из критических случаев. Неустойчивость же тривиального решения системы (6.1) влечет за собой (за исключением, быть может, граничных случаев) неустойчивость невозмущенного движения ([145a], п. 70) по отношению к переменным x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Это обусловлено тем, что первое из уравнений в вариациях имеет своим коэффициентом периодическую функцию и при неустойчивости его тривиального решения наинизшее характеристичное число в смысле Ляпунова отрицательно.

Переходя к исследованию неустойчивости тривиального решения уравнения

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma + \mu\cos\tau}{1 + \gamma + \mu\cos\tau}\,\xi = 0, \tag{6.2}$$

начнем, однако, с критерия Жуковского [251], гарантирующего устойчивость при выполнении неравенств

$$\frac{1}{4}k^2 \leqslant p(t) \leqslant \frac{1}{4}(k+1)^2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

При условии $\mu < 1 + \gamma$, выражающем естественное ограничение, что амплитуда продольных колебаний меньше статически напряженной длины пружины, имеем

$$\inf p(\tau) = \frac{\gamma - \mu}{1 + \gamma - \mu}, \quad \sup p(\tau) = \frac{\gamma + \mu}{1 + \gamma + \mu}.$$

Критерий Жуковского требует выполнения неравенств

$$\mu \leqslant \gamma, \quad \mu \leqslant \frac{1}{3} - \gamma \qquad (\text{при } k = 0),$$

либо неравенства

$$\mu \leqslant -\frac{1}{3} + \gamma \qquad (\text{при } k = 1).$$

При $k > 1$ критерий отказывает. Результирующая область устойчивости тривиального решения уравнения (6.2), доставляемая применением критерия Жуковского, заштрихована на рис. 4. Проделанное построение окажется полезным для сопоставления с областью неустойчивости.

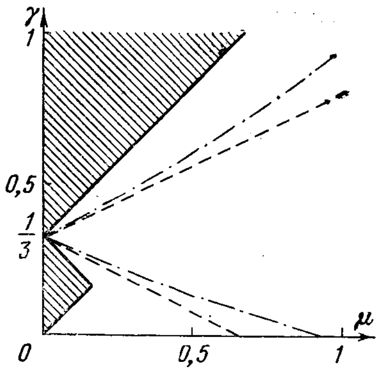

Рис. 4.

Для отыскания области неустойчивости по методу малого параметра примем μ за малый параметр и запишем уравнение (6.2) в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + [p_0(\gamma) + \mu p_1(\tau, \gamma) + \\ + \mu^2 p_2(\tau, \gamma) + \ldots]\,\xi = 0;$$

при этом

$$p_0(\gamma) = \frac{\gamma}{1+\gamma},$$

$$p_1(\tau, \gamma) = 2p_1^{(1)}(\gamma)\cos\tau$$

$$\left(p_1^{(1)}(\gamma) = \frac{1}{2(1+\gamma)^2}\right).$$

В скалярном случае области неустойчивости в плоскости параметров $\mu\gamma$ могут примыкать на оси $\mu = 0$ к тем точкам γ_m, которые являются корнями уравнения ([146], (V, 2.5))

$$2\sqrt{p_0(\gamma_m)} = m \quad \text{или} \quad \gamma_m = \frac{m^2}{4 - m^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{6.3}$$

При $\gamma > 0$ широкая область неустойчивости (т. е. с отличным от нуля углом между касательными) примыкает лишь к точке $\gamma_1 = \frac{1}{3}$, и других таких точек на полуоси $\gamma > 0$ нет. Тангенс угла наклона касательной в нашем примере определится по формуле, получаемой из [146], (V, 2.24)

$$\chi^{\mp} = \mp \left[\frac{p_1^{(1)}(\gamma)}{dp_0/d\gamma}\right]_{\gamma = \gamma_1} = \mp\frac{1}{2}. \tag{6.4}$$

Отсюда определяется в первом приближении область неустойчивости вертикальных колебаний маятника на пружине

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu + \ldots < \gamma < \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\mu + \ldots.$$

Лучи, ограничивающие эту область, обозначены на рис. 4 штриховой линией.

Из общей теории ([146], п. V,2.3)) следует, что так как

$$\left.\frac{dp_0}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_1}\neq 0,$$

то уравнения границ будут аналитическими функциями параметра μ, поэтому отброшенные члены по порядку не ниже μ^2. Следующие коэффициенты разложений можно вычислить, воспользовавшись тем, что на границах этой области неустойчивости существует антипериодическое (поскольку m нечетно) решение. Приведем лишь окончательный результат: во втором приближении область неустойчивости определяется из неравенств

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\mu+\frac{15}{128}\mu^2+\ldots<\gamma<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mu+\frac{15}{128}\mu^2+\ldots \tag{6.5}$$

Ограничивающие эту область кривые даны на рис. 4 штрихпунктирной линией.

Из опытов известно [240], что возмущение вертикальных колебаний при наличии сил сопротивления имеет место для маятника на пружине с $\lambda\approx\frac{1}{3}\,l$ (т. е. при $\gamma\approx\frac{1}{3}$). Области «консервативной неустойчивости» будут порождать в диссипативном случае области неустойчивости вертикальных колебаний. Несмотря на асимптотическое затухание колебаний, которое при не столь большой диссипации будет идти медленно, практически большие изменения колебаний за счет авторезонанса в цепи могут оказаться весьма существенными для оценки работы системы.

§ 2. Свободные, не целиком упругие колебательные цепи

Помимо общих положений теории колебательных цепей, значительное место уделяется устойчивости их вертикальных колебаний. Аппаратом исследования является математическая теория параметрического резонанса. Подчеркнем, что в наших задачах встречаются канонические (гамильтоновы) системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами специального вида, именно когда параметр γ, соответствующий обратной величине частоты параметрического возбуждения, входит нелинейно. Для таких систем формулы для границ областей динамической неустойчивости даны В. А. Якубовичем и Б. Г. Питтелем ([303]; [146], п. V.2.3).

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему из N материальных точек с массами m_k и декартовыми прямоугольными координатами x_k, y_k, z_k ($k=1,\ldots,N$) относительно инерциальной системы координат. Из $3N-n$ голономных независимых явно от времени связей пусть N связей будут: $z_1 = 0, \ldots$ $\ldots, z_N = 0$ (это означает, что движение будет плоским) и $2N - n$ связей

$$f_\alpha(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2N - n).$$

Обозначим через $q_1, \ldots, q_n$ лагранжевы координаты системы и представим обобщенную силу, соответствующую координате q_ν, в виде

$$Q_\nu(q_1, \ldots, q_n) - R_\nu(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где Q_ν и R_ν — непрерывные и дифференцируемые функции своих аргументов в области их определения.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j;$$

при этом

$$a_{ji} = a_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\frac{\partial y_k}{\partial q_j}\right) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Уравнения движения в форме Лагранжа второго рода запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\ddot{q}_i + \sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i\partial q_\nu}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_\nu\partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 y_k}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial y_k}{\partial q_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y_k}{\partial q_i\partial q_\nu}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y_k}{\partial q_\nu\partial q_j}\frac{\partial y_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = Q_\nu - R_\nu \tag{1.2}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Предполагая изучать по отношению к переменным

$$q_1, \ldots, q_r, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r \qquad (r \leqslant n)$$

устойчивость невозмущенного движения

$$q_\nu = q_{\nu 0}(t), \quad \dot{q}_\nu = \dot{q}_{\nu 0}(t) \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1.3}$$

обозначим значения координат и скоростей для возмущенного движения

$$q_\nu = q_{\nu 0}(t) + \varkappa_\nu, \quad \dot{q}_\nu = \dot{q}_{\nu 0}(t) + \dot{\varkappa}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Уравнения первого приближения возмущенного движения (уравнеиня в вариациях) представим в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(a_{\nu i})_0\frac{d^2\varkappa_i}{dt^2} + b_{\nu i}(t)\frac{d\varkappa_i}{dt} + c_{\nu i}(t)\varkappa_i\right] = 0 \tag{1.4}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Здесь

$$b_{\nu i}(t) = 2\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_\nu} + \ldots\right)\dot{q}_{j0}(t) + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right)_0,$$

$$c_{\nu i}(t) = \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_\nu \partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_\nu} + \ldots\right)\ddot{q}_{j0}(t) + \right.$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^3 x_k}{\partial q_\nu \partial q_i \partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_\nu \partial q_j}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_l} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_\nu \partial q_i}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^3 x_k}{\partial q_i \partial q_j \partial q_l}\frac{\partial x_k}{\partial q_\nu} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 x_k}{\partial q_\nu \partial q_i \partial q_l}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_\nu \partial q_l}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j} + \ldots\right]\dot{q}_{j0}(t)\,\dot{q}_{l0}(t)\right\} - \left(\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_i}\right)_0$$

$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Индекс нуль при $a_{\nu i}$ и частных производных означает подстановку в их значения $q_{10}(t), \ldots, q_{n0}(t)$; $\dot{q}_{10}(t), \ldots, \dot{q}_{n0}(t)$. В выражениях для $b_{\nu i}(t)$, $c_{\nu i}(t)$ многоточием отмечены члены, получающиеся заменой x на y.

В п. 1.1 введено определение: *рассматриваемая механическая система называется «колебательной цепью» относительно невозмущенного движения* (1.3), *если возможно выбрать такие лагранжевы координаты, при которых коэффициенты* $(a_{\nu i})_0$, $b_{\nu i}(t)$ *и* $c_{\nu i}(t)$ *таковы, что для некоторого натурального* $m < n$ *и* $t \geqslant t_0$ *выполнены условия* (1,1.7) — (1,1.10).

Условия (1,1.7)—(1,1.10) означают, что уравнения в вариациях (1.4) разбиваются на две группы (1,1.11) и (1,1.12) из m и $n - m$ уравнений.

Уравнения (1, 1.11) и (1, 1.12) разрешимы относительно старших производных в силу положительности кинетической энергии T.

2.2. Кинетическая и потенциальная энергии. Рассмотрим свободную, целиком упругую колебательную цепь, состоящую из N масс $m_1, \ldots, m_N$, соединенных последовательно N невесомыми пружинами с жесткостями $c_1, \ldots, c_N$ и длинами в ненапряженном состоянии $l_1, \ldots, l_N$ (см. рис. 2). Начало первой пружины закреплено в точке O, начала каждой из последующих прикреплены к невесомым шарнирам, оси которых обуславливают плоский характер движения. Пусть одна группа из h пружин заменена нерастяжимыми невесомыми стержнями; допустим, что это будут стержни, соединяющие массы $m_f, m_{f+1}, \ldots, m_{f+h}$. Таким образом, кроме N тривиальных связей $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$, на систему наложено h связей

$$(x_{f+\eta} - x_{f+\eta-1})^2 + (y'_{f+\eta} - y'_{f+\eta-1})^2 = l^2_{f+\eta} \qquad (\eta = 1, \ldots, h),$$

где x_ν, y'_ν — декартовы координаты массы m_ν ($\nu = 1, \ldots, N$; $x_0 = y'_0 = 0$). Однако абсциссы (или ординаты) масс $m_{f+1}, \ldots$ $\ldots, m_{f+h}$ не являются теперь лагранжевыми (определяющими) координатами. За $2N-h$ координат примем

$$x_1,\ \ldots,\ x_f;\quad \varphi_{f+1},\ \ldots,\ \varphi_{f+h};\quad x_{f+h+1},\ \ldots,\ x_N;$$
$$y_1 = y_1' - L_1,\ \ldots,\ y_f = y'_f - (L_1 + \ldots + L_f),$$
$$y_{f+h+1} = y'_{f+h+1} - (L_1 + \ldots + L_{f+h+1}),\ \ldots,\ y_N = y'_N - (L_1 + \ldots + L_N).$$

Здесь L_k есть длина k-й пружины в напряженном состоянии ($k = 1, \ldots, f, f+h+1, \ldots, N$), либо длина жесткого стержня ($k = f+1, \ldots, f+h$), т. е. $L_k = l_k + \lambda_k$, где λ_k — статическое удлинение k-й пружины

$$\lambda_k = (m_k + m_{k+1} + \ldots + m_N)\, g/c_k$$
$$(k = 1, \ldots, f, f+h+1, \ldots, N;\ \lambda_{f+1} = \ldots = \lambda_{f+h} = 0).$$

Таким образом, координаты $y_1, \ldots, y_f, y_{f+h+1}, \ldots, y_N$ равны отклонениям по вертикали соответствующих масс от нижнего положения равновесия. Координаты $\varphi_{f+1}, \ldots, \varphi_{f+h}$ суть полярные углы, отсчитываемые от оси Oy до стержней $l_{f+1}, \ldots, l_{f+h}$ по направлению часовой стрелки.

Кинетическая энергия T системы равна [1])

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N}{}' m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{\eta=1}^{h} m_{f+\eta} \Big\{ (\dot{x}_f^2 + \dot{y}_f^2) + \sum_{\alpha=1}^{\eta} l_{f+\alpha} \dot{\varphi}_{f+\alpha} [l_{f+\alpha}\dot{\varphi}_{f+\alpha} + 2(\dot{x}_f \cos\varphi_{f+\alpha} - \dot{y}_f \sin\varphi_{f+\alpha})] + 2 \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{\eta} l_{f+\alpha} l_{f+\beta} \dot{\varphi}_{f+\alpha} \dot{\varphi}_{f+\beta} \cos(\varphi_{f+\alpha} - \varphi_{f+\beta}) \Big\}. \tag{2.1}$$

Потенциальную энергию V линейных сил упругости пружин и сил тяжести запишем в виде

$$V = -g \sum_{\alpha=1}^{f} (m_{f+1} + \ldots + m_{f+h} + m_\alpha)\, y_\alpha - g \sum_{\beta=f+h+1}^{N} m_\beta y_\beta - g \sum_{\eta=1}^{h} m_{f+\eta} l_{f+\eta} \cos\varphi_{f+\eta} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N}{}' c_k [(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2] - \sum_{k=1}^{N}{}' c_k l_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2}, \tag{2.2}$$

рассматривая всюду арифметические значения корня и принимая $x_{f+h} = l_{f+h} \sin\varphi_{f+h}$, $y_{f+h} = l_{f+h}(\cos\varphi_{f+h} - 1)$. Штрих у Σ озна-

[1]) В формуле (2.1) статьи [322 в] допущена ошибка, здесь исправленная.

чает, что при суммировании должны быть пропущены слагаемые, отвечающие $k = f+1, \ldots, f+h$. Аналогично п. 1.2 нетрудно показать, что имеется 2^N положений равновесия свободной, не целиком упругой колебательной цепи. Имеет место и теорема п. 1.3: нижнее положение равновесия (отвечающее нулевым значениям лагранжевых координат) асимптотически устойчиво в большом при наличии сил сопротивления, работа которых отрицательна при любом возможном перемещении.

Обозначим теперь лагранжевы координаты, записанные в той последовательности, в которой они были введены, через $q_1, \ldots q_{2N-h}$. Для Q_ν в выражениях (1.1) будем иметь

$$Q_\nu = \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

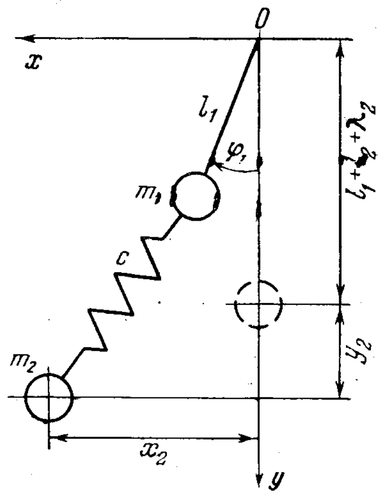

Рис. 5.

а для выделенных сил сопротивления допустим, что

$$R_k = R_k(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) \qquad (k = 1, \ldots, N),$$
$$R_{N+j} = R_{N+j}(\dot{q}_{N+1}, \ldots, \dot{q}_{2N-h}) \qquad (j = 1, \ldots, N-h),$$
$$R_\nu(0, \ldots, 0) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, 2N-h).$$

Уравнения (1.2) допускают решение (вертикальные колебания свободной, не целиком упругой колебательной цепи)

$$q_k = q_{k0}(t) \equiv 0 \qquad (k = 1, \ldots, N),$$
$$q_{N+j} = q_{N+j,0}(t) \qquad (j = 1, \ldots, N-h),$$

где $q_{N+j,0}(t)$ определяется из последних уравнений (1.2). Это решение примем за невозмущенное движение (1.3). Нетрудно показать, что условия (1,1.7) — (1,1.10) выполнены и, следовательно, уравнения в вариациях разбиваются на две группы (1,1.11) и (1,1.12) из N и $N-h$ уравнений. Неустойчивость невозмущенного движения будет определяться неустойчивостью тривиального решения первой группы (1,1.11), ибо характеристичные числа второй группы (1,1.12) неотрицательны (п. 1.6).

2.3. Пример. Рассмотрим двухзвенную колебательную цепь, в **которой первое** звено абсолютно жесткое, а второе — упругое с жесткостью c. Обозначения ясны из рис. 5. Статическое удлинение пружины $\lambda_2 = m_2 g/c$. Формулы (2.1) и (2.2) запишутся в виде

$$T = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2,$$

$$V = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g y_2 + \frac{1}{2} c\,[(x_2 - l_1 \sin\varphi_1)^2 + (l_2 + \lambda_2 + y_2 + l_1 - l_1 \cos\varphi_1)^2] - c l_2\,[(x_2 - l_1 \sin\varphi_1)^2 + (l_2 + \lambda_2 + y_2 + l_1 - l_1\cos\varphi_1)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Уравнения Лагранжа (1.2) при естественном предположении, что $l_2 + \lambda_2 + y_2 > 0$, допускают решение (вертикальные колебания массы m_2 — невозмущенное движение)

$$\varphi_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = Y\cos\Omega t \qquad \left(\Omega = \sqrt{\frac{c}{m_2}}\right).$$

Группа уравнений (1,1.11) в вариациях ($\varphi_1 = 0 + \Phi$, $x_2 = 0 + \varkappa_2$) может быть записана в безразмерном виде

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \Big[(1+\alpha)\beta\gamma + \alpha\beta\mu\cos\tau + \alpha\Big(1 - \frac{1}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\Big)\Big]\Phi - \sqrt{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\Big)\xi = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \sqrt{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\Big)\Phi + \Big(1 - \frac{1}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\Big)\xi = 0$$

$$\left(\tau = \Omega t,\ \xi = \sqrt{\alpha}\,\frac{\varkappa_2}{l_1},\ \alpha = \frac{m_2}{m_1},\ \beta = \frac{l_2}{l_1},\ \gamma = \frac{\lambda_2}{l_2},\ \mu = \frac{Y}{l_2}\right).$$

Ограничимся случаем $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ ($\alpha = \beta = 1$) и запишем систему (3.1) в матричной форме

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{d\tau^2} + [\mathbf{P}_0(\gamma) + \mu\mathbf{P}_1(\tau,\gamma) + \mu^2\mathbf{P}_2(\tau,\gamma) + \ldots]\,\mathbf{y} = 0,$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix}\Phi\\ \xi\end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_0(\gamma) = \frac{\gamma}{1+\gamma}\begin{Vmatrix} 1 + 2(1+\gamma) & -1 \\ -1 & 1\end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1(\tau,\gamma) = 2\mathbf{P}_1^{(1)}(\gamma)\cos\tau, \quad \mathbf{P}_1^{(1)}(\gamma) = \frac{1}{2(1+\gamma)^2}\begin{Vmatrix} 1 + (1+\gamma)^2 & -1 \\ -1 & 1\end{Vmatrix}.$$

Матрица

$$\frac{d\mathbf{P}_0}{d\gamma} = \frac{1}{(1+\gamma)^2}\begin{Vmatrix} 1 + 2(1+\gamma)^2 & -1 \\ -1 & 1\end{Vmatrix}$$

положительно-определенная; тогда применимы результаты В. А. Якубовича и Б. Г. Питтеля ([303]; [146], п. V.2.3). Вычислим

$\omega_1(\gamma)$ и $\omega_2(\gamma)$ — собственные частоты невозмущенной системы

$$\omega_1 = \sqrt{\gamma\left[1 + \frac{1}{1+\gamma} - \sqrt{1 + \frac{1}{(1+\gamma)^2}}\right]},$$
$$\omega_2 = \sqrt{\gamma\left[1 + \frac{1}{1+\gamma} + \sqrt{1 + \frac{1}{(1+\gamma)^2}}\right]}. \tag{3.2}$$

Широкие области неустойчивости (т. е. с отличным от нуля углом между касательными) могут примыкать лишь к тем точкам полуоси $\mu = 0$ $(\gamma > 0)$, для которых

$$\omega_j(\gamma_0) + \omega_h(\gamma_0) = 1 \qquad (j,\ h = 1,\ 2). \tag{3.3}$$

Поскольку в нашем примере

$$2\omega_1(\gamma),\ 2\omega_2(\gamma) \quad \text{и} \quad \omega_1(\gamma) + \omega_2(\gamma)$$

— возрастающие функции γ, то широкие области неустойчивости могут быть при единственном значении γ в каждом из следующих трех случаев: 1) $2\omega_1(\gamma) = 1$, 2) $2\omega_2(\gamma) = 1$ — основной резонанс, 3) $\omega_1(\gamma) + \omega_2(\gamma) = 1$ — комбинационный резонанс. Так как $(\mathbf{P}_1)_{\text{ср}} = 0$, то для вычисления $\chi^{\mp}$ (угловых коэффициентов касательных к границам областей неустойчивости) воспользуемся формулой [146] (V,2.24)

$$\chi^{\mp} = \mp \left. \frac{2\left(\mathbf{P}_1^{(1)}\mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_h\right)}{\dfrac{d}{d\gamma}(\omega_j + \omega_h)} \right|_{\gamma=\gamma_0}. \tag{3.4}$$

Здесь γ_0 — корень соответствующего уравнения

$$\omega_j(\gamma) + \omega_h(\gamma) = 1 \qquad (j,\ h = 1,\ 2),$$

а $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_h$ — соответствующие собственные векторы матрицы $\mathbf{P}_0$, т. е.

$$\mathbf{P}_0(\gamma_0)\,\mathbf{a}_j = \omega_j^2(\gamma_0)\,\mathbf{a}_j, \quad \mathbf{P}_0(\gamma_0)\,\mathbf{a}_h = \omega_h^2(\gamma_0)\,\mathbf{a}_h,$$

причем

$$[\omega_j(\gamma_0) + \omega_h(\gamma_0)]\,(\mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_h) = \delta_{jh} \qquad (j,\ h = 1,\ 2).$$

Приведем результаты вычислений. Области первого (*1*) и второго (*2*) основного резонанса на рис. 6 определяются с точностью до $O(\mu^2)$ из неравенств

$$0{,}076 - 0{,}364\mu + \ldots < \gamma < 0{,}076 + 0{,}364\mu + \ldots,$$
$$0{,}549 - 0{,}385\mu + \ldots < \gamma < 0{,}549 + 0{,}385\mu + \ldots,$$

а область комбинационного резонанса (*3*) находится из неравенств

$$0{,}157 - 0{,}088\mu + \ldots < \gamma < 0{,}157 + 0{,}088\mu + \ldots.$$

2.4. Маятник на свободной упругой подвеске. Пусть математический маятник массы m_2 с длиной стержня l_2 подвешен к шарниру массы m_1 (рис. 7). Пружина с длиной в ненапряженном состоянии l_1 и жесткостью c одним своим концом прикреплена к шарниру, а другим — к неподвижной точке O, статическое удлинение

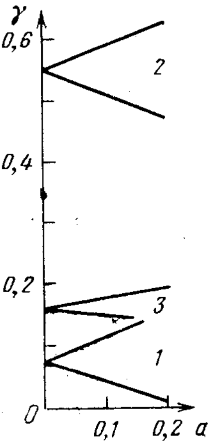

Рис. 6.

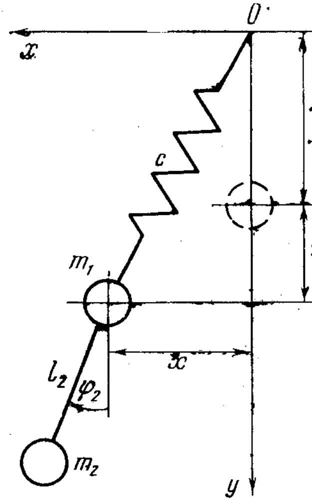

Рис. 7.

пружины $\lambda = (m_1 + m_2)\, g/c$. Формулы (2.1) и (2.2) дают

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l_2 \dot{\varphi}\,(\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi),$$

$$V = -(m_1 + m_2)\, gy - m_2 g l_2 \cos\varphi + \\ + \frac{1}{2} c\,[x^2 + (l_1 + \lambda + y)^2] - c l_1 \sqrt{x^2 + (l_1 + \lambda + y)^2}\,.$$

Уравнения (1.2) запишутся в виде

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2 l_2 \ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = \\ = -cx + c l_1 x\,[x^2 + (l_1 + \lambda + y)^2]^{-1/2}, \quad (4.1)$$

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{y} - m_2 l_2 \ddot{\varphi}\sin\varphi - m_2 l_2 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = \\ = -c\,(l_1 + y) + c l_1\,(l_1 + \lambda + y)\,[x^2 + (l_1 + \lambda + y)^2]^{-1/2},$$

$$l_2 \ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi - \ddot{y}\sin\varphi = -g\sin\varphi.$$

Введем безразмерные координаты $\xi = x/l_1$, $\eta = y/l_1$ и безразмерное время $\tau = \sqrt{c/(m_1 + m_2)}\; t$; тогда система уравнений движения преобразуется к виду

$$\xi'' + \alpha\beta\varphi''\cos\varphi = \alpha\beta\varphi'^2\sin\varphi - \xi + \xi\,[\xi^2 + (1+\gamma+\eta)^2]^{-1/2},$$

$$\eta'' - \alpha\beta\varphi''\sin\varphi =$$
$$= \alpha\beta\varphi'^2\cos\varphi - (1-\eta) + (1+\gamma+\eta)[\xi^2 + (1+\gamma+\eta)^2]^{-1/2}$$
$$\xi''\cos\varphi - \eta''\sin\varphi + \beta\varphi'' = -\gamma\sin\varphi,$$

где введены параметры

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1+m_2} < 1,\quad \beta = \frac{l_2}{l_1},\quad \gamma = \frac{\lambda}{l_1}$$

и штрих означает производную по τ. Разрешим последнюю систему относительно старших производных:

$$\xi'' = -\frac{1-\alpha\sin^2\varphi}{1-\alpha}\,\Re\xi + \alpha\beta\varphi'^2\sin\varphi +$$
$$+\frac{\alpha}{1-\alpha}(1+\gamma+\eta)\,\Re\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\eta'' = \gamma - \frac{1-\alpha\cos^2\varphi}{1-\alpha}\,\Re(1+\gamma+\eta) + \alpha\beta\varphi'^2\cos\varphi + \qquad (4.2)$$
$$+\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\Re\xi\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\varphi'' = \frac{1}{\beta(1-\alpha)}\,\Re\xi\cos\varphi - \frac{1+\gamma+\eta}{\beta(1-\alpha)}\,\Re\sin\varphi,$$

где

$$\Re \equiv 1 - [\xi^2 + (1+\gamma+\eta)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Уравнения движения (4.2) допускают решение

$$\xi = \varphi \equiv 0,\quad \eta = \mu\cos\tau \qquad (\mu > 0). \qquad (4.3)$$

Это и есть принятое за невозмущенное движение вертикальные колебания масс m_1 и m_2. Первая группа уравнений в вариациях (1,1.11) ($\xi = 0 + u$, $\varphi = 0 + \psi$, $\eta = \mu\cos\tau + w$) может быть записана в виде

$$y'' + Q(\tau,\ \gamma,\ \mu;\ \alpha,\ \beta)\,y = 0, \qquad (4.4)$$

$$y = \begin{pmatrix}\psi\\ u\end{pmatrix},\quad Q = \frac{\gamma+\mu\cos\tau}{1-\alpha}\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\beta} & -\dfrac{1}{\beta(1+\gamma+\mu\cos\tau)} \\ -\alpha & \dfrac{1}{1+\gamma+\mu\cos\tau}\end{Vmatrix},$$

а вторая группа (1,1.12) состоит из уравнения

$$w'' + w = 0.$$

Итак, неустойчивость невозмущенного движения (4.2) определяется неустойчивостью тривиального решения системы (4.4), которую в предположении $\mu < 1 + \gamma$ представим как

$$\mathbf{y}'' + [\mathbf{Q}_0(\gamma;\ \alpha,\ \beta) + \mu \mathbf{Q}_1(\tau,\ \gamma;\ \alpha,\ \beta) + O(\mu^2)]\,\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{\gamma}{1-\alpha}\begin{Vmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta(1+\gamma)} \\ -\alpha & \frac{1}{1+\gamma} \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1 = 2\mathbf{Q}_1^{(1)}\cos\tau, \qquad \mathbf{Q}_1^{(1)} = \frac{1}{1-\alpha}\begin{Vmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta(1+\gamma)^2} \\ -\alpha & \frac{1}{(1+\gamma)^2} \end{Vmatrix}.$$

Собственные значения ω_1^2 и ω_2^2 матрицы $\mathbf{Q}_0$ положительны и равны

$$\omega_{1,\,2}^2 = \frac{\gamma}{2(1-\alpha)}\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1+\gamma} \mp \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{(1+\gamma)^2} + \frac{2(2\alpha-1)}{\beta(1+\gamma)}}\right].$$

Однако к системе (4.5) нельзя непосредственно применять формулы [146], п. V,2.3. Дело в том, что матрица $\mathbf{Q}$ в (4.4) и, следовательно, матрицы $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{Q}_1^{(1)}$ в (4.5) не являются симметрическими; системы (4.4) и (4.5) «запутаны» линейной подстановкой. Систему (4.5) нужно предварительно «распутать» линейным преобразованием

$$\mathbf{y} = [\mathbf{S}_0(\gamma;\ \alpha,\ \beta) + \mu \mathbf{S}_1(\gamma;\ \alpha,\ \beta) + O(\mu^2)]\,\mathbf{v}$$
$$(\det \mathbf{S}_0 \neq 0,\ \ \det \mathbf{S}_1 \neq 0).$$

В преобразованной системе

$$\mathbf{v}'' + [\mathbf{P}_0(\gamma;\ \alpha,\ \beta) + \mu\cdot 2\mathbf{P}_1^{(1)}(\gamma;\ \alpha,\ \beta)\cos\tau + O(\mu^2)]\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

матрицы $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1^{(1)}$ будут вещественными симметрическими, например,

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{Q}_0\mathbf{S}_0 = \begin{Vmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{Vmatrix},$$

и к преобразованной системе применимы формулы [146], п. V,2.3, для определения границ областей динамической неустойчивости в первом приближении по μ. В частности, для случая, рассмотренного в п. 4.3 ($m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$, т. е. $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$), будем иметь те же выражения (3.2) для $\omega_1(\gamma)$ и $\omega_2(\gamma)$, а значит, и те же критические значения параметра γ, к которым примыкают две области основного и одна область комбинационного резонанса. На вычислении угловых коэффициентов $\chi^{\mp}$, касательных к названным областям, мы здесь не останавливаемся.

2.5. Маятник на упругой подвеске в направляющих. Пусть в обозначениях п. 2.4 движение массы m_1 стеснено вертикальными направляющими (рис. 8). Получившаяся колебательная цепь является не свободной (потеряна степень свободы, отвечающая x) и не целиком упругой. Для кинетической и потенциальной энергии будем иметь теперь

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l_2 \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ V &= \frac{1}{2} c y^2 + m_2 g l_2 (1-\cos\varphi) \end{aligned} \tag{5.1}$$

и уравнения Лагранжа второго рода суть

$$\begin{gathered} (m_1+m_2)\,\ddot{y} - m_2 l_2 \ddot{\varphi}\sin\varphi - \\ - m_2 l_2 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = -cy, \\ -\ddot{y}\sin\varphi + l_2\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi. \end{gathered}$$

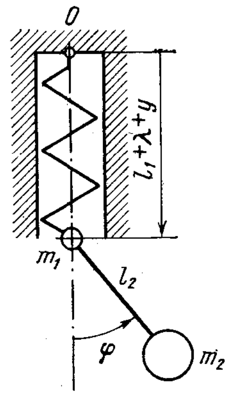

Рис. 8.

Разрешив последние уравнения относительно старших производных, получим

$$\begin{gathered} \eta'' + \eta = (1-\alpha\sin^2\varphi)^{-1}\,(\alpha\varphi'^2\cos\varphi - \alpha\gamma\sin^2\varphi - \alpha\eta\sin^2\varphi) \\ \varphi'' + \gamma\varphi = (1-\alpha\sin^2\varphi)^{-1}(-\eta\sin\varphi + \alpha\varphi'^2\sin\varphi\cos\varphi - \\ - \alpha\gamma\sin^3\varphi) + \gamma\,(\varphi - \sin\varphi), \end{gathered} \tag{5.2}$$

где введены безразмерные переменные и параметры

$$\begin{gathered} \eta = \frac{y}{l_2}, \quad \tau = \omega t \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{c}{m_1+m_2}}\right), \\ \alpha = \frac{m_2}{m_1+m_2} < 1, \quad \gamma = \frac{\lambda}{l_2}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Исследуем устойчивость невозмущенного движения — вертикальных колебаний

$$\varphi \equiv 0, \quad \eta = \mu\cos\tau \qquad (\mu > 0). \tag{5.4}$$

Считая для возмущенного движения $\varphi = 0 + \psi$, $\eta = \mu\cos\tau + v$, получим, что первая группа уравнений в вариациях (1,1.11) состоит из одного уравнения

$$\psi'' + (\gamma + \mu\cos\tau)\,\psi = 0, \tag{5.5}$$

а вторая группа (1,1.12) — также из одного: $v'' + v = 0$. Неустойчивость невозмущенного движения (5.4) определяется неустойчивостью тривиального решения уравнения (5.5) — уравнения Матье. Последнему посвящена многочисленная литература; для наших целей достаточно применять формулы (3.3) и (3.4), в случае когда матрицы $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1^{(1)}$ суть скаляры γ и $^1/_2$ соответственно. Уравнение (3.3) определяет критические значения параметра

$$2\omega(\gamma_n) \equiv 2\sqrt{\gamma_n} = n, \quad \gamma_n = \frac{1}{4}n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а формула (3.4) даст для угловых коэффициентов касательных к широкой области неустойчивости в плоскости $\mu\gamma$

$$\chi^{\mp} = \mp \left. \frac{P_1^{(1)}}{\frac{d\omega^2}{d\gamma}} \right|_{\gamma=\gamma_1} = \mp \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Широкая область неустойчивости в плоскости $\mu\gamma$ (т. е. с отличным от нуля углом между касательными) примыкает лишь к точке $\gamma = {}^1/_4$ и определяется в первом приближении неравенствами

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu + \ldots < \gamma < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu + \ldots. \tag{5.7}$$

Глава III

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАЛОГО ПАРАМЕТРА К КОЛЕБАНИЯМ В СИСТЕМАХ ЛЯПУНОВА

В этой главе рассматриваются некоторые механические и физические задачи. Математическим аппаратом для определения периодических движений и описания процесса их установления в тех случаях, когда периодическому движению отвечает предельный цикл (в фазовых пространствах размерности $2k > 2$), являются методы малого параметра. Вычислительные аспекты метода Пуанкаре [107а] развиты в § I,2, что касается метода усреднения, то здесь читатель найдет лишь простейшие приложения по Ван-дер Полю [30]. Более сложные задачи (некоторые из них намечены в § 4) потребуют приложения, а может быть, и некоторой модификации вычислительных алгоритмов, развитых в фундаментальных исследованиях Н. Н. Боголюбова [17, 72], Ю. А. Митропольского [85г] и А. М. Самойленко [19].

Можно наметить общий подход к так называемой задаче о перекачке энергии (§§ 1—3). Первым ее этапом является установление исходного (чаще всего тривиального) периодического режима и определение областей его неустойчивости в пространстве параметров системы, на основе математической теории параметрического резонанса. Это проделывалось в пп. II,1.6, II,2.3, II,2.4, II,2.5. Второй этап решения заключается в отыскании периодических режимов, возникающих при критических значениях параметров и отличных, разумеется, от исходного. Этот этап основывается на преобразованиях п. I,1.2 и применении к преобразованной системе метода Пуанкаре [107а] определения периодических решений. Но к преобразованной системе можно применять и другие методы малого параметра, например, метод усреднения, позволяющий провести третий этап решения — исследование переходного процесса, часто называемого перекачкой энергии. Эти три этапа и иллюстрируются на примерах механических систем (§§ 1,3) и физической системы (§ 2) с двумя степенями свободы.

§ 1. Процесс срыва вертикальных колебаний пружинного маятника

При определенных значениях параметров происходит срыв вертикальных колебаний массы на пружине в результате сколь угодно малых поперечных возмущений движения (см., например, [240, 367а]). Математическое описание этого процесса и составляет содержание § 1.

1.1. Первый этап. Рассмотрим движение массы m на невесомой пружине длиной l в ненапряженном состоянии, подчиняющейся закону Гука, с жесткостью c (см. рис. 3). Пусть x и $y' = l + \lambda + y$ — декартовы координаты массы m, отсчитываемые от точки подвеса O, где $\lambda = mg/c$ — статическое удлинение пружины. Выберем постоянную потенциальной энергии V силы тяжести и упругой силы пружины таким образом, чтобы она обращалась в нуль для положения статического равновесия $x = y = 0$, и будем иметь

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \\ V = -mgy + \frac{1}{2} c [\sqrt{x^2 + (l + \lambda + y)^2} - l]^2 - \frac{1}{2} c\lambda^2. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Обозначим через $\omega = \sqrt{c/m}$ круговую частоту вертикальных колебаний массы на пружине и введем безразмерные время $\tau = \omega t$ и координаты $\xi = x/l$, $\eta = y/l$. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{gathered} \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \eta = \frac{1 + \gamma + \eta}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \gamma + \eta)^2}} - 1 \qquad \left(\gamma = \frac{\lambda}{l}\right), \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \xi = \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \gamma + \eta)^2}} - \frac{1}{1 + \gamma}\right] \xi, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где разложения правых частей в окрестности $\xi = \eta = 0$ начинаются с членов второй степени. Система (1.2) не содержит малого параметра, вместе с тем в силу нарушения условия б) теоремы Ляпунова (п. I,1.1), к ней неприменим метод Ляпунова отыскания периодических решений. Поскольку система консервативна и связи не зависят явно от времени, то имеет место интеграл энергии

$$\frac{1}{cl} \sqrt{2 (T + V) c} = \mu = \text{const}. \tag{1.3}$$

Это обстоятельство, а также применение подстановки Ляпунова (I,1,2.3)

$$\eta = \rho \sin \vartheta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \rho \cos \vartheta, \quad \xi = \rho z_1, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \rho z_2 \tag{1.4}$$

позволяет понизить порядок системы (1.2) на две единицы. Общие формулы для преобразования системы уравнений второго порядка указаны в п. I,1.2. Применительно к системе (1.2) будем иметь по формулам (I,1,2.6)

$$W(z)=\frac{\gamma}{1+\gamma}z_1^2+z_2^2,\quad R=-\frac{\cos\vartheta}{2(1+\gamma)^2}z_1^2+O(\rho),$$
$$\Theta=\frac{\sin\vartheta}{2(1+\gamma)^2}z_1^2+O(\rho),\quad Z_1=\frac{\cos\vartheta}{2(1+\gamma)^2}z_1^3+O(\rho),\tag{1.5}$$
$$Z_2=-\frac{\sin\vartheta}{(1+\gamma)^2}z_1+\frac{\cos\vartheta}{2(1+\gamma)^2}z_1^2z_2+O(\rho).$$

Уравнения (I,1,2.9) запишутся в виде ($\zeta\equiv z_1$, $\zeta'\equiv d\zeta/d\vartheta$)

$$\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta=-\mu(1+\gamma)^{-2}\left[\left(1+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta^2+\zeta'^2\right)^{1/2}\sin\vartheta+\right.$$
$$+\left(1+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta^2+\zeta'^2\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\frac{1-3\gamma}{1+\gamma}\zeta\sin\vartheta-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3}{2}\zeta'\cos\vartheta\right)\zeta\right]\zeta+O(\mu^2).\tag{1.6}$$

Тривиальное решение уравнения (1.6) $\xi\equiv 0$ отвечает вертикальным колебаниям

$$y=Y\cos\omega(t-t_0)\tag{1.7}$$

массы m на пружине с периодом $T_{\text{верт}}=2\pi/\omega$.

В крайних положениях потенциальная энергия V массы, определяемая второй из формул (1.1), равна $\frac{1}{2}cY^2$. Воспользовавшись интегралом энергии (1.3), получим для амплитуды вертикальных колебаний выражение

$$Y=l\mu.\tag{1.8}$$

Устойчивость (1.7) исследована в п. II,1.6 методами математической теории параметрического резонанса. Единственная область неустойчивости в плоскости $\mu\gamma$ определяется неравенством (II,1,6.5).

1.2. Второй этап. Возникает вопрос об определении периодических решений уравнения (1.6) (а в силу подстановки (1.4) и системы (1.2)), отличных от тривиального.

Для отыскания периодических решений уравнения (1.6) применим метод малого параметра для неавтономных систем с одной степенью свободы в форме, предложенной Пуанкаре [107а], т. I, гл. III. Будем искать это решение в виде ряда (п. I, 2.1).

$$\zeta(\vartheta)=\zeta_0(\vartheta)+\mu\zeta_1(\vartheta)+\mu^2\zeta_2(\vartheta)+\ldots$$

и, подставляя этот ряд в уравнение (1.6), получим уравнения для нахождения ζ_0 и ζ_1

$$\frac{d^2\zeta_0}{d\vartheta^2}+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta_0=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\vartheta^2}+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta_1=-\frac{1}{(1+\gamma)^2}\left[\left(1+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta_0^2+\zeta_0'^2\right)^{1/2}\sin\vartheta+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{\gamma}{1+\gamma}\zeta_0^2+\zeta_0'^2\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\frac{1-3\gamma}{1+\gamma}\zeta_0\sin\vartheta-\frac{3}{2}\zeta_0'\cos\vartheta\right)\zeta_0\right]\zeta_0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) обладает семейством $T(\gamma)$-периодических решений

$$\zeta_0=M_0\cos\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\vartheta+N_0\sin\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\vartheta$$
$$\left(T(\gamma)=2\pi\sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma}}\right). \tag{2.3}$$

Решение (2.3) можно рассматривать и как $qT(\gamma)$-периодическое, где q — любое натуральное число. Уравнение (1.6) зависит явно от независимой переменной ϑ и эту зависимость также можно рассматривать как $p\cdot 2\pi$-периодическую с любым натуральным p. Поэтому решение (2.3) будет порождающим для $2p\pi$-периодического решения уравнения (1.6) тогда и только тогда, когда

$$qT(\gamma)=2p\pi \quad \text{или} \quad \gamma=\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^2-1}, \tag{2.4}$$

где p/q — любая несократимая неправильная дробь.

Итак, уравнение (1.6) допускает периодические решения с наименьшим периодом $2p\pi$ ($p=2, 3,\ldots$) только лишь для значений относительного удлинения $\gamma=\lambda/l$, определяемых формулой (2.4). Любое положительное рациональное число либо выражается формулой (2.4), либо может быть приближенно представлено ею с любой степенью точности.

Уравнение (2.2) с учетом (2.3) и (2.4) запишется в виде

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\vartheta^2}+\frac{q^2}{p^2}\zeta_1=-\frac{(p^2-q^2)^2}{p^4}\left(M_0\cos\frac{q}{p}\vartheta+N_0\sin\frac{q}{p}\vartheta\right)\times$$
$$\times\left\{\left[1+\frac{q^2}{p^2}(M_0^2+N_0^2)\right]^{1/2}\sin\vartheta+\left[1+\frac{q^2}{p^2}(M_0^2+N_0^2)\right]^{-1/2}\times\right.$$
$$\times\left[\frac{p^2-4q^2}{2p^2}\left(\frac{M_0^2+N_0^2}{2}+\frac{M_0^2-N_0^2}{2}\cos\frac{2q}{p}\vartheta+M_0N_0\sin\frac{2q}{p}\vartheta\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\sin\vartheta-\frac{3}{2}\frac{q}{p}\left(M_0N_0\cos\frac{2q}{p}\vartheta-\frac{M_0^2-N_0^2}{2}\sin\frac{2q}{p}\vartheta\right)\cos\vartheta\right]\right\} \tag{2.5}$$

и представляет собой уравнение для определения первой поправки по μ $2p\pi$-периодического решения уравнения (2.2) ($p=2, 3,\ldots$).

Неоднородная часть уравнения (2.5) содержит тригонометрические функции ϑ с круговыми частотами

$$\text{(а)}\ \frac{p-q}{p},\quad \text{(б)}\ \frac{|p-3q|}{p},\quad \text{(в)}\ \frac{p+q}{p},\ \frac{p+3q}{p}.$$

Выясним, когда одна из этих частот совпадает с круговой частотой порождающего решения:

$$\text{(а)}\ \frac{p-q}{p}=\frac{q}{p},\ p=2,\ q=1,\ \gamma=\frac{1}{3};$$

$$\text{(б)}\ \frac{p-3q}{p}=\frac{q}{p},\ p=4,\ q=1,\ \gamma=\frac{1}{15};$$

$$\frac{3q-p}{p}=\frac{q}{p},\ p=2,\ q=1,\ \gamma=\frac{1}{3}.$$

В случае (в) такое совпадение невозможно. В случаях (а) и (б) уравнение (2.5) допускает $2p\pi$-периодические решения при указанных p не для всех значений M_0 и N_0, а лишь для тех, при которых уничтожаются члены с $\sin(q\vartheta/p)$ и $\cos(q\vartheta/p)$ в уравнении (2.5). Уравнения для «порождающих амплитуд» при $\gamma=\frac{1}{3}$ ($p=2$, $q=1$) суть

$$N_0(4-2M_0^2+N_0^2)=0,\quad M_0(4+M_0^2-2N_0^2)=0$$

и дадут ненулевые решения: $M_0=\pm 2$, $N_0=\pm 2$. Из (2.3) получим тогда

$$\zeta_0=\pm 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{2}\vartheta\mp\frac{1}{4}\pi\right), \tag{2.6}$$

т. е. единственное значение порождающей амплитуды, равное $2\sqrt{2}$ при четырех значениях порождающей начальной фазы.

В случае $\gamma=\frac{1}{15}$ уравнения для порождающих амплитуд обращаются в тождества. Поэтому при всех остальных значениях γ в (2.4), кроме $\gamma=\frac{1}{3}$, формула (2.3) доставит семейство порождающих решений уравнения (1.6) от двух параметров.

Остановимся в заключение на случае (а), при котором уравнение (1.6) допускает периодическое решение с наименьшим периодом по ϑ, равным 4π. Из формул (I,1,2.4), (I,1,2.7), (1.5) и (2.6) имеем

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}\mu+O(\mu^2),\quad \frac{d\vartheta}{d\tau}=1+\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu(1\pm\sin\vartheta)\sin\vartheta+O(\mu^2),$$

$$t=\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\left[1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu(1\pm\sin\vartheta)\sin\vartheta+O(\mu^2)\right]d\vartheta. \tag{2.7}$$

Отсюда будем иметь для периода качаний массы на пружине с относительным статическим удлинением $\gamma = \frac{1}{3}$

$$T = \frac{4\pi}{\omega}\left[1 \mp \frac{3\sqrt{3}}{16}\mu + O(\mu^2)\right] = 2T_{\text{верт}}\left[1 \mp \frac{3\sqrt{3}}{16}\mu + O(\mu^2)\right],$$

а для закона движения

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{2}{3}\sqrt{6}\, l\mu\cos\left(\frac{1}{2}\omega t \mp \frac{\pi}{4}\right) + O(\mu^2), \\ y &= \frac{1}{3}\sqrt{3}\, l\mu\sin\omega t + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Заметим, что период колебаний жесткого маятника длиной $\frac{4}{3}l$ $\left(\gamma = \frac{1}{3}\right)$ и размахом, определяемым первой формулой (2.8), равен

$$T_{\text{жестк}} = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{3g}}\,[1 + O(\mu^2)] = 2T_{\text{верт}}[1 + O(\mu^2)].$$

Отметим также, что из второй формулы (2.8) следует, что при качаниях пружинного маятника на долю вертикальных колебаний приходится $\frac{1}{3}[1 + O(\mu^2)]$ энергии всего движения.

1.3. Третий этап. Переходим к исследованию процесса срыва вертикальных колебаний. Поскольку $\gamma = \frac{1}{3}$ есть единственное значение параметра γ, при котором вертикальные колебания неустойчивы для сколь угодно малых значений их безразмерной амплитуды $\mu = Y/l$ и поскольку $\gamma = \frac{1}{3}$ отвечает периодическое движение (2.8), то естественно положить в уравнении (1.6) $\gamma = \frac{1}{3}$ и исследовать его решение при достаточно малых начальных значениях $\zeta(0)$ и $\zeta'(0)$. Итак, рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2} + \frac{1}{4}\zeta = \frac{9}{16}\mu\zeta\left\{\frac{3}{2}\zeta\frac{d\zeta}{d\vartheta}\cos\vartheta\left[1 + \frac{1}{4}\zeta^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\vartheta}\right)^2\right]^{-1/2} - \right.\\ \left. - \left[1 + \frac{1}{4}\zeta^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\vartheta}\right)^2\right]^{1/2}\sin\vartheta\right\} + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подстановка Ван-дер Поля [30]

$$\zeta = a\cos\left(\frac{1}{2}\vartheta + \varphi\right), \quad \frac{d\zeta}{d\vartheta} = -\frac{1}{2}a\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta + \varphi\right) \tag{3.2}$$

приведет уравнение (3.1) к эквивалентной системе относительно медленно меняющихся переменных a и φ:

$$\frac{da}{d\vartheta} = \frac{9}{16}\mu a\left[\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}\sin\vartheta - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{8}a^2\left(1+\frac{1}{4}a^2\right)^{-1/2}\sin(\vartheta+2\varphi)\cos\vartheta\right]\sin(\vartheta+2\varphi)+O(\mu^2),$$
$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{9}{16}\mu\left[\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}\sin\vartheta - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{8}a^2\left(1+\frac{1}{4}a^2\right)^{-1/2}\sin(\vartheta+2\varphi)\cos\vartheta\right][1+\cos(\vartheta+2\varphi)]+O(\mu^2).$$

Усредняя по явно входящему независимому переменному ϑ, получим укороченные уравнения Ван-дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\vartheta} &= \frac{9}{64}\mu a\sqrt{4+a^2}\cos 2\varphi + O(\mu^2), \\ \frac{d\varphi}{d\vartheta} &= \frac{9}{128}\mu\frac{a^2-8}{\sqrt{4+a^2}}\sin 2\varphi + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Разделив первое из уравнений (3.3) на второе и проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{2}\int_{a_0}^{a}\frac{a^2-8}{a(4+a^2)}da = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\operatorname{ctg} 2\varphi d\varphi + O(\mu).$$

Выполняя интегрирование, найдем первый интеграл укороченных уравнений Ван-дер Поля:

$$a^4\sin^2 2\varphi = c^2(4+a^2)^3 + O(\mu) \qquad \left(c^2 = \frac{a_0^4}{(4+a_0^2)^3}\sin^2 2\varphi_0\right).$$

Однако подстановка этого интеграла в первое из уравнений (3.3) приводит к необозримым квадратурам. Впрочем, укороченные уравнения Ван-дер Поля, разумеется, дают лишь первое приближение решения уравнения (3.1) (дальнейшие приближения определяются по методу последовательных приближений Пикара с вытекающими из него оценками точности). Поэтому мы ограничимся приближенным интегрированием системы (3.3). Из второго уравнения (3.3) следует, что при $|a| \leqslant 2\sqrt{2}$ имеем $d\varphi/d\vartheta \leqslant 0$ и будем иметь $|\varphi_0| > |\varphi| \geqslant 0$. Поскольку при $|a| \leqslant 2\sqrt{2}$ в силу (3.2) имеем $|\zeta| \leqslant 2\sqrt{2}$, где, напомним, $2\sqrt{2}$ есть амплитуда порождающего решения (2.6), то на весь промежуток процесса срыва (перехода вертикальных колебаний в маятниковые качания) можно положить $\cos 2\varphi \approx 1$, если φ_0 достаточно мало. Тогда первое уравнение (3.3) даст нам для $a_0 = a(0) > 0$

$$\int_{a_0}^{a} \frac{da}{a\sqrt{4+a^2}} = \frac{9}{64}\mu\vartheta,$$

и после интегрирования найдем

$$\ln\left[\frac{\sqrt{4+a^2}-2}{a}\,\frac{a_0}{\sqrt{4+a_0^2}-2}\right] = \frac{9}{32}\mu\vartheta.$$

Отсюда получим приближенный закон изменения амплитуды

$$a = \frac{4b_0\exp\left(\frac{9}{32}\mu\vartheta\right)}{1-b_0^2\exp\left(\frac{9}{16}\mu\vartheta\right)} \qquad \left(b_0 = \frac{1}{a_0}\left[\sqrt{4+a_0^2}-2\right]\right). \tag{3.4}$$

Вычислим время перехода вертикальных колебаний ($\zeta \equiv 0$) в маятниковые (2.6). Полагая в (3.4) $a = 2\sqrt{2}$, будем иметь для соответствующего значения $\tilde{\vartheta}$

$$\tilde{\vartheta} = \frac{32}{9\mu}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,\frac{a_0}{\sqrt{4+a_0^2}-2}\right). \tag{3.5}$$

Заметим, что переходной процесс происходит на интервале времени, длина которого имеет порядок $O(\mu^{-1})$, что соответствует алгоритму асимптотического интегрирования в методе усреднения ([90], гл. III, § 4, п. 4).

В силу малости φ_0 имеем $a_0 \approx \zeta(0)$ и последняя формула для малых a_0 примет вид

$$\tilde{\vartheta} = \frac{32}{9\mu}\ln\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\zeta(0)}. \tag{3.6}$$

Формулы (1.4) позволят выразить $\zeta(0)$ через начальные значения исходных переменных, именно,

$$\zeta(0) = \frac{x(0)}{l\rho(0)}, \qquad \rho = \sqrt{\eta^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2},$$
$$\zeta(0) = x(0)\left[y(0)^2 + \omega^{-2}\dot{y}(0)^2\right]^{-1/2}.$$

Наконец, последняя из формул (2.7) определит искомое время переходного процесса от вертикальных колебаний к маятниковым (2.8)

$$\tilde{t} = \frac{1}{\omega}\left[\left(1 \mp \frac{3\sqrt{3}}{16}\mu\right)\tilde{\vartheta} + O(\mu)\right]. \tag{3.7}$$

Напомним, что μ можно определить из формулы (1.3)

$$\mu = \frac{1}{cl}\sqrt{2(T_0+V_0)c},$$

либо, считая поперечное возмущение $x(0)$ малым, из формулы (1.8). Двойной знак в формуле (3.7) связан с фазой маятниковых качаний в (2.6).

§ 2. О связи радиальных и вертикальных колебаний частиц в циклических ускорителях

В настоящем параграфе определяются чисторадиальные колебания и исследуется их устойчивость. Затем проводится преобразование уравнений колебаний, и по методу малого параметра Пуанкаре находятся вертикально-радиальные колебания. Существует единственное значение определяющего физического параметра, при котором имеется единственная приведенная амплитуда вертикально-радиальных колебаний, а чисторадиальные колебания при этом значении параметра неустойчивы для сколь угодно малой их амплитуды. Далее описывается переходный процесс и определяется время перехода чисторадиальных колебаний в вертикально-радиальные, а затем отмечается аналогия с пружинным маятником, в частности, в переходных процессах.

2.1. Первый этап. Уравнения бетатронных колебаний частиц в циклических ускорителях со слабой фокусировкой имеют вид [1]) ([270], (4.6)):

$$\ddot{\xi} + \omega^2(1-n)\xi = -\frac{1}{2}k\eta^2, \qquad \ddot{\eta} + \omega^2 n\eta = -k\xi\eta. \tag{1.1}$$

Здесь $\xi = (r - r_0)/r_0$, $\eta = z/r_0$; r и z — две из цилиндрических координат частицы, точка сверху обозначает дифференцирование по времени; константы ω, n и k суть

$$\omega = \frac{eH(r_0)}{mc}, \quad n = -\frac{r_0}{H(r_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_0 \quad (0 < n < 1),$$
$$k = -\frac{r_0}{H(r_0)}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)_0, \tag{1.2}$$

где m и e — масса и заряд частицы, c — скорость света, $H_z = H(r)$ — вертикальная компонента вектора напряженности магнитного поля, значения частных производных вычислены при $r = r_0$ — радиусе траектории, соответствующем заданной величине энергии частиц.

Введем безразмерное время $\tau = \omega\sqrt{1-n}\,t$ и запишем систему (1.1) в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \xi = -\frac{1}{2}\beta\eta^2, \qquad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \alpha\eta = -\beta\xi\eta, \tag{1.3}$$

---

[1]) В первом уравнении (4.6) в [270] перед правой частью должен стоять знак минус.

где положительные параметры α и β суть

$$\alpha = \frac{n}{1-n}, \qquad \beta = \frac{k}{\omega^2(1-n)}. \tag{1.4}$$

Интеграл (I,1,2.2) для системы (1.3) есть интеграл энергии частиц, соответствующий колебательной части движения

$$\begin{gathered}\mathcal{H} = \xi^2 + \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + W + S_3 = \mu^2 \\ \left(W = \alpha\eta^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2, \qquad S_3 = \beta\xi\eta^2\right).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Прежде чем приступить к преобразованию системы (1.3), заметим, что она допускает решение (чисторадиальные колебания частиц)

$$\eta \equiv 0, \qquad \xi = \mu \cos(\tau - \tau_0). \tag{1.6}$$

Из интеграла (1.5) следует, что константа μ^2 равна квадрату амплитуды чисторадиальных колебаний. Для суждения об устойчивости последних положим в (1.3)

$$\xi = \mu\cos(\tau - \tau_0) + x, \qquad \eta = 0 + y,$$

и получим уравнения в вариациях в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} + [\alpha + \beta\mu\cos(\tau - \tau_0)]\, y = 0.$$

Отсюда следует, что неустойчивость чисторадиальных колебаний (1.6) определяется неустойчивостью тривиального решения второго из последних уравнений — уравнения Матье. Физически определяющим параметром является n; см. (1.2). Области неустойчивости на плоскости μn примыкают к критическим точкам на оси n, определяемым равенствами (см. [146], § VII, 1)

$$2\sqrt{\alpha(n)} = l \qquad (l = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$n = n_l = \frac{l^2}{4 + l^2} \qquad (l = 1, 2, \ldots).$$

Широкая область неустойчивости (т. е. с отличным от нуля углом между касательными) примыкает лишь к точке $n_1 = 1/5$, тангенс угла наклона касательных определяется формулой (II,2,5.6)

$$\chi^{\mp} = \mp \left.\frac{\frac{1}{2}\beta}{\frac{d\alpha}{dn}}\right|_{n=n_1} = \mp\frac{k}{2\omega^2}(1 - n_1) = \mp\frac{2}{5}\frac{k}{\omega^2}.$$

Таким образом, в первом приближении единственная широкая область неустойчивости (1.6) в плоскости μn определяется неравенствами

$$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\frac{k}{\omega^2}\mu+\ldots<n<\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\frac{k}{\omega^2}\mu+\ldots \tag{1.7}$$

с критическим значением $n = n_1 = 1/5$.

2.2. Второй этап. Перейдем теперь к преобразованию **системы** (1.3). По формулам (II,1,2.6) найдем

$$\begin{gathered} R(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = -\frac{1}{2}\beta z_1^2\cos\vartheta,\quad \Theta(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = \frac{1}{2}\beta z_1^2\sin\vartheta, \\ Z_1(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = \frac{1}{2}\beta z_1^3\cos\vartheta, \\ Z_2(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = -\beta z_1\sin\vartheta + \frac{1}{2}\beta z_1^2 z_2\cos\vartheta. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Уравнение (I,1,2.9) запишется в виде ($z_1 \equiv \zeta$, $\zeta' \equiv d\zeta/d\vartheta$)

$$\begin{gathered} \frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}+\alpha\zeta = -\mu\beta\zeta\,[\sqrt{1+\alpha\zeta^2+\zeta'^2}\sin\vartheta + \\ +(1+\alpha\zeta^2+\zeta'^2)^{-1/2}\left(\frac{1-4\alpha}{2}\zeta\sin\vartheta-\frac{3}{2}\zeta'\cos\vartheta\right)\zeta\Big]+O(\mu^2). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) при $\alpha = \gamma/(1+\gamma)$ и $\beta = (1+\gamma)^{-2}$ переходит в уравнение (1,1.6), и определяет аналогию с § 1. Используя эту аналогию, получим, что уравнение (2.2) допускает периодические решения с наименьшим периодом $2p\pi$ ($p = 1, 2, \ldots$) только лишь для значений $\alpha = q^2/p^2$, т. е., в силу (1.4), для

$$n = \frac{q^2}{p^2+q^2}, \tag{2.3}$$

где q и p — любые взаимно простые числа. Множество значений n, определяемое формулой (2.3), всюду плотно на интервале (0, 1) изменения n, иначе говоря, каждое значение $n \in (0, 1)$ либо определяется формулой (2.3), либо может быть представлено ею с любой степенью точности. При всех значениях n в (2.3), кроме $n = 1/5$ ($q = 1$, $p = 2$), формула (1,2.3) доставит семейство порождающих решений уравнения (2.2) от двух параметров.

Остановимся в заключение на значении $n = 1/5$ — единственном значении n, при котором порождающее решение уравнения (2.2) имеет вид (1,2.6) и для которого чисторадиальные колебания (1.6) неустойчивы при сколь угодно малой их амплитуде μ (см. (1.7)). Аналогично (1,2.7) получим

$$\rho = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mu + O(\mu^2),$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = 1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\beta\mu\,(1\pm\sin\vartheta)\sin\vartheta + O(\mu^2).$$

Отсюда будем иметь для периода вертикально-радиальных колебаний при $n=\frac{1}{5}$

$$T=\frac{1}{\omega\sqrt{1-\frac{1}{5}}}\int_0^{4\pi}\left[1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\beta\mu(1\pm\sin\vartheta)\sin\vartheta+O(\mu^2)\right]^{-1}d\vartheta=$$

$$=\frac{2\sqrt{5}\pi}{\omega}\left[1\mp\frac{5}{12}\sqrt{3}\frac{k}{\omega^2}\mu+O(\mu^2)\right], \qquad (2.4)$$

а для закона движения аналогично (1,2.8) будем иметь

$$\xi=\frac{1}{3}\sqrt{3}\mu\sin\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\omega t\right)+O(\mu^2),$$

$$\eta=\rho\zeta=\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}\mu\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\omega t\mp\frac{\pi}{4}\right)+O(\mu^2). \qquad (2.5)$$

Величина μ определяется по начальному значению приведенной энергии (1.5) колебаний.

2.3. Третий этап. Перейдем к описанию процесса перекачки энергии при $n=1/5$, т. е. переходного процесса от неустойчивых чисторадиальных колебаний (1.6) к вертикально-радиальным колебаниям (2.5). Укороченные уравнения Ван-дер Поля будут иметь вид (1,3.3) с заменой множителей 9/64 и 9/128 соответственно на $\frac{1}{4}\beta$ и $\frac{1}{8}\beta$. Аналогично п. 1.3 определится закон изменения амплитуды Ван-дер Поля

$$a=\frac{4b_0\exp\left(\frac{1}{2}\beta\mu\vartheta\right)}{1-b_0^2\exp(\beta\mu\vartheta)} \qquad \left(b_0=\frac{1}{a_0}\left[\sqrt{4+a_0^2}-2\right]\right). \qquad (2.6)$$

Время $\tilde{t}$ переходного процесса от чисторадиальных колебаний (1.6) к вертикально-радиальным (2.5) при $n=1/5$ определится из формул

$$\tilde{t}=\frac{\sqrt{5}}{2\omega}\left[\left(1\mp\frac{1}{3}\sqrt{3}\tilde{\beta}\mu\right)\tilde{\vartheta}+O(\mu)\right], \qquad (2.7)$$

где

$$\tilde{\beta}=\frac{5}{4}\frac{k}{\omega^2}, \qquad \tilde{\vartheta}=\frac{2}{\tilde{\beta}\mu}\ln\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\zeta(0)},$$

$$\zeta(0)=\eta(0)\left[\xi^2(0)+\frac{5}{4}\omega^{-2}\dot{\xi}^2(0)\right]^{-1/2},$$

а величина μ определяется по начальному значению приведенной энергии (1.5) колебаний.

§ 3. Процесс срыва вертикальных колебаний маятника на упругой подвеске в направляющих

Первый этап решения приведен в п. II,2.5. Исходным периодическим режимом являются вертикальные колебания (II,2,5.4).

3.1. Определение нетривиальных периодических режимов (второй этап). Используя формулы (II,2,5.1), (II,2,5.3), приведем интеграл энергии к виду

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2+\eta^2+\alpha\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2+2\alpha\gamma(1-\cos\varphi)-2\alpha\sin\varphi\frac{d\eta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau}=\mu^2. \quad (1.1)$$

Разложив правые части системы уравнений (II,2,5.2), а также левую часть интеграла энергии по степеням переменных, получим

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2}+\eta=\alpha\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2-\alpha\gamma\varphi^2+[3],\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\gamma\varphi=-\eta\varphi+[3],$$

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2+\eta^2+\alpha\gamma\varphi^2+\alpha\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2+[3]=\mu^2.$$

Сравнивая это с (I,1,2.1) и (I,1,2.2), по формулам (I,1,2.6) находим

$$R=\alpha(-\gamma z_1^2+z_2^2)\cos\vartheta+O(\rho),\quad \Theta=\alpha(\gamma z_1^2-z_2^2)\sin\vartheta+O(\rho),$$

$$Z_1=\alpha(\gamma z_1^3-z_1z_2^2)\cos\vartheta+O(\rho),$$

$$Z_2=-z_1\sin\vartheta+\alpha(\gamma z_1^2z_2-z_2^3)\cos\vartheta+O(\rho).$$

Система уравнений (I,1,2.9) в рассматриваемом примере сводится к одному уравнению ($z_1\equiv\zeta$, $\zeta'\equiv d\zeta/d\vartheta$):

$$\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}+\gamma\zeta=\mu\{-\zeta\sin\vartheta\sqrt{1+\alpha(\gamma\zeta^2+\zeta'^2)}+$$
$$+\alpha[1+\alpha(\gamma\zeta^2+\zeta'^2)]^{-1/2}[2\zeta\sin\vartheta(\gamma^2\zeta^2+\zeta'^2-3\gamma\zeta'^2)+$$
$$+\zeta'\cos\vartheta(5\gamma\zeta^2-\zeta'^2)]\}+O(\mu^2). \quad (1.2)$$

Проводя вычисления аналогично пп. 1.2, 2.2, с помощью метода Пуанкаре [107а] получим порождающее периодическое решение при критическом значении параметра $\gamma=1/4$

$$\zeta_0=\pm2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\cos\left(\frac{1}{2}\vartheta\mp\frac{1}{4}\pi\right). \quad (1.3)$$

Отсюда и из формул (I,1,2.7), (I,1,2.3), (II,2,5.3) для периодического решения, отличного от вертикальных колебаний, т. е. для маятниковых качаний, находим

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,l_2\mu\sin\sqrt{\frac{c}{m_1+m_2}}\,t+O(\mu^2), \quad (1.4)$$
$$\varphi=\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{\alpha}}\mu\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m_1+m_2}}\,t\mp\frac{\pi}{4}\right)+O(\mu^2).$$

3.2. Исследование переходного процесса (третий этап). Подстановка Ван-дер Поля [30]

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{\alpha}}\cos\left(\frac{1}{2}\vartheta + \psi\right), \qquad \frac{d\zeta}{d\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{\alpha}}\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta + \psi\right) \quad (2.1)$$

приведет уравнение (1.2) при $\gamma = {}^1/_4$ к эквивалентной системе относительно медленно меняющихся переменных a и ψ:

$$\begin{gathered}\frac{da}{d\vartheta} = \mu a\left\{\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}\sin\vartheta\sin(\vartheta+2\psi) - \right.\\ -\left(1+\frac{1}{4}a^2\right)^{-1/2}\left[\frac{1}{8}a^2\sin\vartheta\sin(\vartheta+2\psi) - \frac{1}{4}a^2\cos\vartheta - \right.\\ \left.\left. -\frac{1}{8}a^2\cos\vartheta\cos(\vartheta+2\psi) + \frac{3}{8}a^2\cos\vartheta\cos^2(\vartheta+2\psi)\right]\right\} + O(\mu^2), \quad (2.2)\\ \frac{d\psi}{d\vartheta} = \mu\left\{\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}\sin\vartheta\,[1+\cos(\vartheta+2\psi)] - \right.\\ -\left(1+\frac{1}{4}a^2\right)^{-1/2}\left[\frac{1}{8}a^2\sin\vartheta\,(1+\cos(\vartheta+2\psi)) - \right.\\ \left.\left. -\frac{1}{4}a^2\cos\vartheta\sin(\vartheta+2\psi) - \frac{3}{16}a^2\cos\vartheta\sin(2\vartheta+4\psi)\right]\right\} + O(\mu^2).\end{gathered}$$

Выпишем укороченные уравнения Ван-дер Поля, усредняя по явно входящему независимому переменному

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\vartheta} &= \frac{1}{4}\mu a\sqrt{4+a^2}\cos 2\psi + O(\mu^2),\\ \frac{d\psi}{d\vartheta} &= \frac{1}{8}\mu\frac{a^2-8}{\sqrt{4+a^2}}\sin 2\psi + O(\mu^2).\end{aligned} \quad (2.3)$$

Точное решение уравнений (2.3) приводит к необозримым квадратурам. Впрочем, укороченные уравнения Ван-дер Поля, разумеется, дают лишь первое приближение решения системы (2.2). Поэтому ограничимся приближенным интегрированием системы (2.3). Из второго уравнения (2.3) следует, что при $|a| \leqslant 2\sqrt{2}$ имеем $d\psi/d\vartheta \leqslant 0$ и будем иметь $|\psi_0| > |\psi| \geqslant 0$. Поскольку при $|a| \leqslant 2\sqrt{2}$, в силу (2.1) имеем $|\zeta| \leqslant 2\sqrt{2}/\sqrt{\alpha}$, где, напомним, $2\sqrt{2}/\sqrt{\alpha}$ — амплитуда порождающего решения (1.3), то на весь промежуток переходного процесса (т. е. перехода вертикальных колебаний (II,2,5.4) в маятниковые качания (1.4) можно положить $\cos\psi \approx 1$, если ψ_0 достаточно мало́. Тогда из первого уравнения (2.3) для $a_0 = a(0) > 0$ получим

$$\int_{a_0}^{a}\frac{da}{a\sqrt{4+a^2}} = \frac{1}{4}\mu\vartheta$$

и после интегрирования найдем

$$\ln\left[\frac{\sqrt{4+a^2}-2}{a}\,\frac{a_0}{\sqrt{4+a_0^2}-2}\right]=\frac{1}{2}\mu\vartheta.$$

Отсюда следует приближенный закон изменения амплитуды

$$a=\frac{4b_0\exp\left(\frac{1}{2}\mu\vartheta\right)}{1-b_0^2\exp(\mu\vartheta)}\qquad\left(b_0=\frac{1}{a_0}\left[\sqrt{4+a_0^2}-2\right]\right). \tag{2.4}$$

Вычислим время перехода вертикальных колебаний при условии их возмущения ($a=a_0>0$) в маятниковые качания ($a=2\sqrt{2}$). Полагая в (2.4) $a=2\sqrt{2}$, для соответствующего значения $\tilde{\vartheta}$ находим

$$\tilde{\vartheta}=\frac{2}{\mu}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,\frac{a_0}{\sqrt{4+a_0^2}-2}\right).$$

Заметим, что промежуток времени перехода имеет порядок $O(\mu^{-1})$, что соответствует алгоритму асимптотического интегрирования в методе усреднения. В силу малости ψ_0 получим $a_0\approx\approx\zeta(0)$. Последняя формула для малых a_0 примет вид

$$\tilde{\vartheta}=\frac{2}{\mu}\ln\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\zeta(0)}.$$

С помощью формул (I,1,2.3) выразим $\zeta(0)$ через начальные значения исходных переменных

$$\zeta=\frac{\varphi}{\rho},\quad \rho=\sqrt{\eta^2+\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2},\quad \zeta(0)=\varphi(0)\left[y^2(0)+\omega^{-2}\left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2\right]^{-1/2}.$$

Для времени переходного процесса (время перекачки энергии при критическом значении $\gamma=\frac{1}{4}$ (т. е. $\lambda=\frac{1}{4}l_2$) имеем

$$\tilde{t}=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{c}}\,\tilde{\vartheta}+O(1).$$

Величину μ можно определить из выражений (II,2,5.1), (II,2,5.3) и (1.1)

$$\mu=\frac{1}{cl_2}\sqrt{2(T_0+V_0)c},$$

или, считая поперечное возмущение $\varphi(0)$ достаточно малым, из формулы (II,2,5.4).

§ 4. Периодические режимы маятника на свободной упругой подвеске

4.1. Преобразование уравнений движения. Разложим правые части системы уравнений (II,2,4.2) в ряд по степеням переменным и запишем (II,2,4.2) в виде

$$\begin{gathered}\eta'' + \eta = Y(\eta, \xi, \varphi, \varphi'),\\ \xi'' + \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)}\xi - \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}\varphi = X(\eta, \xi, \varphi, \varphi'),\\ \varphi'' - \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)\beta}\xi + \frac{\gamma}{(1-\alpha)\beta}\varphi = \Phi(\eta, \xi, \varphi, \varphi').\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь штрих означает производную по τ, а разложения функций Y, X и Φ начинаются с членов не ниже второго порядка. Корни характеристического уравнения линейной части суть $\mp i\omega_1$, $\mp i\omega_2$, где

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\gamma}{2(1-\alpha)(1+\gamma)\beta} \times \\ \times \left[1+\gamma+\beta \mp \sqrt{(1+\gamma+\beta)^2 - 4\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}\right].$$

Поскольку $0 < \alpha < 1$, а $\beta > 0$, $\gamma > 0$, то

$$0 < (1+\gamma+\beta)^2 - 4(1-\alpha)(1+\gamma)\beta < (1+\gamma+\beta)^2$$

и, следовательно, ω_1^2 и ω_2^2 положительны.

Интеграл энергии (I,1,2.2) имеет вид

$$\eta'^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \frac{\gamma}{1+\gamma}\xi^2 + \alpha\beta^2\varphi'^2 + 2\alpha\beta\varphi'\xi' + S_3 = \mu^2. \tag{1.2}$$

Подстановка (I,1,2.3) запишется теперь как

$$\begin{gathered}\eta' = \rho\cos\vartheta, \quad \eta = \rho\sin\vartheta,\\ \xi = \rho z_1, \quad \varphi = \rho z_2, \quad \xi' = \rho z_3, \quad \varphi' = \rho z_4,\end{gathered}$$

и мы получим из (1.2)

$$\rho = \mu\left(1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}z_1^2 + z_3^2 + 2\alpha\beta z_3 z_4 + \alpha\beta^2 z_4^2\right) + O(\mu^2). \tag{1.3}$$

Выпишем теперь систему уравнений (I,1,2.9)

$$\begin{gathered}\frac{d^2 z_1}{d\vartheta^2} + \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)}z_1 - \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}z_2 = O(\mu),\\ \frac{d^2 z_2}{d\vartheta^2} - \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}z_1 + \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)}z_2 = O(\mu).\end{gathered} \tag{1.4}$$

4.2. Периодические решения. Общее решение для порождающей (т. е. при $\mu = 0$) системы (1.4) есть

$$z_{10} = [\gamma - \omega_1^2 (1 - \alpha) \beta] (M_1 \sin \omega_1\vartheta + M_2 \cos \omega_1\vartheta) + \\ + [\gamma - \omega_2^2 (1 - \alpha) \beta] (M_3 \sin \omega_2\vartheta + M_4 \cos \omega_2\vartheta),$$

$$z_{20} = \frac{\gamma}{1+\gamma} (M_1 \sin \omega_1\vartheta + M_2 \cos \omega_1\vartheta + M_3 \sin \omega_2\vartheta + M_4 \cos \omega_2\vartheta).$$

Если подставить эти значения в выражения $y = l_1\rho \sin \vartheta$, $x = l_1\rho z_1$, $\varphi = \rho z_2$ и (1.3) и учесть, что в силу второго уравнения (I,1,2.4) $\vartheta = \tau + O(\mu)$, то получим следующее приближение для периодического решения системы (II,2,4.1):

$$y = \mu l_1 F(\tau) \sin \tau + O(\mu^2),$$

$$x = \mu l_1 F(\tau) \{[\gamma - \beta\omega_1^2 (1 - \alpha)] (M_1 \sin \omega_1\tau + M_2 \cos \omega_1\tau) + \\ + [\gamma - \omega_2^2\beta (1 - \alpha)] (M_3 \sin \omega_2\tau + M_4 \cos \omega_2\tau)\} + O(\mu^2),$$

$$\varphi = \mu \frac{\gamma}{1+\gamma} F(\tau) (M_1 \sin \omega_1\tau + M_2 \cos \omega_1\tau + \\ + M_3 \sin \omega_2\tau + M_4 \cos \omega_2\tau) + O(\mu^2),$$

где

$$F(\tau) = (1 + \frac{1}{2}\gamma^2 (1+\gamma)^{-2} \{\beta (1 - \alpha) (1 + \gamma - \beta) [\omega_1^2 (M_1^2 + \\ + M_2^2) + \omega_2^2 (M_3^2 + M_4^2)] - \gamma (1 + \gamma - \beta + 2\alpha\beta) (M_1^2 + M_2^2 + \\ + M_3^2 + M_4^2) + \alpha\beta\gamma (M_1 \sin \omega_1\tau + M_2 \cos \omega_1\tau + M_3 \sin \omega_2\tau + \\ + M_4 \cos \omega_2\tau)^2\})^{-1/2}.$$

Здесь $\tau = \sqrt{c/(m_1 + m_2)}\,(t - t_0)$, а μ определяется из начального значения приведенной энергии (1.2). Исследование первого из уравнений (I,2,1.4) (уравнения для порождающих амплитуд) определит критические значения параметров α, β, γ, для которых порождающие амплитуды M_1, M_2, M_3, M_4 зависимы (что будет соответствовать предельным циклам). Для всех остальных значений параметров α, β, γ найденное периодическое решение, как содержащее шесть произвольных постоянных M_1, M_2, M_3, M_4, t_0 и μ, будет общим для достаточно малых $\mu > 0$.

Глава IV

КОЛЕБАНИЯ В ВИДОИЗМЕНЕННЫХ СИСТЕМАХ ЛЯПУНОВА

§ 1. Системы Ляпунова с демпфированием

Невозмущенная нелинейная автономная система ляпуновского вида $(2k+2)$-го порядка возмущена аналитическим и достаточно малым по норме демпфированием. Проводится преобразование возмущенной системы, при котором невозмущенная система может быть преобразована в квазилинейную неавтономную систему $2k$-го порядка. Предполагается известным ее решение для достаточно малого по сравнению с единицей корня квадратного из начального значения приведенной энергии системы. Для первой и последующей поправок соответствующего (т. е. с теми же начальными условиями) решения возмущенной системы составляется полная система уравнений в вариациях по параметру Пуанкаре — неоднородная система линейных дифференциальных уравнений $(2k+1)$-го порядка с переменными коэффициентами. Если известен общий интеграл невозмущенной системы, то интегрирование системы уравнений в вариациях согласно Пуанкаре ([107а], т. I, гл. II) сводится к квадратурам. Последние три пункта посвящены примерам.

1.1. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим класс систем Ляпунова с демпфированием, описываемых уравнениями второго порядка каждое:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2}+u-U(u,\dot{u},v_1,\ldots,v_k,\dot{v}_1,\ldots,\dot{v}_k)=-2\varepsilon F_0(\dot{u},\dot{v}_1,\ldots,\dot{v}_k),$$

$$\frac{d^2v_\varkappa}{d\tau^2}+a_{\varkappa 1}v_1+\ldots+a_{\varkappa k}v_k-V_\varkappa(u,\dot{u},v_1,\ldots,v_k,\dot{v}_1,\ldots,\dot{v}_k)=$$
$$=-2\varepsilon F_\varkappa(\dot{u},\dot{v}_1,\ldots,\dot{v}_k)\qquad(\varkappa=1,\ldots,k). \tag{1.1}$$

Здесь точка означает производную по τ, $a_{j\varkappa}=a_{\varkappa j}$ $(\varkappa, j=1,\ldots$ $\ldots,k)$ — вещественные постоянные, а U, $V_1,\ldots,V_k$, F_0, $F_1,\ldots$ $\ldots,F_k$ суть вещественные аналитические функции своих переменных, разложения F_0, $F_1,\ldots,F_k$ начинаются с членов не ниже первого порядка, а для U, $V_1,\ldots,V_k$ — не ниже второго порядка, наконец, $\varepsilon > 0$. Будем предполагать, что невозмущенная система (1.1) (т. е. система (1.1) при $\varepsilon = 0$) допускает первый интеграл, который необходимо будет аналитической функцией переменных $u, \dot{u}, v_1, \ldots, v_k, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_k$ ([77а], § 38; [79б], гл. VII, § 1)

$$H = \dot{u}^2 + u^2 + W(v_1, \ldots, v_k, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_k) + \\ + S_3(u, \dot{u}, v_1, \ldots, v_k, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_k) = \mu^2 \quad (\mu > 0), \tag{1.2}$$

где W — квадратичная форма, а S_3 — совокупность членов не ниже третьего порядка. Для выделенных сил сопротивления $F_0, F_1, \ldots, F_k$ будем предполагать, что их работа на любом возможном перемещении (совпадающем в рассматриваемом случае с одним из действительных) отрицательна

$$-F_0(\dot{u}, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_k)\dot{u} - \sum_{\varkappa=1}^{k} F_\varkappa(\dot{u}, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_k)\dot{v}_\varkappa < 0. \tag{1.3}$$

В простейшем нелинейном случае, когда $F_j = F(\dot{v}_j)$ ($j = 0, 1, \ldots, k$; $\dot{v}_0 \equiv \dot{u}$) условие (1.3) означает, что $\alpha F(\alpha) > 0$ ($\alpha \neq 0$). В линейном случае условие (1.3) означает, что диссипация полная.

Подстановка Ляпунова

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \rho\cos\vartheta, \quad u = \rho\sin\vartheta && (\rho \geqslant 0), \\ v_\varkappa &= \rho z_\varkappa, \quad \dot{v}_\varkappa = \rho z_{k+\varkappa} && (\varkappa = 1, \ldots, k) \end{aligned} \tag{1.4}$$

приведет систему (1.1) и первый интеграл (1.2) невозмущенной системы к такому виду:

$$\begin{gathered} \frac{d\vartheta}{d\tau} = 1 - \frac{1}{\rho} U(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})\sin\vartheta + \\ + 2\varepsilon\frac{1}{\rho} F_0(\rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}^{(2)})\sin\vartheta, \\ \frac{d\rho}{d\tau} = U(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})\cos\vartheta - \\ - 2\varepsilon\frac{1}{\rho} F_0(\rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}^{(2)})\cos\vartheta, \\ \frac{dz_\varkappa}{d\tau} = z_{k+\varkappa} - \frac{1}{\rho} z_\varkappa U(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})\cos\vartheta + \\ + 2\varepsilon\frac{1}{\rho} z_\varkappa F_0(\rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}^{(2)})\cos\vartheta, \\ \frac{dz_{k+\varkappa}}{d\tau} = -a_{\varkappa 1}z_1 - \ldots - a_{\varkappa k}z_k - \frac{1}{\rho} z_{k+\varkappa} U(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z})\cos\vartheta + \\ + \frac{1}{\rho} V_\varkappa(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}) + \\ + 2\varepsilon\frac{1}{\rho} z_{k+\varkappa} F_0(\rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}^{(2)})\cos\vartheta - 2\varepsilon\frac{1}{\rho} F_\varkappa(\rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}^{(2)}) \\ (\varkappa = 1, \ldots, k), \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\rho^2[1 + W(\mathbf{z}) + \rho S(\rho, \vartheta, \mathbf{z})] = \mu^2. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^{(2)}$ суть векторы соответственно с компонентами $z_1, \ldots, z_{2k}$ и $z_{k+1}, \ldots, z_{2k}$, а $S = \rho^{-3}S_3$. Предположим для дальнейшего, что в параллелепипеде $|\mathbf{z}| \leqslant b$, $0 \leqslant \rho \leqslant r_0$ и при любом $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ выполнено неравенство

$$1 - \frac{1}{\rho}[U(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}) - 2\varepsilon F_0(\rho\cos\vartheta, \rho\mathbf{z}^{(2)})]\sin\vartheta > 0. \tag{1.7}$$

При условии (1.7) разделим второе и последующие уравнения системы (1.5) на первое:

$$\begin{gathered}\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{U\cos\vartheta - 2\varepsilon F_0\cos\vartheta}{1 - \rho^{-1}(U - 2\varepsilon F_0)\sin\vartheta}, \\ \frac{dz_\varkappa}{d\vartheta} = \frac{z_{k+\varkappa} - \rho^{-1}z_\varkappa(U - 2\varepsilon F_0)\cos\vartheta}{1 - \rho^{-1}(U - 2\varepsilon F_0)\sin\vartheta}, \\ \frac{dz_{k+\varkappa}}{d\vartheta} = [1 - \rho^{-1}(U - 2\varepsilon F_0)\sin\vartheta]^{-1}(-a_{\varkappa 1}z_1 - \ldots - a_{\varkappa k}z_k - \\ - \rho^{-1}z_{k+\varkappa}U\cos\vartheta + \rho^{-1}V_\varkappa + 2\varepsilon\rho^{-1}z_{k+\varkappa}F_0\cos\vartheta - 2\varepsilon\rho^{-1}F_\varkappa) \\ (\varkappa = 1, \ldots, k).\end{gathered} \tag{1.8}$$

В § I, 1 невозмущенная система (1.8) (т. е. при $\varepsilon = 0$) за счет использования интеграла (1.6) сведена к квазилинейной неавтономной системе $2k$-го порядка; ее решение определяется в гл. III методами малого параметра для достаточно малых $\mu > 0$ в (1.6).

1.2. Полная система уравнений в вариациях по параметру Пуанкаре и ее решение. Запишем систему уравнений (1.8) в виде векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\vartheta} = \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}; \varepsilon), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор с компонентами $\rho, z_1, \ldots, z_{2k}$, а $\mathbf{f}$ — вектор-функция, составленная из правых частей системы (1.8), аналитическая по $\mathbf{x}$ и ε в области определения (1.7), а коэффициенты степенных рядов по $\rho, z_1, \ldots, z_{2k}$[1]) суть периодические функции ϑ периода 2π.

Допустим, что нам известно некоторое решение $\mathbf{x}_0(\vartheta)$ невозмущенной (т. е. при $\varepsilon = 0$) системы (2.1):

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{d\vartheta} = \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}_0; 0). \tag{2.2}$$

Основываясь на теореме Пуанкаре ([107а], т. I, гл. II), будем искать решение системы (2.1) для достаточно малых положительных значений ε в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\mathbf{x}_m(\vartheta). \tag{2.3}$$

[1]) В дальнейшем положим $2k + 1 = n$ и будем считать, что n — любое натуральное число.

Вычитая из уравнения (2.1) тождество (2.2) и используя формулу Тейлора для функции многих переменных, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \frac{d\mathbf{x}_m}{d\vartheta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{x}_m + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \right)^{\nu} \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}_0; 0).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем последовательность векторных дифференциальных уравнений (*полную систему уравнений в вариациях по параметру Пуанкаре*)

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}_1}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}\right)_0, \\
\frac{d\mathbf{x}_2}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \varepsilon^2}\right)_0, \\
\frac{d\mathbf{x}_3}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_2 + \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon^2}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \varepsilon^3}\right)_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2.4) \\
\frac{d\mathbf{x}_m}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_m + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_2} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_{m-1} + \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_2}\mathbf{x}_{\alpha_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2\partial \varepsilon}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m-1} \mathbf{x}_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_2} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon^2}\right)_0 \mathbf{x}_{m-2} + \ldots + \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^s}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_s} + \\
&\qquad + \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{s-1}\partial \varepsilon}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}=m-1} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_{s-1}} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{1}{(s-l)!\,l!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{s-l}\partial \varepsilon^l}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-l}=m-l} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_{s-l}} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon^{s-1}}\right)_0 \mathbf{x}_{m-n+1} + \ldots + \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^m}\right)_0 \mathbf{x}_1^m + \\
&+ \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_1^{m-1} + \ldots + \frac{1}{(m-l)!\,l!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{m-l}\partial \varepsilon^l}\right)_0 \mathbf{x}_1^{m-l} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \varepsilon^{m-1}}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \varepsilon^m}\right)_0.
\end{aligned}$$

Здесь индекс нуль означает, что значения частных производных вычислены при $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\vartheta)$ и $\varepsilon = 0$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ суть натуральные числа; матрица

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \left\| \frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \right\|_1^n, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Последующие члены в уравнениях (2.4) также нужно трактовать в операторном смысле, так, например,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{x}_1 \right]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}_2.$$

Поэтому мы различали, например, члены с $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1$ из-за некоммутативности, вообще говоря, оператора.

Если ε входит в (2.1) линейно, т. е.

$$\mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x};\ \varepsilon) = \mathbf{g}(\vartheta, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{h}(\vartheta, \mathbf{x}),$$

то уравнения (2.4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(\vartheta, \mathbf{x}_0), \\ \frac{d\mathbf{x}_m}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_m + \sum_{\nu=2}^{m} \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^\nu \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^\nu} \right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu=m} \mathbf{x}_{\alpha_1} \ldots \mathbf{x}_{\alpha_\nu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\nu-1)!} \left(\frac{\partial^{\nu-1} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^{\nu-1}} \right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{\nu-1}=m-1} \mathbf{x}_{\alpha_1} \ldots \mathbf{x}_{\alpha_{\nu-1}} \right] \quad (m > 1). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) и (2.5) интегрируются последовательно непосредственно только в скалярном случае.

Однако если известен общий интеграл невозмущенной (т. е. при $\varepsilon = 0$) системы (2.1), то интегрирование системы уравнений (2.4) (и (2.5)) любого порядка, как это показал Пуанкаре, сводится к квадратурам. Действительно, пусть

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\vartheta;\ \mathbf{a}),$$

где $\mathbf{a}$ — n-мерный вектор, есть общий интеграл уравнения (2.1) при $\varepsilon = 0$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{x}_0(\vartheta;\ \mathbf{a})}{d\vartheta} = \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}_0(\vartheta;\ \mathbf{a});\ 0).$$

Дифференцируя это тождество по $\mathbf{a}$, получаем

$$\frac{d\left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right)}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}.$$

Отсюда следует, что $\partial \mathbf{x}_0 / \partial \mathbf{a}$ есть фундаментальная матрица каждой из однородных систем дифференциальных уравнений (2.4) (или

(2.5)). Тогда решение первой из систем (2.4) (и аналогично (2.5)) с нулевыми начальными условиями $\mathbf{x}_1(\vartheta_0) = \mathbf{0}$ (ибо $\mathbf{x}_0(\vartheta_0; \mathbf{a}) = \mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}_\nu(\vartheta_0) = \mathbf{0}$, $\nu = 1, 2, \ldots$) запишется по методу Лагранжа вариации постоянных в виде

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}\right)_0 d\vartheta, \tag{2.6}$$

где $\partial \mathbf{x}_0/\partial \mathbf{a}$ — неособая матрица в силу того, что решение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\vartheta; \mathbf{a})$ — общее. Для $\mathbf{x}_m$ $(m > 1)$ получатся формулы, аналогичные (2.6), с заменой под знаком интеграла $(\partial \mathbf{f}/\partial \varepsilon)_0$ на неоднородную часть соответствующей системы (2.4) или (2.5).

Для отыскания решения исходной системы (1.1) требуется еще проинтегрировать первое уравнение (1.5) с той же точностью, т. е. до $O(\varepsilon^2)$, если речь идет о первой поправке.

1.3. О колебаниях механической системы с одной степенью свободы при наличии нелинейностей разного вида. Рассматривается механическая система с одной степенью свободы, подверженная действию восстанавливающей силы и силы сопротивления. Обе эти функции предполагаются аналитическими функциями соответственно координаты и скорости. Подчеркнем, что лишь одна из сил—именно сила сопротивления — предполагается «ε-малой» и граница для $\varepsilon > 0$ определяется мажорантным неравенством теоремы Пуанкаре ([107а], т. I, гл. II), вообще говоря, неэффективным. Что касается восстанавливающей силы, то ее нелинейная часть определяет верхнюю границу параметра μ — корня квадратного из начального значения приведенной энергии. Таким образом, предлагаемое в конце п. 1.3 общее решение справедливо для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и для эффективно ограниченных значений начальной энергии системы.

Уравнение движения рассматриваемой системы при подходящем выборе масштаба времени τ может быть записано в виде

$$\ddot{u} + 2\varepsilon F(\dot{u}) + u - U(u) = 0 \qquad \left(\varepsilon > 0, \quad \dot{} = \frac{d}{d\tau}\right), \tag{3.1}$$

где $F(\dot{u})$ и $U(u)$ — аналитические функции во всей области изменения переменных, разложения которых начинаются соответственно с членов не ниже первой и второй степени, кроме того, работа силы сопротивления предполагается отрицательной на любом перемещении: $-F(\dot{u})\,\dot{u} < 0$, что, в частности, выполнено для нечетной функции $F(\dot{u})$. При $\varepsilon = 0$ невозмущенное уравнение (3.1) допускает интеграл энергии

$$H = \dot{u}^2 + u^2 + 2V(u) = \mu^2, \qquad \left(V(u) = -\int\limits_0^u U(u)\,du, \qquad \mu > 0\right). \tag{3.2}$$

Подстановка Ляпунова (1.4) преобразует уравнение (3.1) в систему (1.5) вида

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{d\tau} &= 1 - \frac{1}{\rho}\left[U(\rho\sin\vartheta) - 2\varepsilon F(\rho\cos\vartheta)\right]\sin\vartheta,\\ \frac{d\rho}{d\tau} &= U(\rho\sin\vartheta)\cos\vartheta - 2\varepsilon F(\rho\cos\vartheta)\cos\vartheta.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Предположим для дальнейшего, что для всех ε и ρ в прямоугольнике $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $0 \leqslant \rho \leqslant r_0$ при любом ϑ выполнено неравенство

$$1 - \frac{1}{\rho}\left[U(\rho\sin\vartheta) - 2\varepsilon F(\rho\cos\vartheta)\right]\sin\vartheta > 0. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) вместе с первыми двумя формулами (1.4) определяет допустимую область изменения u, $\dot{u}$. При условии (3.4) разделим второе уравнение (3.3) на первое:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{U(\rho\sin\vartheta)\cos\vartheta - 2\varepsilon F(\rho\cos\vartheta)\cos\vartheta}{1 - \frac{1}{\rho}\left[U(\rho\sin\vartheta) - 2\varepsilon F(\rho\cos\vartheta)\right]\sin\vartheta}. \tag{3.5}$$

Интеграл уравнения (3.5) при $\varepsilon = 0$ найдем, подставив (1.4) в интеграл энергии (3.2); будем иметь

$$\rho^2 + 2V(\rho\sin\vartheta) = \mu^2; \tag{3.6}$$

при этом разложение второго слагаемого начинается с членов не ниже третьей степени ρ. Поскольку $\rho \geqslant 0$, то уравнение (3.6) допускает единственное решение

$$\rho = \rho_0(\vartheta;\mu) = \mu - \frac{1}{\mu}V(\mu\sin\vartheta) + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)_{\rho=\mu} V(\mu\sin\vartheta)\sin\vartheta - \\ - \frac{2}{\mu^3}\left[V(\mu\sin\vartheta)\right]^2 + O(\mu^4) \tag{3.7}$$

для достаточно малых положительных μ (ниже для примера в п. 1.4 будет определен радиус сходимости ряда (3.7)).

Основываясь на теореме Пуанкаре ([107а], т. I, гл. II), будем искать решение уравнения (3.5) для достаточно малых положительных значений ε в виде

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\vartheta;\mu)\,\varepsilon^m. \tag{3.8}$$

В п. 1.2 получена последовательность дифференциальных уравнений (2.4) для определения $\rho_m(\vartheta;\ \mu)$ ($m = 1, 2, \ldots$) (полная система уравнений в вариациях по параметру Пуанкаре). Нас будет интересовать первая поправка $\rho_1(\vartheta;\ \mu)$; дифференциальное уравнение для нее есть уравнение в вариациях по параметру Пуанкаре (первое уравнение (2.4)). Получим его непосредственно.

Записывая уравнение (1.5) в виде

$$\rho' = f(\vartheta, \rho;\ \varepsilon) \qquad \left({}' = \frac{d}{d\vartheta}\right)$$

и вычитая из него тождество

$$\rho_0' = f(\vartheta, \rho_0;\ 0),$$

получаем

$$r' = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_0 r + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 + O(\varepsilon^2) \qquad (r \equiv \rho(\vartheta; \mu) - \rho_0(\vartheta; \mu)), \tag{3.9}$$

где индекс нуль означает, что значения частных производных вычислены при $\rho = \rho_0(\vartheta;\ \mu)$ и $\varepsilon = 0$. Разделив (3.9) на ε и положив затем $\varepsilon = 0$, получим в силу (3.8) уравнение в вариациях по параметру Пуанкаре:

$$\rho_1' = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_0 \rho_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0. \tag{3.10}$$

В рассматриваемом скалярном случае это уравнение интегрируется без труда, хотя и в неудобной для приложений форме. Поэтому предпочтительнее пользоваться способом Пуанкаре ([107а], т. I, гл. II), изложенным в конце п. 1.2. В нашем случае (3.7) является общим интегралом невозмущенного уравнения (3.5) (т. е. при $\varepsilon = 0$):

$$\rho_0' = f(\vartheta,\ \rho_0(\vartheta;\ \mu);\ 0).$$

Продифференцировав это тождество по μ, получим

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial \rho_0}{\partial \mu}\right)}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial \mu},$$

т. е. $\partial\rho_0/\partial\mu$ есть решение однородного уравнения, соответствующего (3.10). Тогда решение уравнения (3.10) с нулевыми начальными условиями

$$\rho_1(\vartheta_0;\ \mu) = 0 \ (\text{ибо}\ \rho_0(\vartheta_0;\ \mu) = \rho^{(0)},\ \rho_m(\vartheta_0;\ \mu) = 0,\ m = 1, 2, \ldots)$$

запишется в виде (2.6)

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho_0}{\partial \mu} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \mu}\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 d\vartheta. \tag{3.11}$$

Из (3.7) и (3.5) найдем

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \mu} = 1 - \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{1}{\mu} V(\mu \sin\vartheta)\right] + O(\mu^2), \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 = -2\left[1 - \frac{1}{\rho_0} U(\rho_0 \sin\vartheta)\sin\vartheta\right]^{-1} F(\rho_0\cos\vartheta) \times$$
$$\times \cos\vartheta\left\{1 + \frac{1}{\rho_0} U(\rho_0\sin\vartheta)\sin\vartheta\left[1 - \frac{1}{\rho_0} U(\rho_0\sin\vartheta)\sin\vartheta\right]^{-1}\right\}. \tag{3.13}$$

Теперь из (1.4), (3.8), (3.7) и (3.11) получим

$$u = [\rho_0(\vartheta;\ \mu) + \varepsilon\rho_1(\vartheta;\ \mu) + O(\varepsilon^2)] \sin\vartheta \tag{3.14}$$

и после определения $\vartheta = \vartheta(\tau;\ \vartheta_0)$ из первого уравнения (3.3) найдем общее решение исходного уравнения (3.1) (с произвольными постоянными μ и ϑ_0) для достаточно малых положительных ε, определяемых условием (3.4) и условием цитированной теоремы Пуанкаре. При этом граница сверху для $\mu > 0$ (корня квадратного из начального значения приведенной энергии (3.2)) определяется радиусом сходимости ряда (3.7).

1.4. Уравнение Дюффинга с линейным демпфированием. Рассмотрим в качестве примера названное уравнение

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u + \alpha u^3 = 0 \qquad (\varepsilon > 0,\ \alpha > 0), \tag{4.1}$$

т. е. (см. (3.1) и (3.2)) $F(\dot{u}) = \dot{u}$, $U(u) = -\alpha u^3$, $V(u) = \frac{1}{4}\alpha u^4$. Условие (3.4) определит область допустимых значений в трехмерном октанте изменения переменных $\rho \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ и параметра $\varepsilon \geqslant 0$

$$1 + \alpha\rho^2 \sin^4\vartheta + \varepsilon \sin 2\vartheta > 0 \tag{4.2}$$

и будет заведомо выполнено при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Интеграл энергии (3.2) невозмущенного ($\varepsilon = 0$) уравнения (4.1) примет вид

$$\rho^2 + \frac{1}{2}\alpha\rho^4 \sin^4\vartheta = \mu^2$$

и при условии $2\alpha\mu^2\sin^4\vartheta < 1$, которое заведомо выполнено при

$$\mu^2 < \frac{1}{2\alpha}, \tag{4.3}$$

допускает единственное решение (3.7)

$$\rho_0(\vartheta, \mu) = \mu\left[1 - \frac{1}{4}\alpha\mu^2 \sin^4\vartheta + O(\mu^4)\right]. \tag{4.4}$$

Вычислим (3.12) и (3.13)

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial\mu} = 1 - \frac{3}{4}\alpha\mu^2\sin^4\vartheta + O(\mu^4),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)_0 =$$

$$= -2\rho_0\cos^2\vartheta(1 + \alpha\rho_0^2\sin^4\vartheta)^{-1}[1 - \alpha\rho_0^2\sin^4\vartheta(1 + \alpha\rho_0^2\sin^4\vartheta)^{-1}] =$$

$$= -2\mu\cos^2\vartheta\left[1 - \frac{9}{4}\alpha\mu^2\sin^4\vartheta + O(\mu^4)\right].$$

Будем искать решение, удовлетворяющее начальным условиям: $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 > 0$, при этом в силу (1.4) и (4.4) $\vartheta_0 = 0$ и $\mu = \dot{u}_0$. Предположим также (см. (4.3)), что $\dot{u}_0 < \sqrt{0{,}5\alpha}$. По формуле (3.11) найдем

$$\rho_1(\vartheta;\mu) = -\mu\Big[\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \frac{1}{4}\alpha\mu^2\Big(-3\vartheta\sin^4\vartheta - \\ -\frac{3}{2}\sin 2\vartheta\sin^4\vartheta - \frac{3}{4}\vartheta + \frac{3}{16}\sin^4\vartheta + \frac{1}{4}\sin^3 2\vartheta\Big) + O(\mu^4)\Big].$$

Из первого уравнения (3.3) найдем

$$\tau = \int_0^{\vartheta}(1 - \alpha\mu^2\sin^4\vartheta - \varepsilon\sin 2\vartheta + \ldots)\,d\vartheta = \\ = \vartheta - \varepsilon\sin^2\vartheta - \alpha\mu^2\left(\frac{1}{32}\sin 4\vartheta - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta + \frac{3}{8}\vartheta\right) + \ldots,$$

где точками обозначены члены порядка ε^2 и $\varepsilon\mu^2$. Обращая последнюю формулу, получаем

$$\vartheta = \tau + \frac{1}{4}\alpha\mu^2\left(\frac{3}{2}\tau - \sin 2\tau + \frac{1}{8}\sin 4\tau\right) + \varepsilon\sin^2\tau + \ldots.$$

Выпишем решение в виде (3.14)

$$u = \left[\mu\left(1 - \frac{1}{4}\alpha\mu^2\sin^4\tau\right) - \varepsilon\mu\left(\tau + \frac{1}{2}\sin 2\tau\right) + O(\varepsilon^2)\right]\times \\ \times\sin\left[\tau + \frac{1}{4}\alpha\mu^2\left(\frac{3}{2}\tau - \sin 2\tau + \frac{1}{8}\sin 4\tau\right) + \varepsilon\sin^2\tau + O(\varepsilon^2)\right] \quad (4.5)$$

для интервала изменения τ порядка $O(\varepsilon^{-1})$.

З а м е ч а н и е. Используя специфику примера, именно линейность демпфирования, можно получить решение, справедливое для всех $\tau > 0$. Подстановка

$$u = e^{-\varepsilon\tau}v$$

приведет уравнение (4.1) к виду

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}; \alpha), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} v \\ \dot v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \dot v \\ -(1-\varepsilon^2)v - \alpha e^{-2\varepsilon\tau}v^3 \end{pmatrix}.$$

Будем искать его общее решение в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\tau) + \alpha\mathbf{x}_1(\tau) + \alpha^2\mathbf{x}_2(\tau) + \ldots$$

Общее решение невозмущенного (т. е. при $\alpha = 0$) уравнения (4.6) при $0 < \varepsilon < 1$ есть

$$\mathbf{x}_0(\tau) = \begin{pmatrix} M\cos R\tau + N\sin R\tau \\ -MR\sin R\tau + NR\cos R\tau \end{pmatrix} \quad (R \equiv \sqrt{1-\varepsilon^2}).$$

Формула (2.8) даст нам для первой поправки

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}} \int_0^\tau \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}\right)_0 d\tau, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор с компонентами M и N, а

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial v_0}{\partial M} & \dfrac{\partial v_0}{\partial N} \\ \dfrac{\partial \dot{v}_0}{\partial M} & \dfrac{\partial \dot{v}_0}{\partial N} \end{matrix} \right\|,$$

и индекс нуль означает подстановку $\alpha = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\tau)$. Опуская очевидные вычисления в формуле (4.7), выпишем общее решение уравнения (4.1) при $0 < \varepsilon < 1$ (нетрудно получить его и для $\varepsilon \geqslant 1$)

$$u = [M \cos R\tau + N \sin R\tau + \alpha v_1(\tau) + O(\alpha^2)]\, e^{-\varepsilon\tau}, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned} v_1(\tau) = \frac{1}{16R} \{&2\,[e^{-2\varepsilon\tau}(-\varepsilon \sin 2R\tau - R\cos 2R\tau) + R] \times \\ &\times [M(M^2 + 3N^2)\cos R\tau - N(N^2 + 3M^2)\sin R\tau] + \\ &+ (4-3\varepsilon^2)^{-1}[e^{-2\varepsilon\tau}(-\varepsilon \sin 4R\tau - 2R\cos 4R\tau) + 2R]\,[M(M^2 - \\ &- 3N^2)\cos R\tau + N(N^2 - 3M^2)\sin R\tau] + \\ &+ (4-3\varepsilon^2)^{-1}[e^{-2\varepsilon\tau}(-\varepsilon\cos 4R\tau + 2R\sin 4R\tau) + \\ &+ \varepsilon]\,[N(N^2 - 3M^2)\cos R\tau - M(M^2 - 3N^2)\sin R\tau] - \\ &- 4\,[e^{-2\varepsilon\tau}(-\varepsilon\cos 2R\tau + R\sin 2R\tau) + \varepsilon]\,(N^3\cos R\tau + \\ &+ M^3 \sin R\tau) + 3(M^2 + N^2)(1 - e^{-2\varepsilon\tau}) \times \\ &\times (N\cos R\tau - M\sin R\tau)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $M = u(0)$, $N = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2}\dot{u}(0)$.

1.5. Пружинный маятник с линейным демпфированием. Рассмотрим плоский пружинный маятник массы m на невесомой пружине длины l в ненапряженном состоянии и подчиняющейся закону Гука с жесткостью c (рис. 9). Пусть x и $y' = l + \lambda + y$ — декартовы координаты массы m, отсчитываемые от точки подвеса O, где $\lambda = \frac{mg}{c}$ — статическое удлинение пружины. Выберем постоянную потенциальной энергии П силы тяжести и упругой силы пружины таким образом, чтобы она обращалась в нуль для положения

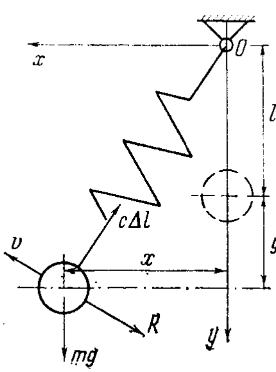

Рис. 9.

статического равновесия $x = y = 0$; тогда

$$\Pi = -mgy + \frac{1}{2}c\,[\sqrt{x^2 + (l + \lambda + y)^2} - l]^2 - \frac{1}{2}c\lambda^2,$$

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right].$$

Допустим, что на массу m действует еще сила сопротивления R, пропорциональная скорости: $R = -bv$. Обозначим через $\omega = \sqrt{c/m}$ круговую частоту вертикальных колебаний массы на пружине и введем безразмерные время $\tau = \omega t$ и координаты $\xi = x/l$, $\eta = y/l$. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \eta - \left[\frac{1 + \gamma + \eta}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \gamma + \eta)^2}} - 1\right] = -2\varepsilon\frac{d\eta}{d\tau},\\ &\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\xi - \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \gamma + \eta)^2}} - \frac{1}{1+\gamma}\right]\xi = -2\varepsilon\frac{d\xi}{d\tau},\end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda}{l}, \quad \varepsilon = +\frac{b}{2\sqrt{cm}}$$

— безразмерные параметры, а разложения квадратных скобок в окрестности $\xi = \eta = 0$ начинаются с членов второй степени. При $\varepsilon = 0$ имеет место интеграл энергии

$$\frac{1}{cl}\sqrt{2(T + \Pi)c} = \mu = \text{const}. \tag{5.2}$$

Подстановка Ляпунова

$$\eta = \rho\sin\vartheta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \rho\cos\vartheta, \quad \xi = \rho z_1, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \rho z_2 \tag{5.3}$$

приведет возмущенную систему (5.1) и интеграл (5.2) невозмущенной системы к виду (1.8) и (1.6)

$$\begin{aligned}&\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{U\cos\vartheta - 2\varepsilon\rho\cos^2\vartheta}{1 - \rho^{-1}U\sin\vartheta + \varepsilon\sin 2\vartheta},\\ &\frac{dz_1}{d\vartheta} = \frac{z_2 - z_1\rho^{-1}U\cos\vartheta + 2\varepsilon z_1\cos^2\vartheta}{1 - \rho^{-1}U\sin\vartheta + \varepsilon\sin 2\vartheta},\\ &\frac{dz_2}{d\vartheta} = \frac{-\gamma(1+\gamma)^{-1}z_1 - z_2\rho^{-1}U\cos\vartheta + \rho^{-1}V - 2\varepsilon z_2\sin^2\vartheta}{1 - \rho^{-1}U\sin\vartheta + \varepsilon\sin 2\vartheta},\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\rho^2\left[1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}z_1^2 + z_2^2 + \rho S(\vartheta, \rho, z_1, z_2)\right] = \mu^2, \tag{5.5}$$

где

$$U = -\frac{\rho^2 z_1^2}{2(1+\gamma)^2} + O(\rho^3), \qquad V = -\frac{\rho^2 z_1\sin\vartheta}{(1+\gamma)^2} + O(\rho^3)$$

и предполагается выполненным условие (1.7), т. е.

$$1 + \varepsilon \sin 2\vartheta + \frac{1}{2}(1+\gamma)^{-2}\rho z_1^2 \sin\vartheta + O(\rho^2) > 0. \tag{5.6}$$

Невозмущенная система (5.4) (т. е. при $\varepsilon = 0$) допускает порождающее решение (см. III, 1, 2.3))

$$\begin{aligned} \rho_0(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) &= \mu\,[1 + g^2(M^2+N^2)]^{-1/2} + O(\mu^2),\\ z_1^0(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) &= M\cos g\vartheta + N\sin g\vartheta + O(\mu),\\ z_2^0(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) &= g(-M\sin g\vartheta + N\cos g\vartheta) + O(\mu), \end{aligned} \tag{5.7}$$

где

$$g = +\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \qquad \left(g \neq \frac{1}{2}\right).$$

Это решение, как показано в п. III, 1.2, является общим при всех γ, кроме $\gamma = \frac{1}{3}$ $\left(g = \frac{1}{2}\right)$. В нашем примере векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}_0$ суть

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mu \\ M \\ N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элементы формулы (2.6):

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}} = \begin{Vmatrix} K^{-1/2} + O(\mu) & -g^2MK^{-3/2}\mu + O(\mu^2) & -g^2NK^{-3/2}\mu + O(\mu^2) \\ \varphi(\vartheta) + O(\mu) & \cos g\vartheta + O(\mu) & \sin g\vartheta + O(\mu) \\ \psi(\vartheta) + O(\mu) & -g\sin g\vartheta + O(\mu) & g\cos g\vartheta + O(\mu) \end{Vmatrix},$$

где

$$K = 1 + g^2(M^2+N^2).$$

При вычислении обратной матрицы несколько огрубим результат, положив $\varphi(\vartheta) = \psi(\vartheta) \equiv 0$; тогда получим для $(\partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{a})^{-1}$ выражение

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} K^{1/2} + O(\mu) & g^2K^{-1}L(\vartheta)\mu + O(\mu^2) & K^{-1}L'(\vartheta)\mu + O(\mu^2) \\ O(\mu) & \cos g\vartheta + O(\mu) & -g^{-1}\sin g\vartheta + O(\mu) \\ O(\mu) & \sin g\vartheta + O(\mu) & g^{-1}\cos g\vartheta + O(\mu) \end{Vmatrix},$$

где $L(\vartheta) \equiv M\cos g\vartheta + N\sin g\vartheta$.

Вектор $(\partial\mathbf{f}/\partial\varepsilon)_0$, где $\mathbf{f}$ — вектор правых частей системы (5.4), а индекс нуль означает подстановку $\varepsilon = 0$ и порождающего решения (5.7), равен

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}\right)_0 = \begin{pmatrix} -2\mu K^{-1/2}\cos^2\vartheta + O(\mu^2) \\ 2L(\vartheta)\cos^2\vartheta - L'(\vartheta)\sin 2\vartheta + O(\mu) \\ -2L'(\vartheta)\sin^2\vartheta + g^2L(\vartheta)\sin 2\vartheta + O(\mu) \end{pmatrix}.$$

Мы положим в формуле (2.6) $\vartheta_0 = 0$; согласно (5.3) это означает, что в начальный момент $\tau = 0$ имеем $\eta(0) = 0$. Опуская очевидные вычисления по формуле (2.6), выпишем нужные нам первые две компоненты вектора $\mathbf{x}_1(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N)$ первой поправки:

$$\rho_1(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) = -\mu K^{-1/2}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right) + O(\mu^2),$$

$$z_1^1(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) = \frac{M}{g}\sin g\vartheta + \frac{1}{2}M\sin 2\vartheta\cos g\vartheta + gM\sin^2\vartheta\sin g\vartheta - \\ - \frac{1}{2}N\sin 2\vartheta\sin g\vartheta - gN\sin^2\vartheta\cos g\vartheta + O(\mu).$$

Остается проинтегрировать первое уравнение (1.5), это нам даст, опять-таки при $\vartheta_0 = 0$,

$$\vartheta = \vartheta(\tau) = \tau + \varepsilon\sin^2\tau + O(\mu) + \ldots,$$

где точками отмечены члены второго порядка относительно μ и ε. Окончательно получим решение системы (5.1) для случая $\eta(0) = 0$ в виде

$$\eta(\tau) = [\rho_0(\vartheta(\tau);\ \mu,\ M,\ N) + \varepsilon\rho_1(\vartheta(\tau);\ \mu,\ M,\ N)]\sin\vartheta(\tau) + O(\varepsilon^2),$$

$$\xi(\tau) = [\rho_0(\vartheta(\tau);\ \mu,\ M,\ N) + \varepsilon\rho_1(\vartheta(\tau);\ \mu,\ M,\ N)] \times \\ \times [z_1^0(\vartheta(\tau);\ \mu,\ M,\ N) + \varepsilon z_1^1(\vartheta(\tau);\ \mu,\ M,\ N)] + O(\varepsilon^2).$$

Постоянные μ (начальное значение энергии (5.2)), M и N определяются из начальных условий $\dot\eta(0)$, $\xi(0)$ и $\dot\xi(0)$; интервал изменения τ имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

§ 2. О системах типа Ляпунова

Определение 1. *Системой, близкой к системе Ляпунова*, называется вещественная система вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{F}(t,\ \mathbf{x},\ \mu), \tag{0.1}$$

обращающаяся при $\mu = 0$ в систему Ляпунова (I, 1, 1.1), т. е.

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{J}_2 + \mathbf{P}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{P} = \| p_{sr} \|_1^n$$

и в которой вектор-функция $\mathbf{F}$ аналитична по $\mathbf{x}$ и малому параметру μ в некоторой области, непрерывна и периодична по t с периодом 2π.

Определение 2. *Системой типа Ляпунова* называется вещественная система вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}), \tag{0.2}$$

в которой матрица $\mathbf{A}$ линейной части системы имеет l нулевых собственных значений с простыми элементарными делителями, два чисто мнимых собственных значения: $\pm\lambda i$, и не имеет собственных значений, кратных $\pm\lambda i$; $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ (как и в (0.1)) — аналитическая вектор-функция $\mathbf{x}$, разложение которой начинается с членов не ниже второго порядка.

В этом параграфе показано, что системы типа Ляпунова могут быть сведены к системам Ляпунова.

2.1. Постановка задачи. Запишем систему типа Ляпунова в развернутом виде при обозначениях, отличающихся от (0.1),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt}=\lambda\mathbf{J}_2\mathbf{y}+\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\quad \frac{d\mathbf{z}}{dt}=\mathbf{B}\mathbf{z}+\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_l\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_m\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_l\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}_2=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{B}=\|b_{jh}\|_1^m$$

и вектор-функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — аналитические функции переменных $\xi_1,\ldots,\xi_l,\eta_1,\eta_2,\zeta_1,\ldots,\zeta_m$ в некоторой окрестности начала координат, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка; среди корней уравнения

$$\det[\mathbf{B}-\varkappa\mathbf{I}_m]=0$$

нет нулевых и кратных величинам $\pm\lambda i$.

Предположим, что система (1.1), кроме ляпуновского скалярного интеграла

$$(\mathbf{y},\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\gamma_0,\tag{1.2}$$

допускает еще l также аналитических первых интегралов, записанных в векторном виде как

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})+\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathbf{c},\tag{1.3}$$

где

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}\pi_1\\ \vdots\\ \pi_l\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_l\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_l\end{pmatrix}.$$

В (1.2) и (1.3) разложения $\psi,\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ начинаются с членов не ниже второго порядка относительно $\xi_1,\ldots,\xi_l,\eta_1,\eta_2,\zeta_1,\ldots$ $\ldots,\zeta_m$; $\pi_1(x),\ldots,\pi_l(x)$ — линейные независимые формы переменных $\xi_1, \ldots, \xi_l$, которые можно выбрать в виде $\pi_j(x) \equiv \xi_j$ $(j = 1, \ldots, l)$; таким образом,

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}. \tag{1.4}$$

2,2. Преобразование системы типа Ляпунова.

Лемма I. *Систему* (1.1) — (1.3) *можно преобразовать так, что вектор-функции* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *и* $\mathbf{f}$ *обращаются в нуль при* $\mathbf{y} = \mathbf{z} = 0$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0, 0) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0, 0) \equiv 0.$$

Доказательство леммы основано на преобразовании Ляпунова ([77а], п. 28) при исследовании критического случая одного нулевого корня. Именно, выполним в (1.1) — (1.3) замену переменных

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{y}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{z}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ — аналитические вектор-функции переменных $\xi_1, \ldots, \xi_l$, не содержащие линейных членов и удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda \mathbf{J}_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x})) = 0,$$
$$\mathbf{B}\mathbf{z}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x})) = 0.$$

В результате замены будем иметь, выделяя новые нелинейные члены $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{w}}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{z}(\mathbf{x})) \equiv \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}),\\
\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{dt} &= \lambda \mathbf{J}_2 \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{z}(\mathbf{x})) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x}) -\\
&\qquad - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}} \equiv \lambda \mathbf{J}_2 \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}), \qquad (2.2)\\
\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{dt} &= \mathbf{B}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{z}(\mathbf{x})) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x})) -\\
&\qquad - \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{B}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}),
\end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \left\| \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_h} \right\|, \qquad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial \xi_h} \right\|$$

суть матрицы порядка $2 \times l$ и $m \times l$ соответственно. Нам требуется доказать, что

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0, 0) = \tilde{v}(\mathbf{x}, 0, 0) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, 0, 0) \equiv 0.$$

Запишем векторный интеграл (1.3) в силу (1.4) и (2.1) в виде

$$\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{y}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{z}(\mathbf{x})) = \mathbf{c} \tag{2.3}$$

и продифференцируем его в силу (2.2)

$$\tilde{u}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{\partial f}{\partial x}\tilde{u}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\lambda J_2\tilde{y} + \tilde{v}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{\partial y}{\partial x}\tilde{u}(x, \tilde{y}, \tilde{z})\right] + \\ + \frac{\partial f}{\partial z}\left[B\tilde{z} + \tilde{w}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{\partial z}{\partial x}\tilde{u}(x, \tilde{y}, \tilde{z})\right] = 0.$$

Положим в этих тождествах $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$ (замечая, что из (2.2) следует $\tilde{v}(x, 0, 0) = -\frac{\partial y}{\partial x}\tilde{u}(x, 0, 0)$, $\tilde{w}(x, 0, 0) = -\frac{\partial z}{\partial x}\tilde{u}(x, 0, 0)$):

$$\left[I_l + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right]\tilde{u}(x, 0, 0) = 0.$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности начала координат ($x = y = z = 0$) $\tilde{u}(x, 0, 0) \equiv 0$. Из (2.2) следует, что в этой же окрестности

$$\tilde{v}(x, 0, 0) = \tilde{w}(x, 0, 0) \equiv 0.$$

Система (2.2) допускает решение $x = \text{const}$, $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$; подставляя его в (2.3), найдем

$$f(x, 0, 0) \equiv 0.$$

Лемма I доказана.

Будем считать, что система (1.1) — (1.3) преобразована согласно лемме I и сохраним для нее прежние обозначения. Разрешим векторный интеграл (1.3) относительно x

$$x = c + f^*(c, y, z), \tag{2.4}$$

где f^* — аналитическая вектор-функция относительно c, y, z ($f^*(c, 0, 0) = 0$), не содержащая линейных членов при $c = 0$.

Подставив (2.4) в (1.1), (1.2), получим векторную систему — систему Ляпунова

$$\frac{dy}{dt} = \lambda J_2 y + v^*(c, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = Bz + w^*(c, y, z), \tag{2.5}$$

и скалярный интеграл

$$(y, y) + \psi^*(c, y, z) = \gamma^*, \tag{2.6}$$

где функции v^*, w^* и ψ^* аналитически зависят от c, y, z и обращаются в нули при $y = z = 0$ (согласно лемме I), а постоянная $\gamma^* = \gamma_0 - \psi(c, 0, 0)$. Вектор-функции v^* и w^* не содержат линейных членов при $c = 0$.

Относительно функции ψ^* справедлива

Лемма II. *Функция* ψ^* *в* (2.6) *при достаточно малом по норме векторе* c *в интеграле* (1.3) *не содержит членов первого порядка относительно* y *и* z.

Доказательство. Пусть

$$\psi^* = (\mathbf{a}, \mathbf{y}) + (\mathbf{b}, \mathbf{z}) + [2],$$

где не выписаны члены порядка выше первого относительно $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, а векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ зависят аналитически от вектора $\mathbf{c}$ и обращаются в нули при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Продифференцируем интеграл (2.6); в силу системы (2.5)

$$(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{J}_2 \mathbf{y}) + (\mathbf{b}, \mathbf{B}\mathbf{z}) + [2] = 0. \tag{2.7}$$

Определитель однородной системы (2.7) относительно $2 + m$ компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ непрерывно зависит от $\mathbf{c}$ и при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ обращается в $\lambda^2 \det \mathbf{B} \neq 0$. Следовательно, при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ имеем $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$. В силу непрерывности, последние равенства должны выполняться и при достаточно малом по норме векторе $\mathbf{c}$.

Лемма II доказана.

Для определения периодических решений в системе Ляпунова (2.5) можно применять метод, предложенный Ляпуновым [77а] и развитый И. Г. Малкиным (см. [79 а, б]). Иной круг вопросов для системы (2.5) исследован в гл. III.

Часть вторая

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ К ЗАДАЧАМ КОЛЕБАНИЙ

Глава V

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В математике проблема приведения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к наиболее простой, нормальной форме с помощью замены переменных была поставлена Пуанкаре [188] и развита Ляпуновым [77а] и др. Наиболее общие результаты в теории нормальных форм получены А. Д. Брюно [234к]; там же читатель найдет и библиографию. В § 1,2 мы излагаем проблему, основываясь на работе [234к], однако, не с общих позиций и не в самых общих ситуациях, а применительно к задачам нелинейных колебаний, описываемых указанными в заголовке системами уравнений. Часть доказательств в § 2 опускается.

§ 1. Первоначальные сведения

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим системы вида

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + \Phi_\nu(\mathrm{x}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где x — вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_n$; $\Phi_\nu(\mathrm{x})$ — аналитические в некоторой окрестности нуля функции, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка; λ_ν — либо вещественные либо комплексносопряженные величины; в последнем случае $\lambda_{\nu'} = \overline{\lambda}_{\nu''}$, $x_{\nu'} = \bar{x}_{\nu''}$, $\Phi_{\nu'} = \overline{\Phi}_{\nu''}$. Итак, здесь предполагается, что исходная вещественная система преобразована таким образом, что ее линейная часть приведена к жордановой форме и, более того, предполагается, что эта форма — *диагональная*. Последнее обстоятельство в силу теоремы Вейерштрасса (см., например, [146], п. I, 1.14) имеет место для колебаний в консервативных системах и близких к ним.

Задача заключается в приведении системы (1.1) посредством обратимого (но, вообще говоря, неоднозначного) преобразования

$$x_\nu = y_\nu + \tilde{x}_\nu(y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ x_\nu(0, \ldots, 0) = 0) \tag{1.2}$$

к простейшей нормальной форме (разложения $\mathfrak{X}_\nu$ начинаются с членов не ниже второго порядка). Именно, в статье А. Д. Брюно [234а] была введена следующая запись преобразованной системы:

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu g_\nu(\mathbf{y}) \equiv \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{\mathbf{Q}\in\mathfrak{M}_\nu} g_{\nu\mathbf{Q}}\mathbf{y}^{\mathbf{Q}} \tag{1.3}$$

$$(\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\tau,\ \nu = 1, \ldots, n),$$

где $\mathbf{Q} = (q_1, \ldots, q_n)^\tau$ — вектор с целочисленными компонентами, $\mathbf{y}^{\mathbf{Q}} = y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n}$; $g_{\nu\mathbf{Q}}$ — искомые коэффициенты. Множество $\mathfrak{M}_\nu$ значений $\mathbf{Q}$ для ν-го уравнения таково:

$$q_1, \ldots, q_{\nu-1}, q_{\nu+1}, \ldots, q_n \geqslant 0, \quad q_\nu \geqslant -1, \quad \sum_1^n q_j \geqslant 1 \tag{1.4}$$

(читателю нужно обратить внимание на множитель y_ν в ν-м уравнении). Введем обозначение $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \bigcup \mathfrak{M}_2 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{M}_n$.

Определение нормальной формы содержится в следующей теореме, которую сформулируем применительно к постановке задачи п. 1.1.

1.2. Основная теорема А. Д. Брюно ([234к], гл. I, § 1, п. I). *Существует обратимое преобразование* (1.2) *системы* (1.1) *в такую систему* (1.3), *что при записи системы в форме* (1.3) $g_{\nu\mathbf{Q}}$ *могут быть отличны от нуля лишь для тех* $\mathbf{Q}$, *для которых выполнено резонансное уравнение*

$$(\Lambda,\ \mathbf{Q}) \equiv \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_n q_n = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\tau$ — вектор из диагональных элементов линейной части системы (1.3) (и (1.1)). Система (1.3), обладающая этим свойством, называется *нормальной формой*.

Доказательство. Докажем, следуя А. Д. Брюно, что существует формальное преобразование (*нормализующее преобразование*)

$$x_\nu = y_\nu[1 + h_\nu(\mathbf{y})], \quad h_\nu(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{Q}\in\mathfrak{M}_\nu} h_{\nu\mathbf{Q}}\mathbf{y}^{\mathbf{Q}} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

системы

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + x_\nu f_\nu(\mathbf{x}), \quad f_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{Q}\in\mathfrak{M}_\nu} f_{\nu\mathbf{Q}}\mathbf{x}^{\mathbf{Q}} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

в систему

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu g_\nu(\mathbf{y}), \quad g_\nu(\mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{Q}\in\mathfrak{M}_\nu \\ (\Lambda,\ \mathbf{Q})=0}} g_{\nu\mathbf{Q}}\mathbf{y}^{\mathbf{Q}} \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{2.4}$$

такое что $g_{\nu\mathbf{Q}} = 0$, если $(\Lambda, \mathbf{Q}) \neq 0$, причем $h_{\nu\mathbf{Q}}$ для $(\Lambda, \mathbf{Q}) = 0$ можно задать произвольно (отсюда и возможность неоднозначности преобразования!); тогда остальные $h_{\nu Q}$ и $g_{\nu Q}$ определятся однозначно. Здесь $y_\nu h_\nu(\mathrm{y})$, $x_\nu f_\nu(\mathrm{x})$ и $y_\nu g_\nu(\mathrm{y})$ — степенные ряды, не содержащие членов ниже второй степени. Преобразование (2.2) переводит (2.3) в (2.4), если выполнены формальные равенства рядов по $y_1, \ldots, y_n$:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial [y_\nu(1+h_\nu)]}{\partial y_l}(\lambda_l y_l + y_l g_l) = \lambda_\nu y_\nu(1+h_\nu) + \\ + y_\nu(1+h_\nu) f_\nu(y_1(1+h_1), \ldots, y_n(1+h_n)) \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Отсюда имеем после очевидных преобразований

$$y_\nu g_\nu + y_\nu \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h_\nu}{\partial y_l} \lambda_l y_l = - y_\nu g_\nu h_\nu - y_\nu \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h_\nu}{\partial y_l} y_l g_l + \\ + y_\nu(1+h_\nu) f_\nu(y_1(1+h_1), \ldots, y_n(1+h_n)) \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Выпишем коэффициенты при $y_\nu \mathrm{y}^{\mathrm{Q}}$ в ν-м равенстве (2.5)

$$g_{\nu Q} + (\Lambda, \mathrm{Q}) h_{\nu Q} = \\ = - \sum_{\mathrm{P}+\mathrm{R}=\mathrm{Q}} h_{\nu \mathrm{P}} g_{\nu \mathrm{R}} - \sum_{l=1}^{n} \sum_{\mathrm{P}+\mathrm{R}=\mathrm{Q}} h_{\nu \mathrm{P}} p_l g_{l \mathrm{R}} + \{(1+h_\nu) f_\nu\}_{\mathrm{Q}} \tag{2.6}$$
$$(\mathrm{Q} \in \mathfrak{M}_\nu;\ \nu = 1, \ldots, n),$$

где последнее слагаемое обозначает коэффициент при y^{Q} в ряде $(1+h_\nu) f_\nu(y_1(1+h_1), \ldots, y_n(1+h_n))$.

Множество n-мерных вещественных векторов вполне упорядочивается следующим соотношением: вектор P предшествует вектору Q ($\mathrm{P} < \mathrm{Q}$), если отрицательна первая ненулевая из последовательных разностей:

$$\sum_{1}^{n} p_j - \sum_{1}^{n} q_j, \qquad p_1 - q_1, \ldots, p_{n-1} - q_{n-1}.$$

Очевидно, что каждому $\mathrm{Q} \in \mathfrak{M}$ предшествует лишь конечное число векторов из $\mathfrak{M}$. Заметим, что в правую часть (2.6) входят только такие $h_{j\mathrm{P}}$ и $g_{j\mathrm{R}}$ ($j = 1, \ldots, n$), что векторы P и R предшествуют вектору Q. Это справедливо для первого и второго слагаемых в правой части (2.6), так как там в индексы входят только такие P и R, что $\Sigma p_j + \Sigma r_j = \Sigma q_j$ и $\Sigma p_j > 0$, $\Sigma q_j > 0$, поэтому $\Sigma p_j < \Sigma q_j$, $\Sigma r_j < \Sigma q_j$. Наконец, $\{(1+h_\nu) f_\nu\}_{\mathrm{Q}}$ содержат лишь такие $h_{j\mathrm{P}}$, что $\Sigma p_j < \Sigma q_j$, так как ряд $x_\nu f_\nu(\mathrm{x})$ не содержит линейных членов. Равенства (2.5) будут выполнены, если положить:

а) $g_{\nu Q} = 0$; $h_{\nu Q} = (\Lambda, \mathrm{Q})^{-1} c_{\nu Q}$ для $(\Lambda, \mathrm{Q}) \neq 0$,

б) $g_{\nu Q} = c_{\nu Q}$; $h_{\nu Q}$ произвольно для $(\Lambda, \mathrm{Q}) = 0$, $\mathrm{Q} \in \mathfrak{M}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$). Здесь $c_{\nu Q}$ обозначает правую часть равенств (2.6)

Таким образом, в указанном выше порядке по Q определяются $g_{\nu Q}$ и $h_{\nu Q}$. Теорема доказана.

Замечание. В силу условия б) только (2.1) приводит к возможности неоднозначности преобразования (2.2). Если (2.1) при $q_1 + \ldots + q_n = m$ выполнено лишь для конечного числа значений исходных параметров системы, то естественно $h_{\nu Q}$ определять по непрерывности, если это представляется возможным.

1.3. Теорема Пуанкаре ([188]). *Если величины* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *системы* (1.1) *удовлетворяют условиям:*

$$1) \qquad \lambda_\nu \neq \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

при любых целых неотрицательных p_j, *для которых* $p_1 + \ldots + p_n \geqslant 2$;

2) *на комплексной плоскости* λ *существует такая, проходящая через нуль, прямая* K, *что все точки* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *лежат по одну сторону от нее,*

то существует единственное обратимое аналитическое в нуле преобразование (1.2), *переводящее систему* (1.1) *в систему*

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Доказательство. Существование единственного формального преобразования (1.2) (которое можно представить и в виде (2.2)) в нормальную форму (3.2) следует из теоремы п. 1.2. Запишем выражение (Λ, Q) в силу (1.4) в виде:

$$(\Lambda, Q) \equiv \sum_{1}^{n} q_j \lambda_j = -\lambda_\nu + \sum_{1}^{n} p_j \lambda_j \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где $p_\nu = q_\nu + 1$, а остальные $p_j = q_j$. Числа $p_1, \ldots, p_n$ неотрицательны и $p_1 + \ldots + p_n \geqslant 2$. По условию (3.1) $(\Lambda, Q) \neq 0$, следовательно, по основной теореме А. Д. Брюно все $g_{\nu Q}$ равны нулю и все $h_{\nu Q}$ определяются однозначно (см. условие а) в конце п. 1.2).

На этом завершим доказательство, отсылая читателя для установления сходимости преобразования (1.2) к концу п. 2.4 (см. также [188]; [96], изд. 1-е).

Замечание. В рассматриваемом здесь вещественном случае спектр $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ симметричен относительно вещественной оси. Таким образом, наряду с прямой K условию 2) будет удовлетворять и прямая $\overline{K}$, симметричная относительно вещественной оси, а значит, и мнимая ось плоскости λ. Поэтому достаточно проверить выполнение условия 2) теоремы для мнимой оси,

§ 2. Дополнительные сведения

2.1. Некоторые свойства нормализующих преобразований. В конце доказательства основной теоремы А. Д. Брюно (п. 1.2) было отмечено, что коэффициенты $h_{\nu Q}$ нормализующего преобразования (1,2.2) однозначно определяются для *нерезонансных членов*, т. е. при $(\Lambda, Q) \neq 0$ и могут быть выбраны произвольно по *резонансным членам*, т. е. при $(\Lambda, Q) = 0$. Вместе с тем, хотя структура нормальной формы фиксирована при заданной нумерации переменных, коэффициенты ее $g_{\nu Q}$ зависят от выбора коэффициентов нормализующего преобразования. Естественно предположить, что последующие преобразования переменных, проведенные только по резонансным членам, будут переводить одну нормальную форму в другую. Таким образом, выясняется смысл теоремы А. Д. Брюно ([234к], гл. I, § 1, п. II):

Если преобразование

$$y_\nu = z_\nu [1 + d_\nu (\mathbf{z})] \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad d_\nu (\mathbf{z}) = \sum_{Q \in \mathfrak{N}_\nu} d_{\nu Q} \mathbf{z}^Q$$

переводит нормальную форму (1,2.4) *в нормальную форму той же структуры, то* $d_{\nu Q} = 0$ *для* $(\Lambda, Q) \neq 0$, *т. е. преобразование* (1.1) *происходит только по резонансным членам* (*т. е. для которых* $(\Lambda, Q) = 0$).

Обозначим через $\xi^0_\nu (\mathbf{y})$ такое преобразование

$$\xi^0_\nu (\mathbf{y}) = y_\nu \Big[1 + \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{N}_\nu \\ (\Lambda, Q) = 0}} h_{\nu Q} \mathbf{y}^Q\Big] \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

рассматриваемое как «произвольная» часть нормализующего преобразования (1,2.2). Будем предполагать, что ряды (1.2) сходятся. Этого можно достичь, в частности, положив в (1.2) все $h_{\nu Q} = 0$, т. е. выбрав

$$\xi^0_\nu (\mathbf{y}) \equiv y_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Из теоремы 3 А. Д. Брюно ([234к], гл. I, § 1, п. III) следует, что при условии сходимости рядов (1.2) из сходимости (или расходимости) некоторого нормализующего преобразования (1,2.2) следует сходимость (или расходимость) всякого нормализующего преобразования (1,2.2).

2.2. Классификация нормальных форм и возможность их интегрирования. Здесь будет рассмотрен случай, когда в (1,1.1)

$$\operatorname{Re} \lambda_j \leqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

т. е. справа от мнимой оси комплексной плоскости λ нет точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Обозначим

$$\lambda_j = -\mu_j + i\nu_j \qquad (i = \sqrt{-1};\ j = 1, \ldots, n)$$

и, предполагая, что имеется l $(0 \leqslant l \leqslant n)$ чисто мнимых сопряженных или нулевых собственных значений матрицы линейной части исходной системы, занумеруем переменные так, что

$$0 = \mu_1 = \ldots = \mu_l < \mu_{l+1} \leqslant \ldots \leqslant \mu_n. \tag{2.2}$$

Введем векторы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix},$$

тогда

$$\Lambda = -\mathbf{M} + i\mathbf{N}. \tag{2.3}$$

Пусть $\mathbf{V} = (v_1, \ldots, v_n)^\tau$ — вектор размерности n; обозначим через $\mathbf{V}' = (v_1, \ldots, v_l)^\tau$ вектор размерности l и через $\mathbf{V}'' = (v_{l+1}, \ldots, v_n)^\tau$ вектор размерности $n - l$. Неравенство $\mathbf{V} \geqslant 0$ означает, что $v_1 \geqslant 0, \ldots, v_n \geqslant 0$. Например, согласно (2.2) имеем $\mathbf{M}' = 0$, $\mathbf{M}'' > 0$.

Теорема А. Д. Брюно ([234к], гл. I, § 2, п. II). *При сделанных предположениях нормальная форма имеет вид*

$$\dot y_j = \lambda_j y_j + \psi_j \qquad (j = 1, \ldots, l), \tag{2.4}$$

$$\dot y_h = \lambda_h y_h + \sum_{j=l+1}^{n} b_{hj} y_j + \sum b_{hq_{l+1}\ldots q_{h-1}} y_{l+1}^{q_{l+1}} \ldots y_{h-1}^{q_{h-1}} \tag{2.5}$$
$$(h = l + 1, \ldots, n).$$

Здесь ψ_j, b_{hj}, $b_{hq_{l+1}\ldots q_{h-1}}$ — *степенные ряды от* $y_1, \ldots, y_l$; $b_{hh} \equiv 0$. Первая сумма в (2.5) берется по тем $j > l$, для которых выполнено (2.7), вторая сумма — по всем целым $q_{l+1}, \ldots, q_{h-1}$, для которых выполнено (2.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В нормальной форме (1,2.4) $g_{\nu Q} \neq 0$, только если $Q \in \mathfrak{N}_\nu$, $(\Lambda, Q) = 0$. Последнее (резонансное) уравнение в силу (2.2) и (2.3) эквивалентно системе двух уравнений

$$(\mathbf{N}, \mathbf{Q}) = 0, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{Q}) \equiv q_{l+1}\mu_{l+1} + \ldots + q_n\mu_n = 0. \tag{2.6}$$

Желая подчеркнуть номер уравнения нормальной формы, к которому относится $\mathbf{Q}$, будем снабжать $\mathbf{Q}$ соответствующим индексом. Второе уравнение (2.6) имеет только такие решения $\mathbf{Q} \in \mathfrak{N}_\nu$, что

$$\mathbf{Q}''_\nu = 0, \quad \text{если } \nu \leqslant l.$$

При $\nu > l$ решения второго уравнения (2.6) (буде они существуют) таковы, что

$$Q''_\nu = e_j - e_\nu, \text{ если } \mu_j = \mu_\nu, \tag{2.7}$$

или

$$Q''_\nu = \sum_{j=l+1}^{m} q_j e_j - e_\nu$$

$$(q_j \geqslant 0,\ l+1 < m < \nu,\ \mu_m < \mu_\nu;\ \sum q_j\mu_j = \mu_\nu). \tag{2.8}$$

Итак, если $\nu \leqslant l$, то $q_{l+1} = \ldots = q_n = 0$, т. е. $y_{l+1}, \ldots, y_n$ входят в ψ_j (см. (2.4)) с нулевыми показателями степени. Следовательно, ψ_j не зависят от y''. Если $\nu > l$, то Q''_ν имеют вид (2.7) и (2.8). Этим Q и отвечают члены, выписанные в (2.5). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи применения доказанной теоремы.

а) Пусть $l = 0$ и $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$. Тогда отсутствует подсистема (2.4) и коэффициенты рядов в (2.5) являются константами, сама же нормальная форма треугольна

$$\dot{y}_\nu = \lambda_\nu y_\nu + \sum b_{\nu q_1 \ldots q_{\nu-1}} y_1^{q_1} \ldots y_{\nu-1}^{q_{\nu-1}}$$

$$(\nu = 1, \ldots, n), \tag{2.9}$$

где сумма берется по всем целым неотрицательным $q_1, \ldots, q_{\nu-1}$ таким, что

$$\lambda_\nu = q_1\lambda_1 + \ldots + q_{\nu-1}\lambda_{\nu-1}$$

$$(q_1 + \ldots + q_{\nu-1} \geqslant 2;\ \nu = 1, \ldots, n). \tag{2.10}$$

Эта нормальная форма была получена Г. Дюляком [348]. Уравнения (2.10) имеют конечное число решений (в условиях теоремы Пуанкаре п. 1.3 — ни одного решения). Поэтому правые части нормальной формы (2.9) являются полиномами. Уравнения (2.9) последовательно решаются в квадратурах.

б) Пусть $\lambda_1 = \ldots = \lambda_l = 0$. Интегрирование нормальной формы (2.4), (2.5) сводится к двум этапам: решению системы l-го порядка (2.4) и последовательным квадратурам, как в случае а).

в) Случай, когда имеется m пар чисто мнимых $(0 < m \leqslant \leqslant {}^1/_2 l)$ и $l - 2m$ нулевых собственных значений λ_j (см. [234к], гл. I, § 2, п. II, стр. 151).

г) Если $l = n$, то теорема не дает никаких упрощений.

2.3. Понятие о степенных преобразованиях. Речь идет о возможности с помощью бирациональных преобразований

$$z_\nu = y_1^{\alpha_{\nu 1}} \ldots y_n^{\alpha_{\nu n}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

$$(\alpha_{\nu j} \text{ — вещественны, } A = \| \alpha_{\nu j} \|_1^n,\ \det A \neq 0)$$

понижать порядок нормальной формы (1,2.4). Каждому коэффициенту $g_{\nu Q} \neq 0$ в (1,2.4) ставится в соответствие точка Q n-мерной целочисленной решетки $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{M}_n$. Множество таких точек обозначается $\mathfrak{D}(\mathrm{G_Q})$, т. е. множество $\mathfrak{D}(\mathrm{G_Q})$ в $\mathfrak{M}$ определяется условиями

$$(\Lambda, \mathrm{Q}) = 0, \qquad \mathrm{Q} \in \mathfrak{M}_\nu, \qquad \mathrm{G_Q} \equiv (g_{1\mathrm{Q}}, \ldots, g_{n\mathrm{Q}})^\tau \neq 0.$$

Обозначим

$$\ln \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix}, \quad \ln \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \ln z_1 \\ \vdots \\ \ln z_n \end{pmatrix}$$

и запишем систему (1,2.4) и преобразование (3.1) соответственно в виде

$$\frac{d \ln \mathbf{y}}{dt} = \Lambda + \sum_{\mathrm{Q} \in \mathfrak{D}(\mathrm{G_Q})} \mathrm{G_Q} \exp(\ln \mathbf{y}, \mathrm{Q}),$$

$$\ln \mathbf{z} = \mathrm{A} \ln \mathbf{y}.$$

При преобразовании (3.1) член $\mathbf{y}^\mathrm{Q}$ преобразуется в

$$\mathbf{y}^\mathrm{Q} = \exp(\ln \mathbf{y}, \mathrm{Q}) = \exp(\mathrm{A}^{-1} \ln \mathbf{z}, \mathrm{Q}) = \exp(\ln \mathbf{z}, \mathrm{A}^{-1*}\mathrm{Q}) = \mathbf{z}^{\mathrm{A}^{-1*}\mathrm{Q}}$$

и поэтому будем иметь

$$\frac{d \ln \mathbf{z}}{dt} = \mathrm{A} \frac{d \ln \mathbf{y}}{dt} = \mathrm{A}\Lambda + \sum_{\mathrm{Q} \in \mathfrak{D}(\mathrm{G_Q})} \mathrm{A} \mathrm{G_Q} \mathbf{z}^{\mathrm{A}^{-1*}\mathrm{Q}}.$$

Введем обозначения

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}^{-1*}\mathrm{Q}, \quad \widetilde{\mathrm{G}}_\mathrm{P} = \mathrm{A}\mathrm{G_Q} \tag{3.2}$$

и запишем последнюю систему в виде

$$\frac{d \ln \mathbf{z}}{dt} = \mathrm{A}\Lambda + \sum_{\mathrm{P} \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathrm{G}}_\mathrm{P})} \widetilde{\mathrm{G}}_\mathrm{P} \mathbf{z}^\mathrm{P}. \tag{3.3}$$

Множество $\mathfrak{D}(\widetilde{\mathrm{G}}_\mathrm{P})$ таких точек P, для которых $\widetilde{\mathrm{G}}_\mathrm{P} \neq 0$, получается из $\mathfrak{D}(\mathrm{G_Q})$ линейным преобразованием (3.2),

$$\mathfrak{D}(\widetilde{\mathrm{G}}_\mathrm{P}) = \mathrm{A}^{-1}\mathfrak{D}(\mathrm{G_Q}).$$

Система (3.3) не обязательно принадлежит к тому же типу, что исходная (имеется в виду аналитичность в окрестности нуля). Но если она аналитична в окрестности нуля и исходная система является нормальной формой, то (3.3) — тоже нормальная форма (при целочисленной матрице A).

Возможность понижения порядка определяется теоремой А. Д. Брюно ([234к], гл. I, § 2, п. I):

Пусть d *— число линейно независимых* $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}$, *удовлетворяющих уравнению* $(\Lambda, \mathbf{Q}) = 0$. *Существует бирациональное преобразование* (3.1) *с целочисленной унимодулярной матрицей* $\mathbf{A}$ ($\alpha_{\nu j}$ *— целые*, $\det \mathbf{A} = \pm 1$), *переводящее нормальную форму* (1,2.4) *в систему* (3.3). *Первые* d *уравнений этой системы образуют систему порядка* d, *а остальные — сводятся к квадратурам.*

Способы эффективного построения матрицы $\mathbf{A}$ приведены в статье [234в].

2.4. Теорема А. Д. Брюно о сходимости и расходимости нормализующих преобразований. Выделим в нормализующем преобразовании (1,2.2) ряды (1.2) по резонансным членам. Сформулируем, следуя [234к] (§ 0, п. II), условия ω, $\overline{\omega}$ и А. Положим

$$\omega_k = \min |(\Lambda, \mathbf{Q})| \quad \text{по} \quad (\Lambda, \mathbf{Q}) \neq 0, \qquad q_1 + \ldots + q_n < 2^k. \tag{4.1}$$

Условие ω:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \omega_k}{2^k} < \infty. \tag{4.2}$$

Условие $\overline{\omega}$:

$$\varlimsup_{k\to\infty} -\frac{\ln \omega_k}{2^k} < \infty.$$

Переходя к условию А, напомним, что всюду здесь предполагаются выполненными неравенства (2.1). Обозначим, как и в п. 2.1, через $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ $(0 \leqslant l \leqslant n)$ те из λ_ν, которые лежат на мнимой оси.

Условие A': *Существует такой степенной ряд* $a\,(y_1, \ldots, y_l)$, *что в* (2.4)

$$\psi_j \equiv \lambda_j y_j a \qquad (j = 1, \ldots, l).$$

Перейдем к условию A''. Будем различать два случая:

1*) числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ попарно соизмеримы,

1**) среди этих чисел есть хоть одна пара несоизмеримых.

Условие A''. *Если* Λ *относится к случаю* 1*, *то в* (2.5) *ряды* b_{hj} $(h, j = l+1, \ldots, n)$ *произвольны, если же* Λ *относится к случаю* 1**), *то существуют еще такие степенные ряды* $a_{l+1}, \ldots, a_n$ *от* $y_1, \ldots, y_l$, *что*:

а) *Если* $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}$, $(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = 0$, *то* $q_{l+1}a_{l+1} + \ldots + q_n a_n \equiv 0$,

б) *Нильпотентна* $(n - l) \times (n - l)$ *матрица*

$$\mathbf{B} = \| b_{hj} - \delta_{hj} (\lambda_h a + a_h) \|_{l+1}^{n}$$

(δ_{hj} — символ Кронекера), *т. е.* $\mathbf{B}^{n-l} \equiv \mathbf{0}$.

Условие А (в рассматриваемом здесь случае выполнения неравенств (2.1)) — *это условия* A' *и* A'' *одновременно.*

Теорема А. Д. Брюно о сходимости и расходимости нормализующих преобразований ([234к], гл. II, III).

1) *Если у сходящейся системы* (1,1.1) Λ *удовлетворяет условию* ω *и некоторая нормальная форма* (1,2.4) *удовлетворяет условию* А, *то преобразование* (1,2.2), *переводящее* (1,1.1) *в* (1,2.4), *является сходящимся тогда и только тогда, когда все ряды* (1.2) *сходятся в некоторой окрестности нуля.*

2) *Если для нормальной формы* (1,2.4) *не выполнено одно или оба из условий* $\overline{\omega}$ *и* А, *то существует такая сходящаяся система* (1,1.1), *для которой система* (1,2.4) *является нормальной формой и всякое преобразование которой к нормальной форме является расходящимся.*

Для примера вернемся к теореме Пуанкаре (п. 1.3) для случая вещественных систем, т. е. когда прямая K — мнимая ось. Очевидно, что условие А в этом случае «пусто» (выполнено автоматически), а (см. (4.1))

$$\omega_k = \min | q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n | > \min | \operatorname{Re} \lambda_\nu | = \mathrm{const} > 0,$$

и тогда в левой части неравенства (4.2) получим также константу, т. е. условие ω выполнено. Поскольку нормализующее преобразование в условиях теоремы Пуанкаре к тому же однозначно, то по п. 1) сформулированной выше теоремы оно сходится в некоторой окрестности нулевых значений.

§ 3. Практический способ вычисления коэффициентов нормализующего преобразования и нормальной формы

3.1. Основные тождества. Допустим, что колебательная система описывается вещественной автономной системой дифференциальных уравнений n-го порядка. Будем предполагать, что эта система приведена к диагональному виду и правая часть ее — аналитическая в некоторой окрестности нулевых значений с комплексными, вообще говоря, коэффициентами

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + \sum a^\nu_{jh} x_j x_h + \sum b^\nu_{jhk} x_j x_h x_k + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \qquad (1.1)$$

Здесь и всюду ниже суммирование ведется по два раза входящим индексам, принимающим значения $1, \ldots, n$, а коэффициенты симметризованы, т. е.

$$a^\nu_{hj} = a^\nu_{jh}, \quad b^\nu_{\{jhk\}} = \text{i. d.}^{1)} \qquad (\nu, j, h, k = 1, \ldots, n)$$

и всюду $\{\alpha\beta \ldots \omega\}$ — любая перестановка чисел $\alpha, \beta, \ldots, \omega$.

По основной теореме А. Д. Брюно (п. 1.2), существует обратимое (но, вообще говоря, неоднозначное и в некоторых случаях —

[1]) idem (то же самое — *лат.*).

расходящееся) нормализующее преобразование с комплексными, вообще говоря, коэффициентами

$$x_j = y_j + \sum \alpha^j_{lm} y_l y_m + \sum \beta^j_{lmp} y_l y_m y_p + \ldots \tag{1.2}$$

$$(\alpha^j_{ml} = \alpha^j_{lm}, \quad \beta^j_{\{lmp\}} = \text{i. d.}; \quad j, l, m, p = 1, \ldots, n),$$

приводящее систему (1.1) к нормальной форме

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{(\Lambda,\, Q)=0} g_{\nu Q} y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Λ и Q — векторы с компонентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ соответственно, при этом последние суть целые числа:

$$q_\nu \geqslant -1, \quad q_j \geqslant 0 \quad (j \neq \nu), \quad q_1 + \ldots + q_n \geqslant 1, \tag{1.4}$$

$g_{\nu Q}$ — общее обозначение для коэффициентов нормальной формы. Суммирование в (1.3) происходит только по *резонансным членам*, удовлетворяющим *резонансному уравнению* (см. (1,2.1))

$$(\Lambda,\ Q) \equiv q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n = 0. \tag{1.5}$$

Симметризуем коэффициенты нормальной формы (1.3) и запишем ее в виде

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + \sum \varphi^\nu_{lm} y_l y_m + \sum \chi^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \ldots \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.3a}$$

$$(\varphi^\nu_{ml} = \varphi^\nu_{lm}, \quad \chi^\nu_{\{lmp\}} = \text{i. d.} \quad \nu, l, m, p = 1, \ldots, n).$$

Разумеется в представлении (1.3а) отличные от нуля коэффициенты φ^ν_{lm}, χ^ν_{lmp}, ... определяются представлением (1.3). Замена (1.2) переводит систему (1.1) в нормальную форму. Ограничиваясь членами до третьей степени переменных включительно, получим формальные тождества (штрих — производная по τ)

$$\begin{aligned} y'_\nu + \sum \alpha^\nu_{lm}(y'_l y_m + y_l y'_m) + \sum \beta^\nu_{lmp}(y'_l y_m y_p + y_l y'_m y_p + y_l y_m y'_p) + \ldots = \\ = \lambda_\nu y_\nu + \lambda_\nu \sum \alpha^\nu_{lm} y_l y_m + \lambda_\nu \sum \beta^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \\ + \sum a^\nu_{jh}\left(y_j + \sum \alpha^j_{lm} y_l y_m\right)\left(y_h + \sum \alpha^h_{lm} y_l y_m\right) + \\ + \sum b^\nu_{jhk} y_j y_h y_k + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \end{aligned}$$

где точками обозначены члены не ниже четвертой степени переменных. В силу (1.3а) будем иметь отсюда

$$\begin{aligned} \sum \varphi^\nu_{lm} y_l y_m + \sum \chi^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \sum \alpha^\nu_{lm}\,[(\lambda_l + \lambda_m)\, y_l y_m + y_m \sum \varphi^l_{jp} y_j y_p + \\ + y_l \sum \varphi^m_{jp} y_j y_p] + \sum \beta^\nu_{lmp}(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p)\, y_l y_m y_p + \ldots = \\ = \lambda_\nu \sum \alpha^\nu_{lm} y_l y_m + \lambda_\nu \sum \beta^\nu_{lmp} y_l y_m y_p + \sum a^\nu_{jh} y_j y_h + \sum a^\nu_{jh} \alpha^h_{lm} y_j y_l y_m + \\ + \sum a^\nu_{jh} \alpha^j_{lm} y_h y_l y_m + \sum b^\nu_{jhk} y_j y_h y_k + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Изменяя индексы суммирования и симметризуя коэффициенты в суммах, получим основные тождества

$$\begin{aligned}&\sum \varphi^{\nu}_{lm} y_l y_m + \sum \chi^{\nu}_{lmp} y_l y_m y_p + \\ &\qquad + \frac{2}{3} \sum (\alpha^{\nu}_{jl} \varphi^{j}_{mp} + \alpha^{\nu}_{jm} \varphi^{j}_{pl} + \alpha^{\nu}_{jp} \varphi^{j}_{lm}) y_l y_m y_p + \\ &+ \sum (\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu) \alpha^{\nu}_{lm} y_l y_m + \sum (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_\nu) \beta^{\nu}_{lmp} y_l y_m y_p + \ldots \\ &\qquad \ldots = \sum a^{\nu}_{lm} y_l y_m + \sum b^{\nu}_{lmp} y_l y_m y_p + \\ &\qquad + \frac{2}{3} \sum (a^{\nu}_{jl} \alpha^{j}_{mp} + a^{\nu}_{jm} \alpha^{j}_{pl} + a^{\nu}_{jp} \alpha^{j}_{lm}) y_l y_m y_p + \ldots \qquad (1.6) \\ &\qquad (\nu = 1, \ldots, n).\end{aligned}$$

3.2. Вычислительная альтернатива. Введем символы

$$\Delta^{\nu}_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m, \\ 0, & \text{если } \lambda_\nu \neq \lambda_l + \lambda_m; \end{cases}$$

$$\Delta^{\nu}_{lmp} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p, \\ 0, & \text{если } \lambda_\nu \neq \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$(\nu, l, m, p = 1, \ldots, n).$$

Имеет место следующая *альтернатива*:

1) Допустим, что значения ν, l, m, p (и реальных параметров исходной колебательной системы, от которых зависят λ_ν, λ_l, λ_m, λ_p) таковы, что круглые скобки в четвертой, а затем в пятой суммах (1.6) отличны от нуля ($\Delta^{\nu}_{lm} = 0$, а затем $\Delta^{\nu}_{lmp} = 0$). Сравнивая члены с произведениями $y_l y_m$, а затем с $y_l y_m y_p$ в левой и правой частях основных тождеств (1.6), заметим, что при сделанном допущении таковой член из первой суммы, а затем из второй суммы слева заведомо отсутствуют. Действительно, обращаясь к представлению (1.3), запишем член с $y_l y_m$ первой суммы в виде

$$y_\nu \varphi^{\nu}_{lm} y_l y_m y_\nu^{-1}.$$

Для этого члена $(\Lambda, Q) = \lambda_l \cdot 1 + \lambda_m \cdot 1 + \lambda_\nu \cdot (-1) \neq 0$ в силу сделанного в начале 1) допущения, а согласно (1.3) в первую сумму слева в (1.6) входят только те члены, для которых $(\Lambda, Q) = 0$. Аналогично устанавливается отсутствие члена с $y_l y_m y_p$ во второй сумме (1.6) при сделанном допущении. Будем иметь, приравнивая в (1.6) коэффициенты при членах второй степени переменных

$$\alpha^{\nu}_{lm} = \frac{a^{\nu}_{lm}}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu}, \qquad (2.2)$$

а затем, при членах третьей степени,

$$\beta^{\nu}_{lmp} = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_\nu}\left\{b^{\nu}_{lmp} + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}\left[a^{\nu}_{jl}\alpha^{j}_{mp} + a^{\nu}_{jm}\alpha^{j}_{pl} + a^{\nu}_{jp}\alpha^{j}_{lm} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (\alpha^{\nu}_{jl}\varphi^{j}_{mp} + \alpha^{\nu}_{jm}\varphi^{j}_{pl} + \alpha^{\nu}_{jp}\varphi^{j}_{lm})\right]\right\}. \qquad (2.3)$$

Подчеркнем, что формулы (2.2) и (2.3), как это уже оговорено, справедливы для тех значений ν, l, m, p из $1, \ldots, n$, для которых знаменатели формул не обращаются в нуль.

2) Допустим, что значения ν, l, m, p (и реальных параметров исходной колебательной системы) таковы, что круглые скобки в четвертой, а затем в пятой суммах (1.6) равны нулю ($\Delta^{\nu}_{lm} = 1$, а затем $\Delta^{\nu}_{lmp} = 1$). Это означает, во-первых, что соответствующие значения α^{ν}_{lm}, а затем β^{ν}_{lmp}, могут быть выбраны любыми, в частности, нулями, или определенными по непрерывности по значениям реальных параметров. Это обстоятельство отмечалось ранее (см. условие б) в конце доказательства основной теоремы А. Д. Брюно, п. 1.2 и начало п. 2.1). Во-вторых, при сделанном допущении имеем $(\Lambda, Q) = 0$. Из сравнения членов с $y_l y_m$, а затем с $y_l y_m y_p$ в левой и правой частях основных тождеств (1.6) теперь определятся симметризованные коэффициенты нормальной формы (1.3а): φ^{ν}_{lm}, а затем χ^{ν}_{lmp}. Будем иметь

$$\varphi^{\nu}_{lm} = \Delta^{\nu}_{lm} a^{\nu}_{lm} \qquad (\nu, l, m = 1, \ldots, n), \qquad (2.4)$$

$$\chi^{\nu}_{lmp} = \Delta^{\nu}_{lmp}\left\{b^{\nu}_{lmp} + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}\left[a^{\nu}_{jl}\alpha^{j}_{mp} + a^{\nu}_{jm}\alpha^{j}_{pl} + a^{\nu}_{jp}\alpha^{j}_{lm} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (\alpha^{\nu}_{jl}\varphi^{j}_{mp} + \alpha^{\nu}_{jm}\varphi^{j}_{pl} + \alpha^{\nu}_{jp}\varphi^{j}_{lm})\right]\right\} \quad (\nu, l, m, p = 1, \ldots, n). \qquad (2.5)$$

Подчеркнем, что формулы (2.4) и (2.5) хотя и получены для случая 2), справедливы при всех значениях индексов, именно в случае 1), они в силу обозначений (2.1) дадут нули для соответствующих значений ν, l, m и p.

Покажем, что если в рамках случая 2) выбрано [1] $\alpha^{\nu}_{lm} = 0$ ($\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m$), то все слагаемые в круглой скобке (2.5) равны нулю. Покажем, например, что $\alpha^{\nu}_{jl}\varphi^{j}_{mp} = 0$ ($j = 1, \ldots, n$). Допустим сначала, что $\Delta^{j}_{mp} = 0$; тогда из (2.4) следует, что $\varphi^{j}_{mp} = 0$ и наше утверждение справедливо. Остается рассмотреть случай $\Delta^{j}_{mp} = 1$, т. е.

$$\lambda_j = \lambda_m + \lambda_p. \qquad (а)$$

---

[1] При таком выборе будем иметь, очевидно, $\Delta^{\nu}_{lm}\alpha^{\nu}_{lm} = 0$ ($\nu, l, m = 1, \ldots, n$).

В нашем случае 2) имеем $\Delta^{\nu}_{lmp} = 1$, т. е.

$$\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p. \tag{б}$$

Вычитая из (б) равенство (а), получим $\lambda_\nu = \lambda_j + \lambda_l$, т. е. $\Delta^{\nu}_{jl} = 1$; в силу обусловленного выбора имеем $\alpha^{\nu}_{jl} = 0$, т. е. опять-таки $\alpha^{\nu}_{jl}\varphi^{j}_{mp} = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Для остальных слагаемых в круглой скобке доказательство аналогично, ибо они получаются из первых слагаемых круговой перестановкой букв.

Итак, *если все произвольные квадратичные коэффициенты нормализующего преобразования выбраны нулями, т. е. если*

$$\alpha^{\nu}_{lm} = 0 \quad \textit{при} \quad \Delta^{\nu}_{lm} = 1,$$

или если квадратичные члены в нормальной форме отсутствуют, то формула (2.5) *упростится*

$$\chi^{\nu}_{lmp} = \Delta^{\nu}_{lmp}\left\{b^{\nu}_{lmp} + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}[a^{\nu}_{jl}\alpha^{j}_{mp} + a^{\nu}_{jm}\alpha^{j}_{pl} + a^{\nu}_{jp}\alpha^{j}_{lm}]\right\} \tag{2.6}$$

$$(\nu, l, m, p = 1, \ldots, n).$$

Общая процедура определения коэффициентов нормализующего преобразования и нормальной формы содержится в доказательстве основной теоремы А. Д. Брюно (п. 1.2). Предлагаемый здесь способ представляется нам предпочтительным для приложений в задачах колебаний, почему он и назван *практическим*.

3.3. Основные тождества в общем виде и их преобразование. Унифицируя обозначения в исходной системе диагонального вида (1.1), нормализующем преобразовании (1.2) и нормальной форме (1.3а), запишем их соответственно в виде

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + \sum a^{\nu}_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} + \ldots + \sum a^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa} x_{j_1}\ldots x_{j_\varkappa} + \ldots$$
$$(\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

$$x_\nu = y_\nu + \sum \alpha^{\nu}_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} + \ldots + \sum \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$
$$(\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.2}$$

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + \sum \varphi^{\nu}_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} + \ldots + \sum \varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$
$$(\nu = 1, \ldots, n). \tag{3.3}$$

Напомним, что коэффициенты всюду симметризованы, т. е. не изменяются при произвольной перестановке нижних индексов:

$$a^{\nu}_{(j_1\ldots j_\varkappa)} = \text{i. d.}, \quad \alpha^{\nu}_{(j_1\ldots j_\varkappa)} = \text{i. d.}, \quad \varphi^{\nu}_{(j_1\ldots j_\varkappa)} = \text{i. d.} \tag{3.4}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n;\ \varkappa = 2, 3, \ldots),$$

а суммирование там, где не обозначено, происходит по два раза входящим индексам от 1 до n независимо один от другого.

Будем употреблять и свернутую запись

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum a^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} x_{j_1} \ldots x_{j_\varkappa} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.1a}$$

$$x_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum \alpha^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.2a}$$

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum \varphi^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.3a}$$

где

$$a^\nu_j = \lambda_\nu \delta_{\nu j}, \quad \alpha^\nu_j = \delta_{\nu j}, \quad \varphi^\nu_j = \lambda_\nu \delta_{\nu j}, \tag{3.5}$$

а $\delta_{\nu j}$ — символ Кронекера: $\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{\nu j} = 0$ $(j \neq \nu)$. Подставляя (3.2) в (3.1), получим в силу (3.3) следующие формальные тождества (основные тождества в общем виде)

$$\lambda_\nu y_\nu + \sum \varphi^\nu_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} + \ldots + \sum \varphi^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$
$$\ldots + \sum \alpha^\nu_{j_1 j_2} (\dot y_{j_1} y_{j_2} + y_{j_1} \dot y_{j_2}) + \ldots + \sum \alpha^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} (\dot y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$
$$\ldots + y_{j_1} \ldots y_{j_{\mu-1}} \dot y_{j_\mu} y_{j_{\mu+1}} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots + y_{j_1} \ldots y_{j_{\varkappa-1}} \dot y_{j_\varkappa}) + \ldots =$$
$$= \lambda_\nu y_\nu + \lambda_\nu \sum \alpha^\nu_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} + \ldots + \lambda_\nu \sum \alpha^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$
$$\ldots + \sum a^\nu_{j_1 j_2} \Big(\sum \alpha^{j_1}_{j^1_1} y_{j^1_1} + \ldots + \sum \alpha^{j_1}_{j^1_1 \ldots j^1_\theta} y_{j^1_1} \ldots y_{j^1_\theta} + \ldots$$
$$\ldots + \sum \alpha^{j_1}_{j^1_1 \ldots j^1_{k-1}} y_{j^1_1} \ldots y_{j^1_{k-1}} + \ldots\Big) \Big(\sum \alpha^{j_2}_{j^2_1} y_{j^2_1} + \ldots$$
$$\ldots + \sum \alpha^{j_2}_{j^2_1 \ldots j^2_\theta} y_{j^2_1} \ldots y_{j^2_\theta} + \ldots + \sum \alpha^{j_2}_{j^2_1 \ldots j^2_{k-1}} y_{j^2_1} \ldots y_{j^2_{k-1}}\Big) + \ldots$$
$$\ldots + \sum a^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} \Big(\sum \alpha^{j_1}_{j^1_1} y_{j^1_1} + \ldots + \sum \alpha^{j_1}_{j^1_1 \ldots j^1_\theta} y_{j^1_1} \ldots y_{j^1_\theta} + \ldots$$
$$\ldots + \sum \alpha^{j_1}_{j^1_1 \ldots j^1_{k-\varkappa+1}} y_{j^1_1} \ldots y_{j^1_{k-\varkappa+1}} + \ldots\Big) \times \ldots$$
$$\ldots \times \Big(\sum \alpha^{j_\varkappa}_{j^\varkappa_1} y_{j^\varkappa_1} + \ldots + \sum \alpha^{j_\varkappa}_{j^\varkappa_1 \ldots j^\varkappa_\theta} y_{j^\varkappa_1} \ldots y_{j^\varkappa_\theta} + \ldots$$
$$\ldots + \sum \alpha^{j_\varkappa}_{j^\varkappa_1 \ldots j^\varkappa_{k-\varkappa+1}} y_{j^\varkappa_1} \ldots y_{j^\varkappa_{k-\varkappa+1}} + \ldots\Big) + \ldots$$
$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Выпишем в этих тождествах члены с k-й степенью переменных, учитывая (3.3),

$$\sum \varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{\varkappa}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa} a^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1}\ldots y_{j_{\mu-1}} y_{j_{\mu+1}}\ldots y_{j_\varkappa}\times$$

$$\times \sum_{j^{\mu}_1,\ldots,j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} \varphi^{j_\mu}_{j^{\mu}_1\ldots j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} y_{j^{\mu}_1}\ldots y_{j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} +$$

$$+\sum(\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_k})\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} = \lambda_\nu \sum \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} +$$

$$+\sum_{\varkappa=2}^{k-1}\sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa} a^{\nu}_{i_1\ldots i_\varkappa}\sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k}\sum_{j^1_1,\ldots,j^{\varkappa}_{\mu_\varkappa}} \alpha^{i_1}_{j^1_1\ldots j^1_{\mu_1}}\ldots\alpha^{i_\varkappa}_{j^{\varkappa}_1\ldots j^{\varkappa}_{\mu_\varkappa}}\times$$

$$\times y_{j^1_1}\ldots y_{j^1_{\mu_1}}\ldots y_{j^{\varkappa}_1}\ldots y_{j^{\varkappa}_{\mu_\varkappa}} + \sum a^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k}\quad (\nu=1,\ldots,n), \tag{3.6}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$ — натуральные числа.

Теперь мы хотим сравнить коэффициенты при $y_{j_1}\ldots y_{j_k}$, где $j_1, \ldots, j_k$ — любая фиксированная последовательность из натуральных чисел, не превышающих n. При этом образовавшиеся в ходе вычислений несимметричные коэффициенты должны быть симметризованы, ибо определяемые коэффициенты подчинены условиям (3.4). Во втором члене слева тождеств (3.6) в каждом слагаемом суммы $\sum\limits_{\mu=1}^{\varkappa}$ заменим индексы суммирования следующим образом: $j_1, \ldots, j_{\mu-1}, j_{\mu+1}, \ldots, j_\varkappa$ соответственно на $i_1, \ldots, i_{\varkappa-1}$; индекс j_μ заменим на i, индексы $j^{\mu}_1, \ldots, j^{\mu}_{k-\varkappa+1}$ заменим соответственно на $i_\varkappa, i_{\varkappa+1}, \ldots, i_k$. Становится очевидным, что все слагаемые суммы $\sum\limits_{\mu=1}^{\varkappa}$ одинаковы и поэтому представим эту сумму как $\varkappa$ раз взято одно из слагаемых. Для симметризации последнего рассмотрим все сочетания $p_1, \ldots, p_{\varkappa-1}$ по $\varkappa-1$ натуральных чисел из $1, \ldots, k$ (их число обозначим $C^{\varkappa-1}_k$). Наконец индексы суммирования $i_{p_1}, \ldots, i_{p_{\varkappa-1}}$ обозначим через $j_{p_1}, \ldots, j_{p_{\varkappa-1}}$, а оставшиеся из индексов $i_1, \ldots, i_k$ обозначим через $j'_\varkappa, j'_{\varkappa+1}, \ldots, j'_k$.

Итак, мы проделали преобразования

$$\sum_{\mu=1}^{\varkappa}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa;\, j^{\mu}_1,\ldots,j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}\varphi^{j_\mu}_{j^{\mu}_1\ldots j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} y_{j_1}\ldots y_{j_{\mu-1}}\times$$

$$\times y_{j_{\mu+1}}\ldots y_{j_\varkappa} y_{j^{\mu}_1}\ldots y_{j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} = \varkappa\sum_{i_1,\ldots,i_k;\, i}\alpha^{\nu}_{i_1\ldots i_{\varkappa-1} i}\varphi^{i}_{i_\varkappa\ldots i_k} y_{i_1}\ldots y_{i_k} =$$

$$=\varkappa\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_k}\frac{1}{C^{\varkappa-1}_k} S^{p_1,\ldots,p_{\varkappa-1}}_{1,\ldots,k}\alpha^{\nu}_{j_{p_1}\ldots j_{p_{\varkappa-1}} i}\varphi^{i}_{j'_\varkappa\ldots j'_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k}\qquad (\nu=1,\ldots,n). \tag{3,7}$$

Здесь $S^{p_1, \ldots, p_{\varkappa-1}}_{1, \ldots, k}$ обозначает суммирование по всем сочетаниям по $\varkappa - 1$ натуральных чисел из $1, \ldots, k$. Заметим, что числа $j_{p_1}, \ldots \ldots, j_{p_{\varkappa-1}}$ могут быть (и притом даже все) одинаковы, ибо они (впрочем, как и $j'_\varkappa, j'_{\varkappa+1}, \ldots, j'_k$) пробегают при суммировании значения $1, \ldots, n$ независимо друг от друга. Что же касается индексов у i или у j, то все они различны — вот почему типом соединений являются сочетания.

Перейдем к преобразованию второго члена справа в (3.6). Заменим индексы суммирования $j_1^1, \ldots, j_{\mu_1}^1, \ldots, j_1^\varkappa, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa$ $(\mu_1 + \ldots + \mu_\varkappa = k)$ на $j_1, \ldots, j_k$. Для симметризации коэффициента при $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$ рассмотрим все сочетания $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ по μ_1 натуральных чисел из $1, \ldots, k$ (их число обозначим $C_k^{\mu_1}$), затем все сочетания $p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}$ по μ_2 натуральных чисел из оставшихся $k - \mu_1$ натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ (их число обозначим $C_{k-\mu_1}^{\mu_2}$) и т. д. вплоть до сочетаний $p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1}, \ldots \ldots, p_{k-\mu_\varkappa}$ по $\mu_{\varkappa-1}$ из оставшихся $\mu_{\varkappa-1} + \mu_\varkappa$ натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}, p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}}$ (их число обозначим $C^{\mu_{\varkappa-1}}_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}$). Итак, мы проделали преобразование

$$\sum_{j_1^1, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa} a^{i_1}_{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1} \ldots a^{i_\varkappa}_{j_1^\varkappa \ldots j_{\mu_\varkappa}^\varkappa} y_{j_1^1} \ldots y_{j_{\mu_1}^1} \ldots y_{j_1^\varkappa} \ldots y_{j_{\mu_\varkappa}^\varkappa} =$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_k} \frac{1}{C_k^{\mu_1} C_{k-\mu_1}^{\mu_2} \ldots C^{\mu_{\varkappa-1}}_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}} S^{p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1}, \ldots, p_{k-\mu_\varkappa}}_{1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}}} \times \ldots$$

$$\ldots \times S^{p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}}_{1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}} S^{p_1, \ldots, p_{\mu_1}}_{1, \ldots, k} a^{i_1}_{j_{p_1} \ldots j_{p_{\mu_1}}} a^{i_2}_{j_{p_{\mu_1+1}} \ldots j_{p_{\mu_1+\mu_2}}} \times \ldots$$

$$\ldots \times a^{i_{\varkappa-1}}_{j_{p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1}} \ldots j_{p_{k-\mu_\varkappa}}} a^{i_\varkappa}_{j_{p_{k-\mu_\varkappa+1}} \ldots j_{p_k}} y_{j_1} \ldots y_{j_k}. \qquad (3.8)$$

Здесь $S^{p_1, \ldots, p_{\mu_1}}_{1, \ldots, k}$ обозначает суммирование по всем сочетаниям по μ_1 натуральных чисел $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ из $1, \ldots, k$; $S^{p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}}_{1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}}$ — суммирование по всем сочетаниям по μ_2 натуральных чисел $p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}$ из оставшихся $k - \mu_1$ натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ и т. д.

Теперь, используя (3.7) и (3.8), запишем (3.6) в симметризованном виде

$$\sum \varphi^\nu_{j_1 \ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \frac{\varkappa}{C_k^{\varkappa-1}} S^{p_1, \ldots, p_{\varkappa-1}}_{1, \ldots, k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_k=1}^{n} a^\nu_{j_{p_1} \ldots j_{p_{\varkappa-1}} i} \times$$

$$\times \varphi^i_{j'_\varkappa \ldots j'_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} + \sum (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu) a^\nu_{j_1 \ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} =$$

$$= \sum a^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa=1}^{n} a^{\nu}_{i_1\ldots i_\varkappa} \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \times$$

$$\times \frac{1}{C_k^{\mu_1} C_{k-\mu_1}^{\mu_2}\ldots C_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}^{\mu_{\varkappa-1}}} S_{1,\ldots,k\setminus p_1,\ldots,p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}}}^{p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1},\ldots,p_{k-\mu_\varkappa}} \ldots S_{1,\ldots,k\setminus p_1,\ldots,p_{\mu_1}}^{p_{\mu_1+1},\ldots,p_{\mu_1+\mu_2}} \times$$

$$\times S_{1,\ldots,k}^{p_1,\ldots,p_{\mu_1}} a^{i_1}_{j_{p_1}\ldots j_{p_{\mu_1}}} a^{i_2}_{j_{p_{\mu_1+1}},\ldots,j_{p_{\mu_1+\mu_2}}} \times \ldots$$

$$\ldots \times a^{i_{\varkappa-1}}_{j_{p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1}}\ldots j_{p_{k-\mu_\varkappa}}} a^{i_\varkappa}_{j_{p_{k-\mu_\varkappa+1}}\ldots j_{p_k}} y_{j_1}\ldots y_{j_k} \qquad (3.9)$$

$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

3.4. Вычислительная альтернатива в общем случае. Введем символ

$$\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_\nu = \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k}, \\ 0, & \text{если } \lambda_\nu \neq \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} \end{cases} \qquad (4.1)$$

$$(\nu, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n).$$

Справедлива следующая *альтернатива*.

1) Допустим, что значения ν, j_1, ..., j_k (и реальных параметров исходной колебательной системы, от которых зависят λ_ν, λ_{j_1}, ..., λ_{j_k}) таковы, что круглая скобка в последней сумме левой части тождеств (3.9) отлична от нуля, т. е. $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = 0$. Сравнивая члены с $y_{j_1}\ldots y_{j_k}$ в левой и правой частях тождеств (3.9), замечаем, что при нашем допущении соответствующий член из первой суммы слева заведомо отсутствует. Действительно, обращаясь к представлению (1.3), запишем член с $y_{j_1}\ldots y_{j_k}$ в виде

$$y_\nu \cdot \varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} y_\nu^{-1}.$$

Для этого члена $(\Lambda, Q) = \lambda_{j_1}\cdot 1 + \ldots + \lambda_{j_k}\cdot 1 + \lambda_\nu\cdot(-1) \neq 0$, а согласно представлению (1.3) в первую сумму слева (3.9) входят только члены, для которых $(\Lambda, Q) = 0$.

Приравнивая в тождествах (3.9) коэффициенты при $y_{j_1}\ldots$ $\ldots y_{j_k}$, получим формулу для коэффициентов нормализующего преобразования (3.2):

$$a^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = \frac{1 - \Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}}{\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu} B^{\nu}_{j_1\ldots j_k} \qquad (4.2)$$

$$(\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu \neq 0;\ \nu, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n),$$

где

$$B^{\nu}_{j_1\ldots j_k}=a^{\nu}_{j_1\ldots j_k}+\sum_{\varkappa=2}^{k-1}\Bigg(\sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa=1}^{n}a^{\nu}_{i_1\ldots i_\varkappa}\sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k}\frac{1}{C_k^{\mu_1}C_{k-\mu_1}^{\mu_2}\ldots C_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}^{\mu_{\varkappa-1}}}\times$$
$$\times S^{p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1},\ldots,p_{k-\mu_\varkappa}}_{1,\ldots,k\setminus p_1,\ldots,p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{k-1}}}\ldots S^{p_{\mu_1+1}\ldots p_{\mu_1+\mu_2}}_{1,\ldots,k\setminus p_1,\ldots,p_{\mu_1}}\times$$
$$\times S^{p_1,\ldots,p_{\mu_1}}_{1,\ldots,k}\alpha^{i_1}_{j_{p_1}\ldots j_{p_{\mu_1}}}\alpha^{i_2}_{j_{p_{\mu_1+1}}\ldots j_{p_{\mu_1+\mu_2}}}\ldots\alpha^{i_{\varkappa-1}}_{j_{p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1}}\ldots j_{p_{k-\mu_\varkappa}}}\times$$
$$\times\alpha^{i_\varkappa}_{j_{p_{k-\mu_\varkappa+1}}\ldots j_{p_k}}-\frac{\varkappa}{C_k^{\varkappa-1}}S^{p_1,\ldots,p_{\varkappa-1}}_{1,\ldots,k}\sum_{i=1}^{n}\alpha^{\nu}_{j_{p_1}\ldots j_{p_{\varkappa-1}}i}\varphi^{i}_{j'_\varkappa j'_{\varkappa+1}\ldots j'_k}\Bigg)\qquad(4.3)$$
$$(\nu,j_1,\ldots,j_k=1,\ldots,n).$$

2) Допустим, что значения ν, $j_1,\ldots,j_k$ (и реальных параметров исходной колебательной системы, от которых зависят λ_ν, $\lambda_{j_1},\ldots$ $\ldots,\lambda_{j_k}$) таковы, что круглая скобка в последней сумме левой части тождеств равна нулю, т. е. $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}=1$. Это означает, во-первых, что величина $\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ может быть выбрана любой, в частности, равной нулю или определенной по непрерывности по значениям реальных параметров. Во-вторых, сравнивая члены с $y_{j_1}\ldots$ $\ldots y_{j_k}$ в левой и правой частях тождеств (3.8), получим теперь формулу для симметризованных коэффициентов нормальной формы

$$\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k}=\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}B^{\nu}_{j_1\ldots j_k}\qquad(\nu,j_1,\ldots,j_k=1,\ldots,n).\qquad(4.4)$$

Резюме. $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ в обеих формулах играет роль «сторожа». Действительно, по формуле (4.4) при $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}=0$ имеем $\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k}=$ $=0$ (случай 1)). При $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}=1$ $(\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_k}-\lambda_\nu=0)$ дробь перед квадратной скобкой в формуле (4.2) теряет смысл, превращаясь в неопределенность — мы хотели напомнить читателю, что при этом значение $\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ может быть выбрано любым.

Поясним еще раз обозначения в формуле (4.3). Величины $a^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ (и $a^{\nu}_{i_1\ldots i_\varkappa}$), $\alpha^{i}_{j_p\ldots j_q}$, $\varphi^{i}_{j'_\varkappa,\ldots,j'_k}$ суть симметризованные коэффициенты исходной системы диагонального вида (3.1), нормализующего преобразования (3.2) и нормальной формы (3.3), при этом $\alpha^j_h=\delta_{jh}$, $\varphi^j_h=\lambda_j\delta_{jh}$ (δ_{jh} — символ Кронекера). Формулы (4.2) и (4.4) рекуррентные — величины α и φ, в них входящие, суть коэффициенты до $(k-1)$-х степеней включительно. Числа $\mu_1,\ldots,\mu_{k-1}$—натуральные, C^l_m — число сочетаний из m элементов по l; $S^{p_1,\ldots,p_{\mu_1}}_{1,\ldots,k}$ означает суммирование по всем сочетаниям $p_1,\ldots$ $\ldots,p_{\mu_1}$ по μ_1 натуральных чисел из $1,\ldots,k$; $S^{p_{\mu_1+1},\ldots,p_{\mu_1+\mu_2}}_{1,\ldots,k\setminus p_1,\ldots,p_{\mu_1}}$ означает суммирование по всем сочетаниям $p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}$ по μ_2 натуральных чисел из оставшихся $k - \mu_1$ натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ и т. д. Наконец, через $j'_\varkappa, j'_{\varkappa+1}, \ldots, j'_k$ обозначены оставшиеся из индексов $j_1, \ldots, j_k$ за вычетом индексов $j_{p_1}, \ldots, j_{p_{\varkappa-1}}$.

3.5. Замечание о переходе от симметризованных коэффициентов к обычным. Пусть индексы $j_1, \ldots, j_k$ (принимающие, вообще говоря, значения из $1, \ldots, n$ независимо друг от друга) расположены так, что первые χ $(1 \leqslant \chi \leqslant k)$ различны и пусть j_1 встречается m_{j_1} раз, ..., j_χ встречается m_{j_χ} раз $(m_{j_1} + \ldots + m_{j_\chi} = k)$. Число N различных размещений этих индексов равно

$$N = \frac{k!}{m_{j_1}! \ldots m_{j_\chi}!}. \tag{5.1}$$

Это означает, что в сумме

$$\sum_{j_1, \ldots, j_k=1}^{n} a^{\nu}_{j_1 \ldots j_k} x_{j_1} \ldots x_{j_k}$$

будет всего N подобных членов, содержащих $x_{j_1} \ldots x_{j_k}$. Поэтому N и есть множитель при переходе от симметризованных коэффициентов к обычным, т. е. когда все одночлены в сумме различны.

3.6. Формулы для коэффициентов при четвертых степенях. При $k = 4$ формула (4.2) даст

$$B^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} = a^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (S a^{\nu}_{j_1i} \alpha^{i}_{j_2j_3j_4} - S \alpha^{\nu}_{j_1i} \varphi^{i}_{j_2j_3j_4} + S a^{\nu}_{j_1j_2i} \alpha^{i}_{j_3j_4} -$$

$$- S \alpha^{\nu}_{j_1j_2i} \varphi^{i}_{j_3j_4}) + \frac{1}{6} \sum_{i,\,h=1}^{n} S a^{\nu}_{jih} \alpha^{i}_{j_1j_2} \alpha^{h}_{j_3j_4} \qquad (\nu, j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \ldots, n).$$

Здесь S означает сумму по всем сочетаниям индексов у j в первом сомножителе из чисел 1, 2, 3, 4. Для первых двух сумм это сводится к круговой перестановке индексов j_1, j_2, j_3, j_4, для остальных сумм у первых сомножителей индексы $j_1 j_2$ заменяются последовательно на $j_1j_3, j_1j_4, j_2j_3, j_2j_4, j_3j_4$. Будем иметь для симметризованных коэффициентов нормализующего преобразования (1.2) по формуле (4.1)

$$\alpha^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} = \frac{1 - \Delta^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4}}{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} + \lambda_{j_4} - \lambda_\nu} B^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} \qquad (\nu, j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \ldots, n),$$

где $\Delta^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4}$ определены в (4.1). При $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} + \lambda_{j_4} - \lambda_\nu = 0$ соответствующие $\alpha^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4}$ могут быть выбраны любыми. Наконец, формула (4.4) даст симметризованные коэффициенты нормальной формы (3.3а)

$$\varphi^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} = \Delta^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} B^{\nu}_{j_1j_2j_3j_4} \qquad (\nu, j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \ldots, n).$$

3.7. Случай непростых элементарных делителей матрицы линейной части. Предположим, что линейная часть произвольной автономной аналитической системы обыкновенных дифференциальных уравнений приведена к жордановой форме

$$\frac{dx_\nu}{dt}=\lambda_\nu x_\nu+\delta_\nu x_{\nu+1}+\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum a^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}x_{j_1}\ldots x_{j_\varkappa} \tag{7.1}$$

$$(\nu=1,\ldots,n;\ \delta_n=0).$$

Вектор $\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ предполагается имеющим хотя бы одну ненулевую компоненту; $\delta_1,\ldots,\delta_{n-1}$ равны нулю или единице соответственно при отсутствии или наличии непростых элементарных делителей. Все коэффициенты степенных рядов (равно как и $\lambda_1,\ldots$ $\ldots,\lambda_n$) предполагаются комплексными числами, а сами ряды — сходящимися в некоторой окрестности начала координат. Коэффициенты при степенях выше первой предполагаются симметризованными (см. п. 3.3). Нормализующее преобразование представим в симметризованной форме (3.2). Оно приводит систему (7.1) к нормальной форме А. Д. Брюно ([234к], § 0, п. II и гл. I, § 1, п. I)[1])

$$\frac{dy_\nu}{dt}=\lambda_\nu y_\nu+\delta_\nu y_{\nu+1}+y_\nu\sum_{(\Lambda,Q)=0}g_{\nu Q}y_1^{q_1}\ldots y_n^{q_n} \tag{7.2}$$

$$(\nu=1,\ldots,n;\ \delta_n=0)$$

или, в симметризованной форме (все обозначения см. в п. 3.3.),

$$\frac{dy_\nu}{dt}=\lambda_\nu y_\nu+\delta_\nu y_{\nu+1}+\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa} \tag{7.3}$$

$$(\nu=1,\ldots,n;\ \delta_n=0).$$

Подставляя (3.2) и (7.1), получим в силу (7.3) аналогично началу п. 3.4 формальные тождества

$$\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa}+\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}\sum_{\mu=1}^{\varkappa}\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}y_{j_1}\ldots y_{j_{\mu-1}}\dot y_{j_\mu}y_{j_{\mu+1}}\ldots y_{j_\varkappa}=$$

$$=\lambda_\nu\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa}+\delta_\nu\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}\alpha^{\nu+1}_{j_1\ldots j_\varkappa}y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa}+$$

$$+\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}a^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}\prod_{\mu=1}^{\varkappa}\left(\sum_{\varkappa_\mu=1}^{\infty}\sum_{j_1^\mu,\ldots,j^\mu_{\varkappa_\mu}}\alpha^{j_\mu}_{j_1^\mu\ldots j^\mu_{\varkappa_\mu}}y_{j_1^\mu}\ldots y_{j^\mu_{\varkappa_\mu}}\right)$$

$$(\nu=1,\ldots,n;\ \delta_n=0).$$

---

[1]) В записи А. Д. Брюно в жордановой клетке единицы расположены ниже главной диагонали, в нашей записи — выше.

Выпишем в этих тождествах члены с k-й степенью переменных; учитывая (7.3), будем иметь аналогично (4.1)

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k} \varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\cdots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa} \sum_{\mu=1}^{\varkappa} \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1}\cdots y_{j_{\mu-1}} \times$$
$$\times y_{j_{\mu+1}}\cdots y_{j_\varkappa} \sum_{j^{\mu}_1,\ldots,j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} \varphi^{j_\mu}_{j^{\mu}_1\ldots j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} y_{j^{\mu}_1}\cdots y_{j^{\mu}_{k-\varkappa+1}} +$$
$$+ \sum_{j_1,\ldots,j_k} (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu)\, \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\cdots y_{j_k} +$$
$$+ \sum_{j_1,\ldots,j_k} \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} \sum_{\mu=1}^{k} y_{j_1}\cdots y_{j_{\mu-1}} y_{j_{\mu+1}}\cdots y_{j_k} \delta_{j_\mu} y_{j_\mu+1} =$$
$$= \delta_\nu \sum_{j_1,\ldots,j_k} \alpha^{\nu+1}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\cdots y_{j_k} + \sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa} a^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\cdots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa} a^{\nu}_{i_1\ldots i_\varkappa} \times$$
$$\times \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k} \sum_{j^1_1,\ldots,j^{\varkappa}_{\mu_\varkappa}} \alpha^{i_1}_{j^1_1\ldots j^1_{\mu_1}} \cdots \alpha^{i_\varkappa}_{j^{\varkappa}_1\ldots j^{\varkappa}_{\mu_\varkappa}} y_{j^1_1}\cdots y_{j^1_{\mu_1}}\cdots y_{j^{\varkappa}_1}\cdots y_{j^{\varkappa}_{\mu_\varkappa}}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n;\ \delta_n = 0), \tag{7.4}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$ — натуральные числа. Предшествующая сравнению коэффициентов при $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$ симметризация несимметричных коэффициентов здесь проводится совершенно аналогично п. 3.4. В результате тождества (7.4) запишутся в симметризованном виде аналогично (3.9):

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} [\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} + (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu)\, \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k}]\, y_{j_1}\cdots y_{j_k} +$$
$$+ \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} \sum_{\mu=1}^{k} \delta_{j_\mu} y_{j_1}\cdots y_{j_{\mu-1}} y_{j_{\mu+1}}\cdots y_{j_k} y_{j_\mu+1} -$$
$$- \delta_\nu \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \alpha^{\nu+1}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\cdots y_{j_k} = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} B^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\cdots y_{j_k} \tag{7.5}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n;\ \delta_n = 0),$$

где $B^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ определяются формулой (4.3). Как подчеркивалось выше, все определяемые коэффициенты симметризованы. Из множества равных коэффициентов, отвечающих различным перестановкам нижних индексов, будем определять тот, у которого нижние индексы расположены в неубывающем порядке. Итак, предположим, что $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_k$ и допустим, что все $\alpha^{\nu}_{j'_1\ldots j'_k}$ ($j'_1 \leqslant \leqslant j'_2 \leqslant \ldots \leqslant j'_k$), для которых $j'_1 \leqslant j_1, \ldots, j'_k \leqslant j_k$; $j'_1 + \ldots + j'_k < j_1 + \ldots + j_k$, определены ($\nu = 1, \ldots, n$). Приравнивая в тождествах (7.5) коэффициенты при $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$, получим систему из n алгебраических уравнений для определения $a^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ и $\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$:

$$\varphi^1_{j_1\ldots j_k} + (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_1)\, a^1_{j_1\ldots j_k} + \\ + [\delta_{j_1} a^1_{j_1-1\, j_2\ldots j_k} + \ldots + \delta_{j_k} a^1_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}] - \delta_1 a^2_{j_1\ldots j_k} = B^1_{j_1\ldots j_k}, \quad (7.6)$$

. . . .

$$\varphi^{n-1}_{j_1\ldots j_k} + (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_{n-1})\, a^{n-1}_{j_1\ldots j_k} + \\ + [\delta_{j_1} a^{n-1}_{j_1-1\, j_2\ldots j_k} + \ldots + \delta_{j_k} a^{n-1}_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}] - \delta_{n-1} a^n_{j_1\ldots j_k} = B^{n-1}_{j_1\ldots j_k},$$

$$\varphi^n_{j_1\ldots j_k} + (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_n)\, a^n_{j_1\ldots j_k} + \\ + [\delta_{j_1} a^n_{j_1-1\, j_2\ldots j_k} + \ldots + \delta_{j_k} a^n_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}] = B^n_{j_1\ldots j_k}.$$

Здесь те из величин

$$a^{\nu}_{j_1\ldots j_{\mu-1} j_{\mu}-1\ldots j_k} \qquad (\mu = 1, \ldots, k;\ \nu = 1, \ldots, n),$$

у которых один из нижних индексов $(j_\mu - 1)$ обращается в нуль, равны нулю.

Система уравнений (7.6) решается шаг за шагом, начиная с последнего [1]) уравнения. При этом на каждом шаге имеет место следующая *вычислительная альтернатива.*

1) Допустим, что значения $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}$ и n таковы, что круглая скобка в последнем уравнении (7.6) отлична от нуля. Заметим, что при сделанном допущении $\varphi^n_{j_1\ldots j_k} = 0$. Действительно, обращаясь к представлению (7.3), запишем соответствующий член в тождествах (7.5) в виде

$$y_n \varphi^n_{j_1\ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} y_n^{-1}.$$

Для этого члена $(\Lambda, Q) = \lambda_{j_1}\cdot 1 + \ldots + \lambda_{j_k}\cdot 1 + \lambda_n\cdot(-1) \neq 0$, а согласно представлению (7.2) в нормальную форму (7.3) входят только те члены, для которых $(\Lambda, Q) = 0$. Итак, из последнего уравнения (7.6) будем иметь

$$a^n_{j_1\ldots j_k} = \frac{1}{\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_n} \{B^n_{j_1\ldots j_k} - [\delta_{j_1} a^n_{j_1-1\, j_2\ldots j_k} + \ldots \\ \ldots + \delta_{j_k} a^n_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}]\}; \quad (\varphi^n_{j_1\ldots j_k} = 0). \qquad (7.7)$$

2) Допустим, что значения $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}$ и λ_n таковы, что круглая скобка в последнем уравнении (7.6) равна нулю. Это означает, во-первых, что величина $a^n_{j_1\ldots j_k}$ может быть выбрана любой, в частности, равной нулю или определенной по непрерывности

[1]) А при записи А. Д. Брюно (см. сноску к стр. 118) — начиная с первого уравнения.

по значениям реальных параметров. Во-вторых, последнее уравнение (3.6) даст нам теперь формулу для $\varphi^n_{j_1\ldots j_k}$:

$$\varphi^n_{j_1\ldots j_k} = B^n_{j_1\ldots j_k} - [\delta_{j_1} a^n_{j_1-1 j_2\ldots j_k} + \ldots + \delta_{j_k} a^n_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}]. \qquad (7.8)$$

Переходя к предпоследнему уравнению (7.6), будем следовать этой же альтернативе:

$$a^{n-1}_{j_1\ldots j_k} = \frac{1}{\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_{n-1}} \{B^{n-1}_{j_1\ldots j_k} + \delta_{n-1} a^n_{j_1\ldots j_k} -$$

$$- [\delta_{j_1} a^{n-1}_{j_1-1 j_2\ldots j_k} + \ldots + \delta_{j_k} a^{n-1}_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}]\}, \qquad \varphi^{n-1}_{j_1\ldots j_k} = 0, \qquad (7.9)$$

если $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_{n-1} \neq 0$ и

$$\varphi^{n-1}_{j_1\ldots j_k} = B^{n-1}_{j_1\ldots j_k} + \delta_{n-1} a^n_{j_1\ldots j_k} -$$

$$- [\delta_{j_1} a^{n-1}_{j_1-1 j_2\ldots j_k} + \ldots + \delta_{j_k} a^{n-1}_{j_1\ldots j_{k-1} j_k-1}], \qquad a^{n-1}_{j_1\ldots j_k} \text{ — любое}, \qquad (7.10)$$

если $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_{n-1} = 0$.

Решения последующих уравнений (7.6) от (n—2)-го до первого получаются из (7.9) и (7.10) заменой n последовательно на $n - 1$, $n - 2, \ldots, 2$.

Глава VI

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Прежде всего выделяется тот класс задач, в котором нормальная форма имеет самый простой вид, доставляемый теоремой Пуанкаре (п. V,1.3), и представление решения задачи Коши в общем виде может быть осуществлено на каждом шаге приближения в эффективном виде. Сюда относятся демпфированные колебательные системы (асимптотически устойчивые по линейному приближению) с аналитическими нелинейностями общего вида. Результаты иллюстрируются в § 2 на примерах механических систем с одной и двумя степенями свободы.

§ 1. Демпфированные колебательные системы

1.1. Приведение к диагональному виду. Рассмотрим механическую систему с k степенями свободы, описываемую дифференциальными уравнениями [1])

$$\begin{aligned}\ddot{u}_\varkappa + 2\varepsilon_\varkappa \dot{u}_\varkappa + \omega_\varkappa^2 u_\varkappa &= \\ &= f_\varkappa(u_1, \ldots, u_k) + \varphi_\varkappa(\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_k) \quad (\varkappa = 1, \ldots, k). \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Здесь $f_1, \ldots, f_k$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — вещественные аналитические функции своих переменных в некоторой окрестности нуля, разложения которых начинаются для $f_1, \ldots, f_k$ с членов второго порядка, а для $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — с членов не ниже второго порядка:

$$\omega_\varkappa > \varepsilon_\varkappa > 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Случай, когда для некоторых $\varkappa'$ имеем $\varepsilon_{\varkappa'} \geqslant \omega_{\varkappa'} > 0$, можно рассмотреть отдельно.

Приведем линейную часть системы (1.1) к диагональному виду, введя новые переменные

$$x_j = \frac{i \operatorname{sign} j}{r_{|j|}} (\lambda_{-j} u_{|j|} - \dot{u}_{|j|}) \qquad (j = \mp 1, \ldots, \mp k), \qquad (1.2)$$

---

[1]) Можно в (1.1) справа вместо $f_\varkappa + \varphi_\varkappa$ ввести $F_\varkappa(u_1, \ldots, u_k, \dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_k)$.

где $i = \sqrt{-1}$,

$$\lambda_j = -\varepsilon_{|j|} + ir_{|j|}\operatorname{sign} j \qquad (j = \mp 1, \ldots, \mp k),$$
$$r_\varkappa = +\sqrt{\omega_\varkappa^2 - \varepsilon_\varkappa^2} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Очевидно, что $\lambda_{-\varkappa} = \overline{\lambda_\varkappa}$, $x_{-\varkappa} = \bar{x}_\varkappa$ (отрицательные индексы введены для удобства дальнейших вычислений), и

$$\begin{aligned} u_\varkappa &= \frac{1}{2}(x_{-\varkappa} + x_\varkappa) = \operatorname{Re} x_\varkappa, \\ \dot{u}_\varkappa &= \frac{1}{2}(\lambda_{-\varkappa}x_{-\varkappa} + \lambda_\varkappa x_\varkappa) = \operatorname{Re}(\lambda_\varkappa x_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{1.3}$$

В новых переменных система (1.1) примет диагональный вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_j = \lambda_j x_j - \frac{i}{r_{|j|}} \operatorname{sign} j \Big[f_{|j|}\Big(\frac{1}{2}(x_{-1} + x_1), \ldots, \frac{1}{2}(x_{-k} + x_k)\Big) + \\ + \varphi_{|j|}\Big(\frac{1}{2}(\lambda_{-1}x_{-1} + \lambda_1 x_1), \ldots, \frac{1}{2}(\lambda_{-k}x_{-k} + \lambda_k x_k)\Big)\Big] \\ (j = \mp 1, \ldots, \mp k). \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2. Вычисление коэффициентов нормализующего преобразования. Поскольку $\lambda_{\mp 1}, \ldots, \lambda_{\mp k}$ расположены в левой полуплоскости, то условие 2), п. V,1.3 выполнено и остается лишь одно условие 1) теоремы Пуанкаре:

$$\lambda_j \neq \sum_{-k}^{k} p_n \lambda_n \qquad \Big(j = \mp 1, \ldots, \mp k; \sum_{-k}^{k} p_n \geqslant 2\Big) \tag{2.1}$$

при любых целых неотрицательных p_n. Это условие очевидно выполнено при $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_k = \varepsilon > 0$; при различных положительных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ будем считать его выполненным.

Тогда, по теореме Пуанкаре п. V,1.3, существует единственное обратимое аналитическое в окрестности нуля, нормализующее преобразование

$$x_j = y_j + \sum_{h,l=-k}^{k} \alpha^j_{hl} y_h y_l + \sum_{h,l,m=-k}^{k} \beta^j_{hlm} y_h y_l y_m + \ldots \tag{2.2}$$
$$(j = \mp 1, \ldots, \mp k),$$

переводящее систему (1.4) в систему

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j \qquad (j = \mp 1, \ldots, \mp k). \tag{2.3}$$

Ограничимся вычислением квадратичных членов нормализующего преобразования, для чего подставим (2.2) в (1.4):

$$\dot{y}_j + \sum_{h,\, l=-k}^{k} \alpha_{hl}^{j} (\dot{y}_h y_l + y_h \dot{y}_l) + \ldots = \lambda_j y_j + \lambda_j \sum_{h,\, l=-k}^{k} \alpha_{hl}^{j} y_h y_l -$$

$$- \frac{i \operatorname{sign} j}{r_{|j|}} \left[f_{|j|} \left(\frac{1}{2}(y_{-1} + y_1), \ldots, \frac{1}{2}(y_{-k} + y_k) \right) + \right.$$

$$\left. + \varphi_{|j|} \left(\frac{1}{2}(\lambda_{-1} y_{-1} + \lambda_1 y_1), \ldots, \frac{1}{2}(\lambda_{-k} y_{-k} + \lambda_k y_k) \right) \right]$$

$$(j = \mp 1, \ldots, \mp k).$$

В силу (2.3) получим отсюда тождества

$$\sum_{h,\, l=-k}^{k} (\lambda_h + \lambda_l - \lambda_j) \alpha_{hl}^{j} y_h y_l + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{i \operatorname{sign} j}{r_{|j|}} \sum_{h,\, l=1}^{k} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f_{|j|}}{\partial u_h \partial u_l} \right)_0 (y_{-h} + y_h)(y_{-l} + y_l) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{|j|}}{\partial \dot{u}_h \partial \dot{u}_l} \right)_0 (\lambda_{-h} y_{-h} + \lambda_l y_l)(\lambda_{-l} y_{-l} + \lambda_l y_l) \right] + \ldots$$

$$(j = \mp 1, \ldots, \mp k),$$

где индекс нуль означает, что все аргументы положены равными нулю, а точками обозначены члены выше второго порядка. Для коэффициентов при квадратичных членах разложения (2.2) имеем

$$\alpha_{hl}^{j} = -\frac{i \operatorname{sign} j}{8 r_{|j|}} \frac{1}{\lambda_h + \lambda_l - \lambda_j} \left[\left(\frac{\partial^2 f_{|j|}}{\partial u_{|h|} \partial u_{|l|}} \right)_0 + \lambda_h \lambda_l \left(\frac{\partial^2 \varphi_{|j|}}{\partial \dot{u}_{|h|} \partial \dot{u}_{|l|}} \right)_0 \right]$$

$$(j,\, h,\, l = \mp 1, \ldots, \mp k). \tag{2.4}$$

Очевидно, что $\alpha_{lh}^{j} = \alpha_{hl}^{j}$ и $\alpha_{-h-l}^{-j} = \overline{\alpha_{hl}^{j}}$ $(j,\, h,\, l = \mp 1, \ldots, \mp k)$ и из четверки величин α_{hl}^{j}, α_{lh}^{j}, α_{-h-l}^{-j}, α_{-l-h}^{-j} (или пары величин α_{hh}^{j}, α_{-h-h}^{-j}) будем выписывать ниже только одну. Знаменатели $\lambda_h + \lambda_l - \lambda_j$ отличны от нуля, в силу условия (2.1). Нам понадобится и обратное к (2.2) преобразование; очевидно, что

$$y_j = x_j - \sum_{h,\, l=-k}^{k} \alpha_{hl}^{j} x_h x_l + \ldots \qquad (j = \mp 1, \ldots, \mp k) \tag{2.5}$$

$$(y_{-\varkappa} = \bar{y}_\varkappa \qquad \varkappa = 1, \ldots, k).$$

1.3. Общее решение исходной системы (решение задачи Коши в общем виде). Определим приближенный вид общего решения системы (1.1), отвечающий сделанному приближению в разложении (2.2). Введем вещественные переменные по формулам

$$v_\varkappa = \frac{1}{2}(y_{-\varkappa} + y_\varkappa) = \operatorname{Re} y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \tag{3.1}$$

В силу (2.3) будем иметь

$$v_\varkappa = \frac{1}{2}(\lambda_{-\varkappa} y_{-\varkappa} + \lambda_\varkappa y_\varkappa) = \operatorname{Re}(\lambda_\varkappa y_\varkappa) \quad (\varkappa = 1, \ldots, k), \tag{3.2}$$

$$\ddot{v}_\varkappa + 2\varepsilon_\varkappa \dot{v}_\varkappa + \omega_\varkappa^2 v_\varkappa = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, k). \tag{3.3}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$y_j = \frac{i \operatorname{sign} j}{r_{|j|}} (\lambda_{-j} v_{|j|} - \dot{v}_{|j|}) \qquad (j = \mp 1, \ldots, \mp k). \tag{3.4}$$

Общее решение уравнений (3.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} v_\varkappa &= \frac{1}{r_\varkappa} e^{-\varepsilon_\varkappa t} [(r_\varkappa \cos r_\varkappa t + \varepsilon_\varkappa \sin r_\varkappa t) v_\varkappa^0 + \sin r_\varkappa t \cdot \dot{v}_\varkappa^0], \\ \dot{v}_\varkappa &= \frac{1}{r_\varkappa} e^{-\varepsilon_\varkappa t} [-\omega_\varkappa^2 \sin r_\varkappa t \cdot v_\varkappa^0 + (r_\varkappa \cos r_\varkappa t - \varepsilon_\varkappa \sin r_\varkappa t) \dot{v}_\varkappa^0] \\ &\qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $v_\varkappa^0 = v_\varkappa(0)$, $\dot{v}_\varkappa^0 = \dot{v}_\varkappa(0)$. Выразим последние через начальные значения исходных переменных $u_\varkappa^0$ и $\dot{u}_\varkappa^0$, воспользовавшись формулами (3.1), (3.2), (2.5) и (1.2):

$$\begin{aligned} v_\varkappa^0 &= \operatorname{Re}\Big(x_\varkappa^0 - \sum_{h,l=-k}^{k} \alpha_{hl}^\varkappa x_h^0 x_l^0\Big) = \\ &= u_\varkappa^0 + \sum_{h,l=-k}^{k} \frac{\operatorname{sign}(hl)}{r_{|h|} r_{|l|}} \operatorname{Re}[\alpha_{hl}^\varkappa (\lambda_{-h} u_{|h|}^0 - \dot{u}_{|h|}^0)(\lambda_{-l} u_{|l|}^0 - \dot{u}_{|l|}^0)], \\ \dot{v}_\varkappa^0 &= \operatorname{Re}\Big[\lambda_\varkappa \Big(x_\varkappa^0 - \sum_{h,l=-k}^{k} \alpha_{hl}^\varkappa x_h^0 x_l^0\Big)\Big] = \\ &= \dot{u}_\varkappa^0 + \sum_{h,l=-k}^{k} \frac{\operatorname{sign}(hl)}{r_{|h|} r_{|l|}} \operatorname{Re}[\lambda_\varkappa \alpha_{hl}^\varkappa (\lambda_{-h} u_{|h|}^0 - \dot{u}_{|h|}^0) \times \\ &\qquad \times (\lambda_{-l} u_{|l|}^0 - \dot{u}_{|l|}^0)] \quad (\varkappa = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Воспользуемся теперь формулами (1.3), (2.2) и (3.4):

$$\begin{aligned} u_\varkappa &= \operatorname{Re}\Big(y_\varkappa + \sum \alpha_{hl}^\varkappa y_h y_l\Big) = \\ &= v_\varkappa - \sum_{h,l=-k}^{k} \frac{\operatorname{sign}(hl)}{r_{|h|} r_{|l|}} \operatorname{Re}[\alpha_{hl}^\varkappa (\lambda_{-h} v_{|h|} - \dot{v}_{|h|})(\lambda_{-l} v_{|l|} - \dot{v}_{|l|})] \; (\varkappa = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Формулы (3.7), (3.5), (3.6) и (2.4) выражают решение задачи Коши в общем виде для исходной системы (1.1) при условии (2.1), для случая, когда в разложениях (2.2) и (2.5) мы ограничились линейными и квадратичными членами.

§ 2. Примеры

2.1. Система с одной степенью свободы. При $k = 1$ система уравнений (1.1) запишется в виде одного уравнения [1])

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \omega^2 u = f(u) + \varphi(\dot{u}) \qquad (\omega > \varepsilon > 0) \qquad (1.1)$$

при сделанных в п. 1.1 предложениях о функциях f и φ. Формулы (1, 2.4) дадут нам

$$\alpha^1_{-1-1} = \frac{3r + i\varepsilon}{8r(9\omega^2 - 8\varepsilon^2)}[f''(0) + (2\varepsilon^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon r)\varphi''(0)],$$

$$\alpha^1_{-11} = \alpha^1_{1-1} = \frac{r + i\varepsilon}{8r\omega^2}[f''(0) + \omega^2\varphi''(0)],$$

$$\alpha^1_{11} = \frac{-r + i\varepsilon}{8r\omega^2}[f''(0) + (2\varepsilon^2 - \omega^2 - 2i\varepsilon r)\varphi''(0)]$$

$$(i = \sqrt{-1},\ r = +\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}).$$

По формулам (1,3.7) выразим решение задачи Коши для уравнения (1.1) в общем виде:

$$\begin{aligned} u = v - \frac{1}{8(\omega^2 - \varepsilon^2)}\Bigg(&\left\{\frac{1}{9\omega^2 - 8\varepsilon^2}[3f''(0) + (4\varepsilon^2 - 3\omega^2)\varphi''(0)] - \right.\\ &\left. - \frac{1}{\omega^2}[f''(0) - \omega^2\varphi''(0)]\right\}[(2\varepsilon^2 - \omega^2)v^2 + 2\varepsilon v\dot{v} + \dot{v}^2] + \\ &+ 2\varepsilon\left\{\frac{1}{9\omega^2 - 8\varepsilon^2}[f''(0) + (5\omega^2 - 4\varepsilon^2)\varphi''(0)] - \right.\\ &\left. - \frac{1}{\omega^2}[f''(0) + \omega^2\varphi''(0)]\right\}v(\varepsilon v + \dot{v}) - \\ &- \frac{2}{\omega^2}[f''(0) + \omega^2\varphi''(0)](\omega^2 v^2 + 2\varepsilon v\dot{v} + \dot{v}^2)\Bigg). \end{aligned}$$

Здесь (см. (1,3.5))

$$v = \frac{1}{r}e^{-\varepsilon t}[(r\cos rt + \varepsilon\sin rt)v(0) + \sin rt\cdot\dot{v}(0)],$$

$$\dot{v} = \frac{1}{r}e^{-\varepsilon t}[-\omega^2\sin rt\cdot v(0) + (r\cos rt - \varepsilon\sin rt)\dot{v}(0)]$$

и, наконец, $v(0)$ и $\dot{v}(0)$ выражаются через исходные начальные значения формулами, полученными из (1,3.6):

$$\begin{aligned} v(0) = u(0) + \frac{1}{8r^2}\Bigg(&\left\{\frac{1}{9\omega^2 - 8\varepsilon^2}[3f''(0) - (3\omega^2 - 4\varepsilon^2)\varphi''(0)] - \right.\\ &\left. - \frac{1}{\omega^2}[f''(0) - \omega^2\varphi''(0)]\right\}[(2\varepsilon^2 - \omega^2)u(0)^2 + 2\varepsilon u(0)\dot{u}(0) + \dot{u}(0)^2] + \\ &+ 2\varepsilon\left\{\frac{1}{9\omega^2 - 8\varepsilon^2}[f''(0) + (5\omega^2 - 4\varepsilon^2)\varphi''(0)] - \right. \end{aligned}$$

[1]) Можно вместо f и φ ввести $F(u, \dot{u})$ и отдельно рассмотреть случай $\varepsilon \geqslant \omega > 0$.

$$-\frac{1}{\omega^2}\left[f''(0)+\omega^2\varphi''(0)\right]\Big\} u(0)\left[\varepsilon u(0)+\dot u(0)\right]-$$
$$-\frac{2}{\omega^2}\left[f''(0)+\omega^2\varphi''(0)\right]\left[\omega^2 u(0)^2+2\varepsilon u(0)\dot u(0)+\dot u(0)^2\right]\Big),$$
$$\dot v(0)=\dot u(0)+\frac{1}{8r^2}\Big(\frac{1}{9\omega^2-8\varepsilon^2}\{[3f''(0)+(4\varepsilon^2-3\omega^2)\varphi''(0)]\times$$
$$\times\left[\varepsilon(3\omega^2-4\varepsilon^2)u(0)^2+2(\omega^2-2\varepsilon^2)u(0)\dot u(0)-\varepsilon\dot u(0)^2\right]-$$
$$-\varepsilon\left[f''(0)+(5\omega^2-4\varepsilon^2)\varphi''(0)\right]\left[(4\varepsilon^2-\omega^2)u(0)^2+\right.$$
$$\left.+4\varepsilon u(0)\dot u(0)+\dot u(0)^2\right]\}+\frac{4\varepsilon}{\omega^2}\left[f''(0)+\omega^2\varphi''(0)\right]\times$$
$$\times\left[\omega^2 u(0)^2+2\varepsilon u(0)\dot u(0)+\dot u(0)^2\right]+$$
$$+2\{f''(0)\left[\varepsilon u(0)+\dot u(0)\right]u(0)-\varphi''(0)\left[\omega^2 u(0)+\varepsilon\dot u(0)\right]\dot u(0)\}\Big)$$

2.2. Колебания массы на пружине при линейном демпфировании. Запишем уравнения (IV,1,5.1), изменив обозначения переменных

$$\eta\equiv u_1,\qquad \xi\equiv u_2$$

в виде

$$u_1''+2\varepsilon u_1'+u_1=(1+\gamma+u_1)[(1+\gamma+u_1)^2+u_2^2]^{-1/2}-1,$$
$$u_2''+2\varepsilon u_2'+\frac{\gamma}{1+\gamma}u_2=u_2\left[(1+\gamma+u_1)^2+u_2^2\right]^{-1/2}-\frac{1}{1+\gamma}u_2,\quad (2.1)$$

где

$$\gamma=\frac{\lambda}{l},\qquad \varepsilon=+\frac{b}{2\sqrt{cm}}\qquad \left(\varepsilon<\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right)$$

— безразмерные положительные параметры, а штрих означает производную по τ. Случаи $\sqrt{\gamma/(1+\gamma)}\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ и $\varepsilon>1$ потребуют отдельного рассмотрения.

Вычислим величины α_{hl}^j по формулам (1,2.4) и выпишем только те из них, которые отличны от нуля (с учетом сделанного сразу после формулы (1,2.4) замечания)

$$\alpha^1_{-2-2}=\frac{i}{8r_1(1+\gamma)^2}\frac{1}{2\lambda_{-2}-\lambda_1},\qquad \alpha^1_{22}=\frac{i}{8r_1(1+\gamma)^2}\frac{1}{2\lambda_2-\lambda_1},$$
$$\alpha^1_{2-2}=\frac{i}{8r_1(1+\gamma)^2}\frac{1}{\lambda_2+\lambda_{-2}-\lambda_1},$$
$$\alpha^2_{-1-2}=\frac{i}{8r_2(1+\gamma)^2}\frac{1}{\lambda_{-1}+\lambda_{-2}-\lambda_2},$$
$$\alpha^2_{1-2}=\frac{i}{8r_2(1+\gamma)^2}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_{-2}-\lambda_2},$$
$$\alpha^2_{-12}=\frac{i}{8r_2(1+\gamma)^2}\frac{1}{\lambda_{-1}},\qquad \alpha^2_{12}=\frac{i}{8r_2(1+\gamma)^2}\frac{1}{\lambda_1},$$

где

$$\lambda_j = -\varepsilon + ir_j \operatorname{sign} j \qquad (j = \mp 1,\ \mp 2),$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad r_1 = +\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad r_2 = +\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma} - \varepsilon^2}.$$

Формулы (1,3.7) дадут нам решение задачи Коши для (2.1) в общем виде:

$$u_1 = v_1 - \frac{1}{8r_1r_2^2(1+\gamma)^2}\Big(-\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1+2r_2)^2}\{(r_1+2r_2)\times$$

$$\times[(\varepsilon v_2+v_2')^2 - r_2^2v_2^2] + 2\varepsilon r_2v_2(\varepsilon v_2+v_2')\} + 2r_1[(\varepsilon v_2+v_2')^2+r_2^2v_2^2] +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1-2r_2)^2}\{2\varepsilon r_2v_2(\varepsilon v_2+v_2') - (r_1-2r_2)[(\varepsilon v_2+v_2')^2 - r_2v_2^2]\}\Big),$$

$$u_2 = v_2 - \frac{1}{4r_1r_2^2(1+\gamma)^2}\Big(-\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1+2r_2)^2}\{(r_1+2r_2)\times$$

$$\times[(\varepsilon v_1+v_1')(\varepsilon v_2+v_2') - r_1r_2v_1v_2] + \varepsilon[r_1v_1(\varepsilon v_2+v_2') + r_2v_2(\varepsilon v_1+v_1')]\} +$$

$$+2r_1(\varepsilon v_2+v_2')(2\varepsilon v_1+v_1') - \frac{1}{\varepsilon^2+(r_1-2r_2)^2}\{(r_1-2r_2)[r_1r_2v_1v_2+$$

$$+(\varepsilon v_1+v_1')(\varepsilon v_2+v_2')] + \varepsilon[r_1v_1(\varepsilon v_2+v_2') - r_2v_2(\varepsilon v_1+v_1')]\}\Big)$$

Здесь v_1, v_2, v_1', v_2' определяются формулами (1, 3.5) с заменой на τ и при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. При этом v_1^0, v_2^0, $v_1'^0$, $v_2'^0$ выражаются формулами (1,3.6), которые теперь дадут

$$v_1^0 = u_1^0 + \frac{1}{8r_1r_2^2(1+\gamma)^2}\Big(-\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1+2r_2)^2}\{(r_1+2r_2)[(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)^2 -$$

$$-r_2u_2^{0^2}] + 2\varepsilon r_2u_2^0(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)\} + 2r_1[(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)^2 + r_2^2u_2^{0^2}] +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1-2r_2)^2}\{2\varepsilon r_2u_2^0(\varepsilon u_2^0+u_2'^0) - (r_1-2r_2)[(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)^2 - r_2^2u_2^{0^2}]\}\Big),$$

$$v_1'^0 = u_1'^0 + \frac{1}{4r_1r_2^2(1+\gamma)^2}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1+2r_2)^2}\{\varepsilon(r_1+r_2)[(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)^2 - r_2^2u_2^{0^2}] -$$

$$-r_2[r_1(r_1+2r_2)-\varepsilon^2]u_2^0(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)\} -$$

$$-2\varepsilon r_1[(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)^2 + r_2^2u_2^{0^2}] + \frac{1}{\varepsilon^2+(r_1-2r_2)^2}\{\varepsilon(r_1-r_2)[(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)^2 -$$

$$-r_2^2u_2^{0^2}] - r_2[r_1(2r_2-r_1)+\varepsilon^2]u_2^0(\varepsilon u_2^0+u_2'^0)\}\Big),$$

$$v_2^0 = u_2^0 + \frac{1}{4r_1r_2^2(1+\gamma)^2}\Big(-\frac{1}{\varepsilon^2+(r_1+2r_2)^2}\times$$

$$\times\{(r_1+2r_2)[(\varepsilon u_1^0+u_1'^0)(\varepsilon u_2^0+u_2'^0) - r_1r_2u_1^0u_2^0] +$$

$$+\varepsilon[r_1u_1^0(\varepsilon u_2^0+u_2'^0) + r_2u_2^0(\varepsilon u_1^0+u_2'^0)]\} +$$

$$+ 2r_1(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0)(2\varepsilon u_1^0 + u_1'^0) - \frac{1}{\varepsilon^2 + (r_1 - 2r_2)^2}\{(r_1 - 2r_2)[r_1 r_2 u_1^0 u_2^0 +$$

$$+ (\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0)] + \varepsilon[r_1 u_1^0(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0) - r_2 u_2^0(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)]\}\Big),$$

$$v_2'^0 = u_2'^0 + \frac{1}{4r_1 r_2^2(1+\gamma)^2}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2 + (r_1 + 2r_2)^2} \times$$

$$\times \{\varepsilon(r_1 + 3r_2)[(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0) - r_1 r_2 u_1^0 u_2^0] -$$

$$- [r_2(r_1 + 2r_2) - \varepsilon^2][r_1 u_1^0(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0) + r_2 u_2^0(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)]\} -$$

$$- 2r_1\{\varepsilon[(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0) + r_2^2 u_1^0 u_2^0] +$$

$$+ \varepsilon^2 u_1^0(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0) + r_2^2 u_2^0(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)\} - \frac{1}{\varepsilon^2 + (r_1 - 2r_2)^2} \times$$

$$\times \{\varepsilon(3r_2 - r_1)[(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0)(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0) + r_1 r_2 u_1^0 u_2^0] +$$

$$+ [r_2(r_1 - 2r_2) + \varepsilon^2][r_2 u_2^0(\varepsilon u_1^0 + u_1'^0) - r_1 u_1^0(\varepsilon u_2^0 + u_2'^0)]\}\Big).$$

Глава VII

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Для задач теории колебаний представляют интерес типы расположений собственных значений матрицы линейной части системы третьего порядка в левой замкнутой полуплоскости комплексного переменного λ, изображенные на рис. 10. Случай, аналогичный a_1, рассмотрен в § VI, 1. Специального рассмотрения потребовал бы

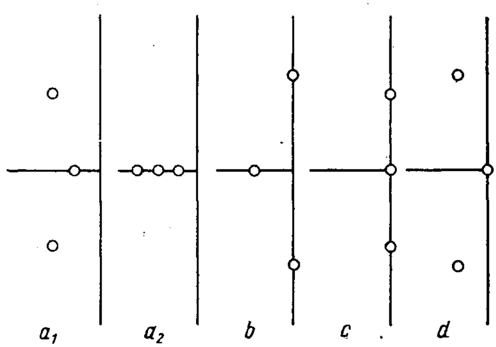

Рис. 10.

случай a_2 и предельные для него случаи, когда два или три собственных значения совпадают, обращаясь, в частности, в нуль. Случаи b и c рассмотрены в § 1 и § 2; они имеют преимущественное значение. Случаю d отводится § 3. Первый параграф завершается электромеханическим примером. Результаты этой главы могут быть применены и к электромагнитным колебаниям двух связанных осцилляторов, когда собственные колебания одного из них описываются нелинейным уравнением первого порядка.

§ 1. Случай пары чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части

1.1. Приведение к нормальной форме. Допустим, что исходная система приведена к диагональному виду и сделана замена независимого переменного $\tau = \omega t$, где $\pm\omega i$ — чисто мнимые собственные значения матрицы линейной части

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu x_\nu + \sum a^\nu_{jh} x_j x_h + \sum b^\nu_{jhk} x_j x_h x_k + \ldots \tag{1.1}$$
$$(\nu = 0, \pm 1).$$

Суммирование всюду ниже по два раза встречающимся индексам, принимающим значения $0, \pm 1$; $\lambda_0 = -\delta < 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_{-1} = -i$. Коэффициенты a^ν_{jh}, b^ν_{jhk}, ..., вообще говоря, комплексные, причем, и это следует подчеркнуть, они симметризованы, т. е.

$$a^\nu_{hj} = a^\nu_{jh}, \quad b^\nu_{\{jhk\}} = \text{i. d.} \qquad (\nu, j, h, k = 0, \pm 1), \tag{1.2}$$

где $\{jhk\}$ — любая перестановка чисел j, h, k, а i. d. означает idem (то же самое).

По основной теореме А. Д. Брюно (п. V, 1.2), существует обратимая комплексная замена переменных (нормализующее преобразование)

$$x_j = y_j + \sum \alpha^j_{lm} y_l y_m + \sum \beta^j_{lmn} y_l y_m y_n + \sum \gamma^j_{lmnp} y_l y_m y_n y_p +$$
$$+ \sum \delta^j_{lmnpq} y_l y_m y_n y_p y_q + \ldots \qquad (j = 0, \pm 1), \tag{1.3}$$
$$(\alpha^j_{ml} = \alpha^j_{lm},\ \beta^j_{\{lmn\}} = \text{i. d.}, \ldots \qquad j, l, m, n, p, q = 0, \pm 1),$$

приводящая систему (1.1) к нормальной форме

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{(\Lambda, Q)=0} g_{\nu Q} y_0^{q_0} y_1^{q_1} y_{-1}^{q_{-1}} \qquad (\nu = 0, \pm 1). \tag{1.4}$$

Здесь Λ и Q — векторы с компонентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{-1}$ и q_0, q_1, q_{-1} соответственно; последние суть целые числа или нули, при этом $q_\nu \geqslant -1$, а остальные q_j — неотрицательные и

$$q_0 + q_1 + q_{-1} \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Суммирование в (1.4) происходит только по резонансным членам, показатели степеней которых удовлетворяют резонансному уравнению

$$(\Lambda, Q) \equiv q_0\lambda_0 + q_1\lambda_1 + q_{-1}\lambda_{-1} = -\delta q_0 + i\,(q_1 - q_{-1}) = 0. \tag{1.6}$$

Решение здесь очевидно:

$$q_0 = 0, \qquad q_{-1} = q_1. \tag{1.7}$$

Следовательно в (1.4) $q_0 + q_1 + q_{-1} = 2q_1$ и в рассматриваемом случае нет форм четной степени, а для форм нечетной $(2r+1)$-й степени имеем $q_{-1} = q_1 = r$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Итак, нормальная форма (1.4) запишется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\tau} &= iy_1 + y_1 \sum_{r=1}^{\infty} g_r^1 y_1^r y_{-1}^r,\\
\frac{dy_{-1}}{d\tau} &= -iy_{-1} + y_{-1} \sum_{r=1}^{\infty} g_r^{-1} y_1^r y_{-1}^r,\\
\frac{dy_0}{d\tau} &= -\delta y_0 + y_0 \sum_{r=1}^{\infty} g_r^0 y_1^r y_{-1}^r.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

В силу вещественности исходной системы имеем $y_{-1} = \bar{y}_1$, $g_r^{-1} = \overline{g_r^1}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ и первое уравнение (1.8) комплексно сопряжено второму.

1.2. **Вычисление коэффициентов нормализующего преобразования и нормальной формы.** В нашем случае, как показано в п. 1.1, у нормальной формы нет членов второй степени. В этом можно убедиться и из формулы (V,3,2.4), ибо для всех значений индексов формула (V,3,2.1) дает $\Delta_{lm}^{\nu} = 0$ (иначе говоря, $\lambda_\nu \neq \lambda_l + \lambda_m$) и $\varphi_{lm}^{\nu} = 0$ $(\nu, l, m = 0, \pm 1)$. Следовательно, формула (V,3,2.2) справедлива для всех значений индексов:

$$\alpha_{lm}^{\nu} = \frac{a_{lm}^{\nu}}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu} \qquad (\nu, l, m = 0, \pm 1). \tag{2.1}$$

Перейдем теперь к вычислению коэффициентов при третьих степенях. Выясним, при каких значениях индексов имеет место равенство $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$. Очевидно, что только при $l, m, p = \{\nu, 1, -1\}$, где, напомним, фигурная скобка обозначает любую перестановку индексов. Иными словами,

$$\Delta_{\{\nu 1 -1\}}^{\nu} = 1, \quad \Delta_{lmp}^{\nu} = 0$$
$$(\nu, l, m, p = 0, \pm 1;\ l, m, p \neq \{\nu, 1, -1\}). \tag{2.2}$$

Это значит, что $\beta_{\{\nu 1 -1\}}^{\nu}$ могут быть выбраны произвольно; мы положим их равными нулю:

$$\beta_{\{\nu 1 -1\}}^{\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, \pm 1). \tag{2.3}$$

Для остальных значений β_{lmp}^{ν} справедлива формула (V,3,2.3). В силу (2.2) в формулах (V,3,2.6) отличны от нуля лишь симметризованные коэффициенты нормальной формы $\chi_{\{\nu 1 -1\}}^{\nu}$. Последние очевидным образом связаны с коэффициентами g_1^{ν} нормальной формы в представлении (1.8)

$$g_1^0 = 6\chi^0_{0-1-1}, \quad g_1^1 = 3\chi^1_{11-1}, \quad g_1^{-1} = 3\chi^{-1}_{-11-1}$$

(множитель равен числу различных перестановок нижних индексов у χ). Будем иметь из формулы (V,3,2.6)

$$g_1^0 = 6b^0_{01-1} + 4 \sum_{j=0,\,\pm 1} (a^0_{0j}\alpha^j_{1-1} + a^0_{1j}\alpha^j_{-10} + a^0_{-1j}\alpha^j_{01}), \tag{2.4}$$

$$g_1^1 = \overline{g_1^{-1}} = 3b^1_{11-1} + 2 \sum_{j=0,\,\pm 1} (2a^1_{1j}\alpha^j_{1-1} + a^1_{-1j}\alpha^j_{11}). \tag{2.5}$$

Из доказательства основной теоремы А. Д. Брюно (п. V,1.2) следует неоднозначность преобразования (1.3) в тех случаях, когда уравнение (1.6) имеет хотя бы одно решение Q (не равное нулю в силу условия (1.5)). Более подробно об этом см. п. V,2.1. Прежде чем обсуждать вопрос сходимости (1.3), следует остановиться на определенной «ветви» преобразования. Примем для дальнейшего, что если в тождествах (V,3,1.6), выписанных до четвертых, пятых и т. д. степеней, коэффициенты при $\gamma^j_{l'm'n'p'}$, $\delta^j_{l''m''n''p''q''}$ (см. (1.3)) и т. д. обращаются в нуль, то $\gamma^j_{l'm'n'p'} = 0$, $\delta^j_{l''m''n''p''q''} = 0$ и т. д.

Это и означает, что в рядах (V,2,1.2) все $h_{\nu Q} = 0$ ($\nu = 0, \pm 1$; $Q \in \mathfrak{M}_\nu$, $(\Lambda, Q) = 0$), т. е. ряды (V,2,1.2) обращаются в (V,2,1.3) и сходятся тривиальным образом.

Перейдем теперь к условиям сходимости нормализующего преобразования (1.3). Из уравнения (1.6) видно, что

$$|(\Lambda, Q)| = +\sqrt{q_0^2\delta^2 + (q_1 - q_{-1})^2}.$$

По определению (V,2,4.1) будем иметь

$$\omega_k = \Delta = \inf(\delta, 1) \qquad (\delta > 0).$$

Левая часть условия ω п. V,2.4 примет вид

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \Delta}{2^k} = -\ln \Delta, \tag{2.6}$$

и условие ω, очевидно, выполнено. Заметим, что случай $\delta = 0$ нельзя рассматривать как предельный, хотя бы потому, что (2.6) обратится в $+\infty$. Случай $\delta = 0$ выделен в следующий параграф.

Условие A′ п. V, 2.4 означает выполнение условий

$$g_r^{-1} \equiv \overline{g_r^1} = -g_r^1 \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{2.7}$$

т. е. условий, что коэффициенты g_r^1 ($r = 1, 2, \ldots$) являются чисто мнимыми. Это следует из вида первого и второго уравнений (1.8). Поскольку в нашей задаче имеется лишь одна пара сопряженных чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части исходной системы, то мы имеем дело со случаем 1 *) п. V,2.4, когда условие A сводится лишь к выполнению условия A′. Итак, условия ω и A выполнены при выполнении условий (2.7) и по теореме А. Д. Брюно п. V,2.4 нормализующее преобразование (1.3) с вычисленными в этом пункте значениями коэффициентов — сходится (при выполнении условий (2.7)) в некоторой окрестности нуля.

Что же будет, когда не все из $g_1^1, g_2^1, \ldots$ являются чисто мнимыми? В этом общем для нас случае согласно гипотезе 1 А. Д. Брюно [234и] нормализующее преобразование является гладким (бесконечно дифференцируемым).

При выполнении условий (2.7) система (1.8) допускает первый интеграл

$$y_1 y_{-1} \equiv |y_1|^2 = c_1 \qquad (c_1 = |y_1(0)|^2 \geqslant 0), \tag{2.8}$$

получаемый после умножения первого и второго уравнений (1.8) соответственно на $y_{-1} = \bar{y}_1$ и y_1 и сложения. Подставляя этот интеграл в третье уравнение (1.8), найдем

$$\frac{dy_0}{d\tau} = (c_2 - \delta)\, y_0 \qquad \left(c_2 = \sum_1^\infty g_r^0 c_1^r\right). \tag{2.9}$$

Окрестность начала координат расслаивается на цилиндры $c_2 = \mathrm{const}$. На каждом из них есть экватор (предельный цикл), он устойчив для $c_2 < \delta$ (см. (2.9)), хотя, строго говоря, неизвестно, будет ли этот предельный цикл лежать в области сходимости ряда (2.9), сходящегося в силу теоремы А. Д. Брюно п. V,2.4. При $c_2 > \delta$ этот предельный цикл неустойчив.

1.3. Применение степеннóго преобразования. Как следует из (1.7), число линейно независимых решений уравнения (1.6) $d = 1$. Это означает, что по теореме А. Д. Брюно п. V,2.3 система (1.8) интегрируется в квадратурах. В (1.8) два последних уравнения независимы. Для них матрица A степеннóго преобразования, как это следует из [234в], § 2, имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

и само степеннóе преобразование запишется как

$$z_1 = y_1 y_{-1} = |y_1|^2, \qquad z_{-1} = y_{-1}$$
$$(y_1 = z_1 z_{-1}^{-1},\ y_{-1} = z_{-1}).$$

Применяя его к первому и второму уравнению (1.8), найдем

$$\frac{d\ln z_1}{d\tau} = \frac{d\ln y_1}{d\tau} + \frac{d\ln y_{-1}}{d\tau} = 2\sum_{r=1}^\infty \operatorname{Re} g_r^1 z_1^r.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|y_1(0)|^2}^{z_1}\frac{dz_1}{z_1\sum\limits_{r=1}^{\infty}\operatorname{Re} g_r^1 z_1^r}=\tau, \tag{3.1}$$

и после обращения интеграла найдем

$$z_1 = z_1(\tau).$$

Теперь очевидным образом будем иметь из первого и третьего уравнений (1.8)

$$y_1(\tau) = y_1(0)\, e^{i\tau} \exp\left[\int\limits_0^{\tau}\sum_{r=1}^{\infty} g_r^1 z_1(s)^r\, ds\right], \tag{3.2}$$

$$y_0(\tau) = y_0(0)\, e^{-\delta\tau} \exp\left[\int\limits_0^{\tau}\sum_{r=1}^{\infty} g_r^0 z_1(s)^r\, ds\right]. \tag{3.3}$$

Поскольку нормализующее преобразование выбрано нами гладким (конец п. 1.2), то интегрирование в (3.1)—(3.3) оправдано.

З а м е ч а н и е. В случае системы (1.8) к этому же результату можно прийти, умножая второе уравнение (1.8) на y_1, а первое — на $\bar{y}_1$ и складывая их. Нашей целью было проиллюстрировать п. V,2.3.

Остановимся в заключение на той ситуации в рамках общего случая, когда вычисления, как это имело место в п. 1.2, доведены до третьих степеней переменных включительно, т. е. когда из величин g_r^1 нам известна лишь одна — g_1^1. Из (3.1) найдем тогда

$$\frac{1}{|y_1(0)|^2}-\frac{1}{z_1}=2\operatorname{Re} g_1^1\tau,$$

откуда получим

$$z_1(\tau)=\frac{1}{|y_1(0)|^{-2}-2\operatorname{Re} g_1^1\tau}.$$

Постоянная $2\operatorname{Re} g_1^1$ играет роль константы G Ляпунова при исследовании критического случая устойчивости установившихся движений с одной парой чисто мнимых корней линейного приближения ([77а], § 40). Именно, если постоянная $\operatorname{Re} g_1^1$ положительна, то тривиальное решение неустойчиво. Если же

$$\operatorname{Re} g_1^1 < 0, \tag{3.4}$$

то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Вычислим в рамках нашего приближения (и условия (3.4))

$$\int_0^\tau z_1(s)\,ds = \int_0^\tau \frac{ds}{|y_1(0)|^{-2} - 2\operatorname{Re} g_1^1 s} = \ln\left[1 - 2\operatorname{Re} g_1^1 |y_1(0)|^2 \tau\right]^{-\frac{1}{2\operatorname{Re} g_1^1}}.$$

Теперь формулы (3.2) и (3.3) дадут

$$y_0(\tau) = y_0(0)e^{-\delta\tau}\left[1 - 2\operatorname{Re} g_1^1 |y_1(0)|^2 \tau\right]^{-\frac{g_1^0}{2\operatorname{Re} g_1^1}}, \qquad (3.5)$$

$$y_1(\tau) = y_1(0)e^{i\tau}\left[1 - 2\operatorname{Re} g_1^1 |y_1(0)|^2 \tau\right]^{-\frac{g_1^1}{2\operatorname{Re} g_1^1}}. \qquad (3.6)$$

1.4. Свободные колебания следящего электропривода. Схема следящего электропривода изображена на рис. 11. Объект (ось отработки) приводится во вращение сервомотором через редуктор.

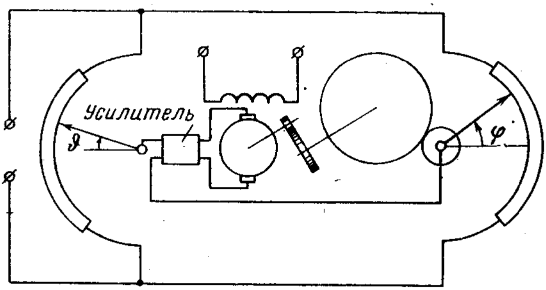

Рис. 11.

Для определенности примем, что в качестве сервомотора применен электрический мотор постоянного тока с независимым возбуждением. Ток в якоре сервомотора регулируется усилителем, на вход которого подается напряжение V, зависящее от угла рассогласования $\vartheta - \varphi$ роторов задающего сельсина и сельсина, связанного с объектом (на схеме оба сельсина заменены потенциометрами), т. е.

$$V = f(\vartheta - \varphi),$$

где φ — угол поворота объекта, ϑ — угол поворота задающей оси, отнесенный к углу поворота объекта.

Если пренебречь запаздыванием сигнала, люфтом между каждой парой сцепляющихся зубчатых колес и трением, то уравнения движения системы можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}(J_1+J_2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+c\varphi&=ki^3,\\ L\frac{di}{dt}+Ri+c_1\frac{d\varphi}{dt}&=f(\vartheta-\varphi).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь J_1 — приведенный момент инерции якоря сервомотора и вращающихся частей редуктора относительно оси ведущего звена; J_2 — момент инерции объекта относительно его оси; i — ток в цепи якоря сервомотора; L — коэффициент самоиндукции цепи якоря; R — омическое сопротивление цепи якоря; $c_1\,(d\varphi/dt)$ — противоэлектродвижущая сила, развиваемая якорем при его вращении; ki^3 — момент пондеромоторных сил, приведенный к оси ведущего звена; $c\varphi$ — момент сил сопротивления относительно оси объекта.

Примем линейную зависимость напряжения, подводимого в цепь якоря от угла рассогласования,

$$f(\vartheta-\varphi)=v\cdot(\vartheta-\varphi);$$

желая рассмотреть колебания объекта (и электропривода) при введении его в заданное положение, положим для последнего $\vartheta=0$. Введем базразмерные переменные

$$\tau=\sqrt{\frac{c}{J_1+J_2}}\,t,\quad I=\frac{R}{v}\,i.$$

Тогда уравнения движения (4.1) запишутся в виде

$$\frac{dI}{d\tau}=-\delta I-\delta\varphi-\varkappa\varphi',\quad \frac{d\varphi}{d\tau}=\varphi',\quad \frac{d\varphi'}{d\tau}=-\varphi+\gamma I^3,\tag{4.2}$$

где введены безразмерные положительные параметры

$$\gamma=\frac{kv^3}{cR^3},\quad \delta=\frac{R}{L}\sqrt{\frac{J_1+J_2}{c}},\quad \varkappa=\frac{c_1R}{Lv}.\tag{4.3}$$

Если ввести вектор $\mathbf{u}=(I,\varphi,\varphi')^\tau$, то система запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}=\mathbf{C}\mathbf{u}+\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma I^3\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{Vmatrix}-\delta&-\delta&-\varkappa\\0&0&1\\0&-1&0\end{Vmatrix}.$$

Очевидно, собственные значения матрицы $\mathbf{C}$ суть $-\delta$, i, $-i$ ($i=\sqrt{-1}$). Приведем матрицу $\mathbf{C}$ к жордановой форме; будем иметь $\mathbf{C}=\mathrm{S}\operatorname{diag}(-\delta,i,-i)\,\mathrm{S}^{-1}$, где

$$\mathrm{S}=\begin{Vmatrix}1&-\delta-i\varkappa&-\delta+i\varkappa\\0&\delta+i&\delta-i\\0&-1+i\delta&-1-i\delta\end{Vmatrix}.$$

Матрица S определит преобразование системы (4.2) $\mathbf{u}=\mathrm{S}\mathbf{x}$,

$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_{-1})^\tau$, или, в развернутом виде,

$$
\begin{aligned}
I &= x_0 - (\delta + i\varkappa)x_1 - (\delta - i\varkappa)x_{-1} = x_0 - 2\mathrm{Re}\,[(\delta + i\varkappa)x_1],\\
\varphi &= (\delta + i)x_1 + (\delta - i)x_{-1} = 2\mathrm{Re}\,[(\delta + i)x_1], \qquad (4.4)\\
\varphi' &= -(1 - i\delta)x_1 - (1 + i\delta)x_{-1} = -2\mathrm{Re}\,[(1 - i\delta)x_1].
\end{aligned}
$$

Сама же преобразованная система примет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathrm{diag}\,(-\delta, i, -i)\,\mathbf{x} + \mathrm{S}^{-1}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \gamma I^3 \end{pmatrix}. \qquad (4.5)$$

Вычисления дадут для матрицы S^{-1}

$$\mathrm{S}^{-1} = \frac{1}{2(1+\delta^2)}\begin{Vmatrix} 2(1+\delta^2) & 2(\varkappa+\delta^2) & 2\delta(\varkappa-1)\\ 0 & \delta - i & -1 - i\delta\\ 0 & \delta + i & -1 + i\delta \end{Vmatrix}.$$

Теперь остается воспользоваться первой из формул (4.4), чтобы представить систему (4.5) в виде (1.1) ($a^{\nu}_{lm} = 0$; ν, l, $m = 0, \pm 1$)

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu x_\nu &+ b^{\nu}_{000}x_0^3 + b^{\nu}_{111}x_1^3 + b^{\nu}_{-1-1-1}x_{-1}^3 +\\
&+ 3b^{\nu}_{001}x_0^2x_1 + 3b^{\nu}_{00-1}x_0^2x_{-1} + 3b^{\nu}_{011}x_0x_1^2 + 3b^{\nu}_{0-1-1}x_0x_{-1}^2 +\\
&+ 3b^{\nu}_{11-1}x_1^2x_{-1} + 3b^{\nu}_{1-1-1}x_1x_{-1}^2 + 6b^{\nu}_{01-1}x_0x_1x_{-1} \qquad (\nu = 0, \pm 1).
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&b^0_{000} = \Delta(\varkappa - 1)\,\delta, \qquad b^0_{111} = \overline{b^0_{-1-1-1}} = -\Delta(\varkappa - 1)\,\delta\,(\delta + i\varkappa)^3,\\
&b^0_{001} = \overline{b^0_{00-1}} = -\Delta(\varkappa - 1)\,\delta\,(\delta + i\varkappa),\\
&b^0_{011} = \overline{b^0_{0-1-1}} = \Delta(\varkappa - 1)\,\delta\,(\delta + i\varkappa)^2,\\
&b^0_{11-1} = \overline{b^0_{1-1-1}} = -\Delta(\varkappa - 1)\,\delta\,(\delta^2 + \varkappa^2)(\delta + i\varkappa),\\
&b^0_{01-1} = \Delta(\varkappa - 1)\,\delta\,(\delta^2 + \varkappa^2), \qquad b^1_{000} = -\frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta),\\
&b^1_{111} = \frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta)(\delta + i\varkappa)^3, \qquad b^1_{001} = \frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta)(\delta + i\varkappa), \qquad (4.6)\\
&b^1_{011} = -\frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta)(\delta + i\varkappa)^2, \quad b^1_{01-1} = -\frac{1}{2}\Delta(\delta^2 + \varkappa^2)(1 + i\delta),\\
&b^1_{11-1} = \frac{1}{2}\Delta(\delta^2 + \varkappa^2)(1 + i\delta)(\delta + i\varkappa),\\
&b^1_{-1-1-1} = \frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta)(\delta - i\varkappa)^3,\\
&b^1_{00-1} = \frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta)(\delta - i\varkappa), \quad b^1_{0-1-1} = -\frac{1}{2}\Delta(1 + i\delta)(\delta - i\varkappa)^2,\\
&b^1_{1-1-1} = \frac{1}{2}\Delta(\delta^2 + \varkappa^2)(1 + i\delta)(\delta - i\varkappa),
\end{aligned}
$$

где $\Delta = \gamma(1+\delta^2)^{-1}$. Поскольку в нашей задаче $a^{\nu}_{lm} = 0$, то в силу (2.1) $\alpha^{\nu}_{lm} = 0$ (ν, l, $m = 0, \pm 1$), и формулы (2.4), (2.5) дадут нам

$$g_1^0 = 6\Delta(\varkappa - 1)\delta(\delta^2 + \varkappa^2),$$
$$g_1^1 = \frac{3}{2}\Delta(\delta^2 + \varkappa^2)[(1-\varkappa)\delta + i(\varkappa + \delta^2)].$$

Условие (3.4) асимптотической устойчивости примет вид (см. также (4.3))

$$\varkappa > 1 \qquad (Lv < c_1 R). \tag{4.7}$$

Предполагая это условие выполненным, обозначим

$$\begin{aligned} a^2 &= -2\operatorname{Re} g_1^1 = 3\Delta(\varkappa - 1)\delta(\delta^2 + \varkappa^2), \\ b^2 &= -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{Im} g_1^1}{\operatorname{Re} g_1^1} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa + \delta^2}{(\varkappa - 1)\delta}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Формулы (3.5) и (3.6) дадут в этих обозначениях

$$y_0(\tau) = y_0(0)e^{-\delta\tau}(1 + a^2|y_1(0)|^2\tau)^2, \tag{4.9}$$

$$y_1(\tau) = y_1(0)(1 + a^2|y_1(0)|^2\tau)^{-1/2} \times$$
$$\times \exp i[\tau + b^2 \ln(1 + a^2|y_1(0)|^2\tau)].$$

Используя формулы (V,3,2.3), (2.3) и (4.6), выпишем нормализующее преобразование (1.3):

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 + \frac{\gamma(\varkappa-1)\delta}{1+\delta^2}\Big\{&-\frac{1}{2\delta}y_0^3 - 2\operatorname{Re}\left[\frac{(\delta+i\varkappa)^3}{\delta+3i}y_1^3\right] + \\ &+ 6y_0^2\operatorname{Re}\left(\frac{\delta+i\varkappa}{\delta-i}y_1\right) - 3y_0\operatorname{Re}[i(\delta+i\varkappa)^2y_1^2] - \\ &- 6(\delta^2+\varkappa^2)y_1y_{-1}\operatorname{Re}\left(\frac{\delta+i\varkappa}{\delta+i}y_1\right)\Big\} + [4], \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma(1+i\delta)}{1+\delta^2}\Big\{&\frac{1}{3\delta+i}y_0^3 - \frac{1}{2}i(\delta+i\varkappa)^3y_1^3 + \\ &+ \frac{1}{4}i(\delta-i\varkappa)^3y_{-1}^3 - \frac{3}{2\delta}(\delta+i\varkappa)y_0^2y_1 - \frac{3}{2}\frac{\delta-i\varkappa}{\delta+i}y_0^2y_{-1} + \\ &+ 3\frac{(\delta+i\varkappa)^2}{\delta-i}y_0y_1^2 + 3\frac{(\delta-i\varkappa)^2}{\delta+3i}y_0y_{-1}^2 + \\ &+ \frac{3}{2}(\delta^2+\varkappa^2)(\varkappa+i\delta)y_1y_{-1}^2 + 6\frac{\delta^2+\varkappa^2}{\delta+i}y_0y_1y_{-1}\Big\} + [4]. \end{aligned}$$

Для того чтобы начальные значения $y_0(0)$ и $y_1(0)$ выразить через $x_0(0)$ и $x_1(0)$, потребуется обращение формул (4.10); оно, очевидно, сводится к перемене знака перед фигурной скобкой. Обращаясь к формулам (4.4) и (4.9), можно выписать формулы, дающие решение задачи Коши в общем виде с точностью до членов третьей степени переменных включительно. Мы этого, однако, делать не будем, а выделим главную часть решения.

Главной частью решения в рамках сделанного приближения назовем решение нормальной формы, взятое с точностью до третьих степеней переменных включительно, преобразованное нормализующим преобразованием с точностью до вторых степеней переменных включительно. Для главной части угла поворота φ объекта будем иметь из (4.4), (4.9) и (4.10)

$$\varphi(\tau) = 2\,\mathrm{Re}\,[(\delta+i)\,x_1(\tau)] \approx 2\,\mathrm{Re}\,[(\delta+i)\,y_1(\tau)] \approx \\ \approx 2\,\mathrm{Re}\left\{(\delta+i)\frac{x_1(0)}{\sqrt{1+a^2|x_1(0)|^2\tau}}\times\right. \\ \left.\times \exp i\,[\tau+b^2\ln(1+a^2|x_1(0)|^2\tau)]\right\} = \left[1+a^2\frac{\varphi^2(0)+\varphi'^2(0)}{4(1+\delta^2)}\tau\right]^{-1/2}\times \\ \times\left\{\varphi(0)\cos\left[\tau+b^2\ln\left(1+a^2\frac{\varphi^2(0)+\varphi'^2(0)}{4(1+\delta^2)}\tau\right)\right]+\right. \\ \left.+\varphi'(0)\sin\left[\tau+b^2\ln\left(1+a^2\frac{\varphi^2(0)+\varphi'^2(0)}{4(1+\delta^2)}\tau\right)\right]\right\}. \tag{4.11}$$

Выводы. 1) Определена граница автоколебаний (см. (4.7)):

$$\varkappa = 1 \qquad (Lv = c_1R).$$

2) Практическая степень точности главной части решения определяется сравнением (4.11) с решением задачи Коши. Последнее дается формулами (4.4), (4.10) и (4.9).

§ 2. Случай нейтральности линейного приближения

2.1. Нормальная форма. Вернемся к п. 1.1 и рассмотрим случай $\delta = 0$, повторив все рассуждения до резонансного уравнения (1,1.6), которое запишется теперь в виде

$$q_{-1} - q_1 = 0. \tag{1.1}$$

Итак, q_0, q_1 — «произвольны», $q_{-1} = q_1$. Разумеется (и поэтому поставлены кавычки) $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}$, т. е.

$$q_\nu \geqslant -1, \quad q_j \geqslant 0 \qquad (j \neq \nu) \qquad (\nu = 0, \pm 1),$$
$$q_0 + q_1 + q_{-1} = q_0 + 2q_1 \geqslant 1.$$

Для членов $2r$-й степени нормальной формы ($q_0 + 2q_1 = 2r - 1$) возможен следующий набор показателей степеней (индекс при $\mathbf{Q}$

отмечает номер уравнения):

$$\mathbf{Q}_0 = (-1, r, r),\ (1, r-1, r-1), \ldots, (2r-1, 0, 0),$$
$$\mathbf{Q}_{\pm 1} = \qquad\qquad (1, r-1, r-1), \ldots, (2r-1, 0, 0).$$

Для членов $(2r+1)$-й степени нормальной формы ($q_0 + 2q_1 = 2r$; $r = 1, 2, \ldots$) вектор $\mathbf{Q}$ принимает значения

$$\mathbf{Q} = (0, r, r), (2, r-1, r-1), \ldots, (2r, 0, 0),$$

независимо от номера уравнения нормальной формы.

После того как найдены все решения резонансного уравнения (1.1), запишем нормальную форму (V,1,2.4) как

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = y_\nu \sum_{\substack{s \geqslant 0\ (\text{если } \nu \neq 0)\\ s \geqslant -1 (\text{если } \nu = 0)\\ \sigma \geqslant 0}} G^\nu_{s\sigma} y_0^s y_1^\sigma y_{-1}^\sigma \quad (\nu = 0, \pm 1), \tag{1.2}$$

или, в развернутом виде,

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = iy_\nu \delta_{|\nu|1} \operatorname{sign} \nu + y_\nu \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{r} [g^\nu_{2(r-p)-1,\, p}\, y_0^{-1} +$$
$$+ g^\nu_{2(r-p),\, p}]\, y_0^{2(r-p)} y_1^p y_{-1}^p \quad (\nu = 0, \pm 1). \tag{1.2a}$$

При этом

$$g^{\pm 1}_{-1r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{1.3}$$

ибо, как следует из вычисления $\mathbf{Q}_\nu$, в двух последних уравнениях ($\nu = \pm 1$) нет членов с y_0^{-1}.

Отметим, что нормальная форма усложнилась по сравнению с (1,1.8). И это не только усложнение записи, но и по существу. Во-первых, теперь число l собственных значений линейной части системы, расположенных на мнимой оси, равно порядку системы ($l = 3$) и теорема А. Д. Брюно п. V,2.2 не дает никаких упрощений. Во-вторых, все решения резонансного уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\mathbf{Q} = q_0 (1, 0, 0) + q_1 (0, 1, 1)$$
$$(q_0 = -1, 0, 1, 2, \ldots;\ q_1 = 0, 1, 2, \ldots),$$

где q_0 и q_1 не равны нулю одновременно. Это означает, что число d линейно-независимых решений резонансного уравнения равно двум. По теореме А. Д. Брюно п. V,2.3 существует бирациональное преобразование, переводящее нормальную форму в систему (V,2,3.3) (уже не являющуюся нормальной формой), в которой первые два уравнения образуют систему второго порядка, а третье уравнение сводится к квадратуре. Впрочем, эту систему второго порядка можно получить непосредственно, умножив второе и третье уравнения (1.2) соответственно на $y_{-1} = \bar{y}_1$ и $\dot{y}_1$ и сложив их:

$$\frac{dy_0}{d\tau} = y_0 \sum_{\substack{s \geqslant -1 \\ \sigma \geqslant 0}} G^0_{s\sigma} y_0^s z^\sigma, \qquad \frac{dz}{d\tau} = 2z \sum_{\substack{s,\, \sigma \geqslant 0 \\ s+\sigma > 0}} \operatorname{Re} G^1_{s\sigma} y_0^s z^\sigma \tag{1.4}$$

($z = y_{-1}y_1 = |y_1|^2$). Если исходить из (1.2а), то получим в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{d\tau} &= y_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{r} [g^0_{2(r-p)-1,\, p} y_0^{-1} + g^0_{2(r-p),\, p}]\, y_0^{2(r-p)} z^p, \\ \frac{dz}{d\tau} &= 2z \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{r} [\operatorname{Re} g^1_{2(r-p)-1,\, p} y_0^{-1} + \operatorname{Re} g^1_{2(r-p),\, p}]\, y_0^{2(r-p)} z^p. \end{aligned} \tag{1.4a}$$

2.2. Вычисление коэффициентов нормализующего преобразования и нормальной формы. Следуя альтернативе п. V,3.2, выделим все значения индексов ν, l, m, при которых $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m$. Будем иметь в силу обозначений (V,3,2.1)

$$\Delta^0_{00} = \Delta^0_{\{1-1\}} = \Delta^1_{\{01\}} = \Delta^{-1}_{\{0-1\}} = 1, \quad \Delta^\nu_{lm} = 0$$

$$(\nu, l, m = 0, \pm 1;\ \nu, l, m \neq 0, 0, 0;\ 0, \{1, -1\};\ 1, \{0, 1\};\ -1, \{0, -1\}). \tag{2.1}$$

Выберем для α^ν_{lm}, определяемых случаем 2) альтернативы, нулевые значения:

$$\alpha^0_{00} = \alpha^0_{\{1-1\}} = \alpha^1_{\{01\}} = \alpha^{-1}_{\{0-1\}} = 0. \tag{2.2}$$

Для этих же значений ν, l, m будем иметь по формулам (V,3,2.4) для квадратичных коэффициентов нормальной формы

$$\begin{aligned} g^0_{10} &= \varphi^0_{00} = a^0_{00}, & g^0_{-11} &= 2\varphi^0_{1-1} = 2a^0_{1-1}, \\ g^1_{10} &= 2\varphi^1_{01} = 2a^1_{01}, & g^{-1}_{10} &= 2\varphi^{-1}_{0-1} = 2a^{-1}_{0-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для оставшихся квадратичных коэффициентов нормализующего преобразования формула (V,3,2.2) дает

$$\alpha^\nu_{lm} = \frac{a^\nu_{lm}}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu}$$

$$(\nu, l, m = 0, \pm 1;\ \nu, l, m \neq 0, 0, 0;\ 0, \{1, -1\};\ 1, \{0, 1\};\ -1, \{0, -1\}). \tag{2.4}$$

Переходя к кубическим членам, снова прежде всего выделим те значения индексов ν, l, m, p, при которых $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$ и положим для них

$$\beta^0_{000} = \beta^0_{\{01-1\}} = \beta^1_{\{001\}} = \beta^1_{\{11-1\}} = \beta^{-1}_{\{00-1\}} = \beta^{-1}_{\{1-1-1\}} = 0, \tag{2.5}$$

где, напомним, $\{l, m, p\}$ обозначает любую перестановку чисел l, m, p. Для соответствующих кубических коэффициентов нормальной формы по формуле (V,3,2.6) будем иметь (учитывая (2.2))

$$\begin{aligned}
g_{20}^0 &= \chi_{000}^0 = b_{000}^0 + 2\sum_{j=0,\pm1} a_{0j}^0\alpha_{00}^j,\\
g_{01}^0 &= 6\chi_{01-1}^0 = 6b_{01-1}^0 + 4\sum_j (a_{0j}^0\alpha_{1-1}^j + a_{1j}^0\alpha_{-10}^j + a_{-1j}^0\alpha_{01}^j),\\
g_{20}^1 &= 3\chi_{001}^1 = 3b_{001}^1 + 2\sum_j (2a_{0j}^1\alpha_{01}^j + a_{1j}^1\alpha_{00}^j),\\
g_{01}^1 &= 3\chi_{11-1}^1 = 3b_{11-1}^1 + 2\sum_j (2a_{1j}^1\alpha_{1-1}^j + a_{-1j}^1\alpha_{11}^j),\\
g_{20}^{-1} &= 3\chi_{00-1}^{-1} = 3b_{00-1}^{-1} + 2\sum_j (2a_{0j}^{-1}\alpha_{0-1}^j + a_{-1j}^{-1}\alpha_{00}^j),\\
g_{01}^{-1} &= 3\chi_{1-1-1}^{-1} = 3b_{1-1-1}^{-1} + 2\sum_j (a_{1j}^{-1}\alpha_{-1-1}^j + 2a_{-1j}^{-1}\alpha_{1-1}^j).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для оставшихся кубических членов нормализующего преобразования формула (V,3,2.3) даст

$$\beta_{lmp}^\nu = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_\nu}\Big[b_{lmp}^\nu + \frac{2}{3}\sum_{j=0,\pm1}(a_{lj}^\nu\alpha_{mp}^j + a_{mj}^\nu\alpha_{pl}^j + a_{pj}^\nu\alpha_{lm}^j)\Big] \tag{2.7}$$

$(\nu, l, m, p = 0, \pm 1;\ \nu, l, m, p \neq 0, 0, 0, 0;\ 0, \{0, 1, -1\};$
$1, \{0, 0, 1\}; 1, \{1, 1, -1\}; -1, \{0, 0, -1\}; -1, \{1, -1, -1\})$.

Выпишем нормализующее преобразование (1,1.3) с точностью до вторых степеней переменных включительно, учитывая (2.2) и вещественность исходной системы

$$\begin{aligned}
x_0 &= y_0 + 2\mathrm{Re}\,(\alpha_{11}^0 y_1^2) + 4\mathrm{Re}\,(\alpha_{01}^0 y_0 y_1) + [3], \qquad (2.8)\\
x_1 &= \bar{x}_{-1} = y_1 + \alpha_{00}^1 y_0^2 + \alpha_{11}^1 y_1^2 + \alpha_{-1-1}^1 y_{-1}^2 + \\
&\quad + 2\alpha_{0-1}^1 y_0 y_{-1} + 2\alpha_{1-1}^1 |y_1|^2 + [3].
\end{aligned}$$

Коэффициенты здесь выражаются по формулам (2.4) через коэффициенты системы диагонального вида (1,1.1) ($\delta = 0$) следующим образом:

$$\alpha_{11}^0 = -\frac{1}{2}ia_{11}^0, \quad \alpha_{01}^0 = -ia_{01}^0, \quad \alpha_{00}^1 = ia_{00}^1,$$
$$\alpha_{11}^1 = -ia_{11}^1, \quad \alpha_{-1-1}^1 = \frac{1}{3}ia_{-1-1}^1, \quad \alpha_{0-1}^1 = \frac{1}{2}ia_{0-1}^1, \quad \alpha_{1-1}^1 = ia_{1-1}^1.$$

Используя формулы (2.5) и (2.7), можно выписать в (2.8) и члены с третьими степенями переменных.

2.3. Замечание о сходимости. Следуя теореме А. Д. Брюно (п. V,2.4), начнем с условия ω. Очевидно, что

$$|(\Lambda, Q)| = |q_1 - q_{-1}|,$$

и по определению (V, 2,4.1) имеем

$$\omega_k = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Условие ω (см. (V, 2,4.2)) выполнено, поскольку его левая часть равна нулю.

В нашем случае все собственные значения матрицы линейной части исходной системы находятся на мнимой оси и попарно соизмеримы, следовательно, мы находимся в случае 1*), п. V,2.4, когда условие A сводится к условию A′:

$$\psi_j = \lambda_j y_j a(y_0, y_1, y_{-1}) \qquad (j = 0, \pm 1), \tag{3.1}$$

где ψ_j — правые части уравнений (1.2а). Условия (3.1) выполнены в том исключительном случае, когда правая часть первого уравнения (1.2а) тождественно равна нулю, а все коэффициенты правых частей второго уравнения (1.2а) чисто мнимые или равны нулю.

При выполнении этих условий нормализующее преобразование этого пункта при условии, что все его произвольно выбираемые коэффициенты положены нулями, сходится в некоторой окрестности нуля.

2.4. Некоторые суждения об устойчивости. Выпишем в системе уравнений (1.2) члены до второй степени переменных включительно; учитывая (2.3), будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{dy_0}{d\tau} &= a_{00}^0 y_0^2 + 2a_{1-1}^0 y_1 \bar{y}_1 + [3],\\
\frac{dy_1}{d\tau} &= i y_1 + 2a_{01}^1 y_0 y_1 + [3],\\
\frac{d\bar{y}_1}{d\tau} &= -i\bar{y}_1 + 2\overline{a_{01}^1} y_0 \bar{y}_1 + [3].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Умножая второе уравнение на $\bar{y}_1$, а третье уравнение — на y_1 и складывая, получим укороченную систему уравнений

$$\frac{dy_0}{d\tau} = a_{00}^0 y_0^2 + 2a_{1-1}^0 \rho^2, \qquad \frac{d\rho}{d\tau} = 2\operatorname{Re} a_{01}^1 y_0 \rho \tag{4.2}$$

с вещественными коэффициентами и неотрицательной переменной $\rho = |y_1|$ (в отличие от (1.4а), где $z = \rho^2$). Заметим, что система (4.2) **однородна и, следовательно, интегрируется. Это свойство присуще всем укороченным системам второго порядка, ибо они имеют «размерность 1» по терминологии [234в], § 2.**

Как известно ([145а], п. 13), для того чтобы обнаружить неустойчивость тривиального решения системы (4.2), достаточно за-

метить всего одну траекторию, выходящую за заданную область

$$\tau \geqslant \tau_0, \quad y_0^2 + \rho^2 \leqslant R^2$$

при сколь угодно малых значениях начальных возмущений $y_0^0 = y_0(\tau_0)$ и $\rho_0 = \rho(\tau_0)$.

Рассмотрим возникающие здесь ситуации.

I. Пусть $a_{00}^0 \neq 0$. Рассмотрим решения системы (4.2), начинающиеся на оси y_0, т. е. для которых $\rho_0 = 0$. Из второго уравнения (4.2) имеем $(d\rho/d\tau)_0 = 0$, следовательно, для этих решений $\rho(\tau) \equiv 0$. Подчиним сколь угодно малое начальное значение y_0^0 условию

$$\operatorname{sign} y_0^0 = \operatorname{sign} a_{00}^0.$$

Как следует из первого уравнения (4.2), для таких решений будем иметь

$$|\,y_0(\tau)\,| > |\,a_{00}^0\,|\, y_0^{0^2}\tau,$$

что и означает неустойчивость тривиального решения системы (4.2) при $a_{00}^0 \neq 0$.

II. Допустим, что $a_{00}^0 = 0$, но $a_{1-1}^0 \neq 0$, $\operatorname{Re} a_{01}^1 \neq 0$. Разделив первое уравнение (4.2) на второе, получим

$$\frac{dy_0}{d\rho} = \frac{a_{1-1}^0}{\operatorname{Re} a_{01}^1}\frac{\rho}{y_0},$$

и отсюда найдем первый интеграл системы (4.2) (при $a_{00}^0 = 0$):

$$y_0^2 - \frac{a_{1-1}^0}{\operatorname{Re} a_{01}^1}\rho^2 = c.$$

Очевидно, при условиях

$$a_{00}^0 = 0, \qquad a_{1-1}^0 \operatorname{Re} a_{01}^1 < 0 \tag{4.3}$$

тривиальное решение системы (4.2) устойчиво (начало координат является *центром*), а при условиях

$$a_{00}^0 = 0, \qquad a_{1-1}^0 \operatorname{Re} a_{01}^1 > 0$$

тривиальное решение системы (4.2) неустойчиво (начало координат является *седлом*).

III. Допустим, что $a_{00}^0 = a_{1-1}^0 = 0$, $\operatorname{Re} a_{01}^1 \neq 0$. Из первого уравнения (4.2) имеем $y_0(\tau) \equiv y_0^0$. Выбирая y_0^0 из условия $\operatorname{sign} y_0^0 = \operatorname{sign} \operatorname{Re} a_{01}^1$, будем иметь для таких решений в силу второго уравнения (4.2), что $\rho \to \infty$ при $\tau \to \infty$ и $\rho_0 > 0$, — тривиальное решение системы (4.2) неустойчиво.

IV. Допустим, наконец, что $a_{00}^0 = \operatorname{Re} a_{01}^1 = 0$, $a_{1-1}^0 \neq 0$. Второе уравнение (4.2) дает нам $\rho(\tau) \equiv \rho_0$. Траектория, для которой

$\operatorname{sign} y_0^0 = \operatorname{sign} a_{1-1}^0$, $\rho_0 > 0$, уходит в бесконечность; опять-таки неустойчивость.

Итак, тривиальное решение системы (4.2) (а следовательно, и укороченной системы (4.1)) устойчиво лишь при условиях (4.3). Случай $a_{00}^0 = a_{1-1}^0 = \operatorname{Re} a_{01}^1 = 0$ требует исследования по членам не ниже третьей степени.

Замечание. Критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений рассмотрен Г. В. Каменковым ([54], т. I) и И. Г. Малкиным ([79в], § 96). Подчеркнем, что система (4.2) содержит всего лишь три коэффициента, что вместе с условием неотрицательности [1]) переменной ρ и определило специфику исследования по сравнению с общим случаем ([79в], §§ 94, 96). Однако мы не можем утверждать, что нормализующее преобразование (и, следовательно, нормальная форма) может быть выбрано аналитическим в окрестности нуля. Это обстоятельство не позволяет перенести суждения об устойчивости тривиального решения системы (4.2) на устойчивость невозмущенного движения (тривиального решения исходной системы (1,1.1) при $\delta = 0$). Заметим, что при $a_{00}^0 \neq 0$ неподвижная точка будет неустойчивой не только в укороченной, но и в полной системе (4.2). Это соответствует гипотезе 2 [234и], которая еще не доказана. Применять ее нужно к решению $\rho \equiv 0$. Если же выполнены условия (4.3), то укороченная система обладает устойчивостью нейтрального типа, которая может быть изменена на неустойчивость влиянием неучтенных членов более высокой степени.

2.5. Интегрирование нормальной формы в квадратичном приближении. Вернемся к укороченной системе (4.2). Рассмотрим сначала частные случаи, понимая ниже под квадратным корнем его арифметическое значение.

1) Допустим, что $\operatorname{Re} a_{01}^1 = 0$, $a_{00}^0 \neq 0$, $a_{1-1}^0 \neq 0$. Второе уравнение (4.2) дает $\rho \equiv \rho_0$, а первое — запишется в виде

$$\frac{dy_0}{d\tau} = a_{00}^0 y_0^2 + 2a_{1-1}^0 \rho_0^2$$

и после интегрирования дает нам

а) если $a \equiv a_{00}^0/(2a_{1-1}^0) > 0$, то

$$y_0 = \frac{y_0^0 + \dfrac{\rho_0}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} \dfrac{a_{00}^0 \rho_0}{\sqrt{a}} \tau}{1 - \dfrac{\sqrt{a}\, y_0^0}{\rho_0} \operatorname{tg} \dfrac{a_{00}^0 \rho_0}{\sqrt{a}} \tau};$$

[1]) Для применения теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости необходимо наличие области, содержащей внутри себя отрезок оси y_0(см.[79 в], стр. 414), что невозможно при $\rho \geqslant 0$.

б) если $a < 0$, то

$$y_0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{-a}}\,\frac{1+ke^{c\tau}}{1-ke^{c\tau}} \qquad \left(k = \frac{\sqrt{-a}\,y_0^0-\rho_0}{\sqrt{-a}\,y_0^0+\rho_0},\ c = \frac{2a_{00}^0\rho_0}{\sqrt{-a}}\right)$$

(здесь и ниже $\tau_0 = 0$, $y_0^0 = y_0(0)$).

2) Допустим, что $\operatorname{Re} a_{01}^1 = a_{00}^0 = 0$, $a_{1-1}^0 \neq 0$. Решение системы (4.2) очевидно:

$$\rho = \rho_0, \quad y_0 = 2a_{1-1}^0\rho_0^2\tau + y_0^0.$$

3) Допустим, что $\operatorname{Re} a_{01}^1 = a_{1-1}^0 = 0$, $a_{00}^0 \neq 0$. Решение системы (4.2) также очевидно:

$$\rho = \rho_0, \quad y_0 = \left(\frac{1}{y_0^0} - a_{00}^0\tau\right)^{-1}.$$

4) Допустим, что $a_{00}^0 = 0$, $a_{1-1}^0 \neq 0$, $\operatorname{Re} a_{01}^1 \neq 0$. Разделив первое уравнение (4.2) на второе и проинтегрировав, получим первый интеграл системы (4.2)

$$y_0^2 - y_0^{0^2} = \frac{a_{1-1}^0}{\operatorname{Re} a_{01}^1}(\rho^2 - \rho_0^2).$$

Подставляя этот интеграл в первое уравнение (4.2), будем иметь

$$\frac{dy_0}{d\tau} = 2\operatorname{Re} a_{01}^1(y_0^2 - R) \qquad \left(R = y_0^{0^2} - \frac{a_{1-1}^0}{\operatorname{Re} a_{01}^1}\rho_0^2\right).$$

Аналогично 1) рассмотрим следующие случаи:

а) Если $R < 0$ (что возможно лишь при $a_{1-1}^0/\operatorname{Re} a_{01}^1 > 0$), то

$$y_0 = \frac{y_0^0 + \sqrt{-R}\,\operatorname{tg}(2\sqrt{-R}\operatorname{Re} a_{01}^1\tau)}{1 - \dfrac{y_0^0}{\sqrt{-R}}\operatorname{tg}(2\sqrt{-R}\operatorname{Re} a_{01}^1\tau)},$$

$$\rho^2 = -R\frac{\operatorname{Re} a_{01}^1}{a_{1-1}^0}\left(1 - \frac{y_0^{0^2}}{R}\right)\frac{\sec^2(2\sqrt{-R}\operatorname{Re} a_{01}^1\tau)}{\left[1 - \dfrac{y_0^0}{\sqrt{-R}}\operatorname{tg}(2\sqrt{-R}\operatorname{Re} a_{01}^1\tau)\right]^2}.$$

б) Если $R = 0$ (что опять-таки возможно лишь при $a_{1-1}^0/\operatorname{Re} a_{01}^1 > 0$), то

$$y_0 = \left(\frac{1}{y_0^0} - 2\operatorname{Re} a_{01}^1\tau\right)^{-1}, \quad \rho^2 = \frac{\operatorname{Re} a_{01}^1}{a_{1-1}^0}\left(\frac{1}{y_0^0} - 2\operatorname{Re} a_{01}^1\tau\right)^{-2}.$$

в) Если $R > 0$, то

$$y_0 = -\sqrt{R}\,\frac{(\sqrt{R}-y_0^0)\,e^{K\tau}-(\sqrt{R}+y_0^0)\,e^{-K\tau}}{(\sqrt{R}-y_0^0)\,e^{K\tau}+(\sqrt{R}+y_0^0)\,e^{-K\tau}} \qquad (K = 2\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\,a_{01}^1),$$

$$\rho^2 = -4\,\frac{\mathrm{Re}\,a_{01}^1}{a_{1-1}^0}\,R\,(R-y_0^{0^2})[(\sqrt{R}-y_0^0)\,e^{K\tau}+(\sqrt{R}+y_0^0)e^{-K\tau}]^{-2}. \tag{5.1}$$

Очевидно, что $\rho(\infty) = 0$, а $y_0(\infty) = -\sqrt{R}$ при $\mathrm{Re}\,a_{01}^1 > 0$ и $y_0(\infty) = \sqrt{R}$ при $\mathrm{Re}\,a_{01}^1 < 0$ и в плоскости ρy_0 каждое решение системы (4.2) описывает дугу эллипса (5.1) одним из двух способов (в зависимости от $\mathrm{sign}\,\mathrm{Re}\,a_{01}^1$), как показано на рис. 12.

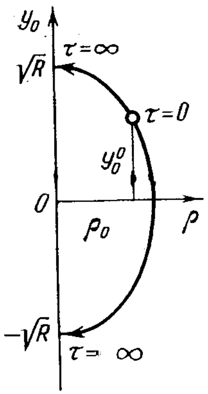

Рис. 12.

Заметим, что случай в) при любых начальных значениях ρ_0, y_0^0 $(\rho_0 + y_0^{0^2} > 0)$ возможен лишь при условиях (4.3).

5) Допустим, что $a_{1-1}^0 = 0$, $a_{00}^0 \neq 0$, $\mathrm{Re}\,a_{01}^1 \neq 0$. В этом случае интегрирование системы (4.2) дает нам

$$y_0 = \left(\frac{1}{y_0^0} - a_{00}^0\tau\right)^{-1},$$

$$\rho = \rho_0\,(1 - a_{00}^0 y_0^0 \tau)^{-\frac{2\,\mathrm{Re}\,a_{01}^1}{a_{00}^0}}.$$

Рассмотрим теперь **общий случай**, когда в системе (4.2) все три коэффициента отличны от нуля. Разделив первое уравнение (4.2) на второе, получим

$$\frac{dy_0}{d\rho} = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{y_0}{\rho} + \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\rho}{y_0}$$

$$(\alpha = a_{00}^0, \quad \beta = 2a_{1-1}^0, \quad \gamma = 2\,\mathrm{Re}\,a_{01}^1).$$

Известная подстановка $y_0 = \rho u(\rho)$ приведет это уравнение к виду

$$\rho u\,\frac{du}{d\rho} = \left(\frac{\alpha}{\gamma} - 1\right)u^2 + \frac{\beta}{\gamma}. \tag{5.2}$$

6) Допустим, что $a_{00}^0 = 2\mathrm{Re}\,a_{01}^1 \neq 0$ $(\alpha = \gamma)$, $a_{1-1}^0 \neq 0$. Выполняя интегрирование в (5.2), найдем

$$y_0 = \pm\rho\sqrt{\frac{y_0^{0^2}}{\rho_0^2} + 2\,\frac{\beta}{\gamma}\ln\frac{\rho}{\rho_0}}.$$

Подставляя во второе уравнение (4.2), придем к квадратуре

$$\pm\frac{1}{\gamma}\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\dfrac{y_0^{0^2}}{\rho_0^2}+2\dfrac{\beta}{\gamma}\ln\dfrac{\rho}{\rho_0}}}=\tau.$$

Обращение этого интеграла даст нам $\rho=\rho(\tau;\ \rho_0,\ y_0^0)$.

7) Допустим, наконец, что $a_{00}^0\neq 0$, $a_{1-1}^0\neq 0$, $\operatorname{Re}a_{01}^1\neq 0$ и $a_{00}^0\neq 2\operatorname{Re}a_{01}^1$ $(\alpha\neq\gamma)$. Из (5.2) получим первый интеграл системы (4.2)

$$\left|\frac{(\alpha-\gamma)\,y_0^2+\beta\rho^2}{(\alpha-\gamma)\,y_0^{0^2}+\beta\rho_0^2}\right|=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Отсюда будем иметь

$$y_0^2=\left|\left(y_0^{0^2}+\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\rho_0^2\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2\frac{\alpha}{\gamma}}-\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\rho^2\right|,$$

и второе уравнение (4.2) приведет нас к квадратуре

$$\pm\frac{1}{\gamma}\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\rho^{-1}\left|\left(y_0^{0^2}+\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\rho_0^2\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2\frac{\alpha}{\gamma}}-\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\rho^2\right|^{-1/2}d\rho=\tau,$$

из которой определится $\rho=\rho(\tau;\ \rho_0,\ y_0^0)$.

Анализ случаев 1) — 7) обнаруживает ограниченность всех решений системы (4.2) при любом $\tau\geqslant 0$ лишь в случае 4) при условиях (4.3), что совпадает с выводами п. 2.4. Нормализующее преобразование (2.8) позволит выписать общее решение исходной системы (1,1.1) при $\delta=0$ с точностью до вторых степеней переменных включительно. Исследуя общее решение, можно, в частности, выделить области условной устойчивости в пространстве начальных значений для тех преимущественных случаев, когда тривиальное решение системы (4.2) неустойчиво.

2.6. Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dddot{u}+b^2\dot{u}=cu^3\qquad(b>0,\ c\neq 0),$$

или, вводя безразмерное время $\tau=bt$, уравнение

$$u'''+u'=\gamma u^3\qquad\left('=\frac{d}{d\tau},\quad \gamma=\frac{c}{b^3}\right),\tag{6.1}$$

представимое в виде системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}=\mathbf{A}\mathbf{u}+\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma u^3\end{pmatrix}\qquad\left(\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\u'\\u''\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{Vmatrix}\right).\tag{6.2}$$

Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ суть 0, i, $-i$. Выпишем матрицу S (и ей обратную), приводящую матрицу $\mathbf{A}$ к диагональной форме

$$\mathrm{S}=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & i & -i\\ 0 & -1 & -1\end{Vmatrix},\quad \mathrm{S}^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}\end{Vmatrix}. \tag{6.3}$$

Замена

$$\mathbf{u}=\mathrm{S}\mathbf{x},\qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_{-1}\end{pmatrix} \tag{6.4}$$

приведет систему (6.2) к диагональному виду

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}=\operatorname{diag}(0,i,-i)+\mathrm{S}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma(x_0+x_1+x_{-1})^3\end{pmatrix},$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{d\tau}&=\gamma(x_0+x_1+x_{-1})^3,\\ \frac{dx_1}{d\tau}&=ix_1-\frac{1}{2}\gamma(x_0+x_1+x_{-1})^3,\\ \frac{dx_{-1}}{d\tau}&=-ix_{-1}-\frac{1}{2}\gamma(x_0+x_1+x_{-1})^3.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Поскольку квадратичные члены в системе (6.5) отсутствуют, то и в нормальной форме они также будут отсутствовать и нормальная форма (1.2а) с точностью до кубичных членов включительно примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dy_0}{d\tau}&=g_{20}^{0}y_0^3+g_{01}^{0}y_0y_1y_{-1}+[4],\\ \frac{dy_1}{d\tau}&=iy_1+g_{20}^{1}y_0^2y_1+g_{01}^{1}y_1^2y_{-1}+[4],\\ \frac{dy_{-1}}{d\tau}&=-iy_{-1}+g_{20}^{-1}y_0^2y_{-1}+g_{01}^{-1}y_1y_{-1}^2+[4].\end{aligned} \tag{6.6}$$

Коэффициенты нормальной формы (6.6) вычисляются по формулам (2.6), где значения b_{lmn}^{ν} берутся из (6.5):

$$g_{20}^{0}=\gamma,\qquad g_{01}^{0}=6\gamma,\qquad g_{20}^{1}=g_{01}^{-1}=g_{20}^{-1}=g_{01}^{-1}=-\frac{3}{2}\gamma.$$

Умножая второе уравнение (6.6) на $y_{-1}=\bar{y}_1$, а третье на y_1 и складывая, придем к системе

$$\frac{dy_0}{d\tau}=\gamma y_0(y_0^2+6\rho^2),\qquad \frac{d\rho}{d\tau}=-\frac{3}{2}\gamma\rho(y_0^2+\rho^2)$$
$$(\rho^2=y_1y_{-1}=|y_1|^2). \tag{6.7}$$

Система (6.7) интегрируется. Мы, однако, этого проделывать не будем, ибо одного взгляда на эту систему достаточно, чтобы установить неустойчивость ее тривиального решения при любом $\gamma \neq 0$.

§ 3. Нормальные формы систем третьего порядка в случае нулевого собственного значения матрицы линейной части

3.1. Нормальная форма и нормализующее преобразование. Вернемся вновь к системе уравнений (1,1.1), в которой, однако, независимым переменным осталось t и $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -\gamma + i\omega$, $\lambda_{-1} = -\gamma - i\omega$ $(\gamma > 0,\ \omega > 0)$. Резонансное уравнение (1,1.6) примет теперь вид

$$(\Lambda, Q) = 0\cdot q_0 - \gamma(q_1 + q_{-1}) + i\omega(q_1 - q_{-1}) = 0, \tag{1.1}$$

и его решения при условии (1,1.5) суть

$$q_1 = q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1, 2, 3, \ldots . \tag{1.2}$$

Нормальная форма (V,1,2.4) примет теперь вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= y_0 \sum_{s=1}^{\infty} g_s^0 y_0^s, \\ \frac{dy_1}{dt} &= (-\gamma + i\omega) y_1 + y_1 \sum_{s=1}^{\infty} g_s^1 y_0^s, \\ \frac{dy_{-1}}{dt} &= (-\gamma - i\omega) y_{-1} + y_{-1} \sum_{s=1}^{\infty} g_s^{-1} y_0^s, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $y_{-1} = \bar{y}_1$, $g_s^{-1} = \overline{g_s^1}$.

Следуя альтернативе п. V,3.2, выделим все значения индексов ν, l, m, при которых $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m$, и положим для них

$$\alpha_{00}^0 = \alpha_{\{01\}}^1 = \alpha_{\{0-1\}}^{-1} = 0. \tag{1.4}$$

Формулы (V,3,2.4) дадут нам для соответствующих квадратичных коэффициентов нормальной формы

$$g_1^0 = \varphi_{00}^0 = a_{00}^0, \quad g_1^1 = 2\varphi_{01}^1 = 2a_{01}^1, \quad g_1^{-1} = 2\varphi_{0-1}^{-1} = 2a_{0-1}^{-1}, \tag{1.5}$$

а оставшиеся квадратичные коэффициенты нормализующего преобразования определяются формулами (V,3,2.2)

$$\alpha_{lm}^{\nu} = \frac{a_{lm}^{\nu}}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu}$$

$$(\nu, l, m = 0, \pm 1;\ \nu, l, m \neq 0, 0, 0;\ 1, \{0, 1\};\ -1, \{0, -1\}). \tag{1.6}$$

Повторяя эту процедуру для кубических членов, положим

$$\beta^0_{000} = \beta^1_{\{001\}} = \beta^{-1}_{\{00-1\}} = 0 \tag{1.7}$$

и затем по формулам (V,3,2.6) и (V,3,2.3) найдем

$$\begin{gathered} g^0_2 = \chi^0_{000} = b^0_{000} + 2 \sum_{j=0,\pm 1} a^0_{0j}\alpha^j_{00}, \\ g^1_2 = \overline{g^{-1}_2} = 3\chi^1_{001} = 3b^1_{001} + 2\sum_j (2a^1_{0j}\alpha^j_{01} + a^1_{1j}\alpha^j_{00}), \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\beta^\nu_{lmp} = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_\nu}\left[b^\nu_{lmp} + \frac{2}{3}\sum_j (a^\nu_{lj}\alpha^j_{mp} + a^\nu_{mj}\alpha^j_{pl} + a^\nu_{pj}\alpha^j_{lm})\right] \tag{1.9}$$

$(\nu,\ l,\ m,\ p = 0,\ \pm 1;\ \nu,\ l,\ m,\ p \neq 0,0,0,0;$
$1,\ \{0,\ 0,\ 1\};\ -1,\ \{0,\ 0,\ -1\})$.

Нормализующее преобразование (1,1.3) с точностью до вторых степеней переменных включительно имеет вид

$$\begin{gathered} x_0 = y_0 + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha^0_{11}y_1^2) + 2\alpha^0_{1-1}\,|\,y_1\,|^2 + \\ + 4\mathrm{Re}\,(\alpha^0_{01}y_0y_1) + [3], \quad x_1 = \bar{x}_{-1} = y_1 + \alpha^1_{00}y_0^2 + \\ + \alpha^1_{11}y_1^2 + \alpha^1_{-1-1}\bar{y}_1^2 + 2\alpha^1_{0-1}y_0\bar{y}_1 + 2\alpha^1_{1-1}\,|\,y_1\,|^2 + [3]. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Коэффициенты здесь выражаются по формулам (1.6) через коэффициенты исходной системы (1,1.1) ($\lambda_0 = 0,\ \lambda_{\pm 1} = -\gamma \pm i\omega$) следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha^0_{11} = \frac{1}{2}\frac{a^0_{11}}{-\gamma + i\omega}, \quad \alpha^0_{1-1} = -\frac{a^0_{1-1}}{2\gamma}, \quad \alpha^0_{01} = \frac{a^0_{01}}{-\gamma + i\omega}, \\ \alpha^1_{00} = \frac{a^1_{00}}{\gamma - i\omega}, \quad \alpha^1_{11} = \frac{a^1_{11}}{-\gamma + i\omega}, \quad \alpha^1_{-1-1} = -\frac{a^1_{-1-1}}{\gamma + 3i\omega}, \\ \alpha^1_{0-1} = i\frac{a^1_{0-1}}{2\omega}, \quad \alpha^1_{1-1} = -\frac{a^1_{1-1}}{\gamma + i\omega}. \end{gathered}$$

Используя формулы (1.7) и (1.9), можно продолжить (1.10) до третьих степеней включительно.

3.2. Интегрирование нормальной формы. Первое уравнение (1.3) приводит к квадратуре

$$\int_{y_0^0}^{y_0} \frac{dy}{y\sum g^0_s y^s} = t. \tag{2.1}$$

После обращения интеграла (2.1) второе (и третье) уравнения также решаются в квадратурах.

Если $g_1^0 = a_{00}^0 \neq 0$, то для второго приближения будем иметь

$$\int\limits_{y_0^0}^{y_0} \frac{dy}{a_{00}^0 y^2} = t, \qquad y_0 = \left(\frac{1}{y_0^0} - a_{00}^0 t\right)^{-1} \qquad (y_0^0 \neq 0),$$

что сразу обнаруживает неустойчивость тривиального решения системы (1.3), а следовательно, и исходной системы.

Если $g_1^0 = 0$, но $g_2^0 \neq 0$ (см. (1.8)), то будем иметь из третьего приближения

$$y_0 = \operatorname{sign} y_0^0 \, (y_0^{0^{-2}} - 2g_2^0 t)^{-1/2}.$$

Если $g_2^0 < 0$, то $y_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, как следует из второго уравнения (1.3), $y_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Итак, при $g_2^0 < 0$ тривиальное решение системы (1.3), а следовательно, и исходной системы, асимптотически устойчиво; при $g_2^0 > 0$ оно неустойчиво.

Все сказанное соответствует критическому случаю одного нулевого корня, исследованному Ляпуновым ([77а], §§ 28—32). Здесь мы также основывались на теореме Ляпунова об устойчивости по m-му приближению в первом критическом случае ([77а], § 32).

По исследованию грубости свойств устойчивости и неустойчивости мы отсылаем читателя к монографии Н. Н. Красовского ([70], § 19). Там же читатель найдет теорему об устойчивости по приближению m-го порядка (§ 22), и дополнительные результаты по критическому случаю одного нулевого корня (§ 26).

3.3. Замечание о сходимости. Обратимся к достаточным условиям сходимости нормализующего преобразования (и нормальной формы), доставляемым теоремой А. Д. Брюно (п. V,2.4). Из уравнения (1.1) видно, что

$$|(\Lambda, Q)| = +\sqrt{\gamma^2 (q_1 + q_{-1})^2 + \omega^2 (q_1 - q_{-1})^2}.$$

По определению (V,2,4.1) имеем

$$\omega_k = \Delta = \inf(\gamma, \omega) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Левая часть условия ω (п. V,2.4) запишется в виде

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \Delta}{2^k} = -\ln \Delta,$$

и условие ω, очевидно, будет выполнено. Условие A′ (п. V, 2.4) запишется в виде

$$\psi_0 \equiv 0, \tag{3.1}$$

где ψ_0 — правая часть первого уравнения (1.3). Поскольку в нашем случае имеется лишь одно собственное значение ($\lambda_0 = 0$) матрицы линейной части исходной системы, расположенное на мнимой оси, то мы находимся в случае 1*), п. V,2.4, когда условие A сводится лишь к выполнению условия A′. Итак, условия ω и A выполнены при выполнении условия (3.1) или в развернутом виде при выполнении условий

$$g_s^0 = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{3.2}$$

Следовательно, нормализующее преобразование этого пункта при условии, что все его произвольно выбираемые коэффициенты положены нулями, и при условиях (3.2) сходится в некоторой окрестности нуля.

Достаточные условия расходимости п. V,2.4 в условиях этого параграфа (а также в условиях § 1 и 2) отказывают.

3.4. Свободные колебания следящей системы с телевизионным измерительным устройством. Рассмотрим систему, состоящую из двухстепенного гироскопа, с внутренней рамкой которого жестко связано оптико-телевизионное устройство [136]. Изображение объекта слежения через оптическую систему попадает на экран электронно-лучевой трубки, на котором расположен прямоугольный растр, покрытый сеткой точечных светочувствительных элементов. При попадании объекта в поле зрения оптической системы на растре появляется пятно. Слежение за объектом осуществляется при помощи специального телевизионного измерительного устройства (ТИУ) [136] с окном прямоугольной формы, всегда расположенным на изображении объекта (рис. 13). Центр

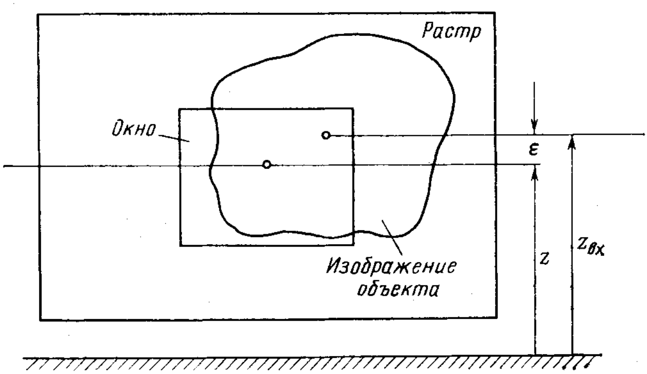

Рис. 13.

симметрии окна при помощи ТИУ, совмещается с центром тяжести изображения объекта на растре. Задача следящей системы состоит в том, чтобы с наименьшей ошибкой совместить центр тяжести изображения объекта с центром симметрии растра.

Будем рассматривать случай, когда изображение объекта на растре больше размеров измерительного окна. Подобная ситуация всегда возникает при достаточно близком расстоянии от объекта. При этом, если пятно полностью накрывает измерительное окно, то сигнал на выходе ТИУ отсутствует. Таким образом, в рассматриваемом режиме ТИУ представляет собой нелинейный элемент с характеристикой типа зоны нечувствительности, которая здесь аппроксимируется кубической параболой. Амплитудно-частотная

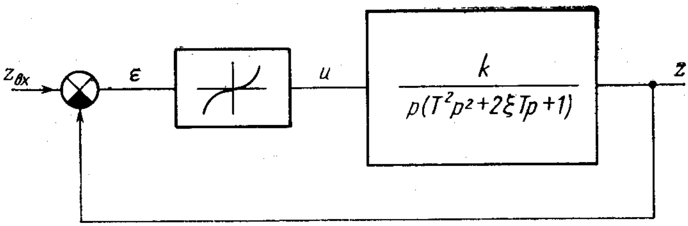

Рис. 14.

характеристика гиростабилизатора, снятая на стенде, аппроксимирована колебательным звеном с интегратором. Окончательно структурная схема следящей системы с ТИУ в данном режиме имеет вид, изображенный на рис. 14.

Данной схеме при $z_{вх} = 0$ соответствует дифференциальное уравнение

$$\dddot{z} + 2a\ddot{z} + b^2\dot{z} = -cz^3,$$

где

$$a = \frac{1}{T}\xi, \quad b = \frac{1}{T}, \quad c = \frac{k}{T^2}$$

$$(0 < \xi < 1, k > 0, T > 0).$$

Замена независимого переменного $\tau = bt$ приведет его к виду

$$z''' + 2\xi z'' + z' = -\gamma z^3 \qquad \left({}' = \frac{d}{d\tau}, \qquad \gamma = kT\right), \tag{4.1}$$

что можно представить как систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = A\mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma z^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2\xi \end{Vmatrix}. \tag{4.2}$$

Собственные значения матрицы **A** суть

$$0, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} \qquad (\varphi = \arccos(-\xi)).$$

Матрица S, приводящая матрицу **A** к диагональной форме, составлена из собственных векторов матрицы **A**. Выпишем ее и обратную ей матрицу

$$S=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & e^{i\varphi} & e^{-i\varphi}\\ 0 & e^{2i\varphi} & e^{-2i\varphi}\end{Vmatrix},\quad S^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 2\xi & 1\\ 0 & \Delta^{-1}e^{-2i\varphi} & -\Delta^{-1}e^{-i\varphi}\\ 0 & -\Delta^{-1}e^{2i\varphi} & \Delta^{-1}e^{i\varphi}\end{Vmatrix}, \tag{4.3}$$

где $\Delta = \det S = -2i\sqrt{1-\xi^2}$. Замена

$$\mathbf{z} = S\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_{-1}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

приведет систему (4.2) к диагональному виду

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \operatorname{diag}(0, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})\,\mathbf{x} + S^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\gamma(x_0+x_1+x_{-1})^3\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Используя (4.3), запишем (4.5) в развернутом виде

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{d\tau} &= -\gamma(x_0+x_1+x_{-1})^3,\\ \frac{dx_1}{d\tau} &= (-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\,x_1 + \frac{1}{2}\gamma\left(1 - i\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)(x_0+x_1+x_{-1})^3,\\ \frac{dx_{-1}}{d\tau} &= (-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\,x_{-1} + \frac{1}{2}\gamma\left(1 + i\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)(x_0+x_1+x_{-1})^3.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Поскольку квадратичные члены в системе (4.6) отсутствуют, то и в нормальной форме (1.2) они также будут отсутствовать и сама нормальная форма (1.2) с точностью до кубичных членов включительно примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dy_0}{d\tau} &= g_2^0 y_0^3 + [4],\\ \frac{dy_1}{d\tau} &= (-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\,y_1 + g_2^1 y_0^2 y_1 + [4],\end{aligned} \tag{4.7}$$

где g_2^0 и g_2^1 определяются формулами (1.8)

$$g_2^0 = -\gamma,\quad g_2^1 = \frac{3}{2}\gamma\left(1 - i\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

и не выписано третье уравнение (4.7), поскольку $y_{-1} = \bar{y}_1$ ($x_{-1} = \bar{x}_1$).

Перейдем к интегрированию укороченной нормальной формы. Из первого уравнения (4.7) найдем

$$y_0 = y_0^0(1 + 2\gamma y_0^{0\,2}\tau)^{-1/2}\qquad (y_0^0 = y_0(0),\ y_1^0 = y_1(0)), \tag{4.8}$$

затем из второго уравнения (4.7) получим

$$y_1 = y_1^0 e^{-\xi\tau}(1 + 2\gamma y_0^{0^2}\tau)^{3/4}(\cos\sqrt{1-\xi^2}\,\tau + i\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\tau) \times$$
$$\times \left\{\cos\left[\frac{3}{4}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln(1 + 2\gamma y_0^{0^2}\tau)\right] - \right.$$
$$\left. - i\sin\left[\frac{3}{4}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln(1 + 2\gamma y_0^{0^2}\tau)\right]\right\}. \quad (4.9)$$

Нормализующее преобразование (1,1.3) с точностью до кубичных членов включительно имеет вид

$$x_\nu = y_\nu + \beta_{000}^\nu y_0^3 + \beta_{111}^\nu y_1^3 + \beta_{-1-1-1}^\nu y_{-1}^3 + 3\beta_{001}^\nu y_0^2 y_1 + 3\beta_{00-1}^\nu y_0^2 y_{-1} +$$
$$+ 3\beta_{011}^\nu y_0 y_1^2 + 3\beta_{0-1-1}^\nu y_0 y_{-1}^2 + 3\beta_{11-1}^\nu y_1^2 y_{-1} + 3\beta_{1-1-1}^\nu y_1 y_{-1}^2 +$$
$$+ 6\beta_{01-1}^\nu y_0 y_1 y_{-1} + [4] \qquad (\nu = 0, \pm 1).$$

В силу (4.4) имеем $x_{-1} = \bar{x}_1$, и мы вправе были выбрать выше $y_{-1} = \bar{y}_1$; с учетом этого нормализующее преобразование запишется в виде (см. также (1.7))

$$x_0 = y_0 + 2\mathrm{Re}\,(\beta_{111}^0 y_1^3) + 6y_0^2\,\mathrm{Re}\,(\beta_{001}^0 y_1) + 6y_0\,\mathrm{Re}\,(\beta_{011}^0 y_1^2) +$$
$$+ 6\,|y_1|^2\,\mathrm{Re}\,(\beta_{11-1}^0 y_1) + 6\beta_{01-1}^0 y_0\,|y_1|^2 + [4],$$
$$(4.10)$$
$$x_1 = y_1 + \beta_{000}^1 y_0^3 + \beta_{111}^1 y_1^3 + \beta_{-1-1-1}^1 y_{-1}^3 + 3\beta_{00-1}^1 y_0^2 y_{-1} + 3\beta_{011}^1 y_0 y_1^2 +$$
$$+ 3\beta_{0-1-1}^1 y_0 y_{-1}^2 + 3\beta_{11-1}^1 |y_1|^2 y_1 + 3\beta_{1-1-1}^1 |y_1|^2 y_{-1} +$$
$$+ 6\beta_{01-1}^1 y_0\,|y_1|^2 + [4].$$

Коэффициенты здесь определяются формулами (1.9); при этом значения b_{lmn}^ν берутся из (4.6), таким образом, получим

$$\beta_{111}^0 = \overline{\beta_{-1-1-1}^0} = -\frac{1}{3}\gamma e^{-i\varphi}, \quad \beta_{001}^0 = -\gamma e^{-i\varphi},$$
$$\beta_{011}^0 = -\frac{1}{2}\gamma e^{-i\varphi}, \quad \beta_{11-1}^0 = -\gamma(2e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^{-1},$$
$$\beta_{01-1}^0 = -\gamma(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^{-1}, \quad \beta_{000}^1 = -\frac{\gamma}{\Delta}e^{-2i\varphi},$$
$$\beta_{111}^1 = \frac{\gamma}{2\Delta}e^{-2i\varphi}, \quad \beta_{-1-1-1}^1 = -\frac{\gamma}{\Delta}(e^{2i\varphi} - 3)^{-1}, \qquad (4.11)$$
$$\beta_{00-1}^1 = -\frac{\gamma}{\Delta}(e^{2i\varphi} - 1)^{-1}, \quad \beta_{011}^1 = \frac{\gamma}{\Delta}e^{-2i\varphi},$$
$$\beta_{0-1-1}^1 = -\frac{\gamma}{\Delta}(e^{2i\varphi} - 2)^{-1}, \quad \beta_{11-1}^1 = \frac{\gamma}{\Delta}(1 + e^{2i\varphi})^{-1},$$
$$\beta_{1-1-1}^1 = \frac{\gamma}{2\Delta}, \quad \beta_{01-1}^1 = \frac{\gamma}{\Delta},$$

где, напомним,

$$\gamma = kT, \qquad e^{i\varphi} = -\xi + i\sqrt{1-\xi^2}, \qquad \Delta = -2i\sqrt{1-\xi^2}.$$

Очевидно, что обращение формул (4.10) сведется к перемене знака у всех слагаемых справа, начиная со второго. Это обращение понадобится для того, чтобы выразить начальные значения y_0^0 и y_1^0 через x_0^0 и x_1^0, а в силу (4.3) и (4.4) и через z_0, z_0', z_0''.

Из (4.4) и (4.3) будем иметь

$$z = x_0 + 2\operatorname{Re} x_1. \tag{4.12}$$

Этим и завершается решение задачи Коши в общем виде для уравнения (4.1) с точностью до кубичных членов включительно. Оно представлено в виде цепочки формул (4.12), (4.10), (4.9), (4.8).

Выделим *главную часть решения* согласно определению в конце п. 1.4. Поскольку из (4.10) имеем

$$x_0 = y_0 + [3], \quad x_1 = \bar{x}_{-1} = y_1 + [3],$$

то из (4.12) будем иметь

$$z = y_0 + 2\operatorname{Re} y_1 + [3],$$

и в силу (4.8) и (4.9) получим главную часть решения

$$z \approx y_0^0(1 + 2\gamma y_0^{0^2}\tau)^{-1/2} + 2e^{-\xi\tau}(1 + 2\gamma y_0^{0^2}\tau)^{3/4} Z(\tau),$$

где

$$Z(\tau) = \cos\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\tau - \Theta(\tau)\right]\operatorname{Re} y_1^0 - \\ - \sin\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\tau - \Theta(\tau)\right]\operatorname{Im} y_1^0$$

и через $\Theta(\tau)$ обозначено

$$\Theta(\tau) = \frac{3}{4}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln(1 + 2\gamma y_0^{0^2}\tau).$$

Здесь в силу определения главной части решения и формул (4.3) и (4.4)

$$y_0^0 \approx x_0^0 = z_0 + 2\xi z_0' + z_0'',$$

$$y_1^0 \approx x_1^0 = \Delta^{-1}e^{-2i\varphi}z_0' - \Delta^{-1}e^{-i\varphi}z_0'' = \\ = \left(-\xi + i\frac{2\xi^2-1}{2\sqrt{1-\xi^2}}\right)z_0' + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}}\right)z_0'',$$

т. е.

$$\operatorname{Re} y_1^0 \approx -\xi z_0' - \frac{1}{2}z_0'',$$

$$\operatorname{Im} y_1^0 \approx \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}\left[(2\xi^2-1)z_0' + \xi z_0''\right].$$

Глава VIII

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОГО И ШЕСТОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НЕЙТРАЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

§ 1. Системы четвертого порядка

Первый пункт относится к системам произвольного порядка. В последующих двух пунктах, основываясь на результатах гл. V, исследуются резонансы и нормальные формы, возникающие для вещественных аналитических автономных (вообще говоря, неконсервативных) систем четвертого порядка с двумя парами различных чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части. Исследование устойчивости тривиального решения основывается на использовании в п. 1.4 критерия А. М. Молчанова [298б], либо, если последний оказывает, на применение критерия Ю. Н. Бибикова — В. А. Плисса [227].

1.1. Замечание о коэффициентах диагонального вида. Рассмотрим колебания системы с k степенями свободы, описываемые векторным уравнением

$$\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{f}\,(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k)^\tau$, $\mathbf{P}$ — вещественная симметрическая $k \times k$ матрица, $\mathbf{f}$ — вектор-функция аналитическая в некоторой окрестности нулевых значений аргументов. Допустим, что собственные значения матрицы $\mathbf{P}$, будучи вещественными, положительны, обозначим их $\omega_\varkappa^2$ ($\omega_\varkappa > 0$; $\varkappa = 1, \ldots, k$). Пусть S — неособая матрица (которую можно выбрать ортогональной), приводящая матрицу $\mathbf{P}$ к диагональному виду, т. е.

$$\mathbf{P} = \mathrm{S}\,\mathrm{diag}\,(\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2)\,\mathrm{S}^{-1}.$$

Линейное преобразование $\mathbf{v} = \mathrm{S}\mathbf{u}$ приводит систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned} \ddot{u}_\varkappa + \omega_\varkappa^2 u_\varkappa = {} & \sum A_{\alpha\beta}^\varkappa u_\alpha u_\beta + \sum B_{\alpha\beta\gamma}^\varkappa u_\alpha u_\beta u_\gamma + \sum C_{\alpha\beta}^\varkappa \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta + \\ & + \sum D_{\alpha\beta\gamma}^\varkappa \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta \dot{u}_\gamma + \sum E_{\alpha\beta}^\varkappa u_\alpha \dot{u}_\beta + \sum F_{\alpha\beta\gamma}^\varkappa u_\alpha u_\beta \dot{u}_\gamma + \\ & + \sum G_{\alpha\beta\gamma}^\varkappa u_\alpha \dot{u}_\beta \dot{u}_\gamma + [4] \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где не выписаны формы четвертой и более высоких степеней относительно переменных $u_1, \ldots, u_k, \dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_k$. Представим (1.2) в виде системы $2k$ уравнений первого порядка и приведем линейную часть системы к диагональному виду линейной подстановкой (см. (VI,1,1.2) и (VI,1,1.3))

$$x_j = u_{|j|} - i\frac{1}{\omega_j}\dot{u}_{|j|} \qquad (i = \sqrt{-1},\ j = \mp 1, \ldots, \mp k), \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} u_\varkappa &= \frac{1}{2}(x_{-\varkappa} + x_\varkappa) = \operatorname{Re} x_\varkappa, \\ \dot{u}_\varkappa &= \frac{1}{2} i\omega_\varkappa (x_\varkappa - x_{-\varkappa}) = -\omega_\varkappa \operatorname{Im} x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\omega_{-\varkappa} = -\omega_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. Очевидно имеем

$$x_{-\varkappa} = \bar{x}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \tag{1.5}$$

После преобразований получим

$$\frac{dx_\nu}{dt} = i\omega_\nu x_\nu + \sum_{-k}^{k} a_{jh}^\nu x_j x_h + \sum_{-k}^{k} b_{jhl}^\nu x_j x_h x_l + \ldots \tag{1.6}$$
$$(\nu = \mp 1, \ldots, \pm k).$$

Будем различать случаи:

а) Если правая часть (1.2) содержит только разложения по $u_1, \ldots, u_k$ (т. е. для форм второй и третьей степени правая часть (1.2) состоит лишь из первой и второй сумм), то коэффициенты a_{jh}^ν, $b_{jhl}^\nu, \ldots$ в (1.6) *чисто мнимые* [227].

б) Если правая часть (1.2) содержит только разложения по $\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_k$ (т. е. для форм второй и третьей степени правая часть (1.2) состоит лишь из третьей и четвертой сумм), то коэффициенты форм четной степени в (1.6) (например, a_{jh}^ν) — чисто мнимые, а коэффициенты форм нечетной степени (например, b_{jhl}^ν) — вещественные).

в) Наличие только перекрестных членов (последние три суммы) в (1.2) приведет к вещественным коэффициентам при квадратичных членах в (1.6); предпоследняя сумма в (1.2) также приведет к вещественным коэффициентам в формах третьей степени в (1.6), а последняя сумма в (1.6) — к чисто мнимым коэффициентам в формах третьей степени в (1.6).

1.2. Приведение к нормальной форме. Рассмотрим вещественную автономную систему четвертого порядка в предположении, что линейная часть системы, имеющая две пары различных сопряженных чисто мнимых собственных значений, приведена к диагональной форме

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu x_\nu + \sum a^\nu_{jh} x_j x_h + \sum b^\nu_{jhk} x_j x_h x_k + \ldots \tag{2.1}$$

$$(\nu = \mp 1, \mp 2).$$

Ниже индексы суммирования всюду принимают значения ± 1, ± 2; $\lambda_{-\nu} = \overline{\lambda}_\nu$, не нарушая общности, положим $\lambda_{-1} = -i$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_{-2} = -\lambda i$, $\lambda_2 = \lambda i$ $(0 < \lambda < 1)$; коэффициенты a^ν_{jh}, $b^\nu_{jhl}, \ldots$, вообще говоря, — комплексные (см. п. 1.1), причем, подчеркнем, и, симметризованные

$$a^\nu_{hj} = a^\nu_{jh}, \quad b^\nu_{\{jhl\}} = \text{i. d.} \tag{2.2}$$

где, напомним, $\{\alpha\beta \ldots \omega\}$ обозначает любую перестановку чисел α, β, ..., ω; i. d.— idem (то же самое).

По основной теореме А. Д. Брюно (п. V, 1.2) существует обратимая комплексная замена переменных (нормализующее преобразование)

$$x_j = y_j + \sum \alpha^j_{lm} y_l y_m + \sum \beta^j_{lmn} y_l y_m y_n + \ldots \; (j = \mp 1, \mp 2), \tag{2.3}$$

$$(\alpha^j_{ml} = \alpha^j_{lm},\ \beta^j_{\{lmn\}} = \text{i. d.}),$$

приводящая систему (2.1) к нормальной форме

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{(\Lambda,\, Q) = 0} g_{\nu Q} y_{-1}^{q_{-1}} y_1^{q_1} y_{-2}^{q_{-2}} y_2^{q_2} \tag{2.4}$$

$$(\nu = \mp 1, \mp 2).$$

Здесь

$$Q = (q_{-1}, q_1, q_{-2}, q_2)^\tau,$$

$$(\Lambda, Q) \equiv \lambda_{-1} q_{-1} + \lambda_1 q_1 + \lambda_{-2} q_2 + \lambda_2 q_2 =$$
$$= i\,[(q_1 - q_{-1}) + \lambda\,(q_2 - q_{-2})],$$

q_{-1}, q_1, q_{-2}, q_2 суть целые числа или нули, при этом $q_\nu \geqslant -1$, а остальные q_j — неотрицательны $(q_{-1} + q_1 + q_{-2} + q_2 \geqslant 1)$. Итак, в нормальную форму входят только *резонансные члены*, показатели степеней которых удовлетворяют *резонансному уравнению*

$$(\Lambda, Q) = 0, \text{ т. е. } q_1 - q_{-1} + \lambda\,(q_2 - q_{-2}) = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим возможность появления в (2.4) резонансных членов r-й степени, для которых

$$q_{-1} + q_1 + q_{-2} + q_2 = r - 1 \qquad (r \geqslant 2). \tag{2.6}$$

Уравнение (2.5) при любом $\lambda \in (0, 1)$ допускает *тривиальное решение*

$$q_{-1} = q_1, \quad q_{-2} = q_2 \tag{2.7}$$

и *нетривиальное решение*

$$\lambda = \frac{q_{-1} - q_1}{q_2 - q_{-2}}; \tag{2.8}$$

последнее в силу условий $0 < \lambda < 1$ и (2.6) сопровождается ограничениями

$$0 < | q_{-1} - q_1 | < | q_2 - q_{-2} | \leqslant r. \tag{2.9}$$

Для квадратичных членов ($r = 2$) тривиальное решение невозможно (так же как и вообще для форм четной степени), ибо в силу (2.6) и (2.7) сумма двух четных чисел не может равняться нечетному числу. Нетривиальное решение возможно лишь при $\lambda = \frac{1}{2}$ и даст нам для резонансных членов уравнений (2.4) соответственно

$$Q_{-1} = (-1, 0, 2, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 2),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 1), \quad Q_2 = (0, 1, 1, -1).$$

Для членов третьей степени ($r = 3$) тривиальное решение (2.7) даст нам

$$Q_\nu = (1, 1, 0, 0) \text{ и } Q_\nu = (0, 0, 1, 1) \quad (\nu = \mp 1, \mp 2).$$

Нетривиальное решение возможно лишь при $\lambda = \frac{1}{3}$ и даст нам для резонансных членов дополнительно к тривиальному решению еще и

$$Q_{-1} = (-1, 0, 3, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 3),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 2), \quad Q_2 = (0, 1, 2, -1).$$

Заключение. Если в уравнениях (2.4) ограничиться членами до третьей степени включительно, то основная теорема А. Д. Брюно (п. V, 1.2) приведет к следующим нормальным формам:

а) При отсутствии главных резонансов, т. е. при $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (общий случай)

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + g_\nu y_\nu^2 y_{-\nu} + h_\nu y_\nu y_{3-|\nu|} y_{|\nu|-3} \quad (\nu = \mp 1, \mp 2). \tag{2.10}$$

б) Для первого главного резонанса $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ в каждое из уравнений (2.10) следует добавить справа по одному члену второй степени, соответственно

$$f_{-1} y_{-2}^2, \quad f_1 y_2^2, \quad f_{-2} y_{-1} y_2, \quad f_2 y_1 y_{-2}. \tag{2.11}$$

в) Для второго главного резонанса $\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$ в уравнении (2.10) следует добавить справа по одному члену третьей степени, соответственно

$$e_{-1}y_{-2}^3, \quad e_1y_2^3, \quad e_{-2}y_{-1}y_2^2, \quad e_2y_1y_{-2}^2. \tag{2.12}$$

1.3. Вычисление коэффициентов нормализующего преобразования и нормальных форм. Нормализующее преобразование (2.3) переводит систему (2.1) в нормальную форму (см. (2.10) — (2.12)). Представив последнюю в симметризованном виде (V,3,1.3а), придем к основным тождествам (V,3,1.6). Далее следуем альтернативе п. V,3.2.

Допустим сначала, что $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Тогда $\lambda_\nu \neq \lambda_l + \lambda_m$ (ν, l, $m = \pm 1, \pm 2$) и для квадратичных коэффициентов нормализующего преобразования справедлива формула (V,3,2.2)

$$\alpha_{lm}^\nu = \frac{a_{lm}^\nu}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu} \qquad \left(\nu, l, m = \mp 1, \mp 2;\ \lambda \neq \frac{1}{2}\right) \tag{3.1}$$

без иных ограничений $\left(\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)$.

При $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем, что $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m$ тогда и только тогда, когда ν, l, $m = -1, -2, -2$; $1, 2, 2$; $-2, \{-1, 2\}$; $2, \{1, -2\}$. Выберем

$$\alpha_{-2-2}^{-1}, \quad \alpha_{22}^1, \quad \alpha_{\{-12\}}^{-2}, \quad \alpha_{\{1-2\}}^2$$

любыми (предпочтительнее определенными по непрерывности из формулы (3.1) при $\lambda \to \frac{1}{2}$, если это возможно, или нулями). Для остальных α_{lm}^ν справедлива формула (3.1). Коэффициенты появляющихся при $\lambda = \frac{1}{2}$ квадратичных членов (2.11) определятся по формулам (V,3,2.4)

$$\begin{aligned} f_{-1} &= \varphi_{-2-2}^{-1} = a_{-2-2}^{-1}, & f_1 &= \varphi_{22}^1 = a_{22}^1, \\ f_{-2} &= 2\varphi_{-12}^{-2} = 2a_{-12}^{-2}, & f_2 &= 2\varphi_{1-2}^2 = 2a_{1-2}^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Перейдем теперь к кубическим членам. Допустим сначала, что $\lambda \neq \frac{1}{3}$. Выделим значения ν, l, m, p, при которых $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$, это будут

$$\nu, l, m, p = \nu, \{l, -l, \nu\} \qquad (\nu, l = \mp 1, \mp 2), \tag{3.3}$$

и положим

$$\beta_{\{l,-l,\nu\}}^\nu = 0 \qquad (\nu, l = \mp 1, \mp 2). \tag{3.4}$$

Для остальных значений ν, l, m, p справедлива формула (V,3, 2.3), т. е.

$$\beta^{\nu}_{lmp} = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_\nu}\left[b^{\nu}_{lmp} + \frac{2}{3}\sum_{j=\mp 1,\,\mp 2}(a^{\nu}_{jl}\alpha^{j}_{mp} + a^{\nu}_{jm}\alpha^{j}_{pl} + a^{\nu}_{jp}\alpha^{j}_{lm})\right] \quad (3.5)$$

$$(\nu,\ l,\ m,\ p = \mp 1,\ \mp 2; \qquad l,\ m,\ p \neq \{l,\ -l,\ \nu\}).$$

Поскольку вообще $l = \mp \nu,\ \mp (3 - |\nu|)$, то для коэффициентов при членах третьей степени в (2.10), соответствующих выделенным значениям индексов, будем иметь при $\lambda \neq \frac{1}{2}$ по формуле (V,3,2.6)

$$g_\nu = 3\chi^{\nu}_{\nu\nu-\nu} = 3b^{\nu}_{\nu\nu-\nu} + 2\sum_{j=\mp 1,\,\mp 2}(2a^{\nu}_{\nu j}\alpha^{j}_{\nu-\nu} + a^{\nu}_{-\nu j}\alpha^{j}_{\nu\nu}), \quad (3.6)$$

$$h_\nu = 6\chi^{\nu}_{\nu,\,3-|\nu|,\,|\nu|-3} = 6b^{\nu}_{\nu,\,3-|\nu|,\,|\nu|-3} + 4\sum_{j=\mp 1,\,\mp 2}(a^{\nu}_{\nu j}\alpha^{j}_{3-|\nu|,\,|\nu|-3} + a^{\nu}_{3-|\nu|,\,j}\alpha^{j}_{|\nu|-3,\,\nu} + a^{\nu}_{|\nu|-3,\,j}\alpha^{j}_{\nu,\,3-|\nu|})$$

$$\left(\nu = \mp 1,\ \mp 2;\ \lambda \neq \frac{1}{2}\right).$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$ надлежит воспользоваться формулами (V,3,2.5).

Остается рассмотреть случай в) п. 1.2: $\lambda = \frac{1}{3}$. Дополнительно к (3.3) $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$ при

$\nu,\ l,\ m,\ p = -1,\ -2,\ -2,\ -2;\quad 1,\ 2,\ 2,\ 2;$
$\qquad -2,\ \{-1,\ 2,\ 2\};\quad 2,\ \{1,\ -2,\ -2\}$

и мы выберем

$$\beta^{-1}_{-2-2-2},\quad \beta^{1}_{222},\quad \beta^{-2}_{\{-122\}},\quad \beta^{2}_{\{1-2-2\}}$$

любыми (предпочтительнее определенными по непрерывности из формулы (3.5) при $\lambda \to \frac{1}{3}$, если это возможно, или нулями). Коэффициенты появляющихся при $\lambda = \frac{1}{3}$ кубических членов (2.12) определятся по формулам (V,3,2.6):

$$e_{-1} = \chi^{-1}_{-2-2-2} = b^{-1}_{-2-2-2} + 2\sum_{j=\mp 1,\,\mp 2} a^{-1}_{-2j}\alpha^{j}_{-2-2},$$

$$e_1 = \chi^{1}_{222} = b^{1}_{222} + 2\sum_j a^{1}_{2j}\alpha^{j}_{22}, \quad (3.7)$$

$$e_{-2} = 3\chi^{-2}_{-122} = 3b^{-2}_{-122} + 2\sum_j (a^{-2}_{-1j}\alpha^{j}_{22} + 2a^{-2}_{2j}\alpha^{j}_{-12}),$$

$$e_2 = 3\chi^{2}_{1-2-2} = 3b^{2}_{1-2-2} + 2\sum_j (a^{2}_{1j}\alpha^{j}_{-2-2} + 2a^{2}_{-2j}\alpha^{j}_{1-2}).$$

При любом $\lambda \in (0, 1)$ вычисления начинаются с формул (3.6) (а при $\lambda = \frac{1}{3}$ — с формул (3.7), и уж затем (3.6)) и заканчиваются формулами (3.5).

1.4. Критерий А. М. Молчанова устойчивости колебаний. Известны исследования Г. В. Каменкова [54], т. I и И. Г. Малкина [79в] устойчивости в критическом случае двух пар чисто мнимых корней. Здесь предпочтительнее воспользоваться критерием А. М. Молчанова [298б], отражающим специфику нормальных форм и возникающих резонансов.

Будем теперь предполагать [1]), следуя п. 4.1, переменные попарно комплексно-сопряженными:

$$x_{-j} = \bar{x}_j, \quad y_{-j} = \bar{y}_j \quad (j = 1, 2).$$

Рассмотрим общий случай $\left(\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Умножая уравнения (2.10) соответственно на $\bar{y}_\nu$ и складывая их попарно, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\,|y_1|^2}{d\tau} &= 2\,\mathrm{Re}\,g_1\,|y_1|^4 + 2\,\mathrm{Re}\,h_1\,|y_1|^2\,|y_2|^2, \\ \frac{d\,|y_2|^2}{d\tau} &= 2\,\mathrm{Re}\,h_2\,|y_1|^2\,|y_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,g_2\,|y_2|^4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Для неустойчивости согласно определению, достаточно заметить одну неустойчивую траекторию. Полагая $y_2 \equiv 0$, а затем $y_1 \equiv 0$, получим, что при выполнении любого из неравенств

$$\mathrm{Re}\,g_1 > 0 \ \text{ либо } \ \mathrm{Re}\,g_2 > 0 \tag{4.2}$$

тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво.

В этом пункте далее будем предполагать

$$\mathrm{Re}\,g_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\,g_2 < 0,$$

оставляя случай $\mathrm{Re}\,g_1 = \mathrm{Re}\,g_2 = 0$ для следующего пункта. Введем новые знакоопределенные (неотрицательные) переменные

$$v_1 = -2\,\mathrm{Re}\,g_1\,|y_1|^2, \qquad v_2 = -2\,\mathrm{Re}\,g_2\,|y_2|^2$$

и запишем систему уравнений (4.1) в виде

$$\frac{dv_1}{d\tau} = -v_1(v_1 + av_2), \quad \frac{dv_2}{d\tau} = -v_2(bv_1 + v_2), \tag{4.3}$$

где

$$a = \frac{\mathrm{Re}\,h_1}{\mathrm{Re}\,g_2}, \quad b = \frac{\mathrm{Re}\,h_2}{\mathrm{Re}\,g_1}$$

(напомним, что g_1, g_2, h_1, h_2 определяются формулами (3.6)).

Критерий А. М. Молчанова [298б]. *Неустойчивые системы* (4.3) *лежат ниже отрицательной ветви гиперболы* $ab = 1$. *Выше прямой* $a + b = -2$ *находится область монотонной устойчивости.*

---

[1]) В пп. 1.2 и 1.3 это предположение необязательно.

Доказательство. Сложив уравнения (4.3), получим

$$\frac{d(v_1+v_2)}{d\tau}=(\mathbf{A}\mathbf{v},\mathbf{v}),$$

где

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{Vmatrix} -1 & -\frac{1}{2}(a+b) \\ -\frac{1}{2}(a+b) & -1 \end{Vmatrix}.$$

Напомним, что v_1 и v_2 — неотрицательные переменные. Поэтому условия отрицательной определенности матрицы $\mathbf{A}$ являются достаточными условиями асимптотической устойчивости тривиального решения системы (4.3). Последние же приводят к неравенствам

$$-2<a+b \qquad \text{и} \qquad a+b<2. \tag{4.4}$$

Покажем, что второе условие может быть снято. Рассмотрим V-функцию

$$V=\frac{1}{2}(v_1+v_2)^2,$$

являющуюся для неотрицательных переменных v_1 и v_2 определенно-положительной. Производная ее, взятая в силу (4.3), равна

$$\frac{dV}{d\tau}=-v_1^3-(a+b+1)v_1v_2(v_1+v_2)-v_2^3$$

и будет определенно-отрицательной при условии

$$a+b+1>0. \tag{4.5}$$

По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости при условии (4.5) тривиальное решение системы (4.3) асимптотически устойчиво. Из условий (4.4) и (4.5) остается одно,

$$a+b>-2,$$

что и доказывает вторую половину критерия.

Перейдем к доказательству его первой половины. Будем искать решения системы (4.3) вида

$$v_\varkappa=v_\varkappa^0 v(\tau) \qquad (v_\varkappa^0>0,\ \varkappa=1,2). \tag{4.6}$$

Подставляя эти выражения в (4.3), будем иметь

$$\frac{dv}{d\tau}=\sigma v^2,\quad v(0)=1,$$

$$-v_1^0-av_2^0=\sigma,\qquad -bv_1^0-v_2^0=\sigma.$$

Отсюда найдем

$$v_1^0 = \frac{\sigma(a-1)}{1-ab}, \quad v_2^0 = \frac{\sigma(b-1)}{1-ab}.$$

При $\sigma > 0$ решение (4.6) стремится к бесконечности при $\tau \to \infty$. Поскольку $v_1^0 > 0$ и $v_2^0 > 0$, то условие $\sigma > 0$ будет иметь место при выполнении неравенств

$$ab > 1, \quad a < 1, \quad b < 1,$$

что и доказывает первое утверждение критерия.

Примечание. А. М. Молчанов утверждает также ([298б]), что между отрицательной ветвью гиперболы $ab = 1$ и прямой $a + b = -2$ расположены формально устойчивые системы (4.3), решения которых могут, однако, возрастать перед тем как начать затухать. Степень «раскачки» в таких системах грубо оценивается числом $|a| + |b|$. Ясно, что при большой «раскачке» такие системы могут оказаться практически неустойчивыми.

1.5. Критерий Ю. Н. Бибикова — В. А. Плисса. В случае а) п. 1.1 коэффициенты g_ν и h_ν ($\nu = \mp 1, \mp 2$) системы (2.10) — чисто мнимые, т. е. критерий А. М. Молчанова заведомо отказывает. Выпишем в этом случае второе и четвертое уравнение системы (2.10) ($\lambda \in (0, 1)$; $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= iy_1 + i\left(\frac{g_1}{i} y_1 |y_1|^2 + \frac{h_1}{i} y_1 |y_2|^2\right) + [4], \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= i\lambda y_2 + i\left(\frac{h_2}{i} y_2 |y_1|^2 + \frac{g_2}{i} y_2 |y_2|^2\right) + [4]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Система (5.1) есть частный случай системы (1.2)

В применении к (5.1) теорема Ю. Н. Бибикова — В. А. Плисса [227] приводит к следующему **критерию:** *Если λ — иррациональное и* (см. (3.6))

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{i} g_1 & \frac{1}{i} h_1 \\ \frac{1}{i} h_2 & \frac{1}{i} g_2 \end{vmatrix} = -(g_1 g_2 - h_1 h_2) \neq 0, \tag{5.2}$$

то «почти вся» ε-окрестность начала координат заполнена почти-периодическими движениями, т. е. положение равновесия «практически» устойчиво по Ляпунову.

§ 2. Задача А. Ю. Ишлинского

Изложение в пп 2.4—2.6 не зависит от пп. 2.2, 2.3.

2.1. Преобразование уравнений движения к ляпуновскому виду. В монографии А. Ю. Ишлинского ([52а], приложение 2) получены точные (в рамках прецессионной теории) уравнения движения (40) [1]) гироскопической рамы чувствительного элемента гирогоризонткомпаса относительно трехгранника Дарбу. Выпишем эти уравнения в предположениях (17), (41), (47) и в дополнительном предположении о равномерности движения точки подвеса по сфере:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{mlv\omega}{2B\cos\varepsilon}\cos\alpha\cos\gamma + \\
&\qquad + \frac{mgl}{2B\cos\varepsilon}\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \frac{v}{R}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta - \omega, \\
\frac{d\beta}{dt} &= \frac{mlv\omega}{2B\cos\varepsilon}\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \frac{mgl}{2B\cos\varepsilon}\sin\beta\sin\gamma - \frac{v}{R}\sin\alpha, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{2B\cos\varepsilon}{mlR} - \frac{mlv\omega}{2B\cos\varepsilon}\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \\
&\qquad - \frac{mgl}{2B\cos\varepsilon}\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\cos\gamma - \frac{v}{R}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{mlv\omega}{2B\sin\varepsilon}(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \\
&\qquad + \frac{mgl}{2B\sin\varepsilon}\cos\beta\sin\gamma.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что система (1.1) — обратимая (t-инвариантная), т. е. не изменяется при замене α на $-\alpha$, γ на $-\gamma$ и t на $-t$. Следуя (45), (19), (20), положим в уравнениях (1.1)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{mlv}{2B\sin\varepsilon_0}\Delta \qquad \left(\cos\varepsilon_0 = \frac{mlv}{2B} < 1\right) \tag{1.2}$$

и, ограничиваясь в уравнениях (1.1) членами до третьей степени включительно, запишем систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= N\mathrm{B} + \omega\Delta - \frac{1}{2}\omega\alpha^2 + \omega\left(1 + \frac{1}{2}K\right)\Delta^2 + N\mathrm{B}\Delta - \\
&\qquad - \frac{1}{2}\omega\alpha^2\Delta + \omega\left(1 + \frac{5}{6}K\right)\Delta^3 + N\left(1 + \frac{1}{2}K\right)\mathrm{B}\Delta^2, \\
\frac{d\mathrm{B}}{dt} &= -N\alpha + \omega\Gamma + N\mathrm{B}\Gamma + \omega\Gamma\Delta + \\
&\qquad + \frac{1}{6}N\alpha^3 - \frac{1}{2}\omega\alpha^2\Gamma + \omega\left(1 + \frac{1}{2}K\right)\Gamma\Delta^2 + N\mathrm{B}\Gamma\Delta, \\
\frac{d\Gamma}{dt} &= -\omega\mathrm{B} - N\Delta + \frac{1}{2}N\alpha^2 - N\mathrm{B}^2 + \frac{1}{2}NK\Delta^2 - \omega\mathrm{B}\Delta + \\
&\qquad + \frac{1}{6}NK\Delta^3 + \frac{1}{2}\omega\alpha^2\mathrm{B} - \omega\left(1 + \frac{1}{2}K\right)\mathrm{B}\Delta^2 - N\mathrm{B}^2\Delta,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

[1]) Всюду ниже формулы с одинарной нумерацией относятся к [52а].

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\omega\alpha + N\Gamma + \omega K\alpha\Delta - \omega\frac{V^2}{N^2}\mathrm{B}\Gamma - NK\Gamma\Delta -$$
$$-\omega\left(\frac{1}{2}K + K^2\right)\alpha\Delta^2 + \frac{1}{6}\omega\alpha^3 + NK\left(\frac{1}{2} + K\right)\Gamma\Delta^2.$$

Здесь введены параметры

$$N^2 = \frac{g}{R}, \quad V = \frac{v}{R}, \quad K = \frac{m^2l^2v^2}{4B^2 - m^2l^2v^2} = \operatorname{ctg}^2\varepsilon_0 \tag{1.4}$$

и переменные

$$\alpha, \quad \mathrm{B} = \frac{N}{V}\beta, \quad \Gamma = \frac{N}{V}\gamma, \quad \Delta, \tag{1.5}$$

а также здесь и в дальнейшем пренебрегается величиной V^2 по сравнению с N^2:

$$\frac{V^2}{N^2} \equiv \frac{v^2}{gR} \ll 1. \tag{1.6}$$

При скоростях v точки подвеса до 100 *м/с* последнее означает, что отбрасываются величины меньше $1{,}5\cdot 10^{-4}$ по сравнению с единицей. Собственные значения матрицы **A** линейной части системы (1.3) суть

$$\mp(N+\omega)\,i, \quad \mp|N-\omega|\,i \qquad (i = \sqrt{-1}). \tag{1.7}$$

Матрица S_1 линейного преобразования, приводящего линейную часть системы (1.3) к диагональному виду, составлена, как известно, из собственных векторов матрицы **A** и равна

$$\mathrm{S}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & i & -i & i \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i & i & i & -i \end{Vmatrix}. \tag{1.8}$$

Нетрудно выписать матрицу S_2 линейного преобразования, приводящего диагональную систему к ляпуновской кососимметричной форме:

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{Vmatrix}.$$

Матрица **S** результирующего преобразования равна

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Итак, сделаем в системе (1.3) линейную замену переменных (выпишем рядом и обратное преобразование):

$$\alpha = \xi + \zeta,\quad \mathrm{B} = -\eta - \chi,\quad \Gamma = \zeta - \xi,\quad \Delta = \chi - \eta \tag{1.9}$$

$$\Bigl(\xi = \frac{1}{2}(\alpha - \Gamma),\ \eta = -\frac{1}{2}(\mathrm{B} + \Delta),$$
$$\zeta = \frac{1}{2}(\alpha + \Gamma),\ \chi = \frac{1}{2}(\Delta - \mathrm{B})\Bigr).$$

Таким образом, уравнения движения (1.1) в предположении (1.6) и при сохранении членов до второй степени переменных включительно, можно записать в новых (также безразмерных) переменных в виде системы

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\tau} &= -\eta - \frac{1}{4}(\xi + \zeta)^2 + \left(1 + \frac{1}{4}K\right)\eta^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{4}K\chi^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}K\right)\eta\chi,\\
\frac{d\eta}{d\tau} &= \xi + \frac{1}{2}[(K - 1)\xi\eta - (K + \lambda)\xi\chi + (1 - \lambda K)\eta\zeta + \\
&\qquad + \lambda(1 + K)\zeta\chi],\\
\frac{d\zeta}{d\tau} &= -\lambda\chi + \frac{1}{4}\lambda(\xi + \zeta)^2 - \frac{1}{4}\lambda K\eta^2 - \lambda\left(1 + \frac{1}{4}K\right)\chi^2 + \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\lambda K - 1\right)\eta\chi,\\
\frac{d\chi}{d\tau} &= \lambda\zeta + \frac{1}{2}[-(1 + K)\xi\eta + (K - \lambda)\xi\chi + (1 + \lambda K)\eta\zeta + \\
&\qquad + \lambda(1 - K)\zeta\chi].
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь введено безразмерное время

$$\tau = (N + \omega)\, t \tag{1.11}$$

и содержатся два безразмерных параметра: K (см. (1.4)) и

$$\lambda = \frac{N - \omega}{N + \omega} \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1.12}$$

(можно рассмотреть и случай $\omega > N$, введя $\lambda' = -\lambda$). Заметим, что система (1.10) обратимая (t-инвариантная), т. е. не изменяется при замене ξ на $-\xi$, ζ на $-\zeta$ и τ на $-\tau$.

2.2. Преобразование системы ляпуновского вида. Система (1.10) является системой Ляпунова ([77а], §§ 33—45), если она допускает аналитический и знакоопределенный в некоторой окрестности нулевых значений переменных первый интеграл. Нетрудно проверить, что при $\lambda \in (0, 1)$ система (1.10) допускает в рассматриваемом приближении знакоопределенный первый интеграл

$$H = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2 + \frac{1}{2} K (\chi^3 - \eta^3) + \\ + \frac{1}{2}\eta(\xi^2 + \zeta^2 - 3K\chi^2) - \frac{1}{2}\chi(\xi^2 + \zeta^2 - 3K\eta^2) + \\ + \xi\zeta(\eta - \chi) + [4] = \mu^2 \qquad (\mu > 0). \qquad (2.1)$$

Однако, поскольку не установлена сходимость (2.1), то систему (1.10) будем называть *системой ляпуновского вида.*

Основываясь на интеграле (2.1) и подстановке Ляпунова

$$\xi = \rho\cos\vartheta, \quad \eta = \rho\sin\vartheta, \quad \zeta = \rho z_1, \quad \chi = \rho z_2, \qquad (2.2)$$

в п. I, 1.1 указано преобразование системы Ляпунова к неавтономной квазилинейной системе, при котором порядок понижается на две единицы. Обозначим квадратичные (и более высокие) члены в уравнениях (1.10) соответственно через

$$\Xi(\xi, \eta, \zeta, \chi), \quad \mathrm{H}(\xi, \eta, \zeta, \chi), \quad \mathrm{Z}(\xi, \eta, \zeta, \chi), \quad \mathrm{X}(\xi, \eta, \zeta, \chi)$$

и вычислим функции

$$\mathrm{P}(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = \rho^{-2}(\Xi\cos\vartheta + \mathrm{H}\sin\vartheta),$$
$$\Theta(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = \rho^{-2}(-\Xi\sin\vartheta + \mathrm{H}\cos\vartheta),$$
$$Z_1(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = \rho^{-2}\mathrm{Z} - z_1\mathrm{P},$$
$$Z_2(\rho, \vartheta, z_1, z_2) = \rho^{-2}\mathrm{X} - z_2\mathrm{P}.$$

Будем иметь

$$\mathrm{P} = \frac{1}{8}(2 + 3K)\sin\vartheta\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}(1 - \lambda K) z_1 \sin^2\vartheta + \\ + \frac{1}{4}(\lambda - 2K) z_2 \sin 2\vartheta - \frac{1}{4}(\cos\vartheta + z_1)^2 \cos\vartheta + \\ + \frac{1}{2}\lambda(1 + K) z_1 z_2 \sin\vartheta + \frac{1}{4} K z_2^2 \cos\vartheta + O(\rho),$$

$$\Theta = -\left(1 + \frac{1}{4}K\right)\sin^3\vartheta + \frac{1}{4}(K - 1)\cos\vartheta\sin 2\vartheta + \\ + \frac{1}{4}(1 - \lambda K) z_1 \sin 2\vartheta + \left(\frac{1}{2}K - \lambda\right) z_2 \sin^2\vartheta + \\ + \frac{1}{2}\lambda(1 + K) z_1 z_2 \cos\vartheta - \frac{1}{4} K z_2^2 \sin\vartheta - \\ - \frac{1}{2}(K + \lambda) z_2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{4}(\cos\vartheta + z_1)^2 \sin\vartheta + O(\rho), \qquad (2.3)$$

$$Z_1 = -\frac{1}{4} K\lambda \sin^2\vartheta + \left(\frac{1}{2}\lambda K - 1\right) z_2 \sin\vartheta + \\ + \frac{1}{4}\lambda(\cos\vartheta + z_1)^2 - \frac{1}{2}(1 - \lambda K) z_1^2 \sin^2\vartheta - \\ - \frac{1}{8}(2 + 3K) z_1 \sin\vartheta\sin 2\vartheta + \frac{1}{4}(2K - \lambda) z_1 z_2 \sin 2\vartheta -$$

$$-\lambda\left(1+\frac{1}{4}K\right)z_2^2+\frac{1}{4}(\cos\vartheta+z_1)^2 z_1\cos\vartheta-$$
$$-\frac{1}{2}\lambda(1+K)z_1^2 z_2\sin\vartheta-\frac{1}{4}Kz_1z_2^2\cos\vartheta+O(\rho),$$

$$Z_2=-\frac{1}{4}(1+K)\sin 2\vartheta+\frac{1}{2}(1+\lambda K)z_1\sin\vartheta+$$
$$+\frac{1}{2}(K-\lambda)z_2\cos\vartheta-\frac{1}{8}(2+3K)z_2\sin\vartheta\sin 2\vartheta+$$
$$+\frac{1}{2}\lambda(1-K)z_1z_2-\frac{1}{2}(1-\lambda K)z_1z_2\sin^2\vartheta+$$
$$+\frac{1}{4}(2K-\lambda)z_2^2\sin 2\vartheta+\frac{1}{4}(\cos\vartheta+z_1)^2 z_2\cos\vartheta-$$
$$-\frac{1}{2}\lambda(1+K)z_1z_2^2\sin\vartheta-\frac{1}{4}Kz_2^3\cos\vartheta+O(\rho).$$

В результате преобразования мы придем к неавтономной квазилинейной системе вида (I,1,1.9)

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{d\vartheta}&=-\lambda z_2+\mu(1+z_1^2+z_2^2)^{-1/2}[Z_1(0,\vartheta,z_1,z_2)+\\&\qquad+\lambda z_2\Theta(0,\vartheta,z_1,z_2)]+O(\mu^2),\\\frac{dz_2}{d\vartheta}&=\lambda z_1+\mu(1+z_1^2+z_2^2)^{-1/2}[Z_2(0,\vartheta,z_1,z_2)-\\&\qquad-\lambda z_1\Theta(0,\vartheta,z_1,z_2)]+O(\mu^2).\end{aligned}\tag{2.4}$$

К системе (2.4) можно применить различные методы малого параметра. Здесь остановимся на одном из них — методе Пуанкаре ([107а], т. I, гл. III) определения периодических решений.

2.3. Определение периодических решений. Будем искать периодические решения системы (2.4) в виде

$$\begin{aligned}z_1(\vartheta)&=z_1^0(\vartheta)+\mu z_1^1(\vartheta)+\mu^2 z_1^2(\vartheta)+\ldots,\\z_2(\vartheta)&=z_2^0(\vartheta)+\mu z_2^1(\vartheta)+\mu^2 z_2^2(\vartheta)+\ldots,\end{aligned}\tag{3.1}$$

и подставляя эти ряды в (2.4), получим системы уравнений для определения z_1^0, z_2^0 и z_1^1, z_2^1:

$$\frac{dz_1^0}{d\vartheta}=-\lambda z_2^0,\quad\frac{dz_2^0}{d\vartheta}=\lambda z_1^0;\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz_1^1}{d\vartheta}&=-\lambda z_2^1+(1+z_1^{0^2}+z_2^{0^2})^{-1/2}[Z_1(0,\vartheta,z_1^0,z_2^0)+\\&\qquad+\lambda z_2^0\Theta(0,\vartheta,z_1^0,z_2^0)],\\\frac{dz_2^1}{d\vartheta}&=\lambda z_1^1+(1+z_1^{0^2}+z_2^{0^2})^{-1/2}[Z_2(0,\vartheta,z_1^0,z_2^0)-\lambda z_1^0\Theta(0,\vartheta,z_1^0,z_2^0)].\end{aligned}\tag{3.3}$$

Общее решение системы (3.2) является $T(\lambda)$-периодическим:

$$z_1^0 = C\cos\lambda\vartheta + D\sin\lambda\vartheta,\quad z_2^0 = -D\cos\lambda\vartheta + C\sin\lambda\vartheta. \tag{3.4}$$

Решение (3.4) можно рассматривать и как $qT(\lambda)$-периодическое, где q — любое натуральное число. Правые части уравнений (2.4) (и (3.3)) зависят от явно независимой переменной и эту зависимость можно рассматривать как $2p\pi$-периодическую с любым натуральным p. Поэтому решение (3.4) будет порождающим для $2p\pi$-периодического решения системы (2.4) тогда и только тогда, когда

$$qT(\lambda) = 2p\pi \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{q}{p}, \tag{3.5}$$

где q/p — любая положительная несократимая правильная дробь. Сведем систему дифференциальных уравнений (3.3) для первых поправок к одному уравнению относительно z_1^1; учитывая (3.4), будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{d^2z_1^1}{d\vartheta^2} + \lambda^2 z_1^1 = (1 + C^2 + D^2)^{-1/2}\Big[\frac{d}{d\vartheta} Z_1(0, \vartheta, z_1^0(\vartheta), z_2^0(\vartheta)) &+ \\ + \lambda z_2^0 \frac{d}{d\vartheta}\Theta(0, \vartheta, z_1^0(\vartheta), z_2^0(\vartheta)) - \lambda Z_2(0, \vartheta, z_1^0(\vartheta), z_2^0(\vartheta)) &+ \\ + 2\lambda^2 z_1^0\Theta(0, \vartheta, z_1^0(\vartheta), z_2^0(\vartheta)&)\Big].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Вычислим правую часть этого неоднородного уравнения, обозначая штрихом полную производную по ϑ:

$$\begin{aligned}Z_1' + \lambda z_2^0\Theta' - \lambda Z_2 + 2\lambda^2 z_1^0\Theta &= \\ = -\frac{1}{16}(2\lambda^2 K + 26\lambda^2 + 32\lambda - 3K + 1) z_1^0 \sin\vartheta &+ \\ + \frac{1}{16}(6\lambda^2 K + 6\lambda^2 - 9K - 9) z_1^0 \sin 3\vartheta &+ \\ + \frac{1}{16}(5\lambda K - 15\lambda - 16) z_2^0 \cos\vartheta + \frac{3}{16}\lambda(1 + K) z_2^0 \cos 3\vartheta &+ \\ + \frac{1}{4}(-2\lambda^3 K + 3\lambda^2 + 4\lambda K - 4) z_1^0 \sin 2\vartheta &+ \\ + \frac{1}{4}\lambda^2(\lambda K - 2) z_2^{0^2} \sin 2\vartheta - \frac{1}{4}\lambda^2(9\lambda + 3K + 12) z_1^0 z_2^0 &+ \\ + \frac{1}{4}(3\lambda^3 - 5\lambda^2 K - 4\lambda + 4K) z_1^0 z_2^0 \cos 2\vartheta &- \\ - \frac{1}{4}(2\lambda^2 K + 1) z_1^{0^3} \sin\vartheta + \frac{1}{4}\lambda(6\lambda^2 K + 6\lambda^2 - 4K - 5) &\times \\ \times z_1^{0^2} z_2^0 \cos\vartheta + \frac{1}{4}(2\lambda^2 + K) z_1^0 z_2^{0^2} \sin\vartheta &- \\ - \frac{1}{4}\lambda(2\lambda^2 K + 2\lambda^2 - K) z_2^{0^3} \cos\vartheta&.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Неоднородная часть уравнения (3.6) содержит тригонометрические функции ϑ с круговыми частотами

$$\text{а) } \frac{p-q}{p}, \quad \text{б) } \frac{2(p-q)}{p}, \quad \text{в) } \frac{|p-3q|}{p},$$

$$\text{г) } \frac{p+q}{p}, \quad \frac{3p+q}{p}, \quad \frac{3p-q}{p}, \quad 2, \quad \frac{2(p+q)}{p}, \quad \frac{2q}{p}, \quad \frac{p+3q}{p}.$$

Выясним, когда одна из этих частот совпадает с круговой частотой q/p порождающего решения:

$$\text{а) } \frac{p-q}{p} = \frac{q}{p}, \quad q=1, \quad p=2, \quad \lambda = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \frac{2(p-q)}{p} = \frac{q}{p}, \quad q=2, \quad p=3, \quad \lambda = \frac{2}{3};$$

$$\text{в) } \frac{p-3q}{p} = \frac{q}{p}, \quad q=1, \quad p=4, \quad \lambda = \frac{1}{4};$$

$$\frac{3q-p}{p} = \frac{q}{p}, \quad q=1, \quad p=2, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

В случае г) такое совпадение невозможно. В случаях а), б), в) уравнение (3.6) допускает $2p\pi$-периодические решения при указанных q и p не для всех значений C и D, а лишь для тех, при которых уничтожаются члены с $\sin(q\vartheta/p)$ и $\cos(q\vartheta/p)$ в уравнении (3.6). Однако уравнения для «порождающих амплитуд» при $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ дают лишь нулевые решения: $C = D = 0$. Это означает, что при этих значениях λ не существует периодического решения. При всех иных значениях λ, определяемых формулой (3.5), существует периодическое решение при любых значениях C и D. Последнее означает, что вне резонансов $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ для всех рациональных значений $\lambda \in (0, 1)$ периодическое решение является общим с четырьмя произвольными постоянными C, D, μ и t_0. В силу (2.1), (2.2), (3.4) и (3.5) названное решение запишется в виде (см. также п. III, 1.2)

$$\xi = \frac{\mu}{\sqrt{1+C^2+D^2}} \cos\vartheta + O(\mu^2),$$

$$\eta = \frac{\mu}{\sqrt{1+C^2+D^2}} \sin\vartheta + O(\mu^2),$$

$$\zeta = \frac{\mu}{\sqrt{1+C^2+D^2}} \left(C\cos\frac{q}{p}\vartheta + D\sin\frac{q}{p}\vartheta\right) + O(\mu^2), \tag{3.8}$$

$$\chi = \frac{\mu}{\sqrt{1+C^2+D^2}} \left(-D\cos\frac{q}{p}\vartheta + C\sin\frac{q}{p}\vartheta\right) + O(\mu^2),$$

$$\vartheta = (N+\omega)(t-t_0) + O(\mu); \quad \frac{q}{p} \neq \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}.$$

Напомним, что переход к исходным переменным осуществляется по формулам (1.9), (1.5) и (1.2).

Однако количественное описание движения предпочтительнее провести через приведение уравнения движения к нормальной форме; к этому мы и переходим.

2.4. Преобразование уравнений движения к диагональному виду и нормальной форме. Сделаем в системе (1.3) линейное преобразование, определяемое матрицей (1.8) (выпишем ниже и обратное преобразование):

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x_{-1} + x_1 + x_{-2} + x_2 = 2\mathrm{Re}\,(x_1 + x_2),\\
\mathrm{B} &= i\,(-x_{-1} + x_1 - x_{-2} + x_2) = -2\mathrm{Im}\,(x_1 + x_2),\\
\Gamma &= -x_{-1} - x_1 + x_{-2} + x_2 = 2\mathrm{Re}\,(x_2 - x_1),\\
\Delta &= i\,(-x_{-1} + x_1 + x_{-2} - x_2) = 2\mathrm{Im}\,(x_2 - x_1);
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
x_\nu = {}^1/_4\,[\alpha + (-1)^\nu\Gamma - i\mathrm{B}\,\mathrm{sign}\,\nu + i\,(-1)^\nu\Delta\,\mathrm{sign}\,\nu] \quad (\nu = \mp 1, \mp 2). \tag{4.2}
$$

Введя безразмерное время τ (см. (1.11)), придем к системе уравнений вида (1,1.6):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\tau} = ix_1 &- \frac{3}{8}(1+K)x_{-1}^2 + \frac{1}{8}(K-7)x_1^2 -\\
&- \frac{1}{8}(1+K)(2\lambda+1)x_{-2}^2 + \frac{1}{8}(1+K)(2\lambda-1)x_2^2 +\\
&+ \frac{1}{4}(3+K)x_{-1}x_1 + \frac{1}{4}(K-1)(2+\lambda)x_{-1}x_{-2} -\\
&- \frac{1}{4}(1+K)(2-\lambda)x_{-1}x_2 + \frac{1}{4}\lambda(3-K)x_1x_{-2} -\\
&- \frac{1}{4}\lambda(3+K)x_1x_2 + \frac{1}{4}(K-1)x_{-2}x_2 + [3],
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_2}{d\tau} = i\lambda x_2 &+ \frac{1}{8}(1+K)(2+\lambda)x_{-1}^2 - \frac{1}{8}(1+K)(2-\lambda)x_1^2 +\\
&+ \frac{3}{8}\lambda(1+K)x_{-2}^2 + \frac{1}{8}\lambda(7-K)x_2^2 + \frac{1}{4}\lambda(1-K)x_{-1}x_1 +\\
&+ \frac{1}{4}(1-K)(2\lambda+1)x_{-1}x_{-2} + \frac{1}{4}(K-3)x_{-1}x_2 +\\
&+ \frac{1}{4}(K+1)(2\lambda-1)x_1x_{-2} + \frac{1}{4}(3+K)x_1x_2 -\\
&- \frac{1}{4}\lambda(3+K)x_{-2}x_2 + [3].
\end{aligned}
$$

Здесь не выписаны члены третьей степени, ибо не все они понадобятся в дальнейшем, а также первое и третье уравнения, поскольку $x_{-1} = \bar{x}_1$, $x_{-2} = \bar{x}_2$ (см. (4.2)).

Определим α_{lm}^{ν} по формулам (1,3.2). Очевидно, что $\alpha_{-l-m}^{-\nu} = \overline{\alpha_{lm}^{\nu}}$ (ν, l, $m = \mp 1, \mp 2$) и из четверки величин α_{lm}^{ν}, α_{ml}^{ν}, $\alpha_{-l-m}^{-\nu}$, $\alpha_{-m-l}^{-\nu}$ (или пары величины α_{ll}^{ν}, $\alpha_{-l-l}^{-\nu}$) будем выписывать ниже только одну:

$$
\begin{gathered}
\alpha_{-1-1}^{-1} = \overline{\alpha_{-2-2}^{-2}} = \frac{1}{8} i (K-7), \\
\alpha_{11}^{-1} = \alpha_{-2-2}^{-1} = \alpha_{22}^{-1} = \alpha_{1-2}^{-1} = \overline{\alpha_{-1-1}^{-2}} = \overline{\alpha_{11}^{-2}} = \overline{\alpha_{22}^{-2}} = \overline{\alpha_{-12}^{-2}} = \frac{1}{8} i (1+K), \\
\alpha_{-11}^{-1} = \alpha_{-1-2}^{-1} = \overline{\alpha_{-1-2}^{-2}} = \overline{\alpha_{-22}^{-2}} = -\frac{1}{8} i (3+K), \qquad (4.4) \\
\alpha_{-12}^{-1} = \overline{\alpha_{1-2}^{-2}} = \frac{1}{8} i (K-3), \\
\alpha_{12}^{-1} = \alpha_{-22}^{-1} = \overline{\alpha_{-11}^{-2}} = \overline{\alpha_{12}^{-2}} = \frac{1}{8} i (1-K).
\end{gathered}
$$

Эти же значения выбираем для α_{-2-2}^{-1} и α_{-12}^{-2} и при $\lambda = \frac{1}{2}$. Формулы (1,3.3) дадут нам

$$f_{-1} = f_1 = f_{-2} = f_2 = 0.$$

Последнее означает (см. конец п. 1.2), что при $\lambda = \frac{1}{2}$ аннулируются резонансные члены, и нормальная форма с точностью до членов второго порядка включительно

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu \tag{4.5}$$

$$(\lambda_1 = \overline{\lambda_{-1}} = i, \ \lambda_2 = \overline{\lambda_{-2}} = \lambda i; \ \nu = \mp 1, \mp 2)$$

в рассматриваемой задаче справедлива и для $\lambda = \frac{1}{2}$, т. е. для всех $\lambda \in (0, 1)$ без этого единственно возможного исключения.

2.5. Решение задачи Коши в общем виде. Общее решение системы (4.5)

$$y_\nu = e^{\lambda_\nu \tau} y_\nu (0) \quad (\nu = \mp 1, \mp 2)$$

позволит решить задачу Коши в общем виде для исходной системы (1.1) с рассматриваемой степенью приближения, основываясь на формулах замены переменных (1,2.3), (4.1) и (1.5). Например, для переменной α будем иметь

$$
\begin{aligned}
\alpha = 2\mathrm{Re}\,(x_1 + x_2) &= 2\mathrm{Re}\,[y_1 + y_2 + \Sigma\, (\alpha_{lm}^1 + \alpha_{lm}^2)\, y_l y_m] = \\
&= 2\mathrm{Re}\,[e^{i\tau} y_1(0) + e^{i\lambda\tau} y_2(0) + \\
&\quad + \Sigma\, (\alpha_{lm}^1 + \alpha_{lm}^2) e^{(\lambda_l + \lambda_m)\tau} y_l(0)\, y_m(0)],
\end{aligned}
$$

откуда найдем

$$\frac{1}{2}\alpha = \operatorname{Re} y_1(0)\cos\tau - \operatorname{Im} y_1(0)\sin\tau + \operatorname{Re} y_2(0)\cos\lambda\tau - \\ - \operatorname{Im} y_2(0)\sin\lambda\tau - \sum_{l,\, m=\mp1,\, \mp2} \frac{1}{i}(\alpha_{lm}^1 + \alpha_{lm}^2) \times \\ \times \Big\{[\operatorname{Re} y_l(0)\operatorname{Im} y_m(0) + \operatorname{Re} y_m(0)\operatorname{Im} y_l(0)]\cos\frac{1}{i}(\lambda_l+\lambda_m)\tau + \\ + [\operatorname{Re} y_l(0)\operatorname{Re} y_m(0) - \operatorname{Im} y_l(0)\operatorname{Im} y_m(0)]\sin\frac{1}{i}(\lambda_l+\lambda_m)\tau\Big\}. \quad (5.1)$$

Остается выразить константы $y_\nu(0)$ через начальные значения α_0, β_0, γ_0, Δ_0 исходных переменных. Обращая (1,2.3), найдем

$$y_\nu(0) = x_\nu(0) - \Sigma\alpha_{jh}^\nu x_j(0)\, x_h(0) + [3] \quad (\nu = \mp 1, \mp 2),$$

и используя (4.2) и (1.5), получим

$$y_\nu(0) = \frac{1}{4}\Big\{\alpha_0 + (-1)^\nu \frac{N}{V}\gamma_0 + i\operatorname{sign}\nu\Big[-\frac{N}{V}\beta_0 + (-1)^\nu\Delta_0\Big]\Big\} - \\ - \frac{1}{16}\sum \alpha_{jh}^\nu\Big\{\alpha_0 + (-1)^j\frac{N}{V}\gamma_0 + i\operatorname{sign} j\Big[-\frac{N}{V}\beta_0 + (-1)^j\Delta_0\Big]\Big\} \times \\ \times \Big\{\alpha_0 + (-1)^h\frac{N}{V}\gamma_0 + i\operatorname{sign} h\Big[-\frac{N}{V}\beta_0 + (-1)^h\Delta_0\Big]\Big\}.$$

Отсюда будем иметь

$$\operatorname{Re} y_\nu(0) = \frac{1}{4}\Big[\alpha_0 + (-1)^\nu\frac{N}{V}\gamma_0\Big] + \\ + \frac{1}{16}\sum_{j,\, h=\mp1,\, \mp2}\frac{1}{i}\alpha_{jh}^\nu\Big\{\operatorname{sign} h\Big[\alpha_0 + (-1)^j\frac{N}{V}\gamma_0\Big]\Big[-\frac{N}{V}\beta_0 + (-1)^h\Delta_0\Big] + \\ + \operatorname{sign} j\Big[\alpha_0 + (-1)^h\frac{N}{V}\gamma_0\Big]\Big[-\frac{N}{V}\beta_0 + (-1)^j\Delta_0\Big]\Big\}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{Im} y_\nu(0) = \frac{1}{4}\Big[-\frac{N}{V}\beta_0 + (-1)^\nu\Delta_0\Big] - \\ - \frac{1}{16}\sum_{j,\, h=\mp1,\, \mp2}\frac{1}{i}\alpha_{jh}^\nu\Big\{\Big[\alpha_0 + (-1)^j\frac{N}{V}\gamma_0\Big]\Big[\alpha_0 + (-1)^h\frac{N}{V}\gamma_0\Big] - \\ - \operatorname{sign}(jh)\Big[\frac{N}{V}\beta_0 - (-1)^j\Delta_0\Big]\Big[\frac{N}{V}\beta_0 - (-1)^h\Delta_0\Big]\Big\} \quad (\nu = \mp 1, \mp 2).$$

Суммирование проведено всюду по значениям индексов ± 1, ± 2. Аналогично (5.1) могут быть выписаны формулы для β, γ и Δ (и ε; см. (1.2)). Заметим, что β и γ имеют по сравнению с α и Δ порядок V/N (величина, квадратом которой пренебрегалось по сравнению с единицей),— результат, впрочем, получаемый из линейного приближения.

Таким образом, формулы (5.1), (5.2) и (4.4) дают представление решения системы (1.1) как почти-периодического (при иррациональном λ) или периодического (при рациональном λ).

2.6. Первоначальные суждения об устойчивости. До сих пор в нормальных формах учитывались лишь члены до второй степени включительно, а они в случае двух пар чисто мнимых корней, как следует из общей теории и как видно из п. 2.5, не разрушают нейтральности приближения. Посмотрим, что даст рассмотрение членов третьей степени. Вычислим коэффициенты g_1, g_2, h_1, h_2 системы (1,2.10) по формулам (1,3.5):

$$\begin{aligned}
g_1 = 3b^1_{11-1} + 2\,[2\,(&a^1_{1-1}\alpha^{-1}_{1-1} + a^1_{11}\alpha^1_{1-1} + a^1_{1-2}\alpha^{-2}_{1-1} + a^1_{12}\alpha^2_{1-1}) + \\
&+ a^1_{-1-1}\alpha^{-1}_{11} + a^1_{-11}\alpha^1_{11} + a^1_{-1-2}\alpha^{-2}_{11} + a^1_{-12}\alpha^2_{11}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 = 3b^2_{22-2} + 2\,[2\,(&a^2_{2-1}\alpha^{-1}_{2-2} + a^2_{21}\alpha^1_{2-2} + a^2_{2-2}\alpha^{-2}_{2-2} + a^2_{22}\alpha^2_{2-2}) + \\
&+ a^2_{-2-1}\alpha^{-1}_{22} + a^2_{-21}\alpha^1_{22} + a^2_{-2-2}\alpha^{-2}_{22} + a^2_{-22}\alpha^2_{22}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 = 6b^1_{12-2} + 2\,(&a^1_{1-1}\alpha^{-1}_{2-2} + a^1_{11}\alpha^1_{2-2} + a^1_{1-2}\alpha^{-2}_{2-2} + a^1_{12}\alpha^2_{2-2} + \\
&+ a^1_{2-1}\alpha^{-1}_{1-2} + a^1_{21}\alpha^1_{1-2} + a^1_{2-2}\alpha^{-2}_{1-2} + a^1_{22}\alpha^2_{1-2} + \\
&+ a^1_{-2-1}\alpha^{-1}_{12} + a^1_{-21}\alpha^1_{12} + a^1_{-2-2}\alpha^{-2}_{12} + a^1_{-22}\alpha^2_{12}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 = 6b^2_{21-1} + 2\,(&a^2_{2-1}\alpha^{-1}_{1-1} + a^2_{21}\alpha^1_{1-1} + a^2_{2-2}\alpha^{-2}_{1-1} + a^2_{22}\alpha^2_{1-1} + \\
&+ a^2_{1-1}\alpha^{-1}_{2-1} + a^2_{11}\alpha^1_{2-1} + a^2_{1-2}\alpha^{-2}_{2-1} + a^2_{12}\alpha^2_{2-1} + \\
&+ a^2_{-1-1}\alpha^{-1}_{21} + a^2_{-11}\alpha^1_{21} + a^2_{-1-2}\alpha^{-2}_{21} + a^2_{-12}\alpha^2_{21}).
\end{aligned}$$

Величины α^{ν}_{lm} определены формулами (4.4); a^{ν}_{jh} суть коэффициенты соответствующих квадратичных членов в уравнениях (4.3); b^{ν}_{jhk} — также коэффициенты при соответствующих членах третьей степени, не выписанных в уравнениях (4.3). Эти последние коэффициенты получим из системы (1.3), используя преобразования (4.1), (4.2) и (1.11). Подчеркнем, что при вычислениях уравнения (4.3) должны быть приведены к виду (1,2.1), т. е. должно быть выполнено (1,2.2). Будем иметь

$$\frac{3}{i}\,b^1_{11-1} = \frac{21}{16} + \frac{11}{16}K + \frac{\lambda}{16}(5 - 5K + 4K^2),$$

$$\frac{3}{i}\,b^2_{22-2} = \frac{5}{16} - \frac{7}{16}K + \frac{\lambda}{16}(21 + 13K + 4K^2),$$

$$\frac{6}{i}\,b^1_{12-2} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8}K + \frac{\lambda}{8}(-11 - 5K + 4K^2),$$

$$\frac{6}{i}\,b^2_{21-1} = -\frac{11}{8} - \frac{7}{8}K + \frac{\lambda}{8}(-3 + 5K + 4K^2),$$

$$g_1 = \frac{1}{8}\,iK\,(1 + 2K)(\lambda - 1), \quad g_2 = 0,$$

$$h_1 = \frac{1}{4}\,iK\,(1 + 2K)(\lambda - 1), \quad h_2 = 0.$$

Поскольку величины g_1, g_2 чисто мнимые, то критерий А. М. Молчанова (п. 1.4) отказывает. Заметим, что в этом случае в силу уравнений (1,4.1) выражения

$$|y_1|^2 = c_1 \quad \text{и} \quad |y_2|^2 = c_2$$

являются первыми интегралами системы (1,2.10) и могут быть использованы для построения функции Ляпунова системы (1,2.10).

Определитель J (см. формулу (1,5.2)) равен нулю. Поэтому критерий Ю. Н. Бибикова — В. А. Плисса (п. 1.5) также отказывает.

2.7. Построение функции Ляпунова. Перейдя в системе (1.3) к независимому переменному τ по формуле (1.11), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{d\tau} &= \frac{1}{2}(1+\lambda)\mathrm{B} + \frac{1}{2}(1-\lambda)\Delta - \frac{1}{4}(1-\lambda)\alpha^2 + \\
&+ \frac{1}{2}(1-\lambda)\left(1+\frac{1}{2}K\right)\Delta^2 + \frac{1}{2}(1+\lambda)\mathrm{B}\Delta - \frac{1}{4}(1-\lambda)\alpha^2\Delta + \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\lambda)\left(1+\frac{5}{6}K\right)\Delta^3 + \frac{1}{2}(1+\lambda)\left(1+\frac{1}{2}K\right)\mathrm{B}\Delta^2, \\
\frac{d\mathrm{B}}{\partial\tau} &= -\frac{1}{2}(1+\lambda)\alpha + \frac{1}{2}(1-\lambda)\Gamma + \frac{1}{2}(1+\lambda)\mathrm{B}\Gamma + \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\lambda)\Gamma\Delta + \frac{1}{12}(1+\lambda)\alpha^3 - \frac{1}{4}(1-\lambda)\alpha^2\Gamma + \\
&\quad\quad + \frac{1}{2}(1-\lambda)\left(1+\frac{1}{2}K\right)\Gamma\Delta^2 + \frac{1}{2}(1+\lambda)\mathrm{B}\Gamma\Delta, \\
\frac{d\Gamma}{d\tau} &= -\frac{1}{2}(1-\lambda)\mathrm{B} - \frac{1}{2}(1+\lambda)\Delta + \frac{1}{4}(1+\lambda)\alpha^2 - \\
&- \frac{1}{2}(1+\lambda)\mathrm{B}^2 + \frac{1}{4}(1+\lambda)K\Delta^2 - \frac{1}{2}(1-\lambda)\mathrm{B}\Delta + \\
&+ \frac{1}{12}(1+\lambda)K\Delta^3 + \frac{1}{4}(1-\lambda)\alpha^2\mathrm{B} - \frac{1}{2}(1-\lambda)\left(1+\frac{1}{2}K\right)\mathrm{B}\Delta^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2}(1+\lambda)\mathrm{B}^2\Delta, \\
\frac{d\Delta}{d\tau} &= -\frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha + \frac{1}{2}(1+\lambda)\Gamma + \frac{1}{2}(1-\lambda)K\alpha\Delta - \\
&\quad - \frac{1}{2}(1+\lambda)K\Gamma\Delta - \frac{1}{2}(1-\lambda)\frac{V^2}{N^2}\mathrm{B}\Gamma + \frac{1}{12}(1-\lambda)\alpha^3 - \\
&\quad - \frac{1}{2}(1-\lambda)K\left(\frac{1}{2}+K\right)\alpha\Delta^2 + \frac{1}{2}(1+\lambda)K\left(\frac{1}{2}+K\right)\Gamma\Delta^2
\end{aligned} \tag{7.1}$$

с точностью до членов третьей степени переменных включительно. Производная от функции

$$\begin{aligned}
W &= \alpha^2\left(1-\Delta-\frac{1}{3}\alpha^2\right) + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2 + \\
&\quad + \Delta^2\left(1+K\Delta-\frac{1}{3}K\Delta^2\right) + \frac{1}{4}(\alpha^2-K\Delta^2)^2,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

взятая в силу уравнений (7.1), равна нулю. При условиях

$$\Delta < 1 - \frac{1}{3}\alpha^2, \quad \Delta_1 < \Delta < \Delta_2, \tag{7.3}$$

где Δ_1 и Δ_2 суть корни квадратного уравнения

$$K\Delta^2 - 3K\Delta - 3 = 0,$$

т. е.

$$\Delta_{1,2} = \frac{3}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4}{3}\frac{1}{K}}\right),$$

функция W определенно-положительна в смысле Ляпунова. Заметим, что

$$-\frac{1}{K} < \Delta_1 < 0, \qquad 3 < \Delta_2.$$

Итак, тривиальное решение системы (7.1) устойчиво по Ляпунову и область (7.3) в пространстве α, β, γ, Δ является областью допустимых начальных условий.

Однако система (7.1) (как и система (1.3)) является приближением системы (1.1), хотя и довольно высокого порядка — до третьих степеней переменных включительно. И пока не высказано суждение о сходимости первого интеграла системы (1.1), для которого (7.2) представляет разложение до четвертого порядка включительно, мы вправе лишь говорить о формальной устойчивости [234д] положения равновесия $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ системы (1.1).

§ 3. О траектории, описываемой центром поперечного сечения вала за один оборот

3.1. Постановка задачи и уравнения движения. Изучению колебаний роторных систем посвящено большое количество как теоретических, так и экспериментальных исследований. Сейчас многие ученые считают, что большинство вопросов, представляющих интерес, получило законченное решение. В то же время ряд явлений, наблюдаемых в роторных системах, остался за пределами внимания. Так, до сих пор не получили объяснения случаи усталостного разрушения устойчиво работающих роторов (веретена типа ЭВА). В самом деле, в рамках существующих представлений устойчиво работающий вал в равножестких или абсолютно жестких опорах описывает в любом своем сечении по длине круговую траекторию. Следовательно, вал находится под действием статических напряжений (за исключением напряжений от собственного веса), не способных вызвать его усталостного разрушения. Однако, как показывает опыт, круговые траектории в роторах почти не встречаются. Причиной появления некруговых траекторий является «некруглость» подсадочного места под наружное кольцо подшипника в опоре. Эта «некруглость» присутствует во всех без исключения опорах, и вызвана тем, что отверстие под подшипник невозможно расточить точно по кругу вследствие биения сверл и разверток. Отсюда ясно, что изучение форм траекторий, описываемых центром поперечного сечения вала в пределах одного оборота, представляет как практический, так и теоретический интерес. Насколько нам известно, подобных исследований до работ Э. А. Попова [309, 310а, б] не проводилось.

Наиболее сложным является выбор упрощенной модели, с достаточной степенью точности воспроизводящей качественную картину поведения системы. Как наиболее простую модель, возьмем невесомый вертикальный вал (рис. 15) с массой m, закрепленной на валу с эксцентриситетом e. Массу выбираем как приведенную по известной методике [44, 45]. Предполагаем, что вал, абсолютно жесткий на кручение, расположен в абсолютно жестких опорах и приводится во вращение приводным элементом, с которым он имеет жесткую связь, с постоянной угловой скоростью ω_0. Пусть в некоторый момент времени масса оказалась отклоненной от равновесной траектории. Тогда скорость ее движения по траектории окажется не постоянной. Сила инерции, действующая на массу, станет нецентральной и вызовет у вала появление, кроме радиальной, тангенциальной силы упругости. В самом деле, если бы вал не получал бокового изгиба, то движение массы по траектории в сторону вращения в период разгона было бы невозможно. На основании этого потенциальная энергия системы может быть представлена как сумма работ сил инерции на пути радиальной и тангенциальной деформаций, т. е.

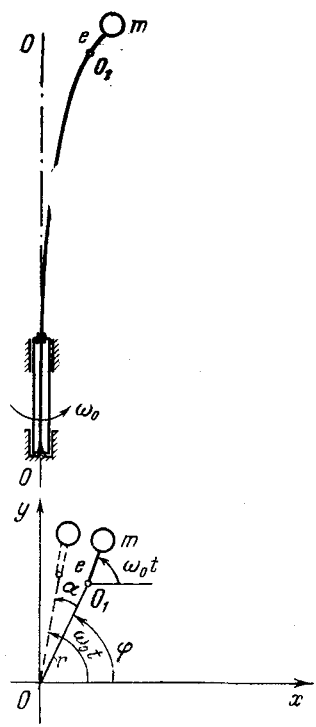

Рис. 15.

$$\Pi = \frac{1}{2} kr^2 (1 + \alpha^2), \tag{1.1}$$

где α — отклонение по углу радиуса-вектора r точки закрепления массы на валу от своего расчетного положения при $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{const}$.

Вычислим кинетическую энергию системы, переходя к полярной системе координат по формулам

$$x_s = r\cos(\omega_0 t - \alpha) + e\cos\omega_0 t,$$
$$y_s = r\sin(\omega_0 t - \alpha) + e\sin\omega_0 t$$

$$T = \frac{1}{2} m \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\omega_0 - \frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \omega_0 e \operatorname{sign} c\left[-2\frac{dr}{dt}\sin\alpha + 2r\left(\omega_0 - \frac{d\alpha}{dt}\right)^2\cos\alpha + \omega_0\right]\right\}, \qquad (1.2)$$

где k — жесткость вала в месте крепления массы, $c = p^2 - \omega_0^2$, p — собственная круговая частота изгибных колебаний вала.

Уравнения движения точки закрепления массы на валу будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\omega_0 - \frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \omega_0^2 e\cos\alpha \operatorname{sign} c + p^2 r(1+\alpha^2) = 0,\\ &r^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2r\left(\omega_0 - \frac{d\alpha}{dt}\right)\frac{dr}{dt} + \omega_0^2 e\sin\alpha\operatorname{sign} c + p^2 r^2\alpha = 0. \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Считая угол α достаточно малым и заменяя $\cos\alpha$ первыми двумя членами его разложения в ряд, получим

$$\frac{d^2r}{dt^2} + cr + 2\omega_0 r\frac{d\alpha}{dt} - r\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + p^2 r\alpha^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega_0^2 e\alpha^2 \operatorname{sign} c - \omega_0^2 e \operatorname{sign} c = 0, \qquad (1.4)$$
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt} - 2\omega_0\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} + p^2\alpha + \omega_0^2 e\frac{\alpha}{r}\operatorname{sign} c = 0.$$

В первом уравнении имеется свободный член $\omega_0^2 e$, от которого целесообразно освободиться, чтобы иметь в качестве нулевого решения круговую траекторию. Заметим, что при $\alpha = 0$ из (1.3) мы получаем невозмущенное движение с

$$r_0 = \left|\frac{\omega_0^2 e}{c}\right|.$$

Введем новые переменные

$$z_{-1} = r - r_0, \quad z_1 = \frac{dz_{-1}}{dt}, \quad z_{-2} = \alpha, \quad z_2 = \frac{dz_{-2}}{dt}, \qquad (1.5)$$

тогда уравнения возмущенного движения запишутся в виде

$$\frac{dz_1}{dt} + cz_{-1} + 2\omega_0 r_0 z_2 = r_0 z_2^2 + z_{-1}z_2^2 - 2\omega_0 z_{-1} z_2 -$$
$$- \left(p^2 r_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2 e \operatorname{sign} c\right) z_{-2}^2 - p^2 z_{-1} z_{-2}^2, \qquad (1.6)$$
$$\frac{dz_2}{dt} + 2\frac{1}{r_0 + z_{-1}} z_1 z_2 - 2\omega_0\frac{1}{r_0 + z_{-1}} z_1 +$$
$$+ p^2 z_{-2} + \omega_0^2 e\frac{1}{r_0 + z_{-1}} z_{-2}\operatorname{sign} c = 0.$$

Полагая, что амплитуда возмущенного движения меньше невозмущенного, т. е. $|z_{-1}| < r_0$, представим дробь

$$\frac{1}{r_0 + z_{-1}}$$

в виде сходящегося биномиального ряда, ограничившись первыми тремя членами разложения

$$r_0^{-1}\left(1+\frac{z_{-1}}{r_0}\right)^{-1} = r_0^{-1}\left(1-\frac{z_{-1}}{r_0}+\frac{z_{-1}^2}{r_0^2}\right).$$

Подставляя это разложение в (1.6) и учитывая (1.5), получим автономную систему четвертого порядка,

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{-1}}{dt} &= z_1,\\
\frac{dz_1}{dt} &= -cz_{-1} - 2\omega_0 r_0 z_2 + f_1(z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2),\\
\frac{dz_{-2}}{dt} &= z_2,\\
\frac{dz_2}{dt} &= 2\frac{\omega_0}{r_0} z_1 - (2p^2-\omega_0^2) z_{-2} + f_2(z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$f_1 = -2\omega_0 z_{-1} z_2 - \left(p^2 r_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2 e \operatorname{sign} c\right) z_{-2}^2 + r_0 z_2^2 - p^2 z_{-1} z_{-2}^2 + z_{-1} z_{-2}^2,$$

$$\begin{aligned}
f_2 = -2\frac{\omega_0}{r_0^2} z_{-1} z_1 + \frac{\omega_0^2 e}{r_0^2} z_{-1} z_{-2} - \frac{2}{r_0} z_1 z_2 +{}\\
+2\frac{\omega_0}{r_0^3} z_{-1}^2 z_1 - \frac{\omega_0^2 e}{r_0^3} z_{-1}^2 z_{-2} + \frac{2}{r_0^2} z_{-1} z_1 z_2.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Переходя к векторной форме записи, будем иметь

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{1.7a}$$

где $\mathbf{Z} = (z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2)^\tau$, $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, составленная из коэффициентов линейной части системы (1.7), $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (0, f_1, 0, f_2)^\tau$.

3.2. Приведение к диагональному виду. Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ в (1.7) суть $\mp\omega_1 i$, $\mp\omega_2 i$, где

$$\omega_{1,2} = +\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3p^2 + 2\omega_0^2 \mp p\sqrt{p^2+24\omega_0^2}} \tag{2.1}$$

и будут чисто мнимыми и различными ($0 < \omega_1 < \omega_2$) при выполнении любого из условий

$$\omega_0 < p, \quad \sqrt{2}p < \omega_0. \tag{2.2}$$

Это согласуется с рекомендацией по выбору области рабочих угловых скоростей в зарезонансной зоне

$$\omega_{\text{раб}} > 1{,}4\,\omega_{\text{кр}},$$

выработанной многолетней практикой эксплуатации роторных систем. В дальнейшем считаем выполненным одно из условий (2.2).

Введем безразмерное время

$$\tau = \omega_2 t$$

и запишем векторное уравнение (1.7) в виде

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \frac{1}{\omega_2}\mathbf{A}\mathbf{z} + \frac{1}{\omega_2}\mathbf{f}(\mathbf{z}). \tag{2.3}$$

Матрица $\frac{1}{\omega_2}\mathbf{A}$ имеет собственные значения

$$\lambda_{-1} = -i, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_{-2} = -\lambda i, \quad \lambda_2 = \lambda i \qquad \left(\lambda = \frac{\omega_1}{\omega_2} < 1\right). \tag{2.4}$$

Линейная замена переменных

$$\mathbf{z} = \mathbf{S}\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{S}$ — матрица, составленная из собственных векторов матрицы $\frac{1}{\omega_2}\mathbf{A}$, приведет систему (2.3) к диагональному виду

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \operatorname{diag}(-i, i, -\lambda i, \lambda i)\,\mathbf{x} + \frac{1}{\omega_2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{S}\mathbf{x}). \tag{2.6}$$

Вычислим $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}^{-1}$:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\omega_2 & i\omega_2 & -i\omega_1 & i\omega_1 \\ id_2 & -id_2 & id_1 & -id_1 \\ d_2\omega_2 & d_2\omega_2 & d_1\omega_1 & d_1\omega_1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{Vmatrix} -D & iD_1 & iD_2 & D_3 \\ -D & -iD_1 & -iD_2 & D_3 \\ \frac{d_2}{d_1\lambda}D & -i\frac{d_2}{d_1}D_1 & -\frac{i}{\lambda}D_2 & -D_3 \\ \frac{d_2}{d_1\lambda}D & i\frac{d_2}{d_1}D_1 & \frac{i}{\lambda}D_2 & -D_3 \end{Vmatrix},$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} d_1 = \frac{\omega_1^2 - c}{2r_0\omega_0\omega_1}, \quad d_2 = \frac{\omega_2^2 - c}{2r_0\omega_0\omega_2}, \quad D = \frac{d_1\lambda}{2(d_2 - d_1\lambda)}, \\ D_1 = \frac{d_1}{2\omega_2(d_1 - d_2\lambda)}, \quad D_2 = \frac{\lambda}{2(d_1 - d_2\lambda)}, \quad D_3 = \frac{1}{2\omega_2(d_2 - d_1\lambda)}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Запишем преобразования (2.5) и обратное в развернутом виде

$$\begin{aligned}
z_{-1} &= x_{-1} + x_1 + x_{-2} + x_2,\\
z_1 &= -i\omega_2 x_{-1} + i\omega_2 x_1 - i\omega_1 x_{-2} + i\omega_1 x_2,\\
z_{-2} &= id_2 x_{-1} - id_2 x_1 + id_1 x_{-2} - id_1 x_2,\\
z_2 &= d_2\omega_2 x_{-1} + d_2\omega_2 x_1 + d_1\omega_1 x_{-2} + d_1\omega_1 x_2; \qquad (2.8)\\
x_{-1} &= -Dz_{-1} + iD_1 z_1 + iD_2 z_{-2} + D_3 z_2,\\
x_1 &= -Dz_{-1} - iD_1 z_1 - iD_2 z_{-2} + D_3 z_2,\\
x_{-2} &= \frac{d_2}{d_1\lambda} D_3 z_{-1} - i\frac{d_2}{d_1} D_1 z_1 - \frac{i}{\lambda} D_2 z_{-2} - D_3 z_2,\\
x_2 &= \frac{d_2}{d_1\lambda} D_3 z_{-1} + i\frac{d_2}{d_1} D_1 z_1 + \frac{i}{\lambda} D_2 z_{-2} - D_3 z_2.
\end{aligned}$$

Последнее преобразование может быть записано более компактно:

$$x_\nu = (-1)^\nu \left(\frac{d_2}{d_1\lambda}\right)^{|\nu|-1} Dz_{-1} + \operatorname{sign}\nu\,(-1)^\nu i \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{|\nu|-1} D_1 z_1 + \\ + \operatorname{sign}\nu\,(-1)^\nu i \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|\nu|-1} D_2 z_{-2} - (-1)^\nu D_3 z_2 \quad (\nu = \mp 1, \mp 2). \qquad (2.10)$$

Очевидно, что «диагональные» переменные комплексно-сопряжены: $x_{-1} = \bar{x}_1$, $x_{-2} = \bar{x}_2$, поэтому преобразование (2.8) представимо в виде

$$\begin{aligned}
z_{-1} &= 2\operatorname{Re}(x_1 + x_2), \qquad z_1 = -2\operatorname{Im}(\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2), \qquad (2.11)\\
z_{-2} &= 2\operatorname{Im}(d_2 x_1 + d_1 x_2),\ z_2 = 2\operatorname{Re}(d_2\omega_2 x_1 + d_1\omega_1 x_2).
\end{aligned}$$

Вычислим теперь компоненты вектора

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{S}\mathbf{x})$$

нелинейной части системы (2.6):

$$h_{-1}(x) = \frac{1}{\omega_2}[iD_1 f_1(\mathrm{S}x) + D_3 f_2(\mathrm{S}x)], \quad h_1 = \frac{1}{\omega_2}[-iD_1 f_1 + D_3 f_2], \qquad (2.12)$$
$$h_{-2} = \frac{1}{\omega_2}\left[-i\frac{d_2}{d_1}D_1 f_1 - D_3 f_2\right], \quad h_2 = \frac{1}{\omega_2}\left[i\frac{d_2}{d_1}D_1 f_1 - D_3 f_2\right].$$

Здесь в силу (1.8) и (2.8)

$$\begin{aligned}
f_1(\mathrm{S}x) &= \omega_2\{a(x_{-1} + x_1)^2 + b(x_{-2} + x_2)^2 + \\
&\quad + g(x_{-1} + x_1)(x_{-2} + x_2) + [h(x_{-1} - x_1) + j(x_{-2} - x_2)]^2\}, \qquad (2.13)\\
f_2(\mathrm{S}x) &= i\omega_2[l(x_{-1}^2 - x_1^2) + n(x_{-2}^2 - x_2^2) + \\
&\quad + q(x_{-1} - x_1)(x_{-2} + x_2) + s(x_{-1} + x_1)(x_{-2} - x_2)],
\end{aligned}$$

где обозначено:

$$
\begin{gathered}
a = d_2 (d_2 \omega_2 r_0 - 2\omega_0), \quad b = \lambda d_1 (d_1 \omega_1 r_0 - 2\omega_0), \\
g = d_2 (d_1 \omega_1 r_0 - 2\omega_0) + \lambda d_1 (d_2 \omega_2 r_0 - 2\omega_0), \\
h = + \frac{d_2}{\sqrt{\omega_2}} \sqrt{\left(p^2 + \frac{1}{2} c\right) r_0}, \quad j = + \frac{d_1}{\sqrt{\omega_2}} \sqrt{\left(p^2 + \frac{1}{2} c\right) r_0}, \\
l = \frac{1}{r_0^2} \left(d_2 r_0 \frac{c}{\omega_2} + 2 d_2 \omega_2 r_0 + 2\omega_0\right), \qquad (2.14) \\
n = \frac{1}{r_0^2} \left(d_1 r_0 \frac{c}{\omega_2} + 2\lambda d_1 \omega_1 r_0 + 2\lambda\omega_0\right), \\
q = \frac{1}{r_0^2} \left(d_2 r_0 \frac{c}{\omega_2} + 2 d_1 \omega_1 r_0 + 2\omega_0\right), \\
s = \frac{1}{r_0^2} \left(d_1 r_0 \frac{c}{\omega_2} + 2 d_2 \omega_1 r_0 + 2\lambda\omega_0\right).
\end{gathered}
$$

Запишем теперь систему диагонального вида (2.6) в принятой в книге симметризованной форме:

$$
\frac{dx_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu x_\nu + \sum_{j,\, h = \mp 1,\, \mp 2} a_{jh}^{\nu} x_j x_h + [3] \quad (\nu = \mp 1, \mp 2) \qquad (2.15)
$$

$$
(a_{hj}^{\nu} = a_{jh}^{\nu};\ \nu,\ j,\ h = \mp 1,\ \mp 2).
$$

Коэффициенты при квадратичных членах в силу формул (2.12) и (2.13) запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
a_{-1-1}^{-1} &= -a_{11}^{1} = i(a + h^2) D_1 + ilD_3, \\
a_{-1-1}^{1} &= -a_{11}^{-1} = -i(a + h^2) D_1 + ilD_3, \\
a_{-1-1}^{-2} &= -a_{11}^{2} = -i \frac{d_2}{d_1} (a + h^2) D_1 - ilD_3, \\
a_{-1-1}^{2} &= -a_{11}^{-2} = i \frac{d_2}{d_1} (a + h^2) D_1 - ilD_3, \\
a_{-2-2}^{-1} &= -a_{22}^{1} = i(b + j^2) D_1 + inD_3, \\
a_{-2-2}^{1} &= -a_{22}^{-1} = -i(b + j^2) D_1 + inD_3, \\
a_{-2-2}^{-2} &= -a_{22}^{2} = -i \frac{d_2}{d_1} (b + j^2) D_1 - inD_3, \\
a_{-2-2}^{2} &= -a_{22}^{-2} = i \frac{d_2}{d_1} (b + j^2) D_1 - inD_3, \\
a_{-11}^{-1} &= -a_{-11}^{1} = i(a + h^2) D_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^{-2}_{-11} &= -a^{2}_{-11} = -i\frac{d_2}{d_1}(a+h^2)D_1, \qquad (2.16)\\
2a^{-1}_{-1-2} &= -2a^{1}_{12} = i(g+2hj)D_1 + i(q+s)D_3,\\
2a^{1}_{-1-2} &= -2a^{-1}_{12} = -i(g+2hj)D_1 + i(q+s)D_3,\\
2a^{-2}_{-1-2} &= -2a^{2}_{12} = -i\frac{d_2}{d_1}(g+2hj)D_1 - i(q+s)D_3,\\
2a^{2}_{-1-2} &= -2a^{-2}_{12} = i\frac{d_2}{d_1}(g+2hj)D_1 - i(q+s)D_3,\\
2a^{-1}_{-12} &= -2a^{1}_{1-2} = i(g-2hj)D_1 + i(q-s)D_3,\\
2a^{1}_{-12} &= -2a^{-1}_{1-2} = -i(g-2hj)D_1 + i(q-s)D_3,\\
2a^{-2}_{-12} &= -2a^{2}_{1-2} = -i\frac{d_2}{d_1}(g-2hj)D_1 - i(q-s)D_3,\\
2a^{2}_{-12} &= -2a^{-2}_{1-2} = i\frac{d_2}{d_1}(g-2hj)D_1 - i(q-s)D_3,\\
a^{-1}_{-22} &= -a^{1}_{-22} = i(b-j^2)D_1,\\
a^{-2}_{-22} &= -a^{2}_{-22} = -i\frac{d_2}{d_1}(b+j^2)D_1.
\end{aligned}
$$

Таким образом, все коэффициенты при квадратичных членах (и при линейных — тоже) оказываются чисто мнимыми и $a^{-\nu}_{-j-h} = \overline{a^{\nu}_{jh}} = -a^{\nu}_{jh}$ $(\nu, j, h = \mp 1, \mp 2)$.

3.3. Приведение к нормальной форме. Исключим из рассмотрения $\lambda = \frac{1}{2}$, т. е. будем предполагать, что (см. начало п. 3.2)

$$\omega_2 \neq 2\omega_1. \qquad (3.1)$$

Тогда нормальная форма с точностью до членов второй степени переменных включительно, как это показано в п. 1.2, имеет вид

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + [3] \qquad (\nu = \mp 1, \mp 2). \qquad (3.2)$$

Нормализующее преобразование при этом

$$x_\nu = y_\nu + \sum_{l,\, m=\mp 1,\, \mp 2} \alpha^{\nu}_{lm} y_l y_m + [3] \qquad (\nu = \mp 1, \mp 2), \qquad (3.3)$$

где коэффициенты определяются формулами (1,3.1)

$$\alpha^{\nu}_{lm} = \frac{a^{\nu}_{lm}}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu} \qquad (\nu, l, m = \mp 1, \mp 2). \qquad (3.4)$$

Напомним, что $\lambda_{\mp 1}$, $\lambda_{\mp 2}$ определяются формулами (2.4), a^{ν}_{lm} — формулами (2.16) конца предыдущего пункта. Очевидно, что все α^{ν}_{lm} вещественны.

3.4. Решение задачи Коши в общем виде. Общее решение системы (3.2)

$$y_\nu = e^{\lambda_\nu \tau} y_\nu(0) \qquad (\nu = \mp 1, \mp 2)$$

позволяет решить поставленную задачу для исходной системы с принятой степенью приближения. В силу (3.3) имеем

$$\begin{aligned} x_j(\tau) &= e^{\lambda_j \tau} y_j(0) + \\ &+ \sum_{l,\, m = \mp 1,\, \mp 2} \alpha^j_{lm} y_l(0)\, y_m(0)\, e^{(\lambda_l + \lambda_m)\tau} + [3] \qquad (j = \mp 1, \mp 2). \quad (4.1) \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулы (2.11), получим для исходных переменных общее решение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z_{-1} &= \operatorname{Re} y_1(0) \cos\tau - \operatorname{Im} y_1(0) \sin\tau + \\ &+ \operatorname{Re} y_2(0) \cos\lambda\tau - \operatorname{Im} y_2(0) \sin\lambda\tau + \sum_{l,m} (\alpha^1_{lm} + \alpha^2_{lm}) \times \\ &\times \left[R_{lm} \cos\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau - I_{lm} \sin\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau \right], \\ \frac{1}{2} z_1 &= -\omega_2 \operatorname{Re} y_1(0) \sin\tau - \omega_2 \operatorname{Im} y_1(0) \cos\tau - \\ &- \omega_1 \operatorname{Re} y_2(0) \sin\lambda\tau - \omega_1 \operatorname{Im} y_2(0) \cos\lambda\tau - \\ &- \sum_{l,m} (\omega_2 \alpha^1_{lm} + \omega_1 \alpha^2_{lm}) \left[R_{lm} \sin\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau + I_{lm} \cos\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau \right], \\ \frac{1}{2} z_{-2} &= d_2 \operatorname{Re} y_1(0) \sin\tau + d_2 \operatorname{Im} y_1(0) \cos\tau + \\ &+ d_1 \operatorname{Re} y_2(0) \sin\lambda\tau + d_1 \operatorname{Im} y_2(0) \cos\lambda\tau + \\ &+ \sum_{l,m} (d_2 \alpha^1_{lm} + d_1 \alpha^2_{lm}) \left[R_{lm} \sin\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau + I_{lm} \cos\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau \right], \\ \frac{1}{2} z_2 &= \omega_2 d_2 \operatorname{Re} y_1(0) \cos\tau - \omega_2 d_2 \operatorname{Im} y_1(0) \sin\tau + \\ &+ \omega_1 d_1 \operatorname{Re} y_2(0) \cos\lambda\tau - \omega_1 d_1 \operatorname{Im} y_2(0) \sin\lambda\tau + \\ &+ \sum_{l,m} (\omega_2 d_2 \alpha^1_{lm} + \omega_1 d_1 \alpha^1_{lm}) \left[R_{lm} \cos\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau - \right. \\ &\left. - I_{lm} \sin\frac{1}{i}(\lambda_l + \lambda_m)\tau \right], \end{aligned}$$

где для сокращения письма обозначено

$$R_{lm} = \operatorname{Re}[y_l(0)\, y_m(0)] = \operatorname{Re} y_l(0) \operatorname{Re} y_m(0) - \operatorname{Im} y_l(0) \operatorname{Im} y_m(0),$$
$$I_{lm} = \operatorname{Im}[y_l(0)\, y_m(0)] = \operatorname{Re} y_l(0) \operatorname{Im} y_m(0) + \operatorname{Im} y_l(0) \operatorname{Re} y_m(0).$$

Остается выразить начальные значения $y_\nu(0)$ через начальные значения исходных переменных $z_j(0)$ (ν, $j = \mp 1, \mp 2$). Обращая нормализующее преобразование (3.3), получим

$$y_\nu(0) = x_\nu(0) - \sum_{j,\,h} \alpha_{jh}^{\nu} x_j(0)\, x_h(0) \qquad (\nu = \mp 1, \mp 2),$$

и подставляя значения (2.10), будем иметь

$$y_\nu(0) = (-1)^\nu \left(\frac{d_2}{d_1\lambda}\right)^{|\nu|-1} Dz_{-1}(0) + \operatorname{sign}\nu\,(-1)^\nu i \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{|\nu|-1} D_1 z_1(0) +$$
$$+ \operatorname{sign}\nu\,(-1)^\nu i \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|\nu|-1} D_2 z_{-2}(0) - (-1)^\nu D_3 z_2(0) -$$
$$- \sum_{j,\,h} \alpha_{jh}^{\nu} \left[(-1)^j \left(\frac{d_2}{d_1\lambda}\right)^{|j|-1} Dz_{-1}(0) + \operatorname{sign} j\,(-1)^j i \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{|j|-1} D_1 z_1(0) +\right.$$
$$\left. + \operatorname{sign} j\,(-1)^j i \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|j|-1} D_2 z_{-2}(0) - (-1)^j D_3 z_2(0)\right] \times$$
$$\times \left[(-1)^h \left(\frac{d_2}{d_1\lambda}\right)^{|h|-1} Dz_{-1}(0) + \operatorname{sign} h\,(-1)^h i \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{|h|-1} \times\right.$$
$$\times D_1 z_1(0) + \operatorname{sign} h\,(-1)^h i \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|h|-1} D_2 z_{-2}(0) -$$
$$\left. - (-1)^h D_3 z_2(0)\right] \qquad (\nu = \mp 1, \mp 2).$$

Суммирование всюду по значениям индексов ± 1, ± 2 независимо одно от другого.

Для примера по полученным формулам в [310б] был проведен расчет траектории, описываемой моделью, имеющей параметры:

$$k = 5{,}926 \text{ кГ/см}, \quad m = 0{,}2635 \cdot 10^{-4} \text{ кГсм}^{-1}\text{с}^2,$$
$$l = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \; p^2 = 22{,}51 \cdot 10^4 \text{ 1/с}, \; \omega_0 = 800 \text{ 1/с}.$$

При этих параметрах $r_0 = 3{,}085 \cdot 10^{-3}$ *см*.

В качестве начальных условий были взяты: начальное отклонение от равновесной траектории $z_{-1} = 0{,}3\, r_0 = 0{,}9255 \cdot 10^{-3}$ *см*; из условий равенства момента количества движения массы при $r = r_0$ и $r_1 = 1{,}3\, r_0$ была получена угловая скорость $\dot\varphi = 4321$, откуда $z_2 = 800 - 432 = 368$ 1/с. Начальные значения остальных переменных (z_1 и z_{-2}) были приняты равными нулю.

Подставив в (2.7), (2.14) численные значения параметров, вычислим затем коэффициенты a_{jh}^{ν} (ν, j, $h = \mp 1$, ∓ 2) по формулам (2.16) и коэффициенты α_{jh}^{ν} (ν, j, $h = \mp 1$, ∓ 2) по формулам (3.4). После этого вычислим начальные значения $y_\nu(0)$ ($\nu = \mp 1, \mp 2$) и наконец $z_{-1}(t)$ и $z_{-2}(t)$, которые при пренебрежении постоянными составляющими имеют вид

$$z_{-1}(t) = 0{,}752\cdot 10^{-3}\cos\omega_1 t + 0{,}175\cdot 10^{-3}\cos\omega_2 t - \\ - [0{,}336\cos 2\omega_2 t + 0{,}094\cos 1{,}15\,\omega_2 t + \\ + 0{,}038\cos 0{,}85\,\omega_2 t - 0{,}006\cos 2\omega_1 t]\cdot 10^{-3}\ \text{см},$$

$$z_{-2}(t) = 0{,}257\sin\omega_1 t + 0{,}082\sin\omega_2 t - \\ - 2\cdot 0{,}017\sin 2\omega_2 t - 2\cdot 0{,}002\sin 1{,}15\,\omega_2 t + \\ + 2\cdot 0{,}013\sin 0{,}85\,\omega_2 t + 2\cdot 0{,}001\sin 2\omega_1 t.$$

Из этих выражений видно, что применение метода нормальных форм дает уточненное решение и позволяет получать траектории центров поперечного сечения вала, близкие к реально существующим, в то время как линейное приближение может дать только эллиптические траектории, которые в реальных системах встречаются редко. В уточненном решении присутствуют высокочастотные слагаемые, это, в рамках принятой модели, указывает на то, что напряжения в материале вала меняются с частотой, превышающей частоту вращения. Следствием этого могут быть усталостные поломки устойчиво работающих вертикальных гибких валов, о которых говорилось в начале п. 3.1.

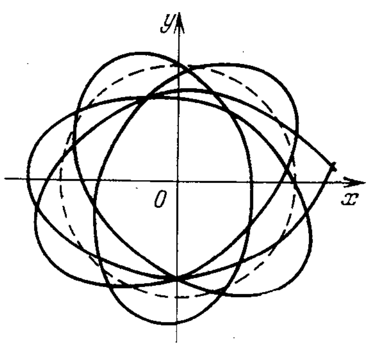

Рис. 16.

По этим уравнениям для модели с указанными параметрами были построены траектории, описываемые точкой крепления массы на упругой связи. При этом время, а следовательно, и период, определялись по низшей частоте,

$$t_j = j\frac{\pi}{48\omega_2} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, 96),$$

что соответствовало угловому шагу $\omega_0 t_j = 15°$. Для сравнения на рис. 16 штриховой линией проведена круговая траектория радиуса r_0 при «возмущении» $z_{-2} = 0$.

§ 4. Системы шестого порядка

В этом параграфе исследуются резонансы и нормальные формы аналитических автономных (не обязательно консервативных) систем шестого порядка с тремя парами различных чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части. Завершается параграф исследованием устойчивости.

4.1. Решения резонансного уравнения. Рассмотрим названную выше систему в предположении, что ее линейная часть приведена к диагональному виду (см. п. 1.1)

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu x_\nu + \sum a^\nu_{jh} x_j x_h + \sum b^\nu_{jhk} x_j x_h x_k + \ldots \qquad (1.1)$$
$$(\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3).$$

Индексы суммирования всюду ниже принимают значения ± 1, ± 2, ± 3; $\lambda_{-\nu} = \overline{\lambda}_\nu$, не нарушая общности, положим

$$\lambda_{-1} = i,\ \lambda_1 = -i,\ \lambda_{-2} = -\mu i,\ \lambda_2 = \mu i,$$
$$\lambda_{-3} = -\lambda i,\ \lambda_3 = \lambda i \qquad (i = \sqrt{-1},\ 0 < \lambda < \mu < 1); \qquad (1.2)$$

коэффициенты a^ν_{jh}, $b^\nu_{jhk}, \ldots$, вообще говоря, комплексные и симметризованные

$$a^\nu_{hj} = a^\nu_{jh}, \quad b^\nu_{\{jhk\}} = \text{i. d.} \quad (\nu, j, h, k = \mp 1, \mp 2, \mp 3). \qquad (1.3)$$

По основной теореме А. Д. Брюно (п. V,1.2), существует обратимая комплексная замена переменных (*нормализующее преобразование*)

$$x_j = y_j + \Sigma \alpha^j_{lm} y_l y_m + \Sigma \beta^j_{lmn} y_l y_m y_n + \ldots \qquad (1.4)$$
$$(j = \mp 1, \mp 2, \mp 3)$$
$$(\alpha^j_{ml} = \alpha^j_{lm},\ \beta^j_{\{lmn\}} = \text{i. d.},\ j, l, m, n = \mp 1, \mp 2, \mp 3),$$

приводящая систему (1.1) к *нормальной форме*

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{(\Lambda, Q)=0} g_{\nu Q} y_{-1}^{q_{-1}} y_1^{q_1} y_{-2}^{q_{-2}} y_2^{q_2} y_{-3}^{q_{-3}} y_3^{q_3} \qquad (1.5)$$
$$(\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3),$$

где $q_{-1}, \ldots, q_3$ суть целые числа или нули, при этом $q_\nu \geqslant -1$, а остальные q_j неотрицательны, $\Sigma q_h \geqslant 1$. В нормальную форму входят только резонансные члены, показатели степеней которых удовлетворяют *резонансному уравнению* $(\Lambda, Q) = 0$, или, в развернутом виде,

$$q_1 - q_{-1} + \mu (q_2 - q_{-2}) + \lambda (q_3 - q_{-3}) = 0. \qquad (1.6)$$

Рассмотрим возможность появления в (1.5) резонансных членов r-й степени, для которых

$$q_{-1} + q_1 + q_{-2} + q_2 + q_{-3} + q_3 = r - 1 \qquad (r \geqslant 2). \qquad (1.7)$$

Резонансное уравнение (1.6) при любых λ, μ из (1.2) и любом нечетном $r \geqslant 3$ допускает *тривиальное решение*

$$q_{-1} = q_1, \quad q_{-2} = q_2, \quad q_{-3} = q_3. \tag{1.8}$$

Далее рассмотрим *три полутривиальных решения*, когда в (1.6) одна из скобок обращается в нуль:

$$q_{-1} = q_1, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{q_{-2} - q_2}{q_3 - q_{-3}}; \tag{1.9}$$

$$q_{-2} = q_2, \quad \lambda = \frac{q_{-1} - q_1}{q_3 - q_{-3}}; \tag{1.10}$$

$$q_{-3} = q_3, \quad \mu = \frac{q_{-1} - q_1}{q_2 - q_{-2}}. \tag{1.11}$$

Поскольку при обращении в (1.6) двух скобок в нуль, обращается в нуль и третья, что соответствует тривиальному решению, то остается рассмотреть *нетривиальное решение*, когда в (1.6) все скобки отличны от нуля:

$$\frac{q_{-3} - q_3}{q_1 - q_{-1}} \lambda + \frac{q_{-2} - q_2}{q_1 - q_{-1}} \mu = 1. \tag{1.12}$$

Для квадратичных членов ($r = 2$) тривиальное решение невозможно. Полутривиальные решения возможны лишь для определенных значений λ и μ и дадут нам для резонансных членов уравнений (1.5) соответственно

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}: \quad Q_{-1} = Q_1 = 0, \quad Q_{-2} = (0, 0, -1, 0, 2, 0),$$
$$Q_2 = (0, 0, 0, -1, 0, 2), \quad Q_{-3} = (0, 0, 1, 0, -1, 1);$$
$$Q_3 = (0, 0, 0, 1, 1, -1);$$
$$\lambda = \frac{1}{2}: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 0, 0, 2, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 0, 0, 2),$$
$$Q_{-2} = Q_2 = 0, \quad Q_{-3} = (1, 0, 0, 0, -1, 1), \quad Q_3 = (0, 1, 0, 0, 1, -1);$$
$$\mu = \frac{1}{2}: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 2, 0, 0, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 2, 0, 0),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 1, 0, 0), \quad Q_2 = (0, 1, 1, -1, 0, 0), \quad Q_{-3} = Q_3 = 0.$$

Для нетривиального решения будем иметь

$$\lambda + \mu = 1: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 1, 0, 1, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 1, 0, 1),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 0, 0, 1), \quad Q_2 = (0, 1, 0, -1, 1, 0),$$
$$Q_{-3} = (1, 0, 0, 1, -1, 0), \quad Q_3 = (0, 1, 1, 0, 0, -1).$$

Для членов третьей степени ($r=3$) тривиальное решение (1.8) даст нам для любых λ и μ из (1.2)

$$Q_\nu = (1, 1, 0, 0, 0, 0), \quad Q_\nu = (0, 0, 1, 1, 0, 0),$$
$$Q_\nu = (0, 0, 0, 0, 1, 1) \qquad (\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3).$$

Все остальные решения возможны лишь для определенных значений λ и μ из (1.2). Выпишем их вместе с показателями степеней Q_ν по уравнениям (1.5). Полутривиальные решения:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}: \quad Q_{-1} = Q_1 = 0, \quad Q_{-2} = (0, 0, -1, 0, 3, 0),$$
$$Q_2 = (0, 0, 0, -1, 0, 3), \quad Q_{-3} = (0, 0, 1, 0, -1, 2),$$
$$Q_3 = (0, 0, 0, 1, 2, -1);$$
$$\lambda = \frac{1}{3}: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 0, 0, 3, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 0, 0, 3),$$
$$Q_{-2} = Q_2 = 0, \quad Q_{-3} = (1, 0, 0, 0, -1, 2), \quad Q_3 = (0, 1, 0, 0, 2, -1);$$
$$\mu = \frac{1}{3}: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 3, 0, 0, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 3, 0, 0),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 2, 0, 0), \quad Q_2 = (0, 1, 2, -1, 0, 0), \quad Q_{-3} = Q_3 = 0.$$

Наконец, нетривиальные решения дадут нам

$$2\lambda + \mu = 1: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 1, 0, 2, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 1, 0, 2),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 0, 0, 2), \quad Q_2 = (0, 1, 0, -1, 2, 0),$$
$$Q_{-3} = (1, 0, 0, 1, -1, 1), \quad Q_3 = (0, 1, 1, 0, 1, -1);$$
$$\lambda + 2\mu = 1: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 2, 0, 1, 0), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 2, 0, 1),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 1, 0, 1), \quad Q_2 = (0, 1, 1, -1, 1, 0),$$
$$Q_{-3} = (1, 0, 0, 2, -1, 0), \quad Q_3 = (0, 1, 2, 0, 0, -1);$$
$$2\mu - \lambda = 1: \quad Q_{-1} = (-1, 0, 2, 0, 0, 1), \quad Q_1 = (0, -1, 0, 2, 1, 0),$$
$$Q_{-2} = (1, 0, -1, 1, 1, 0), \quad Q_2 = (0, 1, 1, -1, 0, 1),$$
$$Q_{-3} = (0, 1, 2, 0, -1, 0), \quad Q_3 = (1, 0, 0, 2, 0, -1).$$

Возникающие резонансы представлены ниже на рис. 17 для $r = 2$ и на рис. 18 для $r = 3$.

4.2. Нормальные формы. Если в уравнениях (1.5) ограничиться членами до третьей степени включительно, то основная теорема А. Д. Брюно (п. V, 1.2) приведет к следующим нормальным формам:

а) При отсутствии резонансов, т. е. при

$$\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \quad \mu \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \quad \frac{\lambda}{\mu} \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3};$$
$$\lambda + \mu \neq 1, \quad 2\lambda + \mu \neq 1, \quad 2\mu \pm \lambda \neq 1$$

(общий случай, т. е. для λ, μ из (1.2), не принадлежащих прямым рис. 17 и 18),

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \lambda_\nu y_\nu + g_1^\nu y_\nu y_{-1} y_1 + g_2^\nu y_\nu y_{-2} y_2 + g_3^\nu y_\nu y_{-3} y_3$$
$$(\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3). \qquad (2.1)$$

б) Для резонансов, возникающих из полутривиальных решений (1.9) — (1.11) уравнения (1.6), в каждое из уравнений (2.1)

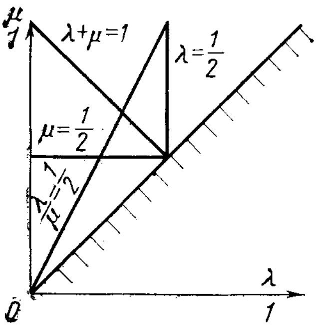

Рис. 17.

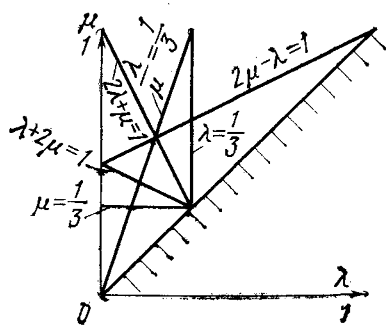

Рис. 18.

добавится справа по одному члену, соответственно

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}: \ 0,\ 0,\ f_{-2} y_{-3}^2,\ f_2 y_3^2,\ f_{-3} y_{-2} y_3,\ f_3 y_2 y_{-3};$$

$$\lambda = \frac{1}{2}: \ e_{-1} y_{-3}^2,\ e_1 y_3^2,\ 0,\ 0,\ e_{-3} y_{-1} y_3,\ e_3 y_1 y_{-3};$$

$$\mu = \frac{1}{2}: \ d_{-1} y_{-2}^2,\ d_1 y_2^2,\ d_{-2} y_{-1} y_2,\ d_2 y_1 y_{-2},\ 0,\ 0;$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}: \ 0,\ 0,\ c_{-2} y_{-3}^3,\ c_2 y_3^3,\ c_{-3} y_{-2} y_3^2,\ c_3 y_2 y_{-3}^2;$$

$$\lambda = \frac{1}{3}: \ b_{-1} y_{-3}^3,\ b_1 y_3^3,\ 0,\ 0,\ b_{-3} y_{-1} y_3^2,\ b_3 y_1 y_{-3}^2;$$

$$\mu = \frac{1}{3}: \ a_{-1} y_{-2}^3,\ a_1 y_2^3,\ a_{-2} y_{-1} y_2^2,\ a_2 y_1 y_{-2}^2,\ 0,\ 0.$$

в) Для резонансов, возникающих из нетривиальных решений (1.12) уравнения (1.6), в каждое из уравнений (2.1) добавится справа по одному члену, соответственно

$$\lambda + \mu = 1: \ h_{-1} y_{-2} y_{-3},\ h_1 y_2 y_3,\ h_{-2} y_{-1} y_3,\ h_2 y_1 y_{-3},\ h_{-3} y_{-1} y_2,\ h_3 y_1 y_{-2};$$

$$2\lambda + \mu = 1: \ i_{-1} y_{-2} y_{-3}^2,\ i_1 y_2 y_3^2,\ i_{-2} y_{-1} y_3^2,\ i_2 y_1 y_{-3}^2,\ i_{-3} y_{-1} y_2 y_3,\ i_3 y_1 y_{-2} y_{-3};$$

$\lambda + 2\mu = 1$: $j_{-1}y_{-2}^2y_{-3}$, $j_1y_2^2y_3$, $j_{-2}y_{-1}y_2y_3$, $j_2y_1y_{-2}y_{-3}$, $j_{-3}y_{-1}y_2^2$, $j_3y_1y_{-2}^2$;

$2\mu - \lambda = 1$: $k_{-1}y_{-2}^2y_3$, $k_1y_2^2y_{-3}$, $k_{-2}y_{-1}y_2y_{-3}$, $k_2y_1y_{-2}y_3$, $k_{-3}y_1y_{-2}^2$, $k_3y_{-1}y_2^2$.

Замечания. Для значений λ и μ, принадлежащих двум и более резонансам (точки пересечения прямых совокупности рис. 17 и 18), в уравнениях (2.1) происходит суперпозиция двух и более дополнительных членов.

В вещественном случае $y_{-\nu} = \bar{y}_\nu$ ($\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3$) и достаточно было бы выписывать нормальные формы только для $\nu = 1, 2, 3$ (или только для $\nu = -1, -2, -3$). Здесь же имеется в виду и случай, когда в исходной системе уравнений (1.1) переменные не являются комплексно-сопряженными.

4.3. Вычисление коэффициентов нормализующего преобразования и нормальных форм. Нормализующее преобразование (1.4) переводит систему (1.1) в общем случае а) п. 4.2 в нормальную форму (2.1); в резонансных случаях б) и в) п. 4.2 в (2.1) появляются дополнительные члены. Представив нормальную форму в симметризованном виде (V,3,1.3а), придем к основным тождествам (V,3,1.6). Далее будем следовать альтернативе п. V,3.2.

Исключим резонансы, возникающие для квадратичных членов (п. 4.1), т. е. допустим, что

$$\frac{\lambda}{\mu} \neq \frac{1}{2}; \quad \lambda, \mu \neq \frac{1}{2}; \quad \lambda + \mu \neq 1 \tag{3.1}$$

(см. также (1.2)). Тогда $\lambda_\nu \neq \lambda_l + \lambda_m$ ($\nu, l, m = \mp 1, \mp 2, \mp 3$) и для квадратичных коэффициентов нормализующего преобразования справедлива формула (V,3,2.2)

$$\alpha_{lm}^\nu = \frac{a_{lm}^\nu}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_\nu} \qquad (\nu, l, m = \mp 1, \mp 2, \mp 3) \tag{3.2}$$

с ограничениями, указанными в (3.1).

При $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}$ (случай б) п. 4.2) имеем, что $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m$ тогда и только тогда, когда $\nu, l, m = -2, -3, -3$; $2, 3, 3$; $-3, \{-2, 3\}$; $3, \{2, -3\}$. Выберем

$$\alpha_{-3-3}^{-2}, \ \alpha_{33}^{2}, \ \alpha_{\{-23\}}^{-3}, \ \alpha_{\{2-3\}}^{3}$$

любыми (предпочтительнее определенными по непрерывности из формулы (3.2) при $\frac{\lambda}{\mu} \to \frac{1}{2}$, если это возможно, или нулями). Для остальных α_{lm}^ν справедлива формула (3.2). Коэффициенты появляющихся при $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}$ квадратичных членов (см. б), п. 4.2) определяются по формулам (V, 3, 2.4)

$$f_{-2} = \varphi^{-2}_{-3-3} = a^{-2}_{-3-3}, \quad f_2 = \varphi^2_{33} = a^2_{33},$$
$$f_{-3} = 2\varphi^{-3}_{-23} = 2a^{-3}_{-23}, \quad f_3 = 2\varphi^3_{2-3} = 2a^3_{2-3}.$$

Аналогично, при $\lambda = \frac{1}{2}$ выберем

$$\alpha^{-1}_{-3-3}, \quad \alpha^1_{33}, \quad \alpha^{-3}_{-13}, \quad \alpha^3_{1-3}$$

любыми и определим

$$e_{-1} = a^{-1}_{-3-3}, \quad e_1 = a^1_{33}, \quad e_{-3} = 2a^{-3}_{-13}, \quad e_3 = 2a^3_{1-3};$$

при $\mu = \frac{1}{2}$ выберем

$$\alpha^{-1}_{-2-2}, \quad \alpha^1_{22}, \quad \alpha^{-2}_{\{-12\}}, \quad \alpha^2_{\{1-2\}}$$

любыми и определим

$$d_{-1} = a^{-1}_{-2-2}, \quad d_1 = a^1_{22}, \quad d_{-2} = 2a^{-2}_{-12}, \quad d_2 = 2a^2_{1-2},$$

и при $\lambda + \mu = 1$ выберем

$$\alpha^{-1}_{\{-2-3\}}, \quad \alpha^1_{\{23\}}, \quad \alpha^{-2}_{\{-13\}}, \quad \alpha^2_{\{1-3\}}, \quad \alpha^{-3}_{\{-12\}}, \quad \alpha^3_{\{1-2\}}$$

любыми и определим

$$h_{-1} = 2a^{-1}_{-2-3}, \quad h_1 = 2a^1_{23}, \quad h_{-2} = 2a^{-2}_{-13},$$
$$h_2 = 2a^2_{1-3}, \quad h_{-3} = 2a^{-3}_{-12}, \quad h_3 = 2a^3_{1-2}.$$

Перейдем теперь к кубическим членам, и прежде всего исключим возникающие здесь резонансы, т. е. допустим, что

$$\frac{\lambda}{\mu} \neq \frac{1}{3}; \quad \lambda, \mu \neq \frac{1}{3}; \quad 2\lambda + \mu \neq 1; \quad 2\mu \pm \lambda \neq 1. \tag{3.3}$$

Выделим значения ν, l, m, p, при которых $\lambda_\nu = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$, это будут

$$\nu, l, m, p = \nu, \{l, -l, \nu\} \qquad (\nu, l = \mp 1, \mp 2, \mp 3), \tag{3.4}$$

и положим

$$\beta^\nu_{\{l-l\nu\}} = 0 \quad (\nu, l = \mp 1, \mp 2, \mp 3). \tag{3.5}$$

Для остальных значений ν, l, m, p справедлива формула (V,3, 2.3), т. е.

$$\beta^\nu_{lmp} = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_\nu} \Bigg[b^\nu_{lmp} + \frac{2}{3} \sum_{j=\mp 1, \mp 2, \mp 3} (a^\nu_{lj}\alpha^j_{mp} +$$
$$+ a^\nu_{mj}\alpha^j_{pl} + a^\nu_{jp}\alpha^j_{lm}) \Bigg]$$
$$(\nu, l, m, p = \mp 1, \mp 2, \mp 3;\ l, m, p \neq \{l, -l, \nu\}) \tag{3.6}$$

с ограничениями, указанными в (3.3). Для коэффициентов при членах третьей степени в (2.1), соответствующих выделенным в (3.4) значениям индексов, будем иметь при условиях (3.1) по формуле (V,3,2.6)

$$g^{\nu}_{|\nu|} = 3\chi^{\nu}_{\nu\nu-\nu} = 3b^{\nu}_{\nu\nu-\nu} + 2 \sum_{j=\mp1,\,\mp2,\,\mp3} (2a^{\nu}_{\nu j}\alpha^{j}_{\nu-\nu} + a^{\nu}_{-\nu j}\alpha^{j}_{\nu\nu})$$
$$(\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3),$$
$$g^{\nu}_{h} = 6\chi^{\nu}_{\nu h-h} = 6b^{\nu}_{\nu h-h} + 4\sum_{j}(a^{\nu}_{\nu j}\alpha^{j}_{h-h} + a^{\nu}_{hj}\alpha^{j}_{-h\nu} + a^{\nu}_{-hj}\alpha^{j}_{\nu h}) \qquad (3.7)$$
$$(\nu = \mp 1, \mp 2, \mp 3;\ h = 1, 2, 3;\ h \neq |\nu|).$$

При $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}$; $\lambda, \mu = \frac{1}{2}$, $\lambda + \mu = 1$ надлежит воспользоваться формулами (V,3,2.5).

Остается рассмотреть случаи, исключенные в (3.3). При $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$, дополнительно к (3.4), $\lambda_{\nu} = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p$ при

$$\nu,\ l, m, p = -2, -3, -3, -3;\ 2, 3, 3, 3;$$
$$-3,\ \{-2, 3, 3\};\ 3,\ \{2, -3, -3\},$$

и мы выберем

$$\beta^{-2}_{-3-3-3},\quad \beta^{2}_{333},\quad \beta^{-3}_{\{-233\}},\quad \beta^{3}_{\{2-3-3\}}$$

любыми (предпочтительнее определенными по непрерывности из формулы (3.6) при $\frac{\lambda}{\mu} \to \frac{1}{3}$, если это возможно, или нулями). Коэффициенты появляющихся при $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$ кубических членов (см. б), п. 4.2) определятся, вообще говоря, формулами (V,3,2.5) (однако, если при этом $\mu = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, то формулами (V,3,2.6), так как выполнено (3.1) и в нормальной форме отсутствуют квадратичные члены). Именно,

$$c_{-2} = \chi^{-2}_{-3-3-3},\quad c_2 = \chi^{2}_{333},\quad c_{-3} = 3\chi^{-3}_{-233},\quad c_3 = 3\chi^{3}_{2-3-3}.$$

Аналогично, при $\lambda = 1/3$ выберем

$$\beta^{-1}_{-3-3-3},\quad \beta^{1}_{333},\quad \beta^{-3}_{\{-133\}},\quad \beta^{3}_{\{1-3-3\}}$$

любыми и определим

$$b_{-1} = \chi^{-1}_{-3-3-3},\quad b_1 = \chi^{1}_{333},\quad b_{-3} = 3\chi^{-3}_{-133},\quad b_3 = 3\chi^{3}_{1-3-3}$$

по формулам (V,3,2.6) $\left(\mu \neq \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, а при $\mu = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ — по формулам (V,3,2.5).

При $\mu = {}^1/_3$ выберем

$$\beta^{-1}_{-2-2-2},\quad \beta^{1}_{222},\quad \beta^{-2}_{-122},\quad \beta^{2}_{1-2-2}$$

любыми и определим

$$a_{-1} = \chi^{-1}_{-2-2-2},\quad a_1 = \chi^1_{222},\quad a_{-2} = 3\chi^{-2}_{-122},\quad a_2 = 3\chi^2_{1-2-2}$$

по формулам (V,3,2.6) ($\lambda \neq {}^1/_6$), а при $\lambda = {}^1/_6$ — по формулам (V,3,2.5).

При $2\lambda + \mu = 1$ выберем

$$\beta^{-1}_{\{-2-3-3\}},\quad \beta^{1}_{\{233\}},\quad \beta^{-2}_{\{-133\}},\quad \beta^{2}_{\{1-3-3\}},\quad \beta^{-3}_{\{-123\}},\quad \beta^{3}_{\{1-2-3\}}$$

любыми и определим

$$i_{-1} = 3\chi^{-1}_{-2-3-3},\ i_1 = 3\chi^1_{233},\ i_{-2} = 3\chi^{-2}_{-133},$$

$$i_2 = 3\chi^2_{1-3-3},\ i_{-3} = 6\chi^{-3}_{-123},\ i_3 = 6\chi^3_{1-2-3}$$

по формулам (V,3,2.6) ($\lambda \neq {}^1/_4$), а при $\lambda = {}^1/_4$ — по формулам (V,3,2.5).

При $\lambda + 2\mu = 1$ выберем

$$\beta^{-1}_{\{-2-2-3\}},\quad \beta^{1}_{\{223\}},\quad \beta^{-2}_{\{-123\}},\quad \beta^{2}_{\{1-2-3\}},\quad \beta^{-3}_{\{-122\}},\quad \beta^{3}_{\{1-2-2\}}$$

любыми и определим

$$j_{-1} = 3\chi^{-1}_{-2-2-3},\ j_1 = 3\chi^1_{223},\ j_{-2} = 6\chi^{-2}_{-123},\ j_2 = 6\chi^2_{1-2-3},\ j_{-3} = 3\chi^{-3}_{-122},$$

$$j_3 = 3\chi^3_{1-2-2}$$

по формулам (V,3,2.6) ($\lambda \neq {}^1/_4$), а при $\lambda = {}^1/_4$ — по формулам (V,3,2.5).

Наконец, при $2\mu - \lambda = 1$ выберем

$$\beta^{-1}_{\{-2-23\}},\quad \beta^{1}_{\{22-3\}},\quad \beta^{-2}_{\{-12-3\}},\quad \beta^{2}_{\{1-23\}},\quad \beta^{-3}_{\{1-2-2\}},\quad \beta^{3}_{\{-122\}}$$

любыми и определим

$$k_{-1} = 3\chi^{-1}_{-2-23},\ k_1 = 3\chi^1_{22-3},\ k_{-2} = 6\chi^{-2}_{-12-3},$$

$$k_2 = 6\chi^2_{1-23},\ k_{-3} = 3\chi^{-3}_{1-2-2},\quad k_3 = 3\chi^3_{-122}$$

по формулам (V,3,2.6) $\left(\lambda \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, а при $\lambda = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ — формулами (V,3,2.5).

Всюду здесь в ситуации выбора β^{ν}_{lmp} предпочтительнее их определять по непрерывности из формулы (3.6) (если это возможно), или полагать их нулями.

4.4. Об устойчивости по третьему приближению. Критерий А. М. Молчанова. Рассмотрим общий случай а) п. 4.2 в предположении вещественности исходной системы (1.1). Последнее означает, что в системе (2.1) не только $\lambda_{-k} = \overline{\lambda}_k$, но и

$$y_{-k} = \bar{y}_k, \quad g_r^{-k} = \overline{g_r^k} \qquad (k, r = 1, 2, 3).$$

Умножая уравнения (2.1) на $y_{-\nu}$ и складывая их попарно, придем к вещественной системе уравнений

$$\frac{d\eta_k}{d\tau} = -\eta_k \sum_{\alpha=1}^{3} E_{k\alpha}\eta_\alpha \quad (k = 1, 2, 3), \tag{4.1}$$

где

$$\eta_k = | y_k |^2 \geqslant 0, \quad E_{k\alpha} = -2 \operatorname{Re} g_\alpha^k \quad (k, \alpha = 1, 2, 3). \tag{4.2}$$

Система (4.1) исследована А. М. Молчановым [298б] для произвольного $k \geqslant 2$. Случай $k = 2$ изложен в п. 1.4. Обратимся к случаю $k = 3$, следуя [298б].

Если положить в (4.1) все переменные η_α, кроме одного, равными нулю, то получим необходимые условия устойчивости тривиального решения вещественной системы (1.1) в общем случае

$$E_{kk} > 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Положительная определенность матрицы

$$\left\| \frac{1}{2}(E_{k\alpha} + E_{\alpha k}) \right\|_1^3$$

является достаточным условием устойчивости. В этом легко убедиться, складывая все уравнения (4.1).

Перейдем к необходимым и достаточным условиям устойчивости тривиального решения системы (4.1). Поскольку переменные η_1, η_2, η_3 неотрицательны, то вопрос сводится к устойчивости в конусе $\eta_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, 3)$. *Инвариантными лучами* системы (4.1) называются решения вида $\eta_k = \eta_k^0 \eta(t)$. Подставляя эти выражения в (4.1), имеем

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -E\eta^2, \qquad \eta(0) = 1, \tag{4.3}$$

$$\eta_k^0 \left[\sum_{\alpha=1}^{3} E_{k\alpha}\eta_\alpha^0 - E \right] = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{4.4}$$

Здесь E — параметр, аналогичный собственному значению в линейных системах, знак которого, как видно из (4.4), определяет устойчивость.

Для отыскания инвариантных лучей системы (4.1) оставим в каждом из уравнений (4.4) только второй множитель и придем к основной системе линейных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{3} E_{k\alpha}\eta_\alpha^0 = E \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{4.5}$$

Если матрица

$$\| E_{k\alpha} \|_1^3 \tag{4.6}$$

неособая, то при любом значении параметра E система (4.5) имеет единственное решение. Эти решения заполняют инвариантную прямую, состоящую из устойчивого ($E > 0$) и неустойчивого ($E < 0$) лучей. Если матрица (4.6) особая, то решение, определенное с точностью до пропорциональности, существует только при $E = 0$ — нейтральная инвариантная прямая. Все решения нелинейной алгебраической системы (4.4) можно получить, оставляя в каждом из уравнений первый либо второй множитель. Всего получается восемь решений, включая разобранное выше и тождественное $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$. Эта процедура соответствует независимому изучению системы (4.1) на каждой из трех граней конуса $\eta_k \geqslant 0$ ($k = 1, 2, 3$).

Критерий А. М. Молчанова [298б]. *Для того чтобы тривиальное решение системы* (4.1) *было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы внутри и на границе конуса* $\eta_k \geqslant 0$ ($k = 1, 2, 3$) *не было ни одного нейтрального или неустойчивого луча.*

Необходимость доказана выше. Доказательство достаточности намечено в [298б].

Замечание. В ряде задач (см. пп. 1.1, 2.6) все величины g_r^k ($k, r = 1, 2, 3$) оказываются чисто мнимыми. В этом случае в силу уравнений (4.1)

$$| y_k |^2 = c_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

являются первыми интегралами системы (2.1) и могут быть использованы для построения функции Ляпунова по методу Четаева ([145а], гл. II, п. 10) связки интегралов. Однако построенная здесь таким образом функция Ляпунова будет определена с точностью до третьих степеней переменных включительно и может привести лишь к суждению о формальной устойчивости [234д] тривиального решения системы (1.1).

Глава IX

КОЛЕБАНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ОКОЛО НИЖНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Случай, когда центр тяжести расположен в одной из главных плоскостей эллипсоида инерции для закрепленной точки

В пп. 1.1, 1.2 и 1.5 проводятся преобразования дифференциальных уравнений колебаний тяжелого твердого тела с закрепленной точкой около нижнего положения равновесия в случае, указанном в заголовке параграфа. К преобразованным уравнениям предпочтительнее применять известные методы, что показано на примере применения метода последовательных приближений.

1.1. Приведение к диагональному виду. Рассмотрим несимметричное тяжелое твердое тело в единственном предположении, что центр тяжести G лежит на одной из главных плоскостей инерции для закрепленной точки O; не нарушая общности, направим главные оси $Oxyz$ эллипсоида инерции так, что $x_G \geqslant 0$, $y_G = 0$, $z_G \geqslant 0$ ($OG^2 = x_G^2 + y_G^2 > 0$). Уравнения Эйлера запишутся в виде

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1-c}{a} qr - \frac{Mgl}{aB}\zeta\gamma', \quad \frac{dq}{dt} = (c-a) rp + \frac{Mgl}{B}(\zeta\gamma - \xi\gamma''),$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a-1}{c} pq + \frac{Mgl}{cB}\xi\gamma' \quad \left(a = \frac{A}{B}, \quad c = \frac{C}{B}, \quad \xi = \frac{x_G}{l}, \quad \zeta = \frac{z_G}{l}\right),$$

где $l = OG$ и неподвижная ось Oz^* направлена вертикально вниз, а γ, γ', γ'' — ее направляющие косинусы. Желая изучать колебания около нижнего положения равновесия ($\gamma = \xi$, $\gamma' = 0$, $\gamma'' = \zeta$), положим во все время движения

$$\gamma = \xi + \Gamma, \quad \gamma' = \Gamma', \quad \gamma'' = \zeta + \Gamma''.$$

Введем безразмерные переменные и время

$$P = \frac{p}{\tilde\nu}, \quad Q = \frac{q}{\tilde\nu}, \quad R = \frac{r}{\tilde\nu}, \quad \tau = \tilde\nu t \quad \left(\tilde\nu = \sqrt{\frac{Mgl}{B}}\right)$$

(заметим, что $\tilde{\nu}$ — частота маятниковых колебаний около оси Oy, если она занимает горизонтальное положение) и запишем уравнения Эйлера — Пуассона в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\tau} &= -\frac{\zeta}{a}\Gamma' + \frac{1-c}{a}QR, & \frac{d\Gamma}{d\tau} &= -\zeta Q + R\Gamma' - Q\Gamma'', \\ \frac{dQ}{d\tau} &= \zeta\Gamma - \xi\Gamma'' + (c-a)RP, & \frac{d\Gamma'}{d\tau} &= \zeta P - \xi R + P\Gamma'' - R\Gamma, \\ \frac{dR}{d\tau} &= \frac{\xi}{c}\Gamma' + \frac{a-1}{c}PQ, & \frac{d\Gamma''}{d\tau} &= \xi Q + Q\Gamma - P\Gamma'. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Собственные значения матрицы линейной части системы (1.1) суть: $0,\ 0,\ -i,\ +i,\ -\lambda i,\ +\lambda i$,

$$\lambda = +\sqrt{\frac{1}{c}\xi^2 + \frac{1}{a}\zeta^2} \qquad (\xi^2 + \zeta^2 = 1), \qquad (1.1\text{a})$$

где нулевому собственному значению отвечают простые элементарные делители. Выпишем матрицу S, составленную из соответственно расположенных собственных векторов матрицы линейной части системы (1.1) и обратную матрицу S^{-1}:

$$\mathrm{S} = \left\| \begin{matrix} 0 & \xi & 0 & 0 & -i\frac{\zeta}{a\lambda} & i\frac{\zeta}{a\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 & i\frac{\xi}{c\lambda} & -i\frac{\xi}{c\lambda} \\ \xi & 0 & -i\zeta & i\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \zeta & 0 & i\xi & -i\xi & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathrm{S}^{-1} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{c\lambda^2} & 0 & \frac{\zeta}{a\lambda^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{\zeta}{2} & 0 & -i\frac{\xi}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -i\frac{\zeta}{2} & 0 & i\frac{\xi}{2} \\ i\frac{\zeta}{2\lambda} & 0 & -i\frac{\xi}{2\lambda} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -i\frac{\zeta}{2\lambda} & 0 & i\frac{\xi}{2\lambda} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right\|. \qquad (1.2)$$

Обозначим через u вектор с компонентами $P, Q, R, \Gamma, \Gamma', \Gamma''$, а через x — вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_6$. Запишем систему (1.1) в виде

$$\frac{d\mathrm{u}}{d\tau} = \mathrm{Au} + \mathrm{g}(\mathrm{u}),$$

где g (u) — вектор-функция, составленная из нелинейных членов системы (1.1). Замена $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{x}$ приведет систему (1.1) к диагональному виду

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{S}^{-1}g(\mathbf{S}\mathbf{x}), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы A в указанной выше последовательности. Поскольку переменные x_3 и x_5 комплексно-сопряжены переменным x_4 и x_6 : $x_3 = \bar{x}_4$, $x_5 = \bar{x}_6$, то уравнения для первых выписывать не будем. Итак, система (1.3) запишется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\tau} &= i\left(x_4^2 - x_3^2\right) + i\lambda\left(x_5^2 - x_6^2\right),\\
\frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{(a-c)\xi\zeta}{ac\lambda^2}x_2(x_3+x_4) + \frac{i}{ac\lambda^3}(\lambda^2-1)(x_3+x_4)(x_5-x_6),\\
\frac{dx_4}{d\tau} &= ix_4 + \frac{1}{2}(c-a)\xi\zeta x_2^2 + \frac{(1-\lambda)(c-a)\xi\zeta}{2ac\lambda^2}x_5^2 + \\
&\quad + \frac{(1+\lambda)(c-a)\xi\zeta}{2ac\lambda^2}x_6^2 + \frac{1}{2}ix_1(x_3+x_4) - \\
&\quad - \frac{1}{2}i\left[1 - \frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2 - \frac{1}{a}\zeta^2\right)\right]x_2x_5 - \\
&\quad - \frac{1}{2}i\left[1 + \frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2 - \frac{1}{a}\zeta^2\right)\right]x_2x_6 - \frac{(c-a)\xi\zeta}{ac\lambda^2}x_5x_6,\\
\frac{dx_6}{d\tau} &= i\lambda x_6 + \frac{1}{2}i\lambda x_1(x_6-x_5) + \\
&\quad + \frac{1}{2}i\left[1 - \lambda + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{c}\xi^2 + \frac{c}{a}\zeta^2\right)\right]x_2x_3 + \\
&\quad + \frac{1}{2}i\left[-1 - \lambda + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{c}\xi^2 + \frac{c}{a}\zeta^2\right)\right]x_2x_4 + \\
&\quad + \frac{(a-c)(1-\lambda)\xi\zeta}{2ac\lambda^2}x_3(x_5-x_6) + \frac{(a-c)(1+\lambda)\xi\zeta}{2ac\lambda^2}x_4(x_5-x_6).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Выпишем в диагональных переменных три известных первых интеграла: тривиальный, кинетического момента относительно вертикали Oz^* и энергии:

$$2x_1 + x_1^2 - (x_3 - x_4)^2 + (x_5 + x_6)^2 = 0, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
&ac\lambda^2x_2 + ac\lambda^2x_1x_2 + i(c-a)\xi\zeta x_2(x_3 - x_4) + \\
&\quad + \frac{\lambda-1}{\lambda}(x_3x_5 + x_4x_6) + \frac{\lambda+1}{\lambda}(x_3x_6 + x_4x_5) = k \qquad \left(k = \frac{k_{0z^*}}{B\tilde{\nu}}\right),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$-2x_1 + ac\lambda^2x_2^2 + (x_3+x_4)^2 - (x_5-x_6)^2 = \mu^2 \qquad \left(\mu^2 = \frac{2h}{B\tilde{\nu}^2} + 2\right). \tag{1.7}$$

1.2. Приведение к ляпуновскому ([77а], § 33—45) виду. Нетрудно выписать матрицу $\mathbf{T}$ линейного преобразования, приводящую диагональную систему (1.4) к ляпуновской кососимметричной форме

$$\mathbf{T}=\mathbf{I}_2\dotplus\mathbf{T}_2\dotplus\mathbf{T}_2,\qquad \mathbf{I}_2=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{T}_2=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1&-i\\1&i\end{Vmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{L}$ результирующего преобразования исходной системы (1.1) в систему ляпуновского вида равна

$$\mathbf{L}=\mathbf{S}\mathbf{T},$$

где $\mathbf{S}$ см. (1.2). Выпишем ее и обратную ей матрицу:

$$\mathbf{L}=\begin{Vmatrix}0&\xi&0&0&0&-\dfrac{\zeta}{a\lambda}\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&\zeta&0&0&0&\dfrac{\xi}{c\lambda}\\ \xi&0&0&-\zeta&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ \zeta&0&0&\xi&0&0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{L}^{-1}=\begin{Vmatrix}0&0&0&\xi&0&\zeta\\ \dfrac{\xi}{c\lambda^2}&0&\dfrac{\zeta}{a\lambda^2}&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-\zeta&0&\xi\\ 0&0&0&0&1&0\\ -\dfrac{\zeta}{\lambda}&0&\dfrac{\xi}{\lambda}&0&0&0\end{Vmatrix},\tag{2.1}$$

Замена переменных $\mathbf{u}=\mathbf{L}\mathbf{z}$ приведет систему (1.1) к ляпуновскому виду

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{d\tau}&=-z_3z_4+\lambda z_5z_6,\\
\frac{dz_2}{d\tau}&=\frac{(a-c)\xi\zeta}{ac\lambda^2}z_2z_3+\frac{\lambda^2-1}{ac\lambda^3}z_3z_6,\\
\frac{dz_3}{d\tau}&=-z_4+(c-a)\xi\zeta z_2^2+\frac{(a-c)\xi\zeta}{ac\lambda^2}z_6^2+\frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2-\frac{1}{a}\zeta^2\right)z_2z_6,\\
\frac{dz_4}{d\tau}&=z_3+z_1z_3-z_2z_5+\frac{(c-a)\xi\zeta}{ac\lambda}z_5z_6,\\
\frac{dz_5}{d\tau}&=-\lambda z_6-\lambda z_1z_6+z_2z_4+\frac{(a-c)\xi\zeta}{ac\lambda}z_4z_6,\\
\frac{dz_6}{d\tau}&=\lambda z_5+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a-1}{c}\xi^2+\frac{c-1}{a}\zeta^2\right)z_2z_3+\frac{(c-a)\xi\zeta}{ac\lambda^2}z_3z_6.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Выпишем в ляпуновских переменных три первых интеграла в прежней последовательности:

$$2z_1+z_1^2+z_4^2+z_5^2=0,\tag{2.3}$$

$$ac\lambda^2z_2+ac\lambda^2z_1z_2+(c-a)\xi\zeta z_2z_4+\frac{1}{\lambda}z_4z_6+z_3z_5=k,\tag{2.4}$$

$$-2z_1+ac\lambda^2z_2^2+z_3^2+z_6^2=\mu^2.\tag{2.5}$$

Простейшая связка интегралов по Четаеву ([144б], стр. 430—431) сводится здесь к сумме тривиального интеграла (2.3) и интеграла энергии (2.5) и дает положительно-определенную форму V всех переменных

$$V = z_1^2 + ac\lambda^2 z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 = \mu^2,$$

что, напоминая об устойчивости нижнего положения равновесия, позволяет определить область его притяжения в переменных p, q, r, γ, γ', γ''.

1.3. Резонансы. Формула (1.1а) устанавливает отношение частот линейной части системы (1.1). Приравнивая это отношение $\rho = m/n$, где m и n — взаимно простые натуральные числа, получим

$$\frac{1}{c}\xi^2 + \frac{1}{a}\zeta^2 = \rho^2, \tag{3.1}$$

или

$$a(\rho^2 c - 1)\xi^2 + c(\rho^2 a - 1)\zeta^2 = 0 \qquad (\xi^2 + \zeta^2 \equiv 1). \tag{3.1а}$$

В первом октанте пространства $\{a, c, \xi^2\}$ уравнение (3.1) определяет часть поверхности второго порядка

$$(a - c)\xi^2 = c(\rho^2 a - 1) \tag{3.1б}$$

при естественных ограничениях

$$0 \leqslant \xi^2 \leqslant 1, \quad a + c \geqslant 1, \quad c - a \leqslant 1, \quad a - c \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Последние три неравенства выражают известные соотношения, что сумма двух любых главных моментов инерции не меньше третьего из них. При $\rho = 1$ уравнение (3.1) запишется в виде

$$A(C - B)\xi^2 + C(A - B)\zeta^2 = 0. \tag{3.3}$$

Это, как заметил Ф. Х. Цельман [333б], условия на параметры твердого тела в случае Гесса — Аппельрота [216]. Разумеется, уравнение (3.3) выполнено и в случая Лагранжа — Пуассона ($\xi = 0$, $A = B$).

При $\rho = 2$ уравнение (3.1) примет вид

$$A(4C - B)\xi^2 + C(4A - B)\zeta^2 = 0.$$

При условиях $A = B$, $\zeta = 0$ имеем $A = 4C$, что, как заметил Ф. Х. Цельман [333б], характеризует параметры твердого тела в случае Горячева — Чаплыгина [38б, 138].

Однако, уравнение (3.1) (или 3.1а), (3.1б)), имеющее решение при любом $0 < \rho = m/n < \infty$, не имеет решения, отвечающего случаю Ковалевской [61] ($\rho = \sqrt{2}$).

1.4. Простейшие движения. Начнем с перманентных вращений, во все время которых p, q, r, γ, γ', γ'' постоянны, т. е. ось вращения (с постоянной угловой скоростью) занимает неизменное положение в теле. Уравнения (1.1) дадут

$$\begin{aligned}
&(1-c)\,QR-\zeta\gamma'=0, \quad R\gamma'-Q\gamma''=0,\\
&(c-a)RP+\zeta\gamma-\xi\gamma''=0, \quad P\gamma''-R\gamma=0,\\
&(a-1)\,PQ+\xi\gamma'=0, \quad Q\gamma-P\gamma'=0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Из последних трех уравнений имеем

$$P=\Omega\gamma,\ Q=\Omega\gamma',\ R=\Omega\gamma'' \quad (\Omega=+\sqrt{P^2+Q^2+R^2}), \tag{4.2}$$

т. е. перманентная ось всегда вертикальна. Для определения ее положения в теле умножим первое и третье уравнения (4.1) соответственно на ξ и ζ и, сложив их, в силу (4.2) будем иметь

$$\gamma'[\xi\,(1-c)\,\gamma''+\zeta\,(a-1)\,\gamma]=0.$$

В рассматриваемом случае геометрическое место осей перманентных вращений в теле (конус Штауде) распадается на две плоскости:

$$y=0 \quad \text{и} \quad \xi\,(1-c)\,z+\zeta\,(a-1)\,x=0.$$

Перейдем к маятникообразным движениям. Такие движения, как известно, возможны относительно той из главных осей инерции (необходимо горизонтальной и неподвижной в пространстве), которая перпендикулярна к плоскости, содержащей центр тяжести. Именно наличие маятникообразного движения и определило постановку задачи. Итак, положим в уравнениях (1.1) $P=R=\Gamma'=0$ и возвращаясь к переменным γ и γ'', получим

$$\frac{dQ}{d\tau}=\zeta\gamma-\xi\gamma'', \quad \frac{d\gamma}{d\tau}=-Q\gamma'', \quad \frac{d\gamma''}{d\tau}=Q\gamma. \tag{4.3}$$

Поскольку $\gamma''=\cos\vartheta$, где ϑ — угол нутации, то при $\gamma'\equiv 0$ имеем $\gamma=\sin\vartheta$. В положении равновесия $\cos\vartheta=\zeta$, поэтому положим для маятникообразного движения

$$\vartheta=\arccos\zeta+\Theta.$$

Из уравнений (4.3) получим уравнение маятниковых колебаний

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2}+\sin\Theta=0.$$

1.5. Преобразование уравнений диагонального вида. Выразим x_1 из тривиального интеграла (1.5)

$$x_1=\frac{1}{2}(x_3-x_4)^2-\frac{1}{2}(x_5+x_6)^2+[4]. \tag{5.1}$$

Подставив это значение в интеграл кинетического момента (1.6) и замечая, что x_2 имеет тот же порядок малости, что и k, получим

$$x_2 = \frac{1}{ac\lambda^2} k + \frac{1-\lambda}{ac\lambda^3}(x_3x_5 + x_4x_6) - \\ - \frac{1+\lambda}{ac\lambda^3}(x_3x_6 + x_4x_5) + \frac{i(a-c)\xi\zeta}{a^2c^2\lambda^4} k(x_3 - x_4) + [3]. \qquad (5.2)$$

Всюду далее мы будем отмечать порядок малости отброшенных членов по переменным x_3, x_4, x_5, x_6 и постоянной k. Теперь порядок системы уравнений (1.4) понизится на две единицы и преобразованная система, состоящая из двух пар комплексно-сопряженных уравнений ($x_3 = \bar{x}_4$, $x_5 = \bar{x}_6$), примет вид

$$\frac{dx_4}{d\tau} = ix_4 + \frac{(c-a)\xi\zeta}{2a^2c^2\lambda^4} k^2 + \frac{(1-\lambda)(c-a)\xi\zeta}{2ac\lambda^2} x_5^2 + \\ + \frac{(1+\lambda)(c-a)\xi\zeta}{2ac\lambda^2} x_6^2 - \frac{i}{2ac\lambda^2}\left[1 - \frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2 - \frac{1}{a}\zeta^2\right)\right] kx_5 - \\ - \frac{i}{2ac\lambda^2}\left[1 + \frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2 - \frac{1}{a}\zeta^2\right)\right] kx_6 - \frac{(c-a)\xi\zeta}{ac\lambda^2} x_5x_6 + \\ + \frac{1}{4} i(x_3 - x_4)(x_3^2 - x_4^2) - \frac{1}{4} i(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)^2 - \\ - \frac{(c-a)(1+\lambda)\xi\zeta}{a^2c^2\lambda^5} k(x_3x_6 + x_4x_5) + \\ + \frac{(c-a)(1-\lambda)\xi\zeta}{a^2c^2\lambda^5} k(x_3x_5 + x_4x_6) - i\frac{(a-c)^2\xi^2\zeta^2}{a^3c^3\lambda^6} k^2(x_3 - x_4) + \\ + \frac{1}{2ac\lambda^3}\Big[i(\lambda+1)(x_3x_6 + x_4x_5) + i(\lambda-1)(x_3x_5 + x_4x_6) + \\ + \frac{(a-c)\xi\zeta}{ac\lambda} k(x_3 - x_4)\Big]\left\{\left[1 - \frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2 - \frac{1}{a}\zeta^2\right)\right]x_5 + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{c-a}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\xi^2 - \frac{1}{a}\zeta^2\right)\right]x_6\right\} + [4], \qquad (5.3)$$

$$\frac{dx_6}{d\tau} = i\lambda x_6 + \frac{i}{2ac\lambda^2}\left[1 - \lambda + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{c}\xi^2 + \frac{c}{a}\zeta^2\right)\right] kx_3 + \\ + \frac{(a-c)(1-\lambda)\xi\zeta}{2ac\lambda^2} x_3(x_5 - x_6) + \frac{i}{2ac\lambda^2}\Big[-1 - \lambda + \\ + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{c}\xi^2 + \frac{c}{a}\zeta^2\right)\Big] kx_4 + \frac{(a-c)(1+\lambda)\xi\zeta}{2ac\lambda^2} x_4(x_5 - x_6) + \\ + \frac{1}{4} i\lambda(x_3 - x_4)^2(x_6 - x_5) + \frac{1}{4} i\lambda(x_5^2 - x_6^2)(x_5 + x_6) + \\ + \frac{1}{2ac\lambda^3}\Big[i(1-\lambda)(x_3x_5 + x_4x_6) - i(1+\lambda)(x_3x_6 + x_4x_5) + \\ + \frac{(c-a)\xi\zeta}{ac\lambda} k(x_3 - x_4)\Big]\left\{\left[1 - \lambda + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{c}\xi^2 + \frac{c}{a}\zeta^2\right)\right]x_3 + \right. \\ \left. + \left[-1 - \lambda + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{c}\xi^2 + \frac{c}{a}\zeta^2\right)\right]x_4\right\} + [4].$$

Оставшийся первый интеграл удобнее взять в виде суммы интеграла энергии (1.7) и тривиального интеграла (1.5). Используя (5.1) и (5.2), запишем первый интеграл системы уравнений (5.3) в виде

$$\frac{1}{ac\lambda^2}\Big[k+\frac{1-\lambda}{\lambda}(x_3x_5+x_4x_6)-\frac{1+\lambda}{\lambda}(x_3x_6+x_4x_5)+$$
$$+i\frac{(a-c)\xi\zeta}{ac\lambda^2}k(x_3-x_4)\Big]^2+4|x_4|^2+4|x_6|^2+[4]=\mu^2.$$

1.6. Возможные обобщения. Рассмотренная здесь система дифференциальных уравнений является трехпараметрической,— по числу входящих независимых параметров: a, c и ξ (напомним, что $\zeta = +\sqrt{1-\xi^2}$). Если бы эллипсоид инерции относительно точки O оказался эллипсоидом вращения ($a = 1$ или $c = 1$ или $a = c$), или центр тяжести оказался бы на одной из главных осей произвольного эллипсоида инерции относительно точки O ($\xi = 0$ или $\xi = 1$), то система уравнений была бы двухпараметрической. В случае Лагранжа — Пуассона ($a = 1$, $\xi = 0$) система уравнений (1.1) содержит один параметр c. В случае кинетической симметрии ($a = c = 1$, $\xi = 0$) и в случае Ковалевской ($a = 1$, $c = {}^1/_2$, $\varepsilon = 1$, либо $a = c = 2$, $\xi = 1$) система уравнений (1.1) не содержит параметров. В общем случае движение твердого тела описывается системой дифференциальных уравнений с четырьмя параметрами: a, c, ξ, η $(\zeta = +\sqrt{1-\xi^2-\eta^2})$.

Получающиеся четырехпараметрические уравнения аналогичны (другой подход, см. § 2, приводит к более простым уравнениям) здесь приведенным, но более громоздки. Также более громоздки и уравнения колебаний около положения равновесия в других силовых полях, например, в центральном ньютоновском поле сил.

Проделанные преобразования позволяют для тяжелого твердого тела применить методы, специфические для колебаний в существенно нелинейных автономных системах. Некоторые из таких методов развиты в главах I, IV и VIII. Насколько они окажутся эффективными для колебаний твердого тела, покажет будущее. Остановимся в заключение на том методе, который приводит, на наш взгляд, к эффективным результатам.

1.7. Ситуация, близкая к случаю Ковалевской. В рамках сделанного в этом параграфе предположения рассмотрим ситуацию, когда центр тяжести G тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции для закрепленной точки O, являющегося эллипсоидом вращения. Итак, предположим,

$$A = B \neq C, \quad y_G = z_G = 0, \quad x_G = OG \neq 0.$$

Рассматриваемая ситуация включает в себя и случай Ковалевской ($C = {}^1/_2 A$).

Уравнения (1.1) при $a = 1$, $\xi = 1$, $\zeta = 0$ примут вид

$$\begin{gathered}\frac{dP}{d\tau} = (1-c)\,QR, \quad \frac{dQ}{d\tau} = -\gamma'' + (c-1)\,RP, \quad \frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{c}\gamma', \\ \frac{d\gamma}{d\tau} = R\gamma' - Q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{d\tau} = P\gamma'' - R\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{d\tau} = Q\gamma - P\gamma'.\end{gathered} \tag{7.1}$$

Три первых интеграла: тривиальный, кинетического момента относительно вертикали Oz_1 и энергии запишутся в виде

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \; P\gamma + Q\gamma' + cR\gamma'' = k \quad \left(k = \frac{1}{\nu A} K_{z_1}\right), \tag{7.2}$$

$$P^2 + Q^2 + cR^2 - 2\gamma = \frac{2h}{A\nu^2}. \tag{7.3}$$

Намереваясь изучать колебания около нижнего положения равновесия ($\gamma = 1$, $\gamma' = \gamma'' = 0$), разрешим два первых интеграла относительно γ и P:

$$\gamma = +\sqrt{1 - \gamma'^2 - \gamma''^2}, \quad P = \frac{k - Q\gamma' - cR\gamma''}{\sqrt{1 - \gamma'^2 - \gamma''^2}}. \tag{7.4}$$

Последние выражения являются аналитическими функциями переменных при условии

$$\gamma'^2 + \gamma''^2 < 1, \tag{7.5}$$

т. е. до тех пор, пока центр тяжести G не достигнет горизонтальной плоскости, проходящей через точку O. Допустим, что центр тяжести тела достигает указанной горизонтальной плоскости с нулевой угловой скоростью, т. е.

$$P = Q = R = \gamma = 0, \; \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Для этого движения постоянная h в интеграле (7.3) равна нулю и для него же имеем в начальный момент в силу (7.3)

$$P^2(0) + Q^2(0) + cR^2(0) - 2\gamma(0) = 0.$$

Следовательно, если в начальный момент

$$P^2(0) + Q^2(0) + c\,R^2(0) - 2\gamma(0) < 0, \tag{7.6}$$

то и во все время движения центр тяжести не достигнет указанной горизонтальной плоскости, т. е. выполнено условие аналитичности (7.5).

Подставив (7.4) в (7.1), получим систему четвертого порядка

$$
\begin{gathered}
\frac{dQ}{d\tau} = -\gamma'' + (c-1)R\frac{k - Q\gamma' - cR\gamma''}{\sqrt{1-\gamma'^2-\gamma''^2}}, \quad \frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{c}\gamma', \\
\frac{d\gamma'}{d\tau} = \gamma''\frac{k - Q\gamma' - cR\gamma''}{\sqrt{1-\gamma'^2-\gamma''^2}} - R\sqrt{1-\gamma'^2-\gamma''^2}, \\
\frac{d\gamma''}{d\tau} = Q\sqrt{1-\gamma'^2-\gamma''^2} - \gamma'\frac{k - Q\gamma' - cR\gamma''}{\sqrt{1-\gamma'^2-\gamma''^2}},
\end{gathered}
\tag{7.7}
$$

аналитическую при условии (7.6).

Характеристическое уравнение для линейной части системы (7.7) есть

$$\lambda^4 + \left(1 + \frac{1}{c} + k^2\right)\lambda^2 + \frac{1}{c} + \frac{1-c}{c}k^2 = 0.$$

При $c < 1$ корни этого уравнения чисто мнимые и различные. Пусть $c > 1$; тогда при условии

$$k^2 > \frac{1}{c-1} \tag{7.8}$$

появляется один положительный корень. Заметим, что граница (7.8) неустойчивости в большом нижнего положения равновесия сколь угодно велика для толстого диска ($c = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) и сколь угодно мала для тонкого диска («блина», $c \gg 1$).

Выясним совместность условия (7.8) — неустойчивости в большом и (7.6) — аналитичности, имея в виду, что в силу (7.2)

$$k = P(0)\gamma(0) + Q(0)\gamma'(0) + cR(0)\gamma''(0).$$

Пусть движение начинается из состояния равновесия, т. е.

$$\gamma(0) = 1, \ \gamma'(0) = \gamma''(0) = 0.$$

Тогда $k = P(0)$ и условия (7.8) и (7.6) запишутся в виде неравенств

$$\frac{1}{c-1} < P^2(0) < 2 - Q^2(0) - R^2(0), \tag{7.9}$$

которые совместны лишь при $c > {}^3/_2$.

1.8. Применение метода последовательных приближений. Представим систему уравнений (7.7) в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} Q \\ R \\ \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & (c-1)k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{Vmatrix}, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — вектор-функция, составленная из нелинейных членов. Примем за нулевое приближение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$; тогда будем иметь для первого приближения

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \tag{8.2}$$

и для последующих приближений

$$\frac{d\mathbf{x}_{k+1}}{d\tau} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда будем иметь

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\tau \mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \int_0^\tau e^{(\tau-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s))\,ds. \tag{8.3}$$

Оценим стандартным образом норму разности

$$\mathbf{x}_{k+1}(\tau) - \mathbf{x}_k(\tau) = \int_0^\tau e^{(\tau-s)\mathbf{A}}[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}(s))]\,ds \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Будем иметь

$$|\mathbf{x}_{k+1}(\tau) - \mathbf{x}_k(\tau)| \leqslant 4^{\frac{3}{2}} L\tau\, |e^{(\tau-s)\mathbf{A}}|\, |\mathbf{x}_k(s) - \mathbf{x}_{k-1}(s)|$$
$$(0 \leqslant s \leqslant \tau;\ k = 1, 2, \ldots),$$

где L — константа Липшица в замкнутой области, содержащейся в (7.5). Таким образом, при

$$\tau < \tau^* = \frac{1}{8L}|e^{(\tau-s)\mathbf{A}}|^{-1}$$

отображение (8.3) является сжимающим и последовательность $\{\mathbf{x}_k(\tau)\}$ равномерно сходится на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*$.

Для первого приближения будем иметь из (8.2) и (8.3)

$$\mathbf{x}_1(\tau) = e^{\tau\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}(e^{\tau\mathbf{A}} - \mathbf{I}_4)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \tag{8.4}$$

В развернутом виде формула (8.4) описывает процесс вставания тонкого диска, достаточно сильно заверченного вокруг вертикали (эффект монетки).

1.9. Замечания по определению положения твердого тела с закрепленной точкой. Мы исходим из интегрирования уравнений Эйлера — Пуассона. Однако, найдя значения p, q, r, γ, γ', γ'' для данного момента времени t, мы получим при этом только пять произвольных постоянных, ибо сумма квадратов направляющих косинусов в любой момент времени равна единице. В то же время начальные данные могут принимать шесть произвольных начальных значений, например, p_0, q_0, r_0, φ_0, ψ_0, ϑ_0, где φ, ψ, ϑ — эйлеровы углы. Легко показать (см., например, [38б], гл. I, § 5), что для полного решения, кроме интегрирования уравнений Эйлера — Пуассона, необходимо выполнить еще одну квадратуру. Действительно, если для φ и ϑ мы имеем конечные формулы [38б]

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \vartheta = \arccos\gamma'',$$

то для угла ψ прецессии будем иметь

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\gamma'}\left[r - \frac{1}{\gamma'^2+\gamma''^2}\left(\frac{d\gamma}{dt}\gamma' - \frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right)\right].$$

П. В. Харламов применяет иной способ определения положения тела в пространстве, именно при помощи подвижного и неподвижного годографов угловой скорости и дуговых координат. Этот способ ([138], п. 1.6) называется естественным по аналогии с кинематикой точки.

§ 2. Общий случай

Система динамических и кинематических уравнений Эйлера как замечает А. Ю. Ишлинский ([52а], гл. IV, § 1), оказывается малоудобной для изучения поведения гироскопов. Эта замечание относится и к рассматриваемой в этой главе задаче. В общем ее случае, если исходить из уравнений Эйлера — Пуассона, имеется четыре независимых параметра, за которые можно принять два отношения моментов инерции и два отношения координат центра тяжести к расстоянию его до неподвижной точки. Если, как и в § 1, центр тяжести расположен в одной из главных плоскостей эллипсоида инерции для закрепленной точки (что всегда осуществимо, если последний является эллипсоидом вращения), то число независимых параметров меньше четырех. Оно равно трем в общей при сделанном допущении ситуации, не превосходит двух в указанном случае эллипсоида вращения, равно одному в случае Лагранжа — Пуассона и, наконец, в случае Ковалевской таковые параметры отсутствуют.

Преобразование линейной части уравнений рассматриваемых в этой главе колебаний к жордановой форме оказывается весьма громоздким, если исходить из уравнений Эйлера — Пуассона. Если же число названных выше параметров хотя бы на единицу меньше, чем в общем случае, то это преобразование довольно компактно (см. п. 1.1). Однако если в задаче этой главы исходить из специальных осей сопутствующей телу системы координат, введенных П. В. Харламовым ([138], п. 2.6), то выкладки существенно упрощаются.

В этом параграфе, как и в § 1, мы проводим подготовительные преобразования для применения методов малого параметра и метода нормальных форм. Само же применение этих методов потребует значительных усилий. Это отражает существо вопроса: движение твердого тела с закрепленной точкой не сводится, вообще говоря, к наложению колебаний, а описывается, как известно, качением без проскальзывания подвижного аксоида по неподвижному (детальное исследование проведено в [138]). Что же касается применения метода последовательных приближений, то результаты п. 2.6 (см. также п. 1.8) представляются достаточно эффективными.

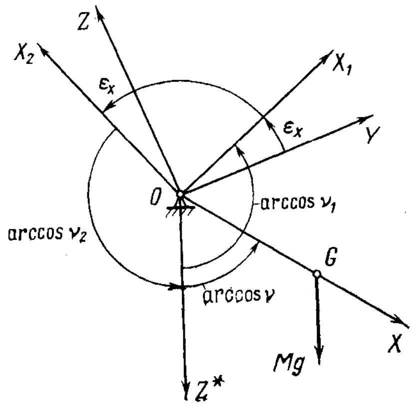

Рис. 19.

2.1. Опорная система координат. Предположим, что центр масс G тела не совпадает с закрепленной точкой O. Первую координатную ось OX проведем через центр масс G тела, а две другие, OY и OZ, выберем из условия, что центробежный момент инерции J_{YZ} равен нулю. Систему координат $OXYZ$, связанную с телом, назовем опорной (рис. 19).

Кинетическая энергия тела является, как известно, квадратичной формой компонент угловой скорости

$$T=\frac{1}{2}(J_{XX}\omega_X^2+J_{YY}\omega_Y^2+J_{ZZ}\omega_Z^2+2J_{XY}\omega_X\omega_Y+2J_{ZX}\omega_Z\omega_X), \quad (1.1)$$

где J_{XX}, J_{YY}, J_{ZZ} — осевые, а $J_{XY}=J_{YX}$, $J_{ZX}=J_{XZ}$ ($J_{YZ}=J_{ZY}=0$) — центробежные моменты инерции тела. Воспользовавшись формулами для проекций кинетического момента $\mathbf{k}_O$ тела на опорные оси

$$\begin{aligned} k_X &= J_{XX}\omega_X+J_{XY}\omega_Y+J_{XZ}\omega_Z,\\ k_Y &= J_{YX}\omega_X+J_{YY}\omega_Y,\\ k_Z &= J_{ZX}\omega_X+J_{ZZ}\omega_Z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

запишем (1.1) в виде

$$T=\frac{1}{2}(\{k_X\omega_X+k_Y\omega_Y+k_Z\omega_Z). \quad (1.3)$$

Разрешим уравнения (1.2) относительно ω_X, ω_Y, ω_Z:

$$\begin{aligned} \omega_X &= \Omega_{XX}k_X+\Omega_{XY}k_Y+\Omega_{XZ}k_Z,\\ \omega_Y &= \Omega_{YX}k_X+\Omega_{YY}k_Y+\Omega_{YZ}k_Z,\\ \omega_Z &= \Omega_{ZX}k_X+\Omega_{ZY}k_Y+\Omega_{ZZ}k_Z, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\Omega_{XX} = \frac{J_{YY}J_{ZZ}}{\det \mathbf{J}}, \quad \Omega_{YY} = \frac{J_{ZZ}J_{XX} - J_{ZX}^2}{\det \mathbf{J}}, \quad \Omega_{ZZ} = \frac{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2}{\det \mathbf{J}},$$

$$\Omega_{XY} = \Omega_{YX} = -\frac{J_{XY}J_{ZZ}}{\det \mathbf{J}}, \quad \Omega_{XZ} = \Omega_{ZX} = -\frac{J_{XZ}J_{YY}}{\det \mathbf{J}},$$

$$\Omega_{YZ} = \Omega_{ZY} = \frac{J_{XY}J_{ZX}}{\det \mathbf{J}}$$

и, наконец, $\det \mathbf{J}$ есть определитель положительно-определенной квадратичной формы (1.1), т. е. определитель матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} J_{XX} & J_{XY} & J_{ZX} \\ J_{XY} & J_{YY} & 0 \\ J_{ZX} & 0 & J_{ZZ} \end{Vmatrix}. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получим кинетическую энергию тела как квадратичную форму компонент кинетического момента тела относительно закрепленной точки O

$$T = \frac{1}{2}(\Omega_{XX}k_X^2 + \Omega_{YY}k_Y^2 + \Omega_{ZZ}k_Z^2 + \\ + 2\Omega_{XY}k_Xk_Y + 2\Omega_{YZ}k_Yk_Z + 2\Omega_{ZX}k_Zk_X). \tag{1.6}$$

Таким образом, осуществлен переход от тензора инерции $\{J_{XX}, \ldots, J_{ZX}\}$ к гирационному тензору $\{\Omega_{XX}, \ldots, \Omega_{ZX}\}$ (см. [138], п. 2.5).

Все это можно записать в более компактном виде:

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{J}\omega, \qquad T = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_O, \omega) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\omega, \omega),$$

$$\omega = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{k}_O, \qquad T = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_O, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{k}_O). \tag{1.7}$$

2.2. Специальные оси координат. Повернем оси опорной системы координат $OXYZ$ вокруг оси OX на угол ε в направлении от оси OY к OZ; новые оси обозначим OXX_1X_2 (см. рис. 19). Новые единичные векторы выражаются через таковые опорной системы координат формулами

$$\mathbf{e}_{X_1} = \mathbf{e}_Y \cos\varepsilon + \mathbf{e}_Z \sin\varepsilon, \; \mathbf{e}_{X_2} = -\mathbf{e}_Y \sin\varepsilon + \mathbf{e}_Z \cos\varepsilon.$$

Матрица $\mathbf{R}$, составленная из компонент нового базиса $\mathbf{e}_X$, $\mathbf{e}_{X_1}$, $\mathbf{e}_{X_2}$ в опорном базисе $\mathbf{e}_X$, $\mathbf{e}_Y$, $\mathbf{e}_Z$, имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Vmatrix}$$

и является ортогональной: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\tau}$.

Матрица $\widetilde{\mathbf{J}}$ тензора инерции в новом базисе определится формулой [146], (I.1.27):

$$\widetilde{\mathbf{J}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{R} =$$
$$= \begin{Vmatrix} J_{XX} & J_{XY}\cos\varepsilon + J_{ZX}\sin\varepsilon & J_{ZX}\cos\varepsilon - J_{XY}\sin\varepsilon \\ J_{XY}\cos\varepsilon + J_{ZX}\sin\varepsilon & J_{YY}\cos^2\varepsilon + J_{ZZ}\sin^2\varepsilon & \frac{1}{2}(J_{ZZ} - J_{YY})\sin 2\varepsilon \\ J_{ZX}\cos\varepsilon - J_{XY}\sin\varepsilon & \frac{1}{2}(J_{ZZ} - J_{YY})\sin 2\varepsilon & J_{YY}\sin^2\varepsilon + J_{ZZ}\cos^2\varepsilon \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, $\det\widetilde{\mathbf{J}} = \det\mathbf{J}$. Вычисления дадут для элементов обратной матрицы

$$\mathcal{J}_{11}^{-1} = \frac{J_{YY}J_{ZZ}}{\det\mathbf{J}}, \quad \mathcal{J}_{22}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{\det\mathbf{J}}[(J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2)\sin^2\varepsilon +$$
$$+ (J_{XX}J_{ZZ} - J_{ZX}^2)\cos^2\varepsilon + J_{XY}J_{ZX}\sin 2\varepsilon],$$
$$\mathcal{J}_{33}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{\det\mathbf{J}}[(J_{XX}J_{ZZ} - J_{ZX}^2)\sin^2\varepsilon +$$
$$+ (J_{XX}I_{YY} - J_{XY}^2)\cos^2\varepsilon - J_{XY}J_{ZX}\sin 2\varepsilon], \tag{2.1}$$
$$\mathcal{J}_{12}^{-1}(\varepsilon) = \mathcal{J}_{21}^{-1}(\varepsilon) = -\frac{1}{\det\mathbf{J}}(J_{YY}J_{ZX}\sin\varepsilon + J_{ZZ}J_{XY}\cos\varepsilon),$$
$$\mathcal{J}_{13}^{-1}(\varepsilon) = \mathcal{J}_{31}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{\det\mathbf{J}}(J_{ZZ}J_{XY}\sin\varepsilon - J_{YY}J_{ZX}\cos\varepsilon),$$
$$\mathcal{J}_{23}^{-1}(\varepsilon) = \mathcal{J}_{32}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{\det\mathbf{J}}\Big[\frac{1}{2}(J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2 -$$
$$- J_{XX}J_{ZZ} + J_{ZX}^2)\sin 2\varepsilon + J_{XY}J_{ZX}\cos 2\varepsilon\Big].$$

П. В. Харламов ([138], п. 2.6) ввел специальные оси связанной с телом системы координат из условия $\mathcal{J}_{23}^{-1}(\varepsilon) = 0$, т. е. определил угол поворота ε_X от опорных осей $OXYZ$ к специальным OXX_1X_2 (отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть от точки G к точке O), формулой

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon_X = \frac{2J_{XY}J_{ZX}}{J_{XX}J_{ZZ} - J_{ZX}^2 - J_{XX}J_{YY} + J_{XY}^2}. \tag{2.2}$$

Значения (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon_X$ обозначим, следуя П. В. Харламову:

$$a = \mathcal{J}_{11}^{-1} = \frac{J_{YY}J_{ZZ}}{\det\mathbf{J}}, \quad a_1 = \mathcal{J}_{22}^{-1}(\varepsilon_X), \quad a_2 = \mathcal{J}_{33}^{-1}(\varepsilon_X),$$
$$b_1 = \mathcal{J}_{12}^{-1}(\varepsilon_X), \quad b_2 = \mathcal{J}_{13}^{-1}(\varepsilon_X). \tag{2.3}$$

Заметим, что параметры a, a_1 и a_2 заведомо положительны.

Согласно (1.7) кинетическая энергия твердого тела выражается через проекции k_X, k_{X_1}, k_{X_2} кинетического момента относительно закрепленной точки на специальные оси OXX_1X_2 следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_O, \tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{k}_O) =$$
$$= \frac{1}{2}(ak_X^2 + a_1k_{X_1}^2 + a_2k_{X_2}^2) + (b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2})k_X, \qquad (2.4)$$

а проекции угловой скорости ω тела на специальные оси суть

$$\omega_X = ak_X + b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2}, \qquad (2.5)$$
$$\omega_{X_1} = b_1k_X + a_1k_{X_1}, \quad \omega_{X_2} = b_2k_X + a_2k_{X_2}.$$

2.3. Уравнения движения тяжелого твердого тела в специальных осях. Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой описывается системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{k}_O}{dt} = [\mathbf{k}_O \times \omega] + [l\mathbf{e}_X \times Mg\mathbf{v}^0], \qquad \frac{d\mathbf{v}^0}{dt} = \mathbf{v}^0 \times \omega, \qquad (3.1)$$

допускающей первые интегралы

$$(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^0) = 1, \ (k_O, \mathbf{v}^0) = k_{Oz^*}, \ T - (Mg\mathbf{v}^0, l\mathbf{e}_X) = h, \qquad (3.2)$$

где $\mathbf{k}_O$ — кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки O, $\mathbf{e}_X$ — единичный вектор, направленный в центр тяжести тела G, $\mathbf{v}^0$ — единичный вектор силы тяжести, $l = OG$. Обозначим, как и в п. 2.2, проекции вектора $\mathbf{k}_O$ на специальные оси OXX_1X_2 через k_X, k_{X_1}, k_{X_2}, а направляющие косинусы вектора $\mathbf{v}^0$ в этих же осях через ν, ν_1, ν_2, и запишем уравнения (3.1) и интегралы (3.2) в силу (2.5) в виде ([138], уравнения (3.2.11), (3.2.12), (2.6.8), (3.3.16), (3.3.18) и (3.3.11))

$$\frac{dk_X}{dt} = (b_2k_X + a_2k_{X_2})k_{X_1} - (b_1k_X + a_1k_{X_1})k_{X_2},$$
$$\frac{dk_{X_1}}{dt} = -Mgl\nu_2 + (ak_X + b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2})k_{X_2} - (b_2k_X + a_2k_{X_2})k_X,$$
$$\frac{dk_{X_2}}{dt} = Mgl\nu_1 - (ak_X + b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2})k_{X_1} + (b_1k_X + a_1k_{X_1})k_X,$$
$$\frac{d\nu}{dt} = (b_2k_X + a_2k_{X_2})\nu_1 - (b_1k_X + a_1k_{X_1})\nu_2,$$
$$\frac{d\nu_1}{dt} = (ak_X + b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2})\nu_2 - (b_2k_X + a_2k_{X_2})\nu,$$
$$\frac{d\nu_2}{dt} = -(ak_X + b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2})\nu_1 + (b_1k_X + a_1k_{X_1})\nu; \qquad (3.3)$$
$$\nu^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1, \quad k_X\nu + k_{X_1}\nu_1 + k_{X_2}\nu_2 = k_{Oz^*},$$
$$\frac{1}{2}(ak_X^2 + a_1k_{X_1}^2 + a_2k_{X_2}^2) + (b_1k_{X_1} + b_2k_{X_2})k_X - Mgl\nu = h. \qquad (3.4)$$

Система (3.3) допускает решение $k_X = k_{X_1} = k_{X_2} = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu = 1$, отвечающее нижнему положению равновесия. Положим во все время колебаний

$$\nu = 1 + \mathrm{N}, \tag{3.5}$$

и введя безразмерные переменные и параметры по формулам

$$\begin{gathered} \tau = \sqrt{Mgla_1}\, t, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{a_1}{Mgl}}\, k_X, \\ \varkappa_1 = \sqrt{\frac{a_1}{Mgl}}\, k_{X_1}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{\frac{a_1}{Mgl}}\, k_{X_2}, \\ d' = \frac{a}{a_1}, \quad d_2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad e_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad e_2 = \frac{b_2}{a_1}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

запишем систему (3.3) и интегралы (3.4) в виде

$$\begin{gathered} \frac{d\varkappa}{d\tau} = (e_2\varkappa + d_2\varkappa_2)\varkappa_1 - (e_1\varkappa + \varkappa_1)\varkappa_2, \\ \frac{d\varkappa_1}{d\tau} = -\nu_2 + (d'\varkappa + e_1\varkappa_1 + e_2\varkappa_2)\varkappa_2 - (e_2\varkappa + d_2\varkappa_2)\varkappa, \\ \frac{d\varkappa_2}{d\tau} = \nu_1 - (d'\varkappa + e_1\varkappa_1 + e_2\varkappa_2)\varkappa_1 + (e_1\varkappa + \varkappa_1)\varkappa, \\ \frac{d\mathrm{N}}{d\tau} = (e_2\varkappa + d_2\varkappa_2)\nu_1 - (e_1\varkappa + \varkappa_1)\nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} = -e_2\varkappa - d_2\varkappa_2 + (d'\varkappa + e_1\varkappa_1 + e_2\varkappa_2)\nu_2 - (e_2\varkappa + d_2\varkappa_2)\mathrm{N}, \\ \frac{d\nu_2}{d\tau} = e_1\varkappa + \varkappa_1 - (d'\varkappa + e_1\varkappa_1 + e_2\varkappa_2)\nu_1 + (e_1\varkappa + \varkappa_1)\mathrm{N}; \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} 2\mathrm{N} + \mathrm{N}^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 = 0, \\ \varkappa(1 + \mathrm{N}) + \varkappa_1\nu_1 + \varkappa_2\nu_2 = \sqrt{\frac{a_1}{Mgl}}\, k_{Oz^*} \equiv k, \\ d'\varkappa^2 + \varkappa_1^2 + d_2\varkappa_2^2 + 2(e_1\varkappa_1 + e_2\varkappa_2)\varkappa - 2\mathrm{N} = 2h' + 2 \quad \left(h' = \frac{h}{Mgl}\right). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Система уравнений (3.7), описывающая общий случай колебаний тяжелого твердого тела около нижнего положения равновесия, содержит четыре безразмерных параметра d', d_2, e_1, e_2, определяемых формулами (3.6), (2.3), (2.2) и (2.1) (см. также п. 1.1). Собственные значения матрицы линейной части системы (3.7) суть

$$0,\ 0,\ -i,\ +i,\ -\sqrt{d_2}\,i,\ +\sqrt{d_2}\,i, \tag{3.9}$$

где нулевому собственному значению отвечают простые элементарные делители. Выпишем матрицу S, составленную из соответственно расположенных собственных векторов матрицы линейной части системы (3.7), приводящую последнюю к жордановой (в нашем случае диагональной) форме, и обратную ей матрицу S^{-1}:

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -e_1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{e_2}{d_2} & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{d_2} & i\sqrt{d_2}\\ 0 & 0 & i & -i & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$S^{-1}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{2}e_1 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}i\\ \dfrac{1}{2}e_1 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}i\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{e_2}{d_2} & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{i}{2\sqrt{d_2}} & 0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{e_2}{d_2} & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{i}{2\sqrt{d_2}} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.10}$$

Переход к жордановым переменным, осуществляемый с помощью матрицы S, приведет систему (3.7) к диагональному виду (имеется в виду, что последний термин относится лишь к линейной части преобразованной системы). Приведение к диагональному виду предшествует преобразованию к нормальной форме. Здесь сам диагональный вид нам не понадобится, а матрицы S и S^{-1} окажутся полезными для приведения системы к ляпуновскому виду, к чему мы и переходим.

2.4. Приведение к ляпуновскому виду. Нетрудно выписать матрицу T линейного преобразования, приводящую систему диагонального вида к ляпуновской кососимметричной форме

$$T=I_2\dotplus T_2\dotplus T_2,\quad I_2=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad T_2=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{Vmatrix}.$$

Матрица L результирующего преобразования исходной системы (3.7) в систему ляпуновского вида

$$L=ST,$$

где S определяется из (3.10). Выпишем ее и обратную ей матрицу:

$$L=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -e_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{e_2}{d_2} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{d_2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$
\mathbf{L}^{-1} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{e_2}{d_2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{d_2}} & 0 \end{matrix} \right\| . \tag{4.1}
$$

Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор с компонентами $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, N, ν_1, ν_2, а через $\mathbf{v}$ — вектор с компонентами $v_1, \ldots, v_6$. Запишем систему (3.7) в виде

$$
\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}),
$$

где $\mathbf{A}$ — матрица ее линейной части, а $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ — вектор-функция, составленная из нелинейных членов системы (3.7). Замена

$$
\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{v} \tag{4.2}
$$

приведет систему (3.7) к ляпуновскому виду

$$
\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}\mathbf{v} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{L}\mathbf{v}). \tag{4.3}
$$

Выпишем преобразование (4.2) и систему (4.3):

$$
\begin{gathered}
\varkappa = v_2, \quad \varkappa_1 = -e_1 v_2 + v_3, \quad \varkappa_2 = -\frac{e_2}{d_2} v_2 + v_5, \\
\mathrm{N} = v_1, \quad \nu_1 = -\sqrt{d_2}\, v_6, \quad \nu_2 = v_4, \\
v_1 = \mathrm{N}, \quad v_2 = \varkappa, \quad v_3 = e_1\varkappa + \varkappa_1, \quad v_4 = \nu_2, \\
v_5 = \frac{e_2}{d_2}\varkappa + \varkappa_2, \quad v_6 = -\frac{1}{\sqrt{d_2}}\nu_1;
\end{gathered} \tag{4.2a}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{dv_1}{d\tau} = -v_3 v_4 - d_2\sqrt{d_2}\, v_5 v_6, \\
\frac{dv_2}{d\tau} = \frac{e_2}{d_2} v_2 v_3 - e_1 d_2 v_2 v_5 + (d_2 - 1) v_3 v_5, \\
\frac{dv_3}{d\tau} = -v_4 + \frac{e_2}{d_2}\left(-d' + e_1^2 + \frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2^2 + e_2 v_5^2 + \\
+ \left(d' - d_2 - e_1^2 - d_2 e_1^2 - 2\frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2 v_5 + e_1 d_2 v_3 v_5,
\end{gathered} \tag{4.3a}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{dv_4}{d\tau} = v_3 + v_1 v_3 + \sqrt{d_2}\left(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2 v_6 + \\
+ \sqrt{d_2}\, e_1 v_3 v_6 + \sqrt{d_2}\, e_2 v_5 v_6,
\end{gathered}
$$

$$\frac{dv_5}{d\tau} = -\sqrt{d_2}\, v_6 + e_1\left(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2^2 - e_1 v_3^2 + \\ + \left(1 - d' + 2e_1^2 + \frac{e_2^2}{d_2} + \frac{e_2^2}{d_2^2}\right) v_2 v_3 + v_2 v_5 - \frac{e_2}{d_2} v_3 v_5,$$

$$\frac{dv_6}{d\tau} = \sqrt{d_2}\, v_5 + \sqrt{d_2}\, v_1 v_5 + \\ + \frac{1}{\sqrt{d_2}}\left(-d' + e_1^2 + \frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2 v_4 - \frac{e_1}{\sqrt{d_2}} v_3 v_4 - \frac{e_2}{\sqrt{d_2}} v_4 v_5.$$

Первые два интеграла (тривиальный и кинетического момента относительно вертикали) (3.8) в новых переменных запишутся в виде

$$2v_1 + v_1^2 + v_4^2 + d_2 v_6^2 = 0, \tag{4.4}$$

$$v_2 + v_1 v_2 - \frac{e_2}{d_2} v_2 v_4 + e_1 \sqrt{d_2}\, v_2 v_6 - \sqrt{d_2}\, v_3 v_6 + v_4 v_5 = k. \tag{4.5}$$

Линейная комбинация интеграла энергии и тривиального интеграла приведет к знакоопределенному интегралу

$$v_1^2 + \left(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + d_2 (v_5^2 + v_6^2) = 2h' + 2. \tag{4.6}$$

2.5. Резонансы. Из (3.9) очевидным образом получается отношение частот линейной части системы (3.7) или системы (4.3а). Приравнивая это отношение m/n, где m и n — взаимно простые натуральные числа, получим

$$d_2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{m^2}{n^2}. \tag{5.1}$$

Из формулы (2.2) имеем

$$\sin^2 \varepsilon_X = \frac{1}{2\mathcal{R}} [\mathcal{R} + (J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2) - (J_{XX}J_{ZZ} - J_{ZX}^2)],$$

$$\cos^2 \varepsilon_X = \frac{1}{2\mathcal{R}} [\mathcal{R} - (J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2) + (J_{XX}J_{ZZ} - J_{ZX}^2)],$$

$$\sin 2\varepsilon_X = \frac{2J_{XX}J_{YY}}{\mathcal{R}},$$

где

$$\mathcal{R} = +\sqrt{[J_{XX}(J_{ZZ} - J_{YY}) + J_{XY}^2 - J_{ZX}^2]^2 + 4J_{XY}^2 J_{ZX}^2}.$$

Отсюда в силу формул (2.3) и (2.1), будет иметь

$$d_2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{J_{XX}(J_{YY} + J_{ZZ}) - \left(J_{XY}^2 + J_{ZX}^2\right) - \mathcal{R}}{J_{XX}(J_{YY} + J_{ZZ}) - \left(J_{XY}^2 + J_{ZX}^2\right) + \mathcal{R}}.$$

Резонансное уравнение (5.1) после очевидных преобразований примет вид

$$(n^4 + m^4) J_{XX} (J_{XX}J_{YY}J_{ZZ} - J_{YY}J_{ZX}^2 - J_{ZZ}J_{XY}^2) =$$
$$= n^2m^2 [(J_{XX}J_{YY} - J_{XY})^2 + (J_{XX}J_{ZZ} - J_{ZX}^2)^2 + 2J_{XY}^2J_{ZX}^2]. \quad (5.2)$$

Допустим, что опорные оси являются главными осями эллипсоида инерции для точки O, т. е. $J_{XY} = J_{ZX} = 0$. Тогда эти оси являются и специальными осями, ибо по формуле (2.2) $\varepsilon_X = 0$. Уравнение (5.2) запишется тогда в виде

$$(n^4 + m^4) J_{YY}J_{ZZ} = n^2m^2 (J_{YY}^2 + J_{ZZ}^2). \quad (5.3)$$

Очевидно, его решение есть

$$\frac{J_{ZZ}}{J_{YY}} = \frac{m^2}{n^2}. \quad (5.4)$$

Например, в случае Лагранжа — Пуассона $J_{XX} = C$ (ибо ось OX направлена на центр тяжести тела), $J_{YY} = J_{ZZ} = A$, что соответствует (5.4) при $m = n = 1$.

Однако в случае Ковалевской [61] $J_{XX} = A$ и

$$\frac{J_{ZZ}}{J_{YY}} = \frac{1}{2},$$

т. е. (5.4) не выполняется.

2.6. Применение метода последовательных приближений. Разрешим интегралы (4.4) и (4.5) относительно переменных v_1 и v_2

$$v_1 = -1 + \sqrt{1 - v_4^2 - d_2v_6^2} = -\frac{1}{2}v_4^2 - \frac{1}{2}d_2v_6^2 + [4], \quad (6.1)$$

$$v_2 = \frac{k + \sqrt{d_2}\,v_3v_6 - v_4v_5}{1 + v_1 - \frac{e_2}{d_2}v_4 + e_1\sqrt{d_2}\,v_6} =$$
$$= k + \frac{e_2}{d_2}kv_4 - e_1\sqrt{d_2}\,kv_6 + [3]. \quad (6.2)$$

Разложения (6.1) и (6.2) с учетом (4.2а) сходятся при условиях

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 < 1, \quad -1 < \mathrm{N}. \quad (6.3)$$

Эти условия, очевидно, выполняются, если центр тяжести тела при колебаниях не достигает горизонтальной плоскости, проведенной через неподвижную точку O.

Последние четыре уравнения (4.3а) представим в векторном виде как

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{f}(\mathbf{w}, v_1(\mathbf{w}), v_2(\mathbf{w})),$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{d_2} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_2} & 0 \end{Vmatrix}, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{f}$ — вектор-функция, составленная из нелинейных членов. Возьмем за нулевое приближение для системы (6.4) вектор, составленный из начальных условий: $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(0)$, а за первое приближение — решение системы

$$\frac{d\mathbf{w}_1}{d\tau} = \mathbf{B}\mathbf{w}_1 + \mathbf{f}(\mathbf{w}_0, v_1(\mathbf{w}_0), v_2(\mathbf{w}_0)).$$

Это решение при прежних начальных условиях $\mathbf{w}_1(0) = \mathbf{w}_0$ имеет вид

$$\mathbf{w}_1(\tau) = e^{\tau\mathbf{B}}\mathbf{w}_0 + \mathbf{B}^{-1}(e^{\tau\mathbf{B}} - \mathbf{I}_4)\,\mathbf{f}(\mathbf{w}_0, v_1(\mathbf{w}_0), v_2(\mathbf{w}_0)).$$

Для компонент вектора $\mathbf{w}_1(\tau)$ получим выражения

$$\begin{aligned}
v_3^1(\tau) = {} & v_3(0)\cos\tau - v_4(0)\sin\tau + \\
& + \Big[\frac{e_2}{d_2}\Big(-d' + e_1^2 + \frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2^2(0) + e_2v_5^2(0) + \Big(d' - d_2 - \\
& - e_1^2 - d_2e_1^2 - 2\frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2(0)v_5(0) + e_1d_2v_3(0)v_5(0)\Big]\sin\tau - \\
& - 2\Big[v_1(0)v_3(0) + \sqrt{d_2}\Big(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2(0)v_6(0) + \\
& + \sqrt{d_2}\,e_1v_3(0)v_6(0) + \sqrt{d_2}\,e_2v_5(0)v_6(0)\Big]\sin^2\frac{\tau}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_4^1(\tau) = {} & v_3(0)\sin\tau + v_4(0)\cos\tau + \\
& + 2\Big[\frac{e_2}{d_2}\Big(-d' + e_1^2 + \frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2^2(0) + e_2v_5^2(0) + \\
& + \Big(d' - d_2 - e_1^2 - d_2e_1^2 - 2\frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2(0)v_5(0) + \\
& + e_1d_2v_3(0)v_5(0)\Big]\sin^2\frac{\tau}{2} + \Big[v_1(0)v_3(0) + \\
& + \sqrt{d_2}\Big(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2(0)v_6(0) + \sqrt{d_2}\,e_1v_3(0)v_6(0) + \\
& + \sqrt{d_2}\,e_2v_5(0)v_6(0)\Big]\sin\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_5^1(\tau) = {} & v_5(0)\cos\sqrt{d_2}\,\tau - \sqrt{d_2}\,v_6(0)\sin\sqrt{d_2}\,\tau + \\
& + \frac{1}{\sqrt{d_2}}\Big[e_1\Big(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\Big)v_2^2(0) - e_1v_3^2(0) + \\
& + \Big(1 - d' + 2e_1^2 + \frac{e_2^2}{d_2} + \frac{e_2^2}{d_2^2}\Big)v_2(0)v_3(0) + \\
& + v_2(0)v_5(0) - \frac{e_2}{d_2}v_3(0)v_5(0)\Big]\sin\sqrt{d_2}\,\tau -
\end{aligned}$$

$$-2\left[v_1(0)v_5(0)+\frac{1}{d_2}\left(-d'+e_1^2+\frac{e_2^2}{d_2}\right)v_2(0)v_4(0)-\right.$$
$$\left.-\frac{e_1}{d_2}v_3(0)v_4(0)-\frac{e_2}{d_2}v_4(0)v_5(0)\right]\sin^2\frac{\sqrt{d_2}\,\tau}{2},$$

$$v_6^1(\tau)=\sqrt{d_2}\,v_5(0)\sin\sqrt{d_2}\,\tau+v_6(0)\cos\sqrt{d_2}\,\tau+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{d_2}}\left[e_1\left(d'-e_1^2-\frac{e_2^2}{d_2}\right)v_2^2(0)-e_1v_3^2(0)+\right.$$
$$+\left(1-d'+2e_1^2+\frac{e_2^2}{d_2}+\frac{e_2^2}{d_2^2}\right)v_2(0)v_3(0)+$$
$$\left.+v_2(0)v_5(0)-\frac{e_2}{d_2}v_3(0)v_5^*(0)\right]\sin^2\frac{\sqrt{d_2}\,\tau}{2}+$$
$$+\left[v_1(0)v_5(0)+\frac{1}{d_2}\left(-d'+e_1^2+\frac{e_2^2}{d_2}\right)v_2(0)v_4(0)-\right.$$
$$\left.-\frac{e_1}{d_2}v_3(0)v_4(0)-\frac{e_2}{d_2}v_4(0)v_5(0)\right]\sin\sqrt{d_2}\,\tau.$$

Затем по формулам (6.1) и (6.2) вычисляются $v_1^1(\tau)$ и $v_2^1(\tau)$. Второе приближение $\mathrm{w}_2(\tau)$ определится из уравнения

$$\frac{d\mathrm{w}_2}{d\tau}=\mathrm{B}\mathrm{w}_2+\mathfrak{f}(\mathrm{w}_1(\tau),\ v_1^1(\tau),\ v_2^1(\tau)),$$

решение которого даст ($\mathrm{w}_2(0)=\mathrm{w}_0$)

$$\mathrm{w}_2(\tau)=e^{\tau\mathrm{B}}\mathrm{w}_0+e^{\tau\mathrm{B}}\int_0^\tau e^{-s\mathrm{B}}\,\mathfrak{f}(\mathrm{w}_1(s),\ v_1^1(s),\ v_2^1(s))\,ds. \qquad (6.5)$$

Мы можем несколько огрубить результат, положив в (6.5) $v_1^1(s)=0$ и $v_2^1(s)=k$. Это означает, что в (6.5) пренебрегается в выражении $\mathfrak{f}$ членами третьего порядка малости.

Запишем интеграл (4.6) в исходных переменных, воспользовавшись формулами (4.2а)

$$\left(d'-e_1^2-\frac{e_2^2}{d_2}\right)\varkappa^2+(e_1\varkappa+\varkappa_1)^2+$$
$$+d_2\left(\frac{e_2}{d_2}\varkappa+\varkappa_2\right)^2+\mathrm{N}^2+\nu_1^2+\nu_2^2=2h'+2. \qquad (6.6)$$

Допустим, что центр тяжести тела достиг горизонтальной плоскости, проходящей через неподвижную точку O ($\mathrm{N}=-1$, $\nu_1^2+\nu_2^2=1$) с нулевой угловой скоростью ($\varkappa=\varkappa_1=\varkappa_2=0$).

Подставляя в (6.6), найдем что $h' = 0$. Эта ситуация, как отмечалось, является предельной для сходимости предложенного варианта последовательных приближений. Поэтому интеграл (4.6) с учетом ($h' = 0$) определяет поверхность шестимерного эллипсоида, внутри которого лежат допустимые начальные значения переменных $v_1, \ldots, v_6$, т. е. должно быть выполнено неравенство

$$v_1^2(0) + \left(d' - e_1^2 - \frac{e_2^2}{d_2}\right) v_2^2(0) + v_3^2(0) + \\ + v_4^2(0) + d_2 v_5^2(0) + d_2 v_6^2(0) < 2.$$

КРАТКИЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

К главе I

§ 1. Практический способ определения периодических решений систем Ляпунова предложен И. Г. Малкиным [79а]. В. М. Соколовым [320] определялись периодические решения некоторых видов систем Ляпунова, для которых известный способ вычисления решений оказался затруднительным.

п. 1.1. Излагаются результаты статей [322д — ж, к, у].

п. 1.2. Это преобразование указано в [322к, о, у, ф].

§ 2. Изложение следует § IV.6 [146].

Метод Пуанкаре как для неавтономных, так и для автономных систем изложен в монографиях А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина [4], И. И. Блехмана [15а], Б. В. Булгакова [25], В. Д. Мак-Миллана [78], И. Г. Малкина [79а, б]. Практическому исследованию периодических решений по методу малого параметра Пуанкаре посвящены статьи А. П. Проскурякова [311а — о] и Г. В. Плотниковой [305а, б, в]. В них рассматриваются квазилинейные автономные и неавтономные системы с одной или несколькими степенями свободы, а также некоторые нелинейные системы и ряд особых случаев.

Остановимся на одном нетрадиционном применении метода Пуанкаре в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, как в исследовании общих свойств уравнений движения, так и в их непосредственном интегрировании. В 1953 г. Л. Н. Сретенский [321] предложил применять метод малого параметра при изучении движения твердого тела, приведенного в быстрое вращение вокруг неподвижной точки. В работах Ю. А. Архангельского [219а, в] рассмотрено построение периодических решений квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами, что приводит к вырожденным случаям. Основываясь на этих результатах, в статьях [219б, г, д] найдены новые частные решения быстро вращающегося вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела.

К главе II

Составным математическим, физическим и упругим маятникам посвящена многочисленная литература. Укажем статьи Е. Меттлера [367а], Р. Н. Страбла [390а], Дж. Хайнбокела и Р. Н. Страбла [359, 393а, b], Б. И. Чешанкова [335а — д], содержащие обширную библиографию.

§ 1. Излагаются результаты статьи [322г].

п. 1.6. М. З. Литвин-Седой [278а, б] установил, что если плоский математический маятник переменной длины увлекается ускоренным движением точки его опоры, то даже при отсутствии внешних сил возникает восстанавливающая сила, создаваемая силой инерции от поворотного ускорения маятника.

§ 2. Излагаются результаты статьи [322в].

К главе III

Оригинальные статьи Б. Ван-дер Поля [373a, b] переведены на русский язык [30]. Метод осреднения изложен в монографиях Н. Н. Боголюбова [17], т. I, Ю. А. Митропольского [85г], В. М. Волосова и Б. И. Моргунова [33], Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова [39], ч. I.

Вопросы точности в теории нелинейных колебаний рассматривались в работах Ю. А. Рябова [316б—д] и С. А. Горбатенко [244а — г].

Здесь излагаются статьи: § 1 [322з], § 2 [322л], § 3 [322о], § 4 [323].

§ 1. Первые результаты, относящиеся к перекачке энергии при колебаниях упругого маятника, принадлежат А. А. Витту и Г. С. Горелику [240]. Перекачка энергии при изгибно-крутильных колебаниях описана в работе В. О. Кононенко [265а]. Перекачка энергии исследовалась в статьях Р. Н. Страбла [390b], Р. Н. Страбла и Дж. Хейнбокела [393a, b], Р. Н. Страбла и Г. К. Вармбруда [394], Б. И. Чешанкова [335а, б], Ф. Х. Цельмана [333а], К. А. Меркера, П. Л. Риса и Ф. Дж. Фахи [366].

К главе IV

§ 1 Системы Ляпунова изучались И. Г. Малкиным [79а, б]. В гл. VIII [79б] рассматриваются системы, близкие к системам Ляпунова, однако в другом смысле, чем у нас, именно неавтономные системы.

пп. 1.1, 1.2, 1.5. Излагаются результаты статьи [322н].

п. 1.2. Доказательство теоремы Пуанкаре о разложении интегралов аналитических систем дифференциальных уравнений по степеням малого параметра читатель найдет также в монографии В. В. Голубева [38а] (гл. III, § 2).

п. 1.3. Как показано во введении к п. 1.3, наше рассмотрение выходит за рамки уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\varphi(x, \dot{x})$. Последнему уравнению, как в скалярном, так и в векторном случае посвящена многочисленная литература, из отечественных трудов назовем монографии А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [4], Б. В. Булгакова [25], И. Г. Малкина [79а, б], Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [18а], Н. Н. Моисеева [90], Я. Н. Ройтенберга [117]. Вместе с тем подчеркнем, что п. 1.3 является некоторым дополнением к изучению общего случая колебаний системы с одной степенью свободы, описываемых уравнением $\ddot{x} + f(x) = \varepsilon\varphi(\cdot)$, проведенному Б. В. Булгаковым [25], Н. Н. Моисеевым [90] и Я. Н. Ройтенбергом [117].

пп. 1.3, 1.4. Излагаются результаты статьи [322щ].

§ 2. Системы, близкие к системам Ляпунова, исследовались И. Г. Малкиным [79б], рассмотревшим периодические решения, обращающиеся при $\mu = 0$ в ляпуновские решения и периодические решения в случае резонанса. С. Н. Шиманов исследовал вопросы существования, практического вычисления и анализа устойчивости периодических решений, используя разработанный им метод вспомогательных систем [336а, в, г].

Частный случай систем типа Ляпунова был изучен В. М. Соколовым [320]; с иной точки зрения подобные системы рассматривались Ю. А. Рябовым [316а].

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Предостережем читателя в терминологии. Здесь рассматриваются нормальные формы систем дифференциальных уравнений и их приложения к задачам колебаний.

Наряду с этим в теории колебаний рассматриваются нормальные колебания, которым отвечают прямолинейные траектории в конфигурационном пространстве. Приведем краткие литературные указания для последних. Определение нормальных колебаний приведено в [313а, б]. Для широкого класса квазилинейных систем существование решений, близких к нормальным колебаниям, доказано Ляпуновым [77а]. В статье Л. И. Маневича [281] показана возможность трактовки нормальных колебаний в терминах теории инвариантно-групповых решений, развитой Л. В. Овсянниковым [98]. В статьях Л. И. Маневича и М. А. Пинского [282а, б] обнаружены некоторые новые классы систем, допускающие прямолинейные и криволинейные нормальные формы колебаний, в силу того, что соответствующие системы инвариантны относительно дополнительных дискретных групп преобразований. В статьях Л. И. Маневича и Б. П. Черевацкого [284а, б] изучались вырожденные системы, которые приводятся к сингулярно возмущенным уравнениям. Предложен эффективный метод построения периодических решений таких систем. Конструктивный метод определения нормальных колебаний многомерных консервативных систем описан в статье [283] и статье Ю. В. Михлина [296а]. В основе метода лежит построение криволинейных траекторий искомых решений в конфигурационном пространстве, близких к прямолинейным формам колебаний. Траектории построены в форме степенных рядов, установлена связь с результатами Ляпунова [77а]. В статье Р. М. Розенберга [313а] дано доказательство некоторых теорем существования нормальных колебаний. В статье [296б] исследуются резонансные режимы и дается доказательство их близости к нормальным колебаниям в нескольких частных случаях.

К главе V

Первоначальные сведения по автономным системам имеются в книге А. Д. Мышкиса [92]. Затем рекомендуем монографию Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [41], которую читатель нематематик может перелагать на язык конечномерных пространств. Качественная теория развита в монографии В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [96], однако сведения по нормальным формам попали лишь в ее первое издание (1947 г.).

§ 1. Обобщающие результаты по теории нормальных форм получены А. Д. Брюно [234к]; там же читатель найдет библиографию.

п. 1.2. В основной теореме А. Д. Брюно [234к] не предполагается, что жорданова форма — диагональная, т. е. рассматривается случай произвольных элементарных делителей линейной части системы. Изложение п. 1.2 основывается на постановке задачи п. 1.1.

п. 1.3. Обобщения теоремы Пуанкаре (в случае нарушения условий 2) или 1)) даны К. Л. Зигелем [49] и В. А. Плиссом [304].

§ 2. Геометрическую интерпретацию (в пространстве показателей степеней) «укороченных систем» и примеры использования последних читатель найдет в работах А. Д. Брюно [234н].

п.2.4. Существование аналитического преобразования в вещественном случае рассмотрено Л. М. Мархашовым [288] и А. Д. Брюно [234ц]. Обобщение теоремы Пуанкаре в смысле существования конечно-гладкого преобразования к линейной системе дано В. С. Самоволом [318] и А. Д. Брюно [234ц].

§ 3. Автор согласен с замечанием А. Д. Брюно [234м], что метод нормальных форм, естественно, распадается на две части. Первая (алгебраическая) заключается в указании алгоритма для построения требуемых формальных разложений [234к]. В этой книге алгоритм доведен до расчетных рекуррентных формул для общего случая.

Вторая (аналитическая) часть заключается в интерпретации результатов посредством функций аналитических: Пуанкаре [188], Г. Дюляк [348], К. Л. Зигель [49], В. А. Плисс [304], окончательный результат А. Д. Брюно [234к], или гладких: Д. Биркгоф [12] и др., а также в оценке точности приближенного интегрирования этим методом: Д. Биркгоф [12], К. Л. Зигель [49], Ю. Мозер [297].

Нормальные формы не исчерпывают локального метода. Для дальнейшего изучения локального метода (полунормальные формы, связанные с ними интегральные многообразия и др.) отсылаем читателя к работам А. Д. Брюно [234к, р — х], в которых содержится и библиография.

Распространение нормальных форм на неавтономные системы намечено в статье В. В. Костина [268].

К главе VI

Излагаются результаты статьи [322и].

§ 1. Первым (после Пуанкаре [188]) представление общего решения уравнения (V,1,1.1) через решения уравнения (V,1,3.2) получил Ляпунов [77а].

О связи рассматриваемых здесь задач с первым методом Ляпунова, а также по более широкому кругу вопросов отсылаем читателя к ч. II обзорной статьи Н. П. Еругина [47б].

п. 1.2. Общее решение, в котором произвольные постоянные суть начальные значения переменных (и их производных), будем называть решением задачи Коши в общем виде.

К главе VII

§ 1. Излагается статья [322р].

п. 1.4. Постановка задачи принадлежит Я. Н. Ройтенбергу. Влияние люфта и трения на свободные и вынужденные колебания рассмотрено в [322а].

§ 2. Излагается статья [322х].

К главе VIII

п. 1.4. Подход к исследованию критических случаев устойчивости с более общих позиций (например, без требования аналитичности правых частей) намечен в монографии Н. Н. Красовского [70].

п. 1.4. Преобразования п. 1.4 — частный случай степенных преобразований, развитых А. Д. Брюно [234в].

п. 1.5. Автор заведомо огрубляет содержание теоремы Ю. Н. Бибикова — В. А. Плисса [227].

пп. 2.1, 2.4—2.7 — излагается содержание статьи [322м].

§ 4. Излагается содержание [125б, ч. II, § 6].

По исследованию критического случая трех пар чисто мнимых собственных значений матрицы линейной части отсылаем читателя к статье В. Г. Веретенникова [239б].

К главе IX

Исследования последних лет по динамике твердого тела и системы тел П. В. Харламова, Е. И. Харламовой и их школы представлены в [83]. Обширная библиография последних работ (70 названий) приведена в статье П. В. Харламова [330].

Описание интегральных многообразий и бифуркационных множеств в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой проведено в статье С. Б. Каток [256], основывающейся на изучении топологии механических систем с симметрией по С. Смейлу [319].

п. IX, 1.4. По вопросам устойчивости перманентных вращений отсылаем читателя к исследованиям В. В. Румянцева (библиографию см. в [120]).

п. IX, 1.7. Другой вариант метода последовательных приближений для этой задачи дан в [322ч].

ЛИТЕРАТУРА

А. МОНОГРАФИИ, УЧЕБНИКИ, ОБЗОРЫ

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
2. Абгарян К. А., Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем, «Наука», 1973.
3. Андронов А. А., Собрание трудов, изд. АН СССР, 1956.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Изд. второе, Физматгиз, 1959.
5. Арнольд В. И., а) Лекции по классической механике, изд. МГУ, 1968; б) Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1971, в) Математические методы классической механики, «Наука», 1974.
6. Бабаков И. М., Теория колебаний, изд. второе, «Наука», 1965.
7. Байнов Д. Д., Константинов М. М., Методът на усредняването и неговото приложение в техниката, «Наука и изкуство», София, 1973.
8. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.
9. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс, «Наука», 1965.
10. Беля К. К., Нелинейные колебания в системах автоматического регулирования и управления, Машгиз, 1962.
11. Биргер И. А., Некоторые математические методы решения инженерных задач, Оборонгиз, 1956.
12. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
13. Бишоп Р., Колебания, «Наука», 1968.
14. Блакьер О., Анализ нелинейных систем, «Мир», 1969.
15. Блехман И. И., а) Синхронизация динамических систем, «Наука», 1971;
    б) Метод малого параметра, «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Наука», 1968, 157—165.
16. Блехман И. И., Пановко Я. Г.,
    а) Прикладные проблемы теории колебаний, «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Наука», 1968, 89—113;
    б) Методы решения линейных задач теории колебаний, «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Наука», 1968, 167—169.
17. Боголюбов Н. Н., Избранные труды в трех томах, том первый, «Наукова думка», Киев, 1969.
18. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., а) Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 4-е, «Наука», 1974.
    б) Аналитические методы теории нелинейных колебаний, Труды Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механ., 1960, изд. АН СССР, 1962, 85—95;

в) Метод интегральных многообразий в нелинейной механике, Труды Межд. симпозиума по нелинейн. колебаниям, 1961, изд. АН УССР, Киев, 1963, 93—154.

19. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, «Наукова думка», Киев, 1969.
20. Болотин В. В., а) Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956;

    б) Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, 1961.
21. Бондаренко Г. В., Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний, Изд. АН СССР, 1936.
22. Бондарь Н. Г., Казакевич М. И., Обзор прикладных задач нелинейной механики, разрешаемых с помощью метода переменного масштаба, Zagadnienia drgań nielinowych, 1971 12, 53—70.
23. Бояджиев Г. Н., Нелинейни трептения, «Техника», София, 1970.
24. Брюно А. Д., Элементы нелинейного анализа (конспект лекций), изд. СаГУ, Самарканд, 1973.
25. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
26. Бутенин Н. В., а) Элементы теории нелинейных колебаний, Судпромгиз, 1962,

    б) Теория колебаний, «Высшая школа», 1963.
27. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., Введение в теорию нелинейных колебаний, «Наука», 1976.
28. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, «Наука», 1966.
29. Вайнберг Д. В., Писаренко Г. С., Механические колебания и их роль в технике, изд. второе, «Наука», 1965.
30. Ван-дер Поль Б., Нелинейная теория электрических колебаний, Связьиздат, 1935.
31. Вихер Е., Земба С., Мушинска А., Радзишевски Б., Шадковски Е., Обзор некоторых направлений и научных работ по теории колебаний и динамике машин, Zagadnienia drgań nielinowych, Nonlinear vibrations problems, Warszawa, 1971 11, 9—40.
32. Волосов В. М., Метод осреднения в теории нелинейных колебаний, «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Наука», 1968, 115—135.
33. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, Изд. МГУ, 1971.
34. Вульфсон Н. И., Коловский М. З., Нелинейные задачи динамики машин, «Машиностроение», 1968.
35. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1953.
36. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
37. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П., Нестационарные колебания механических систем, «Наукова думка», Киев, 1966.
38. Голубев В. В., а) Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950;

    б) Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Гостехиздат, 1953.
39. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Новые качественные методы в небесной механике, «Наука», 1971.
40. Гробов В. А., а) Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин, изд. АН СССР, 1961;

    б) Лекции по теории колебаний, Киев, 1971.
41. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», 1970.

42. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967.
43. Ден-Гартог Дж. П., Механические колебания, Физматгиз, 1960.
44. Диментберг Ф. М., Изгибные колебания вращающихся валов, изд. АН СССР, 1959.
45. Диментберг Ф. М., Шаталов К. Т., Гусаров А. А., Колебания машин, «Машиностроение», 1964.
46. Дубошин Г. Н., а) Основы теории устойчивости движения, изд. МГУ, 1952;
б) Небесная механика, Основные задачи и методы, Физматгиз, 1962;
в) Небесная механика, Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
47. Еругин Н. П., а) Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, «Наука и техника», Минск, 1970;
б) Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории, Дифф. уравнения, 1967, т. III, № 11, 1821—1863.
48. Житомирский В. К., Механические колебания и практика их устранения, «Машиностроение», 1966.
49. Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, ИЛ, 1959.
50. Зубов В. И., а) Математические методы исследования систем автоматического регулирования, Судпромгиз, 1959;
б) Колебания в нелинейных и управляемых системах, Судпромгиз, 1962;
в) Аналитическая динамика гироскопических систем, «Судостроение», 1970;
г) Устойчивость движения, «Высшая школа», 1973.
51. Иориш Б. И., Измерение вибрации, Машгиз, 1956.
52. Ишлинский А. Ю., а) Механика гироскопических систем, изд. АН СССР, 1963;
б) Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация, «Наука», 1976.
53. Калинин С. В., Устойчивость периодических движений в критических случаях, изд. МГУ, 1972.
54. Каменков Г. В., Избранные труды в двух томах, «Наука», 1971.
55. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1950.
56. Каннингхэм В., Введение в теорию нелинейных систем, Госэнергоиздат, 1962.
57. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962.
58. Каудерер Г., Нелинейная механика, ИЛ, 1961.
59. Кин Н. Тонг, Теория механических колебаний, Машгиз, 1963.
60. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., Виброударные системы. (Динамика и устойчивость), «Наука», 1973.
61. Ковалевская С. В., Научные работы, изд. АН СССР, 1948.
62. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
63. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1968.
64. Коловский М. З., Нелинейная теория виброзащитных систем, «Наука», 1966.
65. Кононенко В. О., Колебательные системы с ограниченным возбуждением, «Наука», 1964.
66. Корытысский Я. И., Исследования динамики и конструкций высокопроизводительных веретен текстильных машин, Гизлегпром, 1963.
67. Красносельский М. А., а) Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962;

б) Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, Современные проблемы математики, «Наука», 1966.

68. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти-периодические колебания, «Наука», 1970.

69. Красносельский М. А., Перов А. И., Повлоцкий А. И., Забрейко П. П., Векторные поля на плоскости, Физматгиз, 1963.

70. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

71. Крылов А. Н., Собрание трудов, т. IX, Теория корабля, изд. АН СССР, 1949.

72. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, Киев, 1937.

73. Кузьмин П. А., Малые колебания и устойчивость движения, «Наука», 1973.

74. Кушуль М. Я., Автоколебания роторов, Изд. АН СССР, 1963.

75. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, изд. 2-е, испр. и доп., Физматгиз, 1962.

76. Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961.

77. Ляпунов А. М., а) Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892; Собр. соч., т. II, 1956, стр. 7—263;

б) Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения, изд. ЛГУ, 1963.

78. Мак-Миллан В. Д., Динамика твердого тела, ИЛ, 1951.

79. Малкин И. Г., а) Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949,

б) Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956;

в) Теория устойчивости движения, изд. 2-е, «Наука», 1966.

80. Мандельштам Л. И., Лекции по колебаниям, изд. АН СССР, 1955.

81. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э., Новые исследования нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1936.

82. Мартынюк А. А., а) Техническая устойчивость в динамике, «Техніка», Киев, 1973;

б) Устойчивость движения сложных систем, «Наукова думка», Киев, 1975.

83. Механика твердого тела (республиканский межведомственный сборник), «Наукова думка», Киев, вып. 1, 1969; вып. 2, 1970; вып. 3, 1971; вып. 4, 1972; вып. 5, 1973; вып. 6, 1974; вып. 7, 1974.

84. Минорский Н., Современные направления в нелинейной механике, Сб. «Проблемы механики», ИЛ, 1955, 5—53.

85. Митропольский Ю. А., а) Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, изд. АН УССР, Киев, 1955;

б) Исследование нестационарных колебаний в нелинейных системах, Труды Межд. симпозиума по нелинейн. колебаниям, 1961, т. 3, изд. АН УССР, Киев, 1963, 241—274;

в) Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», 1964;

г) Метод усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», Киев, 1971.

86. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б., а) Лекции по методу интегральных многообразий, изд. Ин-та матем. АН УССР, Киев, 1968;

б) Интегральные многообразия в нелинейной механике, «Наука», 1973.

87. Михайлов Ф. А., Свободные колебания линейных систем с переменными параметрами, Труды МАИ, 1961, вып. 135.
88. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, «Наука», 1975.
89. Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, «Мир», 1973.
90. Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, «Наука», 1969.
91. Морозов В. М., Устойчивость движения космических аппаратов, Итоги науки, Общая механика, ВИНИТИ, 1971, 5—83.
92. Мышкис А. Д., Математика для втузов, специальные курсы, «Наука», 1971.
93. Натанзон В. Я., Муфты с нелинейной характеристикой, Труды ЦИАМ, 1943, № 40.
94. Неймарк Ю. И., а) Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, «Наука», 1972;
б) Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Наука», 1963, стр. 137—156.
95. Нелепин Р. А., (ред.), Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, «Наука», 1973.
96. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, 1949.
97. Нудельман Я. Л., Методы определения собственных частот и критических чисел для стержневых систем, Гостехиздат УССР, 1942.
98. Овсянников Л. В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
99. Пановко Я. Г., Введение в теорию механических колебаний, «Наука», 1971.
100. Пановко Я. Г., Губанова И. И., Устойчивость и колебания упругих систем, «Наука», 1964.
101. Папкович П. Ф., Труды по вибрации корабля, Судпромгиз, 1960.
102. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, 1947.
103. Писаренко Г. С., Рассеяние энергии при механических колебаниях, изд. АН УССР, 1962.
104. Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, «Наука», 1964.
105. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961.
106. Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
107. Пуанкаре А., а) Избранные труды в трех томах, «Наука», т. I, 1971; т. II, 1972;
б) О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947.
108. Рагульскис К. М., Виткус И. И., Рагульскене В. Л., Самосинхронизация механических систем, 1. Самосинхронные и виброударные системы, «Минтис», Вильнюс, 1965.
109. Рагульскис К. М., Кавовелис А.— П. К., Балтрушайтис И. Д., Саткявичус Э. Б., Самосинхронизация механических систем, 2. Самосинхронизация, моделирование, «Минтис», Вильнюс, 1967.
110. Рагульскис К. М., Кубайтис З. И., Кумпикас А. Л., Гецевичюс Ю. Ю., Бакшис А. К., Колебания сложных механических систем, «Минтис», Вильнюс, 1969.
111. Рашковић Д., Теориjа осцилляциjа, «Научпа книга», Београд, 1957.
112. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, «Наука», 1974.

113. Релей (Стретт Дж. В.), Теория звука, т. I, т. II, Гостехиздат, 1940.
114. Репников А. В., Колебания в оптимальных системах автоматического регулирования, «Машиностроение», 1968.
115. Розенвассер Е. Н., Колебания нелинейных систем, «Наука», 1969.
116. Розе М., Нелинейные колебания и теория устойчивости, «Наука», 1971.
117. Ройтенберг Я. Н., Автоматическое управление; «Наука», 1971.
118. Рокар И., Неустойчивость в механике, ИЛ, 1959.
119. Рубаник В. П., Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, «Наука», 1969.
120. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников. Математические методы в динамике космических аппаратов вып. 4, изд. ВЦ АН СССР, 1967.
121. Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 3-е, Гостехиздат, 1951.
122. Рымаренко В. В., Некоторые аспекты применения теории возмущений к задачам теории нелинейных колебаний, Сб. «Асимптотические методы в нелинейн. мех.», Киев, 1974, 212—227.
123. Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ИЛ, 1953.
124. Серебренников М. Г., Колебания и вибрации в элементарном изложении, Гостехиздат, 1940.
125. Старжинский В. М., К теории нелинейных колебаний, издание мех.-мат. ф-та, МГУ, ч. I, 1970; ч. II, 1971; ч. III, 1972.
126. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е, Гостехиздат, 1953.
127. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, изд. 2-е, ИЛ, 1953.
128. Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, изд. 2-е, переработ., «Наука», 1964.
129. Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1948.
130. Тибилов Т. А., Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава, Труды Ростов-н/Д ин-та инж. ж. д. трансп., 1970, вып. 78.
131. Тимошенко С. П., а) Теория колебаний в инженерном деле, Физматгиз, 1959;
б) Прочность и колебания элементов конструкций (избранные работы), «Наука», 1973.
132. Тондл А., Нелинейные колебания механических систем, «Мир», 1973.
133. Филатов А. Н., Шарова Л. В., Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний, «Наука», 1976.
134. Филиппов А. П., а) Колебания механических систем, Киев, изд. «Наукова думка», 1965;
б) Теория колебаний и задачи динамики, Прикл. механика, изд. АН УССР, 1967, III, вып. 11, 8—22.
135. Фомин В. Н., Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, изд. ЛГУ, 1972.
136. Фремке А. В., Телеизмерения, «Высшая школа», изд. третье, 1975.
137. Харкевич А. А., Автоколебания, Гостехиздат, 1953.
138. Харламов П. В., Лекции по динамике твердого тела, изд. Новосибирск. гос. ун-та, 1965.
139. Хаяси Т., Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, 1957.
140. Хейл Дж., Колебания в нелинейных системах, «Мир», 1966.
141. Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т., Механические колебания, «Машиностроение», 1966.

142. Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.
143. Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», 1964.
144. Челомей В. Н., Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций, «Аэрофлот», 1939.
145. Четаев Н. Г., а) Устойчивость движения, изд. 2-е, Гостехиздат, 1955;
б) Устойчивость движения; работы по аналитической механике, изд. АН СССР, 1962.
146. Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, «Наука», 1972.
147. Abraham R., Marsden J. E., Foundations of mechanics, W. A. Benjamin, N. Y., Amsterdam, 1967.
148. Bickley W. G., Talbot A., An introduction to the theory of vibrating systems; Clarendon Press, Oxford, 1961.
149. Bishop R. E. D., Johnson D. C., The mechanics of vibration, Cambridge, Univ. Press, 1960.
150. Bishop R. E. D., Parkinson A. G., Vibration and Balancing of flexible shafts, Appl. Mech. Rev., 1968 21, № 5, 439—451.
151. Blaquière, A., Mécanique non linéaire. Les oscillateures à régimes quasi sinusoidaux, Cauthier—Villars, Paris, 1960.
152. Bosznay Adám, Müszaki rezgéstan, Müszaki Kiado, Budapest, 1962.
153. Cempel C., Okresowe drgania z uderzieniami w dyskretnych ukladach mechanicznych, Politechnika Poznańska, Rozprawy, Poznan, 1970, № 44.
154. Chen Yu., Vibrations theoretical methods, Reading, Mass., Addison Wesley Publ., Co., Inc., 1966.
155. Chisnell R. F., Vibrating systems, Routeledge and K. Paul, London, 1960.
156. Church A. H., Mechanical vibrations, 2nd ed., John Willey and Sons, N. Y.— London, 1963.
157. Cole E. B., Theory of vibrations for engineers, 3rd ed., Macmillan, N. Y., 1957.
158. Cole J. D., Perturbation methods in applied methematics, Blaisdell Publ., Comp., Waltham, Massachusets, Toronto — London, 1968.
159. Dincă F., Teodosiu C., Vibraţii neliniave şi aleatove, Acad. R. S. P., Bucureşti, 1969.
160. Forbat N., Analytische Mechanik der Schwingungen; VEB Dtsch. Verlag Wiss., Berlin, 1966 XII.
161. Giacaglia G. E., Perturbations methods in non-linear systems, Appl. Math. Sci., 1972, 8 VIII.
162. Gutman I., Industrial uses of mechanical vibrations, Bussiness Books, London, 1968.
163. Haag J., Les mouvements vibratoires, t. 1, Paris Presses Universitaires de France, 1952; t. 2, 1955.
164. Halanay A., Differential equations: stability, oscillations, time lags, Academic Press, N. Y., 1966.
165. Hansen H. M., Chenea P. F., Mechanics of vibrations, J. Wiley and Sons, Champen a. Hall, N. Y.— London, 1952.
166. Harris C. M., Crede C. E. (Eds), Shock and vibration handbook, Vols I, II, III, McGraw—Hill Book Co., Inc., N. Y., 1961.
167. Hayashi C., Nonlinear oscillations in physical systems, New ed., McGraw—Hill Book Co., N. Y.— London, 1964.
168. Hochstadt H., Differential equations, Holt, Rhinehart and Winston, N. Y., 1964.

169. H o r t W., Technische Schwingungslehre, 2 Aufl., Berlin, 1922.
170. H ü b n e r E., Technische Schwingungslehre in ihren Grundzugen, Springer, Berlin, 1957.
171. J o r d a n H., G r e i n e r M., Mechanische Schwingungen, Verlag W. Girardet, Essen, 1952.
172. K l o t t e r K., Technische Schwingungslehre; Bd. 1, Berlin—Gottingen—Heidelberg, 1951, Springer; Bd. 2, 1960.
173. M a g n u s K., Schwingungen, Eine Einführung in die teoretische Behandlung von Schwingungsproblemen, 2 Aufl., Teubner, Stuttgart, 1969.
174. L a f i t a B. F., M a t a H., Vibraciones mecánicas en ingeneria, Inta, Madrid, 1964.
175. L e f s h e t z S. (edit.), Contributions a la théorie des oscillations non linéaires, Vol. 2, Princeton Univ. Press, 1952.
176. M a t h e y R., Physique des vibrations méchaniques, Dunod, Paris, 1963.
177. M a w n i n J., Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentielles non linéaires, Bull. Soc. Roy., Liège, 1969, 38, № 7—8, 308—398.
178. M a z e t R., Mécanique vibratioire, Dunod, Paris, 1966.
179. M c C a l l i o n H., Vibration of linear mechanical systems, Harlow, Longman, 1973.
180. M e i r o v i t s c h L., Analytical methods in vibrations, Macmillan, N. Y., 1967.
181. M e t t l e r E., a) Dynamic buckling, Handbook of engineering mechanics, McGraw-Hill Book Company, 1962;
b) Stability and vibration problems of mechanical systems under harmonic excitation, Dynamic stability of structures, Oxford — New York, Pergamon Press, 1966.
182. M e y e r E., G u i c k i n g D., Schwingungslehre, Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1974.
183. M i n o r s k y N., a) Introductions to non-linear Mechanics, J. W. Edwards, Ann. Arbor, Michigan, 1947;
b) Nonlinear oscillations, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey—Toronto—N. Y.— London, 1962,
c) Nouvelles méthodes de la théorie des oscillations, Conf. Semin. mat. Univ. Bari, 1957, № 25—28,
d) Theorie des oscillations, Cauthier—Villars, Paris, 1967.
184. M o r r i l l B., Mechanical vibrations, Ronald Press Co., N. Y., 1957.
185. M u c z y n s k a A., On rotor dynamics (survey), Nonlinear vibration problems, Zagadnienia drgań nieliniowych, Warszawa, 1972 13, 35—138.
186. M y k l e s t a d N. O., Fundamentals of vibration analysis, McGraw-Hill, N. Y.— London, 1956.
187. O s i e s k i J., Z i e m b a S., Podstawy pomiarów drgań mechanicznych, Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1968.
188. P o i n c a r e H., Thèse (1879), Oeuvres, 1, Paris, 1928.
189. P o v y L., Contribution à l'analyse et la synthèse des asservissemens échantillonnés non linéaires en régime dynamique, Thèse doct. sci. phys. Fac. sci, Univ. Lille, 1969, 99.
190. P u s t L., Kmity nelinearni netlumené soustavy a dvoy stupnich volnosti, Rozpr. ČSAV, Řada TV, 1959 69, № 1.
191. P u s t L., T o n d l A., Úvod do téorie nelineárnych a quasi-harmodických kmitov mechanických sústav, ČSAV, Praha, 1956.
192. R e i s s i g R., S a u s o n e G., C o n t i R., Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen, Cremonese, Roma, 1963.
193. R o c a r d Y., Dynamique générale des vibrations, 3-me ed., Masson et Cie, Paris, 1960.
194. R o s e n b e r g R. M., Les vibrations non-linéaires de systèmes à plusieurs degrés de liberté, t. 2 (Sémin. méc. et acoust. Centre rech. phys.), CNRS, Marseille, 1970.

195. Saaty T. L., Modern nonlinear equations, McGraw-Hill, N. Y., 1967.
196. Saaty T. L., Bram J., Nonlinear mathematics, McGraw-Hill, N. Y., 1964.
197. Sansone G., Conti R., Non-linear differential equations, Pergamon Press, N. Y., 1964.
198. Santen G. W., Introduction to a study of mechanical vibrations, 3rd ed., Eindhoven, Centrex, 1962.
199. Schowdon J. C., Vibration and shock in damped mechanica systems, John Willey and Sons, N. Y., 1968.
200. Schmidt G., a) Resonanzlösungen nichtlinearer Schwingungsgleichungen, Nowa Acta Leopoldina, neue Folge, Leipzig, 1972 34, № 187,
b) Parametererregte Schwingungen, VEB Dtsch. Verlag. Wiss., Berlin, 1975.
201. Schuler M., Mechanische Schwingungen, Teil II Mehrfache Schwinger, Geest und Portig, Leipzig, 1959.
202. Skudrzyk E., Simple and komplex vibratory systems, University Park, Univ. Press, Pa-London, Pa State, 1968.
203. Söchting F., Berechnung mechanischer Schwingungen, Springer—Verlag, Wien, 1951.
204. Stodola A., Dampfl-und Gasturbinen, 5 Aufl., Berlin, 1922.
205. Struble R. A., Nonlinear differential equations, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1962.
206. Tomson W. T., Mechanical vibrations, 2nded., Prentice-Hall, Inc., N. Y., 1956.
207. Tondl A., a) K analýze rezonančnich kmitů nelineárnich systemů se dvema stupni volnosti, Rozpr. CAW, 1964, TV 74, № 8;
b) Self-excited vibrations, Nat. Res. Inst. Machine Design, Běchovice, 1970;
c) Domains of attraction for nonlinear systems, Běchovice, 1970.
208. Timoschenko S. P., Vibrations problems in engineering, 3 ed., D. Van Nostrand, N. Y., 1955.
209. Urabe M., Nonlinear autonomous oscillations, Analytical theory, N. Y., Acad. Press, 12, 1967.
210. Vierck R. K., Vibration analysis, Internat. Textbook Co., Scranton, Pa, 1967.
211. Ziemba S., Analiza drgań, PWN, Warszawa, 1957.

Б. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

212. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Дубошин Г. Н., Орлов А. А., Рябов Ю. А., Некоторые сильно возмущенные задачи нелинейной механики, Сб. «Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления», «Наука», 1975, 38—42.
213. Аксянцев А. М., Об одном методе решения задачи нелинейных колебаний, Труды Унив. Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1966, XV, теор. мех., вып. III, 180—190.
214. Акуленко Л. Д., а) О резонансных колебательных и вращательных движениях, ПММ, 1968 **32**, вып. 2, 306—313;
б) Об исследовании резонансов в нелинейных системах, ПММ, 1968 **32**, вып. 6, 1106—1110.
215. Алдошкин Ю. Г., а) О методе Крылова — Боголюбова, Вестник МГУ, серия I, 1972, № 3, 97—104;
б) О нормальной форме нелинейных колебаний, Вестник МГУ, серия I, 1972, № 5, 110—115.
216. Аппельрот Г. Г., Не вполне симметричные гироскопы, Сб. «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки», изд. АН СССР, 1940, 61—155.

217. Аржаных И. С., О цепных системах теории нелинейных колебаний, Труды Межд. симпозиума по нелинейн. колебаниям, 1961, изд. АН УССР, Киев, 1963, 59—72.

218. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 1963 18, № 6, 91—192.

219. Архангельский Ю. А., а) Периодические решения квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами, ПММ, 1963 XXVII, вып. 2, 369—372;

б) О движении приведенного в быстрое вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, ПММ, 1963 XXVII, вып. 5, 864—877;

в) Об одном случае построения периодических решений квазилинейных систем, ПММ, 1964 XXVIII, вып. 5, 941—942;

г) О новых частных решениях задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, ДАН СССР, 1964 158, № 2, 292—293;

д) Новые частные решения задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, ДАН СССР, 1964 159, № 1, 36—38.

220. Аткинсон Ч. П., Тэскетт Б., Исследование нелинейно связанных модельных решений связанных нелинейных систем при помощи метода суперпозиции, Прикл. механика, Труды Амер. о-ва инж.-исследователей, серия Е, 1965 **32**, № 2, 117—124.

221. Бабий В. П., О вычислении периодических решений неавтономных систем методом последовательных приближений, Изв. Вузов, матем., 1972 **123**, № 8, 3—9.

222. Байнов Д. Д., а) Периодични колебания на неавтономна квазилинейна система с n степени на свобода при наличието на резонансни честоти, Изв. на Матем. инст. Бълг. АН, 1966 9, 191—199;

б) Периодические колебания неавтономной квазилинейной системы с n степенями свободы при наличии резонансных частот, Zagadnienia drgań nielinowych, Nonlinear vibration problems, Warszawa, 1966 8, 87—92;

в) Метод асимптотического интегрирования уравнений движения квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы. Там же, 173—177.

223. Байнов Д. Д., Партинова Н., Метод решения автономной квазилинейной системы с n степенями свободы при наличии одной групп соизмеримых частот, Zagadnienia drgań nieliniowych, Nonlinear vibration problems, Warszawa, 1966 8, 67—85.

224. Бахмутский В. Ф., а) О применении метода Пуанкаре для исследования неустановившихся колебаний, Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., 1961, № 3, 84—90;

б) К исследованию процессов установления колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы, Изв. АН СССР, Отд. мех. и машиностр., 1962, № 2, 110—113.

225. Беленький И. М. а) О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для консервативных систем, ПММ, 1966 **30**, вып. 3, 604—606;

б) Приложение метода присоединенных полей к нелинейным системам, ПММ, 1967 **31**, вып. 2, 372—376;

в) Циклы и квазииндексы особых точек консервативных систем, ПММ, 1967 **31**, вып. 5, 938—946.

г) О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для автономных систем в случае многосвязных областей, Дифф. уравнения, 1967 **III**, № 8, 1248—1252;

д) Приложение метода присоединенных полей к пространственным автономным системам, ПММ, 1968 **32**, вып. 1, 131—135;

е) О нормальных конфигурациях консервативных систем, ПММ, 1972 **36**, вып. 1, 33—42.

226. Бибиков Ю. Н., О приводимости системы двух дифференциальных уравнений к нормальной форме, Дифф. уравнения, 1971 **VII**, № 10, 1899—1902.

227. Бибиков Ю. Н., Плисс В. А., О существовании инвариантных торов в окрестности нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Дифф. уравнения, 1967 **III**, № 11, 1864—1881.

228. Боголюбов Н. Н., О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики. Первая летняя математическая школа, ч. I, «Наукова думка», Киев, 1964, 11—101.

229. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Об исследовании квазипериодических режимов в нелинейных колебательных системах Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1965, № 148, 181—192.

230. Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., О периодических решениях дифференциального уравнения n-го порядка с малым параметром, Труды Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, Изд. АН УССР, Киев, 1963, 155—165.

231. Болотин В. В., Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г., Современные проблемы теории колебаний механических систем, Изв. Вузов, машиностроение, 1963, № 4, 5—13.

232. Бондарь Н. Г., Новый метод теории нелинейных колебаний, Bul. Inst. politehn., Iasi, 1963 **9**, № 3—4, 25—34.

233. Бояджиев Г. Н., Чешанков Б. И., а) Периодични движения на еластично математично махало при резонанс, Годишник на ВТУЗ, математика, «Техника», София, 1966 **II**, 1, 113—121;

б) Периодични решения и устойчивост на една неавтономна система, Годишник на ВТУЗ, математика, «Техника», София, 1966, **II**, 3, 131—143.

234. Брюно А. Д., а) Асимптотика решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1962 **143**, № 4, 763—766;

б) Нормальная форма дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1964 **157**, № 6, 1276—1279;

в) Степенные асимптотики решений нелинейных систем, Изв. АН СССР, серия матем., 1965 **29**, № 2, 329—364;

г) О сходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме, ДАН СССР, 1965 **165**, № 5, 987—989;

д) О формальной устойчивости систем Гамильтона, Матем. заметки, 1967 **I**, вып. 3, 325—330;

е) О расходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме, ДАН СССР, 1967 **174**, № 5, 1003—1006;

ж) Аналитическая форма дифференциальных уравнений, Матем. заметки, 1969 **6**, № 6, 771—778;

з) Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов, Матем. сб., новая серия, 1970, 83 (125): 2 (10), 273—312;

и) Нормальная форма нелинейных колебаний, Труды 5-й Междунар. конференции по нелинейным колебаниям, Киев, т. I, 1970, 112—119;

к) Аналитическая форма дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. о-ва, ч. I, 1971, т. 25, 119—262; ч. II, 1972, т. 26, 199—239;

л) О движении гироскопа в кардановом подвесе, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1972, № 6, 5—18;

м) Локальный метод в нелинейных резонансах, Arch. math., Scripta fac. sci; nat. ujep. Brunessis, 1972, 4 **VIII**, 177—178;

н) О степенных асимптотиках решений нелинейных систем, ИПМ АН СССР, 1973, препринт № 51, 41 стр.;

о) О локальных инвариантах дифференциальных уравнений, Матем. заметки, 1973 **14**, вып. 4, 499—507;

п) О локальных задачах механики, ИПМ АН СССР, 1973, препринт № 96, 11 стр.;
р) Аналитические интегральные многообразия, ДАН СССР, 1974 **216**, № 2, 253—256;
с) Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром, Матем. заметки, 1974 **16**, вып. 3, 407—414;
т) Множества аналитичности нормализующего преобразования, 1. Основные результаты, ИПМ АН СССР, 1974, препринт № 97, 58 стр.;
у) Множества аналитичности нормализующего преобразования 2. Приложения и обобщения, ИПМ АН СССР, 1974, препринт № 98, 53 стр.;
ф) Аналитические интегральные множества, ИПМ АН СССР, 1975, препринт № 86, 16 стр.;
х) Интегральные аналитические множества, ДАН СССР, 1975 **220**, № 6, 1255—1258;
ц) Нормальная форма вещественных дифференциальных уравнений, Матем. заметки, 1975 18, вып. 2, 229—236.

235. Булгаков Н. Г., Колебания квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы и неаналитической характеристикой нелинейности, ПММ, 1955 **XIX**, вып. 3, 265—272.

236. Валеев К. Г., Исследование колебаний в квазилинейной автономной системе в резонансном случае, Прикл. механика, Киев, 1969 **5**, вып. 4, 25—31.

237. Валеев К. Г., Ганиев Р. Ф., Исследование колебаний нелинейных систем, ПММ, 1969 33, вып. 3, 413—430.

238. Валеев К. Г., Мисак В. В., а) Об устойчивости почти-периодического решения обобщенного уравнения Дюффинга, Сб. «Матем. физика», «Наукова думка», Киев, 1972, вып. 12, 9—13;
б) Исследование колебаний нелинейных систем. Прикл. механика, Киев, 1973, 9, вып. 2, 53—59.

239. Веретенников В. Г., а) К исследованию вынужденных колебаний нелинейной системы с двумя степенями свободы, Труды Ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1966 **XV**, теор. мех., вып. III, 152—165,
б) Об устойчивости движения в случае трех пар чисто мнимых корней, Труды Ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1966 **XV**, теор. мех., вып. III, 166—179,
в) К построению решений квазилинейных неавтономных систем в резонансных случаях, ПММ, 1969, 33, вып. 6, 1126—1134.

240. Витт А. А., Горелик Г. С., Колебания упругого маятника, как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем, ЖТФ, 1933 III, вып. 2—3.

241. Волк И. М., а) Некоторые обобщения метода малого параметра в теории периодических решений неавтономных систем, ПММ, 1947 **XI**, вып. 4, 433—444;
б) О периодических решениях неавтономных систем, зависящих от малого параметра, ПММ, 1948 **XII**, вып. 1, 29—38;
в) Об одном классе автоколебательных систем, ДАН СССР, 1956 **110**, № 2, 189—192;
г) О периодических решениях квазилинейных дифференциальных уравнений в одном классе случаев, Изв. Вузов, матем., 1953, № 3, 31—40;
д) О предельном цикле динамической системы дифференциальных уравнений в одном классе случаев, Изв. Вузов, матем., 1959, № 1, 34—44.

242. Ганиев Р. Ф., Определение амплитуд при колебаниях твердого тела около центра масс, Изв. АН СССР, мех. и машиностр., 1965, № 2, 163—167.

243. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О., а) О нелинейных колебаниях твердого тела, несущего вращающийся ротор, Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1965, № 5, 31—37;
б) О нелинейных резонансах при пространственных колебаниях твердого тела, Изв. АН СССР, механика твердого тела, 1967, № 4, 32—39.
244. Горбатенко С. А., а) К вопросу о границах применимости и точности метода Ван-дер Поля в теории нелинейных колебаний автономных систем, Труды Унив. Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1964 V, теор. мех., вып. II, 45—69;
б) Некоторые вопросы точности асимптотических методов в теории нелинейных колебаний автономных систем, Труды Унив. Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1966 XV, теор. мех., вып. III, 82—105;
в) О точности асимптотических методов и метода усреднения в теории нелинейных колебаний автономных систем. Там же, 106—127;
г) Об ограничениях в применении метода усреднения в теории нелинейных колебаний автономных систем. Там же, 128—151.
245. Дасарати Б., Эквивалентные линейные и нелинейные системы высших порядков, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1972, № 2, 11—14.
246. Девянин Е. А., О свойствах уравнений первого приближения метода осреднения, ПММ, 1958 XXII, вып. 5, 713—719.
247. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. Н., О применении интегральных и вариационных принципов механики в задачах колебаний, ПММ, 1960 XXIV, вып. 1, 80—87.
248. Дородницын А. А., Асимптотическое решение уравнения Ван-дер Поля, ПММ, 1947 XI, вып. 3, 313—328.
249. Дроздов Ю. М., Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным (примеры), ПММ, 1955 XIX, вып. 1, 33—40.
250. Жаров Е. П., а) О колебаниях прядильных центрифуг, Изв. Вузов, технология легк. пром-сти, 1966, № 6, 138—142;
б) Вынужденные колебания центрифуг типа ЭВ-3 в резонансных зонах, Изв. Вузов, технология легк. пром-сти, 1971, № 1, 123—126.
251. Жуковский Н. Е., Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$, Матем. сб., 1892 XVI, вып. 3, 582—591; Собр. соч., т. I, 1948, 246—253.
252. Зигель К. Л., О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. Сб. переводов «Математика», 1961 5, № 2, 119—128.
253. Ишлинский А. Ю., Наближений метод дослiдження коливальних систем, Прикл. механiка, 1956 2, № 2, 152—158.
254. Казакевич В. В., Приближенный метод исследования некоторых типов сильно нелинейных систем, Труды Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, изд. АН УССР, Киев, 1963, 226—255.
255. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, 1948 3, № 6, 89—185.
256. Каток С. Б., Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела, УМН, 1972 **27**, № 2, 126—132.
257. Кац А. М., а) Бигармонические колебания диссипативной нелинейной системы, вызываемые или поддерживаемые гармонической возмущающей силой, ПММ, 1954 XVIII, вып. 4, 425—444;
б) Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным, ПММ, 1955 XIX, вып. 1, 13—32.
258. Кеворкян Дж., Прохождение через резонанс одномерного осциллятора с медленно изменяющейся частотой, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1972, № 2, 41—50.

259. Климов Д. М., Фименков В. А., О резонансе в существенно нелинейной гироскопической системе, Изв. АН СССР, Мех. твердого тела, 1970, № 6, 42—54.
260. Ковтун Р. И., Аналитическое рассмотрение развития резонансных колебаний в нелинейных консервативных системах, Сб. «Асимптотические методы в нелинейной механике», Киев, 1974, 113—131.
261. Колмогоров А. Н., О сохранении условно-периодического движения при малом изменении функции Гамильтона, ДАН СССР, 1954 98, № 4, 527—530.
262. Коловский М. З., О применении метода малого параметра для определения разрывных периодических решений, Труды Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, изд. АН УССР, 1963, 264—276.
263. Коловский М. З., Первозванский А. А., О линеаризации по функции распределения в задачах теории нелинейных колебаний, Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., 1962, № 5, 118—128.
264. Кондратьев В. А., Самовол В. С., О линеаризации автономных систем в окрестности особой точки типа узел, Матем. заметки, 1973 14, № 6, 833—842.
265. Кононенко В. О., а) О связанных изгибно-крутильных колебаниях. Поперечные колебания и критические скорости, Изд. АН СССР, 1953, № 2, 194—237;
б) О нелинейных колебаниях в системах с изменяющимися параметрами, ДАН СССР, 1955 105, № 2, 229—232;
в) О колебаниях в нелинейных системах со многими степенями свободы, ДАН СССР, 1955 105, № 4, 664—667;
г) Резонансные колебания вращающегося вала с диском, Изв. АН СССР, Отдел техн. наук, 1958, № 7, 87—90;
д) Собственные колебания нелинейной системы с периодически изменяющимися параметрами, Сб. «Вопр. прочности материалов и конструкций», АН СССР, 1959, 177—193;
е) О свойствах двух нелинейных колебательных систем, Труды 3-го совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, Динамика машин, Машгиз, 1963, 79—92;
ж) Некоторые автономные задачи теории нелинейных колебаний, Труды Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, т. 3, Изд. АН УССР, Киев, 1963, 151—179;
з) О колебаниях твердого тела около центра масс, Изв. АН СССР, мех. и машиностр., 1963, № 4, 23—30;
и) О некоторых современных задачах теории колебаний, Труды II Всес. съезда по теор. и прикл. механике, Обзор докладов, вып. 2, «Наука», 1965, 65—80;
к) Исследования нелинейных колебаний твердых тел, Sb. ref. 5. konf. Dynam. stroju, Liblice, 1968, 201—208;
л) Пространственные нелинейные колебания твердых тел, Прикл. механика, 1969, 5, № 2, 13—27.
266. Кононенко В. О., Фролов К. В., О резонансных свойствах параметрической колебательной системы, Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., 1962, № 3, 73—80.
267. Копнин Ю. М., Периодические колебания нелинейных неавтономных систем со многими степенями свободы, Инж. журн. (механика твердого тела), 1965 5, № 2, 217—226.
268. Костін В. В., Нормальна форма неавтономных систем, Доповіді АН УРСР, 1973, сер. А, № 8, 693—696.
269. Костин В. В., Ле Динь Тхюн, Некоторые признаки сходимости нормализующего преобразования, ДАН УССР, сер. А., 1975, № 11, 982—985.

270. Коуэн Б., Циклотрон и фазотрон, Сб. «Ускорители», Госатомиздат, 1962, 133—220.
271. Кочин Н. Е., О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ, старая серия, 1934, 2, вып. 1, 3—28; Собр. соч. т. II, 1949, 507—535.
272. Кошляков В. Н., а) Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Укр. матем. журн., 1973 25, № 5, 677—681,
б) О применении параметров Родрига — Гамильтона и Кэйли — Клейна к задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Укр. матем. журн., 1974 26, № 2, 179—187.
273. Красносельский М. А., а) О применении методов нелинейного функционального анализа в некоторых задачах о периодических решениях уравнений нелинейной механики, ДАН СССР, 1956 111, № 2, 283—286;
б) Об устойчивости периодических решений, рождающихся из состояния равновесия, ДАН СССР, 1963 150, 463—466;
в) О некоторых новых методах в теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Труды. II Всес. съезда по теор. и прикл. механике, 1964, Обзор докладов, вып. 2, «Наука», 1965, 81—96;
г) Функционально-аналитические методы в теории аналитических колебаний, Труды 5-й Междунар. конференции по нелинейным колебаниям, т. I, Киев, 1970, 322—331.
274. Кузмак Г. Е., К теории неавтономных квазилинейных систем со многими степенями свободы, Укр. матем. ж., 1958 10, № 2, 128—146.
275. Куклес И. С., О двух проблемах теории нелинейных колебаний, Труды Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, т. 2, Изд. АН УССР, 1963, 212—219.
276. Лакшми-Бай С., О некоторых новых приемах расчета нелинейных систем, Механика, Период. сборн. перев. ин. статей, 1962, № 3, 45—54.
277. Леонов М. Я., а) О квазигармонических колебаниях, ПММ, 1946, X, вып. 5—6, 575—580;
б) Приближенный метод исследования квазигармонических колебаний, Научн. зап. Ин-та машиноведения и автоматики АН УССР, 1953 2, № 1, 5—8.
278. Литвин-Седой М. З., а) О невозмущаемости сферического маятника переменной длины при движении точки опоры в центральном поле тяготения, Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., 1963, № 1, 33—40;
б) Об уравнениях, связывающих параметры движения тела-носителя и носимых маятников. Ин-т мех. МГУ, Научн. труды, 1971, № 10, 136—147.
279. Лурье А. И., О неустановившихся движениях в квазилинейных автономных колебательных системах, Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 192, Машгиз, 1958, 98—108.
280. Лыкова О. Б., а) Об одночастотных колебаниях в системах с медленно меняющимися параметрами, Укр. матем. ж., 1957 9, № 2, 155—162.
б) До питания про одночастотні коливання системи з багатьма степенями свободи, ДАН УССР, 1957, № 3, 222—226.
281. Маневич Л. И., Инвариантно-групповые решения и проблема нормальных колебаний, Гидромеханика и теория упругости, № 13, Днепропетровск, 1970, 140—146.
282. Маневич Л. И., Пинский М. А., а) О нормальных колебаниях в нелинейных системах с двумя степенями свободы, Прикладная механика, 1972 8, вып. 9, 83—90;
б) Об использовании симметрии при расчете нелинейных колебаний, Изв. АН СССР, механика твердого тела, 1972, № 2, 43—46.

283. Маневич Л. И., Михлин Ю. В., О периодических решениях, близких к прямолинейным, нормальным формам колебаний, ПММ, 1972 36, вып. 6, 1051—1058.

284. Маневич Л. И., Черевацкий Б. П., а) О приближенном определении нормальных колебаний нелинейной системы с двумя степенями свободы, Сб. «Вопросы прочности, надежности и разрушения мех. систем», Изд. ДГУ, Днепропетровск, 1969, 26—34;

б) Нормальные колебания в нелинейных консервативных системах с несимметричной характеристикой, Труды ДИИТ, Днепропетровск, 1972, вып. 126, 56—74.

285. Манжерон Д. И., Метод интегральных уравнений в нелинейной механике, Труды Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, изд. АН УССР, Киев, 1963 1, 347—350.

286. Маркеев А. П., Исследования устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики, изд. Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1970, 163 стр.

287. Марти И. С., Дикшатулу Б. Л., Кришна Ж., Об асимптотическом методе Крылова—Боголюбова для нелинейных систем с сильным демпфированием, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1970, № 5, 34—48.

288. Мархашов Л. М., О приведении дифференциальных уравнений к нормальной форме аналитическим преобразованием, ПММ, 1974, вып. 5, 788—790.

289. Мельников В. К., Качественное описание сильного резонанса в нелинейной системе, ДАН СССР, 1963 148, № 6, 1257—1260.

290. Мельников Г. И., К теории нелинейных колебаний, Вестник ЛГУ, 1964, № 1, вып. 1, 88—98.

291. Миллионщиков В. М., К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. о-ва, 1968 18, 146—186.

292. Митропольский Ю. А., а) Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс, Инж. сборн., 1953 15, 89—98;

б) О колебаниях в гироскопических системах при прохождении через резонанс, Укр. матем. журн., 1953 5, № 3, 333—349;

в) О нестационарных колебаниях в системах со многими степенями свободы, Укр. матем. журн., 1954 6, № 2, 176—189;

г) Про вплив пружних елементів з нелінійною характеристикою на малі коливання в деякіх гіроскопичніх системах, Наук. зап. Київськ. ун-та, 1954 13, № 8, 107—114;

д) К вопросу о прохождении через резонанс второго рода, Укр. матем. журн., 1955 7, № 1, 121—123;

е) К вопросу о внутреннем резонансе в нелинейных колебательных системах, Наук. зап. Київськ. ун-та, 1957 16, № 2, 53—61;

ж) Про неусталені процесси в деяких релаксаційних коливних системах. Наук. зап. Київськ. ун-та, 1957 16, № 16, 93—101;

з) Воздействие на нелинейные колебательные системы внешних сил с переменными частотами, Bull. Inst. politehn. Iaşi, 1957 3, № 1—2, 15—24;

и) Основные направления в теории нелинейных колебаний и их развитие, Труды Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, изд. АН УССР, Киев, 1963 1, 15—22;

к) Метод усреднения в нелинейной механике, Труды 5-й Междунар., конференции по нелинейным колебаниям, т. I, Киев, 1970, 21—39.

293. Митропольский Ю. А., Лопатин А. К., О преобразовании систем нелинейных дифференциальных уравнений к нормальной форме, Сб. «Матем. физика», «Наукова думка», 1973, вып. 14, 125—140.

294. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б., Исследование поведения решений нелинейных уравнений в окрестности положения равновесия, Сб. «Матем. физика», «Наукова думка», Киев, 1965, 74—96.
295. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., а) Условно-периодические колебания в нелинейных системах, «Матем. физика. Респ. межвед. сб.», 1972, вып. 12, 86—105.
б) Многочастотные колебания нелинейных систем, Zagadnienia drgań nieliniowych, Nonlinear vibration problems, PWN, Warszawa, 1973, 14, 27—38.
296. Михлин Ю. В., а) Применение асимптотических методов для определения нормальных колебаний в нелинейных консервативных системах, Сб. «Динамическая прочность и устойчивость элементов крупных машин», ДГУ, Днепропетровск, 1973, вып. 1, 175—180;
б) Резонансные режимы нелинейных систем, близких к консервативным, ПММ, 1974 38, вып. 3, 459—464.
297. Мозер Ю., Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений, Математика, Период. сб. перев. ин. статей, 1962 6, № 4, 3—10.
298. Молчанов А. М., а) Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ДАН СССР, 1960 **136**, № 5, 1030—1033,
б) Устойчивость в случае нейтрального приближения, ДАН СССР, 1961 **141**, № 1, 24—27.
в) Резонансы в многочастотных колебаниях, ДАН СССР, 1966 **168**, № 2, 284—287.
299. Мышкис А. Д., О точности приближенных методов анализа малых нелинейных свободных колебаний с одной степенью свободы, Сб. «Вопросы динамики и динам. прочности», Изд. АН Латв. ССР, Рига, вып. 1, 1953, 139—164.
300. Нейштадт А. И., О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче, ДАН СССР, 1975 221, № 2, 301—304.
301. Нустров В. С., а) О периодических решениях нелинейных автономных систем одного вида, ПММ, 1969 33, вып. 2, 274—279;
б) О периодических решениях нелинейных систем, Изв. АН СССР (механика твердого тела), 1969, № 2, 56—62;
в) О периодических решениях систем, близких к нелинейным системам при главном резонансе, Изв. Вузов, математика, 1970, № 3 (94), 63—69;
г) О периодических решениях стохастических систем, близких к системам Ляпунова, Изв. Вузов, радиофизика, 1970 XIII, № 11, 1606—1613;
д) Об одном случае резонанса для нелинейных систем, ПММ, 1974, 38, вып. 6, 986—990.
302. Осипов А. В., К вопросу о существовании преобразования в нормальную форму, Дифф. уравнения, 1973 9, № 6, 1149—1150.
303. Питтель Б. Г., Юзефович Г. И., Простоение областей динамической неустойчивости канонических систем с периодическими коэффициентами, Вестник ЛГУ, 1962, № 1, серия матем., мех. и астр., вып. 1, 89—101.
304. Плисс В. А., О приведении аналитической системы дифференциальных уравнений к линейной форме, Дифф. уравнения, 1965 I, № 2, 153—161.
305. Плотникова Г. В., а) О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы, ПММ, 1960 XXIV, вып. 5, 933—937;
б) О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукрат-

ных корней уравнений основных амплитуд, ПММ, 1962 **XXVI**, вып. 4, 749—755;

в) К построению периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы, ПММ, 1963 **XXVII**, вып. 2, 365—369.

306. Плотникова Г. В., Байнов Д. Д., Периодические колебания механической системы с n степенями свободы при наличии резонансных частот, Rev. Roumaine Sci. Techn., Ser. Méch. appl., 1965 **10**, № 2, 371—378.

307. Полубаринова-Кочина П. Я., Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Сб. «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки», Изд. АН СССР, 1940, 157—186.

308. Попов Е. П., О малом параметре в методе гармонической линеаризации, Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2, 41—52.

309. Попов Э. А., Устойчивость движения гибких валов с учетом их боковой жесткости, Изв. вузов, технол. текст. пром-сти, Иваново, 1975, № 4, 144—147.

310. Попов Э. А., Квартин Л. М., а) Определение потенциальной энергии быстровращающихся валов текстильных машин, Оборудование для прядильного пр-ва и пр-ва хим. волокон, ЦНИИТЭИлегпищемаш, реф. информация, Москва, 1975, № 10, 10—13;

б) О форме упругих линий быстровращающихся валов текстильных машин. Там же, 1975, № 11, 15—18.

311. Проскуряков А. П., а) К построению периодических решений автономных систем с одной степенью свободы, ПММ, 1957 **XXI**, вып. 4, 585—590;

б) Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд, ПММ, 1958 **XXII**, вып. 4, 510—518;

в) Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса, ПММ, 1959 **XXIII**, вып. 5, 851—861;

г) Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы, ПММ, 1960 **XXIV**, вып. 4, 734—737;

д) Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы, ПММ, 1960 **XXIV**, вып. 6, 1103—1109;

е) Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра, ПММ, 1961 **XXV**, вып. 5, 954—960;

ж) К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы, ПММ, 1962 **XXVI**, вып. 2, 358—364;

з) Построение периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы в особых случаях, ПММ, 1963 **XXVII**, вып. 6, 1128—1134;

и) Метод малого параметра Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Труды II Всес. съезда по теор. и прикл. механике, Обзор докладов, вып. 2, «Наука», 1965, 112—124;

к) К построению периодических решений квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы в случае кратных корней амплитудных уравнений, ПММ, 1966 **30**, вып. 6, 1115—1120;

л) О методе Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Случай вырождения системы, ПММ, 1967 **31**, вып. 4, 617—623;

м) Структура периодических решений квазилинейной автономной системы с несколькими степенями свободы в случае разных, но частично несоизмеримых частот, ПММ, 1968 **32**, вып. 3, 548—552;

н) О влиянии сил сопротивления на существование субгармонических колебаний квазилинейных систем, ПММ, 1971 35, вып. 1, 144—147;
о) Периодические решения квазилинейных систем с несколькими степенями свободы при произвольных частотах, ПММ, 1972 **36**, вып. 2, 349—357.

312. Пустыльников Л. Д., Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. Обобщение теоремы К. Л. Зигеля на неавтономный случай, Матем. сб., 1974 **94**, № 3, 407—429.

313. Розенберг Р. М., а) О формах колебаний нормального типа нелинейных систем с двумя степенями свободы, Механика, Период. сборн. перев. ин. статей, 1961, № 5, 3—15;
б) О свободных колебаниях нормального типа нелинейных систем общего класса с двумя степенями свободы, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1961, № 5, 17—34;
в) Нелинейные колебания, Механика, Период. сборн. перев. ин. статей, 1962, № 5, 3—14.

314. Розенберг Р. М., Аткинсон Ч. П., О типах и устойчивости собственных колебаний нелинейной системы с двумя степенями свободы, Механика, Период. сборн. перев. ин. статей, 1959 **26**, № 3, 377—385.

315. Розенберг Р. М., Кью Дж. К., Неоднородные колебания нелинейных систем с двумя степенями свободы, Прикл. механика, Труды Амер. о-ва, инж.-исследователей, серия E, 1964 **31**, № 2, 139—147.

316. Рябов Ю. А., а) Обобщение одной теоремы А. М. Ляпунова, Ученые записки МГУ, 1954 **VII**, вып. 165, 131—150;
б) Оценка области сходимости периодических рядов — решений дифференциальных уравнений с малым параметром, ДАН СССР, 1958 **118**, № 4, 642—645;
в) Оценка области сходимости периодических рядов — решений дифференциальных уравнений с малым параметром. Случай отсутствия резонанса, Изв. вузов, математика, 1959, № 2, 202—212;
г) Об одном способе оценки области применимости метода малого параметра в теории нелинейных колебаний, Инж. ж., 1961 **I**, вып. 1, 16—28;
д) Об оценке области применимости метода малого параметра в задачах теории нелинейных колебаний, Инж. ж., 1961 **I**, вып. 3, 3—21.

317. Савинов Г. В., Автоколебательные системы с сильно выраженной нелинейностью, Вестник МГУ, 1953, серия I, № 6, 77—83.

318. Самовол В. С., О линеаризации системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, ДАН СССР, 1972 **206**, § 3, 545—548.

319. Смейл С., Топология и механика, УМН, 1972 **27**, № 2, 77—123.

320. Соколов В. М., О периодических колебаниях систем Ляпунова в одном случае, Труды Уральск. политехн. ин-та, 1954, Сб. 51, матем., 12—19.

321. Сретенский Л. Н., Движение гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 1, 109—119.

322. Старжинский В. М., а) Об автоколебаниях следящего электропривода, ПММ, 1949 **XIII**, вып. 1, 41—50;
б) Крутильные колебания коленчатых валов ткацких станков, Научные доклады высшей школы, 1959, № 1, 51—67; № 2, 44—47;
в) Свободные не целиком упругие колебательные цепи, Изв. АН СССР, мех. и машиностр., 1961, № 6, 68—73;
г) Свободные целиком упругие колебательные цепи, ПММ, 1962 **XXVI**, вып. 1, 172—181;
д) Об одном методе в теории нелинейных колебаний, Bull. Inst. DIN Iasi, 1965 **XI (XV)**, fasc. 1—2, 81—89;

е) Vereinigungen der Methoden von Ljapunow und Poincare in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen, Труды III Межд. конф. по нелинейным колебаниям, Берлин (Abhandl. d. DAW, Akad. Verlag, Berlin), 1965 1, 123—129;
ж) Об одном варианте метода определения периодических решений, Инж. ж. (механика твердого тела), 1968 4, № 6, 67—71;
з) Процесс срыва вертикальных колебаний пружинного маятника, Изв. АН СССР (механика твердого тела), 1971, № 2, 155—157;
и) Об одной из нормальных форм в нелинейных колебаниях, Вестник МГУ, 1971, серия I, № 6, 92—98;
к) Einige Probleme nichtlinearer Schwingungen, ZAMM, I, 1971 51, № 6, 455—469; II, 1973 53, № 8, 453—462;
л) О связи радиальных и вертикальных колебаний частиц в циклических ускорителях, ПММ, 1971 35, вып. 6, 1096—1100;
м) О нормальных формах четвертого порядка в нелинейных колебаниях, Изв. АН СССР (механика твердого тела), 1972, № 1, 5—13;
н) Системы Ляпунова с демпфированием, ПММ, 1972 36, вып. 2, 344—348;
о) К задаче о перекачке энергии, Прикл. механика, изд. АН УССР, 1972 8, № 6, 83—89;
п) Прикладные методы в теории нелинейных колебаний, Сб. аннот. XIII IUTAM, «Наука», 1972, 103;
р) О нормальных формах третьего порядка нелинейных колебаний, Вестник МГУ, 1973, серия I, № 3, 87—94;
с) Практический способ вычисления нормальных форм в задачах нелинейных колебаний, ПММ, 1973 37, вып. 3, 407—413;
т) Колебания тяжелого твердого тела с закрепленной точкой около нижнего положения равновесия в общем случае, Изв. АН СССР (механика твердого тела), 1973, № 4;
у) Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний, Bull. Inst. DIN Iasi I, 1973 XIX (XXIII), fasc. 1—2, 113—120; II, fasc. 3—4, 127—134;
ф) О некоторых методах в теории колебаний (теория и приложения) Zacadnienia drgań nieliniowych, Nonlinear vibration problems, PWN, Warszawa, 1973 14, 329—340;
х) О колебаниях в системах третьего порядка в случае нейтральности линейного приближения, Изв. АН СССР (механика твердого тела), 1974 5, 21—27;
ц) Некоторые приложения нормальных форм в нелинейных колебаниях, Изв. Матем. ин-та Бълг. АН, 1974 XV, 285—290;
ч) Колебания в существенно нелинейных аналитических автономных системах. Сб. «Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления», «Наука», 1975, 293—300;
ш) Вычисление нормальных форм, Сб. «Матем. физика», «Наукова думка», Киев, 1976; 20, 64—71;
щ) Системы близкие к консервативным, Сб. «Матем. физика», «Наукова думка», Киев, 1977, 22.

323. Старжинский В. М., Байройтер И., Eine Methode zur Bestimmung periodischer Lösungen von Ljapunowschen Systemen, ZAMM, 1965, 45, № 6, 444—446.
324. Страбл Р. А., Колебания маятника при параметрическом возбуждении, Сб. перев. и обз. ин. лит., 1964, № 5 (87), 30—40.
325. Тондль А., О решении некоторых задач квазилинейных систем, Труды Междун. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, 1, Изд. АН УССР, Киев, 1963, 474—484.
326. Томас Дж., Ультрасубгармонический резонанс в системе Дюффинга, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1972, № 2, 31—36.

327. Урабе М., Метод Галёркина для нелинейных периодических систем, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1966, № 3, 3—34.
328. Фролов К. В., Нелинейные колебания двух твердых тел на упругих опорах с параметрически возбуждаемыми упругими связями, Sb. ref. 5. konf. Dynam. stroju, Liblice, 1968, 133—146.
329. Хайнбокел Дж., Страбл Р. Н., Периодические решения систем дифференциальных уравнений, обладающих симметрией, Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1966, № 1, 3—17.
330. Харламов П. В., Новые методы исследования задач динамики твердого тела, Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления, «Наука», 1975, 317—325.
331. Ходжаев К. Ш., Резонансный и нерезонансный случаи в задаче о возбуждении механических колебаний, ПММ, 1968 **32**, вып. 1, 36—45.
332. Худайбердиев Р., Цитович П. А., К теории переходных процессов в нелинейных системах, Изв. АН Узб. ССР, сер. техн. наук, 1972, № 2, 38—42.
333. Цельман Ф. Х., а) О «перекачке энергии» между нелинейно-связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка, ПММ, 1970 **34**, № 5, 957—962;
   б) Резонансы и некоторые случаи интегрируемости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, ДАН СССР, 1972 **207**, № 3, 560—662.
334. Черноусько Ф. Л., О резонансе в существенно нелинейной системе, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1963 **3**, № 1, 131—144.
335. Чешанков Б. И., а) Резонансные колебания специального двойного маятника, ПММ, 1969 **33**, вып. 6, 1112—1118;
   б) Резонансни трептения на две свързани махала, Теоретична и приложна механика, Бълг. АН, София, 1970 **I**, 1, 81—91;
   в) On the exact solution of a non-linear system, Докл. Болг. АН, 1970 **23**, 9, 1039—1042;
   г) О субгармонических колебаниях маятника, ПММ, 1971 **35**, вып. 2, 343—348;
   д) Резонансные колебания крутильного физического маятника, ПММ, 1972 **36**, вып. 1, 129—138.
336. Шиманов С. Н., а) К теории квазигармонических колебаний, ПММ, 1952 **XVI**, вып. 2, 129—146;
   б) К теории колебаний квазилинейных систем, ПММ, 1954 **XVIII**, вып. 2, 155—162;
   в) Об одном способе получения условий существования периодических решений нелинейных систем, ПММ, 1955 **XIX**, вып. 2, 225—228;
   г) Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности, ПММ, 1957 **XXI**, вып. 2, 244—252;
   д) Обобщение одного предложения Ляпунова о существовании периодических решений, ПММ, 1959 **XXIII**, вып. 2, 409—411.
337. Якубович В. А., а) Об ограниченности и устойчивости в целом решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1958 **121**, № 6, 984—986;
   б) Периодические и почти-периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями, ДАН СССР, 1966 **171**, № 3, 533—536.
338. Bader W., Ein neues Verfahren zur Mathematischen Behandlung gewisser nichtlinearer Schwingungen, Труды Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, Изд. АН УССР, Киев, 1963 **1**, 73—85.
339. Bellin A. I., Non autonomous systems, Advances in Applied Mechanics, Academic Press, Inc., N. Y., 1953, 295—320.
340. Bendixson I., Sur les corbes de finies par des équations différentielles, Acta Mathem., 1901 **24**, 1—88.

341. Bradbury T. C., Brintzenhoff A., Periodic solutions of a non-linear differential equation, J. Math. Phys., 1971 **12**, № 7, 1269 — 1275.
342. Brand L., Periodic solutions of linear differential equations, Arch., Ration. Mech. and Anal., 1968 **27**, № 5, 365—372.
343. Braunbek W., Sauter E., Schwebungen schwach gekoppelter nichtlinearer Systems, Zeitschr. für. Phys., 1960 **160**, 232—246.
344. Cartwright M. L., a) Forced oscillations in nonlinear systems, Contr. to the theory of nonlin. oscill., Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press, 1950 **1**, № 20, 149—241;
b) Some aspekts of the theory of nonlinear vibrations; Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954, Cröningen, Amsterdam, 1956 **4**, 71—76.
345. Castro A., a) Sulle oscillazioni non-lineari dei sistemi in uno o più gradi di libertá. Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953 **22**, № 2, 294—304;
b) Sopra l'equazione differenziale delle oscillazioni non-lineari; Riv. mat. Univ. Parma, 1953 **4**, № 1—2, 133—143.
346. Cooke R. H., Struble R. A., a) On the existence of periodic solutions and normal mode vibrations of nonlinear systems, Quart. Appl. Math., 1966 **24**, № 3, 177—193;
b) Perturbation of normal mode vibrations, Intern. Journ. of Nonl. Mech., 1966 **1**, № 2, 147—155.
347. Den Hartog J. P., John Orr memorial lecture: Recent cases of mechanical vibration, S. Afric. Mech. Engr., 1969 **19**, № 3, 53—68.
348. Dulac H., Solutions d'un systeme d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulieres, Bull. Soc. Math. de France, 1912 **40**, 324—383.
349. Dysthe K. B., Gudmestad O. T., On resonance and stability of conservative systems, Journ. Math. Phys., 1975 **16**, № 1, 56—64.
350. Forbat N., Strenge Untersuchung einer periodischer Lösung einer nichtlinearer Differentialgleichung, Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss., Berlin, Kl., Math., Phys. und Techn., 1965, № 1, 245—250.
351. Gilchrist A. O., The free oscillations of conservative quasilinear systems with two degrees of freedom, Internat. of Mech. Sci., 1961 **3**, 286—311.
352. Greenbeerg H. J., Yang Ta-Lun, Modal subspaces and normal mode vibrations, Int. Journ. of Noul. Mech., 1971 6, 311, 326.
353. Gutowski R., A method for investigating nonlinear perturbations of motion of a mechanical system and its influence on the properties of solutions of the equations of motion, Archiwum mechaniki stosowanej, Warszawa, 1972 **24**, № 2, 169—177.
354. Gutowski R., Radziszewski B., Asymptotic behaviour and properties of solutions of a system of non-linear second order ordinary differential equations describing motion of mechanical systems, Archiwum mechaniki stosowanej, Warszawa, 1970 **22**, № 6, 675—694.
355. Hale J. K. a) Periodic solutions of non-linear systems of differential equations, Riv. mat. Parma, 1954 **5**, № 5, 281—311;
b) Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of systems of weakly nonlinear first and second order differential equations, J. Math. Mech., 1958 **7**, 163—171.
356. Hale J. K., Seifert G., Bounder and almost periodic solutions of singularly perturbed equations, Journ. of math. anal. and appl., 1961 **3**, № 1, 18—24.
357. Hale J. K., Stokes A. P., Behavior of solutions near integral manifolds, Arch. for mat. mech. and anal., 1960 6, № 2, 133—170.
358. Hayashi C., a) Subharmonic oscillations in nonlinear systems, Journ. Appl. Phys., N. Y., 1953 **24**, № 5, 521—529;

b) Higher harmonic oscillations in nonlinear forced systems, Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1965, № 148, 267—284.
359. Heinbockel J. H., Struble R. A., Resonant oscillations of an extersible pendulum, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP), 1963 **14**, fasc. 3, 262—269.
360. Heinrich W., Schmidt G., Zum Einflub nöherer Näherungen bei parameterrerregten Schwingungen, Monatsberichte der DAW, Berlin, 1971 13, № 8, 557—561.
361. Hsieh D. Y., Variational methods and nonlinear forced oscillations, Journ. Math. Phys., 1975 16, № 2, 275—280.
362. Kinoshita H., Теория нелинейных колебаний для неконсервативных систем, Токё тэммондай хо, Tokyo Astron. Observ. Rept., 1972 **15**, № 4, 789—812.
363. Malgarini G., Studio asintotico di un sistema concernente le oscillazioni non lineari, Rend. Ist. Lombardo sci. e lettere. Sci. mat., fis., chim. e geol., 1961, A95, № 1, 131—146.
364. Mangeron D., Chaléat R., Théorie générale de la synchronisation et applications, Note II. Conditions de stabilité dans la théorie générale de la synchronisation. Bul. Inst. Politechn., DIN Iasi, serie noua, 1965, II (15), № 3—4, 301—306.
365. Massaglia F., Sulle vibrazioni quasi armoniche di un sistema dissipativo con elastita constanta a tratti, Atti Semin., mat. a fis., Univ. Modena, 1953—54 **7**, 167—181.
366. Mercer C. A., Rees P. L., Fahy F. J., Energy flow between two weakly coupled oscillators subject to transient excitation. J. Sound and Vibr., 1971 15, № 3, 373—379.
367. Mettler E., a) Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. Ing.— Archiv, 1959 **XXVIII**, 213—228;
b) Schwingungs- und Stabilitätsprobleme bei mechanischen Systemen mit harmonischer Erregung, ZAMM, 1965 **45**, № 7—8, 475—484;
c) Stability and vibration problems of mechanical systems under harmonic exitation, Dynam. Stabil. Struct., Pergamon Press, N. Y., 1967, 169—188;
d) Über höhere Näherungen in der Theorie des elastischen Pendels mit innerer Resonanz, ZAMM, 1975 55, H. 2, 69—82.
368. Minorsky N., Sur les systèmes non-autonomes, Colloq. internat. Centre ant rech. scient., 1965, № 148, 83—94.
369. Moser J., Perturbation theory for almost periodic solutions for undamped nonlinear differential equations, Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Acad. Press, N. Y., 1963, 71—79.
370. Muszunska A., Radziszewski B., Szadkowski J., Ziemba S., Some problems of the theory of vibrations, Zagadnienia, drgań nielinowych, 1972 **13**, 7—20.
371. Nixdorff K., Zur iterativen Bestimmung nichtlinearer Schwingungen, ZAMM, 1974 54, H. 12, 819—822.
372. Pak C. H., Rosenberg R. M., On the existence of normal mode vibrations in nonlinear systems, Quarterly of Appl. Math., 1968 **26**, № 3, 403—413.
373. Pol B. van der, a) A theory of the amplitage of free ans forced triode vibrations, Radio Rev., 1920 **1**, 701, 754;
b) The nonlinear theory of electric oscillations, Proc. of the IRE, 1934 **22**, 1051—1086.
374. Roberson R. E., On an iterative method for nonlinear vibrations, Journ. Appl. Mech., 1953 **20**, № 2, 237—240.
375. Rosenberg R. M., a) On normal mode vibrations, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1964 **60**, № 3, 595—611;

b) On the existence of normal mode vibrations of nonlinear systems with two degrees of freedom, Quarterly of Appl. Math., 1964 **22**, № 3, 217—234;

c) On a geometrical method in nonlinear vibrations, Colloq. internat. Centre nat. rech. Scient., 1965, № 148, 69—79;

d) Steady-state forced vibrations, Int. Journ. of Nonl. Mech., 1966 **1**, № 2, 95—108.

376. Rosenberg R. M., Atkinson C. P., On the natural modes and their stability in nonlinear two-degrees of freedom systems, Journ. of Appl. Mech., 1959 **26**, 377—385.

377. Rosenberg R. M., Hsu C. S., On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degrees of freedom, Труды Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, Изд. АН УССР, Киев, 1963, **1**, 380—416.

378. Schmidt G., Weidenhammer F., Gedämpfte erzwungene Schwingungen in rheolinearen Systemen, Math. Nachr., 1964 **27**, № 3/4, 215—228.

379. Schmidt G., a) Zur Stabilität der Resonanzlösungen nichtlinearer Schwingungsgleichungen, Nova Acta Leopoldina, neue Folge, Leipzig, 1969 **34**, № 187, 61—68;

b) Dampfungseinflusse bei parameter- und zwangserregten Schwingungen, Zbornik Radova X Jugoslovenskog Kongresa Mehaniku, 1970, 489—503.

380. Schmidt G., Heinrich W., Über nictlineare Parameter-resonanzen, ZAMM, 1972 **52**, № 3, 167—171.

381. Schmitt K., Periodic solutions of nonlinear second order differential equations, Math. Zeitschr., 1967 **98**, 200—207.

382. Sedziwy S., On periodic solutions of a certain third-order non-linear differential equation, Ann. Polon. Matem., 1965 **17**, 147—154.

383. Sewin E., On the parametric excitation of pendulum-tipe vibration absorber, J. of Appl. Mech., 1961 **28**, Trans. ASME, Ser. E, 1961 83, 330—334.

384. Sibuya Y., a) Nonlinear ordinary differential equations with periodic coefficients, Funcialaj Ekvacioj (Ser. Int.), 1958 **1**, 77—132;

b) On perturbations of periodic solutions, J. Math. Mech., 1960 **9**, 771—782.

385. Skalak R., Yarymovych M. I., Subharmonic oscillations of a pendulum, J. Appl. Mech., 1960 **27**, 159—164.

386. Skowronski J., Ziemba S., Pewne uwagi na marginesie jakościowej teorii drgań nieliniowych, Ach. automat. i telemech., 1963 **8**, № 1, 115—124.

387. Stoker J. J., a) Mathematical methods in nonlinear vibration theory, Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953 **2**, 28—55;

b) Non-linear vibrations of a systems with several degree of freedom, Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann. Arbor, Mich., 1954, N. Y., 1955, 33—43.

388. Stokes A., On the approximation of nonlinear oscillations, J. Dif. Equat., 1972 **12**, № 3, 535—558.

389. Stoppelli F., Su un'equazione differenziale della mechanica dei fili., Rend. Accad. Sc. Fiz. Mat., Napoli, 1952 **4**, № 9, 109—114.

390. Strüble R. A., a) A discussion of the Diffing problem, J. Soc. Industr. Appl. Math., 1963 **11**, № 3, 659—666;

b) Oscillations of a pendulum under parametric excitation, Quart. of Appl. Math., 1963 **XXI**, № 2, 121—131;

c) A note on damped oscillations in nonlinear systems, SIAM Rev., 1964 **6**, № 3, 257—259,

d) Some recent contributions to the theory of nonlinear ordinary differential equations, Recent Adv. Eng. Sci., N. Y., 1968 3, 233—241.

391. Struble R. A., Fletcher J. E., General perturbational solution of the harmonically forced van der Pol equation, J. Math. Phys., 1961 2, 880—891.

392. Struble R. A., Harris T. C., Motion of relativistic damped oscillator, J. of Math. Phys., 1964 5, № 1, 138—141.

393. Struble R. A., Heinbockel J. H., a) Energy transfer in a beam-pendulum system, J. of Appl. Mech., 1962, 29, Trans. ASME, Ser. E, 1962, 590—592;
b) Resonant oscillations of a beam—pendulum system, J. of Appl. Mech., 1963 30, 181—188.

394. Struble R. A., Warmbrod G. K., Free resonant oscillations of a conservative two degree of-freedom system, J. of Frankl. Int., 1964, 278, № 3, 195—209.

395. Struble R. A., Yionoulis S. M., General perturbation solution of the harmonically forced Duffing equation, Arch. for Rat. Mech. and Anal., 1962 9, 422—438.

396. Szemplinska-Stupnicka W., a) Postacie drgań przy rezonanzie nieliniowego ukladu o dwoch stopniach swobody, Archiwum Budowych maszyn, Warszawa, 1962 IX, № 1, 123—144;
b) Normal modes of a nonlinear two degree of freedom system and their properties, Там же, 1963 X, № 1, 35—56;
c) Almost-periodic vibration of certain autonomous weaklynonlinear multiple degree of freedom systems. Там же, 1965 XII, № 2, 213—227;
d) On the normal coordinates in an analysis of steady-state forced vibrations of a nonlinear multiple-degree of freedom system, Archiwum mechaniki stosowanej, Warszawa, 1969 5, № 21, 603—621;
e) On the phenomenon on the combination type resonance in non-linear two degree of freedom systems, Int. J. Non-Linear Mechanics, 1969 4, 335—359;
f) On the asymptotic, averaging and Ritz method in the theory of steady-state vibrations of non-linear systems with many degrees of freedom, Archiwum mechaniki stosowanej, Warszawa, 1970 2, № 22, 161—181;
g) On the averaging and W. Ritz methods in the theory of nonlinear resonances in vibrating systems with multiple degrees of freedom. Там же 1972, 24, 1, 67—88.

397. Ta-lun Yang, Symmetry properties and normal mode vibrations, Int. Journ. of Nonl. Mech., 1968 3, № 3, 367—381.

398. Ta-lun Yang, Rosenberg R. M., On forced vibrations of a particle in the plane, Int. Journ. of Nonl. Mech., 1968 3, № 4, 47—63.

399. Tse F. S., Morse I. E., Hinkle R. T., Mechanical vibrations, Prentice-Hall, London, 1963.

400. Urabe M., Periodic solutions of differential systems; Galerkin's procedure and the method of averaging, J. Diff. Equat., 1966 2, 265—280.

401. Villari G., Contributi allo studio delle'esistenza di soluzioni periodiche per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, Ann. matem, pura ed appl., 1965 4, № 69, 171—190.

402. Wasow W., Sur les problemes de perturbation singuliers dans la théorie des vibrations non linéaires, Publs. scient. et techn. Ministère air, 1952, № 281, 207—222.

403. Wu Lee M. H., Subharmonic resonance of a system having non-linear spring with variable coefficient, Proc. First U. S., Nat. Congr. Appl, Mech., Publ. Amer. Soc. Mech. Engrs, N. Y., 1952, 147—153.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ