

Н.А.СЛЁЗКИН

**ДИНАМИКА
ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ**

Н. А. СЛЁЗКИН

ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*Допущено
Главным управлением университетов,
экономических и юридических вузов
Министерства высшего образования СССР
в качестве учебника
для государственных университетов.*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1955

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
Глава I. Скорости деформаций частицы. Компоненты напряжений	25
§ 1. Основные признаки различия агрегатных состояний тела	25
§ 2. Гипотеза сплошности жидкой среды	26
§ 3. Метод осреднения	28
§ 4. Понятие вязкости жидкости	30
§ 5. Распределение скоростей в частице	35
§ 6. Компоненты тензора скоростей деформации частицы	38
§ 7. Главные скорости удлинений	42
§ 8. Компоненты тензора скоростей деформации в криволинейных координатах	47
§ 9. Компоненты напряжений	51
§ 10. Главные напряжения	54
§ 11. Обобщённая гипотеза Ньютона	59
§ 12. Различные виды сред	66
Глава II. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости	71
§ 1. Уравнение неразрывности	71
§ 2. Уравнение переноса количества движения	74
§ 3. Дифференциальные уравнения движения среды в напряжениях	78
§ 4. Уравнение переноса полной энергии	83
§ 5. Уравнение изменения внутренней энергии	88
§ 6. Дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости	90
§ 7. Начальные и граничные условия для вязкой несжимаемой жидкости	93
§ 8. Замечания об общей задаче гидродинамики вязкой жидкости	97
Глава III. Общие свойства движения вязкой жидкости	100
§ 1. О невозможности безвихревого движения вязкой жидкости	100
§ 2. Теорема о рассеянии энергии	101
§ 3. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости	106
§ 4. Интегральные формулы для результирующего воздействия жидкости на поступательно движущееся в ней тело	111

Глава IV. Случай точного интегрирования дифференциальных уравнений установившегося движения вязкой жидкости	115
§ 1. Общая постановка задачи о прямолинейно-параллельном установившемся движении жидкости	115
§ 2. Аналогия задачи о прямолинейно-параллельном движении вязкой жидкости с задачами вращения идеальной жидкости и с задачей кручения призматического бруса	118
§ 3. Прямолинейно-параллельное движение жидкости между двумя параллельными стенками	121
§ 4. Прямолинейно-параллельное движение вязкой жидкости при наличии свободной границы	124
§ 5. Прямолинейное движение вязкой жидкости в цилиндрической трубе	126
§ 6. Прямолинейное движение вязкой жидкости в круглой кольцевой трубе	130
§ 7. Общая постановка задачи об установившемся круговом движении вязкой несжимаемой жидкости	132
§ 8. Круговое движение между двумя вращающимися цилиндрами	134
§ 9. Движение жидкости между искривлёнными стенками . . .	137
§ 10. Плоско-параллельное радиальное течение вязкой жидкости .	139
§ 11. Вращение безграничной плоскости	146
§ 12. Случай импульсного источника	150
Глава V. Движение вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Метод Стокса	155
§ 1. Приближённые уравнения Стокса	155
§ 2. Плоско-параллельное установившееся движение вязкой жидкости	157
§ 3. Движение к круглого цилиндра	161
§ 4. Парадокс Стокса	164
§ 5. Общие формулы для результирующего воздействия жидкости на круглый цилиндр	170
§ 6. Движение жидкости в плоском диффузоре	174
§ 7. Движение шара в неограниченной жидкости	177
§ 8. Вращение шара в вязкой жидкости	184
§ 9. Движение вязкой жидкости в коническом диффузоре . . .	186
Глава VI. Гидродинамическая теория смазки	190
§ 1. Теория Н. П. Петрова	190
§ 2. Приближённые уравнения Рейнольдса для смазочного слоя .	193
§ 3. Дифференциальное уравнение для давления в слое	197
§ 4. Сдавливание слоя параллельными плоскостями	200
§ 5. Слой смазки между наклонными пластинками	203
§ 6. Теория Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина	208
§ 7. Качение цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого вещества	214
§ 8. Элементарная гидродинамическая аналогия прокатки . . .	218
§ 9. Обобщённые уравнения Рейнольдса для слоя	221

Глава VII. Движение вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Метод Озеена	225
§ 1. Обобщённые уравнения Стокса	225
§ 2. Построение решений обобщённых уравнений Стокса	228
§ 3. Проникание пластинки в вязкую среду	232
§ 4. Задача об обтекании цилиндра	234
§ 5. Задача об обтекании шара	241
Глава VIII. Теория пограничного слоя	253
§ 1. Дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое	253
§ 2. Асимптотический пограничный слой на пластинке	259
§ 3. Интегральные соотношения	264
§ 4. Пограничный слой при обтекании выпуклого контура	268
§ 5. Приближённый метод решения уравнений пограничного слоя	272
§ 6. Приближённые уравнения теории пограничного слоя	278
§ 7. Распространение тонкой ламинарной струи	282
§ 8. Применение теории пограничного слоя к вопросу о затухании вращения тела в потоке	293
§ 9. Пограничный слой на теле вращения	295
Глава IX. Неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости	301
§ 1. Общая постановка задачи о прямолинейно-параллельном неустановившемся течении вязкой жидкости	301
§ 2. Движение неограниченной плоскости в вязкой жидкости	306
§ 3. Диффузия вихревого слоя	315
§ 4. Движение между неограниченными параллельными стенками	319
§ 5. Задача Громеки о движении жидкости в цилиндрической трубе	322
§ 6. Неустановившееся круговое движение вязкой жидкости	326
§ 7. Вращение круглого цилиндра в неограниченной жидкости	330
§ 8. Диффузия вихревой нити	333
§ 9. Вращение сферы, наполненной жидкостью	337
§ 10. Движение шара в неограниченной вязкой жидкости	341
Глава X. Развитие ламинарного движения жидкости	350
§ 1. Развитие ламинарного движения между параллельными стенками	350
§ 2. Развитие ламинарного движения в круглой цилиндрической трубе	357
§ 3. Развитие ламинарного течения жидкости в плоском диффузоре	362
§ 4. Развитие ламинарного движения жидкости в коническом диффузоре	374

Глава XI. Устойчивость ламинарных течений	385
§ 1. Общая постановка вопроса об устойчивости	385
§ 2. Общие уравнения для возмущённого движения	388
§ 3. Исследование устойчивости ламинарного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей	398
§ 4. Об устойчивости ламинарных течений между параллельными стенками и в пограничном слое	412
§ 5. Об устойчивости кругового движения между двумя бесконечными цилиндрами	422
§ 6. Об устойчивости движения взвешенной частицы в ламинарном потоке	427
Глава XII. Турбулентное движение	433
§ 1. Два режима течения вязкой жидкости	433
§ 2. Метод осреднения	438
§ 3. Дифференциальные уравнения осреднённого движения жидкости	452
§ 4. Теоремы о рассеянии энергии для турбулентного движения	458
§ 5. Полуэмпирические теории турбулентности	465
§ 6. Установившееся турбулентное движение жидкости в плоской и круглой цилиндрической трубе	475
§ 7. Турбулентный пограничный слой	484
§ 8. Свободные турбулентные движения	493
§ 9. Структура турбулентного изотропного потока	500
Именной указатель	512
Предметный указатель	514

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга возникла из лекций, читанных автором в течение ряда лет для студентов механико-математического факультета Московского университета, специализирующихся по гидродинамике. Это обстоятельство не могло не отразиться как на подборе подлежащих изложению вопросов, так и на характере самого изложения этих вопросов.

Давая в лекциях исторический обзор развития динамики вязкой жидкости, мы обращали внимание слушателей на то, что основы этой науки были заложены почти одновременно с основами механики упругих деформаций твёрдого тела и при этом одними и теми же выдающимися учёными — механиками и математиками. Это обстоятельство нельзя считать случайным, хотя бы на том основании, что согласно развиваемой в последнее время кинетической теории жидкости строение и поведение жидкости намного ближе к строению и поведению твёрдого тела, чем к строению и поведению газов. Связь развития динамики вязкой жидкости с развитием теории деформаций твёрдого тела можно обнаружить не только в первые моменты становления этих наук, но и в последующие отдельные периоды их развития.

В связи с этой особенностью развития динамики вязкой жидкости мы и попытались исходные положения этой науки изложить в I главе книги примерно в том же плане, в котором излагаются исходные положения теории деформации твёрдого тела. В последующем изложении мы ограничились рассмотрением лишь тех вопросов и задач, для которых достаточно одних только механических предпосылок. По этой причине в книгу не включены задачи, для решения которых необходимо учитывать, помимо вязкости, ещё свойства сжимаемости и теплопроводности жидкости.

Далее, говоря о нелинейном характере исходных дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, мы подчёркивали неизбежность приближённых методов упрощения этих уравнений применительно к целым группам конкретных задач. Излагая эти приближённые методы, мы старались подметить преемственность и некоторую логическую последовательность в развитии этих методов.

Наконец, при изложении решений отдельных задач мы преследовали и чисто учебные цели, а именно стремились не только ознакомить читателя с методами решения задач, но и по возможности привить навыки: 1) к отбору основных факторов в данной конкретной механической или технической задаче, 2) к приведению этой задачи к краевой задаче теории соответственных дифференциальных уравнений и 3) к проведению всех вычислительных операций в определённой последовательности вплоть до анализа полученного решения и механического его истолкования. Такая методика вынуждала нас мириться с неизбежными повторениями отдельных исходных предположений и отдельных вычислений при решении задач в каждой главе.

Мы вполне сознаём, что данная книга не лишена многих недостатков, что в ней, в частности, не затрагивается ряд проблем техники, в которых приходится всё более и более считаться с влиянием вязкости жидкости, газа или пластичных материалов. Но, учитывая чисто учебную цель данной книги, мы не можем считать этот недостаток главным, ибо учить всё же надо в первую очередь основам науки и небольшому количеству её приложений.

Автор заранее приносит свою благодарность за указание других конкретных недостатков настоящей книги.

Н. Слёзкин

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика — наука о движении жидкости. Предметом гидродинамики служит круг тех реальных явлений, к которым относятся не только течения жидкости и газа, встречающиеся в природе, но и весьма разнообразные течения жидкостей и газов, используемые во многих отраслях бурно развивающейся техники. Основная цель гидродинамики состоит в изучении качественных и количественных закономерностей течений жидкостей и газов, позволяющем, с одной стороны, повышать полезный эффект уже используемых в технике течений, а с другой стороны, расширять возможности использования других видов течений жидкостей.

По своему происхождению и по своим основным методам исследований гидродинамика принадлежит к ряду тех наук, которые именуются *механическими*. В настоящее время механику уже нельзя рассматривать как одну науку, а необходимо рассматривать как постепенно расширяющийся со временем ряд наук, изучающих одну и ту же простейшую форму движения и взаимодействия материальных тел, но в разнообразных качественных проявлениях. Основными количественными мерами простейшей формы движения служат *перемещение, скорость и ускорение*, а количественными мерами простейшей формы взаимодействия служат *сила, момент силы, напряжение, импульс силы и работа силы*. Поскольку в механических науках используются одни и те же количественные меры движения и взаимодействия, постольку у этих наук имеются общие черты и общие методы исследований. Различие же между отдельными механическими науками обусловлено, с одной стороны, различием *качественных состояний* тела или среды в процессе движения и взаимодействия и, с другой стороны, различием тех областей техники, для обслуживания которых разрабатывается та или иная механическая наука.

Гидродинамика принадлежит к той группе механических наук, в которых изучается *деформируемая среда*. Различие между деформируемыми средами проводится не только по физическим признакам агрегатного состояния, но и по механическим признакам, к которым относятся степень деформируемости под действием внешних сил и особенности внутренних сил взаимодействия частиц среды. Так, например, для упругой деформируемой среды мерами деформируе-

мости могут служить вектор перемещения и тензор самих деформаций, тогда как для жидкой деформируемой среды, частицы которой обладают большей подвижностью, такие меры деформируемости не могут быть пригодными и вместо них используются вектор *скорости перемещения* и *тензор скоростей деформаций*. Для упругой среды напряжённое состояние в каждой точке ставится в зависимость от тензора самих деформаций. Для жидкости и газа в этом отношении дело обстоит совершенно иначе. Во-первых, при равновесии жидкости и газа под действием внешних сил или при наличии замкнутого сосуда напряжённое состояние характеризуется только одним *давлением* и вопрос о распределении деформаций даже и не возникает. Во-вторых, при движении жидкостей и газов взаимодействие частиц осуществляется преимущественно с помощью давления, величина которого не ставится в прямую связь с состоянием деформаций в данной точке, а ставится в зависимость в некоторых случаях от плотности и температуры. И только в отношении дополнительных сил взаимодействия частиц жидкости и газа при их движении, которые именуется *напряжениями вязкости*, дело обстоит примерно так же, как и с упругими напряжениями в упругой среде. Различие состоит лишь в том, что тензор напряжений вязкости ставится в зависимость не от тензора самих деформаций, а от тензора скоростей деформаций.

Гидродинамика в ходе своего развития, по мере накопления исследований и решений конкретных задач, связанных с запросами соответственных областей техники, по мере расширения связей с различными разделами физики, химии и другими науками, в свою очередь также разветвлялась и продолжает разветвляться на отдельные ветви. Некоторые из них переросли в самостоятельные науки, такие, как *аэромеханика*, *газовая динамика* и др. Различие между отдельными гидродинамическими науками обусловлено различием дополнительных исходных предпосылок, заимствованных из других наук, и различием запросов соответственных областей техники.

Если ограничиться теми предпосылками, которые могут быть взяты только из одной науки — механики, то можно выделить две ветви гидродинамики: 1) *гидродинамику идеальной несжимаемой жидкости* и 2) *гидродинамику вязкой несжимаемой жидкости*. Развитие исследований по каждой такой ветви происходило обособленно и различными путями. Такое различие развития указанных ветвей гидродинамики обусловлено многими причинами и прежде всего различием служебной роли в практике человека, которую играет, с одной стороны, давление жидкости, а с другой — *внутреннее трение* жидкости. Свойство жидкости оказывать давление на стенки как при равновесии, так и при движении позволяло и позволяет использовать это давление как для преодоления действия силы тяжести, так и для приведения в движение соответственных двигателей, механизмов и приборов. С такой полезной ролью давления

жидкости люди ознакомились рано, о чём свидетельствуют факты использования ещё в древнее время таких гидравлических приспособлений, как пожарный насос, гидравлические часы, гидравлический орган и др. Развитие этой техники предопределило собой и появление научного трактата Архимеда «О плавающих телах», в котором впервые вводится понятие давления как основной характеристики взаимодействия частиц жидкости и используется предположение о несжимаемости жидкости. На основе этих двух механических предпосылок на первых порах начала развиваться *гидростатика*, для развития которой мог быть использован математический аппарат геометрии Эвклида, а затем, после того как были созданы основы механики и основы дифференциального и интегрального исчисления, начала развиваться и *гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости*. Таким образом, более раннее возникновение гидростатики и гидродинамики идеальной жидкости обусловлено прежде всего тем, что потребности практики человека вынуждали использовать давление жидкости в качестве активного фактора, по этой же причине происходило и более интенсивное развитие указанных разделов гидродинамики и в последующее время.

Совершенно иначе обстояло дело с возникновением *гидродинамики вязкой жидкости*, учитывающей, помимо давления, *внутреннее трение* частиц жидкости и *внешнее трение* частиц о твёрдые стенки. Эти дополнительные силы не могли быть использованы в практике человека в качестве активного фактора, и поэтому знакомство с реальным проявлением этих сил могло произойти значительно позднее, чем знакомство с проявлением давления жидкости.

Из истории развития техники в период так называемой эпохи возрождения XV и XVI вв. можно установить, что устройство каналов, водопроводов и других гидротехнических сооружений побуждало отдельных исследователей, в том числе Микель Анджело, Леонардо да Винчи и др. проводить наблюдения и измерения (с помощью двойного поплавка) скоростей течения воды в каналах. С помощью этих наблюдений и измерений можно было обнаружить различие скоростей движения воды по мере удаления от свободной поверхности ко дну канала и по мере удаления от средней линии канала к боковым стенкам. В этих случаях и могло произойти знакомство с проявлением действия внешнего трения и внутреннего трения частиц жидкости. Однако потребности практики тогда ещё не вынуждали к изучению самих закономерностей трения в жидкости. Это случилось позднее в связи с необходимостью учёта *сопротивления среды* при движении ядер орудий.

Вся вторая часть гениального творения Ньютона «Математические начала натуральной философии» посвящена изучению движения тел с учётом сопротивления среды. В ней имеется много ссылок на результаты наблюдений и непосредственных опытов. В этой части книги впервые была сформулирована та гипотеза, которая послужила

исходным началом для всей теории движения жидкости с учётом её вязкости. Эта гипотеза сформулирована следующим образом¹⁾: «Сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости, при прочих одинаковых условиях предполагается пропорциональным скорости, с которою частицы жидкости разъединяются друг от друга». В качестве примера рассматривается круговое движение в отделе IX, второй абзац которого начинается словами: «так как жидкость однородная, то взаимодействия слоёв друг на друга (по гипотезе) будут пропорциональны их перемещениям друг по другу и величине тех поверхностей, по которым взаимодействия происходят». Таким образом, сам Ньютон рассматривал предположение о пропорциональности напряжения вязкости относительной скорости движения соприкасающихся частиц только как гипотезу. В рассматриваемой задаче о круговом движении жидкости условие равномерности движения взято Ньютоном для сил, а не для моментов; в результате этого решение задачи, полученное Ньютоном, было ошибочным. Впервые на эту ошибку указал Стокс спустя 158 лет после выхода книги Ньютона.

Хотя гипотеза Ньютона о вязкости жидкости была выдвинута ещё до того, как начали закладываться основы науки о движении жидкости вообще, всё же развитие этой науки не пошло по линии одновременного учёта и давления и вязкости жидкости. В течение более полутора столетий гипотеза Ньютона о вязкости жидкости оставалась без употребления, и наука о движении жидкости развивалась только по линии учёта одного давления. Такой ход развития гидродинамики следует объяснить в первую очередь тем качественным различием служебных ролей в развитии техники давления и вязкости, о котором мы говорили выше. Кроме того, с развитием техники увеличивалось количество тех областей практики, в которых давление жидкости или газа использовалось в качестве активного фактора, тогда как необходимость считаться с наличием внешнего и внутреннего трения жидкости начала только обнаруживаться в небольшом числе случаев. Наконец, такой ход развития гидродинамики следует объяснить и тем, что для учёта одного лишь давления жидкости все возможности были подготовлены уже на первых ступенях развития общей механики и высшей математики, тогда как для учёта вязкости такие возможности стали создаваться значительно позже.

С того момента, как были созданы основы общей механики и дифференциального исчисления, к концу XVII в., созрели все возможности для развития *гидростатики* и *гидродинамики идеальной жидкости*. Общие уравнения равновесия жидкости с учётом действия массовых сил, содержащие частные производные от неизвестной функции давления, были даны в 1743 г. в работе Клеро «Теория

¹⁾ Ньютон И., Математические начала натуральной философии, перев. с лат. А. Н. Крылова (А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. VII, стр. 486).

фигуры Земли». Открытие принципа Даламбера, сводящего задачи о движении к задачам о равновесии сил, позволило тому же Даламберу в 1752 г. в работе «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» от уравнений равновесия жидкости перейти весьма просто к дифференциальным уравнениям движения жидкости с учётом одного лишь давления. Однако вполне законченную форму уравнения движения идеальной жидкости получили лишь в 1755 г. в мемуаре Эйлера «Общие принципы движения жидкости», в котором впервые получает своё математическое оформление в виде уравнения неразрывности закон М. В. Ломоносова о сохранении массы. Присоединение к уравнениям движения уравнения неразрывности позволило замкнуть систему дифференциальных уравнений для случая несжимаемой идеальной жидкости в том смысле, что число уравнений стало совпадать с числом неизвестных функций. При этом в качестве неизвестных функций стали рассматриваться проекции вектора скорости и давление, отнесённые не к фиксированной частице жидкости, а к фиксированной геометрической точке. Таким образом, переход от общих уравнений равновесия жидкости к общим уравнениям движения жидкости с учётом одного лишь давления на основе предположения о несжимаемости жидкости произошёл в течение весьма короткого времени — с 1743 по 1755 г. Для этого перехода потребовалось только введение в рассмотрение, помимо скалярного поля давлений, векторного поля скоростей. При этом были использованы гипотеза о сплошности жидкой среды и гипотеза о непрерывности и дифференцируемости функций давления и проекций вектора скорости.

Развивая гидродинамику идеальной жидкости, многие исследователи всё же не только допускали возможность существования трения жидкости о стенки, но и считали наличие этого трения основной причиной расхождения теоретических результатов с результатами наблюдений и измерений. Так, например, Д. Бернулли в своей книге «Гидродинамика» на страницах 58—59 после проведения сравнения результатов расчёта с результатами измерений для случая течения в коленчатой трубке пишет следующее: «Эти огромные расхождения я приписываю действию главным образом прилипания воды к стенкам трубки, которое в таких случаях может играть весьма большую роль, ибо когда я пользовался трубкой с диаметром, немногим больше двух линий, тогда получалось более лучшее совпадение, чем для трубки с большим диаметром. Кроме того, вероятно, что и кривизна трубки в её нижней части также несколько уменьшает скорость движения воды».

Однако про Эйлера известный французский механик и гидравлик Прони¹⁾ в 1804 г. писал следующее: «Заслуживает сожаления

¹⁾ Prony, Recherches phisico-mathem. sur la théorie des eaux courantes, Paris, 1804.

и даже удивления то обстоятельство, что прославленный Эйлер, который на страницах своих обширных трудов отводит столько внимания разрешению физико-математических проблем и их применению к практическим вопросам, не попытался пересмотреть теорию жидкости, принимая во внимание сцепление молекул и некоторого рода трение; даже если бы он включил в анализ эти факторы в чисто гипотетической форме, было бы интересно знать его мнение об их влиянии; я не знаю, однако, ни одной статьи, где бы эти факторы упоминались».

Приведённые выше слова Д. Бернулли и Прони свидетельствуют о том, что многие исследователи осознавали необходимость учёта внешнего и внутреннего трения при движении жидкости, но не находили ещё возможности для такого учёта в самих уравнениях движения жидкости.

Развитие техники в XVIII столетии вынуждало многих учёных (Купле, Шези, Дюбуа, Боссю, Жирар и др.) проводить экспериментальные исследования над течениями воды в трубах и каналах. Некоторые из этих исследователей (Шези и Боссю) пытались составлять уравнения равномерного движения воды в канале с учётом сопротивления трения о стенки в предположении, что это сопротивление пропорционально квадрату средней по сечению канала скорости. В конце XVIII столетия были опубликованы результаты экспериментальных исследований Кулона по определению сопротивления трения с помощью крутильных колебаний диска в жидкости.

Все эти экспериментальные исследования, несомненно, послужили мощным толчком к тому, чтобы предпринимать попытки к теоретическим исследованиям по вопросу о составлении дифференциальных уравнений движения жидкости с учётом не только давления, но и внутреннего трения. К этому времени стали открываться возможности для теоретических исследований такого рода в связи с развитием *механики упруго деформируемого тела*. Накопление исследований и решений конкретных задач по теории изгиба брусьев, по теории кручения стержней и по теории колебаний стержней и пластинок на основе использования закона Гука о пропорциональности напряжений деформациям создало все предпосылки не только к тому, чтобы установить общие уравнения равновесия и колебаний упругих тел, но и к тому, чтобы закон Гука в несколько изменённой форме распространить на жидкость и на основе этого создать дифференциальные уравнения движения жидкости с учётом внутреннего трения. Этим обстоятельством и объясняется тот факт, что создатели математической *теории упругости*—Навье, Пуассон, Коши, Сен-Венан и Стокс оказались одновременно и создателями математической теории *движения вязкой жидкости*.

Первые теоретические исследования по вопросу об общих уравнениях движения вязкой несжимаемой жидкости были проведены Навье.

Устное сообщение в Парижской Академии наук об этих исследованиях было сделано в 1822 г., а опубликованы они в журнале за 1827 г.¹⁾ В начале своего мемуара Навье указывает на то, что при изучении движения жидкости необходимо учитывать существование особых молекулярных сил взаимодействия. Однако из последующих рассуждений Навье можно обнаружить, что под термином «молекулярных сил» подразумевались не силы взаимодействия между отдельными действительными молекулами жидкости в современном понимании этих слов, а силы взаимодействия между малыми частицами, на которые мысленно можно разложить сплошную среду, обусловленные изменением расстояния между ними при движении жидкости.

Таким образом, в работе Навье с самого начала используется гипотеза о сплошности жидкой среды и предположение о непрерывности деформирования частицы жидкости. Навье вводит в рассмотрение разность векторов скоростей в двух соседних точках и устанавливает выражение для скорости абсолютного удлинения элементарного прямолинейного отрезка, соединяющего две соседние частицы. Таким образом, если у Ньютона при формулировании гипотезы о вязкости по существу речь шла о деформации простого сдвига частицы жидкости, то у Навье речь идёт уже о деформации удлинения отрезка произвольного направления. В своих дальнейших рассуждениях Навье использует следующую гипотезу: дополнительная к давлению сила взаимодействия между двумя соседними частицами жидкости прямо пропорциональна скорости абсолютного удлинения расстояния между ними. Коэффициент пропорциональности считается зависящим от расстояния так, что при удалении частиц друг от друга он должен стремиться к нулю, а при приближении этот коэффициент должен стремиться к конечному значению, отличному от нуля. Под дополнительной силой в своей гипотезе Навье понимал силу, приходящуюся на единицу объёма одной фиксированной частицы со стороны единицы объёма второй фиксированной частицы. По этой причине гипотеза Навье формально не совпадает с принимаемой в настоящее время обобщённой гипотезой Ньютона для вязкой несжимаемой жидкости, но по своему содержанию она всё же близка к ней. Чтобы оценить суммарное воздействие всех окружающих частиц жидкости на одну фиксированную частицу с единичным объёмом, Навье подсчитывает сумму всех элементарных работ рассматриваемых сил воздействия со стороны всех окружающих частиц жидкости на том элементарном перемещении, которое представляется вариацией абсолютной скорости удлинения. Суммирование этих элементарных работ проводится с помощью интегрирования по объёму всего пространства при использовании сферических координат с началом

¹⁾ Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, Mem. de L'Ac. Royale de sc. de L'Institut de France, т. VI, 1827.

в фиксированной точке. При выполнении вычислений вводится следующее обозначение:

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{30} \int_0^{\infty} r^4 f(r) dr,$$

где $f(r)$ представляет собой коэффициент пропорциональности в указанной выше гипотезе Навье. Далее, с помощью принципа возможных скоростей Навье получает дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в том именно виде, в котором они используются и по настоящее время. В этих уравнениях коэффициент ε совпадает с коэффициентом вязкости μ . Аналогичным путём вводится коэффициент внешнего трения и формулируется граничное условие на стенке в виде равенства сил внешнего и внутреннего трения.

В IV главе работы Навье рассматривается прямолинейное неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в трубе прямоугольного сечения и в цилиндрической трубе круглого сечения под действием силы тяжести. Навье указывает на аналогию последней задачи с задачей теплопроводности для круглого цилиндра и даёт полное решение этой задачи в виде ряда по цилиндрическим функциям нулевого порядка. Из этого решения Навье получает как предельный случай и решение задачи о прямолинейном установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе под действием силы тяжести. Полагая в этом решении радиус трубки очень малым, Навье получает следующее выражение для средней скорости течения:

$$U = \frac{\rho g \sin \theta}{E} \frac{R}{2 \left(1 + \frac{ER}{2\varepsilon} \right)},$$

где ρ — плотность, θ — угол наклона оси трубы к горизонту, R — радиус трубы и E — коэффициент внешнего трения. Согласно полученной формуле средняя скорость течения в трубке с малым диаметром будет пропорциональна первой степени диаметра. Получив этот результат, Навье отмечает, что этот результат согласуется с результатами экспериментальных исследований Жирара. Это последнее обстоятельство, повидимому, и остановило Навье от дальнейшего анализа полученной им общей формулы для скорости установившегося движения в цилиндрической трубке. А между тем, если исходить из общей формулы Навье и устремить коэффициент внешнего трения к бесконечности с учётом принимаемого граничного условия на стенке, то можно вывести формулу, получившую позднее название формулы Пуазейля, согласно которой средняя скорость будет пропорциональна не первой степени диаметра, а второй.

Таким образом, в цитированной выше работе Навье были получены не только полные дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, содержащие постоянный коэффициент вязкости, но и граничные условия на стенке в своей общей форме и решения отдельных задач о неустановившемся прямолинейном движении жидкости.

Вскоре после опубликования работы Навье в 1829 г. было сделано устное сообщение в Парижской Академии наук об исследованиях Пуассона общих уравнений равновесия и движения упругих тел и жидкости. Эти исследования Пуассона были опубликованы в 1831 г.¹⁾ В первом параграфе своего большого мемуара Пуассон различает два вида сил: 1) силы притяжения, не зависящие от природы тел, пропорциональные произведению их масс и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними, и 2) силы притяжения или отталкивания, зависящие в первую очередь от природы частиц и количества содержащейся в них теплоты; интенсивность этих сил весьма сильно убывает с увеличением расстояния между частицами. Весь мемуар Пуассона по существу посвящён вычислению механического эффекта именно вторых сил и выводу уравнений равновесия упругих тел (§ 3), уравнений равновесия жидкости с учётом капиллярного натяжения (§ 5) и уравнений движения жидкости с учётом внутреннего трения жидкости (§ 7). При выводе соотношений, связывающих проекции соответственных сил, представляющих по современной терминологии нормальные и касательные напряжения на трёх взаимно перпендикулярных элементарных площадках, с производными по координатам от проекций вектора скорости, используются соответственные соотношения для напряжений в упругом теле с помощью следующих рассуждений. Общий промежуток времени t делится на n равных малых промежутков времени τ . В первый интервал времени τ после воздействия внешних сил жидкость смещается как упругое тело, поэтому распределение напряжений будет связано с распределением смещений так же, как и в упругом теле. Если внешние силы, вызывавшие смещение, перестают действовать, то частицы жидкости быстро приходят в такое расположение, при котором давление по всем направлениям становится одинаковым, т. е. касательные напряжения исчезают. За это время перераспределения расположения частиц происходит, таким образом, переход состояния напряжений, отвечающего упругому деформированию, в состояние напряжений давлений, отвечающее состоянию равновесия жидкости. Если же причина смещения продолжает своё действие и в течение второго интервала времени, то, предполагается, что различные малые смещения будут происходить независимо от предшествующих и что новые смещения

¹⁾ Poisson, Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides, Journal de L'École Royale Polytechnique, т. XIII, 1831.

частиц во втором интервале времени будут происходить так же, как и в первом. Предполагая n бесконечно большим, мы придём к тому, что жидкость будет в начале каждого следующего бесконечно малого интервала времени деформироваться как упругое тело, а к концу этого интервала времени состояние упругих напряжений будет перерождаться в состояние давлений, одинаковых по всем направлениям. С помощью такого рода рассуждений Пуассон и устанавливает впервые те соотношения, согласно которым дополнительные к давлению напряжения при движении жидкости линейно зависят от соответственных скоростей деформаций частицы. Касательные напряжения по соотношениям Пуассона получаются пропорциональными скоростям сдвига. Что же касается соотношений для нормальных напряжений, то в них, помимо давления и слагаемых, пропорциональных величинам скоростей удлинений отрезков, входят два дополнительных слагаемых, из которых первое пропорционально относительному изменению во времени плотности, а второе — пропорционально изменению во времени давления. Соотношения Пуассона содержат три постоянные, из которых одна постоянная совпадает с постоянной, введённой Навье, и представляет собой коэффициент вязкости, входящий в формулу гипотезы Ньютона о вязкости. Вторая постоянная представляет собой коэффициент объёмной вязкости или второй коэффициент вязкости. Третья постоянная Пуассона в последующих работах совершенно не была принята во внимание.

Используя эти соотношения для напряжений, Пуассон, далее, получает дифференциальные уравнения движения жидкости, по внешней форме совпадающие с уравнениями Навье. Различие состоит только в том, что давление заменено в уравнениях Пуассона через некоторую функцию, содержащую, кроме давления, производные по времени от давления и плотности. Чтобы замкнуть систему уравнений, Пуассон присоединяет к ней уравнение неразрывности в общей форме с учётом изменения плотности, давление и температуру. К этим уравнениям присоединяется уравнение теплопроводности в своей простейшей форме, т. е. без учёта конвекции. Таким образом, в мемуаре Пуассона впервые были введены соотношения, выражающие линейную зависимость тензора дополнительных напряжений жидкости при её движении от тензора скоростей деформаций частицы, и установлены дифференциальные уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости.

Одновременно с Навье и Пуассоном уравнениями равновесия упругого тела занимался и Коши. Но исследования Коши по своему методу существенно отличаются от исследований Навье и Пуассона. В работах Коши последовательно используются понятия напряжения и относительных деформаций, представления о поверхности напряжений и поверхности деформаций, представления о главных напряжениях и главных относительных удлинениях и основная гипотеза

о том, что главные напряжения в каждой точке упругого тела пропорциональны соответственным главным удлинениям. Но наряду с упругим телом Коши рассматривал и неупругое тело и жидкость. В своей основной работе¹⁾, сообщение по которой было сделано ещё в 1822 г., в § 3 Коши рассматривает движение внутри неупругой среды и вместо проекций смещений вводит проекции вектора скорости смещения и свою основную гипотезу формулирует так: главные напряжения в каждой точке пропорциональны мгновенным главным удлинениям или сжатиям. На основании этой гипотезы Коши получает дифференциальные уравнения, отличающиеся от современных уравнений движения вязкой жидкости только отсутствием слагаемого с давлением. Затем он видоизменяет свою гипотезу, полагая напряжение состоящим из двух слагаемых, из которых первое считается пропорциональным мгновенным сжатиям или расширениям, а второе считается зависящим только от положения точки. Далее, второе слагаемое принимается пропорциональным скорости объёмного расширения. Вследствие этого получают дифференциальные уравнения, сходные с уравнениями движения вязкой сжимаемой жидкости. Таким образом, Коши, создавая основные понятия теории упругости, вместе с этим установил и некоторые основные понятия теории движения вязкой жидкости.

В статье, опубликованной в 1843 г., Сен-Венан²⁾ ссылается на цитированные выше работы Навье, Пуассона и Коши и показывает возможность вывода уравнений движения вязкой жидкости с помощью видоизменения положений теории упругости о пропорциональности касательных напряжений деформациям сдвига без применения гипотез о притяжении и отталкивании отдельных частиц. Он вводит в рассмотрение направления главных скоростей скопления и главных тангенциальных напряжений, принимает гипотезу о совпадении этих направлений при движении жидкости и в конце концов получает два вида соотношений: 1) соотношения пропорциональности разностей нормальных напряжений разностям соответственных скоростей удлинений и пропорциональности касательных напряжений соответственным скоростям сдвига с общим коэффициентом пропорциональности, представляющим собой коэффициент вязкости жидкости, и 2) соотношение, связывающее линейной неоднородной зависимостью среднее арифметическое от нормальных напряжений со скоростью объёмного расширения. Из этих соотношений Сен-Венан получает соотношения Пуассона и Коши для отдельных компонент напряжения. В другой статье, в том же томе Докладов Парижской Академии наук (стр. 1108—1115) Сен-Венан применяет уравнения движения вязкой жидкости к случаю течения

1) Cauchy, Sur les équations, qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique, Exercices de Mathématique par Cauchy, III-e Année, 1828.

2) Saint-Venant, Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides, Comptes Rendus des Séances de L'Acad. des Sc., т. 17, 1843.

в канале прямоугольного сечения со свободной поверхностью. При этом сила внешнего трения на дне и боковых стенках представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых одно пропорционально первой степени скорости, а второе — второй степени. Нелинейность граничных условий создаёт затруднения в удовлетворении условиям. Граничные условия на стенках удовлетворяются только в ряде точек.

В первой половине XIX в. во Франции наряду с рассмотренными выше теоретическими исследованиями по основам гидродинамики вязкой жидкости продолжались и экспериментальные исследования течений жидкости в трубах и каналах. В частности, под влиянием запросов медицинской практики Пуазейлем были проведены тщательные опытные исследования течения воды в узких капиллярных трубках, внутренний диаметр которых менялся от 0,013 до 0,65 мм. Результаты этих исследований были опубликованы в трёх статьях ¹⁾, а затем в большом отдельном мемуаре ²⁾. На основании результатов своих опытных исследований Пуазейль установил получившую широкое распространение формулу, согласно которой секундный расход жидкости через сечение капиллярной трубки прямо пропорционален перепаду давления на единицу длины трубки и четвёртой степени диаметра ³⁾. Для коэффициента пропорциональности Пуазейлем была установлена формула зависимости его от температуры воды, но не указана связь его с коэффициентом вязкости. Такая связь позднее была установлена Стоксом на основании теоретического решения задачи о прямолинейном течении в цилиндрической трубке.

Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости получили своё окончательное обоснование и признание только после работы Стокса ⁴⁾, в которой движение частицы раскладывается на поступательное, вращательное, равномерное расширение или сжатие и движение, обусловленное деформациями сдвига. Дополнительные к давлению напряжения ставятся в зависимость только от движений, обусловленных деформациями частицы. Затем используются положения о главных осях напряжений и деформаций и в качестве наиболее вероятной принимается гипотеза о пропорциональности дополнительных

1) Poiseuille, Comptes Rendus de L'Ac. des Sc., т. 11, 1840 (стр. 961—967); т. 11 (стр. 1041—1048); т. 12, 1841 (стр. 112—115).

2) Poiseuille, Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petit diamètres, Mémoires de L'Acad. Royale des Sc. de L'Institut de France, т. 9, Paris, 1846, стр. 433—536.

3) В работе Гарена (Hagew. G): «Über die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren», Ann. der Physik und Chemie, т. 16, 1839 г., исследовалось течение воды в трубках диаметром 0,0942—0,2181 мм и было установлено, что перепад давления обратно пропорционален четвёртой степени радиуса трубки. Однако, эти исследования были менее систематичны, чем исследования Пуазейля.

4) Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids, Trans. of the Cambr. Philos. Society, т. VIII, 1844—1849, стр. 287—319.

главных напряжений скоростям деформации главных удлинений. После этого производится переход к общим соотношениям связи напряжений со скоростями деформаций, содержащим две постоянные, и к общим уравнениям движения вязкой жидкости. Далее, Стокс указывает на возможность отбрасывания нелинейных слагаемых из уравнений при изучении сравнительно медленных движений (колебаний маятника в воде, колебания сосудов с водой и др.). В качестве примера рассматривается неустановившееся прямолинейное движение с учётом сжимаемости воздуха и впервые производится оценка влияния внутреннего трения на интенсивность звука и периоды колебаний воздуха. Затем рассматривается установившееся прямолинейное движение несжимаемой жидкости под действием силы тяжести, и для случая кругового сечения Стокс получает формулу Пуазейля для средней скорости. При рассмотрении кругового движения жидкости Стокс указывает на то, что гипотеза Ньютона о вязкости совпадает с его гипотезой в рассматриваемом частном случае, но полученное Ньютоном решение этой задачи является ошибочным. В своей второй работе Стокс ¹⁾ даёт обзор исследований Навье, Пуассона, Коши и Сен-Венана по уравнениям движения вязкой жидкости и на основе анализа экспериментальных данных приходит к выводу о том, что в качестве граничного условия на стенке можно брать условие прилипания. В последующих работах Стокса доказывается теорема о рассеянии энергии при движении вязкой жидкости, решается задача об обтекании шара при отбрасывании квадратичных членов инерции и пр.

Таким образом, после работ Стокса дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости находят себе конкретное применение при решении отдельных задач. При этом теоретические решения отдельных задач подтверждались тогда и результатами опытов, но при сравнительно малых скоростях движения жидкости. Особенное значение приобрело решение задачи об установившемся течении жидкости в цилиндрической трубке, полностью согласующееся с экспериментальной формулой Пуазейля. Благодаря этому обстоятельству формула Пуазейля стала широко использоваться для экспериментального определения коэффициента вязкости различных жидкостей. Кроме того, следует отметить и то, что с работ Стокса начинаются попытки упрощения нелинейных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Отбрасывание квадратичных членов инерции позволило Стоксу и целому ряду последующих исследователей найти теоретические решения многих задач, подтверждаемые опытами при малых скоростях движения жидкости. Некоторые из этих теоретических решений послужили основанием для разработки других методов определения вязкости жидкостей в тех случаях, когда метод истечения становится непригодным.

¹⁾ Stokes, Report on regent researches in hydrodynamics, Report of the British Association for 1846, P. I.

Особой датой в развитии гидродинамики вязкой жидкости является 1883 г. в связи с появлением работ Н. П. Петрова по теории смазки и О. Рейнольдса по теории турбулентности.

Применение колёсных повозок, блоков и других приспособлений с вращением отдельных деталей вынуждало с давних пор к использованию смазки, т. е. к замене сухого трения между двумя прикасающимися поверхностями жидкостным трением. Заслуга выдающегося русского учёного и инженера Н. П. Петрова и заключается в том, что он впервые обратил внимание на эту технически важную проблему, привлёк к её разрешению основную гипотезу о вязкости жидкости, дал всесторонний анализ полной возможности применения этой гипотезы к течению жидкости в смазочном слое, дал строгое решение задачи для случая кругового движения частиц жидкости с учётом внешних трений и провёл огромное количество целеустремлённых и научно обоснованных опытов. Основная работа Н. П. Петрова «Трение в машинах и влияние на него смазывающих жидкостей» была опубликована в «Инженерном журнале» за 1883 г., а всего по этой проблеме им было написано 19 работ. Заслуги Н. П. Петрова признаны всеми учёными и он назван «отцом гидродинамической теории жидкостного трения». Однако не следует упускать из виду и большую заслугу Н. П. Петрова в том, что он впервые с помощью большого количества вычислений и сопоставлений с результатами опытов превратил гипотезу Ньютона о вязкости в закон о вязкости, вполне применимый к условиям течения в смазочном слое.

Проблема гидродинамической теории смазки оказала решающее влияние на развитие гидродинамики вязкой жидкости не только потому, что открылись новые возможности для применения общих уравнений движения вязкой жидкости и приближённых уравнений с отброшенными квадратичными членами к практически весьма важной задаче, но также и потому, что открылись новые возможности для упрощения сложных уравнений движения жидкости. В этом отношении заслуга принадлежит выдающемуся английскому учёному О. Рейнольдсу¹⁾, который при рассмотрении течения в смазочном слое вполне обосновал возможность отбрасывания в уравнениях не только квадратичных членов инерции, но и большинства слагаемых от вязкости. Благодаря этому обстоятельству уравнения движения жидкости в смазочном слое резко упрощаются, и в связи с этим представились возможности в ряде случаев довести решения до простых формул, позволяющих, в частности, просто оценивать так называемый «клиновидный эффект» от эксцентричного расположения шипа в подшипнике.

К решению проблемы теории смазки было привлечено внимание многих учёных, в том числе и таких корифеев науки, как

¹⁾ Reynolds O., On the theory of lubrications and its application to Mr. B. Towers experiments, Phil. Trans. R. Soc. of London, 1886, P. I (перевод дан в сборнике «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, 1934).

Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин. Этому вопросу Н. Е. Жуковский посвятил три работы. В своей первой работе ¹⁾ он впервые ставит вопрос: «Откуда же берётся сила, уравновешивающая давление шипа на подшипник?», и даёт ответ на этот вопрос в § 2, указав предварительно на то, что возрастание давления в слое «могло быть получено при рассматривании движения весьма тонкого жидкого слоя, заключённого между двумя неконцентрическими цилиндрическими поверхностями». Таким образом, основная причина несущей способности вращающегося шипа в подшипнике была раскрыта одновременно О. Рейнольдсом и великим механиком Н. Е. Жуковским. Кроме того, заслуга Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина заключается и в том, что они дали более строгое решение всей задачи при эксцентричном расположении шипа в подшипнике без отбрасывания членов от вязкости, тогда как О. Рейнольдс ограничился только приближённым решением.

В 1883 г. были опубликованы результаты больших экспериментальных исследований О. Рейнольдса ²⁾ по течению воды в трубах. Эти исследования, во-первых, послужили началом для развития теории подобия течений жидкости с учётом вязкости, и основанием для введения основного критерия подобия — критерия Рейнольдса, во-вторых, явились толчком к попыткам теоретического исследования устойчивости ламинарных течений вязкой жидкости и, в-третьих, послужили началом систематических экспериментальных и теоретических исследований турбулентных течений жидкости. Теоретические исследования О. Рейнольдса по теории турбулентности были опубликованы в 1895 г.

В развитии экспериментальных и теоретических исследований по гидродинамике вязкой жидкости в России сыграла большую роль монография Д. И. Менделеева ³⁾. В этой монографии дан критический обзор исследований по вопросам сопротивления жидкостей и воздуха, начиная с середины XVII в. и кончая 70-ми годами XIX в. В ряде пунктов Д. И. Менделеев пишет о роли в сопротивлении жидкости внутреннего трения частиц и, в частности, на стр. 91 пишет о прилипании жидкости к поверхности движущегося тела и о наличии некоторого слоя, примыкающего к поверхности этого тела, в котором скорость движения частиц будет больше, чем в соседних слоях. Эта идея о пограничном слое получила своё дальнейшее развитие позднее в работах Л. Прандтля.

В первой четверти XX в. развитие гидродинамики вязкой жидкости происходило преимущественно по двум направлениям: 1) разработки вопросов теории пограничного слоя и 2) использования уравнений движения жидкости с частичным учётом квадратичных членов инерции.

¹⁾ Жуковский Н. Е., О гидродинамической теории трения хорошо смазанных тел, Журнал Русского физико-химического общества, т. XVIII, 1886.

²⁾ Reynolds O., Phil. Trans. Roy Soc., 1883.

³⁾ Менделеев Д. И., О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании, 1880.

Начало работ первого направления было положено статьёй Л. Прандтля¹⁾. Работы второго направления были начаты с исследований Озеена²⁾. Общее между работами этих двух направлений заключается лишь в том, что квадратичные члены в уравнениях движения полностью не отбрасываются; в теории пограничного слоя эти члены учитываются полностью в первом уравнении, а в исследованиях Озеена эти члены учтены частично, но во всех уравнениях. Существенное же различие исследований по этим двум направлениям отражается в порядках величин чисел Рейнольдса, при которых результаты исследований согласовываются с результатами опытных измерений; результаты решений задач по теории пограничного слоя находят хорошее подтверждение при весьма больших значениях числа Рейнольдса, тогда как результаты исследований Озеена и его последователей с качественной стороны хорошо подтверждаются наблюдениями, а с количественной стороны находят подтверждение лишь при малых числах Рейнольдса. В уравнениях Озеена, так же как и в приближённых уравнениях Стокса, слагаемые от вязкости учитываются полностью. Следовательно, метод Озеена можно рассматривать как развитие метода Стокса в сторону частичного учёта инерционных членов. В уравнениях пограничного слоя слагаемые от вязкости учитываются так же, как они учитывались в уравнениях Рейнольдса для смазочного слоя. Таким образом, теорию пограничного слоя жидкости можно рассматривать как естественное развитие приближённой теории смазочного слоя в сторону полного учёта квадратичных членов инерции в основном уравнении движения жидкости.

Работы, опубликованные во второй четверти XX в. по вопросам гидродинамики вязкой жидкости, содержат большей частью результаты экспериментальных и теоретических исследований: 1) по приближённым методам теории пограничного ламинарного и турбулентного слоя сжимаемой и несжимаемой жидкости, 2) по полуэмпирическим теориям турбулентности, 3) по статистическим теориям турбулентности, 4) по теории развития ламинарных течений, 5) по теории свободных струй, 6) по прикладной теории жидкостного трения в подшипниках и др. Данные о всех этих исследованиях можно найти в книгах: «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости» под редакцией С. Гольдштейна т. I, II, Москва, 1948 и «Механика в СССР за 30 лет», Москва, 1950.

¹⁾ Прандтль Л., Движение жидкости с очень малым трением, Труды III математического конгресса, 1904 (перевод статьи дан в книге: Л. Прандтль, Теория несущего крыла, ГНТИ, 1931).

²⁾ Oseen, Arkiv för matematik, astr. och. fysik, Bd. 6, 1910.

ГЛАВА I

СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ЧАСТИЦЫ. КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Основные признаки различия агрегатных состояний тела

Все тела в природе имеют молекулярную структуру. Отдельные молекулы тела находятся в постоянном движении. Беспреданное движение молекул и его изменение явно проявляются в изменении температуры. Изменение характера молекулярного движения, находит своё явное отражение в различии трёх агрегатных состояний тела: твёрдом, жидком и газообразном.

В твёрдом состоянии тела отдельные молекулы или атомы совершают колебательные движения около средних положений относительного равновесия, причём эти положения относительного равновесия в ряде случаев распределяются в пространстве в определённом порядке и образуют кристаллическую решётку. Амплитуды колебаний атомов малы по сравнению с расстояниями между самими атомами в кристаллической решётке.

При повышении температуры в твёрдом теле образуются области искажения кристаллической решётки, связанные как с нарушениями правильности расположения атомов в решётке, так и с образованием в ней «дырок». При дальнейшем возрастании температуры процесс разупорядочения расположения атомов ускоряется, и происходит дальнейшее ослабление решётки вблизи дырок. Затем внезапно наступает процесс плавления, т. е. переход вещества из твёрдого состояния в жидкое.

Основное отличие вещества в жидком состоянии вблизи температуры плавления от того же вещества в твёрдом состоянии заключается в образовании некоторого «избытка» объёма, т. е. большего количества дырок. Этот избыток объёма, с одной стороны, создаёт тот простор, который обеспечивает большую подвижность отдельных молекул и их групп, а с другой стороны, служит предпосылкой дальнейшего нарушения того правильного расположения молекул, которое имеет место в твёрдом состоянии. Таким образом, отличие жидкого тела от твёрдого проявляется прежде всего в большей сте-

пени подвижности молекул. Молекулы жидкости, помимо колебательных движений, приобретают ещё круговые и поступательные движения. Что же касается величин сил сцепления и плотности, то их различие для жидких и твёрдых тел при температурах, не слишком далёких от температуры плавления, является незначительным.

По мере приближения температуры жидкости к критической, после которой наступает процесс превращения жидкости в газ, величина сил сцепления молекул уменьшается и изменяется характер их тепловых движений.

В газообразном состоянии силы сцепления отдельных молекул почти совершенно исчезают. Движения отдельных молекул благодаря частым столкновениям становятся весьма хаотическими. Объёмы, занимаемые группами молекул, могут изменяться в широких пределах.

Таким образом, по своим свойствам жидкость на одном конце — в области высоких температур и больших удельных объёмов — примыкает к газам, а на другом конце — в области низких температур и малых удельных объёмов — примыкает к твёрдым телам.

Напоминая в общих чертах перечисленные выше признаки различия трёх агрегатных состояний одного и того же вещества, мы хотим подчеркнуть, что жидкое состояние вещества является промежуточным между твёрдым и газообразным состояниями. Это обстоятельство до некоторой степени будет оправдывать то, что в отдельных случаях мы будем пользоваться представлениями и понятиями, имеющими прямое отношение лишь к твёрдому состоянию, а в других случаях будем пользоваться терминами и понятиями, получившими своё строгое обоснование лишь по отношению к газообразному состоянию.

§ 2. Гипотеза сплошности жидкой среды

Свойства реальных жидкостей и газов и особенности их реального движения находят в исходных положениях гидродинамики лишь своё приближённое отражение. Но по мере развития как самой гидродинамики, так и смежных с ней наук эти исходные положения расширяются, благодаря чему степень соответствия их содержания содержанию реальных свойств изучаемого явления повышается. Кроме того, с развитием гидродинамики и смежных с ней наук, с развитием техники экспериментирования постепенно выявляются границы применимости ранее принятых исходных положений и устанавливаются возможные их уточнения.

В период формирования науки гидродинамики её основателями — Эйлером, Даламбером и Лагранжем было принято то основное допущение, согласно которому жидкость или газ заполняют тот или иной объём без каких-либо свободных промежутков, т. е. жидкость или газ представляют собой *сплошные среды*. Результаты вычислений, полученные при использовании этого основного допущения, в большом

числе случаев хорошо согласуются с результатами соответствующих наблюдений и измерений. Это обстоятельство служит основанием к тому, чтобы и в настоящее время в качестве основного допущения принимать *гипотезу о сплошности жидкости и газа*.

При гипотезе сплошного заполнения жидкостью или газом конечного объёма за частицу можно принимать любой как угодно малый объём. К такой частице применимы основные кинематические понятия скорости и ускорения точки. Отличие жидкости или газа от абсолютно твёрдого тела будет заключаться в том, что расстояния между частицами жидкости или газа меняются. Благодаря изменениям расстояний между частицами будет происходить изменение внешней конфигурации любой части объёма, заполненного жидкостью или газом. Это изменение внешней конфигурации любой части объёма называется *деформацией*. Таким образом, *жидкость и газ представляют собой сплошные деформируемые среды*.

Различие жидкости и газа от твёрдого деформируемого тела находит своё отражение в механике деформируемых сред в том, что к ним применяются различные меры подвижности частиц. Для твёрдого деформируемого тела подвижность частиц мала и поэтому мерой подвижности их служат сами смещения частиц, сами деформации их. Для жидкости и газа подвижность частиц достаточно велика и поэтому мерой подвижности их служат уже не сами смещения, которые во многих случаях весьма велики и не характерны для движения, а *скорости смещений частиц*, не сами деформации, а их отношения к промежуткам времени их образования, т. е. *скорости деформаций*. Следовательно, жидкость и газ можно определять как *сплошные деформируемые среды, мерами подвижности частиц которых служат скорости частиц и скорости деформаций частиц*.

В качестве характеристики проявления материальности жидкости и газа вводится плотность ρ , представляющая собой предел отношения содержащейся в малом объёме массы к величине этого объёма, т. е.

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v}.$$

Отличие жидкости от газа выражается в том, что плотность жидкости считается мало изменяемой, тогда как плотность газа в ряде случаев оказывается сильно изменяемой. Во всех других отношениях между жидкостью и газом имеется много общего. По этой причине далее слово «жидкость» будет употребляться в собирательном смысле. Под этим словом будет подразумеваться как «капельная» жидкость ($\rho = \text{const}$), так и некоторый газ, плотность которого может изменяться в широких пределах.

Гипотеза о сплошности среды означает не только сплошное заполнение частицами жидкости какого-либо объёма. Она означает также и *непрерывность продвижения частиц* в том смысле, что каждая

частица не может отделяться от окружающих её частиц, не может отставать от впереди расположенной частицы и не может её перегонять.

Гипотеза о сплошности среды означает также и *непрерывность деформирования* любой части объёма. Вследствие этого замкнутая линия, состоящая из одних и тех же частиц, во всё время движения останется замкнутой; замкнутая поверхность, состоящая из одних и тех же частиц, будет непрерывно деформироваться, но оставаться всё время замкнутой.

Но гипотеза сплошности среды не *влечёт* за собой в качестве неизбежного следствия *гипотезу о непрерывности распределения скоростей и плотностей частиц*. В данный момент времени две соседние частицы могут иметь различные скорости и различные плотности, но в любой следующий момент времени между величинами скоростей и плотностей этих частиц должна существовать определённая зависимость для предотвращения разрыва сплошности среды.

Таким образом, требование непрерывности распределения скоростей и плотностей должно составлять дополнительную гипотезу. Принятие этой гипотезы необходимо для того, чтобы пользоваться математическим аппаратом частных производных.

На основании изложенного мы приходим к тому выводу, что классическая гидродинамика основывается 1) на гипотезе сплошности среды и непрерывности её деформирования, 2) на гипотезе непрерывности распределения скоростей и плотностей частиц.

Разрыв непрерывности скоростей и плотностей может допускаться только для отдельных конечных поверхностей.

§ 3. Метод осреднения

Развитие кинетической теории газов позволило внести некоторые изменения в трактовку основных понятий гидродинамики. Эти изменения прежде всего коснулись понятия частицы. Под *частицей* газа стали подразумевать не любую как угодно малую часть объёма газа, а весьма небольшую его часть, содержащую всё же внутри себя тысячи миллиардов молекул. При таком большом числе молекул движение частицы может зависеть от движения всех молекул в своей совокупности, но не от движения отдельно взятой молекулы. Такую частицу можно именовать *макроскопической частицей*. Следовательно, жидкость в конечном объёме должна рассматриваться как совокупность макроскопических частиц. Движение этих частиц и будет представлять собой *макроскопическое движение жидкости*.

Понятие макроскопической частицы жидкости является условным и до некоторой степени неопределённым. Размеры объёма частицы не должны быть слишком малыми для того, чтобы поведение каждой отдельной молекулы не могло как-то сказаться на движении макроскопической частицы. Эти размеры не должны быть слишком малыми также и для того, чтобы с полным основанием можно было пользоваться термодинамическими понятиями

температуры, внутренней энергии и энтропии и свойством аддитивности внутренних энергий частиц. С другой стороны, размеры частицы не могут быть и большими, чтобы можно было с достаточным основанием пренебрегать этими размерами для того, чтобы пользоваться кинематическими понятиями скорости и ускорения точки применительно к частице. Кроме того, так как изучается движение жидкости, а понятия термодинамики установлены применительно к состоянию статистического равновесия, то размеры объема частицы не могут быть большими, а, наоборот, они должны быть настолько малыми, чтобы в их пределах процессы выравнивания (диффузия и теплопроводность) протекали бы в очень короткий промежуток времени. Интервал времени протекания процессов выравнивания в пределах частицы должен быть значительно меньше того промежутка времени, в течение которого частица из одного положения с одним термодинамическим состоянием переместится в другое положение с другим термодинамическим состоянием. Таким образом, допускаемые размеры объемов частицы, вообще говоря, должны ставиться в зависимость от порядка скоростей макроскопического движения жидкости. С увеличением порядка скоростей макроскопического движения допускаемые размеры частиц должны уменьшаться.

В связи с изменением понятия частицы изменилось и понятие скорости частицы. Под скоростью частицы стало подразумеваться *осреднённое значение скоростей всех молекул, содержащихся в частице*, причём это осреднение скоростей может быть проведено, например, в том же смысле, в каком определяется скорость центра масс механической системы, а именно

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \Delta m_i V_i}{\sum_{i=1}^{i=N} \Delta m_i}, \quad (3.1)$$

где N — число молекул в частице, Δm_i — масса молекулы, и V_i — вектор скорости молекулы.

Если объём частицы мы обозначим через Δv , то под плотностью частицы тогда подразумевается следующее отношение:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \Delta m_i}{\Delta v}. \quad (3.2)$$

При таком определении плотности частицы в неявной форме используется снова гипотеза о сплошности жидкой среды в пределах размеров частицы. Пренебрегая размерами частиц, мы возвращаемся к гипотезе о сплошности среды уже в пределах любого конечного объёма.

Однако следует заметить, что при использовании метода осреднения скоростей молекулярная структура строения жидкости всё же косвенно учитывается. Принимая с самого начала гипотезу сплошности среды, мы тем самым рассматриваем пространство, занятое жидкостью, как единое поле скоростей, вводя же понятие осреднённой

по объёму макроскопической частицы скорости, пространство, занятое жидкостью, мы рассматриваем уже как двойное поле скоростей: макроскопических и микроскопических, причём эти два поля скоростей, пространственно налагаясь друг на друга, благодаря тому, что мы пренебрегаем размерами частиц, всё же находятся между собой в определённом взаимодействии. Это взаимодействие находит своё отражение не только в изменении температуры, но и в изменении внутренней энергии частиц и в том переносе количеств движения, который явно проявляется в свойстве вязкости жидкости.

§ 4. Понятие вязкости жидкости

Различие жидкости от твёрдого деформируемого тела находит своё отражение также и в характере внутренних взаимодействий между частицами. В жидкости, как и в твёрдом деформируемом теле, взаимодействие частиц характеризуется *напряжениями*, т. е. силами, отнесёнными к единице площади соприкасания частиц:

$$p_n = \lim_{\Delta\sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\sigma_n},$$

где p_n — вектор напряжения на площадке $\Delta\sigma_n$ с нормалью n .

При равновесии твёрдого тела вектор напряжения имеет две составляющие: нормальную, направленную по нормали к площадке, и касательную, расположенную в плоскости самой площадки. При равновесии же жидкости в некотором сосуде вектор напряжения имеет лишь одну нормальную составляющую и притом направленную всегда внутрь рассматриваемых частиц. Иначе говоря, взаимодействие частиц жидкости при равновесии характеризуется одним лишь давлением. Но при движении жидкости вектор напряжения наряду с нормальной составляющей, т. е. с давлением, будет иметь и касательную составляющую, представляющую собой *силу внутреннего трения* или *силу вязкости*. Таким образом, при движении жидкости взаимодействие её частиц характеризуется не только давлением, но и внутренним трением.

Заключение о существовании касательной силы взаимодействия частиц жидкости при её движении можно сделать на основании следующего простого примера.

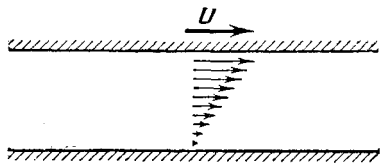


Рис. 1.

Допустим, что некоторая жидкость занимает объём между двумя параллельными стенками (рис. 1). Пусть нижняя стенка будет неподвижной, а верхняя перемещается параллельно неподвижной с постоянной скоростью U . Если до начала движения стенки жидкость находилась в состоянии покоя, то по прошествии некоторого промежутка времени частицы жидкости придут в состояние движения. При этом

частицы, расположенные ближе к движущейся стенке, будут иметь скорость, несколько большую, чем частицы, расположенные ближе к неподвижной стенке.

На основании рассмотренного примера и наблюдений во многих других аналогичных случаях можно сделать следующие заключения:

1) Движущаяся стенка увлекает в своём движении прилегающие к ней частицы жидкости, что может свидетельствовать о наличии касательного взаимодействия между частицами жидкости и стенкой. Такое взаимодействие называется *внешним трением жидкости*.

2) Движение передаётся от одних частиц жидкости к другим в направлении, перпендикулярном к скорости движения, что может свидетельствовать о том, что между частицами самой жидкости также возникает касательное взаимодействие в плоскости их соприкосновения, которое как раз и следует именовать *внутренним трением жидкости*.

Рассмотрим другой пример. Пусть в каком-либо сосуде находится густая жидкость вроде патоки. Будем в эту жидкость погружать тонкую пластинку в виде бритвенного ножа тонкой стороной вперёд. При таком погружении мы будем ощущать сопротивление, обусловленное наличием внешнего трения между частицами покоящейся жидкости и прилегающими точками движущегося ножа. Погружённую пластинку будем теперь вынимать. Тогда мы заметим, что вместе с пластинкой будут перемещаться и прилипшие к ней частицы жидкости, увлекающие за собой и соседние частицы. Следовательно, то сопротивление, которое мы будем ощущать при вынимании пластинки, следует объяснять в большей мере наличием внутреннего трения между частицами жидкости. В рассматриваемом случае пластинка «взлетит» в жидкости. На этом основании явление внутреннего трения именуется часто *явлением вязкости*.

Впервые на наличие внутреннего трения между частицами жидкости было указано Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии». В этой книге Ньютон высказал *гипотезу*, согласно которой *сила внутреннего трения между частицами жидкости пропорциональна относительной скорости этих частиц*. Позднее эта гипотеза была представлена в виде формулы, обнаруживающей в явном виде не только прямую зависимость силы внутреннего трения, отнесённой к единице площади, от относительной скорости частиц ($V_1 - V = \Delta V$), но и обратную зависимость от расстояния Δn между частицами:

$$\tau = \mu \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta n} = \mu \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (4.1)$$

Коэффициент пропорциональности μ в этой формуле называется *коэффициентом вязкости жидкости*. Так как сила τ имеет размерность напряжения $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \right]$, а производная по нормали от скорости имеет

размерность $\left[\frac{1}{\text{сек}}\right]$, то размерность коэффициента вязкости μ в технических единицах будет:

$$[\mu] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}\right].$$

Помимо коэффициента вязкости μ , часто вводят в рассмотрение ещё и *кинематический коэффициент вязкости*, представляющий собой отношение коэффициента вязкости к плотности жидкости, т. е.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (4.2)$$

Так как размерность плотности есть $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}\right]$, то размерность кинематического коэффициента вязкости будет $[\nu] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}\right]$.

Для воздуха при 15°C мы имеем, например, $\mu = 1,82 \cdot 10^{-6}$, $\nu = 1,45 \cdot 10^{-5}$, а для воды $\mu = 1,16 \cdot 10^{-4}$, $\nu = 0,1145 \cdot 10^{-5}$.

Из того, что сказано выше, следует, что внутреннее трение жидкости неразрывно связано с её движением. Без движения жидкости нельзя обнаружить проявление вязкости или внутреннего трения. В этом отношении внутреннее трение существенно отличается от трения между твёрдыми телами, которое может иметь место и при покое. Различие жидкого трения от сухого заключается также и в следующем. Сила внутреннего трения жидкости находится в количественной зависимости прежде всего от относительной скорости движения частиц, тогда как предельная сила сухого трения находится в количественной зависимости прежде всего от давления между телами. Полная сила внутреннего трения пропорциональна площади соприкосновения частиц, а предельная сила сухого трения не зависит от величины площади соприкосания тел.

В механике величина силы воздействия на материальную точку находится в прямой зависимости от изменения скорости движения точки во времени. Аналогично обстоит дело и с силой внутреннего трения, которая находится также в прямой зависимости от изменения скорости движения, но не во времени, а в направлении, перпендикулярном к скорости движения рассматриваемой частицы. Следовательно, на силу вязкости, представляемую равенством (4.1), можно смотреть как на *меру передачи движения частиц жидкости в направлении, перпендикулярном к скорости движения частиц*.

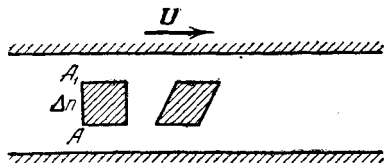


Рис. 2.

В рассмотренном выше примере прямолинейного движения жидкости деформация частицы происходит следующим образом. Первоначальное сечение частицы в виде квадрата (рис. 2) через промежу-

ток времени Δt становится ромбом; это значит, что частица испытывает деформацию простого сдвига. Беря разность смещений в точках A и A_1 и деля её на расстояние Δn , получим величину деформации простого сдвига частицы за промежуток времени Δt , т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial n} \Delta t.$$

Если мы поделим эту величину деформации сдвига на промежуток времени её образования, то получим скорость деформации сдвига. С другой стороны, сила трения, отнесённая к единице площади, может рассматриваться как касательное напряжение. Следовательно, гипотеза Ньютона, представляемая равенством (4.1), может быть сформулирована следующим образом: *касательное напряжение в жидкости пропорционально скорости деформации сдвига.*

Такая формулировка гипотезы Ньютона позволяет сделать обобщение этой гипотезы и на общий случай движения жидкости. В общем случае вектор напряжения на произвольной площадке может иметь, помимо касательной составляющей, ещё и нормальную составляющую, а частица будет испытывать, помимо деформации сдвига, ещё и другие деформации. Следовательно, каждую из составляющих напряжения мы можем ставить в прямую зависимость от соответственной составляющей скорости деформации частицы. Такого рода обобщение гипотезы Ньютона и было сделано Коши, Сен-Венаном и Стоксом.

В объяснение самого механизма явления вязкости Ньютон, Коши, Сен-Венан и Стокс не входили. Только с развитием кинетической теории газов было дано физическое истолкование явлению вязкости.

Отдельные молекулы газа суть носители различных качеств, к которым относятся род материи, тепловая энергия и количество движения. Благодаря молекулярному движению эти отдельные качества переносятся и передаются в какой-то мере от одних молекул к другим, от одного слоя к другому слою. Перенос самой материи проявляется в явлении *диффузии*, перенос энергии — в явлении *теплопроводности* и, наконец, перенос количества макроскопического движения проявляется в явлении *вязкости*. Таким образом, для газов все эти три явления являются родственными между собой, все они представляют собой *процессы выравнивания* распределения, рода материи, тепловой энергии и количества движения. Родственность этих трёх явлений находит своё отражение также и в том, что коэффициенты диффузии, теплопроводности и вязкости пропорциональны друг другу, и в том, что значения всех этих коэффициентов для газа в определённом интервале температур увеличиваются с повышением температуры. Но между этими тремя явлениями есть и различие. При диффузии и теплопроводности переносятся скалярные величины, к каковым относятся химические качества и энергия, а в явлении вязкости переносятся векторная величина количества движения. Перенос скалярной величины, например тепловой энергии,

в явлении теплопроводности представляется *вектором потока тепла*, тогда как перенос вектора количества движения в явлении вязкости будет представляться *тензором плотности потока количества движения*. Таким образом, явление вязкости в некотором отношении будет сложнее явлений диффузии и теплопроводности.

На основании рассмотрения простейшего случая переноса количества движения молекулами из одного слоя в другой в кинетической теории газов установлена следующая формула для коэффициента вязкости:

$$\mu = 0,30967\rho V\lambda, \quad (4.3)$$

где ρ — плотность, V — среднее значение скорости движения молекул, установленное на основании закона Максвелла о распределении скоростей, и λ — *длина свободного пробега молекул*.

На основании дальнейших разработок кинетической теории было высказано положение, согласно которому коэффициент вязкости μ для газов пропорционален квадратному корню из абсолютной температуры данного газа. Однако это положение не подтвердилось на опыте. В действительности оказалось, что коэффициент μ с температурой T связан следующей зависимостью:

$$\mu = \alpha T^n, \quad (4.4)$$

где показатель n изменяется от 0,7 для водорода до 1,0 для менее совершенных газов. Для воздуха достаточно хорошо подтверждается опытами при изменении температуры от 0 до 100° следующая зависимость коэффициента вязкости от температуры:

$$\mu = \frac{k\sqrt{T}}{1 + \frac{c}{T}},$$

где T — абсолютная температура и

$$k = 141,8 \cdot 10^{-7}, \quad c = 510.$$

Переходя к рассмотрению механизма явления вязкости у капельных жидкостей, следует заметить, что в отношении этого механизма ещё нет вполне установившихся и экспериментально проверенных взглядов. Тот факт, что коэффициент вязкости капельной жидкости с увеличением температуры не увеличивается, как у газов (см. формулу (4.4)), а уменьшается, вынуждает нас полагать, что *механизм явления вязкости у капельных жидкостей должен существенно отличаться от механизма явления вязкости у газов*, и поэтому в капельной жидкости при обычных температурах не может происходить передачи количеств движения с помощью непосредственного перехода молекул из одного слоя в другой, как это имеет место в газах.

На основании обработки экспериментальных результатов о зависимости вязкости жидкостей от температуры А. И. Бачинский пред-

ложил свою формулу, выражающую зависимость коэффициента вязкости от удельного объёма:

$$\mu = \frac{C}{v - \omega}, \quad (4.5)$$

где v — удельный объём, а C и ω — постоянные. На основании этой формулы легко качественно объяснить уменьшение вязкости жидкостей с увеличением температуры. Так как вязкость жидкостей определяется взаимодействием молекул, то она должна зависеть от удельного объёма жидкости. Чем выше температура, т. е. чем больше будет удельный объём, тем больше будет расстояние между молекулами жидкости, тем меньше будет сила сцепления, следовательно, тем меньше будет вязкость. В теории вязкости жидкости, разработанной в последнее время Г. М. Панченковым ¹⁾, принимается, что передача количества движения происходит за счёт временного объединения молекул на границе слоёв, причём эта передача движения будет происходить лишь тогда, когда энергии движения будет достаточно у молекул для преодоления силы притяжения между ними и когда молекулы будут определённым образом ориентированы друг относительно друга. Исходя из этих положений, Г. М. Панченков установил формулу зависимости коэффициента вязкости жидкости от температуры, давления и энергии связи молекул жидкости. Расчёты по этой формуле для ряда жидкостей дали удовлетворительные совпадения с результатами экспериментов. При дополнительных предположениях из формулы Г. М. Панченкова получается приведённая выше формула А. И. Бачинского.

§ 5. Распределение скоростей в частице

Рассмотрим частицу жидкости (рис. 3). Какую-то точку внутри частицы с координатами x_1 , x_2 и x_3 обозначим через O и назовём её условно *центром частицы*. Пусть вектор скорости V в центре частицы имеет проекции на прямоугольной оси координат v_1 , v_2 и v_3 . Обозначая единичные векторы осей координат через i_1 , i_2 и i_3 , будем иметь:

$$V = \sum_{k=1}^{k=3} v_k i_k.$$

Возьмём теперь произвольную точку M с координатами $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2$, $x_3 + \delta x_3$. Вектор скорости в этой точке в предположении, что значения δx_1 , δx_2 и δx_3 настолько малы, что квадратами их можно пренебречь, будет

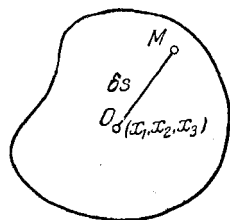


Рис. 3.

¹⁾ Панченков Г. М., Теория вязкости жидкостей, Гостоптехиздат, 1947.

представляться в виде

$$\begin{aligned} V_M &= V(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_3; t) = \\ &= V(x_1, x_2, x_3; t) + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Таким образом, вектор относительной скорости точки M по отношению к точке O будет представляться в виде однородной линейной функции относительных координат, т. е.

$$V_{OM} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k. \quad (5.2)$$

Проекция вектора относительной скорости рассматриваемой точки M на ось x_1 будет тогда представляться в виде

$$(v_1)_{OM} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \delta x_k. \quad (5.3)$$

Прибавляя и вычитая из правой части (5.3) следующие количества:

$$\frac{1}{2} \delta x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{2} \delta x_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1},$$

проекцию $(v_1)_{OM}$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} (v_1)_{OM} &= \delta x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \delta x_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \delta x_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta x_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \delta x_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Вводим следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), & \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right); \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), & \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right); \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), & \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

При этих обозначениях равенство (5.4) представится в виде

$$(v_1)_{OM} = \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{1k} \delta x_k + \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ \delta x_2 & \delta x_3 \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Проведя аналогичные преобразования по отношению к проекциям $(v_2)_{OM}$ и $(v_3)_{OM}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} (v_2)_{OM} &= \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{2k} \delta x_k + \begin{vmatrix} \omega_3 & \omega_1 \\ \delta x_3 & \delta x_1 \end{vmatrix}, \\ (v_3)_{OM} &= \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{3k} \delta x_k + \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \delta x_1 & \delta x_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Умножая левые и правые части (5.6) и (5.7) на единичные векторы \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 и \mathbf{i}_3 соответственно и складывая, получим следующее выражение для вектора относительной скорости в произвольной точке M частицы:

$$\mathbf{V}_{OM} = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} \delta x_k \mathbf{i}_m + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Определитель в правой части (5.8) есть векторное произведение вектора $\boldsymbol{\omega}$ на относительный радиус-вектор $\delta \mathbf{s}$. Такое векторное произведение может рассматриваться как вектор линейной скорости точки M от вращения частицы как единого целого относительно мгновенной оси, проходящей через точку O , с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, т. е.

$$(\mathbf{V}_{OM})_{\text{вр}} = \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$, проекции которого представляются тремя последними соотношениями (5.5), называется *вектором вихря частицы*.

Что касается первого вектора в правой части (5.8), то это есть дополнительный вектор той скорости, которая обусловлена возможными деформациями частицы. Обозначая его через $(\mathbf{V}_{OM})_{\text{деф}}$, будем иметь:

$$(\mathbf{V}_{OM})_{\text{деф}} = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} \delta x_k \mathbf{i}_m. \quad (5.10)$$

Учитывая обозначения (5.9) и (5.10), равенство (5.8) можно представить в виде

$$\mathbf{V}_{OM} = (\mathbf{V}_{OM})_{\text{вр}} + (\mathbf{V}_{OM})_{\text{деф}}. \quad (5.11)$$

Таким образом, относительное движение точек частицы по отношению к её центру составляется из вращательного движения частицы как целого и движения, обусловленного деформацией частицы.

Возвращаясь к равенству (5.1) и учитывая (5.11), получим:

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_O + (\mathbf{V}_{OM})_{\text{вр}} + (\mathbf{V}_{OM})_{\text{деф}}. \quad (5.12)$$

Равенством (5.12) представляется теорема Гельмгольца о разложении движения частицы жидкости. Согласно этой теореме движение частицы жидкости может быть составлено из трёх движений: 1) поступательного движения, совпадающего с движением центра частицы, 2) вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр частицы, с угловой скоростью, равной вихрю вектора скорости центра, и 3) движения, обусловленного деформацией частицы.

§ 6. Компоненты тензора скоростей деформации частицы

Рассмотрим два прямолинейных элементарных отрезка частицы, параллельных осям x_1 и x_2 (рис. 4). Через промежуток времени Δt эти отрезки сместятся и изменят свои длины и направления. Пусть элементарное смещение точки O будет:

$$\overline{OO'} = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3; t) \Delta t,$$

тогда векторы смещений точек M_1 и M_2 могут быть представлены в виде

$$\overline{M_1 M_1'} = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3; t) \Delta t + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t,$$

$$\overline{M_2 M_2'} = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3; t) \Delta t + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_2} \delta x_2 \Delta t.$$

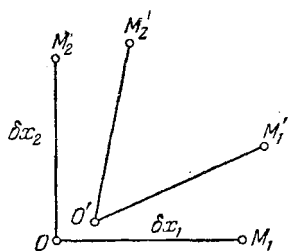


Рис. 4.

При этих предположениях будем иметь следующие координаты точек O' , M_1' и M_2' :

$$O'(x_1 + v_1 \Delta t, x_2 + v_2 \Delta t, x_3 + v_3 \Delta t),$$

$$M_1' \left(x_1 + \delta x_1 + v_1 \Delta t + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t, x_2 + v_2 \Delta t + \right. \\ \left. + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t, x_3 + v_3 \Delta t + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t \right),$$

$$M_2' \left(x_1 + v_1 \Delta t + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \delta x_2 \Delta t, x_2 + \delta x_2 + v_2 \Delta t + \right. \\ \left. + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \delta x_2 \Delta t, x_3 + v_3 \Delta t + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \delta x_2 \Delta t \right).$$

На основании этих координат находим значения длин отрезков:

$$\left. \begin{aligned} O'M'_1 &= \delta x_1 \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t + \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right)^2 \Delta t^2}, \\ O'M'_2 &= \delta x_2 \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t + \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_2} \right)^2 \Delta t^2}, \\ M'_1 M'_2 &= \left\{ \delta x_1^2 + \delta x_2^2 - 2 \delta x_1 \delta x_2 \Delta t \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \Delta t \left(\delta x_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \delta x_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_2} \delta x_2 - \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \delta x_1 \right)^2 \Delta t^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Таким образом, относительные удлинения отрезков, параллельных осям x_1 и x_2 , будут представляться в виде

$$\frac{O'M'_1 - OM_1}{OM_1} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t + \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right)^2 \Delta t^2} - 1,$$

$$\frac{O'M'_2 - OM_2}{OM_2} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t + \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_2} \right)^2 \Delta t^2} - 1.$$

Раскладывая правые части по биному Ньютона и ограничиваясь лишь слагаемыми, содержащими Δt в первой степени, получим:

$$\frac{O'M'_1 - OM_1}{OM_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t,$$

$$\frac{O'M'_2 - OM_2}{OM_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t.$$

Если относительные удлинения отрезков OM_1 и OM_2 разделить на промежуток времени, в течение которого образовались эти относительные удлинения, и перейти к пределу, уменьшая промежуток времени Δt до нуля, то получим скорости деформации удлинений рассматриваемых отрезков

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O'M'_1 - OM_1}{\Delta t OM_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O'M'_2 - OM_2}{\Delta t OM_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \epsilon_{22}.$$

Таким образом, величины

$$\epsilon_{11}, \quad \epsilon_{22}, \quad \epsilon_{33} \quad (6.2)$$

представляют собой скорости деформаций удлинений отрезков, параллельных осям координат. Определим теперь величину скошения прямого угла между отрезками OM_1 и OM_2 . На основании формулы квадрата стороны против острого угла в треугольнике $O'M_1M_2'$ находим:

$$\cos(\widehat{M_1O'M_2'}) = \frac{(O'M_1')^2 + (O'M_2')^2 - (M_1'M_2')^2}{2 O'M_1' \cdot O'M_2'}$$

Подставляя в правую часть значения длин из (6.1) с точностью до Δt в первой степени и производя соответственные сокращения, получим:

$$\cos(\widehat{M_1O'M_2'}) = \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \Delta t}{1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t}$$

Значение косинуса угла $M_1O'M_2'$ будет характеризовать скошение прямого угла M_1OM_2 за промежуток времени Δt . Если величину этого скошения разделить на промежуток времени Δt и перейти к пределу, уменьшая Δt до нуля, то получим скорость деформации скошения или сдвига.

Итак, величины

$$2\varepsilon_{12}, \quad 2\varepsilon_{23}, \quad 2\varepsilon_{31} \quad (6.3)$$

— скорости деформаций сдвига в трёх координатных плоскостях.

Найдём теперь скорость объёмной деформации.

Объём параллелепипеда, рёбрами которого служат отрезки OM_1 , OM_2 и OM_3 , будет (рис. 5):

$$\Delta\tau_0 = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3,$$

объём же косоугольного параллелепипеда, составленного из отрезков $O'M_1'$, $O'M_2'$ и $O'M_3'$, будет представляться в виде определителя третьего порядка из разностей координат концов этих отрезков, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \Delta t \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \Delta t \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Delta t \end{vmatrix} = \\ &= \Delta\tau_0 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t\right) \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t\right) \left(1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Delta t\right) + \Delta t^2 \{ \dots \}. \end{aligned}$$

Таким образом, относительное изменение объёма с точностью до Δt в первой степени будет представляться в виде

$$\frac{\Delta\tau - \Delta\tau_0}{\Delta\tau_0} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \Delta t.$$

Разделяя величину относительной объёмной деформации на промежуток времени Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим *скорость относительной объёмной деформации*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau - \Delta\tau_0}{\Delta t \Delta\tau_0} = \theta = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{kk}. \quad (6.4)$$

Следовательно, скорость относительной объёмной деформации частицы представляется в виде суммы скоростей деформаций удлинений трёх взаимно перпендикулярных отрезков этой частицы.

Найдём скорость абсолютного удлинения отрезка OM произвольного направления. Для этого вектор относительной скорости V_{OM} , представленный в виде (5.8), спроектируем на направление самого отрезка OM , т. е. умножим скалярно на единичный вектор

$$i = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\delta x_k}{\delta s} i_k.$$

Так как при этом проекция вектора линейной скорости от вращения будет равна нулю, то скорость абсолютного удлинения отрезка будет представляться в виде

$$V_{OM} \cdot i = \frac{1}{\delta s} \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{m=1}^{m=3} \epsilon_{mk} \delta x_k \delta x_m. \quad (6.5)$$

С другой стороны, скорость абсолютного удлинения отрезка можно представлять в виде производной по времени от длины самого отрезка, т. е. в виде

$$\frac{d(\delta s)}{dt}.$$

В таком случае из (6.5) будем иметь производную по времени от квадрата длины элементарного отрезка произвольного направления в виде

$$\frac{d}{dt} (\delta s^2) = 2 \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{mk} \delta x_k \delta x_m. \quad (6.6)$$

Итак, с помощью шести величин ϵ_{mk} полностью определяется абсолютная скорость удлинения элементарного отрезка произвольного

направления. На этом основании таблица, составленная из отдельных компонент скорости деформации частицы

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

называется *тензором скоростей деформации частицы*. Тензор скоростей деформации определяет всё состояние деформаций в достаточно малой области около каждой точки пространства, занятого жидкостью.

Заметим, что деформация частицы была выше охарактеризована компонентами скоростей деформации, содержащими лишь первые производные от компонент скоростей смещения. Это случилось потому, что мы в разложении (5.1) ограничились членами, содержащими δx_k лишь в первой степени, и пренебрегли последующими членами вида

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i} \delta x_k \delta x_i.$$

Следовательно, не при всяких размерах частицы и не при всяких изменениях вектора скорости деформация частицы может быть охарактеризована введённым тензором скоростей деформации. Тензор скоростей деформаций, содержащий лишь первые производные от скоростей смещения, будет в достаточной мере характеризовать деформацию частицы тогда, когда размеры её будут настолько малы, что невыписанный последующий член разложения (5.1) будет по модулю намного меньше модуля суммы слагаемых, содержащих первые степени δx_k , т. е.

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_i \delta x_k \right| \ll \left| \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k \right|. \quad (6.8)$$

Неравенство (6.8) позволяет определить допускаемый наибольший размер частицы, при котором её деформация вполне характеризуется тензором скоростей деформаций (6.7).

§ 7. Главные скорости удлинений

Возьмём на продолжении отрезка OM точку K и обозначим координаты этой точки относительно системы координат с началом O через ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Длину отрезка OK обозначим через R . Тогда координаты точки K будут представляться в виде

$$\xi_i = R \frac{\delta x_i}{\delta s} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Определяя отсюда $\delta x'_i$ и подставляя в формулу (6.5) для скорости абсолютного удлинения отрезка OM , получим:

$$\frac{R^2}{\delta s} V_{OM} \cdot i = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} \xi_k \xi_m. \quad (7.1)$$

Длину отрезка OK будем выбирать так, чтобы левая часть (7.1) была постоянной и равной единице, т. е.

$$R^2 = \frac{\delta s}{V_{OM} \cdot i}. \quad (7.2)$$

Правая часть (7.2) представляет собой величину, обратную относительной скорости удлинения отрезка OM . Используя (7.2), получим из (7.1) уравнение геометрического места точек K , квадрат расстояний которых до центра частицы O обратно пропорционален относительной скорости удлинения отрезка, совпадающего с направлением OK , т. е.

$$2\Phi \equiv \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} \xi_k \xi_m = 1. \quad (7.3)$$

Полученная поверхность второго порядка представляет собой *поверхность деформаций* в точке O . Направляющие косинусы нормали к этой поверхности будут пропорциональны частным производным от левой части (7.3) по соответственным координатам, которые будут представляться в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = \sum_{m=1}^{m=3} \varepsilon_{mk} \xi_m = \frac{R}{\delta s} \sum_{m=1}^{m=3} \varepsilon_{mk} \delta x_m. \quad (7.4)$$

Сопоставляя правую часть (7.4) с правой частью (5.10) для вектора скорости перемещения, обусловленного только деформацией частицы, мы видим, что направляющие косинусы нормали к поверхности (7.3) пропорциональны проекциям вектора $(V_{OM})_{деф}$. Следовательно, вектор скорости перемещения, обусловленного деформацией частицы, будет направлен параллельно нормали к поверхности деформаций в точке пересечения этой поверхности с продолжением отрезка OM (рис. 6).

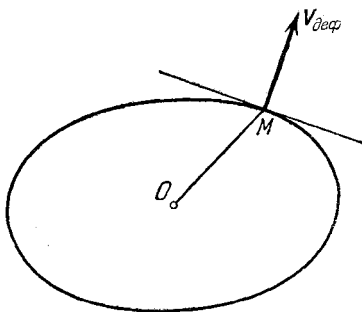


Рис. 6.

Оси, для точек которых векторы скоростей перемещений, обусловленных деформацией частицы, будут направлены в точности по самим отрезкам OM , называются *главными осями деформаций* в точке O . Обозначая скорость деформации относительного удлинения

отрезка, направленного по главной оси, через ε , для скорости абсолютного удлинения и её проекций из (5.6) и (5.7) будем иметь:

$$(V_{OM})_{\text{деф}} = \varepsilon \delta S,$$

$$(v_{kOM})_{\text{деф}} = (V_{OM})_{\text{деф}} \frac{\delta x_k}{\delta S} = \varepsilon \delta x_k = \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mk} \delta x_m.$$

Переноса в одну сторону и раскрывая сумму, получим:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_{11} - \varepsilon) \delta x_1 + \varepsilon_{12} \delta x_2 + \varepsilon_{13} \delta x_3 &= 0, \\ \varepsilon_{21} \delta x_1 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon) \delta x_2 + \varepsilon_{23} \delta x_3 &= 0, \\ \varepsilon_{31} \delta x_1 + \varepsilon_{32} \delta x_2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon) \delta x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Так как все δx_k не равны нулю, то определитель системы должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (7.6)$$

Из этого уравнения мы получим три значения ε : ε_1 , ε_2 и ε_3 . Эти скорости деформаций относительных удлинений отрезков, направленных в точке O по главным осям деформации, называются *главными скоростями удлинений в точке O* . Главные оси деформаций ортогональны между собой. Так как в результате деформации частицы точки на главных осях смещаются только вдоль самих осей, то скорости деформаций сдвига по отношению к этим осям будут обращаться в нуль, т. е. взаимно ортогональные направления главных осей деформации не будут испытывать скошений прямого угла между ними.

На основании соотношения (7.2) и свойств центральной поверхности второго порядка можно заключить, что минимальное и максимальное значения скоростей относительных удлинений отрезков будут находиться среди главных скоростей удлинений.

Развёртывая определитель в левой части (7.6) по степеням ε , получим:

$$-\varepsilon^3 + E_1 \varepsilon^2 + E_2 \varepsilon + E_3 = 0, \quad (7.7)$$

где E_1 , E_2 и E_3 представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}, \\ E_2 &= -\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2, \\ E_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Так как корни уравнения (7.7), определяющего значения главных скоростей деформаций относительных удлинений, не должны меняться с изменением осей координат с началом в точке O , то и коэффициенты этого уравнения E_1 , E_2 и E_3 не должны меняться с поворотом осей координат. Эти коэффициенты, представленные через составляющие тензора скоростей деформаций соотношениями (7.8), называются *инвариантами тензора скоростей деформации*. Первый из этих инвариантов представляет собой скорость относительной объёмной деформации частицы.

Если из диагональных компонент тензора скоростей деформации (6.7) вычесть одну треть от скорости объёмной деформации, то получим *девиатор скоростей деформации*

$$(D_\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \theta & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \frac{1}{3} \theta & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \frac{1}{3} \theta \end{array} \right\}. \quad (7.9)$$

Второй инвариант этого нового тензора, составленный аналогично тому, как был составлен E_2 , после алгебраических преобразований будет представляться в виде

$$E'_2 = \frac{1}{6} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2] + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2. \quad (7.10)$$

Найдём скорость деформации результирующего сдвига по площадке нормаль к которой наклонена к главным осям деформации под одним и тем же углом, т. е. имеет направляющие косинусы, равные

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя в формулы (5.6) и (5.7)

$$\delta x_k = \frac{\delta s}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon_{mk} = 0, \quad m \neq k, \quad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_k,$$

получим:

$$(v_{1 OM})_{\text{деф}} = \varepsilon_1 \frac{\delta s}{\sqrt{3}},$$

$$(v_{2 OM})_{\text{деф}} = \varepsilon_2 \frac{\delta s}{\sqrt{3}},$$

$$(v_{3 OM})_{\text{деф}} = \varepsilon_3 \frac{\delta s}{\sqrt{3}}.$$

Проекцию на нормаль скорости перемещения, обусловленного деформацией, мы получим, если правые части умножим на l , m и n и сложим:

$$(v_n OM)_{\text{деф}} = \frac{\delta s}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Тогда проекция этой скорости на перпендикуляр к нормали будет представляться в виде

$$(v_{\tau OM})_{\text{деф}} = \sqrt{(v_{OM})_{\text{деф}}^2 - (v_n OM)_{\text{деф}}^2} = \delta s \sqrt{\frac{1}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - \frac{1}{9}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2}.$$

Разделив эту скорость на отрезок δs , получим скорость деформации результирующего сдвига ε_{τ} в виде

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (7.11)$$

Если за оси координат мы возьмём главные оси деформаций, то второй инвариант девiatorа скоростей деформации будет представляться в виде

$$E'_2 = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]. \quad (7.12)$$

Таким образом, второй инвариант девiatorа скоростей деформации пропорционален квадрату скорости деформации результирующего сдвига частицы, т. е.

$$E'_2 = \frac{3}{2} \varepsilon_{\tau}^2. \quad (7.13)$$

Скорость деформации результирующего сдвига называется также *интенсивностью скоростей деформации сдвига частицы*.

Если воспользоваться главными скоростями деформаций, то формула (5.10), определяющая скорость смещения точки M за счёт деформации частицы, представится в виде

$$(V_{OM})_{\text{деф}} = \sum_{m=1}^{m=3} \varepsilon_m \delta x_m \mathbf{i}_m. \quad (7.14)$$

Возьмём теперь отрезок OM , наклонённый к осям главных скоростей деформаций (1), (2) под углом в 45° , т. е. имеющий следующие направляющие косинусы:

$$l_1 = \frac{\delta x_1}{\delta s} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_2 = \frac{\delta x_2}{\delta s} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_3 = 0.$$

При этих значениях направляющих косинусов из (7.14) будем иметь:

$$(V_{OM})_{\text{деф}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta s (\varepsilon_1 \mathbf{i}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{i}_2). \quad (7.15)$$

Проектируя этот вектор скорости на направление самого отрезка, получим скорость абсолютного удлинения в виде

$$(V_n OM)_{\text{деф}} = \frac{1}{2} \delta s (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

В таком случае скорость смещения точки M за счёт скошения угла, т. е. за счёт деформации сдвига, будет представляться в виде

$$\begin{aligned} (V_{\tau OM})_{\text{деф}} &= \sqrt{(V_{OM})_{\text{деф}}^2 - (V_n OM)_{\text{деф}}^2} = \\ &= \frac{\delta s}{2} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} = \frac{1}{2} \delta s (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Разделив левую и правую части на δs , получим скорость деформации сдвига на площадке, разделяющей угол между главными направлениями (1) и (2) деформаций на две равные части:

$$\varepsilon_{1'2'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \tag{7.16}$$

где через (1') и (2') мы обозначили направления биссектрис углов между направлениями (1) и (2). Аналогично обстоит дело и со скоростями деформации сдвига на площадках, служащих биссектрисами направлений (2), (3) и (3), (1), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{2'3'} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \varepsilon_{3'1'} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \end{aligned} \right\} \tag{7.17}$$

Величины $\varepsilon_{1'2'}$, $\varepsilon_{2'3'}$, $\varepsilon_{3'1'}$ называются *главными скоростями сдвига*. Следовательно, главные скорости деформации сдвига равны полусуммам главных скоростей удлинений соответственных отрезков. Так как среди значений ε_1 , ε_2 и ε_3 имеется как минимальная скорость удлинения, так и максимальная, то разность именно этих главных скоростей удлинений будет давать максимальное значение скорости деформации сдвига.

§ 8. Компоненты тензора скоростей деформации в криволинейных координатах

Рассмотрим криволинейные ортогональные координаты q_1 , q_2 и q_3 (рис. 7). Элементы координатных линий будут представляться в виде

$$\begin{aligned} \delta s_1 &= H_1 \delta q_1, & \delta s_2 &= H_2 \delta q_2, \\ \delta s_3 &= H_3 \delta q_3, \end{aligned}$$

где H_1 , H_2 и H_3 суть *дифференциальные параметры Ляме*. Выражение для первого из этих коэффициентов мы получим, если рассмотрим квадрат линейного элемента δs_1 в декартовых координатах

$$\delta s_1^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \delta x_i^2$$

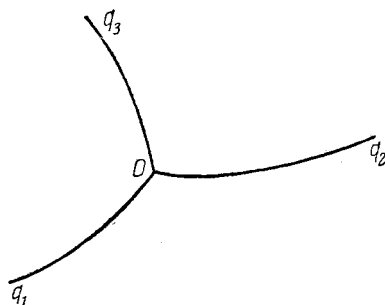


Рис. 7.

и учтём, что приращения δx_i обусловлены приращением только одной координаты q_1 , т. е.

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Тогда получим:

$$\delta s_1^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right)^2 \delta q_1^2,$$

т. е.

$$H_1^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right)^2. \quad (8.1)$$

Так как составляющие вектора скорости точки можно получать с помощью деления элементарных отрезков пути перемещения на элементарный промежуток времени, то эти составляющие вектора скорости в криволинейных координатах будут иметь вид

$$v_1 = H_1 \frac{dq_1}{dt}, \quad v_2 = H_2 \frac{dq_2}{dt}, \quad v_3 = H_3 \frac{dq_3}{dt}. \quad (8.2)$$

Квадрат произвольного линейного элемента в криволинейных ортогональных координатах будет представляться следующим образом:

$$\delta s^2 = \sum_{k=1}^{k=3} H_k^2 \delta q_k^2. \quad (8.3)$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\frac{d}{dt} (\delta s^2) = 2 \sum_{k=1}^{k=3} \left[H_k \frac{dH_k}{dt} \delta q_k^2 + H_k^2 \delta q_k \frac{d \delta q_k}{dt} \right]. \quad (8.4)$$

Так как H_k зависит от времени только через координаты q_i , то

$$\frac{dH_k}{dt} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{v_i}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial q_i}.$$

Обозначение δq_k представляет собой разность значений координаты q_k в двух близких точках, т. е.

$$\delta q_k = q_{k1} - q_k,$$

поэтому будем иметь:

$$\frac{d}{dt} (\delta q_k) = \frac{dq_{k1}}{dt} - \frac{dq_k}{dt} = \frac{v_{k1}}{H_{k1}} - \frac{v_k}{H_k} = \delta \left(\frac{v_k}{H_k} \right) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v_k}{H_k} \right) \delta q_i.$$

Подставляя полученные выражения в (8.4) и заменяя δq_k через δs_k , получим следующую формулу для производной по времени от квадрата линейного элемента:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta s^2) = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \left[\frac{v_i}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \delta s_k^2 + \frac{H_k}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v_k}{H_k} \right) \delta s_i \delta s_k \right]. \quad (8.5)$$

В случае прямолинейных осей координат производная от квадрата линейного элемента представлялась через компоненты скоростей деформации равенством (6.6). Сопоставляя формулы (6.6) и (8.5), мы можем прийти к тому заключению, что компоненты скоростей деформации частицы в криволинейных координатах можно получить из (8.5), собирая коэффициенты при квадратах и при произведениях линейных элементов координатных линий. Например, скорость деформации относительного удлинения отрезка, направленного по касательной к координатной линии q_1 , мы получим, если соберём в правой части (8.5) коэффициенты при δs_1^2 :

$$\varepsilon_{11} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{v_i}{H_i H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{v_1}{H_1} \right). \quad (8.6)$$

Скорость деформации сдвига в плоскости касательных к координатным линиям q_1 и q_2 будет представляться в виде

$$2\varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{v_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{v_2}{H_2} \right). \quad (8.7)$$

Остальные компоненты скоростей деформации частицы можно получить из (8.6) и (8.7), меняя индексы в круговом порядке.

Для определения выражений компонент вихря в криволинейных координатах применим теорему Стокса к элементарной площадке $H_1 \delta q_1 H_2 \delta q_2$. Согласно этой теореме удвоенный поток вектора вихря через площадку равен циркуляции вектора скорости по контуру, ограничивающему эту площадку. Обозначим компоненты вектора вихря через ω_1 , ω_2 и ω_3 . Тогда удвоенный поток вектора вихря через рассматриваемую площадку будет представляться в виде

$$2\omega_3 H_1 H_2 \delta q_1 \delta q_2.$$

Циркуляцию по ограничивающему площадку контуру будем подсчитывать как произведение проекции вектора скорости на касательную к контуру на элемент дуги и на косинус соответственного угла, т. е.

$$\begin{aligned} \Gamma &= (v_1 H_1)_{q_2} \delta q_1 + (v_2 H_2)_{q_1 + \varepsilon q_1} \delta q_2 - (v_1 H_1)_{q_2 + \varepsilon q_2} - (v_2 H_2)_{q_1} = \\ &= \left[\frac{\partial (v_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (v_1 H_1)}{\partial q_2} \right] \delta q_1 \delta q_2. \end{aligned}$$

Таким образом, компонента вихря ω_3 будет представляться в виде

$$\omega_3 = \frac{1}{2H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (v_1 H_1) \right]. \quad (8.8)$$

Выражения для других компонент вихря могут быть получены из (8.8) изменением индексов в круговом порядке.

Рассмотрим цилиндрические координаты r , φ и z (рис. 8). Квадрат линейного элемента представляется в виде

$$\delta s^2 = \delta r^2 + r^2 \delta \varphi^2 + \delta z^2.$$

Следовательно, параметры Ляме будут равны

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

Обозначая компоненты скорости движения через v_r , v_φ и v_z и используя формулы (8.6) и (8.7), получим следующие выражения для скоростей деформации частицы в цилиндрических координатах:

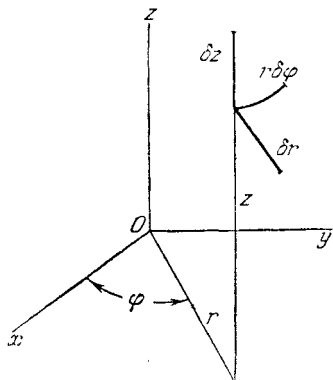


Рис. 8.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right), \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi}, \\ 2\varepsilon_{zr} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Компоненты вектора-вихря в цилиндрических координатах будут представляться в виде

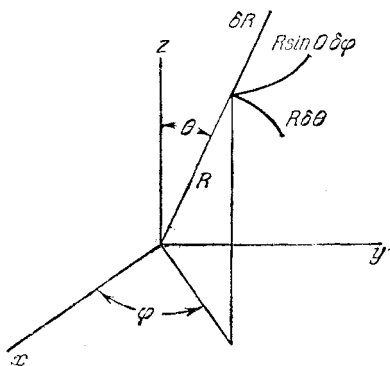


Рис. 9.

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial z} \right], \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right], \\ \omega_z &= \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Квадрат линейного элемента в сферических координатах (рис. 9) R , φ и θ представляется в виде

$$\delta s^2 = \delta R^2 + R^2 \delta \theta^2 + R^2 \sin^2 \theta \delta \varphi^2.$$

Следовательно,

$$H_1 = 1, \quad H_2 = R, \quad H_3 = R \sin \theta.$$

Если обозначить компоненты скорости движения через v_r , v_θ и v_φ , то на основании формул (8.6) и (8.7) получим следующие выраже-

ния для скоростей деформации частицы в сферических координатах:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= \frac{\partial v_R}{\partial R}, & 2\varepsilon_{R\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_R}{R} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R}, & 2\varepsilon_{\varphi R} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{R}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_R}{R}, & 2\varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} \end{aligned} \right\} (8.11)$$

Компоненты вектора-вихря в сферических координатах будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_R &= \frac{1}{2R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi R \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R v_\theta) \right], \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2R \sin \theta} \left[\frac{\partial v_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial R} (v_\varphi R \sin \theta) \right], \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{2R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R v_\theta) - \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} (8.12)$$

§ 9. Компоненты напряжений

Связи в механике заменяются действием особых сил, называемых реакциями связей и прикладываемых в тех точках тела, в которых эти связи осуществляются. Аналогично обстоит дело и в механике деформируемой среды. Если мы хотим рассмотреть какую-либо часть среды, ограниченную некоторой замкнутой поверхностью σ (рис. 10), то мы должны заменить действие остальной массы среды реакциями связей. Так как связь рассматриваемой части с остальной массой среды осуществляется по всей поверхности σ , то реакции связей должны быть распределены по всей поверхности σ . Таким образом, силы воздействия на рассматриваемую часть среды со стороны всей остальной массы суть *силы поверхностные*.

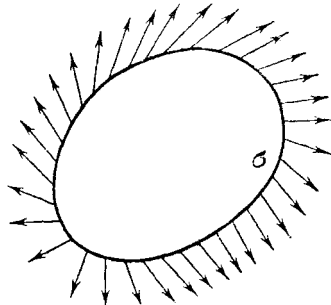


Рис. 10.

Сила воздействия на рассматриваемую часть среды со стороны окружающей массы, отнесённая к единице площади поверхности соприкосновения σ , называется *напряжением* p .

Напряжение представляет собой вектор, зависящий также и от ориентации рассматриваемой элементарной площадки. Последнее обстоятельство отмечается тем, что к обозначению вектора напряжения

присоединяется внизу индекс, указывающий направление нормали к рассматриваемой площадке (рис. 11).

Если мы эту элементарную площадку Δz будем поворачивать так, чтобы нормаль n последовательно совпала с положительными направлениями прямолинейных осей координат, то получим три вектора напряжений:

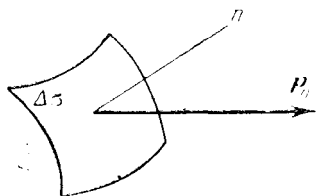


Рис. 11.

$$p_1, p_2, p_3.$$

Проектируя эти три вектора напряжений на оси, получим следующую таблицу компонент напряжений в рассматриваемой точке:

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix}. \quad (9.1)$$

По диагонали будут располагаться те компоненты напряжений, направления которых совпадут с направлениями нормалей трёх взаимно перпендикулярных площадок. Эти компоненты напряжений называются *нормальными напряжениями*. Направления остальных компонент

напряжений будут располагаться в плоскостях самих элементарных площадок и поэтому эти компоненты напряжений называются *касательными напряжениями*.

Рассмотрим теперь тетраэдр $ABCM$ (рис. 12), боковые грани которого $\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3$ соответственно перпендикулярны к осям x_1, x_2, x_3 , а грань основания Δz имеет произвольное направление с нормалью n . Так как внешние нормали к площадкам $\Delta z_1,$

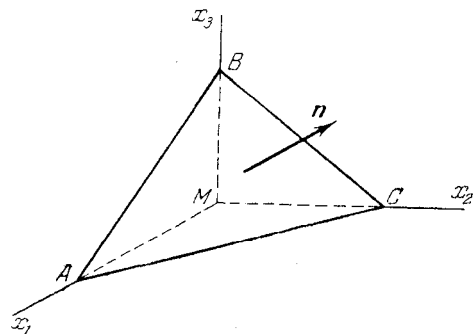


Рис. 12.

$\Delta z_2, \Delta z_3$ параллельны отрицательным направлениям x_1, x_2, x_3 , то векторы напряжений по этим площадкам будем обозначать через

$$p_{-1}, p_{-2}, p_{-3}.$$

Знак минус в индексе означает, что рассматривается напряжение на той стороне площадки, которая обращена наружу тетраэдра, т. е. берём внешнюю нормаль. В силу закона действия и противодействия векторы напряжений, приложенные к обеим сторонам одной и той же элементарной площадки, должны быть равны между собой по величине, но иметь прямо противоположные направления, т. е.

$$p_{-1} = -p_1, \quad p_{-2} = -p_2, \quad p_{-3} = -p_3. \quad (9.2)$$

На тетраэдр, помимо напряжений \mathbf{p}_n , \mathbf{p}_{-1} , \mathbf{p}_{-2} и \mathbf{p}_{-3} , будут действовать ещё массовые силы, вектор которых, отнесённый к единице массы, мы обозначим через \mathbf{F} . Следовательно, по закону Ньютона имеем:

$$\frac{1}{3} h \Delta \tau \rho \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{3} h \Delta \tau \rho \mathbf{F} + \mathbf{p}_n \Delta \tau + \mathbf{p}_{-1} \Delta \tau_1 + \mathbf{p}_{-2} \Delta \tau_2 + \mathbf{p}_{-3} \Delta \tau_3, \quad (9.3)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор ускорения, ρ — плотность и h — высота тетраэдра. Обозначим направляющие косинусы нормали с осями x_1 , x_2 , x_3 через l_1 , l_2 и l_3 , тогда

$$\Delta \tau_k = \Delta \tau l_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Подставляя это в (9.3) и используя равенство (9.2), после разделения на $\Delta \tau$ будем иметь:

$$\frac{1}{3} h \rho \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{3} h \rho \mathbf{F} + \mathbf{p}_n - \sum_{k=1}^{k=3} \mathbf{p}_k l_k. \quad (9.4)$$

Будем теперь переходить к пределу, приближая площадку $\Delta \tau$ к точке M , т. е. уменьшая h до нуля. В результате получим:

$$\mathbf{p}_n = \sum_{k=1}^{k=3} \mathbf{p}_k l_k. \quad (9.5)$$

Таким образом, вектор напряжения на площадке с произвольным направлением нормали полностью определяется тремя векторами напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку, через которую проходит и данная площадка. Следовательно, эти три вектора \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 полностью характеризуют напряжённое состояние в точке. На этом основании эти три вектора, представленные также таблицей (9.1), называются *тензором напряжений*.

Заметим, что равенство (9.5) после умножения на $\Delta \tau$ и замены произведения $\Delta \tau l_k$ через $\Delta \tau_k$ и \mathbf{p}_k через \mathbf{p}_{-k} представится в виде

$$\mathbf{p}_n \Delta \tau + \sum_{k=1}^{k=3} \mathbf{p}_{-k} \Delta \tau_k = 0. \quad (9.6)$$

Это соотношение означает, что для самих сил напряжений, распределённых по сторонам элементарного тетраэдра, выполняется векторное уравнение равновесия. Таким образом, равенство (9.5) можно рассматривать как следствие того положения, что силы напряжений, распределённых по граням элементарного тетраэдра, образуют систему взаимно уравновешенных сил.

§ 10. Главные напряжения

Рассмотрим элементарную площадку с нормалью n (рис. 13). Вектор напряжения на этой площадке будет представляться в виде

$$p_n = \sum_{k=1}^{k=3} p_{kn} l_k.$$

Обе части этого равенства спроектируем на ось x_m , тогда получим следующие выражения для проекций вектора напряжения p_n на оси координат:

$$p_{nm} = \sum_{k=1}^{k=3} p_{kn} l_k \quad (m = 1, 2, 3). \quad (10.1)$$

Умножая левую и правую части на единичный вектор i_m и складывая, получим вектор напряжения на площадке с нормалью n в виде

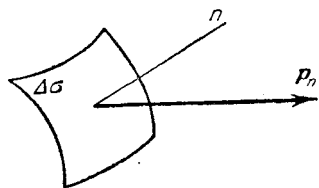


Рис. 13.

$$p_n = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} p_{km} l_k i_m. \quad (10.2)$$

Чтобы найти проекцию вектора напряжения p_n на нормаль n , необходимо каждую проекцию его p_{nm} умножить на косинус угла нормали l_m с осью x_m и сложить.

Следовательно, нормальное напряжение на площадке с нормалью n будет представляться в виде

$$p_{nn} = \sum_{m=1}^{m=3} p_{nm} l_m = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} p_{km} l_k l_m. \quad (10.3)$$

Касательное же напряжение на этой площадке будет определяться равенством

$$p_{nz} = \sqrt{p_n^2 - p_{nn}^2}. \quad (10.4)$$

Отложим теперь вдоль нормали n отрезок OK , относительные координаты конца которого обозначим через ξ_k . Тогда будем иметь:

$$\xi_k = OK l_k.$$

Определяя отсюда l_k и подставляя в правую часть (10.3), получим:

$$(OK)^2 p_{nn} = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} p_{km} \xi_k \xi_m. \quad (10.5)$$

Выберем длину отрезка OK так, чтобы

$$(OK)^2 p_{nn} = 1. \quad (10.6)$$

Тогда уравнение геометрического места концов отрезка, квадрат длины которого обратно пропорционален величине нормального напряжения на площадке с нормалью, совпадающей с направлением самого отрезка, будет представляться в виде

$$2F \equiv \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{km} \xi_k \xi_m = 1. \quad (10.7)$$

Полученная поверхность второго порядка называется *поверхностью напряжений* в рассматриваемой точке.

Направляющие косинусы нормали к поверхности напряжений будут пропорциональны частным производным левой части (10.7) по координатам, которые будут представляться в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_m} = \sum_{k=1}^3 p_{km} \xi_k = OK \sum_{k=1}^3 p_{km} l_k. \quad (10.8)$$

Направляющие косинусы вектора напряжения p_n будут в свою очередь пропорциональны проекциям этого вектора, представленным в виде (10.1). Сравнивая правые части (10.1) и (10.8), заключаем,

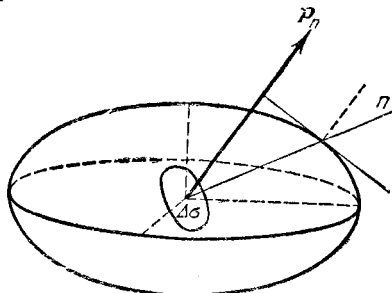


Рис. 14.

что вектор напряжения на площадке с нормалью n будет параллелен направлению нормали к поверхности напряжений в той точке, где нормаль n пересекает поверхность напряжений (рис. 14).

Главные оси поверхности напряжений называются *главными осями напряжений* в рассматриваемой точке. Для площадок, перпендикулярных к главным осям напряжений, вектор напряжений будет направлен строго по нормали к этим площадкам. Таким образом, на главных площадках развиваются только одни нормальные напряжения, которые называются *главными нормальными напряжениями* в точке. Касательные напряжения на главных площадках обращаются в нуль.

На основании соотношения (10.6) заключаем, что экстремальные значения нормальных напряжений будут находиться среди трёх главных нормальных напряжений.

Обозначая главное напряжение через p_* , будем иметь для его проекций следующие выражения:

$$p_{*m} = p_* l_m.$$

Подставляя эти выражения в левую часть (10.1) вместо p_{nm} и развёртывая сумму, получим следующую однородную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (p_{11} - p_*) l_1 + p_{12} l_2 + p_{13} l_3 &= 0, \\ p_{21} l_1 + (p_{22} - p_*) l_2 + p_{23} l_3 &= 0, \\ p_{31} l_1 + p_{32} l_2 + (p_{33} - p_*) l_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Так как направляющие косинусы l_1, l_2, l_3 отличны от нуля, то определитель этой системы должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} p_{11} - p_\nu & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - p_\nu & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - p_\nu \end{vmatrix} = 0. \quad (10.10)$$

Уравнением (10.10) определяются значения p_1, p_2 и p_3 трёх главных напряжений в рассматриваемой точке. Раскрывая определитель в левой части (10.10), получим следующее кубическое уравнение:

$$-p_\nu^3 + P_1 p_\nu^2 + P_2 p_\nu + P_3 = 0, \quad (10.11)$$

где коэффициенты P_1, P_2 и P_3 представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \sum_{k=1}^{k=3} p_{kk}, \\ P_2 &= -p_{11}p_{22} - p_{22}p_{33} - p_{33}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{23}p_{32} + p_{31}p_{13}, \\ P_3 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Полученные выражения P_1, P_2 и P_3 называются *инвариантами тензора напряжений* на том основании, что коэффициенты уравнения (10.11) не будут изменяться при замене одной системы координат через другую с помощью поворота. Первый из этих инвариантов представляет собой сумму нормальных напряжений. Одна треть от этой суммы называется *средним нормальным напряжением* в точке.

Если мы за оси координат возьмём направления, совпадающие с направлениями главных осей напряжений в рассматриваемой точке, то инварианты напряжений будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= p_1 + p_2 + p_3, \\ P_2 &= -p_1 p_2 - p_2 p_3 - p_3 p_1, \\ P_3 &= p_1 p_2 p_3. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Применяя формулу (10.2) к тому случаю, когда за оси координат выбраны направления главных осей напряжений, получим:

$$\mathbf{p}_n = \sum_{k=1}^{k=3} p_k l_k \mathbf{i}_k. \quad (10.14)$$

Возьмём теперь вторую площадку, проходящую через ту же точку и имеющую нормаль \mathbf{n}' с направляющими косинусами l'_k (рис. 15),

Проектируя вектор напряжения \mathbf{p}_n на направление нормали \mathbf{n}' ко второй площадке, получим:

$$p_{nn'} = \sum_{k=1}^{k=3} p_k l_k l'_k. \quad (10.15)$$

Если же взять вектор напряжения \mathbf{p}_n на второй площадке с нормалью \mathbf{n}' и спроектировать его на направление нормали \mathbf{n} к первой площадке, то получим то же выражение (10.15) в правой части. Таким образом, получаем *теорему Коши о взаимности напряжений* на двух площадках, наклонённых друг к другу под произвольным углом

$$p_{nn'} = p_{n'n}. \quad (10.16)$$

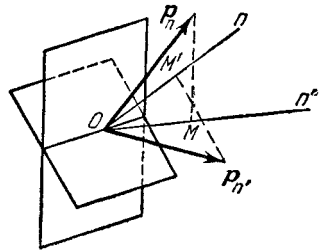


Рис. 15.

Применяя это равенство к трём взаимно перпендикулярным площадкам, нормали к которым совпадают с направлениями произвольных осей координат, получим следующие соотношения *взаимности или сопряжённости касательных напряжений*:

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{23} = p_{32}, \quad p_{31} = p_{13}. \quad (10.17)$$

Возьмём элементарную площадку, нормаль к которой ν совпадает с направлением биссектрисы угла между двумя главными направлениями напряжений, т. е. имеет следующие направляющие косинусы:

$$l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_3 = 0.$$

Вектор напряжения на этой площадке на основании (10.14) будет представляться в виде

$$\mathbf{p}_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2} (p_1 \mathbf{i}_1 + p_2 \mathbf{i}_2). \quad (10.18)$$

Проектируя этот вектор на нормаль ν , получим нормальное напряжение

$$p_{\nu\nu} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2). \quad (10.19)$$

Касательное же напряжение на этой площадке будет равно

$$p_{\nu\tau} = \sqrt{p_1^2 - p_2^2} = \frac{1}{2} (p_1 - p_2). \quad (10.20)$$

Таким образом, разность двух главных нормальных напряжений равна удвоенному касательному напряжению на той площадке, нормаль к которой является биссектрисой угла между рассматриваемыми главными осями напряжений. Касательные напряжения на площадках, нормалью к которым служат биссектрисы углов между направлениями

главных осей напряжений, называются *главными касательными напряжениями*. Таким образом, для главных касательных напряжений будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} 2p_{1'2'} &= p_1 - p_2, \\ 2p_{2'3'} &= p_2 - p_3, \\ 2p_{3'1'} &= p_3 - p_1, \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

где (1'), (2') и (3') обозначают направления указанных биссектрис. Так как из трёх главных нормальных напряжений одно будет иметь наименьшее значение, а другое — наибольшее значение, то разность этих двух будет представлять *максимальное значение касательного напряжения* в рассматриваемой точке. Иначе говоря, из трёх главных касательных напряжений одно будет представлять максимальное касательное напряжение.

Девiatorом напряжений называется тензор, составленный из тензора напряжений с помощью вычитания из диагональных его членов величины среднего нормального напряжения

$$(D_p) = \begin{Bmatrix} p_{11} - \frac{1}{3}P_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \frac{1}{3}P_1 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \frac{1}{3}P_1 \end{Bmatrix} \quad (10.22)$$

Первый линейный инвариант девiatorа напряжений будет равен нулю. Это обстоятельство будет означать, что девiator напряжений своим действием не может изменить объём, а может изменить лишь внешнюю форму объёма, занимаемого частицами. Второй квадратичный инвариант девiatorа напряжений будет представляться в виде

$$6P_2' = (p_{11} - p_{22})^2 + (p_{22} - p_{33})^2 + (p_{33} - p_{11})^2 + 6(p_{12}^2 + p_{23}^2 + p_{31}^2). \quad (10.23)$$

Найдём результирующее касательное напряжение, т. е. то касательное напряжение, которое имеет место на площадке, нормаль к которой ν составляет равные углы со всеми главными осями напряжений. Это результирующее касательное напряжение называется также *интенсивностью касательных напряжений*. Направляющие косинусы нормали к рассматриваемой площадке будут равны

$$l'_k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

На основании (10.1) проекции вектора напряжения на этой площадке будут представляться в виде

$$p_{\nu 1} = \frac{p_1}{\sqrt{3}}, \quad p_{\nu 2} = \frac{p_2}{\sqrt{3}}, \quad p_{\nu 3} = \frac{p_3}{\sqrt{3}}, \quad (10.24)$$

Следовательно, модуль вектора напряжения будет равен

$$p_{\nu} = \sqrt{\frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}. \quad (10.25)$$

Умножая левые и правые части (10.24) на направляющие косинусы нормали, т. е. на $\frac{1}{\sqrt{3}}$, и складывая, получим величину нормального напряжения на рассматриваемой площадке в виде

$$p_{\nu\nu} = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (10.26)$$

В таком случае касательное напряжение на этой площадке, вычисляемое по формуле (10.4), будет равно

$$p_{\nu\tau} = \sqrt{p_{\nu}^2 - p_{\nu\nu}^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2}. \quad (10.27)$$

С другой стороны, второй инвариант девиатора напряжений (10.23) будет представляться через главные напряжения следующим образом:

$$6P_2' = (p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2. \quad (10.28)$$

Следовательно, интенсивность касательных напряжений и второй инвариант девиатора напряжений будут связаны следующей зависимостью:

$$P_2' = \frac{3}{2} p_{\nu\tau}^2. \quad (10.29)$$

§ 11. Обобщённая гипотеза Ньютона

Если рассматривать силу вязкости как касательное напряжение, а производную от скорости движения частицы по нормали к направлению скорости как удвоенную скорость деформации, сдвига, то гипотеза Ньютона о силе вязкости жидкости будет сводиться к тому заключению, что *касательное напряжение пропорционально скорости деформации сдвига*. Такое заключение было сделано в § 4 для случая прямолинейно-параллельного движения жидкости.

Первое обобщение гипотезы Ньютона мы получим, если распространим это заключение и на общий случай движения жидкости, полагая, что *каждая компонента касательного напряжения пропорциональна соответственной скорости деформации сдвига*, т. е.

$$\left. \begin{aligned} p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ p_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \\ p_{31} &= 2\mu\varepsilon_{31}, \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

где μ — коэффициент вязкости.

Далее примем, что *главные оси деформаций совпадают с главными осями напряжений в каждой точке области, занятой*

жидкостью. Жидкость, для которой это положение будет справедливым, называется *изотропной*. В изотропной жидкости нет каких-либо исключительных направлений по отношению к деформациям и напряжениям.

Выберем за оси координат три направления главных осей деформаций и главных осей напряжений и применим формулы (11.1) к главным касательным напряжениям (§ 10) и главным скоростям деформации сдвига (§ 7):

$$\begin{aligned} p_{1'2'} &= 2\mu \varepsilon_{1'2'}, \\ p_{2'3'} &= 2\mu \varepsilon_{2'3'}, \\ p_{3'1'} &= 2\mu \varepsilon_{3'1'}. \end{aligned}$$

Заменяя главные касательные напряжения через главные нормальные напряжения по формулам (10.21) и главные скорости деформации сдвига через главные скорости удлинений по формулам (7.8), получим:

$$\frac{p_1 - p_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{p_2 - p_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{p_3 - p_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = 2\mu. \quad (11.2)$$

Таким образом, для изотропной жидкости отношения разностей главных нормальных напряжений к разностям соответственных главных скоростей удлинений равны между собой и равны удвоенному значению коэффициента вязкости.

Из соотношения (11.2) можно определить разности компонент главных нормальных напряжений, но не каждую компоненту нормального напряжения в отдельности. Следовательно, первого обобщения гипотезы Ньютона, представленного соотношениями (11.1), ещё недостаточно для установления связи между состоянием напряжений и состоянием скоростей деформаций в каждой точке области, занятой жидкостью.

Из трёх соотношений (11.2) независимыми являются только два. Следовательно, для определения трёх компонент p_1 , p_2 и p_3 недостаёт лишь одного соотношения, связывающего нормальные главные напряжения с главными скоростями удлинений. Такое дополнительное соотношение мы получим, если в качестве второго обобщения гипотезы Ньютона примем, что *среднее нормальное напряжение в каждой точке состоит из давления, непосредственно не зависящего от скоростей деформаций, и дополнительного напряжения, пропорционального скорости объёмной деформации*, т. е.

$$\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = p + \lambda' \theta, \quad (11.3)$$

где λ' — второй коэффициент вязкости. Первый коэффициент вязкости был непосредственно связан со скоростью деформации сдвига, второй же коэффициент вязкости связан со скоростью объёмной деформации частицы.

Решая совместно соотношения (11.2) и (11.3), получим следующие равенства для главных нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p + 2\mu\varepsilon_1 + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3}\right) \theta, \\ p_2 &= -p + 2\mu\varepsilon_2 + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3}\right) \theta, \\ p_3 &= -p + 2\mu\varepsilon_3 + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3}\right) \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Таким образом, *главные нормальные напряжения* состояются из давления, из напряжения, пропорционального соответственной главной скорости удлинения, и напряжения, пропорционального скорости объёмной деформации.

Соотношения (11.4) могут быть получены и иным путём, а именно: вначале принимаем, что главные оси напряжений совпадают с осями главных скоростей деформаций. Затем полагаем, что алгебраические разности между главными нормальными напряжениями и давлением будут линейными функциями главных скоростей удлинений, т. е.

$$p_i = -p + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3. \quad (11.5)$$

Покажем, что из трёх коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 независимыми будут только два. Для этого перейдём к новым осям координат x'_1 , x'_2 , x'_3 , получаемых из первых с помощью поворота вокруг оси x_1 (рис. 16) на угол в 90° . По отношению к этим осям (11.5) представится в виде

$$p_i = -p + a_1\varepsilon'_1 + a_2\varepsilon'_2 + a_3\varepsilon'_3. \quad (11.6)$$

Но вследствие

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = -x_2$$

будем иметь:

$$v'_1 = v_1, \quad \varepsilon'_1 = \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \varepsilon_1,$$

$$v'_2 = v_3, \quad \varepsilon'_2 = \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \varepsilon_3,$$

$$v'_3 = -v_2; \quad \varepsilon'_3 = \frac{\partial v'_3}{\partial x'_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \varepsilon_2.$$

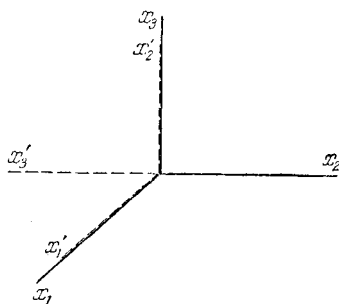


Рис. 16.

Следовательно, равенство (11.6) примет вид

$$p_1 = -p + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_3 + a_3 \varepsilon_2. \quad (11.7)$$

Приравнивая правые части (11.5) и (11.7), получим:

$$a_2 = a_3.$$

В таком случае (11.5) представится в виде

$$p_1 = -p + (a_1 - a_2) \varepsilon_1 + a_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (11.8)$$

Обозначая

$$a_1 - a_2 = 2\mu, \quad a_2 = \lambda,$$

из (11.8) получим:

$$p_1 = -p + 2\mu \varepsilon_1 + \lambda \theta. \quad (11.9)$$

Правая часть (11.9) будет совпадать с правой частью первого соотношения (11.4), если положить:

$$\lambda = \lambda' - \frac{2}{3} \mu. \quad (11.10)$$

Уравнения (11.4) связывают главные нормальные напряжения с главными скоростями удлинений. Чтобы получить соответственные соотношения для нормальных напряжений по трём взаимно перпендикулярным площадкам с произвольной их ориентацией по отношению к главным осям, воспользуемся формулой (10.14), имеющей вид

$$p_n = \sum_{k=1}^{k=3} p_k l_k i_k.$$

Подставляя в правую часть значения p_k из (11.4), получим:

$$p_n = \left[-p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta \right] \sum_{k=1}^{k=3} l_k i_k + 2\mu \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k l_k i_k. \quad (11.11)$$

Сумма, входящая множителем в первое слагаемое в правой части, представляет собой единичный вектор нормали к рассматриваемой площадке, т. е.

$$\sum_{k=1}^{k=3} l_k i_k = i,$$

вторая же сумма согласно формуле (7.14), а затем формуле (5.10) может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k l_k i_k = \frac{(V_{OM})_{\text{деф}}}{\delta S} = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} l'_k i_m,$$

где l'_k — направляющие косинусы нормали по отношению к осям координат, не совпадающим с направлениями главных осей напряжений и деформаций в рассматриваемой точке.

Таким образом, вектор напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} будет представляться в виде

$$\mathbf{p}_n = \left[-p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta \right] \mathbf{i} + 2\mu \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} l'_k \mathbf{i}_m. \quad (11.12)$$

Проектируя левую и правую части (11.12) на нормаль, т. е. умножая скалярно на единичный вектор нормали

$$\mathbf{i} = \sum_{m=1}^{m=3} l'_m \mathbf{i}_m,$$

получим выражение для нормального напряжения в виде

$$p_{nn} = -p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{m=1}^{m=3} \varepsilon_{mk} l'_k l'_m. \quad (11.13)$$

Скорость относительного удлинения отрезка, совпадающего с нормалью \mathbf{n} , мы получим из формулы (6.5), если поделим левую и правую части этой формулы на δs и заменим

$$\frac{\delta x_k}{\delta s} = l'_k, \quad \frac{\delta x_m}{\delta s} = l'_m.$$

Следовательно, скорость ε_{nn} относительного удлинения отрезка будет представляться в виде

$$\varepsilon_{nn} = \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{mk} l'_k l'_m. \quad (11.14)$$

Итак, нормальное напряжение на площадке с произвольным направлением нормали \mathbf{n} представляется следующим образом:

$$p_{nn} = -p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{nn}. \quad (11.15)$$

Применяя эту формулу к площадкам, нормали к которым будут совпадать с положительными направлениями осей координат x_1 , x_2 и x_3 , получим:

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= -p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{11}, \\ p_{22} &= -p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{22}, \\ p_{33} &= -p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

Полученные соотношения (11.1) и (11.16) связывают между собой все шесть компонент напряжений и все шесть компонент скоростей

деформации частицы. Их можно объединить в виде следующей зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций:

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} = \left[-p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta \right] \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} + 2\mu \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (11.17)$$

Тензор, у которого элементы по диагонали равны единице, а все остальные равны нулю, называется *единичным тензором*. Это соотношение показывает, что *тензор напряжений является линейной неоднородной функцией от тензора скоростей деформаций частицы*.

Если мы учтём выражения компонент скоростей деформации частицы через компоненты скоростей движения её центра, то соотношения (11.1) и (11.16) представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta, \\ p_{22} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta, \\ p_{33} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta; \\ p_{12} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \\ p_{23} &= \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ p_{31} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

Равенства (11.18) представляют собой в окончательном виде *обобщённую гипотезу Ньютона, устанавливающую дифференциальную связь между компонентами напряжений и скоростями движений частиц жидкости*.

Девiator напряжений (10.22) через главные нормальные напряжения представляется в виде

$$(D_p) = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} p_1 - p_2 - (p_3 - p_1) & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - p_3 - (p_1 - p_2) & 0 \\ 0 & 0 & p_3 - p_1 - (p_2 - p_3) \end{Bmatrix}.$$

Девiator скоростей деформаций (7.9), представленный через главные скорости удлинений, имеет вид

$$(D_\varepsilon) = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \end{Bmatrix}.$$

Если значения разностей главных нормальных напряжений в (D_p) заменим согласно (11.2) через разности главных скоростей удлинений, то мы получим:

$$(D_p) = 2\mu (D_\epsilon). \quad (11.19)$$

Таким образом, обобщение гипотезы Ньютона, представленное соотношениями (11.1) или (11.2), по своему существу означает, что девиатор напряжений пропорционален девиатору скоростей деформации, причём коэффициент пропорциональности равен удвоенному коэффициенту вязкости.

Заметим, что соотношение (11.3) есть не что иное, как линейное соотношение между линейным инвариантом тензора напряжений (P_1) и линейным инвариантом тензора скоростей деформаций (E_1) , т. е.

$$P_1 = -3p + 3\lambda' E_1. \quad (11.20)$$

Аналогично обстоит дело и с соотношениями (11.2). Если мы возьмём квадратичный инвариант девиатора напряжений (10.28), заменим в нём разности напряжений из (11.2) и учтём выражение (7.12) для квадратичного инварианта тензора скоростей деформации, то получим:

$$P'_2 = 4\mu^2 E'_2. \quad (11.21)$$

Таким образом, обобщённая гипотеза Ньютона сводится к линейному соотношению (11.20) линейных инвариантов тензоров напряжений и скоростей деформации и к линейному соотношению (11.21) квадратичных инвариантов девиаторов напряжений и скоростей деформаций. Это обстоятельство указывает на то, что обобщённая гипотеза Ньютона обладает свойством инвариантности, т. е. она не зависит от выбора системы координат. Наконец, подставляя в (11.21) значения P'_2 из (10.29) и значения E'_2 из (7.13), получим:

$$p_{\tau\tau} = 2\mu \epsilon_{\tau\tau}. \quad (11.22)$$

Таким образом, обобщение гипотезы Ньютона, представленное соотношениями (11.1) или (11.2), сводится к тому, что интенсивность касательных напряжений пропорциональна интенсивности скоростей деформаций сдвига.

На основании (10.26) нормальное напряжение на площадке результирующего сдвига сводится лишь к среднему нормальному напряжению. Следовательно, соотношение (11.3) можно представить также в виде

$$p_{\nu\nu} = -p + \lambda' \theta. \quad (11.23)$$

Таким образом, второе обобщение гипотезы Ньютона сводится к установлению линейного неоднородного соотношения между нормальным напряжением на площадке результирующего сдвига и скоростью объёмной деформации.

Уравнения (11.18), представляющие гипотезу Ньютона в окончательном виде, содержат два коэффициента вязкости μ и λ' . Эти два коэффициента вязкости следует рассматривать как физические постоянные, зависящие прежде всего от температуры и, может быть, от давления. Так как в процессе движения жидкости температура, вообще говоря, не будет оставаться постоянной, то и введённые коэффициенты вязкости, вообще говоря, тоже должны рассматриваться как переменные величины, зависящие через температуру от времени и координат рассматриваемой частицы. Зависимость значения первого коэффициента вязкости от давления начинает проявляться

при сравнительно больших давлениях, причём по исследованиям Бриджмена¹⁾ вязкость многих жидкостей увеличивается до давлений 2000—3000 ат приблизительно по линейному закону, а затем это увеличение проходит по более резко поднимающейся кривой.

Можно считать оба коэффициента вязкости строго постоянными лишь в том случае, когда можно пренебречь изменениями температуры при движении жидкости и когда нет внешних источников изменения температуры и давления внутри области, занятой жидкостью.

Первый коэффициент вязкости μ является основным. Для его определения существует множество различных способов, основанных на применении тех конечных формул, которые могут быть получены в результате интегрирования соответственных дифференциальных уравнений с использованием соотношений (11.18) для частных случаев движения жидкости. О некоторых из этих способов мы будем говорить ниже. Что же касается второго коэффициента вязкости, необходимость учёта которого может возникать только при рассмотрении того движения жидкости или газа, в котором явно проявляется свойство их сжимаемости, то до последнего времени его совершенно не учитывали. И только в связи с исследованиями Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича²⁾ влияния внутренних процессов с большим временем релаксации на распространение звука в жидкости было указано на необходимость учёта второго коэффициента вязкости. В отдельных случаях значение второго коэффициента вязкости может намного превышать значение основного коэффициента вязкости. Но приборов по определению второго коэффициента вязкости пока не предложено.

§ 12. Различные виды сред

В предшествующем параграфе напряжения были поставлены в зависимость только от скоростей деформации частиц, причём эта зависимость была принята в простейшей своей форме, т. е. в виде линейного соотношения (11.20) между первыми инвариантами тензоров напряжений и скоростей деформаций и линейного соотношения (11.19) между самими девиаторами напряжений и скоростей деформации. Будем жидкость называть *вязкой*, если для неё будут приняты соотношения (11.19) и (11.20).

Полагая оба коэффициента вязкости равными нулю:

$$\mu = 0, \quad \lambda' = 0,$$

получим жидкость, в которой напряжённое состояние в каждой точке характеризуется одним лишь давлением, не зависящим явно от скоростей деформации частиц. Такая жидкость называется *идеальной*.

Понятия идеальной и вязкой жидкости отражают лишь приближённо объективно существующие свойства реальных жидкостей и газов. Лишь некоторые из них могут с достаточной степенью точности изучаться либо с помощью гипотезы идеальной жидкости, либо с помощью гипотезы вязкой жидкости. Но в некоторых случаях не только гипотеза идеальной жидкости, но и гипотеза вязкой жидкости может оказаться недостаточной. Так, например, для масля-

¹⁾ Бриджмен П. В., Физика высоких давлений, ОНТИ, 1935.

²⁾ Леонтович М. А., и Мандельштам Л. И., Журн. exper. и теор. физики, т. VII, 1937.

ных красок, для различных суспензий, для смазочных масел при низких температурах гипотеза о вязкости в форме соотношения (11.19) оказалась недостаточной, и потребовалось её изменение в сторону прибавления дополнительного слагаемого, представляющего собой так называемое *предельное напряжение сдвига*.

Всё сказанное выше даёт основание к тому, чтобы, помимо гипотез об идеальности или вязкости жидкости, рассмотреть и некоторые другие гипотезы, устанавливающие иные связи между состоянием напряжений и состоянием деформаций в каждой точке.

Сопоставляя соотношения (11.1) и (11.16), мы видим, что нормальные и касательные напряжения находятся не в одинаковом отношении к соответственным скоростям деформаций. В то время как касательные напряжения обращаются в нуль вместе со скоростями деформаций сдвига, нормальные напряжения не обращаются в нуль при обращении в нуль соответственных скоростей деформаций удлинений. Следовательно, можно ставить вопрос о том, чтобы уравнять отношения напряжений к скоростям деформаций. Это можно сделать, если положить в соотношениях (11.16) или (11.4) давление равным нулю. Тогда получим следующие соотношения, связывающие напряжения со скоростями деформаций:

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{11}, \\ p_{22} &= \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{22}, \\ p_{33} &= \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta + 2\mu \varepsilon_{33}, \\ p_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12}, \\ p_{23} &= 2\mu \varepsilon_{23}, \\ p_{31} &= 2\mu \varepsilon_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

При таком предположении среднее нормальное напряжение строго пропорционально скорости объёмной деформации, т. е.

$$\frac{1}{3} (p_{11} + p_{22} + p_{33}) = \lambda' \theta. \quad (12.2)$$

Соотношения (12.1) и (12.2) по своему формальному виду совпадают с соотношениями для упругой среды, подчиняющейся обобщённому закону Гука, с той лишь разницей, что вместо самих деформаций для упругой среды в рассматриваемом случае входят скорости деформаций. На этом основании гипотетическую среду, для которой принимаются соотношения (12.1), можно именовать *чисто вязкой средой*. В чисто вязкой среде напряжения возникают лишь тогда, когда возникают скорости деформаций частиц. Дифференциальные уравнения движения такой среды впервые были предложены ещё Коши в 1828 г., а затем в 1877 г. Бочером¹⁾. В качестве примера такой чисто вязкой среды Бочер привёл канадский бальзам.

Другая возможность уравнять отношения напряжений и скоростей деформаций будет заключаться в том, чтобы и касательное напряжение связать со скоростью деформации сдвига также неоднородным соотношением. Например, соотношения (11.22) и (11.23) мы можем заменить новыми, имеющими вид

$$\left. \begin{aligned} p_{\nu\tau} &= -p + \lambda' \theta, \\ p_{\nu\tau} &= \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\nu\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

¹⁾ Butcher, Proc. Lond. Math. Soc., vol. VIII, 1877.

где слагаемое ϑ следует именовать *предельным напряжением сдвига*. Среду, для которой принимаются соотношения (12.3), можно называть *пластически-вязкой средой*. Впервые такую пластически-вязкую среду ввёл в рассмотрение Бочер¹⁾, а затем и Бингам²⁾. В своих исследованиях Бингам показал, что примерами пластически-вязкой среды могут служить масляные краски и некоторые виды суспензий. М. П. Волярович³⁾ рассматривал смазочные масла при низких температурах также как пластически-вязкие среды. Им же разработаны и некоторые приборы для определения величины предельного напряжения сдвига. Второе соотношение (12.3) с заменой $p_{\nu\tau}$ и $\varepsilon_{\nu\tau}$ через максимальные компоненты было использовано А. А. Ильюшиным⁴⁾ в созданной им теории пластически-вязких деформаций некоторых металлов.

До сих пор состояние деформаций характеризовалось одним только тензором скоростей деформаций. Если для характеристики состояния деформаций в каждой точке среды привлечь, помимо тензора скоростей деформаций, ещё и тензор самих деформаций, то можно получить и другие соотношения, отвечающие другим видам сред с различными механическими свойствами. Скорость деформации представляет собой величину деформации, образованную за единицу времени. Следовательно, чтобы получить величину деформации, образованную за конечный промежуток времени, надо скорость этой деформации умножить на дифференциал времени и проинтегрировать, например, от нуля до произвольного момента времени t . Таким образом, величины объёмной деформации и девиатора самих деформаций могут быть представлены в виде

$$e = \frac{1}{3} \int_0^t \theta dt, \quad (12.4)$$

$$(D_e) = \int_0^t (D_\varepsilon) dt. \quad (12.5)$$

Примем, что первый инвариант тензора напряжений линейно зависит от первых инвариантов тензоров деформаций и скоростей деформаций, т. е.

$$\frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) = -p + \lambda' \theta + \lambda \int_0^t \theta dt. \quad (12.6)$$

Кроме того, положим, что и девиатор напряжений также линейно представляется через девиаторы деформаций и скоростей деформаций, т. е.

$$(D_p) = (D_g) + 2\mu (D_\varepsilon) + 2G \int_0^t (D_\varepsilon) dt, \quad (12.7)$$

где (D_g) — постоянный девиатор. Соотношения (12.6) и (12.7) обобщают соотношения (11.3) и (11.19) в сторону учёта дополнительных слагаемых в правых частях, пропорциональных самим деформациям. Поэтому они в себе будут содержать уже как частные случаи, и те соотношения, которые имеют место для вязкой среды, для упругой среды и упруго-пластической среды. Эти соотношения включают в себя также и случай *последствияем*.

1) См. сноску на стр. 67.

2) Bingham, Fluidity and Plasticity, New-York, 1922.

3) Волярович М. П., Вязкость смазочных масел, Изд. АН СССР, 1944.

4) Ильюшин А. А., Учёные записки МГУ, вып. 39, 1940.

В самом деле, положим в последнем соотношении (12.7) постоянный девиатор равным нулю. Применяя это соотношение к одной из компонент сдвига, будем иметь:

$$p_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + 2G \int_0^t \varepsilon_{ik} dt. \quad (12.8)$$

Полагая напряжение равным нулю, а μ и G не зависящими от времени, после дифференцирования будем иметь:

$$\frac{d\varepsilon_{ik}}{dt} + \frac{G}{\mu} \varepsilon_{ik} = 0.$$

После интегрирования этого уравнения получим:

$$\varepsilon_{ik} = (\varepsilon_{ik})_0 e^{-\frac{G}{\mu} t}. \quad (12.9)$$

Скорость деформации сдвига будет убывать после обращения в нуль соответственного напряжения по закону показательной функции, а как раз этим свойством и характеризуется среда с простейшим видом последействия.

Идея учёта вязкости для твёрдых упругих тел была впервые выдвинута Кельвином¹⁾ в 1878 г., но формальные соотношения вида (12.8) были введены в рассмотрение позднее Фогтом²⁾ в 1892 г.

В соотношении (12.6) первый инвариант тензора скоростей деформаций входит один раз явно и второй раз под знаком интеграла, тогда как первый инвариант тензора напряжений входит только явно. Аналогичное положение имеет место и в соотношении (12.7) по отношению к девиаторам. Следовательно, соотношения (12.6) и (12.7) можно и далее обобщить, полагая, что напряжения будут в новых соотношениях представлены так же, как и скорости деформаций. В таком случае получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) + \frac{\alpha_2}{3} \int_0^t (p_1 + p_2 + p_3) dt + \alpha_3 \theta + \alpha_4 \int_0^t \theta dt = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 (D_p) + \beta_2 \int_0^t (D_p) dt + \beta_3 (D_\varepsilon) + \beta_4 \int_0^t (D_\varepsilon) dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Соотношения (12.10), содержащие 10 коэффициентов, будут представлять среду, в которой состояния напряжений и деформаций будут находиться в достаточно сложной зависимости друг от друга.

Частный случай *среды с релаксацией напряжений*, введённый Максвеллом³⁾ в 1868 г., мы получим, если положим:

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

В самом деле, применяя второе соотношение (12.10) к компоненте напряжения сдвига, получим:

$$\beta_1 p_{ik} + \beta_2 \int_0^t p_{ik} dt + \beta_4 \int_0^t \varepsilon_{ik} dt = 0, \quad (12.11)$$

1) Kelvin, Math. and Phys. Papers, т. 3, Cambridge, 1890.

2) Voigt, Ann. Phys. Chem (Wiedeman), т. 47, 1892.

3) Maxwell J. C., Phil. Mag. (4), 35, 1868.

Положим, что коэффициенты β_1 и β_2 не зависят от времени, тогда после дифференцирования (12.11) получим:

$$\beta_1 \frac{dp_{ik}}{dt} + \beta_2 p_{ik} + \beta_4 \epsilon_{ik} = 0. \quad (12.12)$$

Соотношение (12.12) как раз и представляет собой то соотношение, которое было принято Максвеллом. Полагая скорость деформации сдвига ϵ_{ik} равной нулю и проводя интегрирование, получим:

$$p_{ik} = (p_{ik})_0 e^{-\frac{\beta_2}{\beta_1} t},$$

т. е. напряжение после обращения скорости деформации в нуль будет убывать по закону показательной функции. Отношение $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ называется *периодом релаксации напряжения*.

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Уравнение неразрывности

Положение фиксированной точки пространства в области, занятой жидкостью, будем определять с помощью криволинейных ортогональных координат q_1 , q_2 и q_3 . Через эту точку проведём три линейных элемента координатных линий δs_1 , δs_2 , δs_3 , равные

$$\delta s_1 = H_1 \delta q_1, \quad \delta s_2 = H_2 \delta q_2, \quad \delta s_3 = H_3 \delta q_3. \quad (1.1)$$

Рассмотрим параллелепипед, построенный на этих трёх линейных элементах (рис. 17). Компоненты вектора скорости частиц будут представляться в виде

$$v_1 = H_1 \frac{dq_1}{dt}, \quad v_2 = H_2 \frac{dq_2}{dt}, \quad v_3 = H_3 \frac{dq_3}{dt}. \quad (1.2)$$

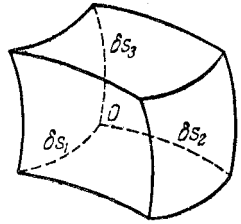


Рис. 17.

Проконтролируем изменение массы в фиксированном параллелепипеде двумя способами: 1) способом непосредственного подсчёта изменения масс и 2) способом учёта входа и выхода масс через границы.

В момент t масса в фиксированном параллелепипеде

$$(\rho)_t H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3.$$

В момент $t + \Delta t$

$$(\rho)_{t+\Delta t} H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 = \left[(\rho)_t + \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots \right] H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3.$$

Следовательно, приращение массы в рассматриваемом параллелепипеде за промежуток времени Δt будет равно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \Delta t \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 + \dots \quad (1.3)$$

Точками в правой части (1.3) отмечены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости за счёт лишнего множителя Δt в разных степенях.

Теперь проконтролируем вход и выход массы через грани, перпендикулярные к касательным к координатной линии q_1 . Через переднюю грань, проходящую через точку O с координатами q_1, q_2 и q_3 , войдёт за промежуток времени Δt масса, равная

$$(\rho v_1 H_2 H_3)_{q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

Через противоположную грань, проходящую через точку с координатами $q_1 + \delta q_1, q_2, q_3$, из параллелепипеда выйдет за тот же промежуток времени масса, равная

$$\begin{aligned} & (\rho v_1 H_2 H_3)_{q_1 + \delta q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t = \\ & = \left[(\rho v_1 H_2 H_3)_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) \delta q_1 + \dots \right] \delta q_2 \delta q_3 \Delta t. \end{aligned}$$

Следовательно, внутри параллелепипеда задержится масса, равная

$$- \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (1.4)$$

Точками в правой части отмечены те слагаемые, которые имеют, по крайней мере, один лишний множитель δq_1 . Если мы возьмём две грани, перпендикулярные к касательным к координатной линии q_2 , а затем и перпендикулярные к касательным линиям q_3 , и проведём аналогичные рассуждения, то для количеств массы, задержавшихся внутри параллелепипеда, получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_3 H_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots, \\ & - \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Складывая выражения (1.4) и (1.5), получим то приращение массы внутри параллелепипеда, которое будет иметь место за счёт входа и выхода массы через его границы за промежуток времени Δt :

$$- \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (1.6)$$

Предполагаем, что внутри параллелепипеда источников нет; тогда изменение массы за счёт изменения плотности, представленное выражением (1.3), и изменение массы (1.6) за счёт входа и выхода её через границы должны быть равны между собой, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \Delta t \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 + \dots = & - \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_3 H_2) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (1.7) \end{aligned}$$

Это уравнение представляет собой уравнение изменения массы в элементарном фиксированном параллелепипеде. Делим обе части равенства (1.7) на произведение

$$H_1 H_2 H_3 \Delta t \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3$$

и переходим к пределу, стягивая параллелепипед в точку ($\delta q_1 \rightarrow 0$, $\delta q_2 \rightarrow 0$, $\delta q_3 \rightarrow 0$), а промежуток времени Δt к нулю. Тогда все бесконечно малые слагаемые высшего порядка обратятся в нуль, и мы получим уравнение изменения масс в фиксированной точке пространства в криволинейных координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) \right] = 0, \quad (1.8)$$

которое называется также *уравнением неразрывности*. Уравнение неразрывности связывает локальное и конвективное изменения плотности жидкости с изменениями скоростей при переходе от одной фиксированной точки к другой.

Рассмотрим случай, когда положение фиксированной точки пространства определяется с помощью обычных декартовых координат x , y и z . В этом случае мы будем иметь:

$$\begin{aligned} q_1 &= x, & q_2 &= y, & q_3 &= z; \\ v_1 &= u, & v_2 &= v, & v_3 &= w; \\ H_1 &= 1, & H_2 &= 1, & H_3 &= 1, \end{aligned}$$

и уравнение неразрывности (1.8) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (1.9)$$

Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), то уравнение неразрывности (1.9) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) обычно называется *уравнением несжимаемости*. Левая часть этого уравнения представляет собой *дивергенцию вектора скорости*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{V}. \quad (1.11)$$

Так как дивергенция вектора скорости представляет собой предел отношения потока несжимаемой жидкости через бесконечно малую замкнутую поверхность к величине объёма, охватываемого этой поверхностью, то в криволинейных координатах эта дивергенция будет представляться выражением (1.6) с обратным знаком, поделён-

ным на объём и сокращённым на плотность. Таким образом, для *дивергенции вектора скорости* в криволинейных координатах получим следующее выражение:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 H_1 H_2) \right]. \quad (1.12)$$

Если существует *потенциал скоростей* φ , то

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ v_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, & v_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, & v_3 &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В этом случае дивергенция вектора скорости будет равна дифференциальному оператору Лапласа от потенциала скоростей, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi,$$

по аналогии

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right] = \Delta \varphi \quad (1.14)$$

Формула (1.14) представляет оператор Лапласа в криволинейных координатах.

Произведение плотности ρ на вектор скорости частиц называется *вектором плотности потока массы*. В таком случае уравнение неразрывности (1.8) связывает локальное изменение плотности с дивергенцией вектора плотности потока массы.

§ 2. Уравнение переноса количества движения

Теорему об изменении количества движения в фиксированном объёме можно сформулировать следующим образом:

Количество движения в фиксированном объёме изменяется за счёт: 1) входа и выхода масс через границы объёма, 2) действия импульса внешних массовых сил и 3) действия импульса поверхностных сил напряжений.

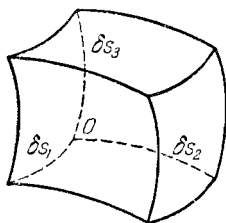


Рис. 18.

Проведём подсчёт изменений количества движения в фиксированном параллелепипеде с длинами рёбер δs_1 , δs_2 и δs_3 (рис. 18).

Обозначим через \mathbf{F} вектор силы, отнесённый к единице массы жидкости, а через \mathbf{p}_{-1} , \mathbf{p}_{-2} , \mathbf{p}_{-3} — векторы напряжений на площадках, перпендикулярных к касательным к координатным линиям q_1 , q_2 и q_3 и проходящих через точку $O(q_1, q_2, q_3)$. Знаки минусы в индексах означают, что нормали к этим площадкам направлены против положительных направлений координатных линий. В этом случае можно положить:

$$\mathbf{p}_{-1} = -\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_{-2} = -\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_{-3} = -\mathbf{p}_3.$$

В момент t масса, заключённая в параллелепипеде, имеет вектор количества движения, равный

$$(\rho \mathbf{V})_t H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3,$$

в момент же $t + \Delta t$ вектор количества движения в рассматриваемом параллелепипеде будет равен

$$(\rho \mathbf{V})_{t+\Delta t} H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 = \left[(\rho \mathbf{V})_t + \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} \Delta t + \dots \right] H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3.$$

Следовательно, приращение вектора количества движения в фиксированном параллелепипеде будет равно

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \Delta t \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 + \dots \quad (2.1)$$

Теперь проконтролируем изменение количества движения за счёт входа и выхода масс.

Через грань, перпендикулярную к касательной к координатной линии \hat{q}_1 , входящая масса $\rho v_1 H_2 H_3 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t$ внесёт с собой в параллелепипед вектор количеств движения

$$(\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3)_{q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

Через противоположную грань из параллелепипеда выйдет масса со следующим вектором количеств движения:

$$\begin{aligned} (\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3)_{q_1 + \delta q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t = \\ = \left[(\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3)_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3) \delta q_1 + \dots \right] \delta q_2 \delta q_3 \Delta t. \end{aligned}$$

Следовательно, внутри параллелепипеда задержится вектор количеств движения, равный

$$-\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (2.2)$$

Проводя аналогичные рассуждения по отношению к граням, перпендикулярным к касательным к координатным линиям q_2 и q_3 , получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 \mathbf{V} H_3 H_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots, \\ -\frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 \mathbf{V} H_1 H_2) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Складывая выражения (2.2) и (2.3), получим приращение вектора количеств движения за счёт входа и выхода массы через границы параллелепипеда

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 \mathbf{V} H_3 H_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 \mathbf{V} H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (2.4) \end{aligned}$$

Подсчитаем изменение количества движения за счёт действия сил.

Приращение количества движения массы в параллелепипеде за счёт действия объёмной силы \mathbf{F} будет равно элементарному импульсу этой силы, т. е.

$$\rho F H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t. \quad (2.5)$$

На грань, перпендикулярную к касательной к координатной линии q_1 , действует импульс от вектора напряжения, равный

$$\mathbf{p}_{-1} H_2 H_3 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t = -(\mathbf{p}_1 H_2 H_3)_{q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

На противоположную грань с нормалью, направленной в положительную сторону координатной линии, будет действовать импульс, равный

$$(\mathbf{p}_1 H_2 H_3)_{q_1 + \delta q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t = \left[(\mathbf{p}_1 H_2 H_3)_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 H_2 H_3) \delta q_1 + \dots \right] \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

Следовательно, результирующий импульс от этих двух импульсов будет равен

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 H_2 H_3) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (2.6)$$

Проводя аналогичные рассуждения по отношению к граням, перпендикулярным к касательным к координатным линиям q_2 и q_3 , получим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_2 H_3 H_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots, \\ & \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 H_1 H_2) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Складывая выражения (2.6) и (2.7), получим то приращение количества движения внутри фиксированного параллелепипеда, которое обусловлено действием векторов напряжений по граням:

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (2.8)$$

Других источников изменения количества движения внутри фиксированного параллелепипеда нет. Поэтому изменение количества движения, представленное выражением (2.1), мы должны приравнять сумме отдельных приращений (2.4), (2.5) и (2.8):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho V)}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots = \rho F H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 \mathbf{V} H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 \mathbf{V} H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (2.9) \end{aligned}$$

Уравнение (2.9) представляет собой *уравнение изменения количества движения в элементарном фиксированном параллелепипеде*. Обе части равенства (2.9) разделим на

$$H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t$$

и перейдем к пределу, стягивая параллелепипед в точку ($\delta q_1 \rightarrow 0$, $\delta q_2 \rightarrow 0$, $\delta q_3 \rightarrow 0$), а промежуток времени Δt уменьшая до нуля. Тогда невыписанные члены высшего порядка малости, отмеченные точками, обратятся в нуль, и мы получим *уравнение изменения количества движения в фиксированной точке пространства*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 \mathbf{V} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 \mathbf{V} H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 \mathbf{V} H_1 H_2) \right] = \\ = \rho \mathbf{F} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 H_1 H_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Сопоставим выражения (1.6) § 1 с выражением (2.4). Если в выражении (1.6) § 1 под знаки производных по обобщенным координатам входили проекции вектора плотности потока самой массы, умноженные на произведения параметров Ляме, то в выражении (2.4) под знаки этих производных входит три вектора: $\rho v_1 \mathbf{V}$, $\rho v_2 \mathbf{V}$, $\rho v_3 \mathbf{V}$, представляющие собой векторы количества движения, переносимые массой через площадки, перпендикулярные к координатным линиям. Эти три вектора образуют симметричный тензор, который можно назвать *тензором плотности потока количества движения частиц жидкости*. Уравнение (2.10) можно назвать также *уравнением переноса количества движения*. Это уравнение было впервые введено в рассмотрение Максвеллом¹⁾ в созданной им кинетической теории газов.

Обращаясь к уравнению (2.10), мы видим, что локальное изменение вектора плотности потока самой массы обусловлено не только действием объемной силы \mathbf{F} , но и действием векторов напряжения \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 и векторов переносимого количества движения $\rho v_1 \mathbf{V}$, $\rho v_2 \mathbf{V}$, $\rho v_3 \mathbf{V}$. При этом действие последних векторов проявляется с формальной стороны так же, как и действие векторов напряжений, взятых с обратным знаком. На этом основании эти векторы можно объединить, полагая

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \rho v_1 \mathbf{V} - \mathbf{p}_1, \\ \sigma_2 &= \rho v_2 \mathbf{V} - \mathbf{p}_2, \\ \sigma_3 &= \rho v_3 \mathbf{V} - \mathbf{p}_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Эти три вектора образуют тензор, который называется *тензором плотности потока импульсов*. Вводя три вектора σ_1 , σ_2 , σ_3 ,

1) Maxwell, On the dynamical theory of gases, Phil. Trans. CLVII, 1866.

уравнение (2.10) можно представить в виде

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = \rho F + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\sigma_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\sigma_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\sigma_3 H_1 H_2) \right]. \quad (2.12)$$

Для случая обычных прямолинейных координат x, y, z уравнение переноса количества движения (2.10) представится следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = \rho F + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x - \rho u V) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y - \rho v V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z - \rho w V). \quad (2.13)$$

§ 3. Дифференциальные уравнения движения среды в напряжениях

Левую часть уравнения (2.10) можно представить в виде

$$V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(\rho v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) \right] \right\} + \\ + \rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right].$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой левую часть уравнения неразрывности (1.7), т. е. оно обращается в нуль. Следовательно, уравнение (2.10) можно представить следующим образом:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{k=3} \frac{v_k}{H_k} \frac{\partial V}{\partial q_k} = \\ = \rho F + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho_3 H_1 H_2) \right]. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) есть *дифференциальное уравнение движения сплошной среды в векторной форме в криволинейных ортогональных координатах, представленное через напряжения*. Это уравнение можно получить и иным путём, применяя закон Ньютона к фиксированной массе внутри параллелепипеда с рёбрами $\delta s_1, \delta s_2$ и δs_3 .

Левая часть уравнения (3.1) представляет собой вектор ускорения, т. е. изменение вектора скорости фиксированной частицы с постоянной массой. Первое слагаемое левой части представляет собой лишь *местное (локальное) изменение вектора скорости*, а остальные три слагаемых — *конвективное изменение вектора скорости частицы с постоянной массой*, связанное с переходом этой частицы из одного положения в пространстве в другое. Сумма всех слагаемых представляет собой *индивидуальную производную от вектора скорости фиксированной частицы с постоянной массой*. Аналогично будет выражаться индивидуальная производная от любой другой величины, связанной с фиксированной частицей постоянной массы. Так, напри-

мер, индивидуальная производная от температуры фиксированной частицы постоянной массы будет представляться в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{v_k}{H_k} \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Заметим, что уравнение, выражающее закон Ньютона для фиксированной частицы с постоянной массой, мы получили из уравнения (2.10). Если исходить из уравнения (3.1), выражающего закон Ньютона, то, прибавляя к левой части произведение вектора скорости \mathbf{V} на левую часть уравнения неразрывности (1.7), мы получим уравнение (2.10), выражающее изменение количества движения в фиксированной точке пространства. Следовательно, используемая в § 2 теорема об изменении вектора количества движения в фиксированном элементарном параллелепипеде для случая среды частиц с постоянными массами полностью эквивалентна закону Ньютона. Однако приводимая в § 2 формулировка теоремы об изменении количества движения имеет преимущество по сравнению с обычной формулировкой закона Ньютона. Это преимущество заключается не только в том, что для вывода уравнения (2.10) не потребовалось понятия ускорения фиксированной частицы, но и в том, что рассуждения по выводу уравнения (2.10) оказались весьма простыми и сходными с рассуждениями по выводу уравнения (1.7) изменения масс. Следовательно, способ Эйлера изучения движения только в окрестности фиксированной точки пространства проведён последовательно не только при выводе уравнения неразрывности, но и при выводе основного уравнения движения среды.

Входящие в уравнение (3.1) векторы \mathbf{V} , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 можно представить в виде суммы произведений проекций этих векторов на касательные к координатным линиям на единичные векторы этих касательных \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^{k=3} v_k \mathbf{i}_k, \\ \mathbf{p}_m &= \sum_{k=1}^{k=3} p_{mk} \mathbf{i}_k. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

При подстановке этих выражений (3.2) в уравнение (3.1) следует учитывать, что единичные векторы \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 и \mathbf{i}_3 меняют своё направление. Подсчёт частных производных от единичных векторов по координатам проведём для частных случаев.

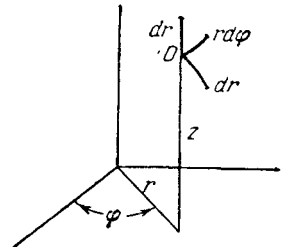
Для случая обычных декартовых координат будем иметь:

$$\begin{aligned} q_1 &= x, & q_2 &= y, & q_3 &= z; \\ H_1 &= 1, & H_2 &= 1, & H_3 &= 1; \\ \mathbf{i}_1 &= \text{const}, & \mathbf{i}_2 &= \text{const}, & \mathbf{i}_3 &= \text{const}; \\ v_1 &= u, & v_2 &= v, & v_3 &= w. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (3.1) в проекциях на декартовы оси координат представится в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Возьмём теперь случай цилиндрических координат. Для этого случая будем иметь (рис. 19)



$$\left. \begin{aligned} q_1 &= r, & q_2 &= \varphi, & q_3 &= z; \\ H_1 &= 1, & H_2 &= r, & H_3 &= 1; \\ v_1 &= v_r, & v_2 &= v_\varphi, & v_3 &= v_z; \\ p_{11} &= p_{rr}, & p_{12} &= p_{r\varphi}, & p_{13} &= p_{rz}; \\ p_{21} &= p_{\varphi r}, & p_{22} &= p_{\varphi\varphi}, & p_{23} &= p_{\varphi z}; \\ p_{31} &= p_{zr}, & p_{32} &= p_{z\varphi}, & p_{33} &= p_{zz}. \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Рис. 19.

Из единичных векторов \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 последний будет постоянным, а первые два будут меняться по углу φ . Из теоретической механики известно, что

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_1, \quad \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_2.$$

В данном случае вектор угловой скорости поворота направлен по оси Z и по величине равен $\frac{d\varphi}{dt}$, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{i}_3,$$

а поэтому будем иметь:

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{d\varphi} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, \quad \frac{d\mathbf{i}_2}{d\varphi} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1. \quad (3.5)$$

Учитывая эти равенства, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r \mathbf{i}_1 + v_\varphi \mathbf{i}_2 + v_z \mathbf{i}_3) = \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3 + v_r \mathbf{i}_2 - v_\varphi \mathbf{i}_1, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_2) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (p_{\varphi r} \mathbf{i}_1 + p_{\varphi\varphi} \mathbf{i}_2 + p_{\varphi z} \mathbf{i}_3) = \\ &= \frac{\partial p_{\varphi r}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial p_{\varphi z}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3 + p_{\varphi r} \mathbf{i}_2 - p_{\varphi\varphi} \mathbf{i}_1. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

Подставляя в уравнение (3.1) выражения (3.2), (3.4) и (3.6) и собирая коэффициенты слева и справа при одинаковых единичных векторах, получим следующие дифференциальные уравнения движения сплошной среды в цилиндрических координатах в компонентах напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ &= F_r + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{r} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \\ &= F_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2p_{r\varphi}}{r} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{rz}}{r} \right), \end{aligned} \right\} (3.7)$$

Возьмём теперь случай сферических координат (рис. 20). Для этого случая будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= R, & q_2 &= \theta, & q_3 &= \varphi; \\ H_1 &= 1, & H_2 &= R, & H_3 &= R \sin \theta; \\ v_1 &= v_R, & v_2 &= v_\theta, & v_3 &= v_\varphi; \\ p_{11} &= p_{RR}, & p_{12} &= p_{R\theta}, & p_{13} &= p_{R\varphi}; \\ p_{21} &= p_{\theta R}, & p_{22} &= p_{\theta\theta}, & p_{23} &= p_{\theta\varphi}; \\ p_{31} &= p_{\varphi R}, & p_{32} &= p_{\varphi\theta}, & p_{33} &= p_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

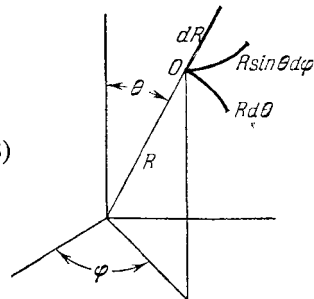


Рис. 20.

В данном случае все единичные векторы изменяют своё направление при переходе из одной точки в другую, если этот переход связан с изменением двух координат θ и φ . Вектор угловой скорости поворота с изменением угла θ будет направлен по касательной к координатной линии φ , т. е.

$$\omega_\theta = \frac{d\theta}{dt} i_3.$$

Вектор же угловой скорости поворота с изменением угла φ будет направлен по оси Z , и поэтому будем иметь:

$$\omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} (\cos \theta i_1 - \sin \theta i_2).$$

Учитывая эти равенства и равенства для производных от единичных векторов по времени, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial \theta} &= \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, & \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial \varphi} &= (\cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2) \times \mathbf{i}_1 = \sin \theta \mathbf{i}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial \theta} &= \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, & \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial \varphi} &= (\cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2) \times \mathbf{i}_2 = \cos \theta \mathbf{i}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{i}_3}{\partial \theta} &= \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0, & \frac{\partial \mathbf{i}_3}{\partial \varphi} &= (\cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2) \times \mathbf{i}_3 = -\cos \theta \mathbf{i}_2 - \sin \theta \mathbf{i}_1. \end{aligned} \right\} (3.9)$$

На основании этих равенств будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} [v_R \mathbf{i}_1 + v_\theta \mathbf{i}_2 + v_\varphi \mathbf{i}_3] = \\ &= \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{i}_3 + v_R \mathbf{i}_2 - v_\theta \mathbf{i}_1, \\ \frac{\partial V}{\partial q_3} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} [v_R \mathbf{i}_1 + v_\theta \mathbf{i}_2 + v_\varphi \mathbf{i}_3] = \\ &= \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3 + \\ &+ v_R \sin \theta \mathbf{i}_3 + v_\theta \cos \theta \mathbf{i}_3 - v_\varphi \cos \theta \mathbf{i}_2 - v_\varphi \sin \theta \mathbf{i}_1, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_2) &= \frac{\partial}{\partial \theta} [R \sin \theta (p_{\theta R} \mathbf{i}_1 + p_{\theta \theta} \mathbf{i}_2 + p_{\theta \varphi} \mathbf{i}_3)] = \\ &= R \cos \theta (p_{\theta R} \mathbf{i}_1 + p_{\theta \theta} \mathbf{i}_2 + p_{\theta \varphi} \mathbf{i}_3) + \\ &+ R \sin \theta \left[\frac{\partial p_{\theta R}}{\partial \theta} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial p_{\theta \theta}}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial p_{\theta \varphi}}{\partial \theta} \mathbf{i}_3 + p_{\theta R} \mathbf{i}_2 - p_{\theta \theta} \mathbf{i}_1 \right], \\ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_3) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} [R (p_{\varphi R} \mathbf{i}_1 + p_{\varphi \theta} \mathbf{i}_2 + p_{\varphi \varphi} \mathbf{i}_3)] = \\ &= R \left(\frac{\partial p_{\varphi R}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial p_{\varphi \theta}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial p_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3 + p_{\varphi R} \sin \theta \mathbf{i}_3 + \right. \\ &\left. + p_{\varphi \theta} \cos \theta \mathbf{i}_3 - p_{\varphi \varphi} \cos \theta \mathbf{i}_2 - p_{\varphi \varphi} \sin \theta \mathbf{i}_1 \right). \end{aligned} \right\} (3.10)$$

Подставляя в уравнение (3.1) выражения (3.2), (3.8) и (3.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых единичных векторах слева и справа, получим следующие дифференциальные уравнения движения сплошной среды в сферических координатах в компонентах

напряжений:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{R} = \\
 & = F_R + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{\theta R}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p_{\varphi R}}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R} (2p_{RR} + \operatorname{ctg} \theta p_{\theta R} - p_{\theta\theta} - p_{\varphi\varphi}) \right], \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_R v_\theta}{R} - \frac{v_\varphi^2}{R} \operatorname{ctg} \theta = \\
 & = F_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R} (p_{\theta\theta} \operatorname{ctg} \theta + 3p_{\theta R} - p_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta) \right], \\
 & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_R}{R} + \frac{v_\varphi v_\theta}{R} \operatorname{ctg} \theta = \\
 & = F_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R} (2p_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 3p_{\varphi R}) \right].
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

§ 4. Уравнение переноса полной энергии

Переходя к выводу уравнения изменения энергии в фиксированном элементарном объёме, заметим, что в термодинамике под внутренней энергией системы подразумевается та часть полной энергии, которая зависит от температуры, объёма и химического состава системы, при этом, если пренебрегать энергией взаимодействия частиц системы друг с другом, то внутренняя энергия обладает свойством аддитивности, и поэтому можно ввести понятие *удельной внутренней энергии* ε , представляющей внутреннюю энергию единицы массы. Если мы будем рассматривать фиксированный объём, не изменяющийся во времени, то полная удельная энергия единицы массы будет состоять из кинетической энергии $\frac{1}{2} V^2$ и внутренней энергии ε .

Изменение полной энергии массы в фиксированном малом объёме за малый промежуток времени Δt будет состояться из отдельных изменений за счёт: 1) входа и выхода масс через границы объёма, 2) элементарной работы объёмной силы F , 3) элементарной работы векторов напряжений p_1 , p_2 , p_3 и 4) притока тепла благодаря теплопроводности. Другие источники изменения полной энергии (излучение и пр.) мы учитывать не будем.

Подсчитаем отдельные изменения полной энергии в фиксированном параллелепипеде с рёбрами δs_1 , δs_2 , δs_3 .

В момент t масса, содержащаяся в фиксированном объёме $\delta s_1 \delta s_2 \delta s_3$, будем иметь полную энергию, равную

$$\left[\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \rho \right]_t H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3,$$

а в момент $t + \Delta t$ будет иметь:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right]_{t+\Delta t} H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 = \\ & = \left\{ \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right]_t + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right] \Delta t + \dots \right\} H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3. \end{aligned}$$

Следовательно, приращение полной энергии в фиксированном объёме за промежуток времени Δt представится в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right] \Delta t H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 + \dots \quad (4.1)$$

Через грань, перпендикулярную к касательной к координатной линии q_1 и проходящую через точку O с координатами q_1, q_2, q_3 , входящая масса $\rho v_1 H_2 H_3 \delta q_2 \delta q_3$ внесёт с собой в параллелепипед следующее количество полной энергии:

$$\left[\rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_2 H_3 \right]_{q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

Через противоположную грань, проходящую через точку с координатами $q_1 + \delta q_1, q_2, q_3$, выходящая масса вынесет количество полной энергии, равное

$$\begin{aligned} \left[\rho v_1 H_2 H_3 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right]_{q_1 + \delta q_1} \delta q_2 \delta q_3 &= \left\{ \left[\rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_2 H_3 \right]_{q_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_2 H_3 \right] \delta q_1 + \dots \right\} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t. \end{aligned}$$

Следовательно, внутри параллелепипеда задержится следующее количество полной энергии:

$$- \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_2 H_3 \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (4.2)$$

Повторяя такие же рассуждения по отношению к граням, перпендикулярным к касательным к координатным линиям q_2 и q_3 , получим:

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\rho v_2 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_3 H_1 \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots, \\ & - \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\rho v_3 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_1 H_2 \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Складывая выражения (4.2) и (4.3), получим приращение полной энергии в фиксированном объёме за счёт входа и выхода масс через

границы объёма за малый промежуток времени Δt :

$$- \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_2 H_3 \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\rho v_2 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_3 H_1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\rho v_3 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_1 H_2 \right] \right\} \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t - \dots \quad (4.4)$$

Изменение полной энергии, обусловленное элементарной работой объёмной силы \mathbf{F} , представится в виде

$$\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} H_1 H_2 H_3 \Delta t \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3. \quad (4.5)$$

Элементарная работа сил напряжений, распределённых по грани, перпендикулярной к касательной к координатной линии q_1 , представится в виде

$$\mathbf{p}_{-1} \cdot \mathbf{V} \Delta t H_2 H_3 \delta q_2 \delta q_3 = - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3)_{q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

Элементарная работа сил напряжений, распределённых по противоположной грани, будет равна

$$(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3)_{q_1 + \delta q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t = \\ = \left[(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3)_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3) \delta q_1 + \dots \right] \delta q_2 \delta q_3 \Delta t,$$

алгебраическая сумма этих двух элементарных работ будет равна

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (4.6)$$

Повторяя такие же рассуждения по отношению к другим граням, получим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V} H_3 H_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots, \\ & \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V} H_1 H_2) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Складывая выражения (4.6) и (4.7), получим то изменение полной энергии в фиксированном объёме, которое обусловлено элементарной работой всех сил напряжений, распределённых по границам параллелепипеда:

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V} H_3 H_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V} H_1 H_2) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (4.8)$$

Подсчитаем теперь приращение полной энергии, обусловленное процессом теплопроводности. Обозначим температуру через T , коэффициент теплопроводности через χ , а термический эквивалент работы через A .

Через переднюю грань, перпендикулярную к касательной к координатной линии q_1 , за промежуток времени Δt будет передано по закону Фурье следующее количество тепла:

$$-\left(\chi \frac{\partial T}{H_1 \partial q_1} H_2 H_3\right)_{q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t.$$

Через противоположную грань за тот же промежуток времени будет передано количество тепла, равное

$$\begin{aligned} & -\left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1}\right)_{q_1 + \delta q_1} \delta q_2 \delta q_3 \Delta t = \\ & = -\left[\left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1}\right)_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1}\right) \delta q_1 + \dots\right] \delta q_2 \delta q_3 \Delta t. \end{aligned}$$

Следовательно, внутри параллелепипеда задержится следующее количество тепла:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1}\right) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (4.9)$$

Повторяя такие же рассуждения по отношению к остальным граням параллелепипеда, получим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{H_3 H_1}{H_2}\right) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots, \\ & \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3}\right) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Складывая выражения (4.9) и (4.10) и деля на термический эквивалент A , получим то приращение полной энергии в фиксированном объёме, которое обусловлено процессом теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{H_3 H_1}{H_2}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3}\right) \right] \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t + \dots \quad (4.11) \end{aligned}$$

Других источников изменения полной энергии в рассматриваемом объёме нет, поэтому приращение энергии, представленное выражением (4.1), мы должны приравнять сумме отдельных приращений, представленных формулами (4.4), (4.5), (4.8) и (4.11). Обе части полученного равенства разделим на $H_1 H_2 H_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \Delta t$ и перейдём к пределу, стягивая параллелепипед в точку и уменьшая промежуток времени Δt до нуля. В результате получим

следующее уравнение изменения полной энергии в фиксированной точке области, занятой средой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = & - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_2 H_3 \right] + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\rho v_2 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_3 H_1 \right] + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\rho v_3 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) H_1 H_2 \right] + \\ & + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V} H_3 H_1) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V} H_1 H_2) \right] + \frac{1}{A H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(x \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(x \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{H_3 H_1}{H_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(x \frac{\partial T}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \right) \right] \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) можно также называть *уравнением переноса полной энергии*. Оно в своей простейшей форме было введено впервые в рассмотрение Н. А. Умовым¹⁾ в 1873 г.

Группируя слагаемые в правой части (4.12), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = & \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\left(\rho v_1 \frac{V^2}{2} + \rho v_1 \varepsilon - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} - \frac{x}{A H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) H_2 H_3 \right] + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\left(\rho v_2 \frac{V^2}{2} + \rho v_2 \varepsilon - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V} - \frac{x}{A H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) H_3 H_1 \right] + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\left(\rho v_3 \frac{V^2}{2} + \rho v_3 \varepsilon - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V} - \frac{x}{A H_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) H_1 H_2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выражение в фигурной скобке в правой части (4.13) представляет собой дивергенцию особого вектора, который можно назвать *вектором плотности потока переноса полной энергии*. Обозначая этот вектор через \mathbf{E} , для его компонент будем иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \rho v_1 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} - \frac{x}{A H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1}, \\ E_2 &= \rho v_2 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V} - \frac{x}{A H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2}, \\ E_3 &= \rho v_3 \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V} - \frac{x}{A H_3} \frac{\partial T}{\partial q_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

¹⁾ Умов Н. А., Избранные сочинения, Гостехиздат, 1950.

При этих обозначениях уравнение переноса полной энергии (4.13) представится в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (E_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (E_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (E_3 H_1 H_2) \right]. \quad (4.15)$$

В декартовых координатах уравнение переноса полной энергии (4.15) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad (4.16)$$

где проекции E_x , E_y и E_z вектора плотности потока полной энергии равны

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \rho u \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) - \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{V} - \frac{\chi}{A} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ E_y &= \rho v \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) - \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{V} - \frac{\chi}{A} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ E_z &= \rho w \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) - \mathbf{p}_z \cdot \mathbf{V} - \frac{\chi}{A} \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

§ 5. Уравнение изменения внутренней энергии

Преобразуем полученное уравнение (4.12) переноса полной энергии. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V^2 &= \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \mathbf{V}, \end{aligned}$$

то уравнение (4.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\rho \mathbf{V} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_3} - \right. \\ &\quad \left. - F - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{p}_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{p}_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{p}_3 H_1 H_2) \right] \right\} + \\ &\quad + \left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon \right) \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_3 H_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) \right] \right\} + \rho \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_3} \right] = \\ &= \mathbf{p}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{H_1 \partial q_1} + \mathbf{p}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{H_2 \partial q_2} + \mathbf{p}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{H_3 \partial q_3} + \frac{1}{A H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{H_3 H_1}{H_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Первая фигурная скобка в силу уравнения (3.1), вторая — на основании уравнения (1.8) обращаются в нуль. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_3} \right] = \\ = \mathbf{p}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{H_1 \partial q_1} + \mathbf{p}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{H_2 \partial q_2} + \mathbf{p}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{H_3 \partial q_3} + \frac{1}{AH_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{H_3 H_1}{H_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \right) \right]. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Так как выражение в скобке в левой части (5.1) представляет собой индивидуальную производную от внутренней энергии фиксированной частицы, то полученное уравнение есть *уравнение изменения внутренней энергии фиксированной частицы с постоянной массой*.

В декартовых координатах уравнение (5.1) изменения внутренней энергии представится в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \\ + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Раскрывая скалярные произведения трёх первых слагаемых в правой части (5.2), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + p_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + p_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + p_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения взаимности касательных напряжений (10.17) главы I и обозначения компонент скоростей деформаций (5.5) главы I, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \\ = p_{xx} \varepsilon_{xx} + p_{yy} \varepsilon_{yy} + p_{zz} \varepsilon_{zz} + 2p_{xy} \varepsilon_{xy} + 2p_{yz} \varepsilon_{yz} + 2p_{zx} \varepsilon_{zx}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

С помощью соотношений (11.1), (11.16) главы I, представляющих обобщённую гипотезу Ньютона для вязкой жидкости, равенство (5.3) можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \\ = -p\theta + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta^2 + 2\mu [\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)]. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (5.2) изменения внутренней энергии фиксированной частицы вязкой жидкости представится в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \\ = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - p' + \\ + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta^2 + 2\mu [\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)]. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Уравнение (5.5) можно рассматривать как уравнение притока внутренней энергии за единицу времени в фиксированной частице вязкой жидкости. Источниками изменения внутренней энергии частицы вязкой жидкости, таким образом, будут: 1) теплота, поступающая благодаря процессу теплопроводности, 2) работа сил давлений, связанная с изменением плотности частиц, и 3) некоторая часть работы вязких напряжений.

Для случая так называемого совершенного (идеального) газа внутренняя энергия единицы массы равна

$$\varepsilon = \frac{c_v T}{A}. \quad (5.6)$$

Принимая теплоёмкость c_v постоянной и подставляя значение ε в уравнение (5.5), получим следующее уравнение притока тепла для совершенного вязкого газа:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_v}{A} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - p' + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (5.7) \end{aligned}$$

§ 6. Дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

В § 3 были установлены дифференциальные уравнения движения жидкости в напряжениях. Чтобы написать эти уравнения через проекции вектора скорости, необходимо воспользоваться соотношениями, представляющими компоненты тензора напряжения через компоненты тензора скоростей деформации. Такое преобразование мы проведём лишь для случая вязкой жидкости, для которой принимается обобщённая гипотеза Ньютона, связывающая компоненты напряжения с компонентами скоростей деформаций линейными соотношениями (11.1) и (11.16) главы I.

В декартовых координатах соотношения (11.18) главы I, представляющие обобщённую гипотезу Ньютона, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3}\right)\theta, & p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3}\right)\theta, & p_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3}\right)\theta, & p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Будем считать жидкость несжимаемой, т. е.

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.2)$$

Кроме того, положим коэффициент вязкости μ постоянным:

$$\mu = \text{const.} \quad (6.3)$$

Подставляя при этих предположениях выражения (6.1) в правые части уравнений (3.3), получим следующие дифференциальные уравнения движения вязкой и несжимаемой жидкости, представленные через составляющие вектора скорости в декартовых координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где Δ — дифференциальный оператор Лапласа, а ν — кинематический коэффициент вязкости.

Пользуясь выражениями (8.9) главы I для скоростей деформаций, можно представить обобщённую гипотезу Ньютона для несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических координатах следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, & p_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right), \\ p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), & p_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & p_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в правые части уравнений (3.7) и используя уравнение несжимаемости (6.2), представленное в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (6.6)$$

получим дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости в цилиндрических координатах

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \\ &= F_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \end{aligned} \right\} (6.7)$$

где оператор Лапласа Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.8)$$

Обобщённая гипотеза Ньютона в сферических координатах при использовании равенств (8.11) главы I представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{RR} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_R}{\partial R}, \\ p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{v_R}{R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R} \right), \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{v_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right); \\ p_{R\theta} &= \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} \right), \quad p_{\varphi R} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{R} \right), \\ p_{\varphi\theta} &= \mu \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} \right). \end{aligned} \right\} (6.9)$$

Подставляя выражения (6.9) в правые части уравнений (3.11) и используя уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{2v_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R} = 0, \quad (6.10)$$

получим дифференциальные уравнения движения несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости в сферических координатах

натах

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{R} = \\
 & = F_R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left(\Delta v_R - \frac{2v_R}{R^2} - \frac{2v_\theta}{R^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_R v_\theta}{R} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{R} = \\
 & = F_\theta - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right), \\
 & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_R v_\varphi}{R} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} = \\
 & = F_\varphi - \frac{1}{\rho R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} \right),
 \end{aligned} \right\} (6.11)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (6.12)$$

Аналогичным путём можно получить дифференциальные уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости с переменными коэффициентами вязкости.

Что касается других сред, рассмотренных в § 12 главы I, то дифференциальные уравнения движения таких сред можно выразить через составляющие вектора скорости только в тех случаях, когда соотношения, связывающие напряжённое состояние с состоянием деформаций, могут быть разрешены относительно всех компонент напряжений. Во всех других случаях необходимо соотношения связи напряжений с деформациями рассматривать совместно с дифференциальными уравнениями движения среды в напряжениях.

§ 7. Начальные и граничные условия для вязкой несжимаемой жидкости

Для изучения движения вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости необходимо решать совместно систему дифференциальных уравнений (6.2) и (6.4) с частными производными второго порядка. Решения этой системы дифференциальных уравнений будут содержать произвольные функции, для определения которых необходимо задавать *начальные и граничные условия*. Задание начальных условий необходимо лишь в том случае, когда изучается неустановившееся движение жидкости. В этом случае должно считаться известным всё движение жидкости для какого-либо фиксированного момента времени, например для начального момента $t = 0$.

Для этого момента времени должно быть задано распределение скоростей и давлений, т. е.

$$\text{при } t = 0 \quad u = u_0(x, y, z), \quad v = v_0(x, y, z), \quad \omega = \omega_0(x, y, z), \\ p = p_0(x, y, z), \quad (7.1)$$

где u_0 , v_0 , ω_0 и p_0 — заданные функции координат.

Во многих случаях на искомые функции u , v , ω и p накладываются ограничения, вытекающие из существа самих задач, не только в отношении однозначности, но и в отношении ограниченности их значений. Эти требования однозначности и ограниченности искомых функций играют роль своего рода краевых условий, так как они позволяют исключать из решений произвольные функции, вносящие неоднозначность в распределение скоростей и давлений либо обрастающие их в бесконечность.

К простейшим граничным условиям относятся: 1) условия на твёрдых недеформируемых стенках, вообще говоря, подвижных и 2) условия на деформирующихся поверхностях раздела, отделяющих две несмешивающиеся жидкости.

При обтекании вязкой несжимаемой жидкостью твёрдых стенок должно выполняться следующее *кинематическое условие*: частицы не могут проникать через твёрдые стенки и отрываться от них. Это кинематическое условие будет выполнено, если существует равенство проекций на нормаль к поверхности стенки векторов скоростей частиц жидкости и соответственных точек твёрдой стенки, т. е.

$$V_{\tau n} = V_{\tau n}. \quad (7.2)$$

Этого условия было достаточно для изучения движения идеальной жидкости, для которой дифференциальные уравнения содержали лишь частные производные от скоростей u , v и ω первого порядка. Для изучения же движения вязкой жидкости одного условия (7.2) будет недостаточно не только с физической точки зрения, но и с формальной, так как порядок дифференциальных уравнений повысился. К кинематическому условию (7.2) необходимо присоединить ещё и *динамическое условие*. Коль скоро мы допустили, что частицы вязкой жидкости взаимодействуют друг с другом не только давлением, но и с помощью внутреннего трения, то с тем же основанием мы должны предположить и наличие касательного взаимодействия частиц жидкости с точками стенки. Это касательное взаимодействие частиц жидкости с точками стенки будет представлять собой *внешнее трение жидкости*. Силу внешнего трения, приходящуюся на единицу площади, принято считать пропорциональной разности касательных скоростей частиц жидкости и точек стенки, т. е.

$$p_{\tau\tau} = \lambda (V_{\tau\tau} - V_{\tau\tau}), \quad (7.3)$$

где λ — коэффициент внешнего трения, $p_{\tau\tau}$ — касательное напряжение, вычисляемое через скорости деформации согласно обобщённой

гипотезе Ньютона. Возьмём элементарную площадку Δs на поверхности стенки с нормалью, направленной внутрь жидкости (рис. 21). Вектор касательного напряжения $p_{\tau c}$ можно представить в виде

$$p_{\tau c} = p_n - p_{nn}.$$

С другой стороны, в силу условия (7.2) будем иметь:

$$V_{\tau c} - V_{\tau} = V_{\tau} - V.$$

Пользуясь этими равенствами, динамическое условие (7.3) можно представить в виде

$$p_n - p_{nn} = \lambda (V_{\tau} - V). \quad (7.4)$$

Проектируя левую и правую части (7.4) на оси координат, вводя направляющие косинусы l, m, n нормали и используя формулу (10.3) главы I, получим следующие три соотношения, выражающие динамические условия на твёрдых стенках:

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} - (p_{nx}l + p_{ny}m + p_{nz}n)l &= \lambda (u_{\tau} - u), \\ p_{ny} - (p_{nx}l + p_{ny}m + p_{nz}n)m &= \lambda (v_{\tau} - v), \\ p_{nz} - (p_{nx}l + p_{ny}m + p_{nz}n)n &= \lambda (w_{\tau} - w), \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

В ранних работах по теории движения вязкой жидкости предполагалось, что коэффициент внешнего трения имеет конечную величину. Но проведённые в последующее время тщательные опыты и измерения скоростей частиц вблизи стенок показали, что коэффициенту внешнего трения следует придавать весьма большие значения. На этом основании значение этого коэффициента теоретически можно считать бесконечно большим. Так как левая часть равенства (7.4) является конечной, то, предполагая коэффициент бесконечно большим, мы должны второй множитель считать равным нулю. Таким образом, граничное условие на твёрдой стенке принимает следующую форму:

$$V_{\tau} = V. \quad (7.6)$$

Равенство (7.6) означает, что частицы жидкости, примыкающие к стенкам, имеют те же скорости, какие имеют соответственные точки самой стенки. Условие (7.6) по этой причине называется *условием прилипания частиц вязкой жидкости к твёрдой стенке*. Это граничное условие можно было и не выводить из условия (7.4), а принять его как результат наблюдений. При решении конкретных задач в большинстве случаев используется именно условие прилипания (7.6).

Обратимся к выяснению граничных условий на поверхности раздела двух перемешивающихся жидкостей.

Условие, что частицы первой жидкости не перемешиваются с частицами второй жидкости, можно выразить равенством проекций

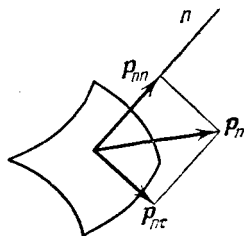


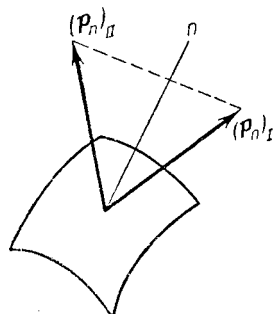
Рис. 21.

на нормаль к поверхности раздела векторов скоростей этих частиц, т. е.

$$(V_n)_I = (V_n)_{II}. \quad (7.7)$$

Условие (7.7) не исключает возможности разрыва касательных составляющих скоростей частиц первой и второй жидкости на поверхности раздела. Для выяснения динамического условия возьмём на поверхности раздела элементарную площадку (рис. 22). На одной стороне этой площадки будет развиваться напряжение $(p_n)_I$, обусловленное деформацией примыкающих частиц первой жидкости, а на второй стороне будет развиваться напряжение $(p_n)_{II}$. Эти два вектора напряжений в общем случае по величине не будут равны между собой не только по причине возможного наличия сил капиллярности, но и по причине образования внешней силы трения. Силу внешнего трения на поверхности раздела можно также полагать пропорциональной разности касательных скоростей частиц первой и второй жидкостей. Если силы капиллярности будут пренебрежимо малы, то в силу требования непрерывности нормальных составляющих напряжений при переходе через поверхность раздела будем иметь:

Рис. 22.



прерывности нормальных составляющих напряжений при переходе через поверхность раздела будем иметь:

$$(p_{nn})_I = (p_{nn})_{II}. \quad (7.8)$$

Касательные составляющие напряжений могут претерпевать разрыв, величина которого должна быть равна силе внешнего трения, т. е.

$$(p_{n\tau})_I - (p_{n\tau})_{II} = \lambda_I, II [(V_\tau)_I - (V_\tau)_{II}], \quad (7.9)$$

где $\lambda_{I, II}$ — коэффициент внешнего трения частиц первой и второй жидкости. Таким образом, в общем случае на поверхности раздела должны выполняться кинематическое условие (7.7) и два динамических условия (7.8) и (7.9).

Рассмотрим часто встречающийся случай, в котором вторая жидкость имеет сравнительно малую плотность и весьма малые скорости движения, как это имеет место, например, при движении воды в каналах и реках. Поверхность раздела, отделяющая воду от атмосферного воздуха, в этом случае называется *свободной поверхностью*. Так как в этом случае будем иметь,

$$(p_{nn})_{II} = -p_0, \quad (p_{n\tau})_{II} = 0, \quad \lambda_{I, II} = 0,$$

то динамические условия (7.8) и (7.9) должны принять следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} p_{nn} &= -p_0, \\ p_{n\tau} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

где p_0 — давление со стороны покоящейся жидкости. Таким образом, на свободной поверхности раздела нормальная составляющая напряжения должна быть равна постоянному давлению, а касательная составляющая должна обращаться в нуль.

Кинематическое условие (7.7) заменяется в этом случае другим условием, выражающим собой то предположение, что частицы жидкости, находящиеся на свободной поверхности, не покидают этой поверхности во всё время движения. Это новое условие можно выразить равенством нормальной составляющей вектора скорости частиц жидкости скорости перемещения по нормали точек самой свободной поверхности, т. е.

$$V_n = V_{нн}, \quad (7.11)$$

где $V_{нн}$ — скорость перемещения по нормали точек самой поверхности.

Мы рассмотрели лишь те граничные условия, которые должны выполняться для скоростей и напряжений. Этих условий будет достаточно для изучения ряда случаев движения несжимаемой жидкости и некоторых случаев движения вязкой сжимаемой жидкости, в которых можно пренебрегать изменением температуры. При учёте изменения температуры необходимо вводить в рассмотрение и граничные условия по отношению к температуре, которые могут быть весьма разнообразными, и поэтому об этих условиях целесообразно вести речь не в общем виде, а в каждом конкретном случае отдельно.

§ 8. Замечания об общей задаче гидродинамики вязкой жидкости

С математической точки зрения общая задача гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению следующей совместной системы четырёх дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

При этом искомое давление должно быть непрерывным, конечным и положительным, а искомые скорости должны быть также, вообще говоря, непрерывны и ограничены. На неподвижных стенках искомые скорости должны обращаться в нуль:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (8.2)$$

на подвижных стенках эти скорости должны совпадать со скоростями точек стенок:

$$u = u_{\tau}, \quad v = v_{\tau}, \quad w = w_{\tau}, \quad (8.3)$$

а на свободных границах нормальная составляющая напряжения должна быть равна постоянному давлению, а касательная составляющая должна обращаться в нуль, т. е.

$$p_{nn} = -p_0, \quad p_{n\tau} = 0. \quad (8.4)$$

При неустановившемся движении искомые скорости должны к тому же удовлетворять и начальным условиям:

$$\text{при } t = 0 \quad u = u_0(x, y, z), \quad v = v_0(x, y, z), \quad w = w_0(x, y, z). \quad (8.5)$$

Вопрос о существовании решений системы дифференциальных уравнений (8.1) при граничных и начальных условиях (8.2), (8.3), (8.4) и (8.5) в своей общей форме до сих пор не разрешён. В таком же состоянии находится и общий вопрос о единственности возможных решений этой системы уравнений.

Основное затруднение как в общем исследовании вопросов о существовании и единственности решений уравнений (8.1), так и в фактическом построении решений этих уравнений для конкретных простейших случаев движения вязкой жидкости заключается в наличии в левых частях первых трёх уравнений нелинейных слагаемых, так называемых *квадратичных членов инерции*. Квадратичные члены инерции имеют место и в дифференциальных уравнениях движения идеальной жидкости, которые мы получим из (8.1) путём зачёркивания в правых частях слагаемых, содержащих в качестве множителя кинематический коэффициент вязкости. Эти нелинейные слагаемые и в этом случае весьма затрудняют проведение общих исследований о существовании и единственности решений уравнений, и, например, в большой монографии Н. М. Гюнтера¹⁾ такого рода исследование о существовании решения проведено лишь для случая движения несжимаемой жидкости в безграничном пространстве без каких-либо границ и при условии, что силы имеют силовую функцию. Но всё же для случая идеальной жидкости возможности фактического построения решений уравнений движения для отдельных случаев весьма широки и не идут в сравнение с возможностями фактического построения решений уравнений движения вязкой жидкости. Такое положение следует объяснить прежде всего тем, что для случая идеальной жидкости затруднения, вызываемые наличием квадратичных членов инерции, немедленно отпадают при предположении существования потенциала скоростей. При предположении существования потенциала скоростей задача о движении идеальной и несжимаемой

¹⁾ Гюнтер Н. М., Об основной задаче гидромеханики. Известия Физ.-мат. ин-та им. Стеклова, т. II, 1926.

жидкости во многих случаях становится линейной, благодаря чему предоставляется возможным получать новые, более сложные течения с помощью линейной комбинации простейших течений, отвечающих частным решениям дифференциального уравнения Лапласа. Для вязкой же жидкости предположение о наличии потенциала скоростей, как это будет показано ниже, становится совершенно невозможным. Вследствие этого всякая конкретная задача о движении вязкой несжимаемой жидкости почти всегда нелинейна. Благодаря этому новые случаи течения вязкой несжимаемой жидкости нельзя получать с помощью простого наложения уже известных течений.

Общего метода построения решений нелинейных дифференциальных уравнений (8.1) не существует. По этой причине при изучении отдельных движений вязкой жидкости приходится идти двумя путями: 1) либо заранее задавать виды траекторий всех отдельных частиц жидкости и устанавливать отвечающие этим траекториям частные решения уравнений (8.1), 2) либо прибегать к приближенным методам, позволяющим в той или иной мере упрощать уравнения (8.1) и приспособлять их к характеру отдельных типов конкретных задач. Поскольку задавать заранее траектории всех частиц в конкретном виде можно лишь в ограниченном числе случаев, постольку первый указанный путь использования уравнений (8.1) по своим возможностям весьма ограничен. Что же касается второго пути — пути использования всякого рода упрощений самих уравнений, то возможности его весьма широки. Большинство конкретных задач о движении вязкой жидкости, имеющих тот или иной практический интерес, решено именно на основании приближенных уравнений движения вязкой жидкости, получаемых из полных уравнений (8.1) с помощью отдельных упрощений. По этой причине при дальнейшем изложении основное внимание будет уделено приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.

ГЛАВА III

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. О невозможности безвихревого движения вязкой жидкости

Если предположить, что силы, отнесённые к единице массы жидкости, имеют силовую функцию U , т. е.

$$\mathbf{F} = \text{grad } U,$$

и провести преобразование левых частей дифференциальных уравнений (8.1) главы II, пользуясь выражениями (5.5) главы I для проекций вектора-вихря частицы, то получим дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в форме Громеки — Ламба

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \right) + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_z u - \omega_x w) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \right) + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_x v - \omega_y u) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \right) + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Посмотрим, что произойдёт с уравнениями (1.1), если предположить, что проекции вектора-вихря в некоторой конечной области обращаются в нуль, т. е.

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0. \quad (1.2)$$

При таком предположении движение жидкости в этой области будет потенциальным, т. е. проекции вектора скорости частиц жидкости будут представляться через потенциал скоростей в виде

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Подставляя выражения (1.3) в четвёртое уравнение (1.1), получим для потенциала скоростей дифференциальное уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.4)$$

В силу соотношений (1.3) и (1.4) будем иметь:

$$\Delta u = \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \varphi) = 0,$$

и аналогично для Δv и Δw . Таким образом, слагаемые, обусловленные наличием в жидкости вязкости, из уравнений (1.1) будут совершенно выпадать, а на основании оставшихся слагаемых получим интеграл Лагранжа — Коши, т. е.

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = f(t). \quad (1.5)$$

Итак, принимая предположение (1.2) об отсутствии вихрей в какой-либо области, мы получаем соотношения (1.3), (1.4) и (1.5), которые имеют место как раз для движения идеальной несжимаемой жидкости в этой области при отсутствии вихрей, т. е. распределение скоростей и давлений в той области, где движение вязкой и несжимаемой жидкости предполагается безвихревым, не будет зависеть от коэффициента вязкости. Если бы при этих условиях можно было удовлетворить граничному условию прилипания к твёрдым стенкам, то вопрос о возможности безвихревого движения вязкой несжимаемой жидкости решался бы положительно. Но легко убедиться в том, что решения, отвечающие потенциальному движению идеальной жидкости, не удовлетворяют в то же время условию прилипания частиц к границам, за исключением особых случаев. К таким особым случаям относится, например, чисто циркуляционное течение идеальной жидкости вокруг круглого цилиндра, в котором все линии тока будут окружностями, охватывающими заданный контур круга. В идеальной жидкости все точки контура неподвижны, и имеет место скольжение частиц жидкости вдоль контура с одной и той же скоростью. Для случая вязкой несжимаемой жидкости надо предположить, что цилиндр вращается.

Если исключить из рассмотрения указанные выше особые случаи, то мы должны придти к тому выводу, что предположение о потенциальности движения вязкой несжимаемой жидкости несовместимо с самим явлением вязкости. Иначе говоря, *всякое движение вязкой несжимаемой жидкости будет движением вихревым.*

§ 2. Теорема о рассеянии энергии

В § 5 главы II было установлено дифференциальное уравнение изменения внутренней энергии фиксированной частицы с постоянной массой, имеющее вид

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = p_x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + p_z \cdot \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right], \quad (2.1)$$

где ε представляет собой внутреннюю энергию единицы массы, а T — температуру. Группа первых трёх слагаемых в правой части представляет собой ту часть работы напряжений, которая идёт на приращение внутренней энергии единицы массы. Эта часть работы напряжений, приходящаяся на единицу объёма и единицу времени, для случая несжимаемой жидкости называется *энергией рассеяния*. Чтобы оправдать это название, подсчитаем полную работу всех сил, действующих на массу жидкости в конечном объёме, и выясним, какая часть этой работы идёт на изменение кинетической энергии рассматриваемой массы, а какая часть переходит в тепловую энергию, т. е. *рассеивается*.

Элементарная работа массовых сил, действующих на массу в объёме τ , на элементарном перемещении $\mathbf{V} dt$ будет представляться в виде

$$A_1 dt = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\tau dt. \quad (2.2)$$

Элементарная работа напряжений, распределённых по всей поверхности S , ограничивающей объём τ , будет равна

$$A_2 dt = \iint_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{V} dS dt. \quad (2.3)$$

Так как вектор напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} представляется в виде

$$\mathbf{p}_n = p_x \mathbf{l} + p_y \mathbf{m} + p_z \mathbf{n},$$

то после подстановки в (2.3) и применения формулы Гаусса—Остроградского преобразования поверхностного интеграла в объёмный получим:

$$A_2 dt = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p_x \cdot \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (p_y \cdot \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (p_z \cdot \mathbf{V}) \right] d\tau dt. \quad (2.4)$$

Выражение в квадратной скобке представляет собой полную элементарную работу напряжений, распределённых по поверхности элементарного объёма (см. (4.8) гл. II).

Векторное дифференциальное уравнение движения фиксированной частицы представляется в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}, \quad (2.5)$$

Умножая скалярно левую и правую части (2.5) на $\mathbf{V} dt d\tau$ и интегрируя по всему объёму τ , получим:

$$\int \int_{\tau} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} d\tau = dt \int \int_{\tau} \int \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\tau + \\ + dt \int \int_{\tau} \int \mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) d\tau. \quad (2.6)$$

Так как рассматривается фиксированная постоянная масса, т. е.

$$\int \int_{\tau} \int \rho d\tau = \text{const}$$

и

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = d\left(\frac{V^2}{2}\right),$$

то знак дифференциала в левой части можно вынести за знаки интегралов. Заменяя слагаемые в правой части (2.6) через (2.2) и (2.4), получим:

$$d\left(\int \int_{\tau} \int \rho \frac{V^2}{2} d\tau\right) = \\ = A_1 dt + A_2 dt - dt \int \int_{\tau} \int \left(\mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) d\tau. \quad (2.7)$$

Левая часть полученного равенства (2.7) представляет собой элементарное приращение кинетической энергии конечной массы жидкости в объёме τ . В теоретической механике доказывается, что элементарное приращение кинетической энергии произвольной изменяемой механической системы равно сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, т. е.

$$dT = d'A^e + d'A^i, \quad (2.8)$$

где T представляет собой кинетическую энергию механической системы, $d'A^e$ — элементарную работу всех внешних сил и $d'A^i$ — элементарную работу всех внутренних сил. В рассматриваемом нами случае элементарная работа всех внешних сил по отношению к массе, заключённой в объёме τ , будет представляться первыми двумя слагаемыми в правой части (2.7), т. е.

$$d'A^e = A_1 dt + A_2 dt.$$

А тогда элементарная работа всех внутренних сил деформируемой среды будет представляться последним слагаемым в правой части (2.7), т. е.

$$d'A^i = - dt \int \int_{\tau} \int \left(\mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) d\tau. \quad (2.9)$$

Из полученного равенства (2.7) следует, что на элементарное изменение кинетической энергии движения фиксированной массы расходуется вся элементарная работа внешних массовых сил и лишь часть элементарной работы внешних поверхностных сил, т. е. сил напряжений. Другая же часть элементарной работы внешних поверхностных сил не расходуется на изменение кинетической энергии, и поэтому можно полагать, что она расходуется на изменение формы, объёма и температуры элементарных частиц, т. е. идёт на изменение внутренней энергии, что и подтверждается уравнением (2.1). Для случая несжимаемой жидкости внутренняя энергия может состоять лишь из одной тепловой энергии, поэтому та часть элементарной работы сил напряжений, которая не будет расходоваться на изменение кинетической энергии, будет расходоваться на изменение тепловой энергии, т. е. будет рассеиваться.

Обозначим энергию рассеивания, приходящуюся на единицу объёма и на единицу времени, через E , т. е.

$$E = p_x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + p_z \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Раскрывая скалярные произведения в левой части (2.10) и подставляя значения напряжений по обобщённой гипотезе Ньютона для несжимаемой жидкости, получим:

$$E = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

Выражение в правой части (2.11) всегда положительно, за исключением случая, когда все производные от скоростей по координатам обращаются в нуль. Следовательно, движение вязкой несжимаемой жидкости будет происходить без рассеяния механической энергии лишь в том случае, когда не будет происходить деформаций частиц, т. е. когда жидкость будет перемещаться как твёрдое тело. Во всех других случаях движения вязкой несжимаемой жидкости будет происходить потеря механической энергии.

Вычитая из правой и левой части (2.11) соответственно выражение

$$0 = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

и вводя компоненты вихря, получим:

$$E = 4\mu (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) - 4\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.12)$$

Умножая левую и правую части (2.12) на элемент объёма $d\tau$ и проводя интегрирование по всему объёму, получим количество механической энергии, рассеиваемой за единицу времени в конечном объёме τ .

$$\int_{\tau} \int \int E d\tau = 4\mu \int_{\tau} \int \int (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) d\tau - 4\mu \int_{\tau} \int \int \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\tau. \quad (2.13)$$

Если границы объёма τ будут представлять собой неподвижные твёрдые стенки, на которых в силу условия прилипания проекции вектора скорости будут обращаться в нуль, то после интегрирования по частям будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \int \int \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\tau = \\ = \int_S \int v \left[\frac{\partial \omega}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z) \right] dS = 0, \end{aligned}$$

и аналогично с другими слагаемыми в правой части (2.13). Следовательно, при движении несжимаемой жидкости, заключённой в неподвижном объёме, полное количество рассеиваемой механической энергии за секунду будет зависеть только от интенсивности вихрей внутри объёма и будет представляться в виде

$$\int_{\tau} \int \int E d\tau = 4\mu \int_{\tau} \int \int (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) d\tau. \quad (2.14)$$

Пусть оси x, y, z будут совпадать с главными осями деформаций в рассматриваемой точке, тогда энергия рассеяния (2.11) будет представляться через главные скорости деформаций в виде

$$E = 2\mu (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2). \quad (2.15)$$

Умножая левую и правую части на $\frac{3}{2}$ и вычитая из левой и правой части соответственно выражение

$$0 = \mu (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2,$$

получим:

$$\frac{3}{2} E = \mu [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]. \quad (2.16)$$

Выражение в квадратной скобке в правой части (2.16) представляет собой с точностью до множителя не что иное, как квадратичный инвариант девиатора скоростей деформаций, рассмотренного нами в § 7 главы I, который в свою очередь пропорционален скорости деформации результирующего сдвига частицы ((7.12) гл. I). Таким образом, скорость рассеяния механической энергии для несжимаемой жидкости пропорциональна квадратичному инварианту девиатора скоростей деформаций или пропорциональна квадрату скорости деформации результирующего сдвига частицы, т. е.

$$E = 4\mu E'_2 = 6\mu \varepsilon_2^2. \quad (2.17)$$

§ 3. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости

Дифференциальные уравнения (8.1) главы II движения вязкой несжимаемой жидкости преобразуем к безразмерным величинам. Для этого все входящие в эти уравнения величины выразим через величины той же размерности, но являющиеся характерными для рассматриваемого течения. Так, например, при движении жидкости в круглой цилиндрической трубе за характерный геометрический размер можно взять диаметр трубы, а за характерную скорость — среднюю скорость по течению. При обтекании жидкостью шара за характерный размер можно взять диаметр шара, за характерную скорость — скорость потока на бесконечности и за характерное давление — давление на бесконечности. Аналогично обстоит дело и в других случаях течений.

Введём следующие обозначения для *характерных величин*: L_0 — линейный размер, V_0 — скорость, p_0 — давление, T_0 — время, g_0 — сила, приходящаяся на единицу массы. Эти характерные величины можно рассматривать как своего рода масштабы соответственных величин рассматриваемого течения. Все переменные размерные величины будут представляться в виде произведений характерных масштабов на безразмерные величины. Таким образом, мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x &= L_0 x_1, & u &= V_0 u_1, & F_x &= g_0 F_{x_1}, \\ y &= L_0 y_1, & t &= T_0 t_1, & v &= V_0 v_1, & p &= p_0 p_1, & F_y &= g_0 F_{y_1}, \\ z &= L_0 z_1; & \omega &= V_0 \omega_1; & F_z &= g_0 F_{z_1}. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения движения вязкой и несжимаемой жидкости и разделяя первые три полученные уравнения на множитель $\frac{V_0^2}{L_0}$, стоящий при квадратичных членах инерции, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_0}{T_0 V_0} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} &= \\ &= \frac{g_0 L_0}{V_0^2} F_{x_1} - \frac{p_0}{\rho V_0^2} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\nu}{V_0 L_0} \Delta u_1, \\ \frac{L_0}{T_0 V_0} \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} &= \\ &= \frac{g_0 L_0}{V_0^2} F_{y_1} - \frac{p_0}{\rho V_0^2} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\nu}{V_0 L_0} \Delta v_1, \\ \frac{L_0}{T_0 V_0} \frac{\partial \omega_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1} &= \\ &= \frac{g_0 L_0}{V_0^2} F_{z_1} - \frac{p_0}{\rho V_0^2} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\nu}{V_0 L_0} \Delta \omega_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1} &= 0, \end{aligned} \right\} (3.2)$$

Все слагаемые в уравнениях (3.2) будут безразмерными величинами, поэтому будут безразмерными и входящие в эти уравнения множители, составленные из характерных размерных величин. Эти безразмерные множители называются *характеристическими числами* течений вязкой несжимаемой жидкости. Каждое из этих чисел принято называть по имени того автора, который впервые ввёл его в рассмотрение, и обозначать его начальной буквой фамилии этого автора. Число, содержащее давление, есть *число Эйлера* (1745 г.)

$$\frac{P_0}{\rho_0 V_0^2} = E. \quad (3.3)$$

Число, содержащее ускорение силы тяжести, называется *числом Фруда* (1870 г.)

$$\frac{V_0^2}{gL_0} = F. \quad (3.4)$$

Число, содержащее характерное время, именуется *числом Струхала* (1878 г.)

$$\frac{L_0}{T_0 V_0} = S. \quad (3.5)$$

Наконец, число, содержащее кинематический коэффициент вязкости, называется *числом Рейнольдса* (1883 г.)

$$\frac{L_0 V_0}{\nu} = R. \quad (3.6)$$

Решения дифференциальных уравнений (3.2) для безразмерных скоростей u_1 , v_1 и w_1 и давления p_1 будут зависеть от четырёх характеристических чисел **E**, **F**, **S** и **R**. Следовательно, некоторые качественные особенности течений вязкой несжимаемой жидкости будут предопределяться значениями этих характеристических чисел.

Особенное значение приобретают эти характеристические числа при рассмотрении вопроса о подобии течений вязкой несжимаемой жидкости. Многие вопросы гидромеханики, необходимые для техники, решаются при помощи экспериментов с уменьшенными моделями. При проведении таких экспериментов возникает вопрос о выборе размеров моделей, значений характерных скоростей и прочих характерных величин. Возникает также вопрос о возможности перенесения результатов экспериментов на натуру. На все эти вопросы даёт ответ теория подобия течений жидкости.

Условия *механического подобия* двух течений вязкой несжимаемой жидкости включают в себя условия: а) *геометрического подобия*, б) *кинематического подобия* и в) *динамического подобия*. Для выполнения условий геометрического подобия двух сравниваемых течений необходимо не только подобие самих границ, но и подобие их взаимного расположения. При выполнении этого условия можно

говорить о соответственных точках рассматриваемых двух течений и соответственных отрезках, причём отношение двух любых соответственных отрезков будет равно постоянному числу, т. е.

$$\frac{(x)_{II}}{(x)_I} = \frac{(y)_{II}}{(y)_I} = \frac{(z)_{II}}{(z)_I} = \frac{(L_0)_{II}}{(L_0)_I} = k_L, \quad (3.7)$$

где k_L — коэффициент геометрического подобия двух рассматриваемых течений.

При выполнении условия геометрического подобия двух течений вязкой несжимаемой жидкости можно говорить о кинематическом подобии этих течений. Если выбран коэффициент пересчёта времени, т. е.

$$\frac{t_{II}}{t_I} = \frac{(T_0)_{II}}{(T_0)_I} = k_t, \quad (3.8)$$

то кинематическое подобие будет иметь место тогда, когда отношение проекций векторов скоростей в любых соответственных точках будет постоянным, т. е.

$$\frac{(u)_{II}}{(u)_I} = \frac{(v)_{II}}{(v)_I} = \frac{(w)_{II}}{(w)_I} = \frac{(V_0)_{II}}{(V_0)_I} = k_v, \quad (3.9)$$

где k_v — коэффициент кинематического подобия. Наконец, о динамическом подобии двух течений вязкой несжимаемой жидкости можно говорить лишь тогда, когда отношения: а) проекций векторов массовых сил, б) величин давления и в) компонент вязких напряжений в любых соответственных точках будут постоянными, т. е.

$$\frac{(F_x)_{II}}{(F_x)_I} = \frac{(F_y)_{II}}{(F_y)_I} = \frac{(F_z)_{II}}{(F_z)_I} = \frac{(g_0)_{II}}{(g_0)_I} = k_F, \quad (3.10)$$

$$\frac{(p)_{II}}{(p)_I} = \frac{(p_0)_{II}}{(p_0)_I} = k_p, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{(p_{xx} + p)_{II}}{(p_{xx} + p)_I} &= \frac{(p_{yy} + p)_{II}}{(p_{yy} + p)_I} = \frac{(p_{zz} + p)_{II}}{(p_{zz} + p)_I} = \\ &= \frac{(p_{xy})_{II}}{(p_{xy})_I} = \frac{(p_{yz})_{II}}{(p_{yz})_I} = \frac{(p_{zx})_{II}}{(p_{zx})_I} = k_\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При выполнении всех условий (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) и (3.12) два сравниваемых течения вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости будут по самому определению *механически подобными*.

Подставляя в равенства (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) и (3.12) значения соответственных величин из (3.1) для первого и второго

течения вязкой и несжимаемой жидкости, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x_1)_{II}}{(x_1)_I} = \frac{(y_1)_{II}}{(y_1)_I} = \frac{(z_1)_{II}}{(z_1)_I} = 1, \\ \frac{(t_1)_{II}}{(t_1)_I} = 1, \\ \frac{(u_1)_{II}}{(u_1)_I} = \frac{(v_1)_{II}}{(v_1)_I} = \frac{(w_1)_{II}}{(w_1)_I} = 1, \\ \frac{(F_{x_1})_{II}}{(F_{x_1})_I} = \frac{(F_{y_1})_{II}}{(F_{y_1})_I} = \frac{(F_{z_1})_{II}}{(F_{z_1})_I} = 1, \\ \frac{(p_1)_{II}}{(p_1)_I} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Таким образом, для двух подобных течений вязкой несжимаемой жидкости все безразмерные величины длин, времени, скоростей, массовых сил и давлений будут совпадать. Как уже было указано, решения дифференциальных уравнений (3.2) для каждого течения будут зависеть от своих четырёх характеристических чисел. Следовательно, чтобы решения безразмерных уравнений (3.2), отвечающие двум подобным течениям вязкой несжимаемой жидкости, совпадали, необходимо, чтобы характеристические числа двух рассматриваемых течений были соответственно равны между собой:

$$\left. \begin{aligned} S_{II} = S_I, \\ E_{II} = E_I, \\ F_{II} = F_I, \\ R_{II} = R_I. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Таким образом, характеристические числа играют роль необходимых критериев подобия двух течений вязкой несжимаемой жидкости.

Если рассматривать установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости, то первый критерий подобия — равенство чисел Струаля — будет отпадать.

Если в качестве характерного давления выбрать так называемый скоростной напор, т. е. положить

$$p_0 = \rho V_0^2, \quad (3.15)$$

то числа Эйлера для всех течений станут равными единице, и поэтому критерий Эйлера выпадет из числа необходимых критериев подобия.

Основными критериями подобия двух течений вязкой несжимаемой жидкости без учёта изменения температуры служат, таким образом, два критерия: *критерий Фруда* и *критерий Рейнольдса*.

Покажем, что эти два критерия подобия не могут быть совместимыми в том случае, когда в двух сравниваемых течениях фигурирует одна и та же вязкая жидкость. В самом деле, полагая кинематическую вязкость одинаковой для двух рассматриваемых течений, из равенства чисел Рейнольдса мы будем иметь:

$$(L_0 V_0)_{II} = (L_0 V_0)_I, \quad (3.16)$$

а из равенства чисел Фруда:

$$\left(\frac{V_0^2}{L_0}\right)_{II} = \left(\frac{V_0^2}{L_0}\right)_I. \quad (3.17)$$

Таким образом, согласно критерию (3.16) Рейнольдса переход от натуральных размеров к уменьшенным размерам моделей

$$\frac{(L_0)_{II}}{(L_0)_I} < 1$$

должен сопровождаться увеличением характерных скоростей:

$$\frac{(V_0)_{II}}{(V_0)_I} > 1.$$

Согласно же критерию (3.17) Фруда переход от больших размеров к меньшим должен сопровождаться уменьшением характерных скоростей. Следовательно, полного подобия двух течений вязкой несжимаемой жидкости с одним и тем же коэффициентом вязкости, с соблюдением критериев подобия Фруда и Рейнольдса осуществить нельзя. Практически приходится в каждом конкретном случае выбирать из этих двух критериев наиболее существенный и пренебрегать другим. Число F имеет преимущественное значение в задачах, где преобладают силы тяжести, например в тех случаях, когда основным вопросом исследования служит вопрос о волновом сопротивлении модели судна, обусловленном действием силы тяжести. В случае движения вязкой жидкости без свободных границ за основной критерий подобия принимается число R . Для такого рода течений число Рейнольдса, как это далее будет показано, является основным характеристическим числом, характеризующим качественные особенности течений вязкой несжимаемой жидкости.

Так как число Рейнольдса в уравнении (3.2) было получено в результате деления множителя $\frac{V_0^2}{L_0}$ при квадратичных членах инерции на множитель $\frac{\nu V_0}{L_0}$ при слагаемом, обусловленном вязкостью, то оно своим значением будет характеризовать порядок величины отношения сил инерции к силам вязкости. Это, например, будет означать, что с увеличением значения числа Рейнольдса будет увеличиваться порядок величин отношений сил инерции к силам вязкости.

§ 4. Интегральные формулы для результирующего воздействия жидкости на поступательно движущееся в ней тело

Рассмотрим случай поступательного движения тела в вязкой жидкости (рис. 23). Напряжение на площадке dS поверхности рассматриваемого тела представляется в виде

$$p_n = p_x l + p_y m + p_z n, \quad (4.1)$$

где l , m , n суть направляющие косинусы внешней нормали к площадке dS . Следовательно, главный вектор и главный момент сил воздействия окружающей жидкости на рассматриваемое тело представятся в виде

$$R = \iint_S (p_x l + p_y m + p_z n) dS; \quad (4.2)$$

$$L = \iint_S r \times (p_x l + p_y m + p_z n) dS. \quad (4.3)$$

Проекция вектора напряжения p_n на ось x на основании (4.1) будет представлена в виде

$$p_{nx} = p_{xx} l + p_{yx} m + p_{zx} n. \quad (4.4)$$

Подставляя в правую часть (4.4) значения p_{xx} , p_{yx} и p_{zx} из равенств (6.1) главы II, получим:

$$p_{nx} = \left[-p + \left(\lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta \right] l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right). \quad (4.5)$$

Второе слагаемое в правой части (4.5) есть производная по нормали от скорости u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (4.6)$$

а так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \theta - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z},$$

то последнее слагаемое в скобках в правой части (4.5) можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n = l\theta + \frac{\partial v}{\partial x} m - \frac{\partial v}{\partial y} l + \frac{\partial w}{\partial x} n - \frac{\partial w}{\partial z} l. \quad (4.7)$$

Перейдем теперь к новым осям координат (рис. 23), состоящим из нормали p в рассматриваемой точке поверхности тела и из двух

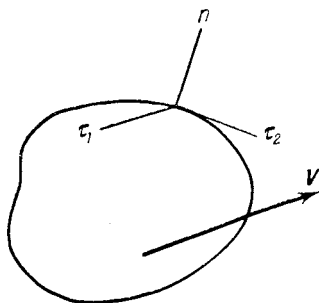


Рис. 23.

касательных τ_1 и τ_2 . Производная от скорости v по координате x будет равна

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial x}.$$

Аналогично запишутся и другие производные, входящие в правую часть (4.7).

Так как тело перемещается поступательно и в качестве граничного условия принимается условие прилипания, то вдоль всей поверхности тела компоненты скорости частиц жидкости будут постоянными величинами. Следовательно, производные от скоростей частиц по направлениям касательных к поверхности тела будут обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau_2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau_2} = 0. \quad (4.8)$$

Выражения

$$\frac{\partial n}{\partial x} = l, \quad \frac{\partial n}{\partial y} = m, \quad \frac{\partial n}{\partial z} = n \quad (4.9)$$

— направляющие косинусы нормали.

Используя (4.8) и (4.9), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} m - \frac{\partial v}{\partial y} l &= \left(\frac{\partial v}{\partial n} l \right) m - \left(\frac{\partial v}{\partial n} m \right) l = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} n - \frac{\partial w}{\partial z} l &= \left(\frac{\partial w}{\partial n} l \right) n - \left(\frac{\partial w}{\partial n} n \right) l = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n &= l\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Таким образом, на основании (4.6) и (4.10) напряжение p_{nx} на поверхности поступательно движущегося тела в вязкой жидкости будет представляться в виде

$$p_{nx} = \left[-p + \left(\lambda' + \frac{\mu}{3} \right) \theta \right] l + \mu \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (4.11)$$

По аналогии с (4.11) для других проекций вектора напряжения будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} p_{ny} &= \left[-p + \left(\lambda' + \frac{\mu}{3} \right) \theta \right] m + \mu \frac{\partial v}{\partial n}, \\ p_{nz} &= \left[-p + \left(\lambda' + \frac{\mu}{3} \right) \theta \right] n + \mu \frac{\partial w}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Умножая левые и правые части (4.11) и (4.12) на единичные векторы осей координат соответственно и складывая, получим вектор напряжения на площадке поверхности поступательно движущегося тела

$$p_n = \left[-p + \left(\lambda' + \frac{\mu}{3} \right) \theta \right] (li + mj + nk) + \mu \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (4.13)$$

Подставляя значение p_n из (4.13) в правые части (4.2) и (4.3), получим выражения для главного вектора и главного момента сил воздействия на тело, поступательно движущееся в вязкой жидкости:

$$R = \int_S \int [-p + (\lambda' + \frac{\mu}{3})\theta] (li + mj + nk) dS + \mu \int_S \int \frac{\partial V}{\partial n} dS, \quad (4.14)$$

$$L = \int_S \int \{ r \times [-p + (\lambda' + \frac{\mu}{3})\theta] (li + mj + nk) \} dS + \\ + \mu \int_S \int r \times \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (4.15)$$

Для случая несжимаемой жидкости $\theta = 0$ и

$$R = - \int_S \int p (li + mj + nk) dS + \mu \int_S \int \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (4.16)$$

Первое слагаемое представляет собой результирующее воздействие жидкости на тело, обусловленное давлением, а второе — результирующее воздействие на тело сил вязкости.

Для плоско-параллельного течения ($v_z = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$) и для осесимметричного ($v_\varphi = 0, \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0$) уравнение несжимаемости (1.8) главы II в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 будет представляться одинаково:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 H_3 H_1) = 0. \quad (4.17)$$

Допустим, что в потоке вязкой несжимаемой жидкости помещено неподвижное тело с поверхностью S и криволинейные координаты выбраны таким образом, что эта поверхность входит в семейство координатных поверхностей

$$q_1 = \text{const.}$$

Граничное условие прилипания в этом случае ($v_3 \equiv 0$) представится в виде

$$\text{при } q_1 = a \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0. \quad (4.18)$$

Так как условия (4.18) выполняются при постоянном значении координаты q_1 , то их можно частным образом дифференцировать по второй координате q_2 , т. е.

$$\text{при } q_1 = a \quad \frac{\partial v_1}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial q_2} = 0. \quad (4.19)$$

Используя (4.18) и (4.19), из уравнения несжимаемости (4.17) получим:

$$\text{при } q_1 = a \quad \frac{\partial v_1}{\partial q_1} = 0. \quad (4.20)$$

Обозначая через i_1 , i_2 , и i_3 единичные векторы касательных к координатным линиям в рассматриваемой точке на поверхности S и учитывая, что линейный элемент нормали к этой поверхности будет равен

$$H_1 \delta q_1,$$

можно написать:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 i_1 + v_2 i_2).$$

Используя (4.18) и (4.20), будем иметь:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_a = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} i_2. \quad (4.21)$$

Главный вектор воздействия вязкой несжимаемой жидкости на неподвижное тело из (4.16) будет равен

$$R = \int_S \int \left(-p i_1 + \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} i_2 \right) dS. \quad (4.22)$$

Компонента ω_3 вектора вихря в криволинейных координатах на основании (8.8) главы I представляется в виде

$$\omega_3 = \frac{1}{2H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (v_1 H_1) \right]. \quad (4.23)$$

Учитывая равенства (4.18) и (4.19), будем иметь:

$$(\omega_3)_a = \frac{1}{2H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1}. \quad (4.24)$$

Подставляя значение $\frac{\partial v_2}{\partial q_1}$ из (4.24) в (4.22), получим:

$$R = \int_S \int \left(-p i_1 + 2\mu \omega_3 i_2 \right) dS. \quad (4.25)$$

Таким образом, при плоско-параллельном и при осесимметричном обтеканиях неподвижного тела воздействие вязкой несжимаемой жидкости на это тело зависит от распределения по его поверхности давления и вихря.

ГЛАВА IV

СЛУЧАИ ТОЧНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Общая постановка задачи о прямолинейно-параллельном установившемся движении жидкости

В конце главы II было указано, что наиболее простым способом решения дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости является способ, в основе которого лежит заранее принимаемое предположение о форме траекторий всех частиц жидкости. В данной главе, следуя этому способу, рассмотрим отдельные примеры установившихся движений вязкой и несжимаемой жидкости.

Если жидкость считать несжимаемой

$$\rho = \text{const}$$

и движение предполагать установившимся

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

то дифференциальные уравнения (8.1) главы II будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Рассмотрим случай, в котором траектории всех частиц будут строго прямолинейными и параллельными между собой, т. е.

$$v \equiv 0, \quad w \equiv 0. \quad (1.2)$$

При этом предположении из уравнения несжимаемости будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Таким образом, единственная проекция вектора скорости u вдоль всей траектории будет оставаться постоянной и может изменяться только в поперечном к траекториям направлении.

При использовании (1.2) и (1.3) дифференциальные уравнения (1.1) ещё более упростятся:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что благодаря предположениям (1.2) и следствию из них (1.3) квадратичные члены инерции совершенно выпали из полных уравнений (1.2).

Представим давление в виде суммы двух слагаемых, из которых одно будет представлять *статическое давление*, обусловленное действием массовых сил, а второе — *динамическое давление*, непосредственно связанное с движением жидкости, т. е.

$$p = p_c + p_d. \quad (1.5)$$

Статическое давление определяется из уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial x} &= 0, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial y} &= 0, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) в уравнения (1.4) и используя уравнения (1.6) и выражение для кинематического коэффициента вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_d}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p_d}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p_d}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

На основании последних двух уравнений (1.7) заключаем, что динамическое давление не будет зависеть от y и z . Так как правая часть первого уравнения (1.7) зависит от y и z , а левая часть может зависеть только от x , то левая и правая части этого уравнения должны быть равны одной и той же постоянной величине, т. е.

$$\frac{\partial p_d}{\partial x} = \text{const.}$$

Таким образом, для прямолинейно-параллельного установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости перепад давления на единицу длины в направлении движения постоянен.

Задача об изучении прямолинейно-параллельного установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению дифференциального уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}, \quad (1.8)$$

правая часть которого представляет собой постоянную величину. Если движение частиц жидкости считается прямолинейно-параллельным, то границы жидкости должны быть строго цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны траекториям частиц. Так как скорость u частиц не зависит от координаты x , то достаточно рассмотреть лишь одно сечение границ течения в плоскости yo_z . В простейших случаях границы течения в плоскости yo_z могут состоять либо из одного контура, либо из двух контуров, из которых один будет находиться внутри второго (рис. 24). В первом случае область будет односвязной, а во втором — двусвязной.

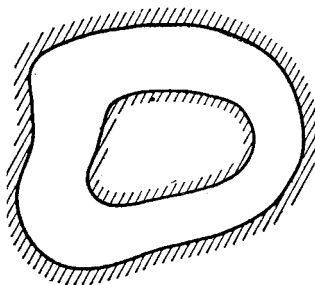


Рис. 24.

Чтобы удовлетворять условиям прямолинейности траекторий частиц и стационарности движения, границы течения должны 1) либо быть неподвижными, 2) либо перемещаться параллельно самим себе с постоянной скоростью. Принимая в качестве граничного условия условие прилипания, будем иметь в первом случае на неподвижной границе

$$u = 0, \quad (1.9)$$

а во втором случае на подвижной границе

$$u = U = \text{const.} \quad (1.10)$$

Таким образом, задача изучения прямолинейно-параллельных установившихся течений вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения Пуассона (1.8) при граничных условиях (1.9) и (1.10),

Так как правая часть уравнения (1.8) является постоянной, то его можно свести к уравнению Лапласа следующей заменой:

$$u = \psi + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_{\text{л}}}{\partial x} (y^2 + z^2). \quad (1.11)$$

При такой замене рассматриваемая задача о прямолинейно-параллельном движении вязкой несжимаемой жидкости будет сводиться к решению уравнения Лапласа для функции ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.12)$$

при граничных условиях: на неподвижной стенке

$$\psi = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_{\text{л}}}{\partial x} (y^2 + z^2), \quad (1.13)$$

на подвижной стенке

$$\psi = U - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_{\text{л}}}{\partial x} (y^2 + z^2). \quad (1.14)$$

§ 2. Аналогия задачи о прямолинейно-параллельном движении вязкой жидкости с задачами вращения идеальной жидкости и с задачей кручения призматического бруса

Поставленная в предшествующем параграфе задача об установленном прямолинейно-параллельном течении вязкой несжимаемой жидкости в математическом отношении сходна с некоторыми задачами о движении идеальной жидкости и с задачей о кручении призматического бруса.

Рассмотрим случай односвязной области в плоскости yOz в предположении, что ограничивающий контур представляет собой неподвижную твёрдую стенку. Задача об изучении установившегося прямолинейно-параллельного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе постоянного сечения с произвольным очертанием (рис. 25) сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad (2.1)$$

при граничном условии

$$\psi = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_{\text{л}}}{\partial x} (y^2 + z^2), \quad (2.2)$$

где коэффициент $\frac{1}{\mu} \frac{\partial p_{\text{л}}}{\partial x}$ является постоянным.

Представим себе, что цилиндрический сосуд, сечение которого совпадает с сечением трубы (рис. 25), наполненный идеальной и

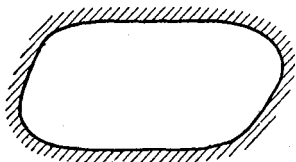


Рис. 25.

несжимаемой жидкостью, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси x . Предполагая движение идеальной жидкости внутри сосуда безвихревым, задачу можно свести для функции тока ψ к задаче Дирихле ¹⁾

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad (2.3)$$

на контуре

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega (y^2 + z^2) + C. \quad (2.4)$$

Таким образом, от решения рассмотренной задачи вращения идеальной жидкости можно перейти к решению соответственной задачи о прямолинейно-параллельном движении вязкой жидкости с помощью одной только замены угловой скорости через перепад давления

$$\omega = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x}.$$

Постоянное C в (2.4) следует тогда положить равным нулю. Предположим теперь, что неподвижный цилиндрический сосуд с сечением, представленным на рис. 25, заполнен идеальной несжимаемой жидкостью, но находящейся в вихревом движении. Если частицы идеальной жидкости перемещаются только в плоскости yOz , то уравнение несжимаемости будет представляться в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

а вихрь вектора скорости будет равен

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Так как граничный контур является линией тока, то на границе функция тока будет равна постоянной величине. Если положить интенсивность вихря во всей области постоянной, то тогда задача изучения движения идеальной несжимаемой жидкости сведётся к решению уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2\omega \quad (2.5)$$

при граничном условии

$$\psi = c. \quad (2.6)$$

Сопоставляя эту задачу с задачей (1.8), (1.9), мы приходим к тому заключению, что для формального перехода от решения задачи о вихревом плоско-параллельном движении идеальной несжимаемой жидкости с постоянной интенсивностью вихря к решению задачи об

¹⁾ См. Кочин, Кибель и Розе, Теоретическая гидромеханика, т. I, 1948, стр. 238.

установившемся прямолинейно-параллельном движении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе той же формы надо лишь положить:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}, \\ c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Рассмотрим теперь задачу о кручении призматического бруса, сечение которого представлено на рис. 25. Принимая по Сен-Венану ¹⁾ компоненты упругих смещений в виде

$$u = \tau\varphi(y, z),$$

$$v = -\tau xz,$$

$$w = -\tau xy,$$

где τ — степень кручения, φ — функция кручения Сен-Венана, на основании уравнений равновесия получим для φ уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Вводя сопряжённую с φ гармоническую функцию ψ и удовлетворяя условию отсутствия поверхностных сил на боковой поверхности бруса, приходим к задаче Дирихле

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0;$$

на границе

$$\psi = \frac{y^2 + z^2}{2} + C. \quad (2.8)$$

Сопоставляя задачу (2.8) с задачей (2.1) и (2.2) мы заключаем, что для перехода к соответственной задаче о прямолинейно-параллельном установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости надо постоянное C в (2.8) считать равным нулю, а функцию ψ , связанную с функцией напряжений кручения соотношением

$$F(y, z) = G\tau \left[\psi(y, z) - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \right],$$

умножить на постоянный множитель, равный

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}.$$

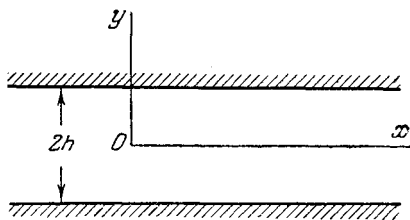
Следует обратить особое внимание на последнюю аналогию рассматриваемой нами задачи о прямолинейно-параллельном установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости с задачей круче-

¹⁾ Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, 1947, стр. 240.

ния призматического бруса. Задачи о кручении призматического бруса решены к настоящему моменту для весьма разнообразных случаев поперечных сечений. Пользуясь указанной аналогией, можно весьма просто получить и решения соответственных задач о движении вязкой несжимаемой жидкости.

§ 3. Прямолинейно-параллельное движение жидкости между двумя параллельными стенками

В качестве простейшего примера задачи (1.8) прямолинейно-параллельного движения рассмотрим установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками, простирающимися в направлении осей x и z до бесконечности (рис. 26). Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Начало оси y возьмем на средней линии между стенками. Из предположения о плоско-параллельности движения следует:



$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

Пусть нижняя стенка перемещается с постоянной скоростью U_1 , а верхняя — со скоростью U_2 . Тогда рассматриваемая задача (1.8) сведется к решению обыкновенного дифференциального уравнения

Рис. 26.

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} \quad (3.2)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = -h \quad u = U_1, \\ \text{при } y = h \quad u = U_2. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Так как правая часть (3.2) постоянна, то общее решение дифференциального уравнения будет представляться в виде

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (3.4)$$

C_1 и C_2 определяются из граничных условий (3.3):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2h} (U_2 - U_1), \\ C_2 &= \frac{1}{2} (U_1 + U_2) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} h^2. \end{aligned}$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи, удовлетворяющее граничным условиям (3.3), будет иметь вид

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} (h^2 - y^2) + \frac{1}{2} \frac{y}{h} (U_2 - U_1) + \frac{1}{2} (U_1 + U_2). \quad (3.5)$$

Первое слагаемое правой части (3.5) представляет собой то *параболическое распределение скоростей* в сечении, которое обусловлено наличием одного лишь перепада давлений. Остальные слагаемые представляют собой *линейное распределение скоростей*, обусловленное движением самих стенок.

Пользуясь гипотезой Ньютона

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

для силы вязкости будем иметь:

$$\tau = \frac{\partial p_d}{\partial x} y + \frac{1}{2} \frac{\mu}{h} (U_2 - U_1). \quad (3.6)$$

Таким образом, параболическому распределению скоростей в сечении будет отвечать линейное распределение силы вязкости, а линейному распределению скоростей — постоянное значение силы вязкости.

Обозначим через Q *расход*, т. е. тот объем жидкости, который проходит через каждое сечение за секунду:

$$Q = \int_{-h}^h u dy. \quad (3.7)$$

Подставляя в правую часть (3.7) значение u из (3.5) и выполняя интегрирование, получим следующее выражение для расхода:

$$Q = -\frac{2}{3\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} h^3 + h(U_1 + U_2). \quad (3.8)$$

Таким образом, при течении, обусловленном одним перепадом давлений, расход пропорционален перепаду давлений и кубу расстояния между стенками и обратно пропорционален коэффициенту вязкости. При течении же, обусловленном движением стенок, расход пропорционален алгебраической сумме скоростей и половине расстояния между стенками.

Деля расход на расстояние между стенками $2h$, получим выражение для *средней скорости*

$$u_{\text{ср}} = \frac{Q}{2h} = -\frac{1}{3\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} h^2 + \frac{1}{2} (U_1 + U_2). \quad (3.9)$$

Рассмотрим случай неподвижных стенок

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0.$$

Максимальная скорость в этом случае будет иметь место на средней линии, т. е. при $y = 0$

$$u_{\text{max}} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} h^2 = \frac{3}{2} u_{\text{ср}}. \quad (3.10)$$

Максимальная скорость будет в полтора раза больше средней скорости. Максимального значения сила трения будет достигать на стенках:

$$\tau_{\max} = \frac{\partial p_d}{\partial x} h. \quad (3.11)$$

За коэффициент сопротивления плоской трубы примем отношение максимального значения силы трения к значению кинетической энергии единицы объема:

$$\lambda = \frac{|\tau_{\max}|}{\frac{1}{2} \rho u_{\text{ср}}^2} = \frac{2h}{\rho u_{\text{ср}}^2} \left| \frac{\partial p_d}{\partial x} \right|. \quad (3.12)$$

Подставляя значение перепада давлений из (3.10)

$$\frac{\partial p_d}{\partial x} = -3\mu \frac{u_{\text{ср}}}{h^2}$$

и вводя число Рейнольдса

$$R = \frac{u_{\text{ср}} h \rho}{\mu}, \quad (3.13)$$

получим следующее выражение для коэффициента сопротивления:

$$\lambda = \frac{6}{R}. \quad (3.14)$$

Таким образом, при прямолинейно-параллельном установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости между параллельными неподвижными стенками коэффициент сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса. Если по оси абсцисс откладывать логарифмы чисел Рейнольдса, а по оси ординат — логарифмы значений коэффициента сопротивления, то график сопротивления будет представляться прямой линией, отсекающей одинаковые отрезки от осей координат (рис. 27).

Рассмотренное движение между параллельными стенками называется *ламинарным*. Таким образом, ламинарное движение между неподвижными параллельными стенками характеризуется следующими необходимыми признаками:

- 1) прямолинейностью траекторий частиц,
- 2) параболическим профилем распределения скоростей по сечению

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} (h^2 - y^2),$$

- 3) соотношением

$$u_{\max} = \frac{3}{2} u_{\text{ср}},$$

- 4) график коэффициента сопротивления на логарифмической диаграмме представляет отрезок прямой с наклоном в 45° .

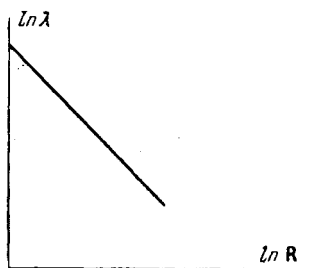


Рис. 27.

Поскольку при выводе всех соотношений было использовано предположение о прямолинейности траекторий частиц, постольку эти соотношения могут оправдываться только тогда, когда траектории всех частиц действительно будут прямолинейными. Прямолинейный характер траекторий частиц можно ожидать тем скорее, чем меньше будет расстояние между стенками и чем меньше будет средняя скорость частиц. Наблюдения с помощью окрашенной жидкости подтверждают такое заключение; действительно, прямолинейный характер траекторий частиц имеет место при определённых значениях числа R , не превышающих некоторого предела, называемого *критическим числом Рейнольдса*.

§ 4. Прямолинейно-параллельное движение вязкой жидкости при наличии свободной границы

Рассмотрим установившееся прямолинейно-параллельное течение вязкой несжимаемой жидкости при наличии одной твёрдой плоской стенки и одной свободной границы. Так как на свободной границе ((7,10) гл. II) давление должно быть постоянным, то вдоль этой границы оно не будет зависеть от x , т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Следовательно, в этом случае перепада давления вдоль течения не может быть, и само течение может иметь место только при наличии наклона твёрдой стенки к горизонту, т. е. под действием силы тяжести. Так как давление, строго говоря, нельзя в рассматриваемом случае представить в виде суммы (1.5), то для решения задачи следует обратиться непосредственно к уравнениям (1.4).

Обозначим угол наклона твёрдой стенки (дна) к горизонту через α и выберем ось x параллельно направлению стенки (рис. 28). Так как проекция силы веса единицы массы на ось x будет равна

$$F_x = g \sin \alpha,$$

то первое уравнение (1.4) при учёте (4.1) и при предположении, что скорость u не зависит от координаты y , представится в виде

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \sin \alpha. \quad (4.2)$$

В силу условия прилипания

$$\text{при } y = 0 \quad u = 0, \quad (4.3)$$

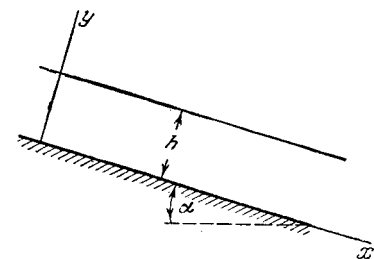


Рис. 28.

и так как на свободной границе сила вязкости на единицу площади должна обращаться в нуль ((7,10) гл. II), то соответствующее гранич-

ное условие для скорости будет представляться в виде:

$$\text{при} \quad y = h \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.2) имеет вид

$$u = -\frac{g}{2\nu} \sin \alpha y^2 + C_1 y + C_2.$$

На основании граничных условий (4.3) и (4.4) получим:

$$C_1 = \frac{gh}{\nu} \sin \alpha,$$

$$C_2 = 0.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи будет представляться в виде

$$u = \frac{g}{2\nu} \sin \alpha (2yh - y^2). \quad (4.5)$$

Максимальная скорость имеет место на свободной границе

$$u_{\max} = \frac{gh^2}{2\nu} \sin \alpha. \quad (4.6)$$

Расход Q равен

$$Q = \int_0^h u \, dy = \frac{1}{3} \frac{gh^3}{\nu} \sin \alpha. \quad (4.7)$$

Сопоставляя полученную формулу (4.7) для расхода с формулой (3.8) для случая течения между двумя неподвижными стенками, мы заключаем, что формулу (4.7) можно получить из формулы (3.8), разделив правую её часть на два и заменив перепад динамического давления через $\rho g \sin \alpha$:

$$-\frac{\partial p_d}{\partial x} = \rho g \sin \alpha. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) получается из первого уравнения (1.6) при использовании условия (1.5). Следовательно, для рассматриваемого случая можно было задачу решать в другом порядке, а именно сначала воспользоваться уравнениями равновесия (1.6) и определить из них перепад статического давления, затем воспользоваться (1.5) и, требуя отсутствия перепада полного давления, определить соответственный перепад динамического давления. После этого взять решение задачи между двумя параллельными неподвижными стенками, заметить в нём перепад динамического давления согласно (4.8) и рассмотреть только течение между стенкой и средней линией, на которой сила вязкости обращается в нуль.

Течения жидкости со свободной поверхностью имеют место в действительности в каналах и реках. Однако к этим случаям формула (4.5) распределения скоростей по глубине не может быть применима на том основании, что в реальных условиях траектории всех частиц не будут строго прямолинейными и параллельными, т. е. течения жидкости в реках и каналах нельзя считать ламинарными.

§ 5. Прямолинейное движение вязкой жидкости в цилиндрической трубе

Дифференциальное уравнение Пуассона (1.8) в полярных координатах r и φ представляется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Будем предполагать, что установившееся прямолинейно-параллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе обладает осевой симметрией, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv 0. \quad (5.2)$$

При этом предположении уравнение (5.1) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Обозначая радиус трубы через a , записываем граничное условие:

$$\text{при } r = a \quad u = 0. \quad (5.4)$$

Представляя дифференциальное уравнение (5.3) в виде

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}$$

и проводя последовательно два интегрирования, получим общее решение рассматриваемого уравнения

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (5.5)$$

Так как определяемая скорость u должна быть конечной при всех значениях r , а найденное общее решение обращается в бесконечность при $r = 0$, т. е. на оси трубы, то мы должны положить:

$$C_1 = 0.$$

Используя граничное условие (5.4), получим:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} a^2.$$

Таким образом, распределение скоростей по сечению цилиндрической трубы будет параболическим, т. е. будет представляться следующей формулой:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x} (a^2 - r^2). \quad (5.6)$$

Распределение же силы вязкости, приходящейся на единицу площади, по сечению будет линейным:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} r \frac{\partial p_d}{\partial x}. \quad (5.7)$$

Через элементарное кольцо ширины dr будет проходить количество жидкости, равное

$$2\pi r dr u.$$

Следовательно, полный расход Q через сечение равен

$$Q = 2\pi \int_0^a ur dr. \quad (5.8)$$

Подставляя значение u из (5.6) и проводя интегрирование, получим следующую формулу Пуазейля для расхода:

$$Q = \frac{\pi}{8} \left(-\frac{\partial p_d}{\partial x} \right) \frac{a^4}{\mu}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) показывает, что при прямолинейном установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической круглой трубе расход прямо пропорционален перепаду давления на единицу длины трубы, четвёртой степени радиуса трубы и обратно пропорционален коэффициенту вязкости.

Этот закон для расхода был экспериментально установлен Пуазейлем ¹⁾ в 1840 г. при систематическом исследовании воды в узких трубках. Формула (5.9) широко используется для определения коэффициента вязкости капельных жидкостей. Простейшая схема прибора для определения вязкости состоит из цилиндрического сосуда, к дну которого прикреплена тонкая цилиндрическая трубка с краном на конце (рис. 29). Давление у входа в цилиндрическую трубку будет равно весу столба жидкости γH , сложенному с атмосферным давлением p_a , а на выходе давление будет равно p_a . Разделив перепад давления γH на длину трубки l , получим:

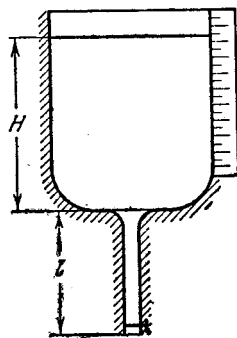


Рис. 29.

$$-\frac{\partial p_d}{\partial x} = \frac{\gamma H}{l}. \quad (5.10)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 20.

Для определения расхода может быть использована шкала с делениями, прикреплённая к боковой поверхности цилиндра. Подставляя значение перепада давления (5.10) в (5.9), получим формулу для вычисления значения коэффициента вязкости по измеренным величинам расхода

$$\mu = \frac{\pi}{8} \frac{\gamma H}{lQ} a^4, \quad (5.11)$$

где a — радиус трубы, γ — удельный вес жидкости.

Если поделить расход Q на всю площадь сечения, то получим среднюю скорость

$$u_{\text{ср}} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\mu} \left(-\frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial x} \right). \quad (5.12)$$

Максимальная скорость будет иметь место на оси трубы

$$u_{\text{max}} = \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial x} \right).$$

Таким образом, максимальная скорость будет вдвое больше средней:

$$u_{\text{max}} = 2u_{\text{ср}}. \quad (5.13)$$

Введём коэффициент сопротивления трубы λ . Максимальное значение силы вязкости на стенке на основании (5.7) будет представляться в виде

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial x} a. \quad (5.14)$$

За коэффициент сопротивления трубы берём отношение модуля максимального значения напряжения силы вязкости к кинетической энергии единицы объёма, т. е.

$$\lambda = \frac{|\tau_{\text{max}}|}{\frac{1}{2} \rho u_{\text{ср}}^2} = \frac{\left| \frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial x} \right| a}{\rho u_{\text{ср}}^2}. \quad (5.15)$$

Подставляя в (5.15) значение перепада давления из (4.12) и вводя число Рейнольдса

$$R = \frac{a u_{\text{ср}}}{\nu}, \quad (5.16)$$

получим следующее выражение для коэффициента сопротивления трубы:

$$\lambda = \frac{8}{R}. \quad (5.17)$$

Таким образом, коэффициент сопротивления цилиндрической трубы при установившемся прямолинейном движении вязкой несжимаемой жидкости обратно пропорционален числу Рейнольдса.

Обычно зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса изображается на логарифмической диаграмме, в которой по оси абсцисс откладываются значения натурального логарифма чисел Рейнольдса, а по оси ординат — значения логарифма коэффициента сопротивления. На такой диаграмме зависимость (5.17) будет представляться отрезком прямой, одинаково наклонённой к осям координат (рис. 30).

Рассмотренное *прямолинейное движение вязкой жидкости в цилиндрической трубе называется ламинарным*. Таким образом, для ламинарного движения в цилиндрической трубе характерны следующие необходимые признаки:

- 1) *прямолинейность траекторий частиц,*
- 2) *параболический профиль распределения скоростей по сечению (5.6),*
- 3) *максимальная скорость вдвое больше средней,*
- 4) *график коэффициента сопротивления на логарифмической диаграмме представляется отрезком прямой, наклонённой к осям под углом в 45° .*

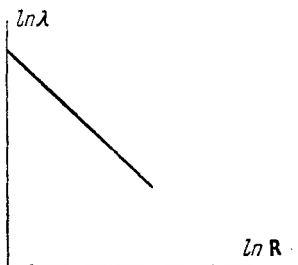


Рис. 30.

Подробные эксперименты и наблюдения показывают, что ламинарное движение в круглой цилиндрической трубе со всеми его перечисленными выше необходимыми признаками осуществляется лишь тогда, когда число Рейнольдса не превышает некоторого значения называемого *критическим*. Значение критического числа Рейнольдса лежит в пределах

$$(R)_{кр} \approx 1100 \div 1400. \quad (5.18)$$

Это условие осуществимости ламинарного движения в круглой цилиндрической трубе является необходимым, но не достаточным, так как на характер течения влияют ещё длина трубы и условия входа в трубу. Вторым условием осуществимости ламинарного движения в трубе служит условие, определяющее длину того *начального участка*, на протяжении которого может развиваться ламинарное движение при любых условиях входа жидкости в трубу. Об этом условии мы будем подробно говорить в главе X, пока же заметим, что длина l начального участка по данным теории и эксперимента должна удовлетворять следующему неравенству:

$$l > 0,16aR. \quad (5.19)$$

Если число Рейнольдса будет превышать критическое число Рейнольдса (5.18), то движение жидкости в трубе будет, вообще говоря, не ламинарным, а *турбулентным*. Основная особенность турбулентного движения вязкой жидкости заключается в *беспорядочном харак-*

тере траекторий отдельных частиц жидкости. К необходимым признакам установившегося турбулентного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе, установленным с помощью наблюдений и измерений, относятся:

- 1) беспорядочность траекторий частиц,
- 2) почти равномерное распределение скоростей по сечению с резким уменьшением их до нуля в тонком слое вблизи стенки,

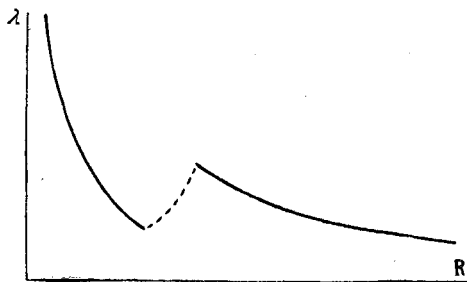


Рис. 31.

3) превышение максимальной скорости над средней порядка 10—20%,

4) график коэффициента сопротивления трубы на обычной диаграмме представляется кривой с медленно убывающим наклоном к оси абсцисс.

Если число Рейнольдса изменять непрерывно от малых значений до очень больших, то коэффициент сопротивления по данным экспериментов на обычной диаграмме представится графиком рис. 31. Этот график показывает, что переход ламинарного движения в турбулентное происходит не плавно, а скачком. При переходе через критическое значение числа Рейнольдса коэффициент сопротивления трубы увеличивается скачком, а затем медленно уменьшается.

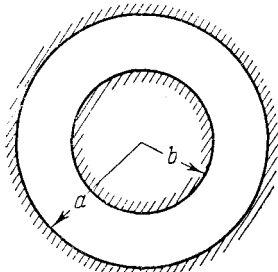


Рис. 32.

§ 6. Прямолинейное движение вязкой жидкости в круглой кольцевой трубе

Рассмотрим кольцевую трубу, ограниченную двумя концентрическими цилиндрами (рис. 32). Обозначим радиус внутреннего цилиндра через b , внешнего — через a . Будем предполагать, что движение вязкой несжимаемой жидкости в кольцевой трубе является установившимся, прямолинейным и осесимметричным. При этих предположениях для единственной компоненты скорости u будем иметь следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Граничное условие прилипания частиц к твердым стенкам предстает

вится в рассматриваемом случае в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = b \quad u = 0, \\ \text{при } r = a \quad u = 0. \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Общее решение уравнения (6.1) имеет вид

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (6.3)$$

Для определения входящих в это решение постоянных получим на основании граничных условий (6.2) следующие уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} b^2 + C_1 \ln b + C_2 = 0, \\ \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} a^2 + C_1 \ln a + C_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

Решая эти уравнения и подставляя найденные значения постоянных в решение (6.3), получим для искомой компоненты скорости следующее выражение:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} \left[(a^2 - b^2) \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} - (r^2 - b^2) \right]. \quad (6.5)$$

Заметим, что правая часть полученного решения (6.5) при уменьшении значения радиуса внутреннего цилиндра b до нуля переходит в правую часть решения (5.6) задачи о течении жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Для рассмотрения другого предельного случая положим:

$$\begin{aligned} r &= b \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ a &= b \left(1 + \frac{h}{b} \right). \end{aligned}$$

Считая отношения $\frac{y}{b}$ и $\frac{h}{b}$ малыми, разложим отношение логарифмов, входящее в правую часть (6.5), в ряд и ограничимся в этом ряде слагаемыми, содержащими $\frac{y}{b}$ и $\frac{h}{b}$ не выше второй степени. В результате получим приближённое выражение для скорости движения жидкости в тонкой кольцевой трубе

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp_x}{dx} (hy - y^2). \quad (6.6)$$

Полученное выражение (6.6) представляет собой не что иное, как решение задачи о прямолинейном движении вязкой жидкости между двумя параллельными и неподвижными стенками, находящимися друг

от друга на расстоянии h . Оно может быть получено и из (3.5) после небольших преобразований.

Обращаясь к решению (6.5), получим для расхода через сечение кольцевой трубы следующую формулу:

$$Q = 2\pi \int_b^a ur dr = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{\partial p_d}{\partial x} \right) (a^2 - b^2) \left[a^2 + b^2 - \frac{a^2 - b^2}{\ln \frac{a}{b}} \right]. \quad (6.7)$$

§ 7. Общая постановка задачи об установившемся круговом движении вязкой несжимаемой жидкости

Жидкость будем считать несжимаемой, т. е.

$$\rho = \text{const},$$

а её движение предполагать установившимся, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Кроме того, будем пренебрегать действием массовых сил

$$F = 0.$$

При этих предположениях дифференциальные уравнения (6.6) и (6.7) главы II движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Рассмотрим теперь случай, когда траектории всех частиц представляют собой дуги концентрических окружностей, т. е.

$$v_r \equiv 0, \quad v_z \equiv 0. \quad (7.2)$$

При этом предположении из последнего уравнения (7.1) — уравнения несжимаемости — получим:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \equiv 0. \quad (7.3)$$

Таким образом, скорость каждой частицы вдоль её траектории будет оставаться неизменной; эта скорость может изменяться лишь при

переходе от одной частицы к другой, т. е. в зависимости от переменных r и z .

Дифференциальные уравнения (7.1) при использовании тождеств (7.2) и (7.3) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Заметим, что благодаря тождествам (7.2) и (7.3) квадратичные члены инерции из основного уравнения, относящегося к искомой скорости v_φ , совершенно выпали, и задача о круговом движении вязкой несжимаемой жидкости стала линейной. Дифференцируя первое уравнение по z и учитывая последнее уравнение, получим:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad (7.5)$$

т. е. круговое движение вязкой несжимаемой жидкости должно быть плоско-параллельным. Во втором уравнении (7.4) слагаемое с давлением перенесём налево и умножим обе части на r ; левая часть зависит от φ , а правая часть не должна зависеть от него, следовательно, обе части равны одной и той же постоянной величине, т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = C. \quad (7.6)$$

Равенство (7.6) означает, что перепад давления вдоль траектории постояен. Второе уравнение (7.4) для определения скорости v_φ при учёте равенств (7.5) и (7.6) будет представляться в виде

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} = \frac{C}{\mu r} \quad (7.7)$$

или

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dv_\varphi}{dr} + \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\varphi) \right] = \frac{C}{\mu r}. \quad (7.8)$$

Проводя последовательно два интегрирования уравнения (7.8), получим его общее решение в виде

$$v_\varphi = \frac{C}{2\mu} r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (7.9)$$

Для давления на основании равенства (7.6) и первого уравнения (7.4) будем иметь:

$$p = C\varphi + \rho \int \frac{v_\varphi^2}{r} dr + C_3. \quad (7.10)$$

На основании формул (6.5) главы II касательное напряжение силы вязкости для кругового движения представится в виде

$$p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right). \quad (7.11)$$

Подставляя в правую часть (7.11) значение v_φ из (7.9), получим:

$$p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{C}{2\mu} - \frac{2C_2}{r^2} \right). \quad (7.12)$$

Таким образом, для установившегося плоско-параллельного кругового движения вязкой несжимаемой жидкости имеют место закономерности (7.9), (7.10) и (7.12), содержащие четыре произвольные постоянные C , C_1 , C_2 и C_3 .

§ 8. Круговое движение между двумя вращающимися цилиндрами

Применим полученные в предшествующем параграфе результаты к случаю движения жидкости между двумя концентрическими цилиндрами (рис. 33).

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус b и вращается с угловой скоростью ω_1 , а внешний имеет радиус a и вращается с угловой скоростью ω_2 . Граничные условия прилипания частиц жидкости к стенкам будут иметь вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = b \quad v_\varphi = \omega_1 b, \\ \text{при } r = a \quad v_\varphi = \omega_2 a. \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

Обращаясь к формуле (7.10), мы видим, что давление при изменении угла φ будет многозначной функцией. Для устранения этой многозначности надо положить:

$$C = 0. \quad (8.2)$$

Используя граничные условия (8.1) и равенство (8.2), получим уравнения для определения постоянных C_1 и C_2

$$\left. \begin{array}{l} C_1 b + \frac{C_2}{b} = \omega_1 b, \\ C_1 a + \frac{C_2}{a} = \omega_2 a, \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

откуда

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2}{a^2 - b^2}, \\ C_2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{a^2 - b^2}. \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

Подставляя значения постоянных C , C_1 и C_2 в равенства (7.9), (7.10) и (7.12), будем иметь следующие формулы для скорости, давления и силы вязкости:

$$v_{\varphi} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{r} \right], \quad (8.5)$$

$$p = \frac{\rho}{(a^2 - b^2)^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2)^2 \frac{r^2}{2} + 2a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2) (\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) \ln r - \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 a^4 b^4}{2r^2} \right] + C_3, \quad (8.6)$$

$$p_{r\varphi} = -2\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{(a^2 - b^2) r^2}. \quad (8.7)$$

Подсчитаем момент всех сил вязкости, распределённых по какой-либо окружности радиуса r , относительно оси симметрии. Обозначая этот момент через L , будем иметь:

$$L = \int_0^{2\pi} p_{r\varphi} r^2 d\varphi.$$

Подставляя выражение $p_{r\varphi}$ из (8.7), получим выражение момента сил вязкости в виде

$$L = -4\pi\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (8.8)$$

Таким образом, момент сил вязкости, распределённых по любой окружности, относительно оси симметрии не зависит от радиуса этой окружности. Это значит, что если мы возьмём слой, ограниченный двумя окружностями, то моменты сил вязкости, распределённых по этим окружностям, будут равны по величине, но обратны по знаку (в силу разных направлений нормали), т. е. для моментов сил вязкости будет выполняться уравнение равновесия.

Впервые задачу о движении жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами решил Ньютон¹⁾. При решении этой задачи он впервые формулирует свою гипотезу о вязкости жидкости, но уравнение для скорости им было составлено неправильно. Ньютон исходил из равновесия самих сил вязкости, а не их моментов. На эту ошибку указал Стокс²⁾, который дал правильное решение задачи. Более подробное решение рассматриваемой задачи с учётом граничных условий частичного торможения частиц жидкости вдоль поверхностей цилиндров было дано в работе Н. П. Петрова³⁾.

¹⁾ Ньютон И., Математические начала натуральной философии, перев. А. Н. Крылова, Собрание сочинений, т. VII, стр. 486.

²⁾ Stokes G., Trans. Cambr. Phil Soc. 8, 287, 1845.

³⁾ Петров Н. П., Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости, сборник «Гидродинамическая теория смазки», изд. 1934.

Рассмотрим частные случаи. Уменьшая значение радиуса внутреннего цилиндра b до нуля, получим из (8.5), (8.6), (8.7) и (8.8):

$$\left. \begin{aligned} v_{\varphi} &= \omega_2 r, \\ p &= \frac{1}{2} \rho \omega_2^2 r^2 + C_3, \\ p_{r\varphi} &= 0, \\ L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Полученные формулы (8.9) представляют решение задачи о вращении кругового цилиндра, наполненного вязкой жидкостью. Таким образом, *при установившемся движении вязкая жидкость внутри цилиндра вращается как абсолютно твердое тело*. Для поддержания равномерного вращения цилиндра с вязкой жидкостью не требуется момента внешних сил. Чтобы получить решение задачи о вращении круглого цилиндра в безграничной жидкости, необходимо в формулах (8.5), (8.6), (8.7) и (8.8) вначале положить:

$$\omega_2 = 0,$$

а затем радиус внешнего цилиндра a увеличивать до бесконечности. В результате мы получим:

$$\left. \begin{aligned} v_{\varphi} &= \frac{\omega_1 b^2}{r}, \\ p &= C_3 - \frac{\omega_1^2 b^4}{2r^2}, \\ p_{r\varphi} &= -\frac{2\mu\omega_1 b^3}{r^2}, \\ L &= -4\pi\mu\omega_1 b^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Первая формула (8.10) показывает, что скорость частиц изменяется с расстоянием от оси так же, как если бы на оси цилиндра располагалась вихревая нить и жидкость была бы идеальной. Следовательно, движение частиц вне цилиндра в этом случае, как уже было указано в § 1 главы III, будет потенциальным. Для поддержания равномерного движения цилиндра в неограниченной жидкости необходимо приложить момент внешних сил, пропорциональный угловой скорости вращения цилиндра, коэффициенту вязкости и квадрату радиуса цилиндра.

Полученное выражение (8.8) для момента сил вязкости используется в приборах с концентрическими цилиндрами¹⁾, предназначенных для экспериментального определения вязкости. Измеряя каким-либо способом момент сил вязкости, мы получаем возможность по этой формуле подсчитать значение коэффициента вязкости.

¹⁾ Гатчек Э., Вязкость жидкостей, ГТТИ, 1932, стр. 47.

§ 9. Движение жидкости между искривлёнными стенками

Рассмотрим теперь случай, в котором частицы жидкости в своём движении описывают не полные окружности, а лишь некоторые их части. Один из примеров такого рода движений вязкой несжимаемой жидкости был рас-

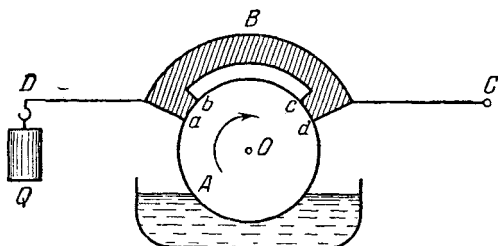


Рис. 34.

смотрен Н. Е. Жуковским¹⁾ в работе, посвящённой гидродинамической теории трения. В этой работе рассматривается вращающийся цилиндр, охваченный лишь частично подшипником, имеющим вырез bc , наполненный маслом (рис. 34). Предполагалось, что траектории частиц в слое bc представляют собой дуги concentрических окружностей. Мы же рассмотрим другой случай такого вида движений жидкости.

Предположим, что течение вязкой и несжимаемой жидкости происходит между двумя неподвижными стенками, представляющими собой в сечении две дуги окружностей с радиусами b и a и общим центром (рис. 35).

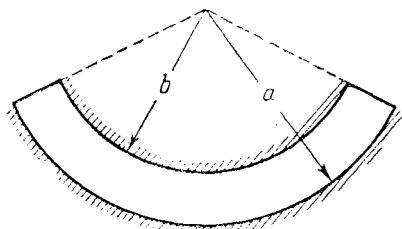


Рис. 35.

Предполагая, что частицы жидкости перемещаются строго по дугам concentрических окружностей, для скорости v_φ будем иметь формулу (7.9). На основании этой формулы для расхода Q через сечение рассматриваемого криволинейного канала получим следующее выражение:

$$Q = \int_b^a v_\varphi dr = \frac{C}{2\mu} \left[\frac{a^2}{2} (\ln a - 1) - \frac{b^2}{2} (\ln b - 1) \right] + \frac{1}{2} C_1 (a^2 - b^2) + C_2 \ln \frac{a}{b} \quad (9.1)$$

Из условия прилипания имеем:

$$\frac{C}{2\mu} a \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) + C_1 a + \frac{C_2}{a} = 0; \quad \frac{C}{2\mu} b \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) + C_1 b + \frac{C_2}{b} = 0, \quad (9.2)$$

откуда

$$C_1 = \frac{C}{2\mu} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2 \ln a - b^2 \ln b}{a^2 - b^2} \right), \quad C_2 = \frac{C}{2\mu} \frac{a^2 b^2 \ln \frac{a}{b}}{a^2 - b^2}. \quad (9.3)$$

При подстановке значений (9.3) формула (9.1) для расхода примет следующий вид:

$$Q = -\frac{C}{8\mu} \left[a^2 - b^2 - \frac{4a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (9.4)$$

¹⁾ Жуковский Н. Е., О гидродинамической теории трения хорошо смазанных тел, Собрание сочинений, т. III, 1949.

Входящее в это выражение постоянное C представляет собой согласно (7.6) перепад давления, приходящийся на один радиан угла φ . Для случая прямолинейного движения вязкой жидкости между двумя неподвижными и параллельными стенками, отстоящими друг от друга на расстоянии h , из (3.8) можно получить следующую формулу для расхода:

$$Q = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p_x}{\partial x} h^3. \quad (9.5)$$

Полученное выражение (9.4) можно рассматривать как обобщение формулы (9.5) на случай искривлённых по дугам окружностей стенок. Правую часть формулы (9.5) можно получить из правой части (9.4), если положить:

$$C = \frac{\partial p_x}{\partial x} b,$$

$$a = b \left(1 + \frac{h}{b}\right),$$

а затем провести разложение по степеням отношения $\frac{h}{b}$, сохранив члены не выше третьей степени.

Давление, определяемое по формуле (7.10), будет зависеть и от переменного r . Но если предполагать скорость сравнительно малой, а радиус внутренней дуги b

сравнительно большим, то слагаемым, содержащим интеграл от квадрата скорости, можно будет пренебречь и считать приближённо давление неизменным по толщине слоя.

Полученное выше решение может быть использовано для рассмотрения течения в канале, границы которого составлены частично из прямолинейных стенок, а частично из дуговых стенок. Например, канал, представленный на рис. 36, состоит из прямолинейного участка AB , дугового участка BD и прямолинейного горизонтального участка DC . Давления у входа A и выхода из канала C считаются известными. Тогда, используя (9.4) и (9.5), получим следующие формулы для разностей давлений в точках перехода от прямолинейных участков к криволинейным, при одном и том же расходе:

$$\left. \begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{12\mu I_1 Q}{h^3}, \\ p_2 - p_3 &= \frac{8\mu Q \frac{\pi}{2}}{a^2 - b^2 - \frac{4a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left(\ln \frac{a}{b}\right)^2}, \\ p_3 - p_4 &= \frac{12\mu I_2 Q}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Складывая левые и правые части равенств (9.6), получим окончательную формулу для расхода в рассматриваемом нами случае составного канала

$$Q = \frac{p_1 - p_4}{\mu} \frac{1}{\frac{12I_1}{h^3} + \frac{4\pi}{a^2 - b^2 - \frac{4a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} + \frac{12I_2}{h^3}} \quad (9.7)$$

Полученная формула для расхода является приближённой, так как при написании (9.6) не учитывалось изменение давления на криволинейном участке по радиусу.

§ 10. Плоско-параллельное радиальное течение вязкой жидкости

Предположим, что траектории всех частиц вязкой и несжимаемой жидкости при её установившемся движении представляют собой прямые линии, расходящиеся от оси z , т. е.

$$v_\varphi \equiv 0, \quad v_z \equiv 0. \quad (10.1)$$

При этом предположении дифференциальные уравнения (7.1) в цилиндрических координатах принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

На основании последнего уравнения (10.2) мы заключаем, что произведение радиальной скорости v_r на радиус r не будет зависеть от r . Положим:

$$rv_r = u. \quad (10.3)$$

Будем предполагать движение плоско-параллельным, т. е.

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0. \quad (10.4)$$

После интегрирования по φ второго уравнения (10.2) получим:

$$p = \frac{2\mu v_r}{r} + f(r). \quad (10.5)$$

Подставляя значения v_r из (10.3) и p из (10.5) в первое уравнение (10.2), получим:

$$u^2 + 4\nu u + \nu \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{1}{\rho} r^3 \frac{df}{dr}. \quad (10.6)$$

Так как левая часть (10.6) не зависит от r , а правая часть зависит только от r , то обе части должны быть равны одной и той же

постоянной величине, т. е.

$$\frac{r^3}{\rho} \frac{df}{dr} = A.$$

Отсюда находим выражение для функции f :

$$f = -\frac{A\rho}{2r^2} + B.$$

Таким образом, давление в рассматриваемом радиальном течении будет представляться в виде

$$p = \frac{2\mu u(\varphi)}{r^2} - \frac{A\rho}{2r^2} + B. \quad (10.7)$$

Дифференциальное уравнение для функции u будет иметь вид

$$\nu \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 4\nu u + u^2 = A. \quad (10.8)$$

Умножим обе части этого уравнения на $\frac{du}{d\varphi}$ и проинтегрируем; получим:

$$\frac{\nu}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + 2\nu u^2 + \frac{1}{3} u^3 = Au + C_1,$$

или

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -\frac{2}{3\nu} u^3 - 4u^2 + \frac{2A}{\nu} u + C_2 = -\frac{2}{3\nu} F(u), \quad (10.9)$$

где $F(u)$ представляет собой многочлен третьей степени

$$F(u) = u^3 + 6\nu u^2 - 3Au + C. \quad (10.10)$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой части (10.9) и разделяя переменные, получим формальное решение уравнения в виде эллиптического интеграла

$$\varphi = \int \frac{du}{\pm \sqrt{-\frac{2}{3\nu} F(u)}} + D. \quad (10.11)$$

Решение (10.11) будет содержать три произвольных постоянных A , C и D , для определения которых необходимо задать граничные условия.

Рассмотрим теперь конкретный случай радиального течения между плоскими сходящимися неподвижными стенками (рис. 37). Обозначим половину угла раствора через φ_0 . В силу условия прилипания:

$$\text{при } \varphi = \pm \varphi_0 \quad u = 0. \quad (10.12)$$

Для расхода Q будем иметь следующее выражение:

$$Q = 2 \int_0^{\varphi_0} v_r r d\varphi = 2 \int_0^{\varphi_0} u d\varphi. \quad (10.13)$$

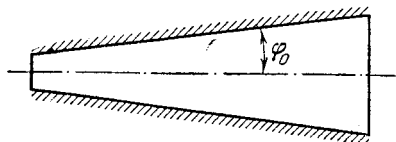


Рис. 37.

Будем различать два случая радиального течения: *расходящееся* и *сходящееся*. Для расходящегося течения радиальная скорость положительна, а величина u убывает от оси к верхней стенке, т. е.

$$v_r > 0, \quad \frac{du}{d\varphi} < 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0,$$

а для сходящегося течения, наоборот,

$$v_r < 0, \quad \frac{du}{d\varphi} > 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

Обозначим корни многочлена (10.10) через e_1 , e_2 и e_3 , т. е. положим:

$$F(u) = (u - e_1)(u - e_2)(u - e_3).$$

Сумма этих корней равна коэффициенту при квадрате в (10.10) с обратным знаком

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu. \quad (10.14)$$

Пусть все эти корни действительны и пусть

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Тогда примерный график этого многочлена будет представляться кривой, подходящей к оси абсцисс u с отрицательной стороны оси ординат и пересекающей ось абсцисс три раза (рис. 38). Так как много-

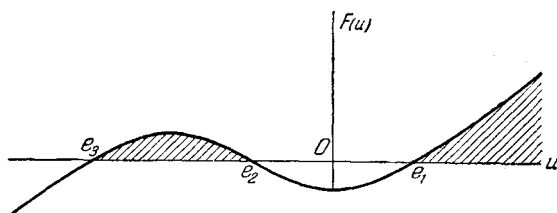


Рис. 38.

член входит в правую часть (10.9) с отрицательным множителем, а левая часть существенно положительна, то области графика, где многочлен будет положительным, должны исключаться из рассмотрения (эти области покрыты штриховкой). В силу граничного условия (10.12) начало абсцисс ($u = 0$) должно входить в области, где $F(u) < 0$. Но левее точки $u = e_3$ начало оси абсцисс не может быть, ибо тогда все корни оказались бы положительными, а это исключено соотношением (10.14). Следовательно, начало оси абсцисс должно располагаться где-то между e_1 и e_2 и оно будет разбивать область возможного радиального течения на две отдельные области. Для области справа от начала мы будем иметь:

$$0 \leq u \leq e_1, \quad e_2 e_3 > 0. \quad (10.15)$$

Этой области будет отвечать чисто расходящееся радиальное течение. Для области же слева от начала будут иметь место неравенства

$$e_2 \leq u \leq 0, \quad e_1 e_3 < 0, \quad (10.16)$$

т. е. этой области будет отвечать чисто сходящееся течение. Так как корни многочлена $F(u)$ отвечают экстремальным значениям функции $u(\varphi)$, то в первом случае величина e_1 будет представлять собой

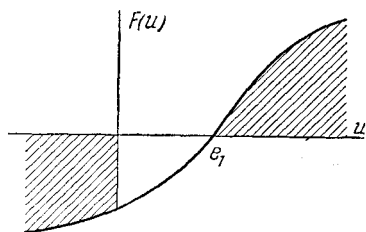


Рис. 39.

максимальное значение u , имеющее место на линии симметрии ($\varphi = 0$), а во втором случае e_2 будет представлять минимальное значение u , имеющее место также при $\varphi = 0$.

Если же многочлен $F(u)$ будет иметь только один действительный корень e_1 , то график этого многочлена будет примерно представляться кривой на рис. 39. Область, расположенная справа от e_1 , где $F(u) > 0$,

должна исключаться из рассмотрения. Начало оси абсцисс должно располагаться тогда слева от e_1 . Области, расположенной между началом и e_1 , будет отвечать чисто расходящееся течение, для которого имеют место неравенства

$$0 \leq u \leq e_1, \quad e_2 e_3 > 0. \quad (10.17)$$

Таким образом, для чисто расходящегося течения из (10.9) и (10.13) имеем:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2}{3\nu}} \sqrt{(e_1 - u)[u^2 - (e_2 + e_3)u + e_2 e_3]}, \quad (10.18)$$

$$dQ = 2u d\varphi = -2\sqrt{\frac{3\nu}{2}} \frac{u du}{\sqrt{(e_1 - u)[u^2 - (e_2 + e_3)u + e_2 e_3]}}. \quad (10.19)$$

Проводя интегрирование по переменному u в пределах от e_1 до нуля, а по φ от нуля до φ_0 и используя (10.14), получим:

$$\sqrt{\frac{2}{3\nu}} \varphi_0 = \int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)[u^2 + (6\nu + e_1)u + e_2 e_3]}}, \quad (10.20)$$

$$\frac{1}{2} Q \sqrt{\frac{2}{3\nu}} = \int_0^{e_1} \frac{u du}{\sqrt{(e_1 - u)[u^2 + (6\nu + e_1)u + e_2 e_3]}}, \quad (10.21)$$

$$e_2 e_3 > 0, \quad e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu. \quad (10.22)$$

Полученные соотношения (10.20), (10.21) и (10.22) позволяют определить значения трёх корней e_1 , e_2 , e_3 по заданным значениям φ_0 , Q и ν . Практически же, конечно, удобнее поступать в обратном

порядке, т. е. задавать два значения из трёх e_1 , e_2 , e_3 и определять отвечающие им значения φ_0 и Q . Для чисто сходящегося течения из (10.9) будем иметь:

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2}{3\nu}} \sqrt{(e_2 - u)[u^2 + (6\nu + e_2)u + e_1 e_3]}, \quad (10.23)$$

$$dQ = 2u d\varphi = 2 \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \frac{u du}{\sqrt{(e_2 - u)[u^2 + (6\nu + e_2)u + e_1 e_3]}}. \quad (10.24)$$

Для определения же значений e_1 , e_2 и e_3 должны быть использованы следующие соотношения:

$$\sqrt{\frac{2}{3\nu}} \varphi_0 = \int_{e_2}^0 \frac{du}{\sqrt{(e_2 - u)[u^2 + (6\nu + e_2)u + e_1 e_3]}}, \quad (10.25)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3\nu}} Q = \int_{e_2}^0 \frac{u du}{\sqrt{(e_2 - u)[u^2 + (6\nu + e_2)u + e_1 e_3]}}, \quad (10.26)$$

$$e_1 e_3 < 0, \quad e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu. \quad (10.27)$$

На основании соотношений (10.20), (10.21) и (10.22) можно показать, что чисто расходящееся течение будет возможно только при сравнительно малых углах раствора плоского диффузора. Чтобы показать это, установим два неравенства. Если правую и левую части (10.20) умножить на e_1 , то в силу того, что

$$u \leq e_1,$$

правая часть (10.20) с множителем e_1 будет больше правой части (10.21). Следовательно, будем иметь неравенство

$$\varphi_0 e_1 > \frac{1}{2} Q. \quad (10.28)$$

Смысл этого неравенства очевиден: произведение половины угла раствора плоского диффузора на радиус и на максимальную скорость, имеющую место на линии симметрии, конечно, будет превышать значение половины общего расхода.

Далее, так как

$$e_2 e_3 > 0$$

и все слагаемые в квадратной скобке под знаком корня в (10.20) положительны, то, отбрасывая в этой скобке слагаемые u^2 и $e_2 e_3$, мы уменьшим знаменатель под интегралом и, следовательно, увеличим всё подинтегральное выражение, т. е. будем иметь:

$$\sqrt{\frac{2}{3\nu}} \varphi_0 < \int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(6\nu + e_1)u(e_1 - u)}}. \quad (10.29)$$

Интеграл, входящий в правую часть (10.29), имеет следующее значение:

$$\int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)u}} = \int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{\frac{e_1^2}{4} - \left(u - \frac{e_1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{u - \frac{e_1}{2}}{\frac{e_1}{2}} \Big|_0^{e_1} = \pi.$$

Следовательно, неравенство (10.29) представляется в виде

$$\varphi_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \frac{e_1}{6\nu}}}. \quad (10.30)$$

Таким образом, расходящееся течение в плоском диффузоре возможно при половинном угле раствора φ_0 , удовлетворяющем неравенству (10.30). С увеличением расхода, т. е. увеличением e_1 , и с уменьшением кинематического коэффициента вязкости ν предельный угол раствора диффузора для чисто расходящегося течения будет уменьшаться.

Из неравенства (10.30) будем иметь:

$$\frac{e_1}{\nu} < \left(\frac{3\pi^2}{2\varphi_0^2} - 6 \right),$$

а из неравенства (10.28) получим:

$$\frac{e_1}{\nu} > \frac{Q}{2\nu\varphi_0}.$$

Следовательно, правая часть второго неравенства будет заведомо меньше правой части первого неравенства

$$\frac{Q}{\nu} < \left(\frac{3\pi^2}{\varphi_0} - 12\varphi_0 \right). \quad (10.31)$$

Так как расход Q имеет размерность произведения скорости на длину, то отношение расхода к кинематическому коэффициенту вязкости можно взять за число Рейнольдса плоского диффузора, т. е.

$$\frac{Q}{\nu} = R.$$

Таким образом, чисто расходящееся течение в плоском диффузоре возможно только при тех значениях числа Рейнольдса, которые удовлетворяют неравенству

$$R < \left(\frac{3\pi^2}{\varphi_0} - 12\varphi_0 \right). \quad (10.32)$$

Например, при $\varphi_0 = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$ должно быть:

$$R < 168.$$

Если число Рейнольдса немного превзойдет предел, допускаемый неравенством (10.32), то в ядре вблизи линии симметрии течение будет расходящимся, а вблизи стенок теоретически оно должно было бы стать сходящимся, а практически будет происходить *отрыв жидкости от стенок*. Таким образом, рассмотренная задача о радиальном течении в плоском диффузоре поучительна в том отношении, что решение её указывает теоретически на возможность отрыва жидкости от стенок в расходящемся течении, что в действительности часто и происходит.

Обратимся теперь к чисто сходящемуся течению. Соотношение (10.25) можно также представить в виде

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{3\nu}} \int_{e_3}^0 \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)}}. \quad (10.33)$$

Легко показать, что *чисто сходящееся течение возможно при любых значениях числа Рейнольдса*. Для этого будем уменьшать значение коэффициента вязкости до нуля. Так как левая часть (10.33) имеет конечное значение, то уменьшение ν до нуля должно сопровождаться увеличением до бесконечности интеграла в правой части, что вполне возможно при приближении значения e_3 к значению e_2 . Этим собственно и доказывается то, что чисто сходящееся течение в конфузоре возможно и при очень больших числах Рейнольдса (при очень малых значениях ν). Учитывая это, и считая ν очень малым, можно положить в (10.23).

$$\begin{aligned} e_2 &\approx e_3, \\ e_1 &\approx -2e_2; \end{aligned}$$

тогда получим:

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2}{3\nu}} (e_2 - u) \sqrt{-u - 2e_2}.$$

Проводя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3\nu}} (\varphi - \varphi_0) &= - \int_0^u \frac{du}{(u - e_2) \sqrt{-(u + 2e_2)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-3e_2}} \ln \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{-(2e_2 + u)} + \sqrt{-3e_2})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{-(2e_2 + u)} - \sqrt{-3e_2})}, \end{aligned}$$

или

$$e^{\sqrt{\frac{-2e_2}{\nu}} (\varphi - \varphi_0)} = (5 + 2\sqrt{6}) \frac{\sqrt{-3e_2} + \sqrt{-(2e_2 + u)}}{\sqrt{-3e_2} - \sqrt{-(2e_2 + u)}}. \quad (10.34)$$

Если кинематический коэффициент вязкости очень мал, то левая часть будет достаточно велика при любом значении угла φ , отличном от φ_0 .

Чтобы при этом и правая часть (10.34) была также велика, необходимо u считать близким к e_2 . Это означает, что в сходящемся течении в плоском конфузоре при больших числах Рейнольдса распределение скоростей по углу φ будет почти равномерным, и лишь вблизи стенки эта скорость будет быстро убывать до нуля (рис. 40). Если бы жидкость считалась идеальной, то в случае стока на плоскости радиальная скорость представлялась бы в виде

$$v_r = -\frac{Q}{2\varphi_0 r}$$

и, следовательно,

$$u = r v_r = -\frac{Q}{2\varphi_0} = \text{const.} \quad (10.35)$$

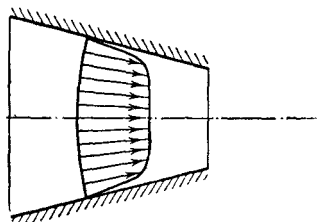


Рис. 40.

Сопоставляя этот результат с предшествующим заключением, мы приходим к выводу, что при больших числах Рейнольдса вязкость проявляется лишь в тонком слое вблизи стенки.

Рассматриваемое в этом параграфе плоское радиальное течение является простейшим частным случаем того точного решения дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, которое было впервые установлено Гамелем¹⁾ и затем обобщено Озееном²⁾ и Розенблаттом³⁾.

§ 11. Вращение безграничной плоскости

В предшествующем параграфе данной главы рассматривались такие случаи движений, для которых дифференциальные уравнения установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости решались точно благодаря упрощающим предположениям о характере траекторий частиц жидкости. Но к использованию полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости можно подойти и с другой стороны, а именно делать заранее предположения не о характере траекторий частиц, а о характере тех функций, через которые представляются проекции вектора скорости и давление. Этим путём при удачном выборе характера функций для скоростей и давлений можно в отдельных случаях от системы дифференциальных уравнений с частными производными перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно решить, по крайней мере, численным способом.

¹⁾ Hamel G., Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Jahresbericht der deutschen Mathem. Vereinigung **25**, 1916.

²⁾ Oseen C., Exakte Lösungen der hydrodyn. Differentialgleichungen, Arkiv för matem. astr. och fysik, т. 20, N 14, 22, 1927.

³⁾ Rosenblatt A., Solutions exactes des équations du mouvement des liquides, visqueux, Mem. des Sciences Mathem. **72**, 1935.

В качестве примера применения этого метода рассмотрим случай вращения безграничной плоскости, впервые исследованный в работе Кармана ¹⁾.

Если, помимо предположений о несжимаемости жидкости, установившемся характере движения и о возможности пренебрегать действием массовых сил, допустить ещё, что распределение скоростей и давления не зависит от полярного угла φ , то дифференциальные уравнения (7.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} (11.1)$$

Следуя Карману, примем для скоростей и давления следующие выражения:

$$v_r = rF(z), \quad v_\varphi = rG(z), \quad v_z = H(z), \quad p = p(z). \quad (11.2)$$

При этих предположениях дифференциальные уравнения (11.1) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} F^2 + H \frac{dF}{dz} - G^2 &= \nu \frac{d^2 F}{dz^2}, \\ 2FG + H \frac{dG}{dz} &= \nu \frac{d^2 G}{dz^2}, \\ H \frac{dH}{dz} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{d^2 H}{dz^2}, \\ 2F + \frac{dH}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} (11.3)$$

Таким образом: благодаря предположениям (11.2) дифференциальные уравнения (11.1) с частными производными оказались преобразованными в систему (11.3) четырёх нелинейных обыкновенных уравнений второго порядка.

Дальнейшее рассмотрение уравнений (11.3) проведём применительно уже к конкретной задаче вращения безграничной плоскости Oxy вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω_0 в жидкости, расположенной только по одну сторону от плоскости (рис. 41). Примем, что частицы жидкости прилипают к вращающейся стенке, т. е.

$$\text{при } z = 0 \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = r\omega_0, \quad v_z = 0,$$

¹⁾ Kármán T., Über die laminare und turbulente Reibung, ZAMM 1, 1921.

а на бесконечности лишь две скорости v_r и v_φ обращаются в нуль, так как радиальное растекание жидкости по плоскости возможно, только если считать v_z на бесконечности отличной от нуля:

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad v_r \rightarrow 0, \quad v_\varphi \rightarrow 0.$$

Учитывая предположения (11.2) и сформулированные граничные условия, будем иметь для искомых функций следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = 0 \quad F(0) = 0, \quad G(0) = \omega_0, \quad H(0) = 0, \\ \text{при } z = \infty \quad F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 0. \end{array} \right\} \quad (11.4)$$

Дифференциальные уравнения (11.3) при граничных условиях (11.4) можно решать с помощью разложений искомых функций вблизи

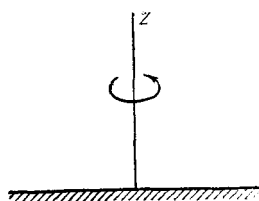


Рис. 41.

начала координат ($z = 0$) и их асимптотических разложений вблизи бесконечно удалённой точки ($z = \infty$). Входящие в эти разложения коэффициенты должны быть определены не только из граничных условий, но и из требований непрерывности самих функций F , G и H и первых производных $\frac{dF}{dz}$ и $\frac{dG}{dz}$. Так как это решение является громоздким, то мы рассмотрим лишь приближённое решение этих уравнений в том случае, когда граничное условие на бесконечности заменено условием на конечном расстоянии от плоскости. Примем, что на некотором неизвестном расстоянии δ от плоскости две скорости v_r и v_φ обращаются в нуль и обращается в нуль первая производная v_φ по z . Иначе говоря, второе граничное условие (11.4) заменим следующим:

$$\text{при } z = \delta \quad F(\delta) = 0, \quad G(\delta) = 0, \quad \frac{dG}{dz} = 0. \quad (11.5)$$

Нелинейные слагаемые в первых двух дифференциальных уравнениях (11.3) заменим их средним значением по толщине слоя δ , т. е. положим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_0^\delta \left(F^2 + H \frac{dF}{dz} - G^2 \right) dz = A, \\ \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_0^\delta \left(2FG + H \frac{dG}{dz} \right) dz = B, \end{array} \right\} \quad (11.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2F}{dz^2} = A, \\ \frac{d^2G}{dz^2} = B. \end{array} \right\} \quad (11.7)$$

Решая уравнения (11.7), получим:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} Az^2 + C_1 z + C_2, \\ G &= \frac{1}{2} Bz^2 + C_3 z + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

На основании последнего уравнения (11.3) и (11.8) будем иметь:

$$H = -2 \left(\frac{1}{6} Az^3 + \frac{1}{2} C_1 z^2 + C_2 z + C_5 \right). \quad (11.9)$$

Используя граничные условия (11.4) и (11.5), получим следующие значения постоянных:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2} A\delta, & C_1 &= \omega_0, \\ C_2 &= 0, & C_5 &= 0, \\ C_3 &= -\frac{1}{2} B\delta - \frac{\omega_0}{\delta}, & B &= \frac{2\omega_0}{\delta^2}. \end{aligned}$$

При этих значениях искомые функции представляются приближённо в виде

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} A (z^2 - \delta z), \\ G &= \frac{\omega_0}{\delta^2} (z - \delta)^2, \\ H &= -A \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} \delta z^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Подставляя (11.10) в (11.6) и выполняя интегрирование, получим уравнения для определения A и толщины слоя δ

$$\begin{aligned} A &= \frac{A^2 \delta^4}{40\nu} - \frac{\omega_0^2}{5\nu}, \\ \frac{2\omega_0}{\delta^2} &= -\frac{A\omega_0\delta^2}{10\nu}. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{2}{15} \frac{\omega_0^2}{\nu}, \\ \delta &= 3,50 \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Сила вязкости, приходящаяся на единицу вращающейся плоскости, будет представляться в виде

$$(P_{\varphi z})_0 = \mu \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} \right)_0 = \mu r \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_0 = -\frac{2\mu r \omega_0}{\delta}.$$

Умножая левую и правую части на $2\pi r^2 dr$ и проводя интегрирование

по переменному r от нуля до некоторого значения R , получим момент сил вязкости, распределённых до диска радиуса R относительно оси вращения:

$$L = -2\pi \int_0^R (p_{\varphi z})_0 r^2 dr = -\pi \mu R^4 \frac{\omega_0}{\delta} = -0,9R^4 \sqrt{\mu \rho \omega_0^2} \frac{3}{2}. \quad (11.12)$$

Таким образом, в рассматриваемом примере момент сил вязкости относительно оси вращения пропорционален угловой скорости вращения в степени $3/2$.

§ 12. Случай импульсного источника

Следуя указанному в предшествующем параграфе обратному методу, рассмотрим ещё один случай¹⁾ точного интегрирования уравнений установившегося осесимметричного движения вязкой несжимаемой жидкости.

В уравнениях (11.1) примем поперечную скорость v_φ равной нулю и введём функцию тока ψ , полагая

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (12.1)$$

Тогда первое и третье уравнения (11.1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r^2 + v_z^2}{2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} D\psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial D\psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_r^2 + v_z^2}{2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D\psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial D\psi}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

где D — оператор Стокса, равный

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (12.3)$$

Перейдём теперь к сферическим координатам R и θ и положим:

$$\begin{aligned} r &= R \sin \theta, \\ z &= R \cos \theta. \end{aligned}$$

Отсюда будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial R} &= \sin \theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial z}{\partial R} &= \cos \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Умножая в первый раз левые части (12.2) на $\frac{\partial r}{\partial R}$ и $\frac{\partial z}{\partial R}$ соответственно,

¹⁾ Слѣзкин Н. А., Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, Учёные записки МГУ вып. II, 1934.

а правые части на $-\frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta}$ и $\frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta}$, а во второй раз левые части на $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, а правые — на $R \frac{\partial z}{\partial r}$ и $-R \frac{\partial r}{\partial R}$ и складывая, получим дифференциальные уравнения движения в сферических координатах

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \frac{D\psi}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} &= \frac{\nu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \frac{D\psi}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -\frac{\nu}{\sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Исключая из уравнений (12.4) с помощью перекрёстного дифференцирования давление, получим следующие дифференциальные уравнения для функции тока:

$$\frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial R} \right) - \frac{2D\psi}{R^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -\nu DD\psi, \quad (12.5)$$

где оператор Стокса имеет вид

$$D = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (12.6)$$

Компоненты скорости v_R и v_θ будут представляться через функцию тока в виде

$$\left. \begin{aligned} v_R = v_r \sin \theta + v_z \cos \theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ v_\theta = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial R} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Наконец, полагая

$$\cos \theta = \tau, \quad (12.8)$$

будем иметь для функции тока уравнение в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial D\psi}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial D\psi}{\partial \tau} - 2D\psi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\tau}{1-\tau^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = -\nu R^2 DD\psi, \quad (12.9)$$

при этом

$$D = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1-\tau^2}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad (12.10)$$

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ v_\theta &= -\frac{1}{R \sqrt{1-\tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial R}; \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= -\frac{\nu}{R^2} \frac{\partial D\psi}{\partial \tau} + \frac{D\psi}{R^2(1-\tau^2)} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \\ -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= -\frac{\nu}{1-\tau^2} \frac{\partial D\psi}{\partial R} - \frac{D\psi}{R^2(1-\tau^2)} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

Решение дифференциального уравнения (12.9) будем искать в виде произведения произвольной функции от переменного τ на радиус R

$$\psi = Rf(\tau). \quad (12.13)$$

При этом предположении будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -\frac{1}{R} f'(\tau), \\ v_\theta &= -\frac{1}{R} \frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \\ D\psi &= \frac{1-\tau^2}{R} f'', \\ \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= -\frac{\nu}{R^3} \frac{d}{d\tau} [(1-\tau^2) f''] + \frac{1}{R^3} f'' f', \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= -\frac{\nu}{R^2} f'' + \frac{1}{R^2} f'' f'. \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Интегрируя последнее соотношение по τ , получим для давления:

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{R^2} \left(-\nu f' + \frac{1}{2} f'^2 + C \right). \quad (12.15)$$

Дифференциальное уравнение (12.9) для функции тока представится в виде

$$-ff'''' - 3f'f'' = -\nu [(1-\tau^2) f^{IV} - 4\tau f''']. \quad (12.16)$$

Так как

$$\left(\frac{f^2}{2} \right)''' = (ff')' = (ff'' + f'^2)' = ff''' + 3f'f''$$

$$[(1-\tau^2) f' + 2\tau f]''' = (1-\tau^2) f^{IV} - 4\tau f''',$$

то дифференциальное уравнение (12.16) представится в виде

$$\frac{d^3}{d\tau^3} \left[\frac{1}{2} f^2 - \nu(1-\tau^2) f' - 2\nu\tau f \right] = 0. \quad (12.17)$$

Проводя интегрирование, получим дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{1}{2} f^2 - \nu(1-\tau^2) f' - 2\nu\tau f = C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2. \quad (12.18)$$

С помощью подстановки

$$f = -2\nu(1-\tau^2) \frac{d \ln y}{d\tau} \quad (12.19)$$

уравнение (12.18) приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} - \frac{C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2}{2\nu^2(1-\tau^2)^2} y = 0. \quad (12.20)$$

Если все постоянные C_0 , C_1 и C_2 положить равными нулю, то получим решение уравнения (12.20) в виде

$$y = A + B\tau.$$

Отсюда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{B}{A + B\tau} = \frac{1}{C + \tau}, \\ f &= -2\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{C + \tau}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

Простейшее решение дифференциального уравнения (12.18), представленное в виде (12.21), было получено Ландау¹⁾ и истолковано как решение, отвечающее затопленной струе. Другие случаи интегрирования уравнения Рикати (12.18) рассмотрены в книге Седова²⁾.

Чтобы истолковать гидродинамический смысл решения, отвечающего функции тока (12.13), обратимся к выражениям (2.11) главы II векторов, образующих тензор плотности потока импульсов. В сферических координатах эти три вектора представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \rho v_R \mathbf{V} - \mathbf{p}_R, \\ \sigma_\theta &= \rho v_\theta \mathbf{V} - \mathbf{p}_\theta, \\ \sigma_\varphi &= \rho v_\varphi \mathbf{V} - \mathbf{p}_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

где \mathbf{V} — вектор скорости, а \mathbf{p}_R , \mathbf{p}_θ и \mathbf{p}_φ — векторы напряжений по площадям, перпендикулярным к координатным линиям R , θ и φ . Для рассматриваемого нами случая осесимметричного движения для компонент тензора напряжения из (6.9) главы II будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} p_{RR} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_R}{\partial R}, & p_{R\theta} &= \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} \right), \\ p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{v_R}{R} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R} \right), & p_{\varphi R} &= 0, \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{v_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), & p_{\varphi\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

Так как компоненты скорости из (12.14) обратно пропорциональны радиусу, а давление из (12.15) обратно пропорционально квадрату радиуса, то каждый из трёх векторов (12.22), представляющих тензор плотности потока импульсов, будет обратно пропорционален квадрату сферического радиуса. Это значит, что если мы проведём из начала координат пучок направлений, образующих круглый конус с небольшим углом раствора (рис. 42), то для всех сечений этого конуса произведение каждой составляющей из трёх векторов σ на площадь сечения будет одним и тем же. В частности, будет одним и тем же поток вектора-импульса, направленного по нормали к сечению, т. е.

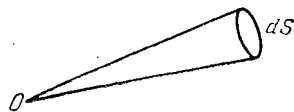


Рис. 42.

$$\sigma_{RR} dS = (\rho v_R^2 - p_{RR}) dS = \text{const}. \quad (12.24)$$

¹⁾ Ландау Л. и Лифшиц Е., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.

²⁾ Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, 1951.

На этом основании можно говорить, что решение (12.13) представляет собой *случай импульсного источника*, т. е. такого течения, при котором поток радиальной компоненты вектора импульса через все сечения элементарного конуса с вершиной в начале координат остаётся постоянным.

Случай Ландау представляет собой простейший импульсный источник, при котором единственная тангенциальная составляющая $\sigma_{\theta R}$ векторов импульсов обращается в нуль. В самом деле, если мы возьмём выражение касательной составляющей

$$\sigma_{R\theta} = \rho v_R v_\theta - \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} \right) \quad (12.25)$$

и подставим значения v_R , v_θ из (12.14), то получим:

$$\sigma_{R\theta} = \frac{\rho}{R^2 \sqrt{1 - \tau^2}} [f'f - \nu(1 - \tau^2)f'' - 2\nu f].$$

Приравняв квадратную скобку нулю, получим уравнение

$$f'f - \nu(1 - \tau^2)f'' - 2\nu f = 0. \quad (12.26)$$

После одного интегрирования получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{f^2}{2} - \nu(1 - \tau^2)f' - 2\nu f = C_0. \quad (12.27)$$

Сравнивая уравнение (12.27) с уравнением (12.18), мы видим, что левые части тождественно совпадают, а правые части отличаются на слагаемые, содержащие постоянные C_1 и C_2 . Чтобы, наконец, перейти к решению (12.21), надо ещё и постоянное C_0 положить равным нулю. Единственное постоянное, входящее в решение (12.21), можно определить, задавая, например, постоянную потока импульса, входящую в правую часть (12.24).

ГЛАВА V

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА. МЕТОД СТОКСА

§ 1. Приближённые уравнения Стокса

Как уже указывалось в § 8 главы II, основное затруднение в решении дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости для конкретных задач заключается в наличии в левых частях этих уравнений квадратичных членов инерции. Эти квадратичные члены инерции тождественно обращались в нуль, как это мы видели в первых параграфах предшествующей главы, лишь только тогда, когда жидкость считалась несжимаемой, а траектории частиц представляли собой либо параллельные прямые, либо концентрические окружности. Последнее обстоятельство может служить основанием к заключению о том, что для движений вязкой несжимаемой жидкости, для которых траектории частиц будут мало отличаться либо от параллельных прямых, либо от концентрических окружностей, квадратичные члены инерции будут малы и ими с некоторым приближением можно пренебречь. К такому же допущению можно подойти и с другой точки зрения.

В § 3 главы III были установлены дифференциальные уравнения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерных величинах. Первое из этих уравнений (3.2) с использованием обозначений характеристических чисел представится в виде

$$SR \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + R \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) = \frac{R}{F} F_{x_1} - ER \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \Delta u_1. \quad (1.1)$$

При квадратичных членах инерции в уравнении (1.1) находится множитель в виде одного числа Рейнольдса. Следовательно, *если число Рейнольдса считать весьма малым, намного меньше единицы, то квадратичными членами инерции в левых частях дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости можно пренебречь.* Однако требование малости числа Рейнольдса по сравнению с единицей является достаточным, но отнюдь не необходимым требованием того, чтобы считать квадратичные члены инерции малыми величинами. Квадратичные члены инерции могут быть малыми

и в том случае, когда число Рейнольдса и немало, но траектории частиц близки к параллельным прямым или концентрическим окружностям. Для сохранения в уравнении (1.1) остальных слагаемых, содержащих множителем также число Рейнольдса, надо, очевидно, предположить, что по порядку величин имеют место неравенства

$$\left. \begin{aligned} SR &> 1, \\ \frac{R}{F} &> 1, \\ ER &> 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Обратим внимание на последнее неравенство (1.2). Так как E представляет собой отношение давления к произведению плотности на квадрат характерной скорости, а число $R = \frac{L_0 V_0}{\nu}$, то из этого неравенства получим для давления:

$$P_0 > \mu \frac{V_0}{L_0}. \quad (1.3)$$

Неравенство (1.3) означает, что при отбрасывании в уравнениях движения квадратичных членов инерции давление будет находиться в прямой зависимости от коэффициента вязкости и характерной скорости в первой степени.

Впервые уравнения движения вязкой жидкости с отброшенными квадратичными членами инерции были широко использованы Стоксом. На этом основании эти уравнения и получили название *приближённых уравнений Стокса*. В прямолинейных осях координат приближённые уравнения Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Дифференцируя первое уравнение по x , второе по y , третье по z , складывая результаты и используя уравнение несжимаемости, получим дифференциальное уравнение для давления

$$\Delta p = \rho \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \quad (1.5)$$

В тех случаях, когда можно либо пренебречь действием массовых сил, либо считать их постоянными, давление будет представлять

собой гармоническую функцию, т. е.

$$\Delta p = 0. \quad (1.6)$$

При отсутствии массовых сил

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0$$

с помощью перекрёстного дифференцирования уравнений (1.4) получим следующие дифференциальные уравнения для компонент вектора-вихря:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} &= \nu \Delta \omega_x, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial t} &= \nu \Delta \omega_y, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial t} &= \nu \Delta \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Дифференциальные уравнения (1.7) совпадают по своей форме с дифференциальным уравнением процессов свободной теплопроводности и свободной диффузии. Следовательно, при отбрасывании квадратичных членов инерции вектор-вихрь будет распространяться по законам свободной диффузии.

§ 2. Плоско-параллельное установившееся движение вязкой жидкости

Считая вязкую жидкость несжимаемой

$$\rho = \text{const},$$

движение установившимся

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

и плоско-параллельным

$$\omega \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \equiv 0$$

и пренебрегая действием массовых сил

$$F = 0$$

и квадратичными членами инерции по Стоксу, получим из (1.4) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta u, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Введём функцию тока, полагая

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда величина вихря ω представится в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{2} \Delta \psi.$$

Первые два уравнения (2.1) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (\mu \Delta \psi) = \frac{\partial}{\partial y} (-2\mu\omega), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\mu \Delta \psi) = -\frac{\partial}{\partial x} (-2\mu\omega). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) представляют собой соотношения Коши — Римана, следовательно, давление p и произведение вязкости на удвоенное значение вихря с обратным знаком представляет собой действительную и мнимую часть некоторой функции f комплексного переменного z , т. е.

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= z, \\ p - 2i\mu\omega &= f(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Исключая из равенства (2.2) давление, получим для функции тока бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, задача изучения плоско-параллельного установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости при отбрасывании квадратичных членов инерции приводится к решению бигармонического уравнения (2.4) для функции тока.

Известно¹⁾, что всякую бигармоническую функцию от двух переменных x и y можно представить при помощи двух функций комплексного переменного z в виде

$$2\psi = \bar{z}\Phi(z) + z\bar{\Phi}(\bar{z}) + \gamma(z) + \bar{\gamma}(\bar{z}), \quad (2.5)$$

где черта сверху над независимым переменным z и функциями Φ и γ означает сопряжение, т. е. в первом случае замену i через $-i$ в выражении самого переменного z , а во втором случае в коэффициентах отдельных слагаемых этих функций. Дифференцируя левые и правые части по x и y , получим:

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \gamma'(z) + \bar{\gamma}'(\bar{z}) = -2v,$$

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = i[-\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \gamma'(z) - \bar{\gamma}'(\bar{z})] = 2u.$$

¹⁾ Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. АН СССР, 1945.

Умножая первое равенство на $-i$ и складывая со вторым, получим следующее выражение для скорости в комплексной форме:

$$u + iv = -i [\Phi(z) + z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\gamma}'(\bar{z})]. \quad (2.6)$$

Для вторых производных от функции тока будем иметь:

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2\Phi'(z) + \bar{z}\Phi''(z) + 2\bar{\Phi}'(\bar{z}) + z\bar{\Phi}''(\bar{z}) + \gamma''(z) + \bar{\gamma}''(\bar{z}),$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -[-2\Phi'(z) + \bar{z}\Phi''(z) - 2\bar{\Phi}'(\bar{z}) + z\bar{\Phi}''(\bar{z}) + \gamma''(z) + \bar{\gamma}''(\bar{z})].$$

Складывая эти выражения, получим для вихря ω следующее равенство:

$$2\omega = -\Delta\psi = -2[\Phi'(z) + \bar{\Phi}'(\bar{z})]. \quad (2.7)$$

На основании (2.3) давление p представляет собой гармоническую функцию, сопряжённую с гармонической функцией $-2\mu\omega$, поэтому

$$p = 2\mu i [\Phi'(z) - \bar{\Phi}'(\bar{z})] + p_0, \quad (2.8)$$

где p_0 — постоянная величина. При этом будем иметь:

$$p - 2i\mu\omega = f(z) = 4\mu i\Phi'(z) + p_0. \quad (2.9)$$

В § 4 главы III были установлены формулы для результирующего воздействия вязкой несжимаемой жидкости на поступательно движущееся в ней тело. Проекции главного вектора результирующего воздействия на плоский контур при его поступательном движении будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int_{\gamma} \left(-pl + \mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \\ R_y &= \int_{\gamma} \left(-pm + \mu \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где

$$l = \frac{dy}{ds}, \quad m = -\frac{dx}{ds}$$

— направляющие косинусы нормали, внешней к контуру γ . Умножая второе равенство (2.10) на l , складывая с первым и заменяя l и m их выражениями, получим:

$$R_x + iR_y = \int_{\gamma} \left[ip(dx + i dy) + \mu \frac{\partial}{\partial n} (u + iv) ds \right]. \quad (2.11)$$

Так как

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n} &= \cos(\widehat{n, x}) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\widehat{n, y}) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) &= -i[\Phi'(z) + \bar{\Phi}'(\bar{z}) + z\bar{\Phi}''(\bar{z}) + \bar{\gamma}'(\bar{z})], \\ \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) &= \Phi'(z) + \bar{\Phi}'(\bar{z}) - z\bar{\Phi}''(\bar{z}) - \bar{\gamma}'(\bar{z}),\end{aligned}$$

то для слагаемых, входящих под знак интеграла (2.11), получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}(u + iv) ds &= dy \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) - dx \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) = \\ &= -\Phi'(z) dz - \bar{\Phi}'(\bar{z}) d\bar{z} + z\bar{\Phi}''(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\gamma}'(\bar{z}) d\bar{z}, \\ ip dz &= -2\mu\Phi'(z) dz + 2\mu\bar{\Phi}'(\bar{z}) d\bar{z} + ip_0 dz, \\ ip dz + \mu \frac{\partial}{\partial n}(u + iv) ds &= ip_0 dz + \mu d[-3\Phi(z) + z\bar{\Phi}''(\bar{z}) + \bar{\gamma}'(\bar{z})] = \\ &= ip_0 dz + \mu d[-4\Phi(z) + i(u + iv)].\end{aligned}$$

Таким образом, вектор результирующего воздействия в комплексной форме на плоский контур представится в виде

$$R_x + iR_y = ip_0 \int_{\gamma} dz - 4\mu \int_{\gamma} d[\Phi(z)] + \mu i \int_{\gamma} d(u + iv). \quad (2.12)$$

Если контур γ будет замкнутым, то первое слагаемое, содержащее интеграл от dz , обратится в нуль. Так как проекции скорости должны представлять собой однозначные функции, то и последнее слагаемое также должно обратиться в нуль. Следовательно, при поступательном движении плоского замкнутого контура в вязкой несжимаемой жидкости при условии прилипания частиц к контуру и при отбрасывании квадратичных членов инерции главный вектор результирующего воздействия в комплексной форме будет представляться окончательно в виде

$$R_x + iR_y = -4\mu \int_{\gamma} d[\Phi(z)]. \quad (2.13)$$

Для подсчета результирующего воздействия на плоский контур согласно (2.13) надо лишь подсчитать приращение функции комплексного переменного $\Phi(z)$ при полном обходе рассматриваемого контура. Таким образом, результирующее воздействие на плоский замкнутый контур при его поступательном движении будет только тогда отлично от нуля, когда функция $\Phi(z)$ неоднозначна.

Формула (2.13) может быть получена с помощью простых преобразований на основании (4.25) главы III.

§ 3. Движение круглого цилиндра

Общие соображения, изложенные в предшествующем параграфе применим к частной задаче о движении круглого цилиндра.

Пусть круглый цилиндр радиуса a перемещается поступательно в вязкой несжимаемой жидкости параллельно оси x с постоянной скоростью U (рис. 43). Считая движение жидкости установившимся и пренебрегая действием массовых сил и квадратичными членами инерции, получим для функции тока бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (3.1)$$

В полярных координатах проекции вектора скорости частиц жидкости через функцию тока будут представляться в виде

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.2)$$

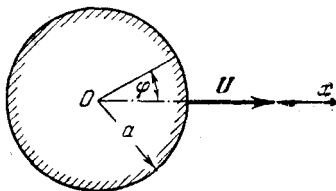


Рис. 43.

З силу предположения о прилипанию частиц жидкости к стенке будем иметь граничные условия на самом цилиндре в виде

$$\text{при } r = a \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = U \cos \varphi, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \varphi. \quad (3.3)$$

В качестве нового допущения принимаем, что возмущения, вызываемые самим движением цилиндра в вязкой жидкости, будут исчезающе малыми не на бесконечном удалении от цилиндра, а на некотором конечном расстоянии, равном b . Таким образом, в качестве вторых граничных условий принимаем условия обращения в нуль скоростей на конечном расстоянии от цилиндра, т. е.

$$\text{при } r = b \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (3.4)$$

Вид граничных условий (3.3) даёт некоторое основание к тому, чтобы искать решение уравнения (3.1) в виде

$$\psi = \sin \varphi f(r). \quad (3.5)$$

При таком предположении будем иметь:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \sin \varphi \left[f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f \right] = \sin \varphi F(r),$$

$$\Delta \Delta \psi = \sin \varphi \left[F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F \right].$$

Решение дифференциального уравнения

$$F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F = 0$$

представляется в виде

$$F = Ar + \frac{B}{r}.$$

На основании (2.7) вихрь ω в рассматриваемом случае будет равен

$$2\omega = -\Delta\psi = -\sin\varphi \left(Ar + \frac{B}{r} \right) = \operatorname{Im} - \left(Az - \frac{B}{z} \right). \quad (3.6)$$

Для давления согласно (2.9) получим следующее выражение:

$$p = p_0 + \operatorname{Re} \mu \left(Az - \frac{B}{z} \right) = p_0 + \mu \left(Ar - \frac{B}{r} \right) \cos\varphi. \quad (3.7)$$

Таким образом, будем иметь:

$$p - 2i\mu\omega = \mu \left(Az - \frac{B}{z} \right) + p_0. \quad (3.8)$$

Для определения же выражений для проекций скоростей необходимо ещё решить следующее дифференциальное уравнение:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f = \frac{d}{dr} \left(f' + \frac{f}{r} \right) = Ar + \frac{B}{r}.$$

При первом интегрировании этого уравнения получим:

$$f' + \frac{f}{r} = \frac{d}{r dr} (rf) = \frac{1}{2} Ar^2 + B \ln r + C_1.$$

После второго интегрирования будем иметь:

$$f(r) = \frac{1}{8} Ar^3 + \frac{1}{2} Br \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r}.$$

Таким образом, для функции тока и проекций скоростей будем иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sin\varphi f(r) = \sin\varphi \left[\frac{1}{8} Ar^3 + \frac{1}{2} Br \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r} \right], \\ v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \cos\varphi \left[\frac{1}{8} Ar^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C + \frac{D}{r^2} \right], \\ v_\varphi &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\sin\varphi \left[\frac{3}{8} Ar^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) + C - \frac{D}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Сопоставляя выражения (3.8) и (2.9), получим:

$$4\mu i\Phi'(z) = \mu \left(Az - \frac{B}{z} \right),$$

или

$$4\Phi(z) = -i \left[\frac{1}{2} Az^2 - B \ln z + K \right], \quad (3.10)$$

где K — произвольная постоянная.

Подставляя значение $\Phi(z)$ из (3.10) в формулу (2.13) и учитывая, что интегралы от z^2 и K обращаются в нуль, а интеграл от $\frac{1}{z}$ равен $2\pi i$, получим для результирующего воздействия на рассматриваемый круглый цилиндр выражение

$$R_x + iR_y = 2\pi\mu B. \quad (3.11)$$

Таким образом, вектор результирующего воздействия на круглый цилиндр при его поступательном движении зависит только от одной постоянной, являющейся множителем при том слагаемом в выражении (3.9) функции тока, которое содержит логарифм от полярного радиуса.

Используя граничные условия (3.3) и (3.4) и выражения для скоростей (3.9), получим следующие уравнения для определения произвольных постоянных:

$$\frac{1}{8} Aa^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) + C + \frac{D}{a^2} = U,$$

$$\frac{3}{8} Aa^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln a + \frac{1}{2} \right) + C - \frac{D}{a^2} = U,$$

$$\frac{1}{8} Ab^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) + C + \frac{D}{b^2} = 0,$$

$$\frac{3}{8} Ab^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) + C - \frac{D}{b^2} = 0.$$

Исключая из этих уравнений C и D , будем иметь:

$$\frac{1}{2} A (b^2 - a^2) + B \ln \frac{b}{a} = -2U,$$

$$\frac{1}{4} A (b^4 - a^4) + \frac{1}{2} B (b^2 - a^2) = 0.$$

Отсюда, обозначая

$$\frac{b}{a} = k, \quad (3.12)$$

получим для постоянного B следующее выражение:

$$B = - \frac{2U}{\ln k - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}}. \quad (3.13)$$

Подставляя значение B в (3.11) и приравнявая действительные части, получим формулу для сопротивления круглого цилиндра при его поступательном движении в вязкой несжимаемой жидкости

$$R_x = - \frac{4\pi}{\ln k - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}} \mu U. \quad (3.14)$$

На основании формулы (3.14) мы заключаем, что *сопротивление пропорционально коэффициенту вязкости и скорости поступательного движения в первой степени*. Безразмерный множитель, входящий в формулу (3.14), зависит от отношения радиуса зоны возмущений, вызываемых движением цилиндра, к радиусу самого цилиндра. При возрастании радиуса зоны возмущений до бесконечности безразмерный коэффициент сопротивления будет уменьшаться до нуля, а при уменьшении радиуса этой зоны до значения радиуса цилиндра коэффициент сопротивления будет возрастать до бесконечности. Действительное значение радиуса возмущений, очевидно, можно установить только на основании каких-либо измерений или каких-либо дополнительных соображений.

§ 4. Парадокс Стокса

В предыдущем параграфе было построено решение задачи о движении круглого цилиндра при предположении, что зона возмущений, вызываемых движением цилиндра, является ограниченной. Если же предполагать, что возмущения от движения цилиндра исчезают лишь на бесконечности, т. е. граничные условия (3.4) заменить условиями:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \rightarrow 0, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

то для удовлетворения их мы должны в выражениях (3.9) для проекций скоростей положить:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, при удовлетворении граничных условий (4.1) на бесконечности из четырёх постоянных, входящих в выражение (3.9) для функции тока, будут использованы три. Для удовлетворения двух граничных условий на самом цилиндре останется только одно постоянное D . Следовательно, удовлетворение граничных условий прилипания частиц к поверхности цилиндра уже не представляется возможным. В самом деле, при использовании равенств (4.2) будем иметь из (3.9):

$$\left. \begin{aligned} v_r &= D \frac{\cos \varphi}{r^2}, \\ v_\varphi &= \frac{D \sin \varphi}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Удовлетворяя условиям (3.3) в отдельности, будем иметь различные значения для одного и того же постоянного D :

$$\begin{aligned} D &= Ua^2, \\ D &= -Ua^2. \end{aligned}$$

Это и значит, что при решении приближённых уравнений Стокса для задачи о движении круглого цилиндра в безграничной вязкой несжимаемой жидкости удовлетворить одновременно и условиям обращения в нуль скоростей на бесконечности и условиям прилипания частиц к поверхности не представляется возможным. Это заключение о невозможности решения бигармонического уравнения для задачи о движении круглого цилиндра в безграничной жидкости известно под названием *парадокса Стокса* ¹⁾. Для эллиптического цилиндра этот парадокс был доказан Уилтоном ²⁾, а для цилиндра произвольного сечения Одквистом ³⁾.

Пользуясь результатами исследований Н. И. Мухелишвили ⁴⁾ и С. Г. Михлина ⁵⁾, можно доказать парадокс Стокса и для случая одновременного поступательного движения нескольких замкнутых контуров с равными скоростями в безграничной жидкости. Рассмотрим вначале тот случай, когда жидкость простирается до бесконечности и с внутренней стороны ограничена одним лишь замкнутым контуром. Давление p должно быть функцией однозначной, а согласно его выражению (2.8) это может быть только тогда, когда мнимая часть функции $\Phi'(z)$ будет однозначной гармонической функцией. Пусть действительная часть этой функции будет многозначной, т. е. при однократном обходе против часовой стрелки какого-либо замкнутого контура она будет получать приращение B , где B — действительное число. Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi^*(z) = \Phi'(z) + \frac{Bi}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad (4.4)$$

где z_0 представляет точку вне области, т. е. точку внутри рассматриваемого контура. Так как функция $\ln(z - z_0)$ при обходе вокруг контура, содержащего точку z_0 , получает приращение $2\pi i$, то общее приращение всей правой части при указанном обходе будет равно нулю, т. е. функция $\Phi^*(z)$ будет функцией однозначной. Таким образом, можно положить:

$$\Phi'(z) = \Phi'^*(z) - \frac{Bi}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad (4.5)$$

где $\Phi'^*(z)$ будет функцией, однозначной и голоморфной во всей области, занятой жидкостью. Выполняя интегрирование, получим:

$$\Phi(z) = \Phi_1^*(z) + (\alpha + i\beta) \ln(z - z_0) - \frac{Bi}{2\pi} z \ln(z - z_0), \quad (4.6)$$

где $\Phi_1^*(z)$ представляет собой однозначную и голоморфную функцию.

Положим

$$\chi'(z) = \sum_{k=0}^n (\alpha'_k + i\beta'_k) z^k \ln(z - z_0) + \chi'^*(z) \quad (4.7)$$

¹⁾ Stokes G., Trans. Camb. Phil. Soc., т. IX, 1851.

²⁾ Wilton, Philos. Magazine, № 175, 1915.

³⁾ Odqvist, Math. Zeitschr., т. 32.

⁴⁾ См. сноску на стр. 158.

⁵⁾ Михлин С. Г., Плоская задача теории упругости, Труды Сейсм. ин-та, № 65, Изд. АН СССР, 1935.

и потребуем, чтобы скорость, представляемая равенством (2.6), была однозначной. Для этого необходимо подсчитать приращение правой части (2.6) с учётом равенств (4.6) и (4.7) при обходе замкнутого контура и приравнять это приращение нулю:

$$-i \left[(\alpha + i\beta) 2\pi i - \frac{B\Gamma}{2\pi} z(2\pi i) + Bz + \sum_{k=0}^{k=n} (\alpha'_k - i\beta'_k) \bar{z}^k (-2\pi i) \right] = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться при любом значении независимого переменного z , то должны обращаться в нуль отдельно как свободные члены, так и коэффициенты при степенях z и \bar{z} . Таким образом, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} 2B &= 0, \\ \alpha + i\beta - (\alpha'_0 - i\beta'_0) &= 0, \\ \alpha_k - i\beta_k &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Следовательно, функции $\Phi(z)$ и $\chi'(z)$ при использовании равенств (4.6), (4.7) и (4.8) будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi^*(z) + (\alpha + i\beta) \ln(z - z_0), \\ \chi'(z) &= \chi'^*(z) + (\alpha - i\beta) \ln(z - z_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где Φ^* и χ'^* — функции, однозначные и голоморфные внутри рассматриваемой области. При представлении функций равенствами (4.9) как давление, так и скорость во всей области будут однозначными функциями.

Если же область, простирающаяся до бесконечности, будет ограничена с внутренней стороны не одним замкнутым контуром, а n замкнутыми контурами, то число логарифмических членов в выражениях (4.9) функций $\Phi(z)$ и $\chi'(z)$ может быть равно числу контуров, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi^*(z) + \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k + i\beta_k) \ln(z - z_k), \\ \chi'(z) &= \chi'^*(z) + \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k - i\beta_k) \ln(z - z_k). \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Возьмём теперь окружность Γ достаточно большого радиуса, охватывающую собой все рассматриваемые замкнутые контуры. Тогда для всякой точки z , находящейся вне этой окружности, будем иметь:

$$\ln(z - z_0) = \ln z + \ln \left(1 - \frac{z_0}{z} \right) = \ln z - \frac{z_0}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 - \dots$$

Следовательно, для точек вне окружности Γ равенства (4.10) представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi^{**}(z) + (\alpha_0 + i\beta_0) \ln z, \\ \chi'(z) &= \chi'^{**}(z) + (\alpha_0 - i\beta_0) \ln z, \\ \alpha_0 + i\beta_0 &= \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k + i\beta_k), \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

где Φ^{**} и χ'^{**} представляют собой голоморфные функции вне окружности, за исключением, быть может, самой бесконечно удалённой точки. По теореме

Лорана эти функции вне окружности будут представляться следующими рядами:

$$\Phi^{**}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \chi'^{**}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n z^n. \quad (4.12)$$

Потребуем теперь, чтобы давление было ограниченной функцией во всей области. На основании (2.8), (4.11) и (4.12) для давления будем иметь:

$$p = p_0 + 2\mu l \left[\frac{\alpha_0 + i\beta_0}{z} - \frac{\alpha_0 - i\beta_0}{\bar{z}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n (a_n z^{n-1} - \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}) \right].$$

Для ограниченности величины давления для точек вне окружности необходимо положить:

$$a_n = 0, \quad \bar{a}_n = 0 \quad \text{для } n \geq 2. \quad (4.13)$$

При выполнении этого условия первое равенство (4.11) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \Phi^0(z) + (\alpha_0 + i\beta_0) \ln z + (A_1 + iB_1)z, \quad (4.14)$$

где функция $\Phi^0(z)$ является голоморфной вне окружности, включая и бесконечно удаленную точку. Используя выражение (4.14) и вторые равенства (4.11) и (4.12), получим для скорости (2.6) выражение

$$u + iv = -l \left\{ \Phi^0(z) + (\alpha_0 + i\beta_0) \ln z + (A_1 + iB_1)z + z \left[\bar{\Phi}^0(\bar{z}) + \frac{\alpha_0 - i\beta_0}{\bar{z}} + A_1 - iB_1 \right] + (\alpha_0 + i\beta_0) \ln \bar{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}'_n \bar{z}^n \right\}. \quad (4.15)$$

Для выполнения требования ограниченности скоростей во всей области вне окружности необходимо положить:

$$2A_1 = 0, \quad a'_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad \alpha_0 + i\beta_0 = \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k + i\beta_k) = 0. \quad (4.16)$$

При выполнении этих условий формула (4.14) для $\Phi(z)$ и вторая формула (4.11) для $\chi'(z)$ будут представляться в виде

$$\Phi(z) = \Phi^0(z) + iB_1 z, \quad \chi'(z) = \chi'^0(z), \quad (4.17)$$

где функции $\Phi^0(z)$ и $\chi'^0(z)$ будут функциями, голоморфными вне рассматриваемой окружности Γ достаточно большого радиуса, включая и бесконечно удаленную точку.

Переходя к непосредственному доказательству парадокса Стокса, обратимся к уравнениям (2.2). Умножая первое уравнение на u , а второе на v и складывая, получим:

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(u \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - v \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right).$$

К левой части этого равенства прибавим выражение

$$p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

а в правой части вынесем знаки дифференцирования за скобки. Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial y} (u \Delta \psi) - \frac{\partial}{\partial x} (v \Delta \psi) \right] - \mu (\Delta \psi)^2,$$

или

$$\mu (\Delta \psi)^2 = \frac{\partial}{\partial x} (-pu - \mu v \Delta \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (-pv + \mu u \Delta \psi). \quad (4.18)$$

Обе части равенства (4.18) умножим на $dx dy$ и проинтегрируем по всей области S , ограниченной с внешней стороны окружностью Γ , а с внутренней стороны совокупностью L замкнутых контуров. Так как в скобках в правой части (4.19) находятся однозначные функции, то можно использовать обычные формулы преобразования интеграла по площади в интеграл по всей её границе. В результате всего этого получим:

$$\begin{aligned} \mu \iint_S (\Delta \psi)^2 dx dy &= \\ &= \int_{L+\Gamma} [(-pu - \mu v \Delta \psi) \cos(n, \widehat{x}) + (-pv + \mu u \Delta \psi) \cos(n, \widehat{y})] ds = \\ &= \int_{L+\Gamma} [-p(u dy - v dx) - \mu \Delta \psi (u dx + v dy)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

где через L обозначена вся совокупность n внутренних контуров. Мы отыскиваем решение бигармонического уравнения для функции тока ψ при условии обращения скоростей u и v в нуль на бесконечности, поэтому интеграл по контуру Γ окружности безгранично увеличивающегося радиуса в правой части (4.19) можно положить равным нулю. На каждом внутреннем контуре совокупности L должно выполняться условие прилипания, т. е.

$$u = U = \text{const}, \quad v = 0.$$

Учитывая все эти условия, равенство (4.19) можно представить в виде

$$\mu \iint_S (\Delta \psi)^2 dx dy = -U \int_L (p dy + \mu \Delta \psi dx). \quad (4.20)$$

На основании (2.9) будем иметь:

$$\begin{aligned} (p + i\mu \Delta \psi) (dx + i dy) &= 4\mu i \Phi'(z) dz, \\ p dy + \mu \Delta \psi dx &= \text{Im} \{4\mu i d[\Phi(z)]\}. \end{aligned}$$

Используя последнее равенство, из (4.20) получим:

$$\iint_S (\Delta \psi)^2 dx dy = \text{Im} \left\{ -4U i \int_L d[\Phi(z)] \right\}. \quad (4.21)$$

Функция $\Phi(z)$, представляемая первым равенством (4.10), при полном обходе контура номера k получает приращение

$$(\alpha_k + i\beta_k) 2\pi i.$$

При однократном обходе всех n контуров приращение этой функции будет равно

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k + i\beta_k) 2\pi i,$$

ГЛАВА IX

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Общая постановка задачи о прямолинейно-параллельном неустановившемся течении вязкой жидкости

Будем считать жидкость несжимаемой, т. е.

$$\rho = \text{const},$$

действием массовых сил будем пренебрегать

$$F = 0$$

и будем полагать траектории всех частиц прямолинейно-параллельными, т. е.

$$v \equiv 0, \quad w \equiv 0.$$

При этих трёх предположениях из уравнения несжимаемости будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

а дифференциальные уравнения движения (10.1) главы II представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

На основании двух последних уравнений заключаем, что давление не зависит от переменных y и z . Если при этом учесть (1.1), то в первом уравнении (1.2) слагаемые, содержащие u , будут зависеть от переменных y , z и t , тогда как слагаемое с давлением будет зависеть от переменных x и t , а это возможно только в том

простирается до бесконечности. Отказ хотя бы от одного из этих предположений приводит к ликвидации парадокса Стокса, т. е. к возможности решения соответственной плоской задачи. Так, например, отказ от предположения стационарности движения самой жидкости при сохранении двух других предположений позволил Бассе ¹⁾ и Озеену ²⁾ построить решение задачи о движении круглого цилиндра в безграничной жидкости при разных начальных условиях. При частичном учёте квадратичных членов инерции по методу Озеена и при сохранении первого и третьего предположений Ламб ³⁾ построил решение той же задачи о движении круглого цилиндра в безграничной жидкости. При отказе от третьего предположения область, занятая жидкостью, перестаёт быть односвязной. Возможность решения задачи о движении круглого цилиндра в ограниченной области при сохранении двух первых предположений была показана в ряде случаев. Один из простейших случаев рассмотрен выше, в § 3, другой случай — движение цилиндра между параллельными стенками — подробно исследован в работе Бэрстоу ⁴⁾, а третий случай — поступательное движение шипа в подшипнике — рассмотрен в работе М. В. Коровчинского ⁵⁾.

Таким образом, на основании бигармонического уравнения для функции тока можно решать следующие задачи: 1) о вращении плоского контура в неограниченной жидкости, 2) внутренние задачи о течениях в односвязной области и 3) задачи о поступательном движении плоского контура в ограниченной области. Для этих задач и могут быть использованы методы теории функций комплексного переменного.

§ 5. Общие формулы для результирующего воздействия жидкости на круглый цилиндр

Установим общие формулы для результирующего воздействия вязкой несжимаемой жидкости при установившемся её движении на бесконечно длинный круглый цилиндр, имеющий поступательное движение и вращательное вокруг своей оси. Относительно вида и расположения других возможных границ жидкости никаких предположений делать пока не будем.

Вектор скорости центра сечения цилиндра плоскостью, параллельной плоскости движения жидкости, обозначим через U , а угловую скорость вращения — через ω . В рассматриваемый момент времени t выберем полярную ось Ox в направлении вектора скорости U и полярный угол φ будем отсчитывать против хода часовой стрелки (рис. 44). В полярных координатах граничные условия прилипания частиц жидкости к поверхности рассматриваемого цилиндра будут представляться в виде:

$$\text{при } r = a \quad v_r = U \cos \varphi, \quad v_\varphi = -U \sin \varphi + \omega a. \quad (5.1)$$

Так как равенства (5.1) будут выполняться при любом значении угла φ и

1) Basset, A treatise Hydrodynamics, т. 11.

2) Oseen, Hydrodynamik, Leipzig, 1927.

3) Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, стр. 772.

4) Bairstow, Proc. Roy. Soc. ser. A, т. C, стр. 394, 1922.

5) Коровчинский М. В., Трение и износ в машинах, сб. VI, АН СССР,

при неизменном значении полярного радиуса, то их можно дифференцировать частным образом по φ , после чего будем иметь:

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)_a = -U \sin \varphi, \quad \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)_a = -U \cos \varphi. \quad (5.2)$$

Уравнение несжимаемости жидкости (6.6) главы II в полярных координатах представляется в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.3)$$

Применяя уравнение несжимаемости (5.3) к частицам, непосредственно примыкающим к поверхности цилиндра, получим:

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_a + \frac{(v_r)_a}{a} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)_a = 0.$$

Используя условие (5.1) и вытекающие из него равенства (5.2), будем иметь:

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_a = 0. \quad (5.4)$$

Смысл равенства (5.4) заключается в том, что радиальная скорость деформации частиц вязкой несжимаемой жидкости, примыкающих к самой поверхности цилиндра, равна нулю. Компоненты вектора-вихря на основании (8.10) главы I будут представляться в виде

$$\omega_r = 0, \quad \omega_\varphi = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right). \quad (5.5)$$

Используя равенства (5.1), (5.2) и (5.5) для значения вихря на границе цилиндра, получим:

$$2(\omega)_a = \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)_a + \Omega. \quad (5.6)$$

Компоненты напряжений в полярных координатах при плоско-параллельном движении вязкой несжимаемой жидкости на основании (6.5) главы II представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Если мы теперь возьмём элементарную площадку на поверхности самого цилиндра и используем равенства (5.1), (5.2), (5.4), (5.6) и (5.7), то для нормальной и касательной компонент получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} (p_{rr})_a &= -(p)_a, \\ (p_{r\varphi})_a &= 2\mu [(\omega)_a - \Omega]. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Таким образом, результирующее воздействие вязкой несжимаемой жидкости на бесконечно длинный круглый цилиндр при его плоско-параллельном движении зависит от распределения давления и вихря вдоль поверхности самого

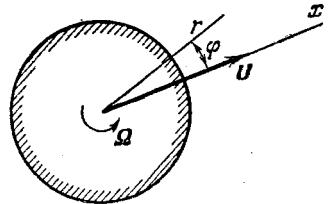


Рис. 44.

цилиндра. Заметим, что при выводе равенств (5.8) мы не предполагали движение жидкости установившимся и не пренебрегали квадратичными членами инерции. Умножая касательное напряжение (5.8) на элементарную площадку и плечо, т. е. на множитель $a^2 d\varphi$ и интегрируя по φ , получим результирующий момент от сил воздействия вязкой несжимаемой жидкости на круглый цилиндр относительно его оси в виде

$$L = -4\pi\mu a^2\Omega + 2\mu a^2 \int_0^{2\pi} (\omega)_a d\varphi. \quad (5.9)$$

Проектируя компоненты напряжения (5.8) на направление x и перпендикулярное к нему, умножая полученные проекции на элемент дуги $a d\varphi$ и интегрируя по φ , получим следующие выражения для компонент главного вектора сил воздействия жидкости на рассматриваемый цилиндр:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int_0^{2\pi} p_{rx} a d\varphi = a \int_0^{2\pi} [-(p)_a \cos \varphi - 2\mu (\omega)_a \sin \varphi] d\varphi, \\ R_y &= \int_0^{2\pi} p_{ry} a d\varphi = a \int_0^{2\pi} [-(p)_a \sin \varphi + 2\mu (\omega)_a \cos \varphi] d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Умножая второе равенство (5.10) на i и складывая с первым, получим:

$$R_x + iR_y = a \int_0^{2\pi} (-p + 2i\mu\omega) e^{i\varphi} d\varphi. \quad (5.11)$$

Будем считать движение вязкой несжимаемой жидкости установившимся и пренебрежём квадратичными членами инерции. Тогда, как показано в § 2, функция тока будет удовлетворять бигармоническому уравнению и для давления и вихря будут иметь место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} p &= 2\mu l [\Phi'(z) - \bar{\Phi}'(\bar{z})], \\ \omega &= -[\Phi'(z) + \bar{\Phi}'(\bar{z})], \\ p - 2i\mu\omega &= 4\mu l \Phi'(z). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Постоянное слагаемое в выражении давления опущено.

Используя последнее равенство (5.12) и учитывая, что на границе цилиндра

$$z = ae^{i\varphi}, \quad dz = ae^{i\varphi} i d\varphi,$$

получим для вектора результирующего воздействия вязкой несжимаемой жидкости на круглый цилиндр выражение в комплексной форме

$$R_x + iR_y = -4\mu \int \gamma d[\Phi(z)]. \quad (5.13)$$

Правая часть полученной формулы (5.13) совпадает с правой частью формулы (2.13) для вектора результирующего воздействия вязкой несжимаемой жидкости на произвольный замкнутый контур. Различие только в том, что формула (2.13) установлена для поступательного движения произвольного контура, тогда как формула (5.13) установлена для плоско-параллельного движения, но не произвольного контура, а только круглого цилиндра.

Так как на поверхности самого цилиндра мы будем иметь:

$$z d\bar{z} + dz \bar{z} = 0, \quad z d\bar{z} = -\bar{z} dz = -a^2 i d\varphi,$$

то формулу (5.9) для момента можно представить также в виде

$$L = -4\pi\mu a^2 \Omega + 2\mu i \int_{\gamma} [\bar{z}\Phi'(z) dz - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) d\bar{z}]$$

или

$$L = -4\pi\mu a^2 \Omega + 2\mu i \int_{\gamma} \{z d[\Phi(z)] - z d[\bar{\Phi}(\bar{z})]\}. \quad (5.14)$$

Таким образом, результирующее воздействие вязкой несжимаемой жидкости на круглый цилиндр при его плоско-параллельном движении зависит только от вида той функции $\Phi(z)$ комплексного переменного, через которую представляются давление и вихрь при отбрасывании квадратичных членов инерции.

В § 4 было показано, что при выполнении требования однозначности давления и скоростей функция $\Phi(z)$ может иметь следующий вид:

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + (\alpha + i\beta) \ln(z - z_0), \quad (5.15)$$

где $\Phi^*(z)$ представляет однозначную и голоморфную функцию в той области, которая не включает в себя других возможных границ, кроме контура γ рассматриваемого круглого цилиндра.

Так как на основании (5.15) будем иметь:

$$\int_{\gamma} d[\Phi(z)] = (\alpha + i\beta) 2\pi i,$$

то вектор результирующего воздействия жидкости на цилиндр из (5.13) будет представляться в виде

$$R_x + iR_y = 8\pi\mu(\beta - i\alpha). \quad (5.16)$$

Проведём окружность с центром на оси рассматриваемого цилиндра и в области, заключённой между этой окружностью и контуром цилиндра, разложим функцию $\Phi^*(z)$ в ряд Лорана

$$\Phi^*(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \quad (5.17)$$

Полагая в (5.15) $z_0 = 0$, получим из (5.15) и (5.17):

$$\Phi'(z) = \frac{\alpha + i\beta}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

В этом ряде положим:

$$z = a e^{i\varphi};$$

тогда будем иметь:

$$\Phi'(a e^{i\varphi}) = \frac{\alpha + i\beta}{a} e^{-i\varphi} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n a^{n-1} e^{i(n-1)\varphi}.$$

$$\bar{\Phi}'(a e^{-i\varphi}) = \frac{\alpha - i\beta}{a} e^{i\varphi} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n \bar{a}_n a^{n-1} e^{-i(n-1)\varphi}.$$

Следовательно, вихрь на границе рассматриваемого цилиндра будет представляться в виде следующего ряда:

$$(\omega)_a = -\frac{2}{a} (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) - \sum_{-\infty}^{+\infty} n a^{n-1} [a_n e^{-i(n-1)\varphi} + \bar{a}_n e^{-i(n-1)\varphi}]. \quad (5.18)$$

Умножая обе части равенства (5.18) на $d\varphi$, интегрируя по углу φ от 0 до 2π и подставляя результат в формулу (5.9), получим для результирующего момента L следующую формулу:

$$L = -4\pi\mu a^2 [\Omega + a_1 + \bar{a}_1]. \quad (5.19)$$

Таким образом, результирующий момент сил воздействия вязкой несжимаемой жидкости на круглый цилиндр зависит только от коэффициента того слагаемого в ряде Лорана (5.17), которое содержит комплексное переменное z в первой степени.

На основании формул (5.16) и (5.19) мы приходим к выводу, что для определения результирующего воздействия вязкой несжимаемой жидкости на круглый цилиндр при его плоско-параллельном движении при отбрасывании квадратичных членов инерции надо:

1) после решения бигармонического уравнения для функции тока скорость представить в комплексной форме

$$u + iv = -i [\Phi(\zeta) + \zeta \bar{\Phi}'(\zeta) + \bar{\chi}'(\bar{\zeta})], \quad (5.20)$$

где ζ представляет комплексное переменное, начало которого может и не совпадать с началом комплексного переменного z ;

2) входящую в (5.20) функцию $\Phi(\zeta)$ представить в виде

$$\Phi(z) = (\alpha + i\beta) \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n;$$

3) значения коэффициентов α , β , a_1 и \bar{a}_1 подставить в формулы (5.16) и (5.19)

§ 6. Движение жидкости в плоском диффузоре

Плоско-параллельное радиальное движение вязкой жидкости было рассмотрено нами в § 10 главы IV без отбрасывания квадратичных членов инерции. Теперь же мы рассмотрим это движение без учёта квадратичных членов инерции, т. е. на основе бигармонического уравнения.

Пусть мы имеем плоский диффузор (рис. 45). Движение жидкости в диффузоре будем предполагать установившимся и строго радиальным, т. е.

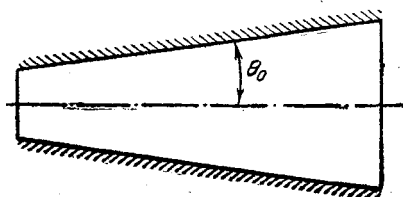


Рис. 45.

$$v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \equiv 0. \quad (6.1)$$

Обозначим половину угла раствора диффузора через φ_0 . При указанных выше предположениях рассматриваемая задача сводится

к решению бигармонического уравнения

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad (6.2)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \varphi = \pm \varphi_0 \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \\ \text{при } \varphi = 0 \quad \psi = 0, \\ \text{при } \varphi = \varphi_0 \quad \psi = \frac{1}{2} Q, \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

где Q представляет собой величину расхода жидкости через каждое сечение диффузора.

На основании предположения (6.1) функция тока ψ не будет зависеть от радиуса, поэтому

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2},$$

$$\Delta \Delta \psi = \frac{6}{r^4} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^4} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} + \frac{1}{r^4} \frac{d^4 \psi}{d\varphi^4}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае бигармоническое уравнение (6.2) сводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^4 \psi}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = 0. \quad (6.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6.4) будет представляться в виде

$$\psi = A + B\varphi + C \cos 2\varphi + D \sin 2\varphi.$$

Обращаясь к граничным условиям (6.3), получим для определения постоянных уравнения

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ B - 2C \sin 2\varphi_0 + 2D \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ B + 2C \sin 2\varphi_0 + 2D \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ A + B\varphi_0 + C \cos 2\varphi_0 + D \sin 2\varphi_0 &= \frac{1}{2} Q. \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} C &= 0, \\ A &= 0, \\ D &= \frac{1}{2} Q \frac{1}{\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}, \\ B &= -\frac{1}{2} Q \frac{2 \cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция тока и радиальная скорость будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} Q \frac{\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}, \\ v_r &= \frac{Q}{r} \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Так как

$$\Delta\psi = -\frac{4D}{r^2} \sin 2\varphi = \operatorname{Im} \left[\frac{4D}{z^2} \right],$$

то на основании соотношения (2.9) получим для давления:

$$p = p_0 + 4\mu D \frac{\cos 2\varphi}{r^2}. \quad (6.6)$$

Сопоставляя полученные формулы (6.5) и (6.6) с формулами (10.3) и (10.7) главы IV, мы заключаем, что как при сохранении квадратичных членов инерции, так и при их отбрасывании зависимости радиальной скорости и давления при движении жидкости в плоском диффузоре от расстояния r от вершины диффузора остаются одними и теми же, меняются лишь зависимости этих величин от полярного угла φ . Переход от чисто расходящегося течения к чисто сходящемуся в формулах (6.5) и (6.6) можно осуществить только изменением знака величины расхода Q . Таким образом, при приближённом решении задачи о плоско-параллельном радиальном течении вязкой жидкости принципиальные различия между расходящимся и сходящимся течениями, которые были обнаружены при точном рассмотрении этой задачи в § 10 главы IV, обнаружить уже не удаётся.

Считая угол φ_0 малым и проводя разложение $\cos 2\varphi$, $\cos^2 \varphi_0$ с точностью до членов третьей степени включительно, получим для скорости и перепада давления следующие приближённые формулы:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{3Q}{4r} \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\varphi_0^3}, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{3\mu Q}{2r^3} \frac{1 - 2\varphi^2}{\varphi_0^3}. \end{aligned}$$

Полагая в этих формулах

$$h = r\varphi_0, \quad y = r\varphi,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{3Q}{4h^3} (h^2 - y^2), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{3\mu Q}{2h^3} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Первая из формул (6.8) представляет собой скорость ламинарного движения жидкости между двумя параллельными неподвижными

стенками. Таким образом, при малых углах раствора плоского диффузора и при условии, что можно пренебрегать квадратичными членами инерции, распределение радиальных скоростей по круговому сечению будет весьма близко к параболическому. Формула же (6.8) для перепада давления указывает на то, что при почти параболическом распределении радиальной скорости по круговому сечению в плоском диффузоре давление всё же будет изменяться не только от сечения к сечению, как это имеет место при движении между параллельными стенками, но и вдоль самого сечения.

§ 7. Движение шара в неограниченной жидкости

Рассмотрим задачу о прямолинейном поступательном движении шара в неограниченной вязкой жидкости с постоянной скоростью U , параллельной оси x (рис. 46). Предполагая: 1) жидкость несжимаемой, 2) движение жидкости установившимся и осесимметричным, т. е.

$$\rho = \text{const}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad v_\varphi \equiv 0,$$

$$\frac{\partial v_R}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} = 0,$$

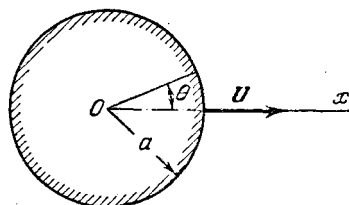


Рис. 46.

и 3) пренебрегая действием массовых сил и квадратичными членами инерции, получим из (12.5) главы IV дифференциальное уравнение для функции тока

$$D D \psi = 0, \quad (7.1)$$

где D — оператор Стокса, представляемый в сферических координатах в виде

$$D = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (7.2)$$

При этих предположениях давление будет определяться на основании (12.4) главы IV из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial R} &= \frac{\mu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial D \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= - \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial D \psi}{\partial R}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

а проекции вектора скорости будут представляться следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ v_\theta &= - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

При осесимметричном движении компоненты вихря на основании (8.12) главы I будут представляться в виде

$$\omega_R = 0, \quad \omega_\varphi = -\frac{1}{2R} \left[\frac{\partial v_R}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial R} (Rv_\theta) \right], \quad \omega_\theta = 0.$$

Из этих выражений следует, что вихревые линии будут представлять собой окружности с центрами на оси симметрии. Величина вихря через функцию тока будет представляться в виде

$$\omega = -\frac{1}{2R \sin \theta} D\psi. \quad (7.5)$$

При решении задачи о поступательном движении шара будем принимать условие прилипания к поверхности

$$\left. \begin{aligned} \text{при } R = a \quad v_R &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta, \\ v_\theta &= -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -U \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Кроме того, положим, что на бесконечности обе составляющие скорости обратятся в нуль:

$$\text{при } R \rightarrow \infty \quad v_R \rightarrow 0, \quad v_\theta \rightarrow 0. \quad (7.7)$$

Вид граничных условий (7.6) указывает на возможность искать решения дифференциального уравнения (7.1) в виде

$$\psi = \sin^2 \theta F(R). \quad (7.8)$$

Учитывая выражение (7.2) оператора Стокса, получим:

$$D\psi = \sin^2 \theta \left(F'' - \frac{1}{R^2} F \right) = \sin^2 \theta f(R). \quad (7.9)$$

Вычисляя ещё раз оператор Стокса и обращаясь к дифференциальному уравнению (7.1), получим обыкновенное уравнение для функции f

$$f'' - \frac{1}{R^2} f = 0.$$

Проверкой можно убедиться, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$f = AR^2 + \frac{B}{R}.$$

Подставляя значение f в (7.9), получим:

$$F'' - \frac{1}{R^2} F = AR^2 + \frac{B}{R}. \quad (7.10)$$

Составляя решение полученного дифференциального уравнения (7.10) для F из общего решения однородного уравнения и частных реше-

ний, отвечающих каждому слагаемому правой части (7.10), получим:

$$F(R) = \frac{A}{10} R^4 - \frac{1}{2} BR + CR^2 + \frac{D}{R}.$$

Таким образом, для функции тока и компонент скорости будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{10} AR^4 - \frac{1}{2} BR + CR^2 + \frac{D}{R} \right), \\ v_R &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2 \cos \theta \left(\frac{1}{10} AR^2 - \frac{B}{2R} + 2C + \frac{D}{R^3} \right), \\ v_\theta &= -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -\sin \theta \left(\frac{2}{5} AR^2 - \frac{B}{2R} + 2C - \frac{D}{R^3} \right). \end{aligned} \right\} (7.11)$$

Чтобы удовлетворить условиям (7.7) на бесконечности, необходимо положить:

$$A = 0, \quad C = 0.$$

Используя граничные условия (7.6), получим уравнения

$$\frac{B}{a} - \frac{2D}{a^3} = -U,$$

$$\frac{B}{2a} + \frac{D}{a^3} = -U.$$

Из этих уравнений будем иметь:

$$B = -\frac{3}{2} Ua, \quad D = -\frac{1}{4} Ua^3.$$

Подставляя найденные значения всех постоянных в (7.11), получим решения рассматриваемой задачи для функции тока и скоростей в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} U \sin^2 \theta \left(3aR - \frac{a^3}{R} \right), \\ v_R &= \frac{1}{2} U \cos \theta \left(\frac{3a}{R} - \frac{a^3}{R^3} \right), \\ v_\theta &= -\frac{1}{4} U \sin \theta \left(\frac{3a}{R} + \frac{a^3}{R^3} \right). \end{aligned} \right\} (7.12)$$

Так как оператор Стокса от функции тока равен

$$D\psi = \frac{B \sin^2 \theta}{R},$$

то из уравнения (7.3) будем иметь:

$$dp = \mu B \left(2 \cos \theta \frac{dR}{R^2} + \frac{\sin \theta d\theta}{R} \right) = -\mu B d \left(\frac{\cos \theta}{R^2} \right).$$

Следовательно, для давления будет иметь место следующая формула:

$$p = p_0 + \frac{3}{2} a\mu U \frac{\cos \theta}{R^2}. \quad (7.13)$$

Для определения результирующего сопротивления жидкости движению шара обратимся к общим формулам, установленным в § 4. главы III. В рассматриваемом нами случае интегральная формула для проекции P_z результирующего воздействия жидкости на шар представится в виде

$$P_z = \int_S \int \left(-p \cos \theta + \mu \frac{\partial w}{\partial R} \right) dS, \quad (7.14)$$

где w — составляющая вектора скорости, параллельная оси симметрии. Для этой составляющей скорости и её производной по радиусу R будем иметь:

$$\begin{aligned} w &= v_R \cos \theta - v_\theta \sin \theta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= -\frac{2}{R} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} = \\ &= -\frac{2}{R} v_R \cos \theta + \frac{1}{R} v_\theta \sin \theta - \frac{1}{R} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2}. \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия (7.6), получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial R} \right)_a &= -\frac{2U \cos^2 \theta}{a} - \frac{U \sin^2 \theta}{a} - \frac{\cos \theta}{a \sin \theta} (-2U \sin \theta \cos \theta) + \\ &+ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right)_a = -\frac{U}{a} \sin^2 \theta + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right)_a. \end{aligned}$$

На основании выражения (7.12) для функции тока будем иметь:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right)_a = -\frac{1}{2} U \sin^2 \theta.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial R} \right)_a = -\frac{3}{2} \frac{U}{a} \sin^2 \theta. \quad (7.15)$$

Подинтегральное выражение (7.14) при использовании выражения для давления (7.13) и для производной от осевой компоненты скорости (7.15) можно представить в виде

$$\left(-p \cos \theta + \mu \frac{\partial w}{\partial R} \right)_a = -p_0 \cos \theta - \frac{3}{2} \mu \frac{U}{a}. \quad (7.16)$$

Результирующая от постоянного давления p_0 по замкнутой поверхности будет равна нулю, т. е.

$$\int_S \int \cos \theta dS = 0,$$

поэтому, подставляя выражение (7.16) в (7.14) и учитывая, что

$$\iint_S dS = 4\pi a^2,$$

получим:

$$P_z = -6\pi\mu aU. \quad (7.17)$$

Равенство (7.17) представляет собой формулу Стокса для сопротивления шара при его движении в неограниченной вязкой жидкости. Согласно этой формуле сопротивление движению шара пропорционально коэффициенту вязкости, радиусу шара и скорости движения в первой степени. Формула Стокса (7.17) для сопротивления шара получена при условии отбрасывания в уравнениях движения вязкой несжимаемой жидкости квадратичных членов инерции, поэтому она может считаться справедливой только при сравнительно малых значениях чисел Рейнольдса. Тем не менее, эта формула находит себе широкое применение. В частности, она широко используется в коллоидной химии, в молекулярной физике и метеорологии. Пользуясь этой формулой, можно определять скорость осаждения мелких капель тумана, коллоидных частиц, частиц ила и прочих мелких частиц. Приравнявая силу сопротивления шара (7.17) равнодействующей сил от гидростатического давления (архимедовой силе), получим следующую формулу для предельной скорости падения шарика малых размеров в вязкой жидкости:

$$U_{шр} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\rho' - \rho}{\mu} g, \quad (7.18)$$

где ρ' представляет собой плотность вещества шарика, а ρ — плотность рассматриваемой жидкости.

Формула Стокса используется также и для определения коэффициента вязкости сильно вязких жидкостей¹⁾. Вискозиметр, основанный на принципе падения тяжелого шарика, состоит из трубки с делениями. Время падения шарика от одного фиксированного деления трубки до другого определяется секундомером. Найденное таким способом значение скорости можно подставить в формулу (7.18) и определить соответствующее значение коэффициента вязкости. При более точном определении коэффициента вязкости на этом приборе необходимо учесть поправки на радиус трубки и на нестационарность движения шарика в жидкости.

Если в рассматриваемой выше задаче о движении шара в неограниченной жидкости обратим движение, т. е. на всю жидкость и на шар наложим поступательное движение в направлении, обратном движению шара, функция тока которого представляется в виде

$$\psi_1 = -U \frac{\sin^2 \theta}{2} R^2, \quad (7.19)$$

¹⁾ Гатчек Э., Вязкость жидкостей, ГТТИ, 1932, стр. 52.

то, складывая функцию ψ_1 с функцией ψ (7.12), получим решение задачи об обтекании неподвижного шара неограниченным потоком вязкой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -U \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{3}{4} aR + \frac{a^3}{4R} \right), \\ v_R &= -2U \cos \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{3a}{4R} + \frac{a^3}{4R^3} \right), \\ v_\theta &= U \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4R} - \frac{a^3}{4R^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Примерный вид линий тока, отвечающих функции тока (7.20) относительного движения жидкости, показан на рис. 47. Линии тока, отвечающие абсолютному движению жидкости, представляемому функцией тока (7.12), показаны на рис. 48. Благодаря наличию в фор-

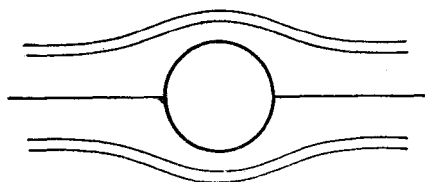


Рис. 47.

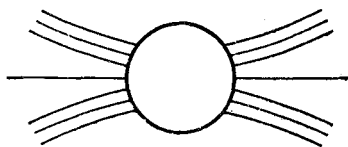


Рис. 48.

мулах (7.12) и (7.20) для функции тока выражения $\sin^2 \theta$ имеет место симметрия линий тока по отношению к диаметральной плоскости, перпендикулярной к основной скорости движения.

Подставляя в выражение (7.20) для функции тока

$$R \sin \theta = r,$$

получим функцию тока в цилиндрических координатах

$$\psi = -\frac{1}{2} U r^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{a^3}{2R^3} \right). \quad (7.21)$$

Используя соотношения (12.1) главы IV, получим выражения для компонент скорости в цилиндрических координатах

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{3}{4} U \frac{arz}{R^3} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right), \\ v_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{a^3}{2R^3} \right) + \frac{3}{4} U \frac{ar^2}{R^3} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

На основании полученных решений (7.20) можно произвести сравнительную оценку порядка величин отбрасываемых квадратичных членов инерции по отношению к тем слагаемым, которые были сохранены в уравнениях движения. Так, например, в дифференциальном уравнении, отвечающем сферическому радиусу R , было отброшено

слагаемое $\rho v_R \frac{\partial v_R}{\partial R}$, которое на основании (7.20) будет представляться в виде

$$\rho v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} = \frac{3}{2} \rho a U^2 \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{a^3}{2R^3}\right). \quad (7.23)$$

В этом же уравнении было сохранено слагаемое $\frac{\mu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta}$, обусловленное вязкостью, которое на основании (7.3) и (7.13) будет равно

$$\frac{\mu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial R} = -3a\mu U \frac{\cos \theta}{R^3}. \quad (7.24)$$

Составляя отношение модулей левых и правых частей (7.23) и (7.24), получим:

$$\frac{\left|v_R \frac{\partial v_R}{\partial R}\right|}{\left|\frac{\partial p}{\partial R}\right|} = \frac{1}{2} \frac{\rho a U}{\mu} \frac{R}{a} |\cos \theta| \left(1 - \frac{3a}{2R} - \frac{a^2}{R^2} + \frac{2a^3}{R^3} - \frac{a^5}{2R^5}\right). \quad (7.25)$$

На основании полученного равенства (7.25) мы заключаем, что даже при

$$R = \frac{Ua\rho}{\mu} < 1 \quad (7.26)$$

порядок отбрасываемых квадратичных членов инерции мал по сравнению с сохранёнными членами в уравнениях Стокса не во всех точках области, занятой жидкостью. Вблизи поверхности сферы выражение в скобке (7.25) обращается в нуль, и поэтому отбрасывание квадратичных членов инерции в уравнения движения до некоторой степени приближения может считаться справедливым, но на значительных расстояниях от сферы отбрасывание квадратичных членов с точки зрения проведённой оценки (7.25) нельзя считать вполне законным. Обратим внимание на то, что высказанные заключения о возможности отбрасывания квадратичных членов инерции основаны на сравнительной оценке порядка лишь отдельных слагаемых, вычисленных после решения приближённых уравнений Стокса. Поэтому эти заключения нельзя рассматривать как абсолютный критерий применимости приближённых уравнений Стокса. Критерием возможности использования приближённых уравнений Стокса могут служить только результаты эксперимента, результаты сравнения вычисленных значений, например силы сопротивления шара, с результатами непосредственного её измерения. На основании многочисленных экспериментов установлено, что формула Стокса (7.17) может считаться законной для чисел Рейнольдса, меньших половины.

§ 8. Вращение шара в вязкой жидкости

Приближённые дифференциальные уравнения Стокса установившегося движения несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах согласно соотношениям (7.1) главы IV будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial p}{r \partial \varphi} &= \mu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta v_z, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Будем предполагать, что траектории всех частиц суть окружности с центрами на оси z , т. е.

$$v_r \equiv 0, \quad v_z \equiv 0. \quad (8.2)$$

При этом предположении из уравнения несжимаемости (8.1) будем иметь

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (8.3)$$

Если считать давление p не зависящим от φ , то для единственной компоненты скорости v_φ получим из (8.1) следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0. \quad (8.4)$$

Учитывая выражение (6.12) главы II оператора Лапласа в сферических координатах и (8.3), дифференциальное уравнение (8.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{R^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (8.5)$$

Рассмотрим теперь задачу о вращении шара в безграничной вязкой жидкости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z (рис. 49). Напишем условие прилипания частиц жидкости к поверхности шара:

$$\text{при } R = a \quad v_\varphi = \omega r = \omega a \sin \theta. \quad (8.6)$$

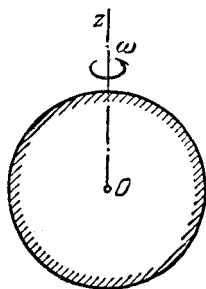


Рис. 49.

Будем полагать, что на бесконечном удалении от шара скорость жидкости обращается в нуль:

$$\text{при } R = \infty \quad v_{\varphi} = 0, \quad (8.7)$$

Вид граничного условия (8.6) указывает на возможность искать решение дифференциального уравнения (8.5) в виде

$$v_{\varphi} = \sin \theta f(R). \quad (8.8)$$

Подставляя значение v_{φ} из (8.8) в (8.5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{df}{dR} - \frac{2}{R^2} f = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$f = C_1 R + \frac{C_2}{R^2}. \quad (8.9)$$

Для удовлетворения граничного условия (8.7) на бесконечности необходимо положить:

$$C_1 = 0.$$

Используя граничное условие прилипания (8.6), получим:

$$C_2 = \omega a^3.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи о вращении шара в неограниченной вязкой жидкости будет представляться в виде

$$v_{\varphi} = \frac{\omega a^3 \sin \theta}{R^2}. \quad (8.10)$$

На основании (6.9) главы II и предположений (8.2) и (8.3) для касательных компонент напряжения будем иметь:

$$p_{R\theta} = 0, \quad p_{\varphi R} = \mu \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial R} - \frac{v_{\varphi}}{R} \right), \quad p_{\varphi\theta} = \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} - v_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta \right).$$

Подставляя значение v_{φ} из (8.10), получим:

$$p_{R\theta} = 0, \quad (p_{\varphi R})_a = -3\mu\omega \sin \theta, \quad p_{\varphi\theta} = 0. \quad (8.11)$$

Для вычисления результирующего момента сил сопротивления вращению шара в вязкой жидкости необходимо выражение (8.11) для $(p_{\varphi R})_a$ умножить на элемент поверхности $a^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi$ и на плечо относительно оси $a \sin \theta$ и проинтегрировать по всей поверхности шара. В результате мы получим:

$$\begin{aligned} L_z &= \int \int (p_{\varphi R})_a a^3 \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \\ &= -6\pi\mu\omega a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = -8\pi\mu\omega a^3. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Таким образом, при решении задачи о вращении шара в неограниченной вязкой жидкости на основе приближенных уравнений, без учёта квадратичных членов инерции момент сил сопротивления вязкой жидкости пропорционален первой степени угловой скорости вращения.

§ 9. Движение вязкой жидкости в коническом диффузоре

Рассмотрим движение вязкой жидкости в коническом диффузоре в предположениях: 1) жидкость считается несжимаемой, 2) движение предполагается установившимся и осесимметричным, 3) действием массовых сил и квадратичными членами инерции можно пренебречь и 4) движение частиц является строго радиальным, т. е.

$$v_{\theta} = - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} \equiv 0. \quad (9.1)$$

При этих предположениях функция тока будет удовлетворять дифференциальному уравнению Стокса

$$DD\psi = 0 \quad (9.2)$$

и, кроме того, не будет зависеть от переменного R . Учитывая выражение (7.2) оператора Стокса и независимость функции тока от R , получим:

$$D\psi = \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\psi}{d\theta} \right). \quad (9.3)$$

Введём новое независимое переменное, полагая

$$\cos \theta = \tau. \quad (9.4)$$

Тогда из (9.2) и (9.3) получим:

$$D\psi = \frac{1 - \tau^2}{R^2} \frac{d^2\psi}{d\tau^2},$$

$$DD\psi = \frac{1}{R^4} \left\{ 6(1 - \tau^2) \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + (1 - \tau^2) \frac{d^2}{d\tau^2} \left[(1 - \tau^2) \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \right] \right\} = 0.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (9.2) будет представляться в виде

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left[6\psi + (1 - \tau^2) \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \right] = 0,$$

или

$$(1 - \tau^2) \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + 6\psi = C_1 + C_2 \tau. \quad (9.5)$$

Легко видеть, что частное решение дифференциального уравнения (9.5) с правой частью представляется в виде

$$\psi_3 = \frac{1}{6} (C_1 + C_2 \tau) = A + B\tau.$$

Проверкой можно убедиться, что частное решение дифференциального уравнения (9.5) без правой части будет иметь вид

$$\psi_1 = C(\tau - \tau^3).$$

Для построения второго частного решения однородного уравнения положим:

$$\psi_2 = \psi_1 u(\tau).$$

Тогда будем иметь:

$$2(1 - 3\tau^2) \frac{du}{d\tau} + (\tau - \tau^3) \frac{d^2u}{d\tau^2} = 0,$$

$$\frac{d\left[\frac{du}{d\tau}\right]}{\frac{du}{d\tau}} = -2d[\ln(\tau - \tau^3)].$$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{D}{(\tau - \tau^3)^2},$$

$$u = D \int \frac{d\tau}{(\tau - \tau^3)^2} + C_3 = D \left[\frac{3}{4} \ln \frac{1 + \tau}{1 - \tau} + \frac{3\tau^2 - 2}{2\tau(1 - \tau^2)} \right] + C_3.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (9.5) представится в виде

$$\begin{aligned} \psi = & A + B\tau + C(\tau - \tau^2) + \\ & + D \left[\frac{3}{4} (\tau - \tau^3) \ln \frac{1 + \tau}{1 - \tau} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \tau^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

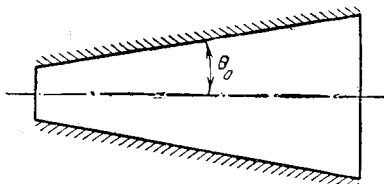


Рис. 50.

Обозначим угол раствора конического диффузора θ_0 (рис. 50), а полный расход через сечение — Q .

Граничные условия, выражающие прилипание частиц жидкости к стенкам и заданную величину расхода, можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \tau = 1 \quad \psi &= 0, \\ \text{при } \tau = \tau_0 \quad v_R &= \frac{1}{R^2} \frac{d\psi}{\sin \theta d\theta} = -\frac{1}{R^2} \frac{d\psi}{d\tau} = 0, \\ Q &= 2\pi \int_0^{\theta_0} v_R R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi [\psi(\tau_0) - \psi(1)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Производная от функции тока ψ (9.6) по переменному τ благодаря наличию слагаемого с $\ln(1 - \tau)$ будет при $\tau = 1$ обращаться в бесконечность. Поэтому для обеспечения регулярности радиальной скорости внутри конуса необходимо положить:

$$D = 0.$$

Используя граничные условия (9.7), получим следующие уравнения для определения постоянных:

$$A + B = 0,$$

$$B + C(1 - 3\tau_0^2) = 0,$$

$$A + B\tau_0 + C(\tau_0 - \tau_0^3) = \frac{Q}{2\pi},$$

откуда

$$C = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{1 - 3\tau_0^2 + 2\tau_0^3},$$

$$A = -B = \frac{Q}{2\pi} \frac{1 - 3\tau_0^2}{1 - 3\tau_0^2 + 2\tau_0^3}.$$

Таким образом, радиальная скорость движения частиц вязкой жидкости в конусе будет представляться в виде

$$v_R = \frac{3Q}{2\pi R^2} \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{1 - 3\tau_0^2 + 2\tau_0^3}. \quad (9.8)$$

Оператор Стокса от функции тока будет равен

$$D\psi = \frac{1 - \tau^2}{R^2} \frac{d^2\psi}{d\tau^2} = -6C \frac{\tau - \tau^3}{R^2}.$$

Первое дифференциальное уравнение (7.3) после использования подстановки (9.4) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{\mu}{R^2} \frac{\partial D\psi}{\partial \tau}.$$

Подставляя значение $D\psi$ и выполняя интегрирование, получим следующее выражение для давления:

$$p = p_0 - \frac{\mu Q}{\pi R^3} \frac{1 - 3\tau^2}{1 - 3\tau_0^2 + 2\tau_0^3}. \quad (9.9)$$

Будем считать угол θ_0 небольшим и воспользуемся разложением косинуса

$$\tau = \cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 - \dots$$

Тогда можно приближённо положить:

$$\tau^2 - \tau_0^2 \approx \theta_0^2 - \theta^2,$$

$$1 - 3\tau_0^2 + 2\tau_0^3 = 1 - 3 \left(1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 + \frac{1}{24} \theta_0^4 \right)^2 +$$

$$+ 2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2} + \frac{\theta_0^4}{24} \right)^3 \approx \frac{3}{4} \theta_0^4,$$

$$1 - 3\tau^2 \approx -2 \left(1 - \frac{3}{2} \theta^2 \right).$$

Таким образом, при малых углах раствора конического диффузора радиальная скорость и перепад давления будут представляться приближённо в виде

$$\left. \begin{aligned} v_R &= \frac{2Q}{\pi R^3 \theta_0^4} (\theta_0^2 - \theta^2), \\ \frac{\partial p}{\partial R} &= -\frac{8\mu Q}{\pi R^4 \theta_0^4} \left(1 - \frac{3}{2} \theta^2\right). \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Полагая, наконец,

$$R\theta_0 = a, \quad R\theta = r,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= \frac{2Q}{\pi a^4} (a^2 - r^2), \\ \frac{\partial p}{\partial R} &= -\frac{8\mu Q}{\pi a^4} \left(1 - \frac{3}{2} \theta^2\right). \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Сопоставляя эти формулы с формулами (5.6) и (5.9) главы III для движения жидкости в цилиндрической трубе, мы видим, что правая часть первой формулы (9.11) для скорости в точности совпадает с правой частью соответственной формулы для скорости движения в цилиндрической трубе. Коэффициент правой части выражения (9.11) для перепада давления представляет собой выражение перепада давления в цилиндрической трубе. Следовательно, множитель в скобке выражения (9.11) есть первая поправка в перепаде давления на конусность трубы.

Выражение (9.6) для функции тока может быть использовано также и для решения задачи о движении вязкой жидкости между двумя соосными конусами¹⁾.

1) Слёзкин Н. А., Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами, Матем. сборник, т. 42, № 1, 1935.

ГЛАВА VI

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ

§ 1. Теория Н. П. Петрова

В предшествующей главе рассмотрены отдельные задачи на применение тех приближённых дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, которые получаются из полных дифференциальных уравнений при отбрасывании всех квадратичных членов инерции, но при полном сохранении всех слагаемых, обусловленных вязкостью. Следующую ступень развития приближённых методов теории движения вязкой жидкости составили дифференциальные уравнения, получающиеся из полных при отбрасывании всех квадратичных членов инерции и при отбрасывании лишь отдельных слагаемых, обусловленных вязкостью. Толчком к развитию именно второго приближённого метода использования дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости послужила весьма важная техническая проблема смазки в машинах.

Основателем так называемой гидродинамической теории смазки является известный русский учёный и инженер Н. П. Петров ¹⁾. В своей основной работе, посвящённой вопросам смазки, Н. П. Петров много внимания уделил доказательству возможности использования самой гипотезы Ньютона о силе вязкости. В этой же работе он дал решение задачи для того случая, когда поверхности шипа и подшипника приняты за поверхности соосных круглых цилиндров. Для проверки своих теоретических заключений Н. П. Петров произвёл большое количество опытов. Эти опыты не только подтвердили основные положения его теории, но и много способствовали выяснению вопросов, которые возникли в то время в связи с использованием минеральных масел.

Задача о круговом движении частиц вязкой жидкости между двумя вращающимися соосными цилиндрами была рассмотрена нами в § 8 главы III при условии полного прилипания жидкости к стенкам. В работе же Н. П. Петрова эта задача решалась при условии частич-

¹⁾ Петров Н. П., Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости, сборник «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, 1934.

ного скольжения жидкости вдоль стенок, т. е. при граничном условии (7.4) главы II:

$$p_n - p_{nn} = \lambda(V_T - V).$$

Вкратце воспроизведём это решение.

Пусть мы имеем два соосных цилиндра, вращающихся с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (рис. 51). Предполагая, что траектории всех частиц суть концентрические окружности и единственная компонента скорости v_φ не зависит от продольной координаты z , получим следующее дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0. \quad (1.1)$$

Общее решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$v_\varphi = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (1.2)$$

Касательное напряжение, вычисленное по формуле

$$p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right),$$

будет в рассматриваемом случае (1.2) иметь вид

$$p_{r\varphi} = -\frac{2\mu C_2}{r^2}. \quad (1.3)$$

Обозначим коэффициенты внешнего трения через λ_1 и λ_2 . Тогда условия частичного скольжения на поверхности рассматриваемых цилиндров, согласно которым произведение коэффициента внешнего трения на разность скоростей точек цилиндров и соприкасающихся частиц жидкости равно касательной компоненте напряжения, будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 [\omega_1 b - (v_\varphi)_b] &= (p_{r\varphi})_b, \\ \lambda_2 [\omega_2 a - (v_\varphi)_a] &= (p_{r\varphi})_a. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Подставляя значения v_φ из (1.2) и $p_{r\varphi}$ из (1.3), получим уравнения для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{2\mu}{\lambda_1 b^3} \right) &= \omega_1, \\ C_1 + C_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\mu}{\lambda_2 a^3} \right) &= \omega_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\omega_2 a^3 \left(b + \frac{2\mu}{\lambda_1} \right) - \omega_1 b^3 \left(a - \frac{2\mu}{\lambda_2} \right)}{ab(a^2 - b^2) + 2\mu \left(\frac{a^3}{\lambda_1} + \frac{b^3}{\lambda_2} \right)}, \\ C_2 &= \frac{a^3 b^3 (\omega_1 - \omega_2)}{ab(a^2 - b^2) + 2\mu \left(\frac{a^3}{\lambda_1} + \frac{b^3}{\lambda_2} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

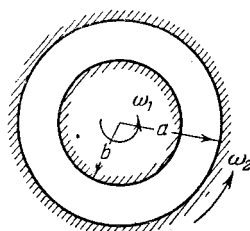


Рис. 51.

Так как на элемент поверхности внутреннего цилиндра действует сила

$$(p_{r\varphi})_b b d\varphi = -2\mu \frac{C_2 d\varphi}{b}, \quad (1.6)$$

момент которой относительно оси цилиндра равен

$$(p_{r\varphi})_b b^2 d\varphi = -2\mu C_2 d\varphi,$$

то полный момент сил вязкости, распределённых по всей поверхности внутреннего цилиндра с длиной H , будет представляться в виде

$$L_z = -4\pi\mu H \frac{a^3 b^3 (\omega_1 - \omega_2)}{ab(a^2 - b^2) + 2\mu \left(\frac{a^3}{\lambda_1} + \frac{b^3}{\lambda_2} \right)}. \quad (1.7)$$

Полагая внешний цилиндр неподвижным, $\omega_2 = 0$, и обозначая

$$a - b = h,$$

после разложения в правой части (1.7) по степеням h и сохранения слагаемых лишь в первой степени, получим формулу для момента в виде

$$L_z = \mu \frac{S\omega_1 b^3}{h + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}, \quad (1.8)$$

где S представляет собой величину площади поверхности внутреннего цилиндра. Под силой трения F двух смазанных цилиндров в работе Н. П. Петрова подразумевается отношение момента L_z к радиусу цилиндра:

$$F = \frac{L_z}{b} = \mu \frac{S\omega_1 b}{h + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) представляет собой окончательную формулу Н. П. Петрова для силы трения при смазке. Предполагая коэффициенты внешнего трения λ_1 и λ_2 достаточно большими, из (1.9) получим формулу для силы трения смазки в предположении полного прилипания частиц жидкости к стенкам

$$F = \mu \frac{S\omega_1 b}{h}. \quad (1.10)$$

На основании этой формулы можно заключить, что сила трения обратно пропорциональна толщине смазанного слоя.

На основании экспериментов и последующего развития теории было установлено, что основные зависимости, полученные Н. П. Петровым, соответствуют тому предельному случаю, при котором шип совершает большое число оборотов и несёт на себе сравнительно

малую нагрузку. В этом предельном случае ось шипа действительно мало отклоняется от оси подшипника, и этим отклонением можно пренебречь. В обычных же условиях работы подшипников ось шипа не совпадает с осью подшипника. Эксцентричное расположение шипа в подшипнике приводит к образованию той поддерживающей силы, которая уравнивает нагрузку на вал, вращающийся в подшипниках. Теория смазочного слоя при эксцентричном расположении шипа в подшипниках была развита Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным.

§ 2. Приближённые уравнения Рейнольдса для смазочного слоя

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое между приблизительно параллельными поверхностями, радиусы кривизн которых достаточно велики по сравнению со средней толщиной слоя δ (рис. 52). Пренебрегая кривизной первой поверхности, обозначим: через x криволинейную координату, отсчитываемую вдоль первой поверхности в направлении скорости U_1 точек этой поверхности, через z криволинейную координату, отсчитываемую также вдоль этой поверхности, но в направлении, перпендикулярном к указанной скорости U_1 , и через y координату, отсчитываемую по нормали к рассматриваемой поверхности. Проекция вектора скорости точек второй поверхности на касательную и на нормаль к этой поверхности обозначим через U_2 и V_2 . Чтобы средняя толщина слоя оставалась малой во всё время движения, необходимо положить поперечную скорость V_2 весьма малой по сравнению со скоростью U_1 . Обозначим отношение этих двух скоростей через ε , т. е.

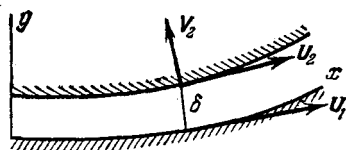


Рис. 52.

$$\frac{V_2}{U_1} = \varepsilon. \quad (2.1)$$

Пусть l обозначает среднее значение радиусов кривизн рассматриваемых поверхностей. На основании указанного выше предположения толщина слоя δ должна считаться малой по сравнению со средним радиусом кривизн l . Отношение этих величин также обозначим через ε :

$$\frac{\delta}{l} = \varepsilon. \quad (2.2)$$

Если предполагать движение вязкой несжимаемой жидкости установившимся и пренебрегать действием массовых сил, то дифференциальные уравнения переноса количества движения (2.13) главы II

в проекциях на введённые прямолинейные оси координат представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xx} - \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_{yx} - \rho uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{zx} - \rho \omega u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xy} - \rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_{yy} - \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{zy} - \rho \omega v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xz} - \rho u\omega) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_{yz} - \rho v\omega) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{zz} - \rho \omega^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

К этим уравнениям присоединим уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

и соотношения, выражающие обобщённую гипотезу Ньютона:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \rho_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \rho_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \rho_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z}, & \rho_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Вместо размерных координат и скоростей введём безразмерные с учётом того, что порядок координаты и скорости в направлении нормали к первой поверхности мал по сравнению с порядком координат и скоростей в других направлениях:

$$\left. \begin{aligned} x &= lx_1, & y &= \delta y_1, & z &= lz_1, \\ u &= U_1 u_1, & v &= V_2 v_1, & \omega &= U_1 \omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Подставляя эти выражения координат и скоростей в уравнение (2.4) несжимаемости, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{V_2}{U_1} \frac{l}{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1} = 0. \quad (2.7)$$

Если предполагать, что все слагаемые в полученном уравнении несжимаемости будут иметь один и тот же порядок величины, то необходимо положить:

$$\frac{V_2}{U_1} \frac{l}{\delta} = 1.$$

Полученное равенство оправдывает наше предположение (2.2) о том, что порядок отношения скоростей $\frac{V_2}{U_1}$ совпадает с порядком отношения толщины слоя к величине среднего радиуса кривизны рассматриваемых поверхностей.

Характерное число Рейнольдса введём следующим образом:

$$R = \frac{U_1 l}{\nu}. \quad (2.8)$$

При рассмотрении движения вязкой несжимаемой жидкости между параллельными стенками в § 3 главы IV было установлено, что средняя скорость частиц жидкости прямо пропорциональна перепаду давления и квадрату расстояния между стенками и обратно пропорциональна коэффициенту вязкости. Следовательно, величина самого давления будет находиться в обратной зависимости от квадрата толщины слоя жидкости между стенками. Чтобы это учесть, заменим размерное давление p через безразмерное p_1 следующим образом:

$$p = \frac{\mu U_1 l}{\delta^2} p_1 = \frac{\rho U_1^2}{Re^2} p_1. \quad (2.9)$$

Соотношения (2.5), выражающие обобщённую гипотезу Ньютона, в безразмерных величинах будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{\mu U_1 l}{\delta^2} \left(-p_1 + 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\rho U_1^2}{Re^2} \left(-p_1 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \\ p_{yy} &= \frac{\mu U_1 l}{\delta^2} \left(-p_1 + 2 \frac{V_2}{U_1} \frac{\delta}{l} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) = \frac{\rho U_1^2}{Re^2} \left(-p_1 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right), \\ p_{zz} &= \frac{\mu U_1 l}{\delta^2} \left(-p_1 + 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) = \frac{\rho U_1^2}{Re^2} \left(-p_1 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right), \\ p_{xy} &= \frac{\mu U_1}{\delta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{V_2}{U_1} \frac{\delta}{l} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\rho U_1^2}{\varepsilon R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right), \\ p_{yz} &= \frac{\mu U_1}{\delta} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \frac{V_2}{U_1} \frac{\delta}{l} \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right) = \frac{\rho U_1^2}{\varepsilon R} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right), \\ p_{zx} &= \frac{\mu U_1}{l} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\rho U_1}{R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Подставляя в уравнения движения (2.3) значения координат и скоростей (2.6) и напряжений (2.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-p_1 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - Re^2 u_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - Re^2 u_1 v_1 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - Ru_1 w_1 \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - Re^2 v_1 u_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(-p_1 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - Re^2 v_1^2 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} - Re^2 v_1 w_1 \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - Ru_1 w_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} - Re^2 v_1 w_1 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(-p_1 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} - Re^2 w_1^2 \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Полученные дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в тонком слое содержат два безразмерных параметра ε и R . Параметр ε , представляющий собой отношение толщины слоя к среднему радиусу кривизны поверхностей, считается заведомо малой величиной, а R может и не быть малой.

Теперь примем, что число Рейнольдса по своему порядку обратно пропорционально значению параметра ε в первой степени, т. е.

$$R \approx \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

При этом предположении сохраним в соотношениях (2.10) и в уравнениях (2.11) лишь слагаемые, имеющие наибольший порядок величины. Тогда соотношения, выражающие гипотезу Ньютона, представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -\frac{\rho U_1^2}{\varepsilon} p_1, & p_{yy} &= -\frac{\rho U_1^2}{\varepsilon} p_1, & p_{zz} &= -\frac{\rho U_1^2}{\varepsilon} p_1, \\ p_{xy} &= \rho U_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial y}, & p_{yz} &= \rho U_1^2 \frac{\partial w_1}{\partial y}, & p_{zx} &= \varepsilon \rho U_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

На основании полученных равенств (2.13) заключаем, что в тонком смазочном слое наибольшим по своему порядку напряжением будет напряжение давления. Из касательных напряжений наибольшими по своему порядку будут те компоненты напряжений, которые развиваются на площадках, перпендикулярных к оси y , т. е. на площадках, приблизительно параллельных ограничивающим поверхностям.

Дифференциальные уравнения (2.11) при использовании (2.12) и сохранении слагаемых, не содержащих в качестве множителя параметр ε , принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= 0, \\ -\frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

На основании второго уравнения (2.14) мы заключаем, что в тонком смазочном слое давление не изменяется по толщине слоя.

Возвращаясь в соотношениях (2.13) и уравнениях (2.14) к размерным величинам и присоединяя к ним уравнение несжимаемости,

получим:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, \\ p_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad p_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Полученные дифференциальные уравнения (2.16) носят название *дифференциальных уравнений Рейнольдса для смазочного слоя*. Сопоставляя эти уравнения с полными дифференциальными уравнениями установившегося движения несжимаемой вязкой жидкости, мы видим, что для перехода от полных уравнений к уравнениям (2.16) должны быть отброшены не только все квадратичные члены инерции, но и часть слагаемых, обусловленных вязкостью. Таким образом, дифференциальные уравнения Рейнольдса совершенно не учитывают квадратичных членов инерции и лишь частично учитывают слагаемые от вязкости.

Дифференциальные уравнения (2.11) при подстановке (2.12) будут содержать только один малый параметр ϵ . Решения этой системы дифференциальных уравнений можно представить в виде рядов по степеням этого параметра. Тогда эта система уравнений вместе с уравнением несжимаемости разобьётся на последовательность отдельных систем уравнений. Первой системой этой последовательности будут уравнения Рейнольдса (2.14), второй же системой будут те уравнения, которые были использованы Л. С. Лейбензоном¹⁾ для вычисления первой поправки на учёт квадратичных членов инерции.

§ 3. Дифференциальное уравнение для давления в слое

Дифференциальные уравнения (2.16) разрешаются весьма просто относительно скоростей. Так как давление не зависит от y , то в первом и третьем уравнениях можно провести интегрирование по переменному y . Интегрирование по переменному y можно провести и в уравнении несжимаемости. В результате этих интегрирований

¹⁾ Лейбензон Л. С., Второе приближение в теории О. Рейнольдса, сборник «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, 1934, стр. 557; Слёзкин Н. А. К вопросу об уточнении решений уравнений Рейнольдса, ДАН СССР, т. LIV, № 2, 1946.

мы получим следующие равенства для скоростей:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2, \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4, \\ v &= - \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy + C_5. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Входящие в эти равенства C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 в общем случае могут считаться функциями переменных x и z .

Установим граничные условия для скоростей. По нашему предположению точки первой поверхности имеют скорость U_1 только в направлении оси x , т. е. граничные условия на первой поверхности будут представляться в виде

$$\text{при } y = 0 \quad u = U_1, \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (3.2)$$

Точки второй поверхности имеют скорости U_2 по касательной и V_2 по нормали. Проектируя эти скорости на оси x и y и обозначая переменную толщину слоя через h , получим:

$$\begin{aligned} \text{при } y = h(x, z) \quad u &= U_2 \cos(\widehat{\tau, x}) - V_2 \sin(\widehat{\tau, x}), \\ v &= U_2 \sin(\widehat{\tau, x}) + V_2 \cos(\widehat{\tau, x}), \quad w = 0. \end{aligned}$$

Тангенс угла наклона касательной τ ко второй поверхности к оси x будет представляться в виде

$$\text{tg}(\widehat{\tau, x}) = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

В силу предположения о сравнительно малом искривлении второй поверхности можно положить:

$$\sin(\widehat{\tau, x}) \approx \text{tg}(\widehat{\tau, x}) = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \cos(\widehat{\tau, x}) \approx 1.$$

При таком предположении граничные условия на второй поверхности будут представляться в виде

$$\text{при } y = h(x, z) \quad u = U_2 - V_2 \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_2, \quad w = 0.$$

В предшествующем параграфе указывалось, что величина скорости V_2 должна быть малой величиной. Следовательно, произведение $V_2 \frac{\partial h}{\partial x}$ будет малой величиной второго порядка и им можно пренебречь.

Таким образом, граничные условия на второй поверхности будут окончательно представляться в виде

$$\text{при } y = h(x, z) \quad u = U_2, \quad v = V_2 + U_2 \frac{\partial h}{\partial x}, \quad w = 0. \quad (3.3)$$

Используя граничные условия (3.2) и (3.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} C_2 = U_1, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \\ C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h + \frac{1}{h} (U_2 - U_1), \quad C_3 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h; \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_2 = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy. \quad (3.5)$$

Подставляя в (3.1) значения C_1 , C_2 , C_3 , C_4 и C_5 из (3.4), получим следующие выражения для скоростей:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_1 + \frac{y}{h} (U_2 - U_1) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (yh - y^2), \\ w &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (yh - y^2), \\ v &= - \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Обратимся теперь к ещё неиспользованному соотношению (3.5). Вынесем за знак интеграла в правой части производные по x и z , но при этом учтём, что верхний предел является переменным. Учиывая условия (3.3), будем иметь:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - \frac{\partial h}{\partial x} (u)_h = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - U_2 \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy - \frac{\partial h}{\partial z} (w)_h = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy.$$

Таким образом, соотношение (3.5) будет представляться в виде

$$V_2 = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy. \quad (3.7)$$

На основании равенств (3.6) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h u \, dy &= \frac{1}{2} h (U_1 + U_2) - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \int_0^h w \, dy &= -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Подставляя эти выражения в правую часть (3.7), получим следующее дифференциальное уравнение для давления:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[2V_2 + \frac{\partial h}{\partial x} (U_1 + U_2) \right]. \quad (3.9)$$

В это дифференциальное уравнение (3.9) входит величина h , которая представляет собой толщину слоя и является заданной функцией от переменных x и z . Таким образом, в дифференциальном уравнении для давления коэффициенты будут, как правило, не постоянными, а переменными. Для определённости решения этого уравнения необходимо задать граничные условия для давления по той, вообще говоря, замкнутой кривой, которая ограничивает рассматриваемый смазочный слой в плане на плоскости xOz . Простейшим граничным условием будет условие, при котором давление считается на этой кривой известным и постоянным, т. е.

$$f(x, y) = 0, \quad p = p_0 = \text{const}. \quad (3.10)$$

§ 4. Сдавливание слоя параллельными плоскостями

Простейшим примером, в котором может быть использовано дифференциальное уравнение (3.9) Рейнольдса для давления, служит задача о сдавливании слоя параллельными плоскостями.

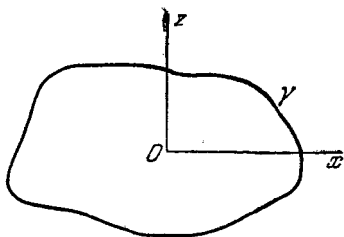


Рис. 53.

Пусть мы имеем две параллельные пластинки, имеющие в плане одну и ту же, но произвольную форму (рис. 53). Допустим, что между пластинками находится какое-то вязкое вещество. Нижняя пластинка пусть будет неподвижной, а верхняя пусть перемещается поступательно в направлении к нижней; тогда находящееся между пла-

стинками вязкое вещество будет выдавливаться в стороны.

Для применения к рассматриваемой задаче дифференциального уравнения (3.9) необходимо: 1) считать толщину h не зависящей от координат x, z , 2) положить U_1 и U_2 равными нулю и 3) изменить

знак скорости V_2 на обратный. В результате этих предположений получим для давления следующее дифференциальное уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{12\mu V_2}{h^3}. \quad (4.1)$$

На контуре γ , ограничивающем рассматриваемые пластинки в плоскости xOz , давление необходимо считать постоянным, т. е.

$$\text{на } \gamma \quad p = p_0. \quad (4.2)$$

Сопоставляя постановку рассматриваемой задачи о сдавливании тонкого слоя вязкого вещества с постановкой задачи о прямолинейно-параллельном течении вязкой несжимаемой жидкости, изложенной в § 1 главы IV, мы видим их полное формальное сходство. Следовательно, и для решения задачи о сдавливании слоя вязкого вещества в порядке аналогии можно привлекать те методы, которые используются для решения задачи о вращении идеальной жидкости и кручении призматического бруса.

В качестве примера рассмотрим пластинки эллиптической формы. Уравнение ограничивающего контура γ будет, следовательно, представляться в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.3)$$

Будем искать решение уравнения Пуассона (4.1) в виде

$$p = A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) + B,$$

где A и B — произвольные постоянные. Подставляя это выражение для давления в уравнение (4.1), получим:

$$2A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) = -\frac{12\mu V_2}{h^3}.$$

Используя граничное условие (4.2) и уравнение (4.3) контура, получим:

$$B = p_0.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи о сдавливании слоя вязкого вещества эллиптическими пластинками будет представляться в виде

$$p = p_0 - \frac{6\mu V_2}{h^3} \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right). \quad (4.4)$$

Полагая в этом решении

$$c = a, \quad x^2 + z^2 = r^2,$$

получим решение задачи о сдавливании слоя вязкого вещества круговыми пластинками

$$p - p_0 = \frac{3\mu V_2}{h^3} (a^3 - r^3). \quad (4.5)$$

На основании (4.5) заключаем, что давление в слое под круговой пластинкой будет распределяться по параболическому закону.

Умножая левую и правую части (4.5) на площадь элементарного кольца $2\pi r dr$ и проводя интегрирование по всей площади круга, получим следующую формулу для результирующего сопротивления сжатию круговой пластинкой слоя вязкого вещества:

$$P = \frac{3}{2} \pi \mu V_2 \frac{a^4}{h^3}. \quad (4.6)$$

Таким образом, сопротивление слоя вязкого вещества пропорционально коэффициенту вязкости, скорости сжатия в первой степени, радиусу пластинки в четвертой степени и обратно пропорционально кубу толщины слоя.

Допустим, что перемещение верхней горизонтальной пластинки происходит под действием веса некоторого груза и веса самой пластинки. Обозначая общий вес через Q и полагая

$$V_2 = - \frac{dh}{dt},$$

будем иметь следующее дифференциальное уравнение прямолинейного движения нагруженной пластинки:

$$\frac{Q}{g} \frac{dV_2}{dt} = Q + \frac{3}{2} \pi \mu \frac{a^4}{h^3} \frac{dh}{dt}. \quad (4.7)$$

Интегрируя уравнение (4.7) один раз, получим:

$$\frac{Q}{g} V_2 = Qt - \frac{3}{4} \pi \mu \frac{a^4}{h^2} + C_1.$$

C_1 определим из начального условия:

$$\text{при } t=0 \quad V_2 = 0, \quad h = h_0.$$

Тогда для скорости перемещения нагруженной пластинки получим выражение

$$V_2 = gt - \frac{3\pi\mu g}{4Q} a^4 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right).$$

Если предполагать скорость перемещения нагруженной пластинки малой, то из последнего уравнения (4.8) получим следующую формулу зависимости времени сжатия слоя от переменной его толщины:

$$t = \frac{3\pi\mu}{4Q} a^4 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right).$$

Формулой (4.9) можно пользоваться для приближённого определения коэффициента вязкости, сильно вязких веществ. Подвергая такое вещество сжатию под фиксированной нагрузкой Q между круглыми пластинками и определяя необходимое время для изменения толщины слоя от h_0 до какого-то значения h , мы можем затем вычислить по формуле (4.9) коэффициент вязкости этого вещества.

§ 5. Слой смазки между наклонными пластинками

Пусть плоскость xOz перемещается в направлении оси x со скоростью U . На некотором расстоянии от этой плоскости поместим пластинку ограниченной длины, наклонённую под углом α к плоскости (рис. 54). Предполагаем, что область между плоскостью и пластинкой во всё время движения плоскости заполнена смазочным маслом. Ось y проведём через левый край пластинки. Обозначая толщину слоя у левого края пластинки через h_1 , у правого — через h_2 , а расстояние по оси x между этими краями через a , будем иметь для толщины слоя h следующее уравнение:

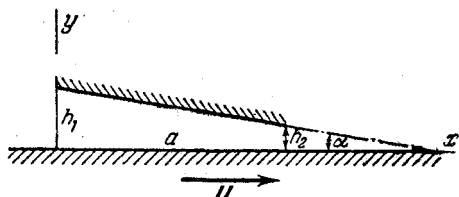


Рис. 54.

$$h = h_1 - x \operatorname{tg} \alpha = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{a} x = h_1 - mx. \quad (5.1)$$

Будем считать, что в направлении оси z пластинка простирается в обе стороны до бесконечности, т. е. будем полагать все характеристики движения частиц жидкости не зависящими от переменного z .

Граничные условия в рассматриваемой задаче будут иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=U, \quad v=0, \quad \text{при } x=0 \quad p=p_0, \\ \text{при } y=h \quad u=0, \quad v=0, \quad \text{при } x=a \quad p=p_0. \end{array} \right\} (5.2)$$

Полагая в равенствах (3.6)

$$U_1 = U, \quad U_2 = 0, \quad \omega = 0,$$

получим для скоростей частиц жидкости следующие выражения:

$$\left. \begin{array}{l} u = U \left(1 - \frac{y}{h} \right) - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (yh - y^2), \\ v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \end{array} \right\} (5.3)$$

В дифференциальном уравнении (3.9) для давления мы должны положить:

$$V_2 = 0, \quad U_1 = U, \quad U_2 = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx}. \quad (5.4)$$

После интегрирования получим:

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 6\mu U h + C_1. \quad (5.5)$$

Так как на краях интервала переменного x давление принимает одно и то же значение, то в промежутке производная от давления должна обращаться в нуль. Обозначим толщину слоя, отвечающую экстремальному значению давления, через h^* , т. е.

$$\text{при } h = h^* \quad \frac{dp}{dx} = 0. \quad (5.6)$$

Тогда из (5.5) будем иметь:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3} \right).$$

От независимого переменного x в этом уравнении перейдем к переменному h . Из (5.1) имеем:

$$dh = -m dx.$$

Следовательно, уравнение для давления примет вид

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\mu U}{m} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3} \right). \quad (5.7)$$

Проводя интегрирование, получим:

$$p = \frac{6\mu U}{m} \left(\frac{1}{h} - \frac{h^*}{2h^2} \right) + C_2.$$

Для определения постоянных h^* и C_2 используем граничные условия (5.2) для давления, которые теперь принимают вид

$$h = h_1, \quad p = p_0, \quad h = h_2, \quad p = p_0. \quad (5.8)$$

При этих условиях

$$h^* = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}, \quad (5.9)$$

$$p = \frac{6\mu U}{m} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right] + p_0. \quad (5.10)$$

Так как

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 &> 2h_1h_2, \\ (h_1 + h_2)^2 &> 4h_1h_2, \end{aligned}$$

то

$$\frac{h^*}{\frac{(h_1 + h_2)^2}{2}} = \frac{4h_1h_2}{(h_1 + h_2)^2} < 1. \quad (5.11)$$

Следовательно, сечение экстремального давления располагается ближе к сечению наименьшей толщины слоя.

Для силы вязкости на движущейся плоскости из (5.3) будем иметь:

$$(\tau)_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = -\frac{\mu}{h} U - \frac{1}{2} h \frac{dp}{dx}.$$

Подставляя в это выражение значение $\frac{dp}{dx}$, получим:

$$(\tau)_0 = -\frac{\mu U}{h} \left(4 - \frac{3h^*}{h} \right). \quad (5.12)$$

Подсчитаем теперь результирующее давление P и результирующую силу вязкости на ту часть движущейся плоскости, которая находится непосредственно под пластинкой. Для этого левые и правые части (5.10) и (5.12) умножим на

$$dx = -\frac{dh}{m}$$

и проинтегрируем от h_1 до h_2 . В результате получим:

$$P = -\frac{1}{m} \int_{h_1}^{h_2} (p - p_0) dh = -\frac{6\mu U}{m^2} \left(\ln \frac{h_2}{h_1} - 2 \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \right),$$

$$F = -\frac{1}{m} \int_{h_1}^{h_2} (\tau)_0 dh = \frac{2\mu U}{m} \left(2 \ln \frac{h_2}{h_1} - 3 \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \right).$$

Обозначая

$$\frac{h_1}{h_2} = k$$

и учитывая значение m из (5.1), получим следующие формулы для результирующего давления и результирующей силы трения:

$$P = \frac{6\mu U a^2}{h_2^2 (k-1)^2} \left(\ln k - 2 \frac{k-1}{k+1} \right), \quad (5.13)$$

$$F = -\frac{2\mu U a}{h_2 (k-1)} \left(2 \ln k - 3 \frac{k-1}{k+1} \right). \quad (5.14)$$

Отношение модуля результирующей силы трения к модулю результирующего давления будет равно

$$\frac{|F|}{|P|} = \frac{\left| 2 \ln k - 3 \frac{k-1}{k+1} \right| (k-1) \frac{h_2}{a}}{\left| \ln k - 2 \frac{k-1}{k+1} \right|}. \quad (5.15)$$

Если предполагать, что наименьшая толщина слоя h_2 будет весьма малой величиной в сравнении с продольной протяжённостью a слоя, то на основании (5.15) можно заключить, что результирующее давление намного будет превосходить результирующую силу трения от смазки. Таким образом, *основной эффект смазки при переменной толщине слоя заключается в образовании поддерживающей силы, которая по порядку своей величины больше результирующей силы трения.*

Безразмерный коэффициент в выражении (5.13) для поддерживающей силы зависит от отношения наибольшей толщины слоя к наименьшей. Этот коэффициент обращается в нуль при $k = 1$ и $k = \infty$, следовательно, внутри этого интервала коэффициент поддерживающей силы будет иметь экстремальное значение. Беря производную от этого коэффициента и приравнявая её нулю, получим трансцендентное уравнение

$$k^3 + 5k^2 - 5k - 1 - 2k(k+1)^2 \ln k = 0.$$

Приблизительное значение действительного и положительного следующего после единицы корня этого уравнения равно

$$k = 2,2.$$

При этом значении коэффициента k формулы (5.13), (5.14) и (5.15) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} P = 0,16 \frac{\mu U a^2}{h_2^2}, \quad F = -0,75 \frac{\mu U a}{h_2}, \\ \frac{|F|}{P} = 4,7 \frac{h_2}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Для определения точки приложения вектора результирующего давления подсчитаем момент сил давлений относительно начала координат. Умножая левую и правую части (5.10) на

$$x dx = \frac{h_1 - h}{m} \left(-\frac{dh}{m} \right)$$

и проводя интегрирование, получим:

$$L = \frac{h_1}{m} P + \frac{6\mu U h_2}{m^3} \left[\frac{1}{2} (1 - k) + \frac{k}{k+1} \ln k \right].$$

Следовательно, для координаты \bar{x} центра давления будем иметь следующую формулу:

$$\bar{x} = \frac{L}{P} = \frac{1}{2} a \left[\frac{2k}{k-1} - \frac{k^2 - 1 - 2k \ln k}{(k^2 - 1) \ln k - 2(k-1)^2} \right]. \quad (5.17)$$

При подстановке значения $k = 2,2$ получим:

$$\bar{x} = 0,57a.$$

Таким образом, точка приложения экстремального результирующего давления располагается вблизи середины рассматриваемого слоя несколько ближе к его узкой части.

На основании (5.3) распределение основной компоненты скорости u по отдельным сечениям слоя будет примерно представляться так, как показано на рис. 55. Отсюда заключаем, что благодаря

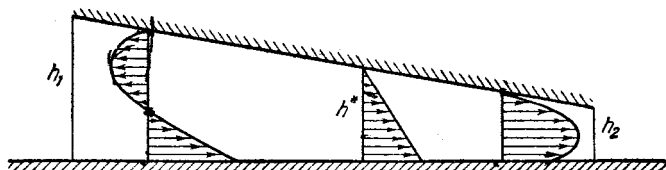


Рис. 55.

наклону верхней пластинки примыкающая к ней смазка в точках, расположенных слева от сечения с экстремальным давлением, отжимается в сторону, обратную движению нижней плоскости. Это обстоятельство будет уменьшать до некоторой степени возможность разрыва смазочного слоя, возможность оголения движущейся плоскости от смазки. Таким образом, *второй основной эффект смазки при переменной толщине слоя заключается в создании предпосылок к непрерывности смазки движущейся поверхности.*

Заметим, что если движение плоскости будет происходить не в сторону узкой части слоя, а в сторону его широкой части, то во всех формулах, содержащих множитель U , необходимо его знак изменить на обратный. В результате такого движения будет развиваться не поддерживающая сила, стремящаяся удалить пластину от плоскости, а обратная сила, стремящаяся пластинку прижать к плоскости.

Полученные выше результаты могут быть использованы для качественного объяснения основного эффекта смазки при вращении шипа в подшипнике. Пусть нагрузка на горизонтальный вал, вращающийся в подшипниках, направлена по вертикали. До вращения вала его шип будет касаться поверхности вкладыша подшипника

в нижней точке (рис. 56, а). Посмотрим, что будет происходить в первые моменты вращения шипа. Область между поверхностями шипа и подшипника разделим на две равные части I и II. В первой части движение поверхности шипа будет происходить в сторону широкой части слоя, поэтому результирующее давление P_I на шип будет направлено от шипа к подшипнику. Во второй части, наоборот, результирующая сила давления будет направлена от подшип-

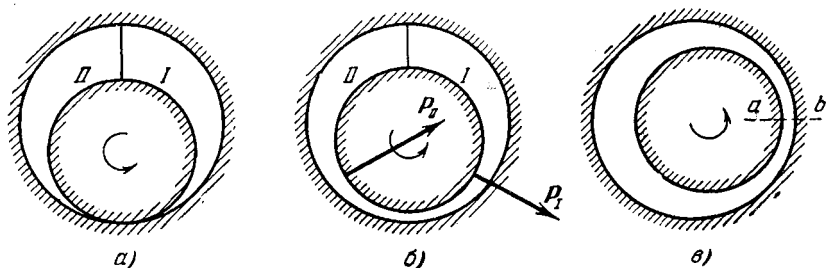


Рис. 56.

ника к шипу (рис. 56, б). Так как обе эти силы не уравновесятся нагрузкой, то шип под действием их будет смещаться вправо. Это смещение будет происходить до тех пор, пока направление результирующего давления на шип не будет противоположным направлению вектора внешней нагрузки. Такое уравновешивание внешней нагрузки результирующим давлением может произойти тогда, когда линия (ab) наименьшего зазора между поверхностями шипа и подшипника станет приблизительно горизонтальной (рис. 56, в). Таким образом, при установившемся движении шипа в подшипнике линия наименьшего зазора между ними смещается в сторону вращения шипа и располагается приблизительно перпендикулярно к направлению вектора внешней нагрузки на шип.

§ 6. Теория Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина¹⁾

В предшествующих параграфах была развита гидродинамическая теория смазки на основе тех уравнений, которые могут быть получены из общих уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости с помощью отбрасывания: 1) всех инерционных членов и 2) некоторых слагаемых, обусловленных вязкостью. Гидродинамическая теория трения в подшипниках с учётом всех слагаемых от вязкости и при отбрасывании всех инерционных членов, т. е. на основе бигармонического уравнения для функции тока, была подробно развита

¹⁾ Жуковский Н. Е. и Чаплыгин С. А., О трении смазочного слоя между шипом и подшипником (Н. Е. Жуковский, Собр. соч., т. III, 1949).

в работе Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, изложение которой мы и даём ниже.

Рассмотрим вращение шипа в подшипнике при следующих предположениях:

- 1) вся область между поверхностями шипа и подшипника заполнена смазкой,
- 2) оси шипа и подшипника параллельны,
- 3) движение частиц несжимаемой смазки с постоянным коэффициентом вязкости является плоско-параллельным и установившимся,
- 4) квадратичные члены инерции не учитываются.

При этих предположениях задача сводится к решению бигармонического уравнения для функции тока

$$\Delta\Delta\psi = 0. \quad (6.1)$$

Вводим биполярные координаты (рис. 57)

$$x + iy = a i \operatorname{ctg} \frac{\xi + i\eta}{2}. \quad (6.2)$$

Отделяя действительную и мнимую части в (6.2), получим:

$$x = a \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad y = a \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \quad (6.3)$$

Исключая из уравнений (6.3) переменное ξ , получим:

$$x^2 + y^2 - 2ax \operatorname{cth} \eta + a^2 = 0. \quad (6.4)$$

Полагая в левой части

$$\eta = \operatorname{const},$$

получим окружности с радиусами

$$r = \pm \frac{a}{\operatorname{ch} \eta} \quad (6.5)$$

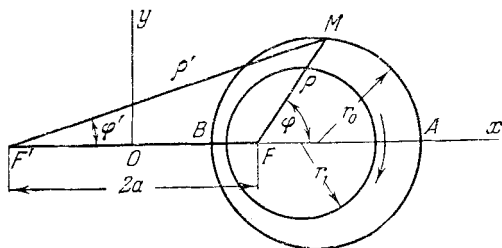


Рис. 57.

и с центрами, расположенными на оси Ox на расстояниях

$$l = a \operatorname{cth} \eta. \quad (6.6)$$

Обозначим через r_1 и r_0 радиусы шипа и подшипника и через η_1 и η_2 соответствующие окружностям шипа и подшипника значения параметра η (рис. 57). Кроме того, положим:

$$\left. \begin{aligned} r_0 - r_1 &= \delta, \\ \eta_1 - \eta_0 &= \sigma, \\ \frac{\delta}{r_1} &= k. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

На основании (6.5) и (6.7) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} a &= r_1 \operatorname{sh} \eta_1, \\ \delta &= \frac{r_1}{\operatorname{sh} \eta_0} (\operatorname{sh} \eta_1 - \operatorname{sh} \eta_0), \\ \operatorname{sh} \eta_1 &= (1+k) \operatorname{sh} \eta_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Используя обозначение σ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} (\eta_0 + \sigma) &= (1+k) \operatorname{sh} \eta_0, \\ \operatorname{sh} (\eta_0 - \sigma) &= \frac{\operatorname{sh} \eta_1}{1+k}, \\ \operatorname{cth} \eta_0 &= \frac{1+k - \operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh} \sigma}, \\ \operatorname{cth} \eta_1 &= \frac{(1+k) \operatorname{ch} \sigma - 1}{(1+k) \operatorname{sh} \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

На основании предпоследнего равенства (6.9) можно установить, что параметр σ изменяется от 0 до $\ln(1+k)$.

Обозначая через e эксцентриситет шипа и подшипника и через α отношение $\frac{e}{\delta}$, получим из (6.6), (6.7), (6.8) и (6.9):

$$\left. \begin{aligned} e &= r_1 \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh} \eta_0}, \\ \alpha &= \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh} \eta_1 - \operatorname{sh} \eta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Полагая

$$\frac{1}{H^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

получим из (6.3):

$$H = \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi). \quad (6.11)$$

Тогда компоненты вектора скорости, параллельные касательным к координатным линиям ξ и η , через функцию тока будут представляться в виде

$$v_{\eta} = H \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad v_{\xi} = -H \frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Граничные условия прилипания и задания значений функций тока на границах будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \eta = \eta_0 \quad \psi &= 0, \quad H \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \\ \text{при } \eta = \eta_1 \quad \psi &= -Q, \quad H \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -U, \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

где Q — секундный расход, а U — скорость точек окружности шипа при его вращении по часовой стрелке.

Так как оператор Лапласа от функции тока ψ записывается в виде

$$\Delta\psi = H^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \right) = \frac{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \right),$$

то бигармоническое уравнение (6.1) сводится к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \left[\frac{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \right) \right] = 0. \quad (6.13)$$

Проверкой можно убедиться, что частными решениями уравнения (6.13) будут следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{x}{a} &= \frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ 2) \quad \eta, \\ 3) \quad \frac{x^2 + y^2}{2a^2} + \frac{1}{2} &= \frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ 4) \quad \frac{x^2 + y^2}{2a^2} - \frac{1}{2} &= \frac{\cos\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ 5) \quad \frac{x\eta}{a} &= \frac{\eta \operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ 6) \quad \frac{2x \cos\xi \operatorname{ch}\eta}{a} &= \frac{\operatorname{sh}2\eta \cos\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ 7) \quad \frac{x^2 + y^2}{2a^2} - \frac{1}{2} + \frac{2x \cos\xi \operatorname{sh}\eta}{a} &= \frac{\operatorname{ch}2\eta \cos\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Сумму частных решений, умноженных на произвольные постоянные, можно представить в виде

$$\psi = D(\tau_1 - \tau_{10}) + \frac{1}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi} \times \\ \times \{A \operatorname{sh}(\tau_1 - \tau_{10}) + B(\tau_1 - \tau_{10}) \operatorname{sh}\eta + C \cos\xi [\operatorname{sh}(\tau - 2\eta) - \operatorname{sh}\sigma]\} \quad (6.5)$$

или

$$\psi = \frac{M}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi} + N, \quad (6.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= A \operatorname{sh}(\tau_1 - \tau_{10}) + B(\tau_1 - \tau_{10}) \operatorname{sh}\eta + C \operatorname{ch}\eta [\operatorname{sh}(\tau - 2\eta) - \operatorname{sh}\sigma], \\ N &= D(\tau_1 - \tau_{10}) - C [\operatorname{sh}(\tau - 2\eta) - \operatorname{sh}\sigma], \\ \tau &= \tau_{10} + \tau_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Введённые функции M и N обращаются в нуль при $\eta = \eta_0$, поэтому для удовлетворения граничных условий (6.12) достаточно потребо-

вать выполнения следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_0} &= 0, & \left(\frac{\partial N}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_0} &= 0, \\ (M)_{\tau_1} &= 0, & (N)_{\tau_1} &= -Q, \\ \left(\frac{\partial M}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_1} &= -aU, & \left(\frac{\partial N}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Подставляя в (6.18) значения M и N из (6.17), получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} D + 2C \operatorname{ch} \sigma &= 0, \\ D\tau + 2C \operatorname{sh} \sigma + Q &= 0, \\ A + B \operatorname{sh} \tau_{10} - 2C \operatorname{ch} \tau_{10} \operatorname{ch} \sigma &= 0, \\ A \operatorname{sh} \sigma + B\tau \operatorname{sh} \tau_{11} - 2C \operatorname{ch} \tau_{11} \operatorname{sh} \sigma &= 0, \\ A \operatorname{ch} \sigma + B(\operatorname{sh} \tau_{11} + \sigma \operatorname{ch} \tau_{11}) - 2C \operatorname{ch}(\tau_{11} + \sigma) &= -aU. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Решая эти уравнения и используя обозначения (6.7), мы получим значения для постоянных B , C и расхода Q

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{Ur_1(1+k) \operatorname{sh} \sigma}{\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma}, \\ 2C &= \frac{Ur_1(1+k) [\sigma(1+k) - \operatorname{sh} \sigma]}{\operatorname{sh} \sigma [\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma]}, \\ Q &= 2C(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) = \frac{Ur_1(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) [\sigma(1+k) - \operatorname{sh} \sigma] (1+k)}{[\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma] \operatorname{sh} \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Так как давление и оператор Лапласа от функции тока будут связаны соотношениями Коши—Римана

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= -\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

то, используя (6.15), получим:

$$\left. \begin{aligned} a^2 \Delta\psi &= 2B \operatorname{ch}^2 \tau_{10} - 2C(\operatorname{sh} \sigma + \operatorname{sh} 2\tau_{10} \operatorname{ch} \sigma) - 2B \cos \xi \operatorname{ch} \tau_1 + \\ &\quad + 4C \cos \xi \operatorname{sh}(\tau - \tau_1) - 2C \cos 2\xi \operatorname{sh}(\tau - 2\tau_1), \\ a^2 \frac{p}{\mu} &= -2B \sin \xi \operatorname{sh} \tau_1 - 4C \sin \xi \operatorname{ch}(\tau - \tau_1) + 2C \sin 2\xi \operatorname{ch}(\tau - 2\tau_1). \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Умножая первое равенство (6.21) на i и складывая со вторым, получим:

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{p}{\mu} + i \Delta\psi \right) &= 2B i \operatorname{ch}^2 \tau_{10} - 2C i (\operatorname{sh} \sigma + \operatorname{sh} 2\tau_{10} \operatorname{ch} \sigma) - \\ &\quad - 2B i \cos(\xi + i\tau) - 4C \sin(\xi + i\tau - i\tau) + 2C \sin(2\xi + 2i\tau_1 - i\tau). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Правую часть полученного равенства (6.22) выразим через комплексное переменное z основной плоскости, т. е. воспользуемся формулой преобразования (6.2). На основании этой формулы будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\xi + i\eta}{2} &= -t \frac{z}{a}, \\ \cos(\xi + i\eta) &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\xi + i\eta}{2} - 1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\xi + i\eta}{2} + 1} = \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2}, \\ \sin(\xi + i\eta) &= \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\xi + i\eta}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\xi + i\eta}{2} + 1} = \frac{2iza}{z^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Используя эти равенства и проводя преобразования в правой части (6.22), получим:

$$\begin{aligned} p + i\mu \Delta\psi &= 4\mu i \Phi'(z) = \frac{\mu}{a^2} \left\{ 2Bi \operatorname{ch}^2 \eta_0 - 2Ci (\operatorname{sh} \sigma + \operatorname{sh} 2\eta_0 \operatorname{ch} \sigma) - \right. \\ &\left. - 2Bi \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} + 16Cia^3 \operatorname{ch} \tau \frac{z}{(z^2 - a^2)^2} + 2Ci \operatorname{sh} \tau \left[1 - 4a^2 \frac{z^2 + a^2}{(z^2 - a^2)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

На основании формулы (5.13) главы V результирующий вектор воздействия вязкой несжимаемой жидкости на круглый цилиндр представляется через вычеты функции $\Phi'(z)$. Внутри контура окружности шипа содержится лишь один полюс правой части (6.23) второго порядка в точке $z = a$. Вычисляя этот вычет с помощью умножения левой и правой частей на $(z - a)^2$, однократного дифференцирования правой части и устремления z к a , получим для вектора результирующего воздействия следующее выражение:

$$R_x + iR_y = -4\mu \int_{\gamma} \Phi'(z) dz = \frac{\mu i}{a^2} (-2Bta) 2\pi i = \frac{4\pi\mu B}{a} i.$$

Таким образом, результирующее давление на шип будет направлено по оси y , т. е. перпендикулярно к линии наименьшего зазора, и будет представляться после замены B и a следующей формулой:

$$R_y = \frac{4\pi\mu U \sqrt{(1+k)^2 + 1} - 2(1+k) \operatorname{ch} \sigma}{\sigma [(1+k)^2 + 1] - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma}. \quad (6.24)$$

После проведения соответственных вычислений можно получить формулу для момента действия смазочного слоя относительно оси шипа

$$L = -4\pi\mu r_1 U \frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{cth} \sigma - 2(1+k) \operatorname{ch} \sigma + 1}{\sigma [(1+k)^2 + 1] - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma}. \quad (6.25)$$

Равенства (6.24) и (6.25) позволяют определить результирующую силу и результирующий момент действия смазочного слоя на шип, если, помимо коэффициента вязкости, окружной скорости и радиусов шипа и подшипника, будет задано значение параметра σ или значение эксцентриситета e , определяемого через σ по первой формуле (6.10). В реальных условиях, конечно, будет задаваться на эксцентриситет шипа и подшипника, а величина нагрузки на вал, вращающийся в подшипниках. Поэтому значение параметра σ должно определяться по формуле (6.24) при заданном значении левой части.

Обозначая максимальное предельное значение параметра σ через σ_0 , т. е.

$$\sigma_0 = \ln(1 + k),$$

и считая величину k — отношение средней величины зазора к радиусу шипа — весьма малой, можно после ряда преобразований получить следующие приближенные формулы для результирующей силы и результирующего момента:

$$\left. \begin{aligned} P &= 12\mu U \frac{r_1^2}{\delta^2} \frac{\alpha}{(2 + \alpha^2) \sqrt{1 - \alpha^2}}, \\ L &= -4\pi\mu U \frac{r_1^3}{\delta} \frac{1 + 2\alpha^2}{(2 + \alpha^2) \sqrt{1 - \alpha^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

где α — параметр Зоммерфельда, определяемый в общем случае по формуле (6.10), а при малых значениях k — по формуле

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \tau_0}. \quad (6.27)$$

Случай Н. П. Петрова, рассмотренный в § 1, мы получим, если положим параметр α равным нулю, тогда

$$\left. \begin{aligned} P &= 0, \\ L &= -2\pi\mu U \frac{r_1^3}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Правая часть формулы (6.28) совпадает с правой частью формулы (1.8), если полагать в последней коэффициенты внешнего трения бесконечно большими.

§ 7. Качение цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого вещества

Допустим, что круглый цилиндр длины l , радиуса R и веса q совершает чистое качение по горизонтальной плоскости, покрытой слоем вязкого вещества с коэффициентом вязкости μ (рис. 58). Выясним зависимость необходимой силы тяги Q от указанных параметров цилиндра, а также от толщины слоя H , коэффициента вязкости μ и угловой скорости ω ,

Применим к той части слоя $ABCD$, которая в рассматриваемый момент t будет находиться непосредственно под цилиндром, приближённые уравнения (2.16)

Рейнольдса

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (7.1)$$

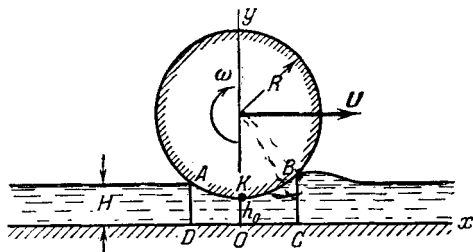


Рис. 58.

Толщину слоя в начале координат, расположенном на одной вертикали с мгновенным центром качения K , обозначим через h_0 , а толщину на расстоянии x от начала — через h . Эта толщина слоя как функция x будет представляться в виде

$$h = h_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (7.2)$$

Обозначим абсциссы крайних точек слоя A и B через $-a$ и b . Тогда обычные граничные условия прилипания и постоянства давления на краях слоя представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \quad u &= 0, & v &= 0, \\ \text{при } y=h \quad u &= \omega(h-h_0), & v &= -\omega x, \\ \text{при } x=-a \quad p &= 0, \\ \text{при } x=b \quad p &= 0. \end{aligned} \right\} (7.3)$$

Решая первое уравнение (7.1) и используя граничные условия (7.3) для u , получим:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \omega y \left(1 - \frac{h_0}{h}\right). \quad (7.4)$$

Подставляя значение u из (7.4) в уравнение неразрывности (7.1) и учитывая граничные условия (7.3) для v , найдём:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\omega\mu}{h^3} (x^2 - h_0 h + C). \quad (7.5)$$

Выражение в скобках в правой части (7.5) может обратиться в нуль при двух значениях x . Следовательно, в рассматриваемом нами слое давление может иметь два экстремальных значения, из которых одно будет минимальным, а второе — максимальным. А так как на краях слоя давление равно нулю, то наличие минимума давления в слое будет означать наличие отрицательных давлений внутри слоя. Избежать отрицательных давлений внутри слоя можно, если ввести дополнительное граничное условие, позволяющее точку минимума

авлений отнести на левый край слоя. Это дополнительное граничное условие будет иметь вид:

$$\text{при } x = -a \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.6)$$

довлетворяя условию (7.6) и проводя интегрирование (7.5), получим следующее выражение для давления:

$$p = 6\mu\omega \int_{-a}^x \left[1 - \frac{h_0}{\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \right] \frac{a^2 - x^2}{h^3} dx. \quad (7.7)$$

Проекции вектора результирующего давления слоя на цилиндр и абсцисса точки его приложения x_s будут определяться формулами

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -l \int_{-a}^b \frac{px dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \\ P_y &= l \int_{-a}^b p dx, \\ x_s &= \frac{P_x R}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

касательная составляющая вектора напряжения на площадке, направляющие косинусы нормали которой $-l$ и m , будет представляться в виде

$$p_{nr} = p_{nx}m - p_{ny}l = (p_{xx} - p_{yy})lm + p_{xy}(m^2 - l^2).$$

рассматриваемом нами случае имеем:

$$l = \frac{x}{R}, \quad m = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R};$$

$$lm \approx \frac{x}{R}, \quad m^2 - l^2 = 1 - \frac{2x^2}{R^2};$$

$$p_{xx} - p_{yy} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 4\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Следовательно, сила вязкости на поверхности цилиндра будет представляться в виде

$$(p_{nr})_h = \mu \left[4 \frac{x}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(1 - \frac{2x^2}{R^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_h. \quad (7.9)$$

так как

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{hy^2}{2} \right) - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dh}{dx} y^2 + \frac{\omega h_0 y^2}{2h^2} \frac{dh}{dx},$$

то, подставляя это выражение и значение u из (7.4) в (7.9) и пренебрегая выражениями, содержащими множители $\frac{a^2}{R^2}$, $\frac{a^3}{R^3}$ и т. д., получим для результирующей силы от касательных напряжений следующее приближённое выражение:

$$F_x = l \int_{-a}^b (p_{nr})_h dx \approx -3\mu\omega l \int_{-a}^b \left[\frac{a^2 - x^2}{h^2} \left(1 - \frac{h_0}{2R} + \frac{x^2}{R^2} \right) - \frac{h_0}{3h} \right] dx. \quad (7.10)$$

Для момента сил трения относительно оси цилиндра приближённо будем иметь:

$$L = -RF_x. \quad (7.11)$$

Полученные формулы (7.8), (7.10) и (7.11) содержат три заранее неизвестных параметра: a , b и h_0 . Для их определения воспользуемся: а) вторым условием (7.3) для давления, б) условием равновесия силы веса цилиндра с результирующей силой от давления слоя и в) предположением о том, что слой в его левой точке наименее всего деформирован и поэтому толщину слоя здесь можно приравнять начальной толщине H всего слоя на плоскости. Эти три условия могут быть представлены следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} p(b) = 0, \quad P_y = q, \\ H = h_0 + R - \sqrt{R^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Исходя из уравнения равновесия сил в проекциях на ось x , получим неравенство для необходимой силы тяги

$$Q \geq -(P_x + F_x). \quad (7.13)$$

Будем предполагать отношение $\frac{x}{R}$ настолько малым, что в выражениях, входящих под знак интегралов, можно будет положить:

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \approx R.$$

При таком предположении давление из (7.7) будет представляться формулой

$$p = \frac{2\mu\omega}{H^3} (2a^3 + 3ax - x^3). \quad (7.14)$$

Первое из условий (7.12) приводит к уравнению

$$b^3 - 3a^2b - 2a^3 = 0,$$

единственным положительным корнем которого будет;

$$b = 2a, \quad (7.15)$$

Подставляя значения p из (7.14) и b из (7.15) в (7.8) и (7.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -10,8 \frac{\mu \omega l a^5}{R H^3}, & P_y &= 13,5 \frac{\mu \omega l a^4}{H^3}, \\ F_x &= 3\mu \omega l a \left(1 + 3,6 \frac{a^4}{R^2 H^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Входящая в выражения (7.16) неизвестная величина a должна определяться из второго условия (7.12), т. е. из уравнения

$$q = 13,5 \frac{\mu \omega l a^4}{H^3}. \quad (7.17)$$

Если в неравенстве (7.13) мы отбросим результирующую силу трения F_x и подставим значение P_x из (7.16) и значение a из (7.17), то получим:

$$Q \geq 0,417 \left(\frac{H^3 q}{\mu \omega l} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{q}{R}. \quad (7.18)$$

В последнем неравенстве коэффициент при $\frac{q}{R}$ может рассматриваться как коэффициент трения качения. Величина этого коэффициента, как это видно из (7.18), *убывает* с уменьшением толщины слоя H и веса единицы длины катка $\frac{q}{l}$ и с увеличением μ и ω , причём зависимость от последних трёх параметров значительно слабее, чем от толщины слоя H . В частности, при $\mu = \infty$ (абсолютно твёрдый слой) коэффициент трения качения будет равен нулю.

Аналогично будет решаться задача и в том случае, когда цилиндр будет совершать не чистое качение, а чистое скольжение по вязкому слою. В этом случае надо лишь изменить вторые граничные условия (7.3) на верхней границе рассматриваемого слоя.

Рассмотренная задача характерна тем, что в ней используется дополнительное граничное условие для давления и продольная протяжённость слоя считается неизвестной.

§ 8. Элементарная гидродинамическая аналогия прокатки

При прокатке раскалённого металла происходят явления течения, которые в некотором отношении будут аналогичны явлениям течения очень вязкой жидкости. На эту аналогию впервые обратил внимание И. В. Мещерский¹⁾. Приближённое решение соответственной гидродинамической задачи было дано в монографии С. М. Тарга²⁾. Это

¹⁾ Мещерский И. В., Гидродинамическая аналогия прокатки, Известия Первого петрогр. политехн. ин-та, т. XXVIII, 1919.

²⁾ Тарг С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостехиздат, 1951.

решение строится с помощью приближённых уравнений Рейнольдса для слоя.

Пусть два цилиндрических валка равных радиусов R вращаются в разные стороны с постоянной угловой скоростью ω . Между поверхностями этих валков располагается прокатываемая полоса, имеющая до прокатки толщину $2H_0$, а после прокатки $2H_1$ (рис. 59). Переменная толщина $2h$ полосы между валками будет представляться уравнением

$$h = R + H_1 - \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (8.1)$$

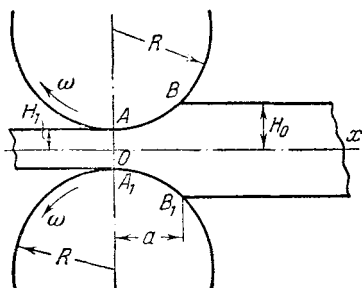


Рис. 59.

В силу наличия симметрии относительно оси x будем рассматривать только верхнюю половину слоя. Обозначая через a длину слоя под валками и принимая условие прилипания частиц металла к поверхностям валков, будем иметь граничные условия в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \\ \text{при } y = h \quad u = -\omega(R + H_1 - h), \quad v = -\omega x, \\ \text{при } x = 0 \quad p = 0, \\ \text{при } x = a \quad p = 0. \end{array} \right\} \quad (8.2)$$

Решая первое уравнение (7.1) и удовлетворяя граничным условиям (8.2) для u , получим:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) - \omega(R + H_1 - h). \quad (8.3)$$

Из уравнения неразрывности, учитывая граничные условия (8.2) для v , будем иметь:

$$\omega x = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \omega(R + H_1 - h) \frac{dh}{dx},$$

откуда

$$2 \int_0^h u dy - \omega[h^2 - 2(R + H_1)h + x^2] = \text{const.}$$

Если в последнее равенство подставить u из (8.3) и использовать граничные условия (8.2) для давления, то найдём:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 3\mu\omega \int_0^x [h^2 - (R + H_1)h + C] \frac{dx}{h^3}, \\ p(a) = 0. \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

Полагая

$$H_0 - h \ll R, \\ m = \frac{dh}{dx} \approx \frac{H_0 - H}{a},$$

получим из (8.4) следующие приближённые равенства:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{3\mu\omega}{m} \left[\ln \frac{h}{H_1} + R + H_1 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H_1} \right) - \frac{C}{2} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{H_1^2} \right) \right], \\ C &= \frac{2H_0H_1}{H_0 + H_1} \left(R + H_1 - \frac{H_0H_1}{H_0 - H_1} \ln \frac{H_0}{H_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Пусть Q — количество вещества, проходящее за единицу времени через сечение AA_1 , Q_1 — количество вещества, которое прошло бы через это сечение за то же время, если бы все частицы двигались со скоростью, равной окружной скорости валков. Тогда опережением при прокатке называется величина k , определяемая следующим отношением:

$$k = \frac{Q - Q_1}{Q_1}. \quad (8.6)$$

В рассматриваемом случае будем иметь:

$$Q = -2 \int_0^{H_1} (u)_{k=0} dy, \quad Q_1 = 2\omega RH_1.$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_0}{H_1} &= \eta, \quad \frac{H_1}{R} = \beta, \\ k_1 &= \frac{\eta - 1 + 2\eta\beta}{\eta + 1} - 2 \frac{\eta^2\beta}{\eta^2 - 1} \ln \eta \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

и подставить значение p из (8.5) и (8.3), то получим:

$$(u)_{x=0} = \omega R \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k_1}{\beta^2} \frac{H_1^2 - y^2}{R^2} \right), \\ Q = 2\omega RH_1 (1 + k_1).$$

Следовательно, опережение будет равно параметру k_1 , представляемому последней формулой (8.7).

Раскладывая $\ln \eta$ в ряд и ограничиваясь в разложении первыми тремя членами, получим для опережения приближённую формулу

$$k = \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \left[1 - 2\beta\eta \left(1 - \frac{5}{6} \eta + \frac{1}{3} \eta^2 \right) \right]. \quad (8.8)$$

При прокатке горячего металла при температурах 700—900° опытные значения опережения при $\beta = 0,225$ лежат в пределах

$$\eta = 1,1, \quad k = 2-3\%; \quad \eta = 1,2, \quad k = 4-6\%.$$

На основании же формулы (9.8) получаются следующие результаты:

$$\eta = 1,1, \quad k = 3,5\%_0; \quad \eta = 1,2, \quad k = 6,5\%_0.$$

Таким образом, формула (8.8) даёт несколько завышенные результаты, но по своему порядку эти результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными.

Характер распределения давлений, даваемый формулой (8.5), также удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

На основании этих результатов сравнения теории и опыта можно прийти к тому заключению, что в ряде случаев обработки горячего металла давлением можно для решения отдельных вопросов пользоваться аналогией с соответственной задачей течения очень вязкой жидкости.

§ 9. Обобщённые уравнения Рейнольдса для слоя

В § 2 было указано на то, что приближённые уравнения Рейнольдса для смазочного слоя совершенно не учитывают квадратичных членов инерции и частично учитывают слагаемые от вязкости. Благодаря этим двум допущениям оказалось возможным сравнительно просто решать такие отдельные конкретные задачи, которые были рассмотрены в §§ 4, 5, 7 и 8.

Естественно поставить вопрос, нельзя ли приближённо учесть часть квадратичных членов инерции, но так, чтобы при этом сохранилась та простота решения отдельных задач, которая имеет место при использовании самих уравнений Рейнольдса. Оказывается, что это можно сделать, если вместо проекции действительного ускорения на ось x ввести его осреднённое по толщине слоя значение.

Для плоско-параллельного установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости без учёта массовых сил основное уравнение в проекции на ось x представляется в виде

$$W_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (9.1)$$

где W_x — проекция вектора ускорения на ось x , равная

$$W_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (9.2)$$

Умножая левую и правую части (9.2) на $\frac{1}{h} dy$ и интегрируя по толщине слоя, получим выражение для среднего ускорения в рассматриваемом сечении слоя

$$W_{cp} = \frac{1}{h} \int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy. \quad (9.3)$$

Вместо истинного ускорения W_{ω} в левой части (9.1) подставим его осреднённое по толщине слоя значение и затем проведём те упрощения, которые были проведены при выводе уравнений (2.16) Рейнольдса, тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\nu} W_{\text{ср}}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ W_{\text{ср}} &= \frac{1}{h} \int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Уравнения (9.4), приближённо учитывающие квадратичные члены инерции, естественно назвать *обобщёнными уравнениями Рейнольдса для слоя*. Так как правая часть первого уравнения (9.4) не будет зависеть от переменного y , то интегрирование этой системы уравнений будет проводиться так же просто и в том же порядке, в котором проводилось интегрирование основных уравнений Рейнольдса в §§ 3 и 4. Проводя интегрирование по переменному y в первом и третьем уравнениях (9.4), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\nu} W_{\text{ср}} \right) y^2 + C_1 y + C_2, \\ v &= - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy + C_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Подставляя найденные значения u и v в четвёртое уравнение (9.4), можно получить выражение для среднего ускорения, а используя граничное условие для скорости v , можно получить соответственное уравнение для давления. Правую часть выражения (9.4) для среднего ускорения можно представить в другой форме, если учесть равенства

$$\begin{aligned} \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{u^2}{2} dy - \frac{1}{2} (u^2)_h \frac{dh}{dx}, \\ \int_0^h v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= vu \Big|_0^h - \int_0^h u \frac{\partial v}{\partial y} dy = vu \Big|_0^h + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy, \\ (v)_h &= - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + C_3 = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + (u)_h \frac{dh}{dx} + C_3. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее по толщине слоя ускорение будет иметь вид

$$W_{\text{cp}} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy - (u)_h \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + C_3 (u)_h - (vu)_0 \right], \quad (9.6)$$

где через $(u)_h$ и $(vu)_0$ обозначены значения величин, заключённых в скобки, на верхней границе слоя (h) и на нижней (0).

В качестве примера использования уравнений (9.4) рассмотрим задачу о сдвливании слоя вязкого вещества параллельными пластинками (рис. 60) при следующих условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=0, \quad v=0, \\ \text{при } y=h \quad u=0, \quad v=-V_2, \\ \text{при } x=0 \quad p=0, \\ \text{при } x=l \quad p=0. \end{array} \right\} \quad (9.7)$$

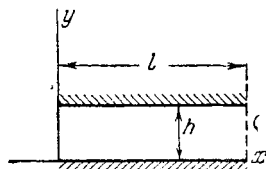


Рис. 60.

Используя граничные условия (9.7), получим выражения для скоростей

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{2} A (y^2 - yh), \\ v = -\frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2} \right), \end{array} \right\} \quad (9.8)$$

где

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\nu} W_{\text{cp}}. \quad (9.9)$$

Второе граничное условие для v даёт уравнение

$$-V_2 = \frac{h^3}{12} \frac{dA}{dx}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{12}{h^3} V_2 (C_4 - x), \quad (9.10)$$

где C_4 — произвольная постоянная.

Подставляя значение u из (9.8) в правую часть (9.6) и учитывая граничные условия (9.7), получим выражение для среднего ускорения

$$W_{\text{cp}} = \frac{1}{60} h^4 A \frac{dA}{dx} = -\frac{h}{5} A V_2. \quad (9.11)$$

Если в выражение (9.9) подставить значение W_{cp} из (9.11) и значение A из (9.10) и провести интегрирование, то найдём:

$$p = \frac{12V_2}{h^3} \left(\mu + \frac{\rho h}{5} V_2 \right) \left(C_4 x - \frac{x^2}{2} + C_5 \right).$$

Входящие в это выражение C_4 и C_5 должны быть определены из условий (9.7) для давления.

Таким образом, распределение давления в слое между пластинками будет определяться следующей формулой:

$$p = \frac{6V_2}{h^3} \left(\mu + \frac{\rho h V_2}{5} \right) (l - x) x. \quad (9.12)$$

Полученное решение (9.12) будет отличаться от решения обычных уравнений Рейнольдса дополнительным слагаемым

$$\frac{6V_2^2 \rho}{5h^2} (l - x) x,$$

которое не зависит от вязкости и пропорционально квадрату скорости поджатия слоя.

Умножая обе части равенства (9.12) на dx и интегрируя по переменному x от нуля до l , получим следующую формулу для сопротивления сжатию вязкого слоя прямолинейной пластинкой ширины H :

$$P = H \int_0^l p dx = \mu V_2 H \frac{l^3}{h^3} + \frac{1}{5} \rho V_2^2 H \frac{l^3}{h^2}. \quad (9.13)$$

Отношение второго слагаемого в правой части (9.13) к первому будет выражаться через число Рейнольдса слоя таким образом:

$$\frac{V_2 h \rho}{5\mu} = \frac{1}{5} R. \quad (9.14)$$

Следовательно, если число Рейнольдса слоя будет иметь порядок единицы и более, то пренебрегать вторым слагаемым в формуле (9.13) уже нельзя.

ГЛАВА VII

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА. МЕТОД ОЗЕЕНА

§ 1. Обобщённые уравнения Стокса

Векторное дифференциальное уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V dx^*}{\partial x \frac{dt}} + \frac{\partial V dy^*}{\partial y \frac{dt}} + \frac{\partial V dz^*}{\partial z \frac{dt}} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta V. \quad (1.1)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой индивидуальную производную от вектора скорости фиксированной частицы. До сих пор под координатами x, y, z мы разумели координаты фиксированной точки пространства по отношению к неподвижной системе координат, тогда множители $\frac{dx^*}{dt}, \frac{dy^*}{dt}, \frac{dz^*}{dt}$ представляли собой проекции вектора скорости абсолютного движения фиксированной частицы на оси координат.

Будем теперь под x, y, z разуметь координаты геометрической точки по отношению к подвижной системе координат, имеющей поступательное движение со скоростью U и мгновенное вращение с угловой скоростью Ω (рис. 61). При таком предположении производные $\frac{dx^*}{dt}, \frac{dy^*}{dt}, \frac{dz^*}{dt}$ будут пред-

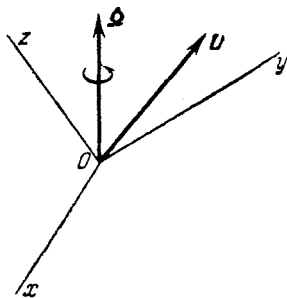


Рис. 61.

ставлять собой проекции на оси координат вектора относительной скорости фиксированной частицы жидкости. Между векторами абсолютной (V), переносной (V_e) и относительной (V_r) скоростей имеется следующая зависимость:

$$V = V_e + V_r,$$

где

$$V_e = U + \Omega \times r = U + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Так как левую часть уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dy^*}{dt} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{dz^*}{dt} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{V}_r \cdot \nabla V,$$

где

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k},$$

то векторное дифференциальное уравнение абсолютного движения вязкой несжимаемой жидкости, отнесённое к подвижной системе координат, будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla V = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta V. \quad (1.2)$$

Если система координат будет иметь только поступательное движение, совпадающее с поступательным движением рассматриваемого тела, то уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{U}) \cdot \nabla V = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta V. \quad (1.3)$$

Предполагая число Рейнольдса малым, мы можем, так же как и в методе Стокса, отбросить квадратичные члены инерции, содержащие переменный вектор скорости \mathbf{V} , т. е. положить:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V \approx 0. \quad (1.4)$$

При этом предположении мы получим из (1.3) уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \mathbf{U} \cdot \nabla V = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta V, \quad (1.5)$$

которое было впервые предложено Озееном и по его предложению названо *векторным обобщённым уравнением Стокса*.

Будем предполагать, что ось поступательно движущейся системы координат прямо противоположна направлению вектора скорости поступательного движения тела. В таком случае при проектировании левой и правой частей уравнения (1.5) на оси координат и при присоединении уравнения несжимаемости мы получим следующую систему обобщённых дифференциальных уравнений Стокса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

К установлению уравнений (1.6) можно подойти и с другой стороны. Вначале обратим движение, т. е. телу и всей жидкости сообщим поступательное движение в направлении, обратном движению тела. Для обращённого движения возьмём, например, первое уравнение (1.1) в проекциях на ось x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u. \quad (1.7)$$

Если бы не было тела, то в обращённом движении все частицы имели бы скорость U . Благодаря наличию тела произойдёт деформация потока, и частицы будут иметь уже другие скорости. Если размеры тела предполагать небольшими, то новая компонента скорости u будет отличаться от прежней U на малую величину, а две другие компоненты скорости будут вообще малы. На этом основании в левой части (1.7) можно в слагаемом $u \frac{\partial u}{\partial x}$ заменить множитель u на U , а остальными слагаемыми пренебречь. Таким способом мы и получим дифференциальные уравнения (1.6).

Сопоставляя дифференциальные уравнения (1.6) с дифференциальным уравнением Стокса (1.4) главы V, мы приходим к заключению, что *обобщённые уравнения Стокса, введённые Озееном, учитывают лишь частично квадратичные члены инерции.*

Если первой ступенью развития приближённых методов использования дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости считать дифференциальные уравнения Стокса, а второй ступенью — дифференциальные уравнения Рейнольдса для слоя, то уравнения (1.6) Озеена следует считать уже третьей ступенью развития приближённых методов решения отдельных задач движения вязкой несжимаемой жидкости.

Свои соображения о целесообразности введения новых уравнений вида (1.6) Озеен построил на основании сравнительной оценки порядка величин отбрасываемых квадратичных членов инерции по отношению к порядку сохраняемых слагаемых от вязкости на примере решения задачи о движении шара. В конце § 7 главы V было указано, что если считать число Рейнольдса меньшим единицы, то и тогда порядок величины отбрасываемых квадратичных членов инерции не может считаться всюду малым по сравнению с порядком величины слагаемых, зависящих от вязкости. В частности, на значительных расстояниях от неподвижного шара порядок величины квадратичных членов инерции будет уже превышать порядок сохраняемых в уравнениях слагаемых, зависящих от вязкости, причём наибольшие порядки величин на бесконечном удалении от шара будут иметь как раз слагаемые $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $u \frac{\partial v}{\partial x}$ и $u \frac{\partial w}{\partial x}$. Следовательно, сохраняя в левых частях уравнений эти слагаемые в приближённой форме, мы тем самым несколько точнее оправдываем возможность отбрасывания остальных квадратичных членов инерции в бесконечно удалённых точках потока.

§ 2. Построение решений обобщённых уравнений Стокса

Для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости без учёта действия массовых сил обобщённые уравнения Стокса (1.6) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ U \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Дифференцируя первое уравнение (2.1) по x , второе — по y , третье — по z , складывая результаты и учитывая уравнение несжимаемости, получим для давления дифференциальное уравнение Лапласа

$$\Delta p = 0. \quad (2.2)$$

Предположим, что вектор скорости \mathbf{V} можно представить в виде суммы потенциального вектора и дополнительного вектора

$$\mathbf{V} = \text{grad } \varphi + \mathbf{V}_2, \quad (2.3)$$

причём потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.4)$$

Подставляя значение u из (2.3) в первое уравнение (2.1), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \right) + U \frac{\partial u_2}{\partial x} = \nu \Delta u_2.$$

Так как потенциал скоростей представляет собой пока произвольную гармоническую функцию, а давление p также является гармонической функцией, то мы можем связать эти две функции, положив

$$p = -\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.5)$$

При этом предположении и при учёте равенств (2.3) и (2.4) дифференциальные уравнения (2.1) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \nu \Delta u_2, \\ U \frac{\partial v_2}{\partial x} &= \nu \Delta v_2, \\ U \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \nu \Delta w_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Введём обозначение

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2k}. \quad (2.7)$$

Попытаемся удовлетворить дифференциальным уравнениям (2.6), полагая

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ w_2 &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Подставляя выражения (2.8) в три последних уравнения (2.6), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{2k} \Delta \chi \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{2k} \Delta \chi \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(u_2 - \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{1}{2k} \Delta \chi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Пусть функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{2k} \Delta \chi = 0. \quad (2.10)$$

При таком предположении первые два уравнения (2.9) будут удовлетворяться тождественно, а из последнего получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u_2 - \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi \right) = 0.$$

Этому уравнению мы удовлетворим тождественно, если положим:

$$u_2 = -\chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (2.11)$$

При таком представлении скорости u_2 первое уравнение (2.6) будет также тождественно удовлетворяться в силу уравнения (2.10).

Таким образом, для некоторых случаев установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости без учёта массовых сил решения обобщённых дифференциальных уравнений Стокса можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= -\chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ p &= -\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа (2.4), а функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.10).

Компоненты вихря на основании (2.12) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

На основании равенств (2.13) мы приходим к тому заключению, что решения в форме (2.12) могут иметь место лишь тогда, когда все вихревые линии располагаются в плоскостях, перпендикулярных к скорости потока на бесконечности. Для плоско-параллельного и осесимметричного движения жидкости как раз такое положение вихрей и имеет место. Следовательно, для этих видов движения вязкой несжимаемой жидкости можно строить решения обобщённых уравнений Стокса (2.1) в форме (2.12).

Условия прилипания частиц жидкости к поверхности S , ограниченной контуром γ неподвижного тела, запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

В силу условий (2.14) компоненты вихря (2.13) на поверхности S будут равны

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_y &= \frac{U}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ 2\omega_z &= -\frac{U}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

В § 4 главы III было показано, что главный вектор сил воздействия вязкой несжимаемой жидкости на неподвижное тело при плоско-параллельном и осесимметричном её движениях представляется в виде

$$R = \int \int_S (-p \mathbf{i}_1 + 2\mu \omega_3 \mathbf{i}_2) dS, \quad (2.16)$$

где \mathbf{i}_1 — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , \mathbf{i}_2 — единичный вектор касательной к поверхности S в плоскости движения частиц жидкости и ω_3 — компонента вихря, перпендикулярная к плоскости движения.

Для плоско-параллельного движения вязкой жидкости будем иметь из (2.15):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv 0; \text{ на } \gamma: \omega_z = \omega_\alpha = -\frac{U\rho}{2\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.17)$$

поэтому, используя выражение (2.5) для давления, получим из (2.16) и (2.17) следующую формулу для главного вектора сил воздействия на плоский неподвижный контур γ :

$$R = \rho U \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} i_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} i_2 \right) ds. \quad (2.18)$$

Для осесимметричного движения жидкости третьей компонентой вихря будет ω_α :

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha = -\omega_y \sin \alpha + \omega_z \cos \alpha, \quad (2.19)$$

где α — полярный угол в плоскости yOz (рис. 62). Так как

$$\left. \begin{aligned} y &= r \cos \alpha, & z &= r \sin \alpha; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \cos \alpha, & \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

то из (2.19) и (2.15) получим:

$$(\omega_\alpha)_s = -\frac{U}{2\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) = -\frac{U}{2\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (2.21)$$

Таким образом, главный вектор сил воздействия (2.16) на неподвижное тело при осесимметричном движении вязкой несжимаемой жидкости равен

$$R = \rho U \int_S \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} i_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial r} i_2 \right) dS. \quad (2.22)$$

Так как на основании рис. 62

$$v_r = v \cos \alpha + \omega \sin \alpha = v \frac{\partial y}{\partial r} + \omega \frac{\partial z}{\partial r},$$

то, подставляя сюда значения v и ω из (2.12), получим:

$$v_r = \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Таким образом, для осесимметричного движения вязкой несжимаемой жидкости компоненты скоростей будут:

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= -\gamma + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v_r &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Обратимся теперь к дифференциальному уравнению (2.10)
Полагая

$$\chi = e^{kx} Y(x, y, z), \quad (2.24)$$

будем иметь:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \left(kY + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) e^{kx}, \quad \Delta \chi = e^{kx} \Delta Y + 2ke^{kx} \frac{\partial Y}{\partial x} + k^2 e^{kx} Y.$$

Следовательно, несимметричное относительно переменных x, y, z дифференциальное уравнение (2.10) при подстановке (2.24) приводится к симметричному уравнению Гельмгольца

$$\Delta Y - k^2 Y = 0. \quad (2.25)$$

§ 3. Проникание пластинки в вязкую среду

Рассмотрим вначале простейший пример использования обобщённых уравнений Стокса.

Пусть вязкая несжимаемая среда заполняет полупространство вниз от неподвижной оси $O_1 y_1$ (рис. 63). В эту среду с момента $t=0$ начинает врезаться тонкая пластинка с постоянной скоростью U . Введём связанные с пластинкой подвижные оси координат, начало которых находится у края пластинки, а положительное направление оси x идёт вверх и совпадает с направлением самой пластинки. Полные уравнения абсолютного движения вязкой жидкости по отношению к подвижным осям представляются в виде (1.3). Отбрасывая в этих уравнениях: 1) квадратичные члены

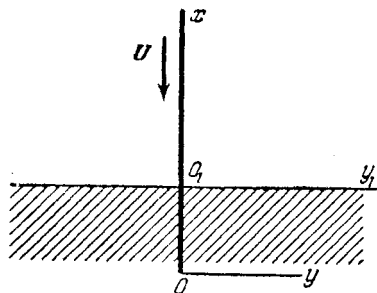


Рис. 63.

инерции, 2) локальную производную от вектора скорости по времени, 3) вектор массовой силы, получим дифференциальное уравнение в проекции на ось x .

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (3.1)$$

Поскольку движение жидкости вызывается только движением пластинки и на границе среды $O_1 y_1$ давление постоянно, то можно принять градиент давления вдоль оси x равным нулю, т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Если считать пластинку в направлении оси z достаточно широкой, то можно положить:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

В пределах погружённой части пластинки изменение компоненты скорости u в направлении оси y преобладает над изменением этой скорости в продольном направлении. За исключением, быть может, только края пластинки. Следовательно, второй производной по x от u можно пренебречь по сравнению со второй производной от u по y . Тогда из (3.1) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.4)$$

где

$$n = \frac{\nu}{U}. \quad (3.5)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (3.4) было получено с помощью: 1) частичного учёта квадратичных членов инерции (по Озеену) и 2) частичного учёта членов вязкости (по Рейнольдсу).

Примем следующие граничные условия: 1) до подхода края пластинки вся среда пребывает в полном покое, т. е.

$$\text{при } x = -0 \quad u = 0; \quad (3.6)$$

2) частицы жидкости прилипают к сторонам пластинки

$$\text{при } x > 0 \quad y = 0, \quad u = U; \quad (3.7)$$

3) при удалении от пластинки в сторону по оси y скорость уменьшается до нуля, в частности,

$$\text{при } y = \infty \quad u = 0. \quad (3.8)$$

Дифференциальное уравнение (3.4) совпадает с дифференциальным уравнением одномерной задачи теплопроводности. Рассматриваемая же задача при условиях (3.6), (3.7) и (3.8) совпадает формально с задачей нагрева полубесконечного стержня с конца. Решение этой задачи имеет вид

$$u = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{nx}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = U \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x} \sin \frac{\alpha y}{\sqrt{n}} \frac{d\alpha}{\alpha} \right). \quad (3.9)$$

Вычисляя силу вязкости на пластинке по формуле

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

получим:

$$(\tau)_{y=0} = - \frac{\mu U}{\sqrt{\pi n x}} \quad (3.10)$$

или, подставляя значение n из (3.5):

$$(\tau)_{y=0} = - \frac{\mu U^{3/2}}{\sqrt{\pi \nu x}}. \quad (3.11)$$

Таким образом, сила вязкости в какой-либо точке на погружаемой в вязкую среду пластинке пропорциональна скорости в степени $3/2$ и обратно пропорциональна 'квадратному корню из расстояния этой точки от края пластинки.

Обозначим ширину пластинки через b . Умножая обе части равенства (3.11) на $2b dx$ и интегрируя от нуля до h , где h — длина погружённой части пластинки, получим следующую формулу для сопротивления трения врезанию тонкой пластинки в вязкую среду

$$F = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} b U^{3/2} \sqrt{\mu \rho h} = -2,257 b U^{3/2} \sqrt{\mu \rho h}. \quad (3.12)$$

Следовательно, сопротивление прониканию тонкой пластинки в вязкую несжимаемую среду зависит не только от скорости проникания U в степени $3/2$, но и от глубины проникания h в степени $1/2$.

Допустим, что проникание пластинки в вязкую среду происходит благодаря тому, что этой пластинке с весом P сообщена некоторая начальная скорость U_0 . Составляя дифференциальное уравнение движения этой пластинки, получим:

$$\frac{P}{g} U \frac{dU}{dh} = -\frac{4b}{\sqrt{\pi}} U^{3/2} \sqrt{\mu \rho h}.$$

Разделяя переменные и проводя интегрирование, будем иметь:

$$\sqrt{U_0} - \sqrt{U} = \frac{4g}{3P} \sqrt{\frac{\mu \rho}{\pi}} b h^{3/2}. \quad (3.13)$$

Обозначая предельную глубину проникания пластинки через H , при которой скорость U обращается в нуль, получим из (3.13) следующую формулу для коэффициента вязкости среды:

$$\mu = \frac{9\pi}{16} U_0 \frac{P^2}{\rho g^2} \frac{1}{b^2 H^{3/2}}. \quad (3.14)$$

Полученной формулой можно пользоваться для экспериментального определения коэффициента вязкости весьма вязких сред с помощью ударного погружения в них тонкой пластинки.

§ 4. Задача об обтекании цилиндра

В § 3 главы V было показано, что задача об установившемся движении круглого цилиндра в безграничной жидкости на основании уравнений Стокса не может быть решена. Для уравнений же Озеена, в которых квадратичные члены инерции учтены частично, решение этой задачи становится возможным.

Допустим, что в безграничном потоке вязкой несжимаемой жидкости помещён неподвижный круглый цилиндр радиуса a (рис. 64).

Граничные условия прилипания жидкости к поверхности цилиндра и условия на бесконечности будут представляться в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = a \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0; \\ \text{при } r = \infty \quad v_r = U \cos \theta, \quad v_\theta = -U \sin \theta. \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Так как вектор скорости частиц жидкости на основании равенств (2.12) равен

$$\mathbf{V} = -\chi \mathbf{i} + \text{grad} \left(\varphi + \frac{1}{2k} \chi \right) \quad (4.2)$$

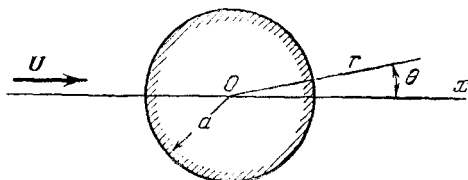


Рис. 64.

и единичный вектор \mathbf{i} оси x будет составлять с направлением r угол θ , то при переходе к полярным координатам r и θ получим:

$$\left. \begin{array}{l} v_r = -\chi \cos \theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ v_\theta = \chi \sin \theta + \frac{1}{2kr} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Функция φ будет удовлетворять уравнению Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (4.4)$$

а функция χ будет представляться в виде

$$\chi = -U + e^{kx} Y, \quad (4.5)$$

где множитель Y будет удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - k^2 Y = 0. \quad (4.6)$$

Проектируя подинтегральное выражение (2.18) на ось x , получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Следовательно, формула (2.18) для сопротивления цилиндра примет вид

$$R_x = \rho U a \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\theta. \quad (4.7)$$

Основное решение уравнения Лапласа (4.4), представляющее потенциал скоростей источника в начале координат, имеет вид

$$\varphi = \ln r. \quad (4.8)$$

Дифференцируя это решение (4.8) по x и суммируя полученные таким способом новые частные решения, получим для функции φ следующий ряд:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \ln r. \quad (4.9)$$

Так как

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} = \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{r^2} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2},$$

$$\frac{\partial^3 \ln r}{\partial x^3} = -\frac{2x}{r^4} - \frac{4x}{r^4} + \frac{8x^3}{r^6} = -\frac{6 \cos \theta}{r^3} + \frac{8 \cos^3 \theta}{r^3} = 2 \frac{\cos 3\theta}{r^3},$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial^n \ln r}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{\cos n\theta}{r^n} \quad (n \geq 1),$$

то ряд (4.9) для функции φ можно представить в виде

$$\varphi = A_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! A_n \frac{\cos n\theta}{r^n}. \quad (4.10)$$

Подставляя значение φ из (4.10) в (4.7), получим:

$$R_x = 2\pi\rho U A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n! A_n}{a^{n+1}} \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta.$$

Таким образом, сопротивление круглого цилиндра будет зависеть от одного коэффициента, представляющего собой мощность источника (4.8), и будет представляться в виде

$$R_x = 2\pi\rho U A_0. \quad (4.11)$$

Для функции Y , зависящей только от полярного радиуса r , дифференциальное уравнение (4.6) примет вид

$$Y'' + \frac{1}{r} Y' - k^2 Y = 0. \quad (4.12)$$

Общее решение уравнения (4.12) представляется через функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента в виде

$$Y = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr).$$

С возрастанием аргумента функция Бесселя $I_0(kr)$ неограниченно растёт, поэтому необходимо положить:

$$C_1 = 0.$$

Таким образом, функция источника в начале координат на плоскости для уравнения (4.6) будет представлять собой функцию Макдональда нулевого порядка, т. е.

$$K_0(kr). \quad (4.13)$$

Дифференцируя эту функцию источника по x и суммируя результаты после умножения на постоянные коэффициенты и множитель e^{kx} , получим следующий ряд для функции χ :

$$\chi = -U + e^{kx} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_0(kr). \quad (4.14)$$

Граничным условиям (4.1) прилипания будем удовлетворять приближённо. Для этого в выражении (4.14) для χ , считая, что первые два коэффициента имеют порядки величин

$$B_0 \sim 1, \quad B_1 \sim k,$$

сохраним слагаемые, имеющие порядок величины k в первой степени. Так как для малых значений аргумента функция Макдональда нулевого порядка и её первая производная представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} K_0(kr) &\approx -\ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right), \\ \frac{\partial}{\partial x} K_0(kr) &\approx -\frac{x}{r^2} = -\frac{\cos \theta}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где γ — постоянная, равная 1,7811, то приближённое значение функции χ будет равно

$$\chi \approx -U - B_0 \left[\ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) + kr \cos \theta \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) \right] - \frac{B_1 \cos \theta}{r}. \quad (4.16)$$

Вычисляя по формулам (4.3) компоненты скоростей с точностью до величин порядка единицы и отбрасывая величины порядка $kr \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{A_0}{r} - \frac{A_1 \cos \theta}{r^2} + U \cos \theta - \frac{1}{2} B_0 \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{kr} + \cos \theta - \cos \theta \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) \right] + \frac{B_1 \cos \theta}{2kr^2}, \\ v_\theta &= -\frac{A_1 \sin \theta}{r^2} - U \sin \theta - B_0 \frac{\sin \theta}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) + \frac{B_1 \sin \theta}{2kr^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Полагаем в правых частях (4.17) $r = a$ и приравниваем левые части нулю. Приравнявая отдельно нулю коэффициенты при степенях $\cos \theta$,

$\sin \theta$, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{a} - \frac{B_0}{2ka} &= 0, \\ -\frac{A_1}{a^2} + U - \frac{1}{2} B_0 \left[1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) \right] + \frac{B_1}{2ka^2} &= 0, \\ -\frac{A_1}{a^2} - U - \frac{1}{2} B_0 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) + \frac{B_1}{2ka^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Решая эти уравнения, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{2U}{k \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) \right]} = \frac{4v}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)}, \\ B_0 &= \frac{4U}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)}, \\ A_1 - \frac{B_1}{2k} &= -\frac{Ua^2}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Таким образом, при рассматриваемой степени приближения определяются только первые два коэффициента A_0 и B_0 , два же других определяются лишь в своей линейной комбинации.

Подставляя найденное значение коэффициента A_0 из (4.12) в (4.11), получим следующую формулу для силы воздействия вязкой жидкости на неподвижный круглый цилиндр:

$$R_x = \frac{8\pi\mu U}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{4} \gamma R \right)}, \quad (4.20)$$

где R — число Рейнольдса, равное

$$R = 2ka = \frac{Ua}{\nu}. \quad (4.21)$$

Формула (4.20) для сопротивления цилиндра была впервые установлена в работе Ламба¹⁾. Уточнение формулы сопротивления круглого цилиндра, получаемой на основе использования уравнений Озеена, было дано в работах Факсена²⁾ и Томотика³⁾. В последней работе указывается, что удовлетворительное согласование результатов расчёта

¹⁾ Lamb H., On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid, Phil. Magas (6), XXI, 1911.

²⁾ Faxén H., Exakte Lösung der Oseenschen Differentialgleichungen einer zähen Flüssigkeit für den Fall der Translationsbewegung eines Zylinders, Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsala, Vol. extra ordinem editum, 1927.

³⁾ Tomotica S. and Aoi T., An expansion formulen for the drag on a circular cylinder moving through a viscous fluid at small Reynolds numbers, The Quart. J. of Mech. and Appl. Mathem., т. IV, 1951.

по уточнённой формуле сопротивления круглого цилиндра с экспериментальными измерениями имеет место лишь до числа Рейнольдса, равного 10.

Если подставить найденные значения коэффициентов (4.19) в (4.17), то получим следующие приближённые формулы для скоростей частиц жидкости вблизи поверхности самого цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{U \cos \theta}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)} \left[-1 + \frac{a^2}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right], \\ v_\theta &= -\frac{U \sin \theta}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Жидкости и цилиндру сообщим теперь поступательное движение в направлении, обратном движению цилиндра, и сохраним в выражениях (4.9) и (4.14) лишь слагаемые, содержащие A_0 и B_0 , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_0 \ln r, \\ \chi &= e^{kr \cos \theta} B_0 K_0(kr). \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Компоненты скоростей будут тогда представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{A_0}{r} + \frac{1}{2} B_0 e^{kr \cos \theta} [K_0'(kr) - \cos \theta K_0(kr)], \\ v_\theta &= \frac{1}{2} B_0 e^{kr \cos \theta} K_0(kr) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Для больших значений аргумента имеют место следующие асимптотические формулы для функций Макдональда:

$$K_0(kr) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr}, \quad K_0'(kr) = -\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr}.$$

Следовательно, на далёких расстояниях от цилиндра скорости частиц жидкости будут определяться по следующим приближённым формулам:

$$\left. \begin{aligned} v_r &\approx A_0 \left[\frac{1}{r} - \sqrt{\frac{\pi k}{2r}} e^{-kr(1-\cos \theta)} (1 + \cos \theta) \right], \\ v_\theta &\approx A_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2r}} e^{-kr(1-\cos \theta)} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Впереди цилиндра, где угол θ мало отличается от π , движение частиц жидкости на далёких расстояниях будет радиальным, происходящим от источника в центре цилиндра с мощностью

$$Q = 2\pi A_0 = \frac{4\pi U}{k \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) \right]}. \quad (4.26)$$

При этом величина радиальной скорости будет убывать обратно пропорционально расстоянию от центра цилиндра:

$$v_r \approx \frac{A_0}{r}. \quad (4.27)$$

Позади же цилиндра в области, где угол θ близок к нулю, движение частиц на дальних расстояниях хотя и будет также радиальным, но с направлением скоростей в сторону движения цилиндра, и величина радиальной скорости будет убывать обратно пропорционально квадратному корню из расстояния от центра цилиндра:

$$v_r \approx -2A_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2r}}. \quad (4.28)$$

Таким образом, порядок убывания скоростей частиц жидкости с увеличением расстояния позади цилиндра меньше, чем впереди. Тот же самый вывод можно сделать и по отношению к порядку убывания интенсивности вихря. В самом деле, интенсивность вихря, определяемая по формуле

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

на основании (4.23) будет представляться в виде

$$\omega = B_0 e^{kr \cos \theta} K_0'(kr) k \sin \theta.$$

На больших расстояниях от цилиндра будем иметь:

$$\omega \approx -B_0 e^{-kr(1 - \cos \theta)} \sin \theta \sqrt{\frac{\pi k}{2r}}. \quad (4.29)$$

Следовательно, в области впереди цилиндра, где $\theta \approx \pi$, интенсивность вихря убывает быстрее, чем по закону показательной функции

$$\omega \approx -B_0 \sin \theta e^{-2kr} \sqrt{\frac{\pi k}{2r}} \approx 0, \quad (4.30)$$

тогда как позади цилиндра ($\theta \approx 0$) интенсивность вихря убывает лишь по закону квадратного корня из расстояния

$$\omega \approx -B_0 \sin \theta \sqrt{\frac{\pi k}{2r}}. \quad (4.31)$$

Таким образом, при решении задачи об обтекании круглого цилиндра на основании уравнений Озеена обнаруживается резкое различие течений впереди и позади цилиндра.

§ 5. Задача об обтекании шара

Пользуясь обобщёнными уравнениями Стокса (2.1), рассмотрим обтекание безграничным потоком вязкой несжимаемой жидкости неподвижного шара с радиусом a (рис. 65). Движение жидкости предполагаем осесимметричным. Вводя сферические координаты R и θ , на основании рис. 65 будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \theta, & r &= R \sin \theta, \\ v_R &= v_x \cos \theta + v_r \sin \theta = v_x \frac{\partial x}{\partial R} + v_r \frac{\partial r}{\partial R}, \\ v_\theta &= -v_x \sin \theta + v_r \cos \theta = -v_x \left(-\frac{\partial x}{R \partial \theta} \right) + v_r \frac{\partial r}{R \partial \theta}. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Подставляя выражения (2.23) в (5.1), получим компоненты вектора скорости в сферических координатах в виде

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -\gamma \cos \theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \\ v_\theta &= \gamma \sin \theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial \gamma}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta}. \end{aligned} \right\} (5.2)$$

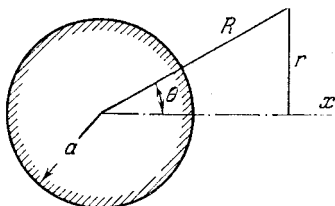


Рис. 65.

Так как единичный вектор i_1 нормали направлен по радиусу шара, а единичный вектор i_2 касательной направлен перпендикулярно к этому радиусу, то, проектируя подинтегральное выражение (2.22) на ось x , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} i_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial r} i_2 \right) \cdot i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{\partial \varphi}{\partial R}.$$

Таким образом, проекция на ось x главного вектора воздействия вязкой несжимаемой жидкости на неподвижный шар будет представляться в виде

$$R_x = \rho U \int_S \int \frac{\partial \varphi}{\partial R} dS. \quad (5.3)$$

Граничные условия на поверхности шара и на бесконечности будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } R = a \quad v_R &= -\gamma \cos \theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0, \\ v_\theta &= \gamma \sin \theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial \gamma}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = 0; \\ \text{при } R = \infty \quad v_R &= U \cos \theta, \\ v_\theta &= -U \sin \theta. \end{aligned} \right\} (5.4)$$

Полагая

$$\chi = -U + \chi_1, \quad (5.5)$$

мы можем удовлетворить условиям (5.4) на бесконечности, если потребуем, чтобы χ_1 и производные $\frac{\partial \chi_1}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \chi_1}{\partial R}$ обращались на бесконечности в нуль:

$$\text{при } R = \infty \quad \chi_1 = 0, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} = 0. \quad (5.6)$$

Обратимся теперь к вопросу о построении решений дифференциальных уравнений (2.4) и (2.10).

Основное решение уравнения Лапласа (2.4), представляющее потенциал скоростей источника в начале координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{R}. \quad (5.7)$$

Дифференцируя это решение последовательно по x , получим новые частные решения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \dots, \quad (5.8)$$

представляющие собой потенциалы скоростей диполей разных порядков, оси которых ориентированы вдоль оси симметрии потока. Умножая частные решения (5.7) и (5.8) на произвольные постоянные и складывая, получим следующее выражение для функции φ :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (5.9)$$

Будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{x}{R^3} = -\frac{\cos \theta}{R^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{1}{R^3} + \frac{3x^2}{R^5} = \frac{1}{R^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{9x}{R^5} - \frac{15x^3}{R^7} = -\frac{3}{R^5} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Полиномы Лежандра, как известно, определяются равенством

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\tau^n} (\tau^2 - 1)^n. \quad (5.11)$$

Полагая в (5.11) последовательно

$$n = 0, \quad n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= \tau, \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3\tau^2 - 1), \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5\tau^2 - 3\tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Сопоставляя выражения числителей правых частей (5.10) с правыми частями (5.12) полиномов Лежандра, мы получаем следующую формулу:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} \right) = (-1)^n n! \frac{P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}}. \quad (5.13)$$

Таким образом, подставляя (5.13) в (5.9), получим:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n n! \frac{P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}}. \quad (5.14)$$

Полиномы Лежандра обладают свойством ортогональности в интервале $\tau = -1$ ($\theta = \pi$) и $\tau = 1$ ($\theta = 0$), т. е.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\tau) P_m(\tau) d\tau = - \int_{\pi}^0 P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (m \neq n). \quad (5.15)$$

Так как

$$P_0 = 1,$$

то из условия ортогональности (5.15) следует, что для всякого n , отличного от нуля, имеет место равенство

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (5.16)$$

Обратимся теперь к формуле (5.3) для проекции на ось x силы воздействия вязкой жидкости на неподвижный шар. Так как элемент поверхности шара на основании рис. 65 будет равен

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\alpha,$$

то после интегрирования в правой части формулы (5.3) по углу α и использования равенства (5.14) получим:

$$\begin{aligned} R_x &= 2\pi\rho Ua^2 \int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial R} \sin \theta d\theta = \\ &= -2\pi\rho Ua^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)n!A_n}{a^{n+2}} \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (5.17)$$

На основании равенства (5.16) все слагаемые в правой части (5.17) будут обращаться в нуль, кроме слагаемого, для которого $n = 0$. Таким образом, сила воздействия вязкой несжимаемой жидкости на неподвижный шар равна

$$R_x = -4\pi\rho UA_0. \quad (5.18)$$

Следовательно, для определения силы сопротивления жидкости движению шара необходимо найти лишь коэффициент первого слагаемого ряда (5.14), пропорциональный мощности источника (5.7).

Обращаясь к дифференциальному уравнению (2.10), заметим, что при подстановке

$$\gamma_1 = e^{kx}Y$$

оно переходит, как это было показано в § 2, в уравнение

$$\Delta Y - k^2 Y = 0. \quad (5.19)$$

Найдём вначале основное решение этого уравнения, зависящее только от сферического радиуса R . Полагая

$$Y = Y(R),$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x} &= Y' \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = Y'' \frac{x^2}{R^2} + Y' \left(\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} \right), \\ \Delta Y &= Y'' + \frac{2}{R} Y', \end{aligned}$$

а уравнение (5.19) примет вид

$$Y'' + \frac{2}{R} Y' - k^2 Y = 0$$

или

$$\frac{d^2}{dR^2}(YR) - k^2 YR = 0.$$

Следовательно, решение уравнения (5.19), зависящее только от сферического радиуса, имеет вид

$$Y = \frac{1}{R} (C_1 e^{kR} + C_2 e^{-kR}).$$

Для удовлетворения условий (5.6) на бесконечности необходимо потребовать, чтобы

$$C_1 = 0.$$

Таким образом, основное решение, представляющее функцию источника в начале координат для дифференциального уравнения (5.19), будет иметь вид

$$\frac{e^{-kR}}{R}. \quad (5.20)$$

Дифференцируя основное решение (5.20) по переменному x , получим новые частные решения уравнения (5.19), представляющие собой диполи различных порядков этого уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-kR}}{R} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-kR}}{R} \right), \quad \dots \quad (5.21)$$

Умножая частные решения (5.20) и (5.21) на множитель e^{kx} и постоянные коэффициенты B_n и суммируя, получим то общее решение уравнения (2.10), которое отвечает осесимметричному движению жидкости:

$$\gamma = -U + e^{kx} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{e^{-kR}}{R} \right). \quad (5.22)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-kR}}{R} \right) &= -\frac{e^{-kR}}{R} \left(k + \frac{1}{R} \right) \frac{x}{R} = -\frac{e^{-kR}}{R} \left(k + \frac{1}{R} \right) \cos \theta, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-kR}}{R} \right) &= \frac{e^{-kR}}{R} \left(k + \frac{1}{R} \right)^2 \frac{x^2}{R^2} - \frac{e^{-kR}}{R^2} \left(k + \frac{1}{R} \right) + \frac{e^{-kR}}{R^2} \left(k + \frac{2}{R} \right) \frac{x^2}{R^2} = \\ &= \frac{e^{-kR}}{R} \left[\cos^2 \theta \left(k^2 + \frac{3k}{R} + \frac{3}{R^2} \right) - \frac{1}{R} \left(k + \frac{1}{R} \right) \right], \end{aligned}$$

то первые слагаемые ряда для функции γ имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma = -U + \frac{e^{-kR(1-\cos\theta)}}{R} \left\{ B_0 - B_1 \left(k + \frac{1}{R} \right) \cos \theta + \right. \\ \left. + B_2 \left[-\frac{k}{R} - \frac{1}{R^2} + \cos^2 \theta \left(k^2 + \frac{3k}{R} + \frac{3}{R^2} \right) \right] + \dots \right\}. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Пользуясь общими выражениями (5.14) для φ и (5.23) для γ , можно найти по формулам (5.2) компоненты скоростей частиц жидкости. Эти выражения для скоростей окажутся весьма сложными, и точное удовлетворение граничных условий (5.4) прилипания потребует длительных вычислений. Поэтому мы прибегнем к приближенному способу удовлетворения этих условий.

Так как

$$ka = \frac{Ua}{2\nu} = \frac{1}{2} R,$$

то малым значениям числа Рейнольдса будут отвечать малые значения параметра k . Каждый член ряда (5.22) будет иметь слагаемое

$$e^{-kR(1-\cos\theta)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} \right),$$

которое при малом значении k имеет порядок единицы. Поскольку вся сумма ряда (5.22) должна иметь ограниченное значение, то

естественно предположить, что коэффициенты B_n с возрастанием индекса убывают пропорционально степени малого параметра k . Примем, что первые три коэффициента имеют следующие порядки величин:

$$B_0 \sim 1, \quad B_1 \sim k, \quad B_2 \sim k^2. \quad (5.24)$$

Учитывая эти порядки, а также разложение

$$e^{-kR(1-\cos\theta)} = 1 - kR(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k^2 R^2 (1 - \cos\theta)^2 - \dots$$

и сохраняя в правой части (5.23) величины, имеющие порядок не выше второй степени относительно k , получим:

$$\begin{aligned} \chi \approx & -U + B_0 \left[\frac{1}{R} - k(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k^2 R^2 (1 - \cos\theta)^2 \right] - \\ & - \frac{B_1}{R} \left(\frac{\cos\theta}{R} + k \cos^2\theta \right) - \frac{B_2}{R^3} (1 - 3 \cos^2\theta). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Так как в выражения скоростей (5.2) параметр k входит в знаменатель, то в числе слагаемых, происходящих от χ , будут слагаемые, имеющие порядок величины $\frac{1}{k}$. На границе шара компоненты скоростей должны обращаться в нуль. Следовательно, в числе слагаемых, происходящих от функции φ , должны быть слагаемые, имеющие тот же порядок величины $\frac{1}{k}$. На этом основании мы можем положить, что первые коэффициенты A_n ряда (5.14) имеют порядки

$$A_0 \sim \frac{1}{k}, \quad A_1 \sim 1, \quad A_2 \sim k. \quad (5.26)$$

Сохраняя в ряде (5.14) три первых члена и вычисляя по формулам (5.2) компоненты скоростей лишь с точностью до значения k в первой степени, найдём:

$$\left. \begin{aligned} v_R \approx & U \cos\theta - \frac{A_0}{R^2} + \frac{2A_1 P_1}{R^3} - \frac{6A_2 P_2}{R^4} - B_0 \cos\theta \left(\frac{1}{R} - k + k \cos\theta \right) + \\ & + \frac{B_1 \cos^2\theta}{R^2} + B_0 \left[-\frac{1}{2kR^2} + \frac{k}{4} (1 - \cos\theta)^2 \right] + \\ & + \frac{B_1 \cos\theta}{kR^3} + \frac{B_1 \cos^2\theta}{2R^2} + \frac{3B_2}{2kR^4} (1 - 3 \cos^2\theta), \\ v_\theta \approx & -U \sin\theta + \frac{A_1 \sin\theta}{R^3} - \frac{6A_2 \sin\theta \cos\theta}{R^4} + B_0 \sin\theta \left(\frac{1}{R} - k + k \cos\theta \right) - \\ & - \frac{B_1 \sin\theta \cos\theta}{R^2} + B_0 \left[-\frac{\sin\theta}{2R} + \frac{k}{2} \sin\theta (1 - \cos\theta) \right] + \\ & + \frac{B_1 \sin\theta}{2kR^3} - \frac{3B_2 \cos\theta \sin\theta}{kR^4}. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Для удовлетворения граничным условиям прилипания (5.4) положим в правых частях (5.27):

$$R = a.$$

Собирая в первом равенстве коэффициенты при функциях P_2 , P_1 и свободные члены, а во втором — коэффициенты при $\sin \theta$ и $\sin \theta \cos \theta$, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A_0 + \frac{B_0}{2k} - \frac{B_1}{2} &= 0, \\ 2A_1 - B_0 a^2 \left(1 - \frac{ka}{2}\right) + \frac{B_1}{k} &= -Ua^3, \\ 3A_2 + B_0 \frac{ka^4}{4} - \frac{B_1 a^2}{2} + \frac{3B_2}{2k} &= 0, \\ A_1 + B_0 \frac{a^2}{2} (1 - ka) + \frac{B_1}{2k} &= Ua^3, \\ 6A_2 - \frac{1}{2} B_0 ka^4 + \frac{3B_2}{k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Из второго и четвертого равенств (5.28) найдём:

$$B_0 = \frac{3Ua}{2 - \frac{3ka}{2}}. \quad (5.29)$$

Исключая A_2 и B_2 из третьего и пятого уравнений, получим:

$$B_0 ka^4 - B_1 a^2 = 0.$$

Подставляя значение B_0 из (5.29), имеем:

$$B_1 = \frac{3Uka^3}{2 - \frac{3ka}{2}}. \quad (5.30)$$

При подстановке значений B_0 и B_1 в (5.28) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{3Ua(1 - k^2 a^2)}{k(4 - 3ka)}, \\ A_1 &= -\frac{2Ua^3}{4 - 3ka}, \\ A_2 + \frac{B_2}{2k} &= \frac{Uka^3}{2(4 - 3ka)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Таким образом, при принятой нами степени приближения будут определяться только четыре постоянные A_0 , A_1 , B_0 и B_1 , а постоянные A_2 и B_2 будут определяться лишь в своей линейной комбинации.

Подставляя найденное значение A_0 из (5.31) в формулу (5.18) для результирующей силы воздействия жидкости на шар и вводя число Рейнольдса, получим:

$$R_x = 6\pi\mu a^2 U^2 \frac{1 - \frac{1}{4} R^2}{R \left(1 - \frac{3}{8} R\right)}. \quad (5.32)$$

Считая число Рейнольдса заведомо меньше единицы, производя разложение в правой части (5.32) и ограничиваясь слагаемыми, содержащими R лишь в первой степени, будем иметь:

$$R_x = 6\pi\mu a^2 U^2 \frac{1 + \frac{3}{8} R}{R} = 6\pi\mu a U \left(1 + \frac{3}{8} R\right). \quad (5.33)$$

Таким образом, частичный учёт квадратичных членов инерции по Озеену вносит в формулу Стокса для сопротивления шара поправку, относительная величина которой в первом приближении пропорциональна первой степени числа Рейнольдса. Формула для сопротивления шара становится двучленной; первое слагаемое будет содержать скорость в первой степени, а второе — во второй степени.

Дальнейшее уточнение формулы сопротивления для шара, получаемой на основе использования уравнений Озеена, было произведено Гольдштейном¹⁾. Сделанное им сравнение результатов расчёта сопротивления шара по формуле (5.33) и по уточнённой формуле Гольдштейна с соответственными экспериментальными результатами показало удовлетворительное согласование до числа Рейнольдса, равного четырём. При числе Рейнольдса, равном четырём, относительное отклонение расчётного результата по формуле (5.33) от экспериментального достигает 15%, а по формуле Гольдштейна 7%.

Сохраняя в правых частях (5.29) и (5.30) лишь слагаемые, содержащие параметр k в первой степени, а в выражениях (5.31) — слагаемые порядка единицы, получим следующие приближённые значения четырёх постоянных:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{3}{2} a U \left(1 - \frac{3}{4} ka\right), & B_1 &= \frac{3}{2} ka^3 U, \\ A_0 &= -\frac{3}{4} \frac{a}{k} U \left(1 + \frac{3}{4} ak\right), & A_1 &= -\frac{1}{2} U a^3. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Сопоставляя порядки полученных величин правых частей (5.34) с предположенными порядками величин первых коэффициентов (5.24) и (5.26), мы убеждаемся в том, что принятые допущения о порядке величин коэффициентов полностью оправдались.

¹⁾ Goldstein S., The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers, Proc. Roy. Soc. A **123**, 1929.

Пользуясь равенствами (5.14) и (5.25), составим выражение для компонент скоростей и при этом будем пренебрегать слагаемыми, содержащими параметр k в первой степени и выше:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -\frac{A_0}{R^2} + \frac{2A_1 \cos \theta}{R^3} + U \cos \theta + \\ &\quad + e^{-kR(1-\cos \theta)} \left[-\frac{B_0}{2kR^2} - \frac{B_0}{2R}(1 + \cos \theta) + \frac{B \cos \theta}{kR^3} \right], \\ v_\theta &= \frac{A_1 \sin \theta}{R^3} - U \sin \theta + e^{-kR(1-\cos \theta)} \left[\frac{B_0 \sin \theta}{2R} + \frac{B_1 \sin \theta}{2kR^3} \right]. \end{aligned} \right\} (5.35)$$

Для точек вблизи поверхности сферы произведение kR будет малой величиной. Подставляя значения коэффициентов (5.34) и сохраняя в правых частях (5.35) лишь члены порядка единицы, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= U \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{R^3} \right), \\ v_\theta &= -U \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{R} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{R^3} \right). \end{aligned} \right\} (5.36)$$

Сравнивая полученные выражения (5.36) с формулами (7.20) главы V для скоростей, полученными при решении дифференциальных уравнений Стокса для задачи обтекания шара, мы видим полное их совпадение (различие в знаке объясняется различием направлений скоростей потока на бесконечности). Следовательно, частичный учёт квадратичных членов инерции по Озеену не вносит существенных изменений в тот характер течения вблизи поверхности неподвижного тела, который может быть получен при полном пренебрежении квадратичными членами инерции из уравнений движения. Однако это заключение будет верным только в том случае, если в выражениях скоростей мы будем ограничиваться слагаемыми, не содержащими вообще числа Рейнольдса. При таком предположении и правая часть формулы (5.33) для сопротивления шара будет совпадать с правой частью формулы Стокса. При сохранении же слагаемых, содержащих число Рейнольдса, будет проявляться уже некоторое различие в характерах течений вблизи поверхности обтекаемого тела.

Совершенно иначе будет обстоять дело на расстояниях, достаточно далёких от поверхности шара. Если мы обратим движение, т. е. наложим на жидкость и шар поступательное движение со скоростью, равной скорости шара, в обратном направлении и сохраним в выражениях (5.34) для B_0 и A_0 лишь первые слагаемые, а в правых частях (5.35) лишь слагаемые, содержащие A_0 и B_0 , то получим:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= \frac{3}{4} \frac{Ua}{kR^2} \left\{ 1 - e^{-kR(1-\cos \theta)} [1 + kR(1 + \cos \theta)] \right\}, \\ v_\theta &= \frac{3Ua}{4R} \sin \theta e^{-kR(1-\cos \theta)}, \end{aligned} \right\} (5.37)$$

На далёких расстояниях впереди шара, где угол θ имеет значения, близкие к π , а произведение kR имеет весьма большие значения, можно пренебречь множителем с показательной функцией. Тогда из (5.37) получим:

$$\left. \begin{aligned} v_R &\approx \frac{3Ua}{4kR^2}, \\ v_\theta &\approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Таким образом, течение впереди шара на далёких от него расстоя-

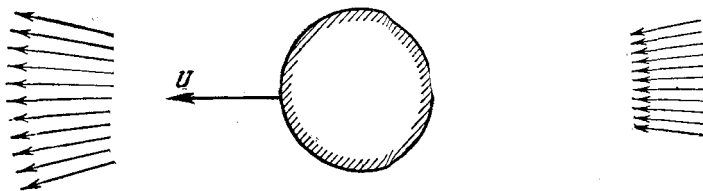


Рис. 66.

ниях по своему характеру будет радиальным (рис. 66), происходящим от источника в центре сферы с мощностью

$$Q = \frac{3Ua\pi}{k} = 6\pi a\gamma. \quad (5.39)$$

Для узкой области позади шара, в которой угол θ близок к нулю, а значение kR достаточно велико, можно положить:

$$\left. \begin{aligned} e^{-kR(1-\cos\theta)} &\approx 1, \\ 1 + kR(1 + \cos\theta) &\approx 1 + 2kR, \\ \sin\theta &\approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

При таких предположениях из (5.37) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v_R &\approx -\frac{3Ua}{2R}, \\ v_\theta &\approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

На основании (5.41) заключаем, что на далёких расстояниях в узкой области позади шара частицы жидкости движутся радиально, но в направлении вслед за движением шара. При этом величина скорости убывает обратно пропорционально первой степени расстояния от центра шара, тогда как для частиц впереди шара она убывает быстрее, а именно обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шара. Таким образом, позади шара скорости частиц с увеличением расстояния от шара медленнее стремятся к нулю, чем впереди шара. Такое же заключение можно установить и по отношению к вихрям.

Компоненты вихря из (2.13) будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Подставляя в правые части вместо χ первое слагаемое (5.23), содержащее B_0 , т. е.

$$\chi = \frac{3}{2} aU \frac{e^{-k(R-x)}}{R},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= \frac{3}{4} aU \frac{e^{-k(R-x)}}{R^2} \left(\frac{1}{R} + k \right) z, \\ \omega_z &= -\frac{3}{4} aU \frac{e^{-k(R-x)}}{R^2} \left(\frac{1}{R} + k \right) y, \\ \omega_x &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \frac{3}{4} aU \frac{e^{-k(R-x)}}{R^2} (1 + kR) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Впереди шара для больших значений показателя

$$kR(1 - \cos \theta)$$

будем иметь:

$$\omega_x = \frac{3}{4} aU \frac{e^{-2kR}}{R^2} (1 + 2kR) \sin \theta \approx 0. \quad (5.44)$$

Таким образом, впереди шара интенсивность вихрей с увеличением расстояния от центра шара резко убывает, и поэтому движение жидкости впереди шара на далёких расстояниях можно считать потенциальным. Так как правая часть (5.43) обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, то в промежутке между этими значениями интенсивность вихря будет иметь максимальное значение. Имеем:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \theta} = \frac{3}{4} \frac{aU(1+kR)}{R^2} e^{-kR(1-\cos \theta)} (\cos \theta - kR \sin^2 \theta),$$

следовательно, поверхность с максимальной завихрённостью частиц будет представляться уравнением

$$\sin \theta \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{kR}. \quad (5.45)$$

Полагая в правой части (5.43)

$$\cos \theta \approx 1, \quad \sin \theta \approx \frac{1}{\sqrt{kR}},$$

получим следующее выражение максимальной завихрённости на далёких расстояниях позади шара:

$$\omega_x = \frac{3}{4} aU \left(\sqrt{\frac{k}{R^3}} + \frac{1}{R^2 \sqrt{kR}} \right). \quad (5.46)$$

Таким образом, интенсивность вихря на поверхности «хвостовой» части потока позади шара с увеличением расстояния от центра шара затухает обратно пропорционально лишь полусторной степени этого расстояния, тогда как впереди шара интенсивность вихря убывает по закону показательной функции (5.44).

Сопоставляя результаты, которые были получены при решении задачи об обтекании шара на основании приближённых уравнений Стокса в § 7 главы V и на основании приближённых уравнений Озеена, мы должны придти к следующим заключениям. При полном отбрасывании квадратичных членов инерции получаемая картина обтекания неподвижного тела в малой степени согласуется с реально наблюдаемым течением, особенно в отношении характера потока позади тела. При частичном же учёте квадратичных членов инерции получается картина течения, которая с качественной стороны в отношении различий характера потока впереди и сзади тела удовлетворительно согласуется с картиной действительного обтекания потоком жидкости этого тела.

Заканчивая рассмотрение примеров использования приближённого метода Озеена, заметим, что с помощью предложенных им уравнений им самим и его учениками развита так называемая теория исчезающей вязкости. На основании дифференциальных уравнений с частичным учётом квадратичных членов инерции Озееном¹⁾ построено решение задачи об обтекании выпуклого тела безграничным потоком в интегральном виде. Устремляя в этом решении коэффициент вязкости к нулю, Озеен получил течение идеальной жидкости с наличием разрыва впереди и сзади тела. Этот результат послужил основанием к постановке новой гидродинамической задачи об обтекании тела идеальной жидкостью с разрывными граничными условиями.

1) O s e e n C., Hydrodynamik, Leipzig, 1927.

ГЛАВА VIII

ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое

В предшествующих трёх главах были рассмотрены три приближённых метода изучения движения жидкости с учётом вязкости. Следующую ступень развития приближённых методов изучения движения вязкой жидкости составляет *теория пограничного слоя*.

На то обстоятельство, что прилипание жидкости может оказать существенное влияние на характер течения и его закономерности, указано ещё в гидродинамике Д. Бернулли¹⁾. В работах Навье, Пуассона и Стокса также имеются указания на то, что в связи с учётом вязкости жидкости должны измениться граничные условия вблизи стенок. Но эти указания всё ещё не давали основания к утверждению того, что вязкость жидкости проявляется главным образом только вблизи твёрдых стенок. Идея о преобладающем влиянии вязкости жидкости только вблизи стенок была высказана позднее, а именно в работе Д. И. Менделеева²⁾, а затем в лекциях Н. Е. Жуковского³⁾. Своё оформление в виде уравнений эта идея получила в работе Прандтля⁴⁾.

Рассмотренные в предшествующих трёх главах методы относились к движениям жидкости при сравнительно малых числах Рейнольдса, методы же теории пограничного слоя относятся к противоположным случаям, т. е. к случаям движения жидкости при весьма больших значениях чисел Рейнольдса. Если в методах Стокса и Рейнольдса квадратичные члены инерции совершенно не учитывались, а в методе Озеена эти члены учитывались лишь частично, то в теории пограничного слоя Прандтля квадратичные члены инерции

1) Bernoulli D., Hydrodynamica, Strasburg, 1738.

2) Менделеев Д. И., О сопротивлении жидкости и о воздухоплавании, 1880.

3) Жуковский Н. Е., Собр. соч., т. VI, Гостехиздат, 1949.

4) Prandtl L., Verh. der III Intern. Math. Kongr. in Heidelberg, Leipzig, 1905.

полностью учитываются в основном уравнении. В приближённых методах Стокса и Озеена члены от вязкости учитывались полностью, тогда как в теории Прандтля эти члены учитываются лишь частично, так же как и в методе Рейнольдса для слоя смазки.

Теория пограничного слоя получила широкое практическое применение и поэтому её развитие было весьма интенсивным. Эта теория и до настоящего времени продолжает привлекать внимание многих исследователей.

Для вывода основных уравнений теории пограничного слоя рассмотрим лишь плоско-параллельное установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости без учёта действия массовых сил. Будем полагать радиус кривизны рассматриваемой твёрдой стенки (рис. 67)

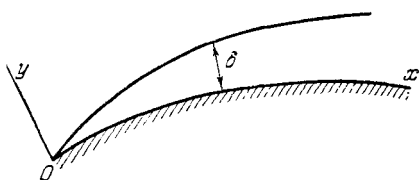


Рис. 67.

достаточно большим по сравнению со средним значением δ толщины предполагаемого пограничного слоя. Обозначим через x криволинейную координату, отсчитываемую вдоль рассматриваемой стенки от некоторой фиксированной на ней точки O , и через y — координату, отсчитываемую по нормали к стенке.

Дифференциальные уравнения (2.13) главы II переноса количества движения в проекциях на введённые оси координат и уравнение несжимаемости представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} - \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx} - \rho uv) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(p_{xy} - \rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yy} - \rho v^2) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Соотношения, выражающие обобщённую гипотезу Ньютона в рассматриваемом нами случае, будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Обозначим через l характеристику протяжённости слоя, через U — характерную скорость частиц в продольном направлении слоя и через V — характерную скорость в поперечном направлении. Вводим безразмерные величины, полагая

$$\left. \begin{aligned} x &= lx_1, \quad y = \delta y_1, \\ u &= Uu_1, \quad v = Vv_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Уравнение несжимаемости тогда представится в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{V}{U} \frac{l}{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0. \quad (1.4)$$

Если считать, что слагаемые в уравнении (1.4) будут иметь один и тот же порядок величин, то необходимо положить:

$$\frac{V}{U} \frac{l}{\delta} = 1.$$

Это равенство означает, что порядок отношения скоростей $\frac{V}{U}$ должен совпадать с порядком отношения среднего значения толщины слоя к характерной длине l , т. е.

$$\frac{V}{U} = \frac{\delta}{l} = \varepsilon. \quad (1.5)$$

Вводим безразмерное число Рейнольдса

$$R = \frac{Ul}{\nu} \quad (1.6)$$

и безразмерное давление

$$p = \frac{\mu Ul}{\delta^2} p_1 = \frac{\rho U^2}{R \varepsilon^2} p_1. \quad (1.7)$$

Соотношения (1.2) при использовании (1.3), (1.5), (1.6) и (1.7) примут вид

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{\rho U^2}{R \varepsilon^2} \left(-p_1 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \\ p_{yy} &= \frac{\rho U^2}{R \varepsilon^2} \left(-p_1 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right), \\ p_{xy} &= \frac{\rho U^2}{R \varepsilon} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8), (1.3) в (1.1), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-p_1 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - R \varepsilon^2 u_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - R \varepsilon^2 u_1 v_1 \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - R \varepsilon^2 v_1 u_1 \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(-p_1 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - R \varepsilon^4 v_1^2 \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

При выводе уравнений Рейнольдса для смазочного слоя мы полагали число Рейнольдса обратно пропорциональным первой степени безразмерного параметра ε . Так как мы рассматриваем теперь случай весьма больших значений чисел Рейнольдса, то примем, что это число обратно пропорционально квадрату параметра ε , т. е.

$$R = \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (1.10)$$

Сохраняя в уравнениях (1.8) и (1.9) только члены наивысшего порядка, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -\rho U^2 p_1, \\ p_{yy} &= -\rho U^2 p_1, \end{aligned} \right\} \quad p_{xy} = \varepsilon \rho U^2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1}; \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (-p_1 - u_1^2) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - u_1 v_1 \right) &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Таким образом, при весьма больших значениях чисел Рейнольдса компоненты нормального напряжения в пределах пограничного слоя сводятся к одному давлению, а компонента касательного напряжения имеет порядок ε по отношению к скоростному напору (ρU^2) и определяется только одним слагаемым, представляющим собой первую производную продольной скорости по поперечной координате y . Из второго уравнения (1.12) заключаем, что *в пределах пограничного слоя давление по толщине слоя не изменяется.*

Переходя в уравнениях (1.4) и (1.12) к размерным величинам, получим следующие уравнения плоско-параллельного установившегося движения вязкой жидкости в пограничном слое без учёта действия массовых сил:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Так как давление по толщине слоя не меняется, то внутри слоя давление должно быть таким же, каким оно было на границе этого слоя с областью внешнего потока жидкости без учёта её вязкости. А это значит, что в пределах пограничного слоя давление должно считаться известной функцией криволинейной координаты x . Эта функция для давления устанавливается на основании решения задачи об обтекании рассматриваемого контура идеальной жидкостью. Таким образом, дифференциальные уравнения (1.13) для пограничного слоя будут содержать только две неизвестные функции — компоненты u и v скорости частиц жидкости в слое. Если рассматриваемый контур является неподвижным и непроницаемым, то для неизвестных функций должны удовлетворяться условия прилипания:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad v=0. \quad (1.14)$$

К граничным условиям (1.14) необходимо присоединить граничные условия на границе предполагаемого пограничного слоя, тол-

щина которого может считаться либо бесконечно большой (асимптотический пограничный слой), либо конечной. В последнем случае толщина слоя должна считаться неизвестной функцией криволинейной координаты x , для определения которой должны быть использованы условия на границе слоя. Эти граничные условия в первую очередь должны отразить непрерывность основной компоненты скорости u и непрерывность силы вязкости при переходе из слоя в область внешнего потока. Если через U обозначить компоненту скорости частиц во внешнем потоке, параллельную касательной в соответственной точке рассматриваемого контура, то простейшие граничные условия на границе пограничного слоя будут:

$$\text{при } y = \delta \quad u = U(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.15)$$

Таким образом, задача изучения движения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое сводится математически к решению дифференциальных уравнений (1.13) при граничных условиях (1.14) и (1.15). Наличие нелинейных слагаемых в первом уравнении (1.13) и наличие граничных условий на неизвестной границе создают большие трудности на пути изучения движения жидкости в пределах пограничного слоя. Но всё же эти трудности оказались возможным преодолеть во многих случаях с помощью различных приближённых методов.

Из экспериментов известно, что при обтекании выпуклых тел происходят отрыв внешнего потока от поверхности тела и образование завихрённой зоны позади тела. Благодаря наличию завихрённой зоны меняется распределение скоростей во внешнем потоке. Следовательно, уравнения пограничного слоя (1.13) могут быть использованы не для всего обтекаемого контура, а только для той его части, которая обтекается внешним потоком плавно, без срыва отдельных частей потока, без образования завихрённой зоны. Пограничный слой, подчиняющийся уравнениям (1.13), будет заканчиваться в той точке плоского контура, с которой будет происходить отрыв внешнего потока от контура.

Явление отрыва внешнего потока от поверхности выпуклого контура качественно можно объяснить с помощью следующих рассуждений. При обтекании выпуклого контура потоком несжимаемой жидкости скорость частиц на поверхности контура после передней критической точки будет нарастать, а давление будет уменьшаться. После достижения максимума скорость будет уменьшаться, а давление будет увеличиваться. Следовательно, после этой точки максимума скорости частицы жидкости внутри пограничного слоя будут тормозиться не только за счёт действия сил вязкости, но и за счёт действия противодействия. Вследствие этого у частиц, расположенных близко от поверхности тела, скорость может обращаться в нуль задолго до того, как они подойдут к задней критической точке

Эти частицы, подвергаясь действию противодавления, должны начать двигаться в обратном направлении. В результате этого обратного течения вблизи поверхности тела будет происходить подмыв пограничного слоя. Если на первых участках слоя профиль распределения скоростей в слое будет обращён своей выпуклостью в сторону течения (рис. 68), то на последних участках верхняя часть будет попрежнему выпуклой в сторону течения, а нижняя часть будет выпуклой в обратную сторону. При таком распределении скоростей в слое в каком-то месте может произойти отрыв слоя от стенки. При этом оторвавшаяся часть пограничного слоя в верхней части приобретёт вращение по ходу часовой стрелки, а в нижней части — против хода часовой стрелки. Оторвавшиеся завихрённые части пограничного слоя будут внешним потоком сноситься в сторону течения.

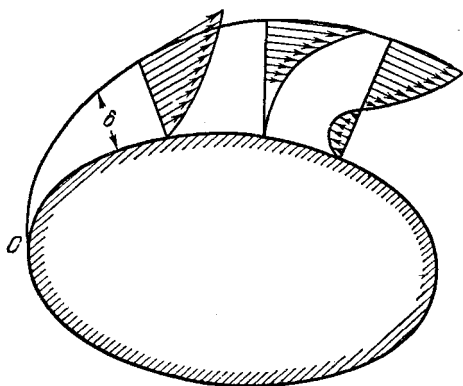


Рис. 68.

Такая картина отрыва пограничного слоя будет повторяться периодически. Опыт показывает, что отрыв пограничного слоя с верхней и нижней частей границы происходит не одновременно. В результате этого сзади тела завихрения располагаются не друг под другом, а в шахматном порядке.

Из сказанного следует, что отрыв внешнего потока от контура может начаться не раньше той точки, после которой изменяется направление выпуклости профиля распределения скоростей вблизи контура. Но изменение направления выпуклости связано с изменением наклона касательной к кривой профиля скоростей, т. е. с изменением знака первой производной от рассматриваемой скорости по нормали. До тех пор пока в точках вблизи контура профиль распределения скоростей будет выпуклым, первая производная $\frac{du}{dy}$

будет положительной. Как только изменится направление выпуклости профиля распределения скоростей вблизи контура, знак этой производной станет отрицательным. Таким образом, мы и приходим к следующему условию отрыва пограничного слоя от стенки. *Отрыв пограничного слоя может происходить только после той точки, в которой первая производная от основной скорости по координате у обращается в нуль:*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (1.16)$$

формальное условие (1.16) отрыва до некоторой степени можно объяснить и с механической точки зрения. Из механики известно, что в том месте, в котором материальная точка покидает связь, реакция связи обращается в нуль. Аналогично обстоит дело и здесь, только роль своеобразной реакции связи играет сила вязкости, которая в месте отрыва слоя от стенки обращается в нуль.

§ 2. Асимптотический пограничный слой на пластинке

Рассмотрим установившееся обтекание безграничным плоским потоком несжимаемой жидкости в продольном направлении плоскости, простирающейся вдоль положительного направления оси x до бесконечности (рис. 69). Так как скорость во внешнем потоке будет всюду постоянной и равной U_0 , то и давление будет также постоянным, и поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

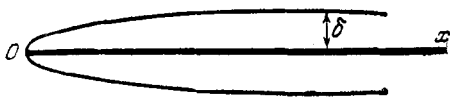


Рис. 69.

Уравнения пограничного слоя (1.13) при этом принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

В качестве граничных условий принимаем условие прилипания (1.14) и одно лишь первое условие (1.15) для скорости на бесконечности:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \quad u &= 0, \quad v = 0, \\ \text{при } y=\infty \quad u &= U_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Для решения уравнений (2.1) введём безразмерную переменную величину

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \quad (2.3)$$

и примем, что компонента скорости u есть функция только от одной введённой безразмерной переменной

$$u = U_0 \varphi_1(\eta). \quad (2.4)$$

На основании уравнения несжимаемости вводим функцию тока ψ , полагая

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Чтобы удовлетворить предположению (2.4), необходимо для функции тока ψ принять следующее выражение:

$$\psi = \sqrt{\nu U_0 x} f(\eta), \quad (2.5)$$

где $f(\eta)$ — функция от одной безразмерной переменной η . При таком предположении будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{\nu U_0 x} f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_0 f'(\eta), \\ v &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} f(\eta) - \sqrt{\nu U_0 x} f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{U_0}{2x} \eta f''(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f''(\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_0^2}{\nu x} f'''(\eta). \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Подставляя значения u и v и их производных из (2.6) в первое уравнение (2.1), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$2f''' + ff'' = 0. \quad (2.7)$$

Граничные условия (2.2) принимают теперь вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \eta = 0 \quad & f = 0, \quad f' = 0, \\ \text{при } \eta = \infty \quad & f' = 1. \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Решение нелинейного с одним числовым коэффициентом дифференциального уравнения (2.7) в окрестности $\eta = 0$ можно искать в виде степенного ряда

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \eta^n. \quad (2.9)$$

Чтобы удовлетворить двум первым граничным условиям (2.8), первые два коэффициента ряда (2.9) необходимо приравнять нулю:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0.$$

Подставляя ряд (2.9) в уравнение (2.7) и приравнявая нулю суммы коэффициентов при различных степенях переменного η , получим в конце концов следующий ряд для искомой функции $f(\eta)$:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \eta^{3n+2}. \quad (2.10)$$

В этом ряде коэффициенты c_n имеют определённые числовые значения, например

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 11, \quad c_3 = 375, \quad c_4 = 27\,897,$$

а множитель α является пока неопределённым.

Для установления вида решения уравнения (2.7) для весьма больших значений аргумента η можно применить следующий приближённый

ый метод¹⁾. Решение уравнения (2.7), отвечающее прямолинейно-параллельному течению идеальной жидкости, имеет вид

$$f_1 = \eta - \beta, \quad (2.11)$$

где β — неизвестная постоянная. Первая производная от этого решения всюду равна единице, следовательно, третье граничное условие (2.8) будет удовлетворено. Для построения второго приближения заменим в уравнении (2.7) произведение ff'' через $f_1 f_2''$, тогда получим следующее уравнение для второго приближения:

$$\frac{f_2'''}{f_2''} = \frac{1}{2}(\beta - \eta). \quad (2.12)$$

Выполняя интегрирование, будем иметь:

$$\ln f_2'' = -\frac{1}{4}(\beta - \eta)^2 + \ln \gamma,$$

где γ — постоянная. Вторая и первая производные от второго приближения будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} f_2'' &= \gamma e^{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2}, \\ f_2' &= \gamma \int_{\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Нижний предел во второй формуле был выбран с тем расчётом, чтобы первая производная от рассматриваемого приближения обращалась в нуль при бесконечно большом значении аргумента.

Ограничиваясь только двумя первыми приближениями, будем иметь следующую приближённую асимптотическую формулу для искомого решения уравнения (2.7):

$$f = \eta - \beta + \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2} d\eta. \quad (2.14)$$

Чтобы правая часть (2.14) действительно представляла аналитическое продолжение на область весьма больших значений аргумента функции $f(\eta)$, представляемой для области малых значений аргумента рядом (2.10), необходимо потребовать совпадения значений (2.10) и (2.14) для ряда тех значений аргумента, при которых обе суммы могут иметь место. Требуя, например, совпадения значений (2.10) и (2.14) при трёх значениях аргумента, получим три уравнения для численного определения трёх постоянных α , β и γ .

¹⁾ Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschr. für Mathematik und Physik, т. 56, 1908.

На основании такого рода численных вычислений были получены следующие значения:

$$\alpha = 0,332, \quad \beta = 1,73, \quad \gamma = 0,231.$$

К решению уравнения (2.7) при условиях (2.8) были применены и другие методы. В частности, методом численного интегрирования была составлена подробная таблица значений основной безразмерной скорости u_1 ¹⁾. Некоторые значения из этой таблицы приводятся ниже.

Таблица 1

η	0	0,2	0,4	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
u_1	0	0,0664	0,1328	0,3298	0,6298	0,8160	0,9555	0,9915	0,9990

Для силы вязкости в точках самой пластинки будем иметь:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \mu U_0 \left(\frac{du_1}{d\eta} \right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \left(\frac{du_1}{d\eta} \right)_0.$$

Используя данные таблицы 1, получим:

$$\left(\frac{du_1}{d\eta} \right)_0 = \frac{u_1(0,2) - u_1(0)}{0,2} = 0,332.$$

Таким образом, сила вязкости в точках пластинки будет представляться в виде

$$\tau = 0,332 U_0^{3/2} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}. \quad (2.15)$$

Умножая обе части равенства (2.15) на $2dx$ и проводя интегрирование в пределах от нуля до l , получим следующую формулу для силы сопротивления трения обеих сторон пластинки длины l и ширины, равной единице:

$$F = 2 \int_0^l \tau dx = 1,328 U_0^{3/2} \sqrt{\mu \rho l}. \quad (2.16)$$

Вводя коэффициент сопротивления трения

$$C_f = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 l} \quad (2.17)$$

и число Рейнольдса

$$R = \frac{U_0 l}{\nu},$$

¹⁾ Töpfer, Zeltschr. für Mathematik und Physik, т. 60, 1912.

получим:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{R}}. \quad (2.18)$$

Таким образом, коэффициент сопротивления трения пластинки, создаваемого пограничным слоем, обратно пропорционален квадратному корню из числа Рейнольдса.

При рассмотрении асимптотического пограничного слоя толщина слоя δ будет условной величиной. За верхнюю границу пограничного слоя можно, например, взять геометрическое место тех точек, в которых величина основной скорости u отличается от соответственной скорости внешнего потока на один лишь процент, т. е.

$$(u_1)_\delta = 0,99.$$

Этому значению скорости отвечает в таблице 1 приблизительно значение η , равное 5. Учитывая формулу (2.3), получим для толщины слоя следующую зависимость:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = 5 \sqrt{\frac{x l}{R}}. \quad (2.19)$$

Таким образом, толщина пограничного слоя на пластинке увеличивается вдоль самой пластинки по закону параболы. Но чаще всего в качестве толщины пограничного слоя принимается утроенная величина толщины вытеснения δ^* , причём под толщиной вытеснения подразумевается величина δ^* , определяемая равенством

$$U_0 \delta^* = \int_0^\infty (U_0 - u) dy. \quad (2.20)$$

Величина δ^* характеризует то смещение внешних линий тока от рассматриваемой обтекаемой потоком поверхности тела, которое обусловлено образованием пограничного слоя. Если использовать таблицу 1 значений u_1 или первое приближение (2.11), то для толщины вытеснения δ^* для случая пластинки можно будет получить выражение

$$\delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \quad (2.21)$$

Таким образом, для толщины пограничного слоя на прямолинейной пластинке будем иметь формулу

$$\delta = 3\delta^* = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \quad (2.22)$$

Эксперименты, проведённые Хансеном¹⁾ по определению распределения скоростей в пограничном слое на пластинке, показали вполне удовлетворительное согласование результатов вычислений, представленных в таблице 1, с результатами измерений до значений чисел Рейнольдса порядка 300 000. Некоторое отклонение результатов измерений от результатов вычислений имеет место для точек, расположенных вблизи носика пластинки. Это отклонение в значительной мере должно объясняться тем, что предпосылки теории пограничного слоя вблизи края пластинки менее справедливы, чем вдали от края.

§ 3. Интегральные соотношения

Первое основное уравнение (1.13) пограничного слоя является нелинейным. Поэтому интегрирование уравнений пограничного слоя для конкретных задач связано с достаточно большими трудностями, как это было показано на примере пластинки в § 2. Это обстоятельство побудило многих исследователей искать приближённые методы, упрощающие либо задачу изучения движения жидкости в пограничном слое, либо метод отдельных операций вычисления характеристик пограничного слоя. К настоящему моменту в литературе имеется достаточно большое количество различных приближённых методов изучения пограничного слоя. Основная группа этих приближённых методов связана с использованием интегральных соотношений пограничного слоя.

Первое интегральное соотношение было установлено Карманом²⁾ с помощью применения теоремы об изменении количества движения в фиксированном элементе пограничного слоя. Второе соотношение было установлено Л. С. Лейбензоном³⁾ с помощью применения теоремы об изменении полной энергии в фиксированном элементе пограничного слоя. Обобщение этих соотношений было дано В. В. Голубевым⁴⁾. Дадим вывод этих соотношений, следуя рассуждениям В. В. Голубева.

Умножим обе части первого уравнения (1.13) на $u^k dy$ и проинтегрируем от нуля до δ , представляющей собой толщину пограничного слоя; получим:

$$\int_0^{\delta} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \nu u^k \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta} u^k dy + \nu \int_0^{\delta} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy. \quad (3.1)$$

¹⁾ Hansen M., Die Geschwindigkeits Verteilung in der Grenzschicht an eingetauchten Platte, Zeitschr. für angew. Mathem. und Mechanik, т. 8, вып. 3, 1928.

²⁾ Карман Т., Ueber laminare und turbulente Reibung, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., т. I, 1921.

³⁾ Лейбензон Л. С., Энергетическая форма интегрального условия в теории пограничного слоя. Труды ЦАГИ, вып. 240, 1935.

⁴⁾ Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 2, Гостехиздат, 1948.

Выполняя простейшие вычисления и учитывая, что толщина слоя зависит от переменного x , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\delta} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x} dy &= \frac{1}{k+2} \int_0^{\delta} \frac{\partial u^{k+2}}{\partial x} dy = \frac{1}{k+2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^{k+2} dy - (u_{\delta})^{k+2} \delta' \right], \\ \int_0^{\delta} v u^k \frac{\partial u}{\partial y} dy &= \frac{1}{k+1} \int_0^{\delta} v \frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} dy = \frac{1}{k+1} \left[v u^{k+1} \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} u^{k+1} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right], \\ \int_0^{\delta} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy &= u^k \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^{\delta} - k \int_0^{\delta} u^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Используя граничные условия (1.14) и (1.15) и уравнение несжимаемости, получим:

$$\left. \begin{aligned} (u_{\delta})^{k+2} &= U^{k+2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\delta} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial u}{\partial x}, \\ v_{\delta} &= - \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy + U \delta', \\ - \int_0^{\delta} u^{k+1} \frac{\partial v}{\partial y} dy &= \int_0^{\delta} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{k+2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^{k+2} dy - U^{k+2} \delta' \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Принимая во внимание (3.3), подставим выражения (3.2) в (3.1); получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v u^k \frac{\partial u}{\partial y} dy &= \frac{1}{k+2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^{k+2} dy - U^{k+2} \delta' \right] + \\ + \frac{U^{k+1}}{k+1} \left[U \delta' - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy \right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^{k+2} dy - U^{k+2} \delta' \right] = \\ = \frac{1}{k+1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^{k+2} dy - U^{k+1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, интегральное соотношение В. В. Голубева будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^{k+2} dy - \frac{U^{k+1}}{k+1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta} u^k dy - \nu \left[\left(u^k \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + k \int_0^{\delta} u^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \right]. \quad (3.5)$$

Полагая в соотношении (3.5) $k=0$, получим интегральное соотношение Кармана в виде

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0. \quad (3.6)$$

Первое слагаемое в левой части представляет собой секундное замене количества движения в фиксированном элементе пограничного слоя за счёт входа и выхода масс через две боковые границы этого элемента AA_1 и BB_1 (рис. 70), поделённое на длину элемента Δx . Второе слагаемое левой части (3.6) представляет количество движения,

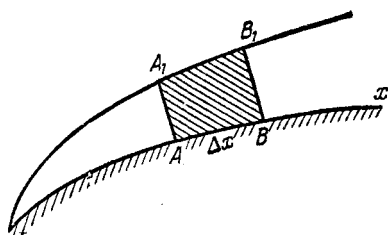


Рис. 70.

вносимое массой $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u_x dy$ че-

рез верхнюю границу слоя A_1B_1 за секунду. Правая же часть соотношения (3.6) есть импульс сил давлени-

я и сил вязкости, отнесённый к единице времени и единице расстояния вдоль координаты x .

Полагая в соотношении (3.5) $k=1$ и учитывая, что $(u)_0=0$, получим энергетическое интегральное соотношение Лейбениона

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^3 dy - \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy - \nu \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (3.7)$$

Первое слагаемое в левой части (3.7) с точностью до множителя ρ представляет собой секундное изменение кинетической энергии в фиксированном элементе пограничного слоя, обусловленное входом и выходом масс через боковые границы AA_1 и BB_1 . Второе слагаемое связано с изменением кинетической энергии за счёт входа масс через верхнюю границу слоя. Наконец, последнее слагаемое в правой части (3.7) представляет собой ту часть энергии, которая рассеивается благодаря силам вязкости.

Так как давление и скорость внешнего потока U считаются известными функциями от переменного x , то интегральные соотношения (3.5), (3.6) и (3.7) будут содержать две неизвестные функции, из которых первая будет представлять собой распределение основной скорости u по толщине слоя, а вторая — изменение толщины слоя с изменением криволинейной координаты x . При использовании этих интегральных соотношений приходится первую из неизвестных функций в какой-то мере задавать заранее и отдельные коэффициенты её определять из граничных условий. При подстановке в интегральное соотношение (3.5) задаваемой функции распределения скоростей по толщине слоя получится для толщины слоя дифференциальное уравнение первого порядка.

В работе Польгаузена¹⁾ распределение скоростей по сечению пограничного слоя задавалось в виде многочлена не выше четвёртой степени. В работе Л. Г. Лойцянского²⁾ для распределения основных скоростей использовался многочлен шестой степени. В одной из первых работ А. А. Космодемьянского³⁾ распределение скоростей представлялось в виде $u = U_0 \sin \frac{\pi}{2} \eta$. Сопоставление результатов расчёта во всех этих случаях с результатами решения уравнений пограничного слоя, приведёнными для пластинки в предшествующем параграфе, показывает сравнительно малое расхождение, особенно в отношении числового множителя в выражении (2.18) для коэффициента сопротивления пластинки. Это обстоятельство и послужило основанием, с одной стороны, для широкого использования метода интегральных соотношений, а с другой стороны, для некоторого произвола как в выборе вида функции распределения основных скоростей по толщине слоя, так и в назначении дополнительных граничных условий для определения коэффициентов этой функции.

Дополнительные граничные условия устанавливаются на основании непосредственного использования самих уравнений (1.13) для пограничного слоя. Например, если учесть, что на стенке скорости u и v обращаются в нуль, то из первого уравнения (1.13) получим новое граничное условие на стенке в виде

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Дифференцируя левую и правую части первого уравнения (1.13) по переменному y , будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \quad (3.9)$$

¹⁾ Pohlhausen K., Zeitschr. für ang. Math. und Mech., т. 1, 1921.

²⁾ Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, ГТТИ, 1941.

³⁾ Космодемьянский А. А., Учёные записки МГУ, № 2, 1934.

Сумма первого и третьего слагаемых в левой части на основании уравнения несжимаемости будет обращаться в нуль. Остальные слагаемые в левой части будут обращаться в нуль на стенке; отсюда получим ещё новое дополнительное условие на стенке

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0. \quad (3.10)$$

Используя граничные условия (1.15), первое уравнение (1.13) для точек верхней границы слоя можно представить в виде

$$U \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\delta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_\delta. \quad (3.11)$$

Если положить

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\delta = \frac{dU}{dx}$$

и учесть, что из интеграла Бернулли $\frac{p}{\rho} = C - \frac{1}{2} U^2$ для линий тока внешнего потока, примыкающих к верхней границе слоя, будем иметь:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U \frac{dU}{dx}, \quad (3.12)$$

то из (3.11) получим ещё одно граничное условие

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = 0. \quad (3.13)$$

Если бы мы ещё раз продифференцировали равенство (3.9) по переменному y и использовали бы все ранее полученные граничные условия, то получили бы ещё новые дополнительные условия для производных третьего и четвертого порядка от искомой функции u . Разумеется, что этот процесс получения новых граничных условий можно продолжать и дальше. Подчиняя выбор вида функции распределения по толщине слоя основных скоростей всё большему числу дополнительных граничных условий, мы тем самым можем всё больше и больше приближать задаваемую функцию к действительному решению самих уравнений (1.13) пограничного слоя.

§ 4. Пограничный слой при обтекании выпуклого контура

В качестве примера применения метода интегральных соотношений рассмотрим обтекание плоско-параллельным безграничным потоком несжимаемой жидкости выпуклого контура (рис. 71). В передней части рассматриваемого контура будет образовываться пограничный слой. Скорость частиц жидкости на внешней границе этого пограничного слоя будем считать известной функцией криволинейной координаты x , отсчитываемой от передней критической точки вдоль верхней части дуги

$$U = U(x).$$

Интегральное соотношение (3.6) после использования (3.12) представится в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = UU' \delta - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0. \quad (4.1)$$

Введём новое независимое переменное, полагая

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad (4.2)$$

и будем считать, что распределение основной компоненты скорости u по толщине пограничного слоя представляется функцией, зависящей только от одной независимой переменной η , т. е.

$$u = Uf(\eta). \quad (4.3)$$

Используя предположения (4.2) и (4.3), интегральное соотношение (4.1) можно представить в виде

$$\int_0^1 f^2(\eta) d\eta \frac{d}{dx} (U^2 \delta) - \int_0^1 f(\eta) d\eta U \frac{d}{dx} (U \delta) = UU' \delta - \frac{\nu U}{\delta} f'(0). \quad (4.4)$$

Как уже было сказано выше, вид функции (4.3) в некоторой мере должен задаваться заранее и лишь отдельные коэффициенты конкретного выражения этой функции должны определяться из граничных условий. Основные граничные условия, выражающие собой условие прилипания частиц к стенке, условие непрерывного перехода значений основной компоненты скорости через верхнюю границу слоя и условие отсутствия силы вязкости на этой границе слоя, имеют вид

$$u(0) = 0, \quad u(\delta) = U, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0.$$

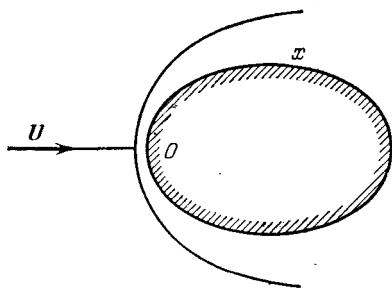


Рис. 71.

Если иметь в виду предположения (4.2) и (4.3), то эти граничные условия можно представить следующим образом:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 0. \quad (4.5)$$

К основным граничным условиям (4.5) присоединим одно дополнительное условие (3.8), используя (3.12) и (4.3):

$$f''(0) = -\frac{\delta^2}{\nu} U'. \quad (4.6)$$

Наличие четырёх граничных условий (4.5) и (4.6) позволяет использовать для распределения скоростей в пограничном слое

функцию, содержащую четыре неизвестных коэффициента. Если, например, эту функцию брать в виде многочлена, то наиболее простым из них будет многочлен третьей степени, т. е.

$$f(\eta) = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3. \dots \quad (4.7)$$

Определяя коэффициенты многочлена из граничных условий (4.5) и (4.6), получим:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{\delta^2 U'}{2\nu} \right), \quad A_2 = -\frac{\delta^2 U'}{2\nu},$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta^2 U'}{2\nu} \right). \quad (4.8)$$

Используя выражения (4.8), будем иметь:

$$f(\eta) = \frac{1}{2} (3\eta - \eta^3) + \frac{\lambda}{4} (\eta - 2\eta^2 + \eta^3), \quad (4.9)$$

где λ представляет собой безразмерный параметр, равный

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} U'. \quad (4.10)$$

Определяя силу вязкости на стенке по формуле Ньютона и используя (4.2), (4.3), (4.9) и (4.10), получим:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \mu \frac{U}{\delta} f'(0) = \frac{\mu U}{4\delta} (6 + \lambda). \quad (4.11)$$

В § 1 было указано, что точка отрыва пограничного слоя определяется из условия обращения в нуль силы вязкости на стенке. Полагая правую часть (4.11) нулю, найдём:

$$\lambda_{от} = \left(\frac{\delta^2}{\nu} U \right)_{от} = -6. \quad (4.12)$$

В случае обтекания эллиптического цилиндра экспериментально установлено, что положение точки отрыва определяется равенством

$$\lambda_{эк} = -5,4. \quad (4.13)$$

Таким образом, полученный результат (4.12) достаточно близок к экспериментальному.

Для определения изменения толщины слоя необходимо обратиться к интегральному соотношению (4.4), которое при использовании обозначения (4.10) представится в виде

$$\frac{\delta \delta'}{\nu} U \left[\int_0^1 f^2(\eta) d\eta - \int_0^1 f(\eta) d\eta \right] +$$

$$+ 2\lambda \int_0^1 f^2(\eta) d\eta - \lambda \int_0^1 f(\eta) d\eta - \lambda + f'(0) = 0. \quad (4.14)$$

Для коэффициентов полученного уравнения (4.14) из (4.9) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= 1,5 + 0,25\lambda, \\ \int_0^1 f(\eta) d\eta &= 0,625 + 0,021\lambda, \\ \int_0^1 f^2(\eta) d\eta &= 0,486 + 0,023\lambda - 0,0006\lambda^2, \\ \int_0^1 f^2(\eta) d\eta - \int_0^1 f(\eta) d\eta &= -0,139 + 0,002\lambda - 0,0006\lambda^2, \\ 2\lambda \int_0^1 f^2(\eta) d\eta - \lambda \int_0^1 f(\eta) d\eta - \lambda + f'(0) &= 1,5 - 0,403\lambda + \\ &\quad + 0,025\lambda^2 - 0,0012\lambda^3. \end{aligned} \right\} (4.15)$$

Вводя новое зависимое переменное

$$\frac{\delta^2}{\nu} = \zeta, \quad (4.16)$$

получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{3 - 0,806\lambda + 0,05\lambda^2 - 0,0024\lambda^3}{U(0,139 - 0,002\lambda + 0,0006\lambda^2)}. \quad (4.17)$$

При заданной функции $U(x)$ изменения скорости внешнего потока вдоль рассматриваемого контура дифференциальное уравнение (4.17) можно решать только либо графически, либо численным методом.

Если положить параметр λ равным нулю, то получим случай пограничного слоя на пластинке, разобранный в § 2. Для этого случая из (4.17) будем иметь:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{21,58}{U}.$$

Проводя интегрирование и определяя постоянное интегрирования из условия обращения в нуль толщины слоя у переднего края пластинки, получим:

$$\delta = 4,6 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (4.18)$$

Сопоставляя правую часть (4.18) с правой частью (2.19), мы видим, что различие в числовом коэффициенте имеет порядок 80%.

Рассмотренный пример использования интегральных соотношений является наиболее простым по своей схеме, однако доведение до конца интегрирования уравнения (4.17), хотя бы и численным методом, связано с большими трудностями благодаря тому, что правая

часть этого уравнения имеет особую точку при $U = 0$. Кроме того, этот метод заведомо неприменим к пограничному слою при замедленном течении жидкости во внешнем потоке. В ряде статей предложены другие методы использования интегральных соотношений. Из этих методов наиболее простым и широким по охвату различных случаев является метод Н. Е. Кочина и Л. Г. Лойцянского¹⁾.

§ 5. Приближённый метод решения уравнений пограничного слоя

В предшествующем параграфе был рассмотрен самый простой метод использования интегральных соотношений для ламинарного пограничного слоя, но расчёты оказались вполне удовлетворительными лишь для тех случаев, в которых продольный перепад давления оказывался либо отрицательным, либо был небольшим положительным. Для больших положительных перепадов давления в пограничном слое он мало пригоден. Кроме того, этот метод требовал графического или численного интегрирования нелинейного уравнения (4.17) для каждого распределения скорости внешнего потока вдоль пограничного слоя. Эти два обстоятельства и побуждали многих исследователей искать другие приближённые методы решения уравнений для пограничного слоя. Большая группа этих методов, получивших наибольшее применение к решению отдельных задач, основывается на специальном выборе независимых безразмерных переменных, позволяющем дифференциальные уравнения с частными производными (1.13) сводить либо к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению с числовыми коэффициентами, либо к некоторой последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений также с числовыми коэффициентами. В этих методах численно решается обыкновенное уравнение или группа уравнений и составляются соответственные таблицы. Эти таблицы затем могут быть использованы для целой группы соответственных задач (а не одной какой-либо задачи).

Чтобы показать конкретно сущность этих методов, рассмотрим подробно метод сведения уравнений (1.13) к одному обыкновенному уравнению для случая степенного закона изменения скорости внешнего потока, развитый в работах Фокнера и Скэна,²⁾ Хартри³⁾, Л. Г. Лойцянского⁴⁾ и др.

Пусть на внешней границе ламинарного пограничного слоя скорость частиц во внешнем потоке распределяется в продольном напра-

¹⁾ Кочин Н. Е. и Лойцянский Л. Г., Об одном приближённом методе расчёта ламинарного пограничного слоя, Доклады АН СССР, т. XXXVI, № 9, 1942.

²⁾ Falkner V. M. and Skan S. W., ARC RAM № 1314, 1930.

³⁾ Hartree D. R., Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 33, 1937.

⁴⁾ Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, 1950.

влении по закону

$$U(x) = cx^m, \quad (5.1)$$

где c — размерный коэффициент, связанный с размерностью длины и скорости соотношением

$$c = \frac{V}{l^m}. \quad (5.2)$$

Уравнения пограничного слоя (1.13) при использовании (3.12) и (5.1) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= c^2 m x^{2m-1} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

От размерных координат x и y перейдем к безразмерным, полагая

$$\left. \begin{aligned} x &= lx_1, \\ y &= \frac{l}{\sqrt{R}} y_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Если в выражении числа Рейнольдса

$$R = \frac{Vl}{\nu} \quad (5.5)$$

заменить скорость через коэффициент (5.2), то получим:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{cl^{m+1}}{\nu}, \\ y &= l^{\frac{1-m}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{c}} y_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} u &= Vu_1, \\ v &= \frac{V}{\sqrt{R}} v_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

и используя (5.6), уравнения (5.3) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= mx_1^{2m-1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Решения уравнений (5.8), вообще говоря, должны быть функциями безразмерных координат x_1 и y_1 . Поэтому при переходе к размерным координатам размерные решения уравнений (5.3) будут зависеть от масштаба длины l . Так как коэффициенты уравнений (5.3) не

содержат в явном виде масштаба длины l , то можно потребовать, чтобы безразмерные скорости u_1 и v_1 зависели не от отдельных безразмерных координат x_1 и y_1 , а от такой их комбинации, при которой исключалась бы зависимость размерных скоростей от масштаба длины l . Если обратиться к первому равенству (5.4) и к второму равенству (5.6), то можно заметить, что единственной комбинацией, не содержащей масштаба длины при переходе к размерным координатам, будет:

$$y_1 x_1^{\frac{m-1}{2}} = y \sqrt{\frac{\zeta}{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}.$$

На этом основании вводим новое независимое безразмерное переменное τ , полагая

$$\tau = y \sqrt{\frac{\zeta x^{m-1} m}{\nu}} = y \sqrt{\frac{U'(x)}{\nu}}, \quad (5.9)$$

где ζ — некоторое постоянное число. Из (5.9) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= \sqrt{\frac{U'(x)}{\nu}} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{1}{2} y U'' \sqrt{\frac{1}{\nu U'}} = \frac{1}{2} \frac{U''}{U'} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Теперь примем, что продольная составляющая вектора скорости в пограничном слое может быть представлена в виде

$$u(x, y) = U(x) \Phi'(\tau), \quad (5.11)$$

где штрих в правой части означает дифференцирование по τ . На основании условия прилипания и того, что нижняя граница слоя представляет собой линию тока, будем иметь следующие условия для неизвестной функции $\Phi(\tau)$:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0. \quad (5.12)$$

Используя соотношения (5.10) и (5.11), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= U' \Phi' + \frac{1}{2} \frac{U U''}{U'} \tau \Phi'', \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= U \sqrt{\frac{U'}{\nu}} \Phi'', \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{U U'}{\nu} \Phi'''. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Из уравнения несжимаемости, условия обращения в нуль скорости v на стенке $y = 0$ и первого равенства (5.10) получим:

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \sqrt{\frac{\nu}{U'}} \int_0^{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} d\tau,$$

Подставляя значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ из (5.13) и используя условия (5.12), будем иметь:

$$v = -\sqrt{\beta} U' \left[\Phi + \frac{1}{2} \frac{UU''}{U'^2} (\eta \Phi' - \Phi) \right]. \quad (5.14)$$

На основании (5.13) и (5.14) получим:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = UU' (\Phi'^2 - \Phi \Phi'') + \frac{1}{2} \frac{U^2 U''}{U'} \Phi \Phi''.$$

Следовательно, первое уравнение (5.3) представится в виде

$$\Phi'^2 - \Phi \Phi'' + \frac{1}{2} \frac{UU''}{U'^2} \Phi \Phi'' = \frac{c^2 m x^{2m-1}}{UU'} + \frac{1}{\beta} \Phi''.$$

Наконец, используя предположение (5.1) и полагая

$$\beta = \frac{2m}{m+1}, \quad (5.15)$$

получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции Φ :

$$\frac{d^3 \Phi}{d\eta^3} + \Phi \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} = \beta \left[\left(\frac{d\Phi}{d\eta} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.16)$$

Для решения уравнения (5.16) к условиям (5.12) необходимо присоединить условие на внешней границе слоя. Если считать слой асимптотическим, то дополнительное условие будет представляться в виде

$$\Phi'(\infty) = 1. \quad (5.17)$$

При каждом отдельном значении постоянного β уравнение (5.16) можно интегрировать численным методом. В цитированной выше работе Хартри приведена таблица 2 значений функции Φ' при различных значениях параметра β и таблица 3 вспомогательных функций, через которые вычисляются толщина вытеснения δ^* , толщина потери импульса δ^{**} и напряжение вязкости на стенке. Мы приводим некоторые выдержки из этих таблиц (см. стр. 276—277).

На основании второго равенства (5.13) получим следующее выражение для напряжения вязкости на стенке:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu U \sqrt{\frac{U'}{\beta}} \Phi''(0). \quad (5.18)$$

Толщина слоя вытеснения δ^* была определена выше формулой (2.20). Подставляя в эту формулу значение u из (5.9), получим:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^{\infty} [1 - \Phi'(\eta)] d\eta \cdot \sqrt{\frac{\nu \beta}{U'}} = A(\beta) \sqrt{\frac{\nu \beta}{U'}}. \quad (5.19)$$

Условная толщина потери импульса, являющаяся мерой изменения количества движения за счёт образования пограничного слоя, определяется равенством

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

Подставляя значение u из (5.9), получим:

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \Phi'(\eta) [1 - \Phi'(\eta)] d\eta \cdot \sqrt{\frac{\nu \beta}{U'}} = B(\beta) \sqrt{\frac{\nu \beta}{U'}}. \quad (5.20)$$

Значения функций, входящих в равенства (5.18), (5.19) и (5.20), берут из таблицы 3.

Таблица 3

β	$A(\beta)$	$B(\beta)$	$\Phi''(0)$
-0,1988	2,359	0,585	0,0000
-0,19	2,007	0,577	0,086
-0,18	1,871	0,568	0,1285
-0,16	1,708	0,552	0,1905
-0,14	1,597	0,539	0,2395
-0,10	1,444	0,515	0,3191
0,00	1,217	0,470	0,4696
0,10	1,080	0,435	0,5870
0,20	0,984	0,408	0,6869
0,30	0,911	0,386	0,7748
0,40	0,853	0,367	0,8542
0,50	0,804	0,350	0,9277
0,60	0,764	0,336	0,996
0,80	0,699	0,312	1,120
1,00	0,648	0,292	1,2326
1,20	0,607	0,276	1,336
1,60	0,544	0,250	1,521
2,00	0,498	0,231	1,687

Заметим, что случай $m = 0$ отвечает прямолинейно-параллельному внешнему потоку с постоянной скоростью c , обтекающему продольно-прямолинейную пластинку. Для положительных значений показателя в (5.1) мы будем получать так называемые *ускоренные потоки*, которые имеют место в конфузурных (сходящихся) каналах, а для отрицательных значений m будем иметь *замедленные потоки* в диффузорных каналах. Наконец, случай $m = 1$ мы получаем для пограничного слоя в передней критической точке при обтекании внешним потоком выпуклого контура. В этом последнем случае $U' = \text{const}$, и поэтому из (5.19) и (5.20) будет следовать, что обе толщины не

будут зависеть от координаты x , т. е. толщина пограничного слоя вблизи критической точки будет постоянной. Из этих же формул при учёте (5.1) будет следовать, что при $m < 1$ толщина пограничного слоя будет расти по течению, как и в случае пограничного слоя на пластинке. Наибольший рост толщины пограничного слоя по течению будет иметь место в замедленных потоках при $m < 0$, тогда как при ускоренном течении при $m > 1$ толщина пограничного слоя будет даже убывать по течению.

На основании таблицы 1 получается, что при $\beta = -0,1988$, т. е. при $m = -0,0904$, при убывании скорости внешнего потока по закону

$$U = cx^{-0,0904}$$

величина $\Phi''(0)$ обращается в нуль, и поэтому согласно (5.18) сила трения будет обращаться в нуль на всей стенке соответствующего канала. Этот случай можно рассматривать как предельный случай того безотрывного движения в пограничном слое, который может быть изучен этим методом, так как при $\beta < -0,1988$ пограничный слой либо вообще не может существовать, либо развитый выше метод становится неприменимым.

Таким образом, задавая различные значения для показателя m , можно получить различные по своему характеру течения в пограничном слое и эти течения будут сходны с теми течениями, которые имеют место в отдельных частях действительного пограничного слоя, например на крыле: вблизи критической точки ($m = 1$), вблизи точки наименьшего давления ($m = 0$) и вблизи точки отрыва ($m = -0,0904$).

§ 6. Приближённые уравнения теории пограничного слоя

Для решения отдельных задач были использованы в некоторых случаях упрощённые уравнения пограничного слоя, учитывающие квадратичные члены инерции в левой части первого уравнения (1.13) не полностью. Если, например, воспользоваться идеей метода Озеена и заменить u в первом слагаемом (1.13) через скорость частиц $U(x)$ на границе слоя и совершенно отбросить второе слагаемое, то получим приближённые уравнения теории пограничного слоя

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Уравнения вида (6.1) были уже использованы в § 3 главы VII для задачи погружения пластинки в вязкую среду. Если сравнить полученное там значение напряжения вязкости на пластинке (3.11)

с напряжением вязкости, полученным в § 2 на основании полных уравнений пограничного слоя, то можно заметить различие в значениях числовых коэффициентов порядка 65%. Таким образом, приближённые уравнения (6.1) являются грубо приближёнными, дающими заведомо преувеличенные значения для напряжения вязкости. К этим уравнениям можно обращаться лишь в тех крайних случаях, в которых не может быть использован ни один из известных приближённых методов решения полных уравнений пограничного слоя (1.13). Например, в работах Л. Г. Лойцянского¹⁾ приближённые уравнения (6.1) были использованы для изучения пространственного пограничного слоя на стыке двух плоскостей. В этом случае ни один из известных методов решения уравнений (1.13) не может быть использован.

Уравнения (6.1) используются также для изучения движения жидкости в области позади тела в предположении, что движение считается ламинарным и распределение скоростей по начальному сечению этой области «следа» за телом считается известным из решений уравнений для пограничного слоя²⁾.

Упрощение вида первого уравнения (1.13) пограничного слоя можно произвести и другими способами. Вместо способа частичного учёта квадратичных членов инерции можно, например, применить способ осреднённого их учёта аналогично тому, как это было сделано в § 10 главы VI по отношению к смазочному слою. При таком способе упрощения уравнения пограничного слоя принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\nu} W_x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где W_x — среднее по толщине слоя значение проекции вектора ускорения на направление касательной к рассматриваемому контуру

$$W_x = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy. \quad (6.3)$$

Учитывая граничные условия (1.14) и (1.15) и уравнение несжимаемости и проводя преобразования, которые были проведены в § 3,

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Взаимодействие пограничных слоёв, Труды ЦАГИ, вып. 249, 1936; Об одной задаче пространственного пограничного слоя, Труды ЛИИ, раздел физ.-мат. наук, № 1, 1937.

²⁾ Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, ГТТИ, 1941, стр. 118.

среднее ускорение W_x можно представить в виде

$$W_x = \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy \right]. \quad (6.4)$$

Таким образом, задача изучения движения жидкости в пограничном слое будет сводиться к решению первого уравнения (6.2) и к использованию соотношения (6.4) для определения толщины слоя.

Наконец, можно сохранить все уравнения (6.2), а ускорение определять не с помощью осреднения, а каким-либо другим способом, например с помощью соотношения

$$W_x(x, y) = u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (6.5)$$

в котором скорость u считается заранее заданной функцией, удовлетворяющей граничным условиям на границах слоя¹⁾.

Рассмотрим применение упрощенной теории пограничного слоя, представляемой первым уравнением (6.2) и соотношением (6.4). Решение первого уравнения (6.2) будет представляться в виде

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho W_x \right) y^2 + C_1 y + C_2. \quad (6.6)$$

Как уже было указано в § 4, основные граничные условия для скорости u имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \quad u &= 0, \\ \text{при } y=\delta \quad u &= U(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Удовлетворяя этим условиям, получим:

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2\nu} W_x = -\frac{U}{\delta^2}, \quad (6.8)$$

$$u = -\frac{U}{\delta^2} (y^2 - 2\delta y). \quad (6.9)$$

Используя равенство (6.9), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\delta} u dy &= \frac{2}{3} U\delta, \\ \int_0^{\delta} u^2 dy &= \frac{8}{15} U^2\delta. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

¹⁾ Тарг С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостехиздат, 1951.

Подставляя в (6.4) значение среднего ускорения из (6.8) и используя равенства (6.10), получим:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\nu U}{\delta^2} = \frac{2}{15} \left(3UU' - U^2 \frac{\delta'}{\delta} \right). \quad (6.11)$$

Если давление определять из интеграла Бернулли, то будем иметь:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -UU',$$

и соотношение (6.11) перейдет в следующее дифференциальное уравнение для толщины пограничного слоя:

$$2\delta\delta' + 9 \frac{U'}{U} \delta^2 = \frac{30\nu}{U}. \quad (6.12)$$

Решение этого линейного уравнения относительно δ^2 представляется в виде

$$\delta^2 = \frac{30\nu}{U^9} \left(\int U^8 dx + C_3 \right). \quad (6.13)$$

Таким образом, толщина пограничного слоя определяется одной лишь квадратурой. Постоянное C_3 должно быть определено либо из условия задания толщины слоя для начала отсчёта криволинейной координаты, либо из какого-нибудь другого условия.

Для случая прямолинейной пластинки можно положить:

$$U = \text{const}, \quad C_3 = 0.$$

Тогда из (6.13) получим:

$$\delta = 5,48 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (6.14)$$

Сопоставляя правую часть (6.14) с правой частью (2.22), мы приходим к заключению, что подсчёт толщины пограничного слоя с помощью упрощённых уравнений (6.2) и (6.4) даёт завышенное значение для числового коэффициента порядка 5,4%. Ошибка в определении значения числового коэффициента в формуле для толщины пограничного слоя по рассматриваемому методу оказывается всё же меньше, чем это получилось в § 4 при применении метода интегральных соотношений, а сами вычисления стали проще и не потребовали численного метода решения дифференциального уравнения.

Основная скорость u по толщине слоя распределяется по параболическому закону (6.9). По этой причине мы не можем установить положение точки отрыва пограничного слоя. Чтобы установить положение точки отрыва, необходимо предварительно уточнить полученное решение для основной скорости. Это уточнение можно произвести с помощью первого уравнения (6.2), если подставить в правую часть значение ускорения, подсчитываемое уже по формуле (6.5). Если подставить значение u из (6.9) в (6.5) и произвести

все вычисления, то для ускорения W_x получим многочлен четвёртой степени, а поэтому основная скорость, определяемая по первому уравнению (6.2), будет представляться во втором приближении уже многочленом шестой степени. Толщина слоя в этом приближении будет определяться равенством

$$\delta^2 = \frac{180}{7} \frac{\nu}{U^{38/7}} \left(\int_0^x U^{31/7} dx + C_4 \right), \quad (6.15)$$

а положение точки отрыва будет определяться из равенства

$$\lambda = \frac{U' \delta^2}{\nu} = -7,2.$$

Полученное значение (6.16) отличается от экспериментального значения (4.13) для эллиптического цилиндра на 30%, но всё же оно ближе к экспериментальному, чем то значение, которое получается при применении приближённого метода Польгаузена.

§ 7. Распространение тонкой ламинарной струи

Дифференциальные уравнения, выведенные для пограничного слоя вблизи твёрдой стенки, нашли своё применение и в изучении распространения движения от струи, втекающей в полубесконечное пространство, заполненное той же жидкостью, но находящейся на бесконечности в состоянии покоя. Если при обтекании твёрдой границы происходит распространение торможения от стенки внутрь потока благодаря вязкости, то при втекании струи в безграничную жидкость происходит распространение уже самого движения благодаря той же вязкости жидкости. Такое сходство явлений и обуславливает возможность использования одних и тех же дифференциальных уравнений.

Рассмотрим случай бесконечно тонкой плоской струи типа источника. Начало координат поместим в точке источника струи, ось x направим по плоскости симметрии, а ось y — перпендикулярно к этой плоскости. Так как через элементарный отрезок dy проходящая масса $\rho u dy$ переносит с собой количество движения $\rho u dy u$, то полное количество движения, переносимое всей струей через всю прямую, параллельную оси u , будет представляться в виде

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy. \quad (7.1)$$

Если жидкость простирается до бесконечности и там находится в покое и если нет каких-либо твёрдых границ внутри жидкости, то давление можно считать всюду постоянным, т. е.

$$p = \text{const.} \quad (7.2)$$

Применяя теорему об изменении количества движения жидкости к области между двумя прямыми, параллельными оси y , и используя постоянство давления, мы приходим к выводу о постоянстве переносимого струёй количества движения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \text{const} = J_0 = \rho K_0. \quad (7.3)$$

Полное количество движения, переносимое струёй, называется *импульсом струи*. Импульс струи считается заданным, так как считается заданным распределение скоростей в начальном сечении струи.

Для изучения движения частиц внутри струи используются уравнения (1.13) пограничного слоя. Эти уравнения при использовании постоянства давления принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

На линии симметрии продольная составляющая вектора скорости должна быть наибольшей, а поперечная составляющая должна обратиться в нуль. Таким образом, для линии $y=0$ будем иметь следующие граничные условия:

$$\text{при } y=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \quad (7.5)$$

Считая, что движение от струи распространяется до бесконечности, будем иметь дополнительное условие:

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow 0. \quad (7.6)$$

Таким образом, задача изучения движения жидкости в плоской струе сводится к решению уравнений (7.4) при граничных условиях (7.5) и (7.6) и при интегральном инварианте (7.3).

Для случая струи типа источника можно методом размерностей свести уравнения (7.4) к одному обыкновенному уравнению. В этом случае единственной заданной размерной величиной будет импульс струи i , следовательно, масштабы длины l и скорости U будут связаны одним соотношением

$$\frac{U^2 l}{\sqrt{R}} n = K_0, \quad (7.7)$$

где R — число Рейнольдса, а n — неопределённое пока безразмерное число. Пользуясь этим соотношением, мы можем, например, масштаб длины выразить через масштаб скорости в виде

$$l = \frac{K_0^2}{\sqrt{n^2}} U^{-3}. \quad (7.8)$$

При таком выборе масштаба длины формулы перехода от размерных координат и скоростей к безразмерным будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= lx_1 = \frac{K_0^2}{\sqrt{vn^2}} U^{-3} x_1, \\ y &= \frac{l}{\sqrt{R}} y_1 = \frac{K_0}{n} U^{-2} y_1, \\ u &= U u_1, \\ v &= \frac{U}{\sqrt{R}} v_1 = \frac{nv}{K_0} U^2 v_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Уравнения (7.4) при переходе к безразмерным координатам и скоростям примут вид

$$\left. \begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Если мы построим решения уравнений (7.10) и затем перейдем к размерным величинам, то размерные скорости окажутся функциями произвольного масштаба скорости U , который в размерные уравнения (7.4) не входит. Следовательно, можно потребовать, чтобы размерные скорости не зависели от произвольного масштаба скорости U . Если положить

$$u_1 = f(x_1, y_1) = f\left(\frac{\sqrt{vn^2}}{K_0^2} U^3 x, \frac{nU^2}{K_0} y\right), \quad (7.11)$$

то требование независимости размерной скорости от масштаба U даёт:

$$\frac{d}{dU} \left[U f\left(\frac{\sqrt{vn^2}}{K_0^2} U^3 x, \frac{nU^2}{K_0} y\right) \right] = 0.$$

Выполняя дифференцирование и используя (7.9), получим следующее уравнение:

$$f + 3x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + 2y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0. \quad (7.12)$$

Применяя метод характеристик, получим:

$$\frac{df}{-f} = \frac{dx_1}{3x_1} = \frac{dy_1}{2y_1}.$$

Интегралами этих уравнений характеристик будут:

$$fx_1^{1/3} = C_1, \quad y_1 x_1^{-2/3} = C_2,$$

и поэтому решение уравнения (7.12) будет представляться в виде

$$u_1 = f(x_1, y_1) = x_1^{-1/3} \varphi(y_1 x_1^{-2/3}). \quad (7.13)$$

Таким образом, новым независимым безразмерным переменным будет:

$$\eta = y_1 x_1^{-2/3}, \quad (7.14)$$

и для этого переменного будем иметь:

$$\frac{d\eta}{dy_1} = x_1^{-2/3}, \quad \frac{d\eta}{dx_1} = -\frac{2}{3} y_1 x_1^{-5/3} = -\frac{2}{3} x_1^{-1} \eta. \quad (7.15)$$

Если ввести безразмерную функцию тока, полагая

$$\psi(x_1, y_1) = \int_0^{y_1} u_1 dy_1 = x_1^{-1/3} \int_0^{y_1} \varphi(\eta) dy_1 = x_1^{1/3} \int_0^{\eta} \varphi(\eta) d\eta = x_1^{1/3} F(\eta), \quad (7.16)$$

то получим:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= x_1^{-1/3} F'(\eta), & v_1 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} [2\eta F'(\eta) - F], \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{1}{3} x_1^{-4/3} (F' + 2\eta F''), \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= x_1^{-1} F'', & \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} &= x_1^{-5/3} F'''. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

При подстановке этих равенств в первое уравнение (7.10) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для введённой функции тока $F(\eta)$:

$$F''' + \frac{1}{3} (F'^2 + FF'') = 0. \quad (7.18)$$

Из граничных условий (7.5) получим следующие условия для искомой функции $F(\eta)$:

$$\eta = 0, \quad F''(0) = 0, \quad F(0) = 0. \quad (7.19)$$

Непосредственно находим первый интеграл уравнения (7.18) в виде

$$F'' + \frac{1}{3} FF' = C. \quad (7.20)$$

На основании граничных условий (7.19) постоянную C необходимо положить равной нулю:

$$C = 0.$$

Выполняя дальнейшее интегрирование уравнения (7.20), найдём:

$$F' + \frac{1}{6} F^2 = D. \quad (7.21)$$

На основании равенств (7.17) и (7.9) размерная продольная составляющая скорости будет представляться в виде

$$u = U u_1 = (\nu x)^{-1/3} \left(\frac{K_0}{n} \right)^{2/3} F'(\eta). \quad (7.22)$$

Распорядимся выбором неопределённого числа n так, чтобы

$$F'(0) = 1. \quad (7.23)$$

При этом условии и втором условии (7.19) постоянное интегрирования D должно равняться единице. Таким образом, получим для функции $F(\eta)$ следующее уравнение первого порядка:

$$F' + \frac{1}{6} F^2 = 1. \quad (7.24)$$

Решая это уравнение методом разделения переменных и используя второе условие (7.19), получим конечное выражение для искомой функции в виде

$$F(\eta) = \sqrt{6} \operatorname{th} \left(\frac{\eta}{\sqrt{6}} \right). \quad (7.25)$$

На основании (7.25) и первых равенств (7.17) получим следующие выражения для безразмерных скоростей:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= x_1^{-1/3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{\sqrt{6}}}, \\ v_1 &= \frac{1}{3} x_1^{-2/3} \left[\frac{2\eta}{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{\sqrt{6}}} - \sqrt{6} \operatorname{th} \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Для максимальной скорости на линии симметрии будем иметь:

$$u_{1m} = x_1^{-1/3}. \quad (7.27)$$

Связь между продольной скоростью и максимальной выражается в виде

$$u_1 = u_{1m} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{\sqrt{6}}}. \quad (7.28)$$

Переходя в равенстве (7.3) к безразмерным величинам на основании (7.9), (7.15) и (7.26), получим следующее выражение для числа n :

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 dy_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\operatorname{ch}^4 \frac{\eta}{\sqrt{6}}} = \frac{4}{3} \sqrt{6} = 3,27. \quad (7.29)$$

В заключение подсчитаем расход через бесконечную прямую, параллельную оси y :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} u dy = \frac{K_0}{n} U^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy_1 = \frac{K_0}{n} x_1^{1/3} U^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} F'(\eta) d\eta =$$

$$= \left(\frac{\nu K_0 x}{n}\right)^{1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{\sqrt{6}}} = 2\sqrt{6} \left(\frac{\nu K_0 x}{n}\right)^{1/3}. \quad (7.30)$$

Таким образом, расход через начальное сечение струи ($x=0$) равен нулю, а затем расход растёт благодаря подтеканию с боков струи. Примерный характер линий тока, определяемых по уравнению

$$x_1^{1/3} F(\eta) = \text{const}, \quad (7.31)$$

показан на рис. 72.

Обращаемся теперь к рассмотрению пространственной ламинарной струи, имеющей ось симметрии. Расстояние точки до оси симметрии будем обозначать через r .

Импульс пространственной струи необходимо определить в виде

$$2\pi \int_0^{\infty} \rho v_x^2 r dr = \rho K_0, \quad (7.32)$$

где v_x представляет осевую компоненту скорости. В силу отсутствия стенок давление можно полагать всюду постоянным:

$$p = \text{const}.$$

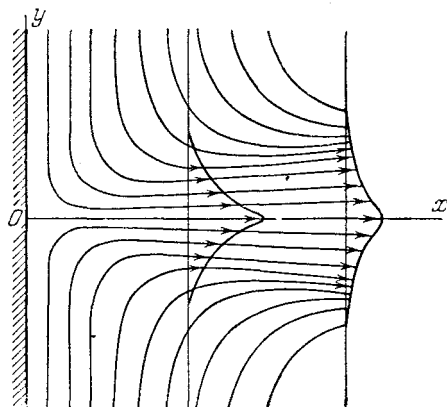


Рис. 72.

Если обратиться к уравнению для осевой компоненты скорости и уравнению несжимаемости в цилиндрических координатах (7.1) главы IV и в первом из них отбросить слагаемое $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ в правой части, то получим те уравнения, которые применяются для изучения пространственного пограничного слоя на теле вращения и для изучения распространения движения от ламинарной пространственной струи:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial (rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Граничные условия для пространственной струи будут следующие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = 0 \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0, \quad v_r = 0, \\ \text{при } r \rightarrow \infty \quad v_x \rightarrow 0. \end{array} \right\} \quad (7.34)$$

В случае струи типа источника уравнения (7.33) можно таким же методом, как и для плоской струи, свести к обыкновенному уравнению для функции тока.

Если положить:

$$\left. \begin{array}{l} R = \frac{lU}{\nu}, \\ v_x = Uu_1, \\ r = \frac{l}{\sqrt{R}} r_1 = \sqrt{\frac{l\nu}{U}} r_1, \end{array} \right\} \quad (7.35)$$

то на основании равенства (7.32) будем иметь:

$$K_0 = 2\pi\nu lU \int_0^\infty u_1^2 r_1 dr_1. \quad (7.36)$$

Выберем масштаб для скорости U так, чтобы выполнялось равенство

$$K_0 = \nu lU, \quad (7.37)$$

тогда из (7.36) получим:

$$2\pi \int_0^\infty u_1^2 r_1 dr_1 = 1. \quad (7.38)$$

Если масштаб длины l оставить произвольным, а масштаб скорости определить из (7.37) в виде

$$U = \frac{K_0}{\nu l}, \quad (7.39)$$

то число Рейнольдса представится в виде:

$$R = \frac{K_0}{\nu^2}. \quad (7.40)$$

Тогда формулы преобразования размерных величин в безразмерные будут:

$$\left. \begin{array}{l} x = lx_1, \quad r = \frac{l}{\sqrt{R}} r_1 = \frac{l\nu}{\sqrt{K_0}} r_1, \\ v_x = \frac{K_0}{\nu l} u_1, \quad v_r = \frac{U}{\sqrt{R}} v_1 = \frac{\sqrt{K_0}}{l} v_1. \end{array} \right\} \quad (7.41)$$

Используя эти формулы преобразования (7.41), получим из (7.33) безразмерные уравнения

$$\left. \begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_1}{\partial r_1}, \\ \frac{\partial (r_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (r_1 v_1)}{\partial r_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

Решения уравнений (7.42) будут зависеть от отдельных безразмерных координат x_1 и r_1 , и поэтому при переходе к размерным координатам размерные скорости будут зависеть от произвольного масштаба длины l , который в уравнения (7.33) не входит. Можно потребовать, чтобы осевая компонента скорости v_x не зависела от l . Если положить:

$$v_x = U u_1 = \frac{K_0}{\sqrt{l}} f(x_1, r_1) = \frac{K_0}{\sqrt{l}} f\left(\frac{x}{l}, \frac{\sqrt{K_0}}{\sqrt{l}} r\right), \quad (7.43)$$

то требование независимости скорости v_x от l даст:

$$\frac{dv_x}{dl} = \frac{d}{dl} \left[\frac{K_0}{\sqrt{l}} f\left(\frac{x}{l}, \frac{\sqrt{K_0}}{\sqrt{l}} r\right) \right] = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получим уравнение

$$f + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} = 0.$$

Решение этого уравнения, построенное по методу характеристик, будет следующее:

$$f = u_1 = \frac{1}{x_1} \varphi\left(\frac{r_1}{x_1}\right). \quad (7.44)$$

Таким образом, новым безразмерным независимым переменным, являющимся комбинацией прежних независимых переменных, будет:

$$\eta = \frac{r_1}{x_1}. \quad (7.45)$$

Если обратиться ко второму уравнению (7.42) и использовать условия (7.34) и равенства (7.44) и (7.45), то получим следующее выражение для радиальной скорости:

$$r_1 v_1 = - \int_0^{r_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (r_1 u_1) dr_1 = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_0^{\eta} \eta \varphi(\eta) x_1 d\eta \right]. \quad (7.46)$$

Вводим функцию тока ψ , полагая

$$r_1 u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial r_1}, \quad r_1 v_1 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (7.47)$$

Подставляя в левые части (7.47) значения скоростей из (7.46) и (7.44), получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[x_1 \int_0^{\eta} \varphi(\eta) \eta d\eta \right], \quad \eta \varphi(\eta) = \frac{\partial \psi}{\partial r_1}. \quad (7.48)$$

На основании этих равенств функция тока равна

$$\psi = x_1 \int_0^{\eta} \varphi(\eta) \eta d\eta = x_1 F(\eta). \quad (7.49)$$

Компоненты скорости и их производные через введённую функцию $F(\eta)$ выражаются по формулам

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} = \frac{x_1}{r_1} F' \frac{\partial \eta}{\partial r_1} = \frac{1}{x_1 \eta} F', \\ v_1 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1 \eta} F + \frac{1}{x_1} F', \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{1}{x_1^2 \eta} F' - \frac{1}{x_1 \eta^2} F' \left(-\frac{\eta}{x_1} \right) - \frac{F''}{x_1^2} = -\frac{F''}{x_1^2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial r_1} &= -\frac{F'}{x_1^2 \eta^2} + \frac{1}{x_1^2 \eta} F'', \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r_1^2} &= \frac{2F'}{x_1^3 \eta^3} - \frac{2F''}{x_1^2 \eta^2} + \frac{1}{x_1^3 \eta} F'''. \end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

Если подставить выражения (7.50) в первое уравнение (7.42), то получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F''' - \frac{1}{\eta} F'' + \frac{1}{\eta^2} F' = \frac{1}{\eta^2} FF' - \frac{1}{\eta} F'^2 - \frac{1}{\eta} FF''. \quad (7.51)$$

Так как

$$\begin{aligned} F''' - \frac{1}{\eta} F'' + \frac{1}{\eta^2} F' &= \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right)', \\ \frac{1}{\eta^2} FF' - \frac{1}{\eta} F'^2 - \frac{1}{\eta} FF'' &= - \left(\frac{FF'}{\eta} \right)', \end{aligned}$$

то первый интеграл уравнения (7.51) будет:

$$F' - \eta F'' = FF' + C. \quad (7.52)$$

Для определения постоянного заметим, что на оси симметрии струи осевая компонента скорости должна быть конечной, а это может быть на основании первого равенства (7.50), если числитель при $\eta = 0$ будет обращаться в нуль, т. е.

$$\eta = 0, \quad F'(0) = 0. \quad (7.53)$$

При выполнении условия (7.53) постоянное C должно обращаться в нуль, а уравнение для функции $F(\eta)$ примет вид

$$F' - \eta F'' = FF'. \quad (7.54)$$

Решение этого уравнения, регулярное при $\eta = 0$, можно искать в виде степенного ряда

$$F(\eta) = a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + a_5\eta^5 + a_6\eta^6 + \dots$$

Подставляя этот ряд в (7.54) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях η , получим:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0, \\ a_4 &= -\frac{1}{4} a_2^2, \\ a_5 &= 0, \\ a_6 &= \frac{1}{16} a_2^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, регулярное решение уравнения (7.54) будет представляться в виде

$$F(\eta) = a_2\eta^2 \left[1 - \frac{1}{4} a_2\eta^2 + \left(\frac{1}{4} a_2\eta^2 \right)^2 + \dots \right].$$

Выражение в скобке есть геометрическая прогрессия, сумма которой равна

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{4} a_2\eta^2}.$$

Таким образом, решение уравнения (7.54), удовлетворяющее условиям (7.34) и (7.53), будет следующее:

$$F(\eta) = \frac{4a_2\eta^2}{4 + a_2\eta^2}. \quad (7.55)$$

Для определения коэффициента a_2 необходимо обратиться к равенству (7.38), которое при замене u_1 и r_1 будет иметь вид

$$2\pi \int_0^{\infty} F'^2 \frac{d\eta}{\eta} = 1.$$

Так как

$$F'(\eta) = \frac{32a_2\eta}{(4 + a_2\eta^2)^2},$$

то для определения a_2 получим равенство

$$2\pi 16^2 \cdot 2a_2 \int_0^{\infty} \frac{2a_2 \eta d\eta}{(4 + a_2 \eta^2)^4} = 1,$$

откуда

$$a_2 = \frac{3}{16\pi}. \quad (7.56)$$

Таким образом, распределение безразмерных скоростей в ламинарной пространственной струе будет определяться согласно равенствам

$$u_1 = \frac{6}{\pi x_1 \left(4 + \frac{3}{16\pi} \eta^2\right)^2}, \quad v_1 = \frac{3}{\pi x_1} \frac{\eta - \frac{3}{64\pi} \eta^3}{\left(4 + \frac{3}{16\pi} \eta^2\right)^2}. \quad (7.57)$$

Расход через всю плоскость, перпендикулярную к оси струи, равен

$$Q = 2\pi \int_0^{\infty} v_x r dr = 2\pi l \int_0^{\infty} u_1 r_1 dr_1 = 2\pi l x_1 \int_0^{\infty} F'(\eta) d\eta = 8\pi \nu x. \quad (7.58)$$

Таким образом, и здесь расход в начальном сечении ($x = 0$) равен нулю, а затем по мере удаления от источника струи расход растёт за счёт подтекания в струю жидкости с боковых сторон благодаря увлечению движущимися частицами частиц покоящейся среды.

Максимальная скорость на оси струи будет равна

$$v_{xm} = \frac{K_0}{\sqrt{l}} u_{1m} = \frac{3K_0}{8\pi \nu x}. \quad (7.59)$$

На основании первого равенства (7.39) и (7.57) получим следующее выражение для размерной осевой скорости в произвольной точке струи:

$$v_x = U u_1 = \frac{K_0}{\sqrt{l}} \frac{6}{\pi x_1 \left(4 + \frac{3}{16\pi} \eta^2\right)^2}. \quad (7.60)$$

Относя осевую скорость (7.60) к её максимальному значению на оси при той же абсциссе $x = lx_1$, получим:

$$\frac{v_x}{v_{xm}} = \frac{16}{\left(4 + \frac{3}{16\pi} \frac{K_0}{\nu^2} \frac{r^2}{x^2}\right)^2}. \quad (7.61)$$

Если в качестве *условной границы струи* принять поверхность, для которой левая часть (7.61) равна 0,01, то уравнение этой поверхности будет представляться в виде

$$\frac{r}{x} = 8 \sqrt{3\pi} \frac{\nu}{\sqrt{K_0}} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.62)$$

т. е. внешней границей рассматриваемой ламинарной струи будет конус, угол раствора которого прямо пропорционален коэффициенту вязкости жидкости и обратно пропорционален квадратному корню из импульса струи.

Сопоставляя (7.30) и (7.58), мы видим, что расход в плоской струе зависит от импульса струи, тогда как расход в пространственной струе от импульса струи не зависит. На основании равенства (7.28) можно получить, что условная граница плоской струи будет криволинейной, тогда как для пространственной струи эта условная граница оказалась прямолинейной.

§ 8. Применение теории пограничного слоя к вопросу о затухании вращения тела в потоке

Результаты теории пограничного слоя широко используются для подсчёта сопротивления трения при поступательном движении тел в вязкой среде. Однако эти результаты могут быть использованы также и при изучении отдельных случаев вращательного движения тела при набегании на него потока воздуха ¹⁾. Чтобы это показать, рассмотрим предварительно следующую задачу.

Допустим, что пластинка, имеющая в направлении оси x ширину l , обдувается потоком воздуха, скорость которого U на бесконечности параллельна оси x . Сама же пластинка перемещается со скоростью V в положительном направлении оси z , перпендикулярно к своей ширине (рис. 73). Сообщим пластинке и всем частицам воздуха скорость V в направлении, обратном движению пластинки. В таком случае пластинка будет неподвижной, а частицы набегающего потока воздуха будут иметь вектор скорости U_1 , численная величина которого будет равна

$$U_1 = \sqrt{U^2 + V^2},$$

причём этот вектор скорости будет составлять с передним ребром пластинки угол α , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U}{V}.$$

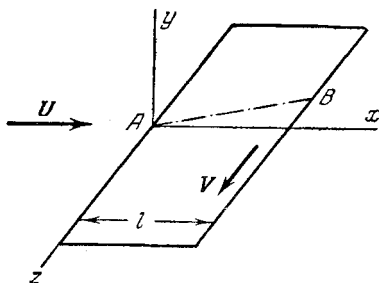


Рис. 73.

¹⁾ Слёзкин Н. А., Затухание собственного вращения снаряда, ДАН СССР, т. XXX, № 4, 1941.

Если мы будем проводить плоскости, параллельные результирующей скорости U_1 , перпендикулярно к пластинке, то в каждой такой плоскости движение воздуха будет одинаковым, и, следовательно, мы можем данный поток рассматривать как плоско-параллельный. Иначе говоря, мы можем ограничиться рассмотрением движения воздуха только в одной плоскости, проведённой через косою разрез AB пластинки. При этом длина косою разреза l_1 пластинки будет равна

$$l_1 = \frac{l}{U} \sqrt{U^2 + V^2}.$$

Рассматриваем теперь в плоскости проведённого разреза пограничный слой. Будем предполагать этот слой ламинарным. Если мы обозначим через x_1 расстояние какой-либо точки на пластинке от её переднего края, то на основании формул (2.22) и (2.15) толщина слоя δ и сила вязкости τ равны

$$\delta = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_1}}, \quad (8.1)$$

$$\tau = 0,332 U_1^{3/2} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x_1}}. \quad (8.2)$$

Разложим вектор силы вязкости на две составляющие, параллельные осям x и z . Составляющая, параллельная оси z , будет равна

$$\tau_z = \frac{V}{U_1} \tau = 0,332 V (U^2 + V^2)^{1/4} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x_1}}. \quad (8.3)$$

Умножая обе части равенства (8.3) на dx_1 и интегрируя от нуля до l_1 , получим для силы трения, тормозящей движение пластинки в направлении оси z и приходящейся на единицу длины пластинки в этом же направлении, выражение

$$F_z = 0,664 V \left(1 + \frac{V^2}{U^2}\right)^{1/2} \sqrt{\rho \mu l U}. \quad (8.4)$$

Вводя число Рейнольдса

$$R = \frac{Ul}{\nu}$$

и коэффициент сопротивления трения обеих сторон пластинки

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{R}}, \quad (8.5)$$

полученную силу торможения движения пластинки (8.4) можем представить в виде

$$F_z = \frac{1}{2} C_f \rho U^2 l \frac{V}{U} \left(1 + \frac{V^2}{U^2}\right)^{1/2}. \quad (8.6)$$

Допустим, что вместо пластинки мы имеем круглый цилиндр длины l и радиуса a , который вращается вокруг своей оси с угло-

вой скоростью ω и обдувается потоком воздуха с наружной стороны поверхности цилиндра в направлении, параллельном оси цилиндра. Заменяя в правой части (8.6) скорость V через ωa , получим силу торможения, приходящуюся на единицу длины окружности поперечного сечения. Умножая (8.6) на длину окружности $2\pi a$ и радиус a , получим полный момент сил торможения вращения рассматриваемого цилиндра

$$L = C_f \pi a^3 \rho l \omega U \left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \right)^{1/2}. \quad (8.7)$$

Таким образом, момент сил трения, тормозящий вращение цилиндра, зависит не только от угловой скорости вращения, но и от скорости набегающего потока воздуха. Обозначим момент инерции цилиндра относительно его продольной оси через J , тогда дифференциальное уравнение вращения представится в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = - C_f \pi a^3 \rho l \omega U \left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \right)^{1/2}. \quad (8.8)$$

Если скорость набегающего потока будет известна как функция времени, то с помощью численных расчётов можно определить степень затухания вращения цилиндра, помещённого в потоке воздуха. Будем считать произведение ωa настолько малым по сравнению с U , что можно пренебречь отношением $\frac{1}{2} \left(\frac{\omega a}{U} \right)^2$ по сравнению с единицей, тогда из (8.7) получим:

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\pi a^3 \rho l}{J} \int_0^{1/2} C_f U dt} \quad (8.9)$$

где ω_0 — начальная угловая скорость вращения.

Коэффициент сопротивления, входящий в (8.9), определяется формулой (8.5). Если режим течения в пограничном слое не будет ламинарным, то значение коэффициента C_f необходимо взять из соответственных формул для сопротивления трения пластинки при турбулентном режиме либо из результатов соответственных экспериментов.

§ 9. Пограничный слой на теле вращения

Дифференциальные уравнения установившегося движения несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах в предположении, что движение жидкости является осесимметричным, т. е.

$$v_\varphi = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad (9.1)$$

принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial (rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} &= 0, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Рассмотрим случай обтекания безграничным потоком тела вращения, имеющего уравнение поверхности

$$r_0 = r_0(x). \quad (9.3)$$

При этом предположим, что начало оси x расположено в передней критической точке (рис. 74). Благодаря тормозящему действию неподвижной поверхности и вязкости жидкости образуется пограничный слой, облегающий всю переднюю часть поверхности тела. Если исключить из рассмотрения ту небольшую часть пограничного слоя вблизи самой критической точки, то

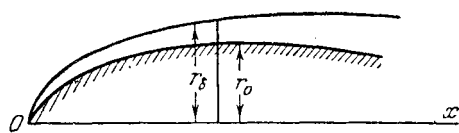


Рис. 74.

толщина слоя, отсчитываемая по нормали к поверхности тела, будет мало отличаться от разности значений цилиндрического радиуса r , взятого для точки на границе слоя и для точки с той же абсциссой на поверхности тела

$$r_b - r_0 = h. \quad (9.4)$$

Следовательно, за меру толщины слоя можно взять h . Будем, далее, предполагать отношение условной толщины слоя h к соответственному радиусу поверхности тела r_0 настолько малым, что им можно пренебречь, т. е.

$$\frac{h}{r_0} \approx 0. \quad (9.5)$$

Полагая для точек внутри пограничного слоя

$$r = r_0 + y, \quad (9.6)$$

будем иметь:

$$(dr)_{x=\text{const}} = dy, \quad v_r = v_y,$$

и поэтому дифференцирование по r можно заменить дифференцированием по y . Но в силу предположения (9.5) мы можем, например, в третьем уравнении (9.2) заменить r через r_0 . Таким образом,

уравнение несжимаемости для пограничного слоя на теле вращения можно представить в виде

$$\frac{\partial [r_0(x) v_x]}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [r_0(x) v_y] = 0. \quad (9.7)$$

Если положить

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{Ul}{v}, \\ x &= lx_1, \quad y = \frac{l}{\sqrt{R}} y_1, \\ v_x &= Uu_1, \quad v_y = \frac{U}{\sqrt{R}} v_1 \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

и в уравнениях сохранить лишь члены порядка единицы, то из первых двух уравнений (9.2) можно получить те же уравнения, которые были получены в § 1 для плоского пограничного слоя, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

К тем же уравнениям (9.7) и (9.9) можно прийти и не прибегая к уравнениям (9.2) в цилиндрических координатах, а используя криволинейные координаты x и z на самой поверхности тела и направление нормали к этой поверхности. При этом начало отсчёта криволинейной координаты x берётся в критической точке, а дополнительные слагаемые за счёт криволинейности линий x и y не учитываются.

Следуя Е. И. Степанову¹⁾, приведём уравнения (9.7) и (9.9) к тому виду, который имеет место для пограничного слоя на соответственном плоском контуре.

Введём следующую замену координат и скоростей:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{l^2} \int_0^x r_0^2 dx, \quad \bar{y} = \frac{r_0}{l} y, \\ \bar{v}_x &= v_x, \quad \bar{v}_y = \frac{lv_y}{r_0} + \frac{lr'_0}{r_0^2} yv_x, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

где масштаб длины l введён для сохранения размерностей координат и скоростей. Скорость частиц на границе слоя с внешним потоком выразим также в виде функции от новой координаты \bar{x} , т. е.

$$U(x) = \bar{U}(\bar{x}). \quad (9.11)$$

¹⁾ Степанов Е. И., Прикл. матем. и мех., т. XI, № 1, 1947.

Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} &= \frac{r_0^2}{l^2}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} &= \frac{r_0}{l} y, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{r_0}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

то получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{r_0^2}{l^2} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{r_0'}{l} y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{r_0}{l} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{r_0^2}{l^2}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{r_0^2}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

и, следовательно, уравнения (9.9) и (9.7) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

Граничные условия для уравнений (9.9) и (9.7) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \quad v_x &= 0, \quad v_y = 0, \\ \text{при } y=\delta \quad v_x &= U, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Если воспользоваться преобразованиями (9.10), то из условий (9.15) получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \bar{y}=0 \quad \bar{v}_x &= 0, \quad \bar{v}_y = 0, \\ \text{при } \bar{y}=\bar{\delta} = \frac{r_0 \delta}{l} \quad \bar{v}_x &= \bar{U}(\bar{x}), \quad \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

Таким образом, для изучения движения жидкости в пограничном слое при осесимметричном обтекании тела вращения достаточно провести решение уравнений (9.14) для плоского пограничного слоя при условиях (9.16) и затем воспользоваться формулами преобразований (9.10).

Между прочим, заметим, что при обтекании безграничным потоком цилиндрической трубы в продольном направлении будем иметь:

$$r_0(x) = \text{const},$$

и уравнение несжимаемости (9.7) переходит в уравнение несжимаемости для плоского потока. Следовательно, в том приближении, в котором составлены уравнения (9.7) и (9.9), пограничный слой для

внутренней поверхности трубы будет одинаков с пограничным слоем на внешней поверхности трубы и будет совпадать с пограничным слоем на пластинке.

В качестве конкретного примера использования преобразований (9.10) рассмотрим пограничный слой на внутренней поверхности конического диффузора с углом раствора 2α (рис. 75). Если ось x направить по верхней границе конуса в плоскости меридиана, а начало её взять в его вершине, то уравнение конуса будет:

$$r_0(x) = x \sin \alpha. \quad (9.17)$$

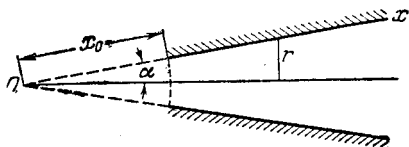


Рис. 75.

В качестве линейного масштаба l возьмём расстояние вершины до входного сферического сечения рассматриваемого диффузора, т. е.

$$l = x_0.$$

Если скорость во входном сечении обозначить через U_0 , то распределение скоростей в потоке вне пограничного слоя как для источника будет представляться в виде

$$U(x) = U_0 \frac{x_0^2}{x^2}. \quad (9.18)$$

На основании первой формулы преобразования (9.10) будем иметь:

$$\bar{x} = \frac{\sin^2 \alpha}{x_0^2} \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sin \alpha}{x_0} \right)^2 x^3. \quad (9.19)$$

Подставляя значение x из (9.19) в (9.18), получим:

$$\bar{U}(\bar{x}) = U_0 \sin^{4/3} \alpha \left(\frac{x_0}{3\bar{x}} \right)^{2/3} = A \bar{x}^{-2/3}. \quad (9.20)$$

Для дальнейшего решения задачи применим самый простой и приближённый метод § 6. На основании формулы (6.15) и распределения скоростей (9.20) будем иметь:

$$\bar{\delta}^2 = \frac{180}{7} \frac{\nu}{\bar{U}^{3/7}} \left[\int \bar{U}^{3/7} d\bar{x} + C_4 \right] = \frac{180}{7} \frac{\nu}{A} \bar{x}^{7/21} \left[-\frac{21}{41} \bar{x}^{-41/21} + C_4 \right]. \quad (9.21)$$

Если снова вернуться к переменному x , то найдём:

$$\bar{\delta}^2 = \frac{180}{41} \frac{\nu}{U_0} \frac{\sin^2 \alpha}{x_0^4} x^{7/7} \left[C - \left(\frac{1}{x} \right)^{41/7} \right].$$

Считая, что во входном сечении толщина пограничного слоя равна нулю, будем иметь:

$$\bar{\delta}^2 = \frac{x_0^2}{r_0^2} \bar{\delta}^2 = \frac{180}{41} \frac{\nu}{U_0} \frac{x_0^{2/7}}{x_0^3} \left[\left(\frac{1}{x_0} \right)^{41/7} - \left(\frac{1}{x} \right)^{41/7} \right]. \quad (9.22)$$

Для определения точки положения отрыва пограничного слоя от стенок диффузора применим формулу из того же параграфа (6.16)

$$\frac{\bar{U}'\bar{\delta}^2}{\nu} = -7,2.$$

Подставляя значение \bar{U}' из (9.20) и значение $\bar{\delta}^2$ из (9.21) и обозначая расстояние точки отрыва до вершины конуса через x_s , получим уравнение

$$\left(\frac{x_s}{x_0}\right)^{4/3} = \left(\frac{x_s}{x_0}\right)^{4/7} = 1,82.$$

Решив его, будем иметь:

$$\frac{x_s}{x_0} = 1,1075. \quad (9.23)$$

Таким образом, отрыв пограничного слоя от стенок произойдет тем ближе к входному сечению, чем больше угол раствора диффузора, так как

$$x_s - x_0 = 0,1075 \frac{r_0}{\sin \alpha}. \quad (9.24)$$

ГЛАВА IX

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Общая постановка задачи о прямолинейно-параллельном неустановившемся течении вязкой жидкости

Будем считать жидкость несжимаемой, т. е.

$$\rho = \text{const},$$

действием массовых сил будем пренебрегать

$$F = 0$$

и будем полагать траектории всех частиц прямолинейно-параллельными, т. е.

$$v \equiv 0, \quad w \equiv 0.$$

При этих трёх предположениях из уравнения несжимаемости будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

а дифференциальные уравнения движения (10.1) главы II представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \tag{1.2}$$

На основании двух последних уравнений заключаем, что давление не зависит от переменных y и z . Если при этом учесть (1.1), то в первом уравнении (1.2) слагаемые, содержащие u , будут зависеть от переменных y , z и t , тогда как слагаемое с давлением будет зависеть от переменных x и t , а это возможно только в том

случае, если перепад давления по течению будет функцией только от одного переменного — времени, т. е.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \quad (1.3)$$

Таким образом, задача изучения неустановившегося прямолинейно-параллельного течения вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t). \quad (1.4)$$

Функция $f(t)$, характеризующая перепад давления на единицу длины, должна, вообще говоря, считаться известной. Для определённости решения дифференциального уравнения (1.4) должны быть заданы начальные и граничные условия. Начальное условие должно сводиться к заданию распределения скорости во всей рассматриваемой области в плоскости yOz для какого-либо момента времени, принимаемого обычно за начальный, т. е.

$$\text{при } t = 0 \quad u = \varphi(y, z). \quad (1.5)$$

Область течения в плоскости yOz может быть односвязной, двусвязной и многосвязной. Если, например, рассматривается прямолинейно-параллельное течение между двумя цилиндрическими поверхностями, ограниченными в сечениях какими-либо замкнутыми кривыми (рис. 76), то область течения будет двусвязной. На обоих контурах S_I и S_{II} должны быть заданы граничные условия. Если полагать, что внутренний цилиндр перемещается параллельно своей образующей со скоростью $f_1(t)$, а внешний цилиндр неподвижен, то граничные условия, выражающие гипотезу о прилипанию частиц жидкости к стенкам, будут представляться в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } S_I \quad u = f_1(t), \\ \text{на } S_{II} \quad u = 0. \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

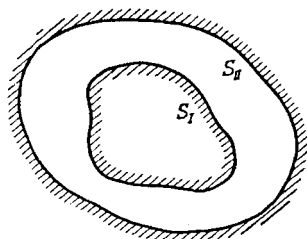


Рис. 76.

Следовательно, изучение неустановившегося прямолинейно-параллельного течения вязкой несжимаемой жидкости сводится математически к решению уравнения (1.4) типа уравнения теплопроводности при начальном условии (1.5) и граничных условиях (1.6).

Общую задачу решения уравнения (1.4) при условиях (1.5) и (1.6) мы можем разделить на две отдельные задачи, из которых первая задача будет учитывать действие перепада давления, а вторая — движение стенок и начальное распределение скоростей. Полагая

$$u = u_1 + u_2,$$

будем иметь для первой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + f(t), \\ \text{при } t = 0 \quad u_1 &= 0, \\ \text{на } S_I \quad u_1 &= 0, \\ \text{на } S_{II} \quad u_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

и для второй:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right), \\ \text{при } t = 0 \quad u_2 &= \varphi(y, z), \\ \text{на } S_I \quad u_2 &= f_1(t), \\ \text{на } S_{II} \quad u_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Вторую задачу в свою очередь можно разделить также на две отдельные задачи. Первая из них будет представлять собой задачу о выравнивании начального распределения скорости, а вторая будет характеризовать распространение скорости движения от стенки к промежуточным слоям жидкости. Если мы положим:

$$v_2 = v_2 + w_2,$$

то для первой задачи будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right), \\ \text{при } t = 0 \quad v_2 &= \varphi(y, z), \\ \text{на } S_I \quad v_2 &= 0, \\ \text{на } S_{II} \quad v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

и для второй:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \right), \\ \text{при } t = 0 \quad w_2 &= 0, \\ \text{на } S_I \quad w_2 &= f_1(t), \\ \text{на } S_{II} \quad w_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Таким образом, решение первоначальной общей задачи можно составить из решений трёх отдельных задач (1.7), (1.9) и (1.10). Если перепад давления будет равен нулю, то решение первой задачи (1.7) будет тождественно равно нулю. Если же для начального момента времени жидкость будет находиться в покое, то решение задачи (1.9) будет также нулём. При выполнении этих двух условий задача изучения прямолинейного движения жидкости будет сводиться только к задаче (1.10). Решение задачи (1.10) при произвольном задании функции $f_1(t)$ может быть построено на основании решения той же

задачи, отвечающей значению ω_2 , равному единице на границе S_I , с помощью интеграла Дюгамеля. В самом деле, обозначим через ω_1 единичное решение задачи (1.10), т. е. решение уравнения

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} \right) \quad (1.11)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \quad \omega_1 &= 0, \\ \text{на } S_I \quad \omega_1 &= 1, \\ \text{на } S_{II} \quad \omega_1 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда решение задачи (1.10) будет представляться формулой Дюгамеля

$$\omega_2(y, z, t) = f_1(0) \omega_1(y, z, t) + \int_0^t f_1'(\tau) \omega_1(y, z, t - \tau) d\tau. \quad (1.12)$$

Покажем вначале формально, что правая часть (1.12) действительно представляет собой решение задачи (1.10). Так как правая часть (1.12) представляет собой предел суммы частных решений вида $\omega_2(y, z, t - \tau) f_1'(\tau) d\tau$ дифференциального линейного уравнения (1.10), то этот предел будет также решением того же уравнения. Полагая в правой части (1.12) $t=0$ и учитывая значение ω_1 , получим, что и $\omega_2=0$. Аналогично обстоит дело и с удовлетворением граничного условия на контуре S_{II} . На контуре же S_I будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_1(y, z, t) &= 1, \quad \omega_2(y, z, t) = \\ &= f_1(0) + \int_0^t f_1'(\tau) d\tau = f_1(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция ω_2 , представляемая в виде (1.12), действительно будет решением задачи (1.10).

Дадим теперь непосредственный вывод формулы Дюгамеля (1.12).

Представим заданную функцию $f_1(t)$ графически в виде некоторой кривой (рис. 77). Фиксированный конечный интервал времени от нуля до t разобьем на малые интервалы продолжительностью Δt , т. е. положим

$$t = n\Delta t.$$

Данную кривую заменим ломаной линией, начальная ордината которой будет $f_1(0)$. К концу интервала времени Δt приращение ординаты будет равно

$$f_1'(0) \Delta t.$$

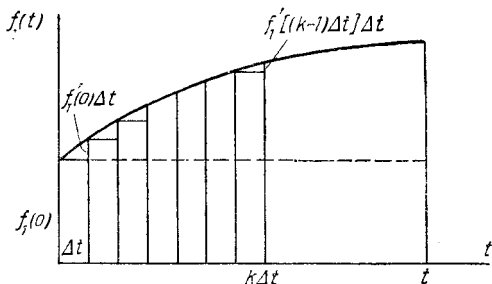


Рис. 77.

Следующее приращение ординаты равно

$$f_1'(\Delta t) \Delta t,$$

а приращение номера k будет:

$$f_1'[(k-1)\Delta t] \Delta t.$$

Функция $\omega_2(y, z, t)$ представляет собой решение задачи (1.11). Если бы на границе S_I поддерживалась всё время скорость $f_1(0)$, то к моменту конца интервала времени t в произвольной точке области между S_I и S_{II} создавалась бы скорость, равная

$$f_1(0) \omega_1(y, z, t-0). \quad (1.13)$$

Следовательно, на функцию $\omega_1(y, z, t-0)$ можно смотреть как на своего рода коэффициент передачи в течение интервала времени $t-0$ скорости, возбуждаемой на границе S_I , в точку с координатами y и z . Но так как скорость на границе S_I меняется, то скорость в точке (y, z) может определяться по формуле (1.13) не для всего конечного интервала времени, а только для интервала времени

$$0 \leq t \leq \Delta t.$$

К концу интервала времени Δt скорость на границе получит приращение $f_1'(0) \Delta t$; это приращение будет передаваться во все точки области между S_I и S_{II} , но передача будет происходить, не в течение всего интервала времени от нуля до t , а в течение интервала времени $t-\Delta t$. Следовательно, если бы дальнейшего приращения скорости на границе S_I не происходило, то к концу интервала времени t в точке (y, z) мы получили бы приращение скорости равное

$$f_1'(0) \Delta t \omega_1(y, z, t-\Delta t). \quad (1.14)$$

Но на самом деле скорость на границе к концу интервала времени $2\Delta t$ получит новое приращение $f_1'(\Delta t) \Delta t$, следовательно, приращение скорости в точке (y, z) можно подсчитывать по формуле (1.14) лишь для интервала времени

$$\Delta t < t < 2\Delta t.$$

Для следующего интервала времени приращение скорости в точке (y, z) надо уже подсчитывать по формуле

$$f_1'(\Delta t) \Delta t \omega_1(y, z, t-2\Delta t), \quad (1.15)$$

$$(2\Delta t < t < 3\Delta t)$$

Продолжая, далее, эти рассуждения для интервала номера k , будем иметь приращение скорости в точке (y, z) в виде

$$f_1'[(k-1)\Delta t] \Delta t \omega_1(y, z, t-k\Delta t). \quad (1.16)$$

Складывая (1.13) с суммой (1.14), (1.15) и (1.16), получим выражение для всей скорости в точке (y, z) к концу интервала времени t в виде

$$u(y, z, t) = f_1(0) \omega_1(y, z, t - 0) + \sum_{k=1}^{k=n} f_1'[(k-1)\Delta t] \omega_1(y, z, t - k\Delta t). \quad (1.17)$$

Полагая

$$k\Delta t = \tau, \quad \Delta t = d\tau, \quad n\Delta t = t,$$

увеличивая n до бесконечности и уменьшая Δt до нуля, в результате предельного перехода получим из (1.17) формулу Дюгамеля (1.12).

Заметим, что формула Дюгамеля (1.12) может быть использована не только для решения дифференциального уравнения типа теплопроводности, но и для некоторых других видов линейных дифференциальных уравнений, содержащих частные производные по времени. Смысл формулы Дюгамеля заключается в том, что скорость в какой-либо момент времени в некоторой точке внутри области, занятой вязкой жидкостью, будет определяться не значением скорости на границе в данный момент времени, а изменением значений скорости на границе за всё предшествующее время, начиная с начального момента времени. Таким образом, формула Дюгамеля представляет собой математическое выражение своего рода «принципа наследственности» в механике неустановившегося движения вязкой жидкости.

§ 2. Движение неограниченной плоскости в вязкой жидкости

В качестве первого примера неустановившегося прямолинейно-параллельного движения вязкой несжимаемой жидкости рассмотрим

то движение жидкости, которое обусловлено перемещением неограниченной плоской стенки. Пусть стенка представляет собой горизонтальную плоскость xOz , а жидкость располагается по одну сторону от этой плоскости (рис. 78). До момента $t = 0$ жидкость и стенка находились в покое. С момента $t = 0$ стенка приходит в движение с постоянной скоростью U вдоль

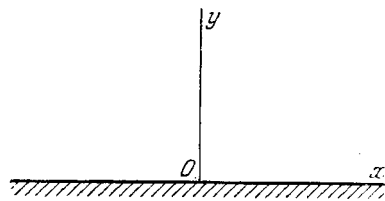


Рис. 78.

положительного направления оси x . Благодаря неограниченности стенки в направлении оси z можно полагать, что скорость частиц жидкости не будет зависеть от переменного z :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Кроме того, можно считать, что перепад давления будет равен нулю:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

При этих предположениях рассматриваемая задача будет сводиться к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } t = 0 \text{ и } y > 0 \quad u = 0, \\ \text{при } t \geq 0 \text{ и } y = 0 \quad u = U, \\ \text{при } t \geq 0, \text{ и } y = \infty \quad u = 0. \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Для решения поставленной задачи применим *метод функционального преобразования Лапласа*. Умножим обе части уравнения (2.1) на

$$e^{-pt} dt,$$

где p — параметр преобразования, и проинтегрируем от нуля до бесконечности:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial t} dt = \nu \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dt. \quad (2.3)$$

Выполняя в левой части уравнения (2.3) интегрирование по частям, получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial t} dt = e^{-pt} u \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} u dt. \quad (2.4)$$

Будем полагать, что действительная часть параметра преобразования p положительна, тогда первое слагаемое в правой части (2.4) при подстановке в него верхнего предела обратится в нуль. Введём следующее обозначение:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} u dt = \frac{u^*(y, p)}{p}. \quad (2.5)$$

Функцию $\frac{u^*}{p}$ принято называть *изображением по Лапласу функции* $u(y, t)$, а функцию $u(y, t)$ — *оригиналом*.

Учитывая (2.5), получим из (2.4):

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial t} dt = -(u)_{t=0} + u^*. \quad (2.6)$$

Таким образом, дифференцирование оригинала по времени приводит к умножению изображения по Лапласу на параметр преобразования и вычитанию значения дифференцируемой функции для начального момента времени. В рассматриваемом нами случае начальное значение искомой скорости u равно нулю, т. е.

$$(u)_{t=0} = 0.$$

Используя (2.5) и (2.6), получим из (2.3) следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для изображения:

$$\frac{d^2 u^*}{dy^2} - \frac{p}{\nu} u^* = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, метод преобразования Лапласа позволяет уменьшить число независимых переменных на единицу. Дифференциальное уравнение (2.1) для оригинала в частных производных с помощью преобразования Лапласа преобразовано в обыкновенное дифференциальное уравнение (2.7) для изображения.

Теперь преобразуем граничные условия для оригинала в граничные условия для изображения. В рассматриваемом нами случае в силу постоянства скорости U будем иметь:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \quad u^* = U, \\ \text{при } y = \infty \quad u^* = 0. \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Общее решение уравнения (2.7) представляется в виде

$$u^* = Ae^{\sqrt{\frac{p}{\nu}} y} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y}.$$

Используя граничные условия (2.8), получим следующее выражение для изображения:

$$u^*(y, p) = Ue^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y}. \quad (2.9)$$

Подставляя значение u^* в (2.5), получим для оригинала интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} u \, dt = \frac{U}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y}. \quad (2.10)$$

Таким образом, при применении метода преобразования Лапласа основная трудность решения той или иной задачи переносится на определение оригинала по найденному изображению. Но благодаря наличию достаточно подробных таблиц для определения оригинала по изображению метод преобразования Лапласа находит всё большее и большее применение при решениях задач механики и физики.

Решение интегрального уравнения (2.5) по отношению к оригиналу представляется *формулой обращения преобразования Лапласа*. Для установления этой формулы проведём следующие рассуждения.

Пусть $u(t)$ представляет собой функцию только от переменного времени t , причём 1) функция $u(t)$ непрерывна и ограничена и

2) интеграл $\int_0^{\infty} e^{\sigma t} u dt$ абсолютно сходится, где σ — некоторое положительное число. Тогда для функции

$$\gamma(t) = e^{-\sigma t} u(t) \quad (2.11)$$

будут выполняться достаточные условия для представления её интегралом Фурье в комплексной форме, т. е.

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) e^{-\alpha i(\lambda-t)} d\lambda. \quad (2.12)$$

Подставляя значение $\gamma(t)$ из (2.11), получим:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+i\alpha)t} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) e^{-\lambda(\sigma+i\alpha)} d\lambda.$$

Вместо переменного α введём новое переменное, полагая

$$\sigma + i\alpha = p;$$

тогда получим:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) e^{-\lambda p} d\lambda. \quad (2.13)$$

Положим, что функция $u(\lambda)$ обращается в нуль для всех отрицательных значений λ . При этом условии нижний предел во втором интеграле (2.13) можно положить равным нулю, а поэтому весь интеграл можно заменить его значением (2.5). В результате получим следующую формулу обращения преобразования Лапласа:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} u^* \frac{dp}{p}. \quad (2.14)$$

Таким образом, если не пользоваться готовыми таблицами, то для определения оригинала по изображению необходимо выполнить квадратуру по комплексному переменному p вдоль бесконечной прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от неё на расстоянии σ . Прямая $\text{Re}(p) = \sigma$ называется осью сходимости интеграла Лапласа (2.5), так как, по предположению, этот интеграл сходится, если

$\operatorname{Re}(p) > \sigma$. Интеграл в правой части (2.14) понимается в смысле своего главного значения. Для вычисления интеграла (2.14) можно пользоваться некоторыми теоремами, доказанными для интегралов такого вида. В частности, если u^* представляет собой регулярную функцию в любой конечной части плоскости комплексного переменного p , за исключением множества точек, представляющих собой полюсы этой функции, то значение всей правой части (2.14) представляется в виде суммы вычетов, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} u^* \frac{dp}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t), \quad (2.15)$$

где $r_n(t)$ — вычет функции $e^{pt} \frac{u^*}{p}$ в точке $p = p_n$. В других случаях при наличии точек ветвления функции u^* приходится контур интегрирования деформировать и использовать, например, лемму Жордана, согласно которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \Phi(z) e^{zt} dz = 0 \quad \text{при } t > 0, \quad (2.16)$$

где C_n — дуга окружности $|z| = R_n$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$; при этом предполагается, что сама функция $\Phi(z)$ на дугах C_n равномерно стремится к нулю относительно $\arg z$ при $n \rightarrow \infty$.

Возвращаясь к рассматриваемому нами случаю (2.10), получим из (2.14) выражение для оригинала в виде

$$u(y, t) = \frac{U}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \sqrt{\frac{p}{y}} \frac{dp}{p}. \quad (2.17)$$

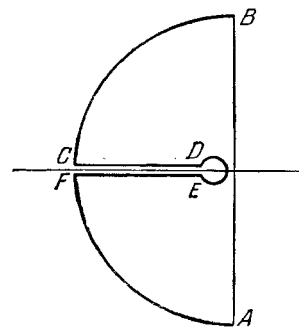


Рис. 79.

Подинтегральное выражение (2.17) имеет особую точку в начале координат, представляющую собой точку ветвления. Проведём на плоскости комплексного переменного p контур $ABCDEFA$, состоящий из отрезка прямой $\sigma - i\infty$ и $\sigma + i\infty$ при малом значении σ , из полуокружности радиуса R , двух разрезов CD и EF и малой окружности DE вокруг начала координат (рис. 79).

В области, ограниченной замкнутым контуром $ABCDEFA$, функция, стоящая под знаком интеграла (2.17), не имеет никаких особенностей, а поэтому по теореме Коши

$$\int_{ABCDEFA} e^{pt-y} \sqrt{\frac{p}{y}} \frac{dp}{p} = 0.$$

Отсюда получим:

$$\int_{AB} e^{pt-y} \sqrt{\frac{p}{v}} \frac{dp}{p} = - \int_{BC} \left(\quad \right) \frac{dp}{p} - \int_{CD} \left(\quad \right) \frac{dp}{p} - \\ - \int_{DE} \left(\quad \right) \frac{dp}{p} - \int_{EF} \left(\quad \right) \frac{dp}{p} - \int_{FA} \left(\quad \right) \frac{dp}{p}, \quad (2.18)$$

где в скобках под знаками интегралов в правой части должна находиться та же функция, которая стоит в левой части под знаком интеграла. Будем теперь увеличивать радиус полуокружностей до бесконечности. Тогда интеграл в левой части (2.18) будет стремиться к интегралу (2.17). Интегралы в правых частях по дугам окружностей BC и FA согласно лемме (2.16) будут обращаться в нуль. Интеграл по окружности DE будет представлять собой вычет рассматриваемой функции в точке $p=0$ с обратным знаком, умноженный на $2\pi i$.

Таким образом, из (2.18) будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-y} \sqrt{\frac{p}{v}} \frac{dp}{p} = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{CD} e^{pt-y} \sqrt{\frac{p}{v}} \frac{dp}{p} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{EF} e^{pt-y} \sqrt{\frac{p}{v}} \frac{dp}{p}. \quad (2.19)$$

Преобразуем переменные интегрирования в правой части (2.19). Для разреза CD положим:

$$p = \alpha^2 e^{\pi i} = -\alpha^2, \quad \sqrt{p} = \alpha e^{\frac{\pi}{2} i} = i\alpha, \quad dp = -2\alpha d\alpha,$$

тогда для разреза EF будем иметь:

$$p = \alpha^2 e^{-\pi i} = -\alpha^2, \quad \sqrt{p} = \alpha e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i\alpha, \quad dp = -2\alpha d\alpha.$$

Используя новые переменные, из (2.19) получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-y} \sqrt{\frac{p}{v}} \frac{dp}{p} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \frac{e^{i\alpha \frac{y}{V\sqrt{v}}} - e^{-i\alpha \frac{y}{V\sqrt{v}}}}{2i} \frac{d\alpha}{\alpha} = \\ = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin \frac{\alpha y}{V\sqrt{v}} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Таким образом, окончательное решение рассматриваемой задачи представляется в виде

$$u(y, t) = U \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin \frac{\alpha y}{\sqrt{\nu}} \frac{d\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.20)$$

Подсчитаем теперь значение силы вязкости на движущейся стенке:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = - \frac{2\mu U}{\pi \sqrt{\nu}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} d\alpha.$$

Интеграл в правой части можно представить через интеграл Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\omega^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Следовательно, сила вязкости на движущейся с постоянной скоростью стенке равна

$$\tau = - \frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}}. \quad (2.21)$$

В момент начала внезапного перемещения плоскости с конечной скоростью сила вязкости τ обращается в бесконечность, что естественно ожидать по аналогии с явлением удара. Однако, если подсчитать импульс силы вязкости

$$\int_0^{\varepsilon} \tau dt$$

и устремить промежуток времени его действия ε к нулю, то получим для импульса значение нуль. Таким образом, импульс, потребный для внезапного приведения плоскости в движение с конечной скоростью, будет зависеть только от массы самой плоскости и не будет совершенно зависеть от плотности и вязкости соприкасающейся со стенкой жидкости.

Если стенка будет перемещаться с переменной скоростью, зависящей явно от времени:

$$U = U(t),$$

то решение задачи о передаче движения от стенки к слоям жидкости можно представить на основании формулы Дюгамеля (1.12) в виде

$$u(y, t) = U(0) u_1(y, t) + \int_0^t U'(\tau) u_1(y, t - \tau) d\tau, \quad (2.22)$$

где

$$u_1(y, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin \frac{\alpha y}{\sqrt{\nu}} \frac{d\alpha}{\alpha}. \quad (2.23)$$

В частности, сила вязкости на стенке при переменной скорости движения самой стенки будет представляться в виде

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = - \frac{\mu}{\sqrt{\pi \nu}} \left[\frac{U(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{U'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (2.24)$$

Правая часть (2.24) указывает на то, что сила вязкости на стенке в момент t зависит от всего предшествующего состояния движения этой стенки.

Обозначим через M массу единицы площади, а через $F(t)$ внешнюю силу, приходящуюся также на единицу площади стенки и зависящую только от времени. Составляя дифференциальное уравнение движения стенки с учётом силы F и силы вязкости (2.24), найдём:

$$MU' = F(t) - \frac{\mu U(0)}{\sqrt{\pi \nu t}} - \frac{\mu}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t U'(t) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (2.25)$$

Таким образом, для определения ускорения движущейся стенки мы получили интегральное уравнение Вольтерра с ядром, зависящим от разности $t - \tau$. Такого вида интегральные уравнения решаются с помощью того же преобразования Лапласа.

Умножая левую и правую части (2.25) на

$$e^{-pt} dt,$$

проводя интегрирование от нуля до бесконечности и вводя обозначения

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} U' dt = \frac{U'^*}{p}, \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt = \frac{F^*}{p}, \quad (2.26)$$

получим:

$$M \frac{U'^*}{p} = \frac{F^*}{p} - \frac{\mu U(0)}{\sqrt{\pi \nu}} \sqrt{\frac{\pi}{p}} - \frac{\mu}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t \frac{U'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (2.27)$$

Предположим, что функция $U'(t)$ такова, что в последнем слагаемом (2.27) возможна перемена порядка интегрирования. Областью интегрирования (2.27) служит бесконечный треугольник выше биссектрисы (рис. 80). При первом интегрировании по переменному τ в (2.27) мы должны идти вдоль отрезка Ot , при втором интегрировании

отрезок Ot должен перемещаться вверх от начала координат до бесконечности. После перемены порядка интегрирования мы должны при первом интегрировании по переменному t перемещаться по прямой, параллельной оси t , от τ до бесконечности, а при втором интегрировании эту прямую необходимо перемещать вправо от начала координат до бесконечности. Следовательно, будем иметь:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t \frac{U'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \int_0^{\infty} U'(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Полагая затем

$$t - \tau = x, \quad dt = dx$$

и учитывая (2.26), получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t \frac{U'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} U'(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{U'^*}{p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Таким образом, соотношение (2.27) представится в виде

$$U'^* \left(\frac{M}{p} + \frac{M}{p \sqrt{p^3}} \right) = \frac{F^*}{p} - \frac{\mu U(0)}{\sqrt{p^3}}.$$

Отсюда для преобразования Лапласа от ускорения будем иметь:

$$\frac{U'^*}{p} = \frac{\frac{F^*}{p} - \frac{\mu U(0)}{\sqrt{p^3}}}{M + \frac{\mu}{\sqrt{p^3}}}. \quad (2.28)$$

Применяя равенство (2.6), получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} U' dt = \frac{U'^*}{p} = U^* - U(0), \quad (2.29)$$

где $\frac{U^*}{p}$ — преобразование Лапласа от скорости.

Приравняв правые части (2.28) и (2.29), получим следующее выражение для преобразования Лапласа от переменной скорости движущейся стенки:

$$\frac{U^*}{p} = M \frac{\frac{U(0)}{p} + \frac{F^*}{p^2}}{1 + \frac{\mu}{M \sqrt{p^3}} \frac{1}{\sqrt{p}}}. \quad (2.30)$$

Рассмотрим тот случай, когда внешняя сила F отсутствует и когда стенка после получения некоторой начальной скорости $U(0)$

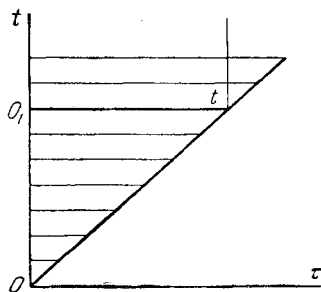


Рис. 80.

движется только под действием тормозящей силы вязкости. Для определения по изображению (2.30) оригинала мы можем воспользоваться, как указывалось выше, справочными таблицами или провести те же рассуждения и вычисления, которые были проведены выше при введении в рассмотрение замкнутого контура $ABCDEF A$. В результате для оригинала скорости движения стенки можно получить выражение

$$U(t) = U(0) e^{k^2 t} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\sqrt{t}} e^{-\beta^2} d\beta \right], \quad (2.31)$$

где

$$k = \frac{\mu}{M\sqrt{\nu}}. \quad (2.32)$$

В правой части (2.31) находится функция, которая широко используется в теории вероятностей. Вводя для этой функции обозначение

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\beta^2} d\beta, \quad (2.33)$$

будем иметь:

$$\frac{U(t)}{U(0)} e^{-k^2 t} = 1 - \Theta(k\sqrt{t}). \quad (2.34)$$

Полагая, например,

$$k\sqrt{t} = 0,01,$$

по таблицам, приводимым в курсе теории вероятностей, получим:

$$\Theta(k\sqrt{t}) = 0,01128,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 t} = 1,1283,$$

$$\frac{U(t)}{U(0)} = 0,9888.$$

Таким образом, скорость движущейся плоскости уменьшается примерно на 1% по прошествии промежутка времени, определяемого из соотношения

$$\frac{\mu}{M} \sqrt{\frac{t}{\nu}} = 0,01.$$

§ 3. Диффузия вихревого слоя

Если плоская стенка начнёт перемещаться с постоянной скоростью U , то скорость прямолинейного движения частиц вязкой несжимаемой жидкости будет определяться по формуле (2.20). А теперь изменим постановку задачи. Пусть до момента времени $t = 0$ частицы жидкости и стенка имели постоянную скорость U в отрицательном

направлении оси x . В момент $t=0$ стенка $y=0$ была внезапно остановлена. Требуется установить, как будет происходить торможение движения всей жидкости. Легко проверить, что решение этой новой задачи мы получим, если из правой части (2.20) вычтем скорость U , т. е. если положим:

$$u = U \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin \frac{\alpha y}{\sqrt{\nu}} \frac{d\alpha}{\alpha} \right) - U = - \frac{2U}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin \frac{\alpha y}{\sqrt{\nu}} \frac{d\alpha}{\alpha}. \quad (3.1)$$

Выражение в правой части (3.1) будет обращаться в нуль при $y=0$, $t > 0$ и при $t=0$, $y = \infty$ и будет равно $-U$ при $y = \infty$. Для всех промежуточных значений y от нуля до бесконечности скорость u будет отрицательной, т. е.

$$\text{при } 0 < y < \infty \quad u(y, t) < 0.$$

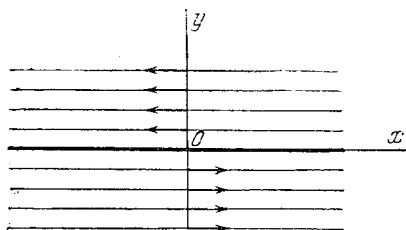


Рис. 81.

Распространим это решение (3.1) и для отрицательных значений y . Тогда будем иметь:

$$\text{при } 0 > y > -\infty \quad u(y, t) > 0,$$

и при этом для значения $y = -\infty$ скорость $u(y, t)$ будет равна U .

Следовательно, выражение (3.1) для всего пространства будет означать то, что для начального момента времени частицы жидкости, расположенные выше оси x ($y > 0$), имели скорость $-U$, а частицы, расположенные ниже оси x , имели скорость $+U$, и сама ось x представляла собой скачок скоростей (рис. 81). Таким образом, функция (3.1) выражает собой рассасывание начального скачка скоростей благодаря вязкости жидкости.

Найдём теперь по скорости (3.1) значение вихря. В рассматриваемом случае вихрь будет представляться в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \omega &= \frac{U}{\pi \sqrt{\nu}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \cos \frac{\alpha y}{\sqrt{\nu}} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для вычисления интеграла (3.2) поступаем следующим образом.

Положим $\frac{y}{\sqrt{\nu}} = b$ и обозначим интеграл через J , т. е.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \cos b\alpha d\alpha. \quad (3.3)$$

Дифференцируя этот интеграл по параметру b , получим:

$$\frac{dJ}{db} = - \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} \sin ba \, a \, da.$$

Выполняя интегрирование по частям, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} \sin ba \, a \, da &= \int_0^{\infty} \sin ba \, d\left(\frac{e^{-a^2 t}}{-2t}\right) = \\ &= -\frac{1}{2t} e^{-a^2 t} \sin ba \Big|_{a=0}^{a=\infty} + \frac{b}{2t} \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} \cos ba \, da. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части при подстановке верхнего и нижнего предела обращается в нуль, а второе слагаемое представляет собой первоначальный интеграл с множителем $\frac{b}{2t}$. Таким образом, получим следующее дифференциальное уравнение для J :

$$\frac{dJ}{db} = -\frac{b}{2t} J.$$

После разделения переменных и интегрирования будем иметь:

$$\ln J = -\frac{1}{4t} b^2 + \ln C.$$

Отсюда

$$J = C e^{-\frac{b^2}{4t}}. \quad (3.4)$$

Полагая параметр b равным нулю и используя значение интеграла Пуассона, получим:

$$(J)_{b=0} = \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} \, da = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} = C. \quad (3.5)$$

Подставляя значение C из (3.5) в (3.4) и значение интеграла (3.4) в (3.2), найдём конечное выражение для вихря скорости

$$\omega(y, t) = \frac{U}{2\sqrt{\nu\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}. \quad (3.6)$$

Полученное выражение (3.6) показывает, что для начального момента вихрь всюду был равен нулю, кроме оси x . На оси же x ($y=0$) вихрь в начальный момент был равен бесконечности. На этом основании функцию (3.6) можно называть *функцией источника вихревого слоя*, расположенного на прямой $y=0$ и начавшего своё действие с момента $t=0$. Если же источник вихревого слоя будет расположен не на прямой $y=0$, а на прямой $y=\eta$ и начнёт своё

действие не с момента $t = 0$, а с момента $t = \tau$, то функция источника вихревого слоя будет представляться в виде

$$\omega(y, t; \eta, \tau) = \frac{U}{2\sqrt{\nu\pi}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\nu(t-\tau)}}. \quad (3.7)$$

Правая часть (3.6) обращается в нуль при значении y , отличным от нуля, дважды: при $t = 0$ и при $t = \infty$. Следовательно, по теореме Ролля в промежутке от

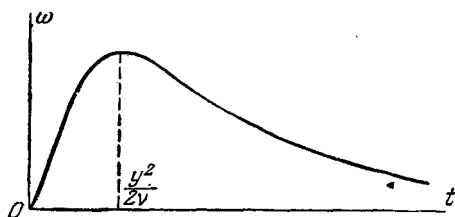


Рис. 82.

от $t = 0$ до $t = \infty$ на каждой прямой $y = c$ интенсивность вихря будет достигать своего экстремального значения и график изменения вихря на этой прямой со временем будет примерно представляться в виде кривой, показанной на рис. 82.

Положение точки максимума на этой кривой мы определим, если найдём производную от (3.6) по времени

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{U}{2\sqrt{\nu\pi}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \left(-\frac{1}{2} t^{-3/2} + \frac{y^2}{4\nu} t^{-5/2} \right)$$

и приравняем её нулю. В результате получим следующее выражение для времени t_m наступления максимума завихрения на данной прямой, параллельной оси x :

$$t_m = \frac{y^2}{2\nu}. \quad (3.8)$$

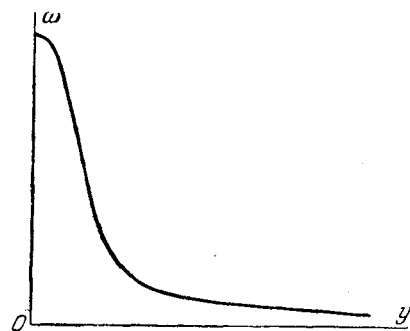


Рис. 83.

Если мы зафиксируем момент времени t и будем рассматривать интенсивность вихря (3.6) как функцию только от переменного y , то получим график этой функции, изображённый на рис. 83. Этот график показывает, что на прямой $y = 0$ интенсивность вихря будет максимальной для любого момента

времени, но на основании (3.7) можно видеть, что с течением времени этот максимум будет убывать. Рассмотренное нами явление рассасывания вихревого слоя, имеющего место на оси x , и связанное с ним явление передачи вихря от одного слоя к другому называются *диффузией вихревого слоя*.

На множитель U в выражении (3.7) можно смотреть как на *мощность источника вихревого слоя*. Если вихревые слои будут заполнять целую полосу от $y = a$ до $y = b$, то, вводя в рассмотрение

мощность вихря $q(\eta)$, приходящуюся на единицу длины η , мы можем получить функцию источника от элемента длины полосы вихря в виде

$$\frac{q(\eta) d\eta}{2 \sqrt{\nu\pi t}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\nu t}}.$$

Проводя интегрирование, получим функцию от непрерывного распределения источников вихревых слоёв

$$\omega(y, t) = \frac{1}{2 \sqrt{\nu\pi t}} \int_a^b q(\eta) e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\nu t}} d\eta. \quad (3.9)$$

Можно ввести также в рассмотрение и непрерывную последовательность источников вихревого слоя во времени от момента $\tau = 0$ до момента $\tau = T$. Для этого случая функция вихря равна

$$\omega(y, t) = \frac{1}{2 \sqrt{\nu\pi}} \int_0^T q(\tau) e^{-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (3.10)$$

По функции источника вихревого слоя (3.7) можно образовать функцию диполя вихревого слоя с помощью дифференцирования (3.7) либо по параметру τ , либо по параметру η

$$\omega(y, t) = \frac{U}{4 \sqrt{\nu\pi} (t-\tau)^3} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\nu(t-\tau)}} \left[1 - \frac{(y-\eta)^2}{2\nu(t-\tau)} \right], \quad (3.11)$$

$$\omega(y, t) = \frac{U}{4\nu \sqrt{\nu\pi} (t-\tau)} \frac{y-\eta}{t-\tau} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\nu(t-\tau)}}. \quad (3.12)$$

Выражения (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) и (3.12) — частные решения дифференциального уравнения вихря одномерного поля скоростей, которое мы получим из (2.1) с помощью дифференцирования по y :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) совпадает с уравнением одномерной задачи теории теплопроводности, а введённые выше функции источника (3.7) и диполей (3.11) и (3.12) совпадают с соответственными функциями теплового источника и тепловых диполей.

§ 4. Движение между неограниченными параллельными стенками

Допустим, что неограниченная стенка, совпадающая с плоскостью xOz , является неподвижной, а параллельная стенка, расположенная на расстоянии h от первой, начала перемещаться с момента $t = 0$ с постоянной скоростью U в положительную сторону оси x

(рис. 84). Предполагая движение частиц вязкой несжимаемой жидкости строго прямолинейным и используя условия прилипания для рассматриваемой задачи, будем иметь:

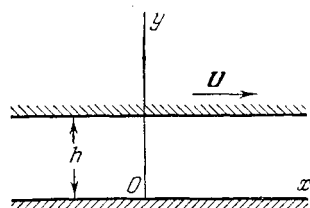


Рис. 84.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \text{при } y > 0 \text{ и } t = 0 & \quad u = 0, \\ \text{при } t \geq 0 \text{ и } y = 0 & \quad u = 0, \\ \text{при } t > 0 \text{ и } y = h & \quad u = U. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Выполняя преобразование Лапласа над дифференциальным уравнением и граничными условиями, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u^*}{dy^2} - \frac{p}{\nu} u^* &= 0, \\ \text{при } y = 0 & \quad u^* = 0, \\ \text{при } y = h & \quad u^* = U, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где

$$\frac{u^*}{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-pt} u \, dt. \quad (4.3)$$

Решение задачи (4.2) для изображения будет представляться в виде

$$u^*(y, p) = U \frac{\operatorname{sh} y \sqrt{\frac{p}{\nu}}}{\operatorname{sh} h \sqrt{\frac{p}{\nu}}}. \quad (4.4)$$

Используя формулу (2.14) для обращения преобразования Лапласа, получим для скорости движения частиц следующее интегральное выражение:

$$u(y, t) = \frac{U}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \frac{\operatorname{sh} y \sqrt{\frac{p}{\nu}}}{\operatorname{sh} h \sqrt{\frac{p}{\nu}}} \frac{dp}{p}. \quad (4.5)$$

Для вычисления интеграла (4.5) по комплексному переменному надо установить вычеты подинтегрального выражения. Приравнявая знаменатель нулю и учитывая, что корни гиперболического синуса являются чисто мнимыми и численно равными целому числу π , найдём:

$$h \sqrt{\frac{pk}{\nu}} = ik\pi, \quad p_k = -\frac{k^2 \pi^2}{h^2} \nu, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Все полюсы будут простыми, поэтому мы можем воспользоваться разложением мероморфной функции на простые дроби в виде

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{c_0}{p} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k}{p-p_k}. \quad (4.7)$$

Для определения вычета c_0 мы должны умножить обе части равенства (4.7) на p и затем устремить p к нулю, т. е.

$$c_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pF_1(p)}{F_2(p)}, \quad (4.8)$$

для определения же вычета c_k надо умножить (4.7) на разность $p-p_k$ и устремить p к значению p_k , учитывая, что

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_2(p)}{p-p_k} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p-p_k} = F_2'(p_k).$$

Таким образом, для коэффициента c_k получим:

$$c_k = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}. \quad (4.9)$$

В рассматриваемом нами случае (4.5) будем иметь:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = e^{pt} \frac{\operatorname{sh} y \sqrt{\frac{p}{\nu}}}{\operatorname{sh} h \sqrt{\frac{p}{\nu}}} \frac{1}{p},$$

$$c_0 = \lim_{p \rightarrow 0} e^{pt} \frac{\operatorname{sh} y \sqrt{\frac{p}{\nu}}}{\operatorname{sh} h \sqrt{\frac{p}{\nu}}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{y \sqrt{\frac{p}{\nu}} - \dots}{h \sqrt{\frac{p}{\nu}} - \dots} = \frac{y}{h}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{e^{p_k t} \operatorname{sh} y \sqrt{\frac{p_k}{\nu}}}{p_k \operatorname{ch} h \sqrt{\frac{p_k}{\nu}}} \frac{h}{2 \sqrt{\nu p_k}} = \frac{2e^{-\frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} i \sin \frac{k \pi y}{h}}{i k \pi \cos k \pi} = \\ &= \frac{2}{\pi k} (-1)^k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \sin \frac{k \pi y}{h}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Суммируя вычеты (4.10) и (4.11) и подставляя в (4.5), получим следующее выражение для скорости частиц жидкости:

$$u(y, t) = U \left[\frac{y}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \frac{\sin \frac{k \pi y}{h}}{k} \right]. \quad (4.12)$$

Выражение (4.12) указывает на то, что при стремлении t к беско-

нечности распределение скорости становится линейным, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = U \frac{y}{h}. \quad (4.13)$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении жидкости между параллельными стенками получается из решения задачи о неустановившемся движении при обращении t в бесконечность.

Для силы вязкости на движущейся стенке получим из (4.12):

$$\tau = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = -\frac{\mu U}{h} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\nu \frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \right]. \quad (4.14)$$

Для начального момента $t=0$ сумма ряда (4.14) обращается в бесконечность. Следовательно, сила вязкости на движущейся стенке в момент начала внезапного перемещения её с конечной скоростью будет обращаться в бесконечность.

Если стенка будет перемещаться с переменной скоростью

$$U = U(t),$$

то решение задачи по формуле (1.12) будет представляться в виде

$$u(y, t) = U(0) u_1(y, t) + \int_0^t U'(\tau) u_1(y, t - \tau) d\tau, \quad (4.15)$$

где

$$u_1(y, t) = \frac{y}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k e^{-\nu \frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \frac{\sin \frac{k\pi y}{h}}{k}. \quad (4.16)$$

§ 5. Задача Громеки о движении жидкости в цилиндрической трубе

Рассмотрим неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе в предположении, что

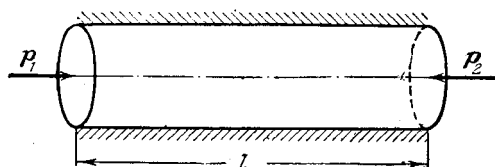


Рис. 85.

по двум её сечениям, находящимся на расстоянии l , распределены давления p_1 и p_2 (рис. 85). Решение этой задачи при переменных давлениях p_1 и p_2 и при произвольном начальном распределении скорости

было дано ещё в 1882 г. в работе И. С. Громеки¹⁾. Мы будем

¹⁾ Громека И. С., К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках, Казань, издание Универс. типографии, 1882. В книге Дюрэнда «Аэродинамика», т. III, 1939, стр. 77, в статье Л. Прандтля неправильно приписывается первое решение рассматриваемой задачи П. Шиманскому; это решение было дано Громекой на 50 лет раньше, а при простейшем начальном условии с учётом действия силы тяжести решение было дано ещё Навье (см. введение).

рассматривать тот случай, когда давления p_1 и p_2 во времени не меняются, а в начальный момент $t = 0$ жидкость находится в покое. В силу этих предположений движение вязкой жидкости будет осесимметричным, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \equiv 0, \quad (5.1)$$

где θ — полярный угол, проведённый в плоскости yOz , перпендикулярной к оси трубы. В полярных координатах дифференциальное уравнение (1.4) прямолинейного движения вязкой жидкости при использовании (5.1) представится в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.2)$$

В рассматриваемом нами случае последнее слагаемое, представляющее собой перепад давления, отнесённый к плотности, будет постоянным, т. е.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{\rho l} = P_1 = \text{const}. \quad (5.3)$$

Начальное условие и условие прилипания будут иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } t = 0 \quad u = 0, \\ \text{при } r = a \quad u = 0. \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Проводя преобразование Лапласа, т. е. переходя от оригинала к изображению в уравнении (5.2) и граничном условии (5.4), получим:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} - \frac{p}{\nu} u^* = -\frac{P_1}{\nu} \quad (5.5)$$

при $r = a \quad u^* = 0$.

Независимыми решениями уравнения (5.5) без правой части будут функции Бесселя от мнимого аргумента

$$I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right), \quad K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right),$$

а частным решением уравнения (3.5) с правой частью будет постоянная

$$\frac{P_1}{\nu}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.5) будет иметь вид

$$u^*(r, p) = AI_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) + BK_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) + \frac{P_1}{\nu}.$$

Так как функция K_0 обращается в бесконечность при $r = 0$, то необходимо постоянную B положить равной нулю. Для определения

постоянной A используем граничное условие (5.5). В результате всего этого для изображения скорости будем иметь:

$$u^*(r, p) = -\frac{P_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) - I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)}{p I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)}, \quad (5.6)$$

а для оригинала:

$$u(r, t) = -\frac{P_1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) - I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)}{I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)} \frac{dp}{p^2}. \quad (5.7)$$

Используя разложение (4.7) и равенства (4.8), получим:

$$c_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) - I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)}{p I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)}, \quad (5.8)$$

$$c_k = e^{2pk^2 t} \frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p_k}{\nu}}\right) - I_0\left(a\sqrt{\frac{p_k}{\nu}}\right)}{p_k^2 I_0'\left(a\sqrt{\frac{p_k}{\nu}}\right) a} \cdot 2\sqrt{\nu p_k}. \quad (5.9)$$

Функция Бесселя от мнимого аргумента представляется следующим рядом:

$$I_0(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \dots$$

Подставляя этот ряд в (5.8), получим:

$$c_0 = \frac{1}{4\nu} (r^2 - a^2). \quad (5.10)$$

Между функциями Бесселя от мнимого аргумента и от действительного имеет место следующее соотношение:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix). \quad (5.11)$$

На основании этого соотношения корни уравнения

$$I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) = 0$$

будут представляться в виде

$$ia\sqrt{\frac{p_k}{\nu}} = \lambda_k, \quad (5.12)$$

где λ_k — корни функции Бесселя нулевого порядка

$$J_0(\lambda_k) = 0. \quad (5.13)$$

Подставляя значения корней (5.12) в правую часть (5.9), получим:

$$c_k = 2e^{-\nu \frac{\lambda_k}{a^2} t} \frac{I_0\left(-i \frac{r\lambda_k}{a}\right)}{\frac{\lambda_k^4 \nu}{a^4} I_0'(-i\lambda_k)} \frac{\nu \lambda_k}{a^2 i}.$$

На основании одного из рекуррентных соотношений для функций Бесселя имеем:

$$I_0'(-i\lambda_k) = -I_1(i\lambda_k) = -\frac{1}{i} J_1(-\lambda_k) = -i J_1(\lambda_k).$$

Следовательно, коэффициент c_k будет окончательно представляться в виде

$$c_k = \frac{2}{\nu} a^2 \frac{J_0\left(\frac{r\lambda_k}{a}\right)}{J_1(\lambda_k)} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}. \quad (5.14)$$

Суммируя (5.10) и (5.14) и подставляя в (5.7), получим решение рассматриваемой задачи в виде следующего ряда:

$$u(r, t) = P_1 \frac{a^2}{4\nu} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - 8 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t} \frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{a}\right)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)} \right]. \quad (5.15)$$

Чтобы получить формулу для расхода, умножим обе части (5.15) на $2\pi r dr$, проинтегрируем от 0 до a и воспользуемся рекуррентной формулой

$$\int_0^a J_0(x) x dx = a J_1(a).$$

В результате получим:

$$Q = \frac{P_1 a^4}{8\nu} \left[1 - 32 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}}{\lambda_k^4} \right]. \quad (5.16)$$

Формула Пуазейля (5.9) главы IV получится из (5.16) при предельном переходе времени t к бесконечности.

Для силы вязкости на стенке цилиндрической трубы будем иметь:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} = -\frac{1}{2} P_1 \rho a \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}}{\lambda_k^2} \right]. \quad (5.17)$$

Для корней функции Бесселя n -го порядка имеют место следующие равенства¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} &= \frac{1}{2^2(n+1)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} &= \frac{1}{2^4(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

В нашем случае $n=0$. Полагая в (5.16) и (5.17) $t=0$ и используя (5.18), получим, что для начального момента расход и сила вязкости на стенке обращаются в нули:

$$\left. \begin{aligned} (Q)_{t=0} &= 0, \\ (\tau)_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

С возрастанием времени расход (5.16) и сила вязкости (5.17) на стенке будут возрастать и приближаться к своим предельным значениям, имеющим место при установившемся движении вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

§ 6. Неустановившееся круговое движение вязкой жидкости

Если предполагать жидкость несжимаемой, пренебрегать действием массовых сил и считать движение жидкости плоско-параллельным, то дифференциальные уравнения (6.6) и (6.7) главы II в полярных координатах r и φ будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Для кругового движения частиц вязкой жидкости радиальную компоненту скорости v_r необходимо положить равной нулю:

$$v_r \equiv 0.$$

Тогда из уравнения несжимаемости (6.1) получим:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (6.2)$$

¹⁾ Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 112.

Считая давление p не зависящим от полярного угла φ , из первых двух уравнений (6.1) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Первое уравнение (6.3) может быть использовано для определения давления, после того как из второго уравнения будет определена скорость v_φ частиц жидкости.

Скорость деформации сдвига в полярных координатах согласно (8.9) главы I представляется в виде

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}.$$

Следовательно, сила вязкости для кругового движения частиц жидкости будет определяться равенством

$$\tau = 2\mu\varepsilon_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right). \quad (6.4)$$

Дифференциальное уравнение (6.3) для определения скорости принадлежит также к параболическому типу. Решение этого уравнения может быть проведено аналогично тому, как это было сделано выше по отношению к дифференциальному уравнению (5.2) для неустановившегося прямолинейного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе.

В качестве простейшего примера кругового движения частиц вязкой жидкости рассмотрим задачу о вращении вокруг своей оси бесконечного круглого цилиндра, заполненного вязкой жидкостью. Пусть цилиндр радиуса a (рис. 86) с момента $t=0$ начал вращаться с постоянной угловой скоростью ω . Если учесть условие прилипания частиц жидкости к стенкам, то рассматриваемая задача будет сводиться к решению дифференциального уравнения

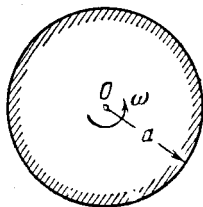


Рис. 86.

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \quad (6.5)$$

при следующих граничном и начальном условиях:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r &= a & v_\varphi &= \omega a, \\ \text{при } t &= 0 & v_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Выполняя преобразование Лапласа над уравнением (6.5) и граничным условием (6.6) и учитывая при этом начальное условие, можно

привести рассматриваемую задачу определения скорости v_φ к задаче определения изображения этой скорости

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_\varphi^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi^*}{dr} - v_\varphi^* \left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) = 0; \\ \text{при } r = a \quad v_\varphi^* = \omega a. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6.7) будет представляться через функцию Бесселя первого порядка от мнимого аргумента в виде

$$v_\varphi^* = AI_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right) + BK_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right).$$

Учитывая, что функция K_1 обращается в бесконечность при $r = 0$, т. е. на оси цилиндра, мы должны постоянную B приравнять нулю. Определяя оставшуюся постоянную A из граничного условия (6.7), получим решение задачи для изображения в виде

$$v_\varphi^* = \omega a \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{I_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}. \quad (6.8)$$

Решение же задачи для оригинала будет тогда представляться в виде интеграла

$$v_\varphi(r, t) = \frac{\omega a}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{I_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)} \frac{dp}{p}. \quad (6.9)$$

Особенности подинтегрального выражения (6.9) будут совпадать с корнями функции Бесселя от мнимого аргумента

$$I_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right) = 0. \quad (6.10)$$

Корни уравнения (6.10) будут чисто мнимыми и будут связаны с действительными корнями функции Бесселя первого порядка

$$J_1(\lambda_k) = 0 \quad (6.11)$$

соотношением

$$a \sqrt{\frac{p_k}{\nu}} = i\lambda_k. \quad (6.12)$$

Используя разложение мероморфной функции на простые дроби, будем иметь:

$$\frac{I_1 \left(p \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{p I_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)} = \frac{c_0}{p} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k}{p - p_k}, \quad (6.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \left[\frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{I_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)} \right]_{p \rightarrow 0} = \frac{r}{a}, \\ c_k &= \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{pk}{\nu}} \right)}{p_k I_1' \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right) \frac{a}{2 \sqrt{\nu p_k}}} = 2 \frac{J_1 \left(\frac{r}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k J_1'(\lambda_k)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

При вычислении коэффициентов (6.14) были использованы известные соотношения из теорий функции Бесселя:

$$I_1(ix) = -iJ_1(-x),$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{k!(k+1)!},$$

$$I_1'(ix) = J_1'(x).$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{p} = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{p-p_k} = e^{-p_k t},$$

то для искомой скорости v_φ из (6.9), (6.13) и (6.14) будем иметь следующее выражение:

$$v_\varphi(r, t) = \omega a \left[\frac{r}{a} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t} \frac{J_1 \left(\frac{r}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k J_1'(\lambda_k)} \right]. \quad (6.15)$$

Подсчитывая силу вязкости на стенке вращающегося цилиндра по формуле (6.4), получим:

$$(\tau)_a = \mu \left[\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right)_a - \frac{1}{a} (v_\varphi)_a \right] = 2\mu\omega \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}.$$

Умножая силу вязкости $(\tau)_a$ на длину окружности цилиндра и его радиус, получим выражение для того момента, который должен быть

приложен к цилиндру, чтобы поддерживать его вращение с постоянной угловой скоростью

$$L = 4\pi\mu\omega a^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}. \quad (6.16)$$

С возрастанием времени величина момента, необходимого для поддержания вращения цилиндра с постоянной угловой скоростью, будет уменьшаться до нуля.

§ 7. Вращение круглого цилиндра в неограниченной жидкости

Пусть вязкая несжимаемая жидкость простирается до бесконечности. Внутри этой жидкости находится круглый цилиндр радиуса a , который с момента $t = 0$ начинает вращаться вокруг своей геометрической оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 87). Если предполагать, что частицы жидкости перемещаются строго по концентрическим окружностям и на бесконечности они находятся в состоянии покоя, то данная задача будет сводиться к решению дифференциального уравнения

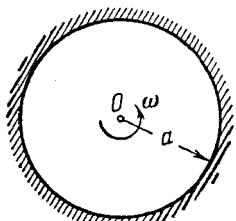


Рис. 87.

$$\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r^2} \right) \quad (7.1)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = a \quad v_{\varphi} = \omega a, \\ \text{при } r = \infty \quad v_{\varphi} = 0, \\ \text{при } t = 0 \text{ и } r > a \quad v_{\varphi} = 0. \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

Умножая уравнение (7.1) и первые два условия (7.2) на $e^{-\nu t}$, проводя интегрирование и обозначая

$$\frac{v_{\varphi}^*}{p} = \int_0^{\infty} e^{-\nu t} v_{\varphi}(r, t) dt, \quad (7.3)$$

для изображения искомой скорости получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 v_{\varphi}^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{\varphi}^*}{dr} - v_{\varphi}^* \left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) = 0; \\ \text{при } r = a, \quad v_{\varphi}^* = \omega a, \\ \text{при } r = \infty \quad v_{\varphi}^* = 0. \end{array} \right\} \quad (7.4)$$

Чтобы удовлетворить условию обращения изображения в нуль на бесконечности, необходимо из двух частных решений уравнения (7.4), представляемых в виде функций Бесселя первого порядка от мнимого

аргумента, использовать лишь то, которое будет содержать функцию Макдональда, т. е.

$$v_{\varphi}^* = BK_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right).$$

Определяя постоянное B из первого граничного условия (7.4), будем иметь для изображения:

$$v_{\varphi}^* = \omega a \frac{K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{K_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}, \quad (7.5)$$

а для оригинала:

$$v_{\varphi} = \frac{\omega a}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{K_1 \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)} \frac{dp}{p}. \quad (7.6)$$

Функция Макдональда

$$K_1(z)$$

не имеет корней в правой половине всей плоскости комплексного переменного z^1), где

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

Если на плоскости комплексного переменного мы возьмём совокупность всех точек, для которых

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2},$$

то этой совокупности точек на плоскости комплексного переменного, равного

$$p = z^2,$$

будет отвечать вся плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной оси от $p=0$ до $p=\infty$. Следовательно, подинтегральная функция (7.6) на плоскости комплексного переменного p не имеет никаких других особенностей, кроме точки ветвления в начале координат. Вводя в рассмотрение на плоскости комплексного переменного p замкнутый контур $ABCDEF A$, показанный на рис. 80, и

1) Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949, стр. 562.

проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в § 2, получим:

$$v_{\varphi} = \omega a \left[\left(\frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{K_1\left(a\sqrt{\frac{p}{v}}\right)} \right)_{p \rightarrow 0} - \frac{1}{\pi i} \int_{\infty}^0 e^{-\alpha^2 t} \frac{K_1\left(\frac{r i \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{K_1\left(\frac{a i \alpha}{\sqrt{v}}\right)} \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \frac{K_1\left(-\frac{r i \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{K_1\left(-\frac{a i \alpha}{\sqrt{v}}\right)} \frac{d\alpha}{\alpha} \right]. \quad (7.7)$$

Для малых значений аргумента функция $K_1(x)$ имеет порядок $\frac{1}{x}$, поэтому

$$\left[\frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{K_1\left(a\sqrt{\frac{p}{v}}\right)} \right]_{p \rightarrow 0} = \frac{a}{r}. \quad (7.8)$$

Функция $K_1(x)$ связана с функцией Ханкеля $H_1^{(1)}(ix)$ и обычными функциями Бесселя следующей зависимостью:

$$K_1(-ix) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(x) = -\frac{\pi}{2} [J_1(x) + iN_1(x)].$$

Поэтому будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{K_1\left(-\frac{r i \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{K_1\left(-\frac{a i \alpha}{\sqrt{v}}\right)} - \frac{K_1\left(\frac{r i \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{K_1\left(\frac{a i \alpha}{\sqrt{v}}\right)} &= \frac{J_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right) + iN_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{J_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right) + iN_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right)} - \frac{J_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right) - iN_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{J_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right) - iN_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right)} = \\ &= -2i \frac{J_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right) N_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right) - N_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right) J_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{J_1^2\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right) + N_1^2\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right)}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Подставляя (7.8) и (7.9) в (7.7), получим выражение для скорости кругового движения частиц жидкости в виде

$$v_{\varphi} = \frac{\omega a^2}{r} + \frac{2\omega a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \frac{J_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right) N_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right) - N_1\left(\frac{r \alpha}{\sqrt{v}}\right) J_1\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right)}{J_1^2\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right) + N_1^2\left(\frac{a \alpha}{\sqrt{v}}\right)} \frac{d\alpha}{\alpha}. \quad (7.10)$$

Вычисляя силу вязкости на стенке вращающегося цилиндра по формуле (6.4), получим:

$$\begin{aligned}
 (\tau)_a &= \mu \left[\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right)_a - \frac{1}{a} (v_\varphi)_a \right] = \\
 &= -2\mu\omega \left[1 - \frac{a}{\pi \sqrt{\nu}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t} \frac{J_1' \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right) N_1 \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right) - N_1' \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right) J_1 \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right)}{J_1^2 \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right) + N_1^2 \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right)} dx \right].
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Для вронскиана функции Бесселя мы имеем:

$$J_1'(x) N_1(x) - J_1(x) N_1'(x) = -\frac{2}{\pi x}.$$

Умножая силу вязкости (7.11) на длину окружности и её радиус, получим следующее выражение для момента сил вязкости:

$$L = -4\pi\mu\omega a^2 \left[1 + \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t} \frac{1}{J_1^2 \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right) + N_1^2 \left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\nu}} \right)} \frac{d\alpha}{\alpha} \right]. \tag{7.12}$$

Чтобы вращение цилиндра в неограниченной жидкости происходило с постоянной угловой скоростью, необходимо приложить к цилиндру переменный момент, равный правой части (7.12). С возрастанием времени величина момента, необходимого для поддержания вращения с постоянной угловой скоростью, будет уменьшаться до своего предельного значения, отвечающего установившемуся круговому движению частиц неограниченной вязкой несжимаемой жидкости.

§ 8. Диффузия вихревой нити

Дифференциальные уравнения плоско-параллельного движения вязкой несжимаемой жидкости без учёта сил из (6.4) главы II представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v.
 \end{aligned}$$

Исключая перекрёстным дифференцированием давление, используя уравнение несжимаемости и выражение для вихря

$$2\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

получим следующее дифференциальное уравнение для вихря:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu \Delta \Omega. \tag{8.1}$$

Левая часть (8.1) представляет собой индивидуальную производную по времени от вихря, поэтому при переходе к полярным координатам будем иметь:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = \nu \Delta \Omega. \quad (8.2)$$

Рассмотрим теперь задачу о диффузии прямолинейной вихревой нити. Пусть в начальный момент $t=0$ распределение скоростей частиц безграничной несжимаемой жидкости совпадает с распределением скоростей вокруг одной прямолинейной вихревой нити, расположенной вдоль оси z , т. е.

$$(v_\varphi)_{t=0} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \quad (8.3)$$

где Γ_0 — начальное значение циркуляции вихря. Попытаемся выяснить: 1) как будет изменяться благодаря вязкости циркуляция заданной вихревой нити в последующие моменты времени и 2) как вихревое движение в силу вязкости будет передаваться от одних частиц к другим.

В данном случае движение частиц и в последующие моменты времени останется круговым. Для кругового движения частиц единственная компонента вихря на основании (8.10) главы I будет представляться в виде

$$2\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi). \quad (8.4)$$

Так как скорость v_φ не зависит от угла φ , то выражение для вихря также не будет зависеть от этого угла. Поэтому дифференциальное уравнение (8.2) для вихря в круговом движении будет иметь вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \Delta \Omega. \quad (8.5)$$

Обе части равенства (8.4) умножим на площадь элемента

$$r \, d\varphi \, dr$$

и проведём интегрирование по площади окружности произвольного радиуса r :

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \Omega r \, d\varphi \, dr = \int_0^r \int_0^{2\pi} d(rv_\varphi) \, d\varphi = 2\pi r v_\varphi.$$

Левая часть полученного равенства представляет собой полный поток вихревых линий, пронизывающих площадь введённой окружности, который по теореме Стокса равен циркуляции вектора скорости по этой окружности. Обозначая эту циркуляцию через Γ , получим:

$$\Gamma = 2\pi r v_\varphi. \quad (8.6)$$

Таким образом, для определения циркуляции необходимо установить выражение для самой скорости частиц жидкости. Попытаемся это

выражение для скорости найти с помощью решения (7.10) задачи о вращении цилиндра в безграничной жидкости. Подставляя в это решение вместо угловой скорости вращения цилиндра выражение

$$\omega = \frac{\Gamma_0}{2\pi a^2},$$

будем иметь:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 t} \frac{J_1\left(r \frac{\alpha}{\sqrt{v}}\right) N_1\left(a \frac{\alpha}{\sqrt{v}}\right) - J_1\left(a \frac{\alpha}{\sqrt{v}}\right) N_1\left(r \frac{\alpha}{\sqrt{v}}\right) d\alpha}{a \left[J_1^2\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{v}}\right) + N_1^2\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{v}}\right) \right]} \frac{d\alpha}{a} \right\}. \quad (8.7)$$

Будем теперь радиус цилиндра a уменьшать до нуля. Из приведённого в § 6 разложения функции Бесселя первого порядка следует, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[J_1\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{v}}\right) \right] = 0. \quad (8.8)$$

Для функции Неймана имеет место следующее разложение:

$$N_1(x) = \frac{2}{\pi} J_1(x) \left(\ln \frac{x}{2} + c \right) - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1}}{\nu! (\nu+1)!} \left[\sum_{m=1}^{\nu+1} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{\nu} \frac{1}{m} \right].$$

На основании этого разложения заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} [N_1(x) x]_{x \rightarrow 0} &= -\frac{2}{\pi}, \\ \left[a\alpha N_1\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{v}}\right) \right]_{\alpha \rightarrow 0} &= -\frac{2\sqrt{v}}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Подставляя в выражение (8.7) предельные значения (8.8) и (8.9), получим:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{v}} \int_0^\infty e^{-a^2 t} J_1\left(\frac{r\alpha}{\sqrt{v}}\right) d\alpha \right]. \quad (8.10)$$

Если в правой части этого равенства время t увеличить до бесконечности, то скорость частиц жидкости будет стремиться к тому выражению, которое имеет место для одной вихревой нити:

$$(v_\varphi)_{t \rightarrow \infty} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (8.11)$$

Составляя разность правых частей (8.11) и (8.10), получим следующее выражение для скорости частиц жидкости:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi \sqrt{v}} \int_0^\infty e^{-a^2 t} J_1\left(\frac{r\alpha}{\sqrt{v}}\right) d\alpha. \quad (8.12)$$

Покажем, что данное выражение и будет представлять решение рассматриваемой задачи о диффузии прямолинейной вихревой нити.

В теории бесселевых функций приводится следующая интегральная формула ¹⁾:

$$\int_0^{\infty} J_{2n}(at) e^{-p^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-\frac{a^2}{8p^2}} I_n\left(\frac{a^2}{8p^2}\right).$$

Полагая в этой формуле

$$n = \frac{1}{2}$$

и учитывая, что

$$I_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} (e^x - e^{-x}),$$

получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 t} J_1\left(\frac{ra}{\sqrt{\nu}}\right) d\alpha = \frac{\sqrt{\nu}}{r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right).$$

Таким образом, решение задачи о диффузии прямолинейной вихревой нити будет представляться следующей конечной формулой:

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \quad (8.13)$$

Легко усмотреть, что полученное решение (8.13) начальному условию (8.3) удовлетворяет.

Подставляя выражение (8.13) для скорости в (8.4), получим следующее конечное выражение для вихря:

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \quad (8.14)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что выражение (8.14) для вихря удовлетворяет дифференциальному уравнению (8.5).

Если подставить выражение (8.13) в (8.6), то получим следующее выражение для циркуляции:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \quad (8.15)$$

Таким образом, циркуляция заданной в начальный момент прямолинейной вихревой нити будет убывать до нуля.

Из выражения (8.14) следует, что наибольшее значение вихря имеет место там, где в начальный момент находилась вихревая нить, т. е. при $r = 0$. При удалении от этого места вихрь будет резко

¹⁾ Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 146.

уменьшаться. В каждом данном месте вихрь будет возрастать от нуля до максимума, наступающего в момент времени

$$t = \frac{r^2}{4\nu}.$$

После этого момента вихрь снова будет уменьшаться до нуля. Картина расплывания вихревой нити со временем аналогична той, которую мы получили в § 3 для диффузии вихревого слоя.

§ 9. Вращение сферы, наполненной жидкостью

В предшествующих параграфах данной главы рассматривались те случаи неустановившихся движений вязкой несжимаемой жидкости, для которых дифференциальные уравнения движения использовались в их точном виде. Для этих случаев квадратичные члены инерции выпадали из левых частей уравнений автоматически благодаря тому, что движение частиц предполагалось либо прямолинейно-параллельным, либо круговым.

При всяком другом характере движений частиц вязкой жидкости решение задач о неустановившемся движении благодаря наличию в уравнениях нелинейных слагаемых становится весьма затруднительным. Но если пренебрегать квадратичными членами инерции так же, как это было сделано в методе Стокса для задач об установившемся движении в главе V, то задачи о неустановившемся движении частиц вязкой жидкости во всех случаях становятся линейными, и к решению этих задач можно применять тот же метод преобразования Лапласа, с помощью которого решались задачи в предшествующих параграфах.

Если 1) пренебрегать квадратичными членами инерции, 2) не учитывать массовых сил и 3) считать, что давление и все компоненты вектора скорости не зависят от угла φ цилиндрических координат, то дифференциальное уравнение (6.7) главы II для поперечной компоненты скорости v_φ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right). \quad (9.1)$$

Таким образом, для поперечной компоненты v_φ скорости при указанных выше предположениях имеет место самостоятельное линейное уравнение, не содержащее давления и других компонент вектора скорости. Следовательно, если для какой-либо задачи граничные условия будут включать только поперечную скорость и, быть может, её производные по координатам, то такую задачу можно решать с помощью уравнения (9.1) независимо как от вида границ, так и от тех или иных предположений по отношению к другим компонентам вектора скорости частиц жидкости. В качестве примера рассмотрим с помощью дифференциального уравнения (9.1)

задачу о вращении сферы, наполненной вязкой несжимаемой жидкостью.

Пусть сфера радиуса a (рис. 88), наполненная вязкой несжимаемой жидкостью, с момента $t=0$ начала вращаться вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω . В этом случае для поперечной скорости v_φ будут иметь место следующие граничные условия прилипания и начальное условие:

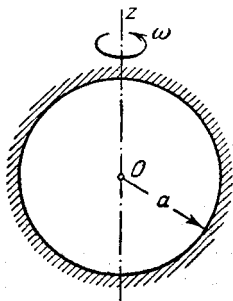


Рис. 88.

$$\left. \begin{array}{l} \text{прх } r = a \sin \theta \quad v_\varphi = \omega a \sin \theta, \\ \text{при } t = 0 \quad v_\varphi = 0, \end{array} \right\} \quad (9.2)$$

где θ — угол между осью z и радиусом, проведённым из центра сферы к рассматриваемой точке на её поверхности.

Для решения данной задачи применим метод преобразования Лапласа. Вводя обозначение

$$\frac{v_\varphi^*}{p} = \int_0^\infty e^{-pt} v_\varphi dt \quad (9.3)$$

и проводя преобразование Лапласа над уравнением (9.1) и граничным условием (9.2), мы приходим к следующей задаче для изображения

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v_\varphi^* - v_\varphi^* \left(\frac{1}{r^2} + \frac{p}{\nu} \right) = 0, \\ \text{при } r = a \sin \theta \quad v^* = \omega a \sin \theta. \end{array} \right\} \quad (9.4)$$

Перейдём теперь к сферическим координатам R и θ . Оператор Лапласа от скорости v_φ в предположении, что эта скорость не зависит от угла φ , представляется в виде

$$\Delta v_\varphi^* = \frac{\partial^2 v_\varphi^*}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v_\varphi^*}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_\varphi^*}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{R^2} \frac{\partial v_\varphi^*}{\partial \theta}. \quad (9.5)$$

Полагая

$$v_\varphi^* = \sin \theta v(R), \quad (9.6)$$

получим из (9.4) и (9.5) для множителя v обыкновенное дифференциальное уравнение и простое граничное условие

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 v}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dv}{dR} - v \left(\frac{2}{R^2} + \frac{p}{\nu} \right) = 0; \\ \text{при } R = a \quad v = \omega a. \end{array} \right\} \quad (9.7)$$

С помощью подстановки

$$v = \frac{y}{\sqrt{R}} \quad (9.8)$$

дифференциальное уравнение (9.7) приводится к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{R} y' - y \left(\frac{p}{v} + \frac{9}{4R^2} \right) = 0. \quad (9.9)$$

Общее решение уравнения (9.8) представляется через функции Бесселя дробного порядка от мнимого аргумента в виде

$$y = AI_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + BK_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right).$$

Так как функция $K_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)$ обращается при $R=0$, т. е. в центре сферы, в бесконечность, то постоянную B необходимо положить равной нулю. Определяя постоянную A из граничного условия (9.7), получим:

$$A = \frac{\omega a^{3/2}}{I_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}.$$

Таким образом, решение задачи (9.4) для изображения поперечной скорости v_φ^* будет:

$$v_\varphi^* = \omega a \sin \theta \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{I_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}. \quad (9.10)$$

Переходя от изображения (9.10) к оригиналу, получим поперечную скорость

$$v_\varphi = \omega a \sqrt{\frac{a}{R}} \sin \theta \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{I_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \frac{dp}{p}. \quad (9.11)$$

Особенности подынтегральной функции (9.11) будут совпадать с корнями функции Бесселя от мнимого аргумента

$$I_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right) = 0.$$

Корни этой функции будут чисто мнимыми. Они будут связаны с действительными корнями функции Бесселя

$$J_{3/2}(\lambda_k) = 0 \quad (9.12)$$

соотношением

$$a \sqrt{\frac{p_k}{v}} = i\lambda_k. \quad (9.13)$$

Функция Бесселя $J_{3/2}(x)$ выражается через элементарные тригонометрические функции в виде

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right). \quad (9.14)$$

Поэтому корни уравнения (9.12) будут совпадать с корнями простого трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = \lambda. \quad (9.15)$$

Используя разложение мероморфной функции, будем иметь:

$$\frac{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{p I'_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)} = \frac{c_0}{p} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k}{p - p_k}, \quad (9.16)$$

где коэффициенты c_0 и c_k представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \left[\frac{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)}{I_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right)} \right]_{p \rightarrow 0} = \left(\frac{R}{a} \right)^{3/2}, \\ c_k &= \frac{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p_k}{\nu}} \right)}{p_k I'_{3/2} \left(a \sqrt{\frac{p_k}{\nu}} \right) \frac{a}{2 \sqrt{\nu p_k}}} = 2 \frac{J_{3/2} \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k J'_{3/2} (\lambda_k)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Подставляя разложение (9.16) в (9.11) и используя соответственные значения интегралов и выражения для коэффициентов (9.17), получим для поперечной скорости частиц жидкости внутри вращающейся сферы окончательное выражение

$$v_\varphi = \omega R \sin \theta \left[1 + 2 \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\lambda_k^2 \frac{t}{a^2}} \frac{J_{3/2} \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k J'_{3/2} (\lambda_k)} \right]. \quad (9.18)$$

Из полученной формулы (9.18) следует, что с возрастанием времени скорость частиц жидкости приближается к предельному своему значению, равному скорости частиц твёрдого шара при его вращении вокруг неподвижной оси.

Определим по формулам (6.9) главы II ту часть силы вязкости на поверхности самой сферы, которая отвечает одной лишь поперечной скорости v_φ . Имеем:

$$(p_{R\varphi})_a = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R} \right)_a = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} \right)_a - \mu \omega \sin \theta. \quad (9.19)$$

Вычисляя на основании (9.18) производную от скорости v_φ по радиусу и используя граничное значение этой скорости, получим:

$$\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial R}\right)_a = \omega \sin \theta + 2\omega \sin \theta \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\gamma \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}.$$

Следовательно, сила вязкости на поверхности сферы будет представляться в виде

$$(p_{R\varphi})_a = 2\mu\omega \sin \theta \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\gamma \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}. \quad (9.20)$$

Умножая левую и правую части (9.20) на элемент поверхности сферы $a^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ и на расстояние до оси вращения $a \sin \theta$ и интегрируя по всей поверхности сферы, получим следующее выражение для момента сил вязкости относительно оси вращения:

$$L_z = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (p_{R\varphi})_a \sin^2 \theta d\varphi d\theta = \frac{16}{3} \pi \mu \omega a^3 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\gamma \frac{\lambda_k^2}{a^2} t}. \quad (9.21)$$

Чтобы осуществить вращение сферы, наполненной вязкой несжимаемой жидкостью, с постоянной угловой скоростью, необходимо приложить переменный момент, равный правой части (9.21).

Сопоставляя выражение (9.21) для момента сил вязкости частиц жидкости, наполняющей сферу, с выражением (6.16) для момента сил вязкости частиц жидкости, наполняющей круглый цилиндр, мы видим много общего в этих выражениях. Для случая цилиндра радиус входит во второй степени, но в качестве третьего линейного измерения входит длина цилиндра, которая в формуле (6.16) равна единице. Различие имеется только в отношении числовых множителей и в значениях корней соответственных функций Бесселя.

§ 10. Движение шара в неограниченной вязкой жидкости

Если пренебрегать квадратичными членами инерции, не учитывать действие массовых сил и считать движение частиц осесимметричным, то дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (6.10) и (6.11) главы II в сферических координатах представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \sin \theta v_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta v_\theta) &= 0, \\ \frac{\partial v_R}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \left(\Delta v_R - \frac{2v_R}{R^2} - \frac{2v_\theta}{R^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

На основании первого уравнения (10.1) можно ввести функцию тока осесимметричного движения жидкости, полагая

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ v_\theta &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Используя обозначение оператора Стокса

$$D = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (10.3)$$

последние два уравнения (10.1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\nu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial D \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\nu}{\sin \theta} \frac{\partial D \psi}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Исключая из уравнения (10.4) давление, получим для функции тока следующее дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка:

$$\frac{\partial D \psi}{\partial t} = \nu D D \psi. \quad (10.5)$$

Полученное дифференциальное уравнение (10.5) применим к задаче о неустановившемся движении шара в неограниченной вязкой жидкости.

Пусть шар радиуса a движется с постоянной скоростью V_0 параллельно положительному направлению оси z в неограниченной вязкой несжимаемой жидкости (рис. 89). Граничные условия

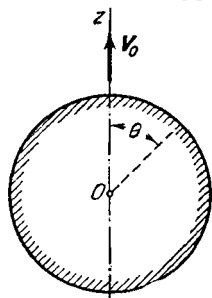


Рис. 89.

прилипания частиц жидкости к поверхности шара будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{при } R = a \quad v_R &= -\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_0 \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -V_0 \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

К граничным условиям (10.6) необходимо присоединить условие отсутствия движения частиц жидкости на бесконечности:

$$\text{при } R = \infty \quad v_R = 0, \quad v_\theta = 0. \quad (10.7)$$

Что касается начального условия в рассматриваемой задаче, то его пока формулировать не будем.

Вид граничных условий (10.6) даёт некоторое основание к тому, чтобы искать функцию тока в виде произведения квадрата синуса

на неизвестную функцию от радиуса и времени, т. е.

$$\psi = \sin^2 \theta F(R, t). \quad (10.8)$$

При таком предположении дифференциальное уравнение (10.5) и граничные условия (10.6) и (10.7) представляются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{2F}{R^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2}{R^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{2F}{R^2} \right); \quad (10.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } R = a \quad -\frac{2F}{R^2} = V_0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial R} = -V_0, \\ \text{при } R = \infty \quad \frac{F}{R^2} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial R} = 0. \end{array} \right\} \quad (10.10)$$

К данной задаче применим метод преобразования Лапласа. Вводя обозначение

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} F(R, t) dt = \frac{F^*}{p} \quad (10.11)$$

и проводя преобразование Лапласа над уравнением (10.9) и граничными условиями (10.10), получим:

$$-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{2F}{R^2} \right)_{t=0} + \frac{d^2 F^*}{dR^2} - \frac{2F^*}{R^2} = \frac{\nu}{p} \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{2}{R^2} \right) \left(\frac{d^2 F^*}{dR^2} - \frac{2F^*}{R^2} \right); \quad (10.12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } R = a \quad -\frac{2F^*}{R^2} = V_0, \quad \frac{1}{R} \frac{dF^*}{dR} = -V_0, \\ \text{при } R = \infty \quad \frac{F^*}{R^2} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{dF^*}{dR} = 0. \end{array} \right\} \quad (10.13)$$

Пользуясь неопределённостью начальных условий, потребуем, чтобы первое слагаемое (10.12) обращалось в нуль, тогда дифференциальное уравнение (10.12) запишется

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{2}{R^2} \right) \left[\frac{d^2 F^*}{dR^2} - F^* \left(\frac{p}{\nu} + \frac{2}{R^2} \right) \right] = 0. \quad (10.14)$$

Если ввести обозначение

$$\frac{d^2 F^*}{dR^2} - F^* \left(\frac{p}{\nu} + \frac{2}{R^2} \right) = f, \quad (10.15)$$

то дифференциальное уравнение (10.14) представится в виде

$$\frac{d^2 f}{dR^2} - \frac{2f}{R^2} = 0.$$

Общее решение этого последнего уравнения будет иметь вид

$$f = \frac{C_1}{R} + C_2 R^2.$$

Таким образом, для изображения F^* будем иметь следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 F^*}{dR^2} - F^* \left(\frac{p}{v} + \frac{2}{R^2} \right) = \frac{C_1}{R} + C_2 R^2. \quad (10.16)$$

Проверкой можно убедиться, что частным решением уравнения (10.16) с правой частью будет выражение

$$-\frac{v}{p} \left(\frac{C_1}{R} + C_2 R^2 \right). \quad (10.17)$$

С помощью подстановки

$$F^* = y \sqrt{R}$$

однородное уравнение для F^* можно привести к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 y}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dy}{dR} - y \left(\frac{p}{v} + \frac{9}{4R^2} \right) = 0.$$

Решение этого уравнения представляется через функции Бесселя дробного порядка от мнимого аргумента

$$y = AI_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + BK_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right).$$

Таким образом, полное решение дифференциального уравнения (10.16) будет:

$$F^* = \sqrt{R} \left[AI_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + BK_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) \right] + \frac{C_1'}{R} + C_2' R^2. \quad (10.18)$$

Чтобы удовлетворить условию (10.13) на бесконечности, необходимо постоянные A и C_2' приравнять нулю. Функция $K_{3/2}(x)$ представляется в виде

$$K_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Следовательно, решение (10.18) будет теперь:

$$F^* = B_1 e^{-R \sqrt{\frac{p}{v}}} \left(1 + \frac{1}{R \sqrt{\frac{p}{v}}} \right) + \frac{C_1'}{R}.$$

Используя граничные условия (10.13) на самой поверхности шара, получим уравнения для определения постоянных B_1 и C_1'

$$B_1 e^{-a \sqrt{\frac{p}{v}}} \left(1 + \frac{\sqrt{v}}{a \sqrt{p}} \right) + \frac{C_1'}{a} = -\frac{1}{2} V_0 a^2,$$

$$B_1 e^{-a \sqrt{\frac{p}{v}}} \left(\sqrt{\frac{p}{v}} + \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{v}}{a^2 \sqrt{p}} \right) + \frac{C_1'}{a^2} = V_0 a,$$

откуда получим:

$$B_1 = \frac{3}{2} a V_0 \sqrt{\frac{\nu}{p}} e^a \sqrt{\frac{p}{\nu}},$$

$$C_1' = -\frac{V_0 a}{2} \left(a^2 + \frac{3a \sqrt{\nu}}{\sqrt{p}} + \frac{3\nu}{p} \right).$$

Таким образом, решение уравнения (10.16), удовлетворяющее всем граничным условиям, будет иметь вид

$$F^* = \frac{V_0 a}{2} \left[3e^{-(R-a)\sqrt{\frac{p}{\nu}}} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{p}} + \frac{\nu}{pR} \right) - \frac{a^2}{R} - \frac{3a\sqrt{\nu}}{R\sqrt{p}} - \frac{3\nu}{Rp} \right]. \quad (10.19)$$

Проводя обращение преобразования Лапласа (10.11), получим:

$$F(R, t) = \frac{V_0 a}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \left[3e^{-(R-a)\sqrt{\frac{p}{\nu}}} \left(\sqrt{\frac{\nu}{p}} + \frac{\nu}{pR} \right) - \frac{a^2}{R} - \frac{3a\sqrt{\nu}}{R\sqrt{p}} - \frac{3\nu}{Rp} \right] \frac{dp}{p}. \quad (10.20)$$

В теории операционного исчисления¹⁾ доказывается, что асимптотическое значение оригинала при бесконечно больших значениях независимого переменного t можно получить с помощью разложения самого изображения в окрестности той особой точки на плоскости комплексного параметра преобразования p , для которой действительная часть этого параметра имеет наибольшее значение. В рассматриваемом нами случае такой особой точкой изображения (10.19) служит точка, для которой $p=0$. Если показательный множитель (10.19) представить в виде

$$e^{-(R-a)\sqrt{\frac{p}{\nu}}} = 1 - (R-a) \sqrt{\frac{p}{\nu}} + \frac{1}{2} (R-a)^2 \frac{p}{\nu} - \dots,$$

то из (10.19) будем иметь:

$$(F^*)_{p \rightarrow 0} = -\frac{1}{4} a V_0 \left(3R - \frac{a^2}{R} \right). \quad (10.21)$$

Учитывая (10.8), получим для функции тока при бесконечно больших значениях времени следующее выражение:

$$(\psi)_{t \rightarrow \infty} = -\frac{a V_0}{4} \left(3R - \frac{a^2}{R} \right) \sin^2 \theta. \quad (10.22)$$

Правая часть (10.22) совпадает с правой частью (6.12) главы V. Таким образом, полученное решение (10.20) при возрастании времени

¹⁾ Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1951.

до бесконечности вырождается в решение задачи Стокса об установившемся движении шара в неограниченной вязкой жидкости.

При проведении решения задачи о движении шара мы не сформулировали точно начальное условие. Начальное распределение скоростей мы можем получить из самого решения (10.20). Для этого достаточно найти выражение для изображения при стремлении параметра преобразования к бесконечности. Полагая в (10.21) $p = \infty$ и учитывая (10.8), получим следующее выражение функции тока для начального момента времени:

$$(\psi)_{t \rightarrow 0} = -\frac{a^3 V_0}{2R} \sin^2 \theta. \quad (10.23)$$

Правая часть (10.23) представляет собой выражение для функции тока при движении шара в идеальной жидкости. Следовательно, установленное выше решение (10.20) имеет место при том начальном условии, что распределение скоростей в момент начала движения совпадает с распределением скоростей при движении шара в неограниченной идеальной жидкости.

Заметим, что дифференциальное уравнение (10.5) можно представить в двух эквивалентных формулах:

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu D \psi \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu D \right) D \psi &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому решение уравнения (10.5) можно в ряде случаев искать в виде суммы двух функций:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (10.24)$$

из которых первая является решением дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \nu D \psi_1, \quad (10.25)$$

а вторая представляет собой решение уравнения эллиптического типа

$$D \psi_2 = 0. \quad (10.26)$$

Построенное нами решение (10.18) как раз и представляет сумму двух изображений:

$$F^* = F_1^* + F_2^*.$$

Для первого из этих изображений оригиналом будет функция $F_1(R, t)$, с которой решение уравнения (10.25) связано зависимостью

$$\psi_1 = \sin^2 \theta F_1(R, t),$$

а для второго — оригиналом будет функция $F_2(R, t)$, через которую решение уравнения (10.26) представляется в виде

$$\psi_2 = \sin^2 \theta F_2(R, t).$$

Учитывая (10.24), (10.25) и (10.26), для оператора Стокса от функции тока ψ , будем иметь:

$$D\psi = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\sin^2 \theta}{\nu} \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (10.27)$$

Обратимся теперь к вычислению давления в произвольной точке и к определению результирующего воздействия вязкой жидкости на шар.

Подставляя выражения (10.24) и (10.27) во второе равенство (10.4), получим:

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial t} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial t},$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\rho}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial t} = -\rho \sin \theta \frac{\partial^2 F_2}{\partial R \partial t}.$$

После интегрирования обеих частей этого равенства по углу θ будем иметь:

$$p = \rho \cos \theta \frac{\partial^2 F_2}{\partial R \partial t} + C. \quad (10.28)$$

Подстановкой выражения (10.28) в первое равенство (10.4) можно убедиться в том, что C может представлять собой лишь произвольную функцию от времени.

На основании (10.19) можно заключить, что изображение функции $F_2(R, t)$ имеет вид

$$F_2^* = -\frac{aV_0}{2R} \left(a^2 + 3a \sqrt{\frac{\nu}{\rho}} + \frac{3\nu}{\rho} \right). \quad (10.29)$$

По виду правой части (10.29) легко установить выражение самого оригинала

$$F_2(R, t) = -\frac{aV_0}{2R} \left(a^2 + 6a \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} + 3\nu t \right). \quad (10.30)$$

Подставляя (10.30) в (10.28), получим следующее выражение для давления в произвольной точке вязкой жидкости:

$$p = \frac{\rho a V_0 \cos \theta}{2R^2} \left(3a \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} + 3\nu \right) + C. \quad (10.31)$$

Для сопротивления шара мы можем использовать общую интегральную формулу (4.16) главы III, которая в нашем случае принимает вид

$$P_z = \iint_S \left(-p \cos \theta + \mu \frac{\partial w}{\partial R} \right) dS, \quad (10.32)$$

где w — составляющая вектора скорости, параллельная оси симметрии. Используя выражения (10.2) и граничные условия (10.6), получим:

$$\left. \begin{aligned} w &= v_R \cos \theta - v_\theta \sin \theta, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial R}\right)_a &= -\frac{V_0}{a} \sin^2 \theta - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2}\right)_a. \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

На основании уравнений (10.25) и (10.26) будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R^2} = \sin^2 \theta \left(\frac{2F_1}{R^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{2F_2}{R^2} \right) = \sin^2 \theta \left(\frac{2F}{R^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial F_1}{\partial t} \right). \quad (10.34)$$

Используя первое граничное условие (10.10), получим:

$$-\left[\frac{2(F_1 + F_2)}{R^2} \right]_a = V_0. \quad (10.35)$$

Так как это равенство справедливо для любого момента времени, то его можно дифференцировать по времени, т. е.

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_a = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)_a. \quad (10.36)$$

Подставляя (10.35) и (10.36) в (10.34) и (10.33), найдём:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial R}\right)_a = \frac{1}{va} \sin^2 \theta \left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)_a.$$

Используя теперь выражение (10.30), будем иметь:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial R}\right)_a = -\frac{3V_0}{2va} \sin^2 \theta \left(a \sqrt{\frac{v}{\pi t}} + v \right). \quad (10.37)$$

С помощью равенства (10.31) и (10.37) подинтегральное выражение в (10.32) будет представляться в виде

$$\left(-p \cos \theta + \mu \frac{\partial w}{\partial R} \right)_a = -\frac{3}{2} \frac{\rho V_0}{a} \left(a \sqrt{\frac{v}{\pi t}} + v \right) - C \cos \theta.$$

Подставляя это выражение в (10.32) и выполняя интегрирование, получим следующее выражение для результирующего воздействия неограниченной вязкой жидкости на шар, движущийся прямолинейно и равномерно:

$$P_z = -6\pi\mu a V_0 \left(1 + a \sqrt{\frac{1}{\pi v t}} \right). \quad (10.38)$$

При возрастании времени до бесконечности правая часть (10.38) будет совпадать с правой частью формулы сопротивления шара при установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости, установленной в главе V.

Если шар будет перемещаться не с постоянной скоростью, а с переменной, то решение задачи можно получить с помощью применения формулы Дюгамеля (1.12) к правой части (10.20). В частности, для результирующего воздействия вязкой несжимаемой жидкости на шар при его неравномерном поступательном движении мы получим следующую формулу:

$$P_z = -\frac{2}{3} \pi a^2 \rho V'(t) - 6\pi \mu a V(t) - 6\sqrt{\nu \pi} \rho a^2 \left[\frac{V}{\sqrt{t}} + \int_0^t V'(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (10.39)$$

ГЛАВА X

РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

§ 1. Развитие ламинарного движения между параллельными стенками

В главе IV были решены задачи об установившемся прямолинейно-параллельном течении вязкой несжимаемой жидкости между параллельными неподвижными стенками и в круглой цилиндрической трубе. Предположение о прямолинейности траекторий всех частиц жидкости может оправдываться строго только при условии, что сами стенки на всём своём протяжении являются прямолинейными и простираются в обе стороны до бесконечности. Если же стенки по своей длине ограничены и если к тому же у своих концов они не будут строго прямолинейными, то предположение о прямолинейном характере траекторий всех частиц жидкости может оправдываться только приближённо на тех участках, которые будут достаточно удалены от концов стенок. Как уже указывалось в § 5 главы IV, ламинарное движение в цилиндрической трубе ограниченной длины может реально осуществляться при выполнении двух условий. Во-первых, число Рейнольдса не должно превышать своего критического значения. Во-вторых, длина трубы, отсчитываемая от входного её сечения, должна превышать длину так называемого *начального участка*, на протяжении которого всякого рода возмущения, неизбежно возникающие при входе в трубу, будут постепенно уменьшаться. При выполнении этих двух условий на протяжении начального участка будут постепенно развиваться те основные признаки ламинарного режима, о которых была речь в § 5 главы IV.

Задача определения характера движения вязкой несжимаемой жидкости на начальном участке цилиндрической трубы впервые решалась в работе Буссинеска ¹⁾ с помощью ряда допущений и упрощений дифференциальных уравнений движений вязкой жидкости в цилиндрических координатах. Затем эта же задача решалась Шиллером ²⁾ путём сопряжения прямолинейного профиля распределения скорости

1) Boussinesq J., Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., т. 113, 1891, стр. 9 и 49.

2) Шиллер Л., Течение жидкостей в трубах, ОНТИ, 1936.

в ядре течения с параболическим профилем распределения скоростей в пограничном слое. Таким же способом Л. С. Лейбензоном ¹⁾ была решена задача о начальном участке для течения между параллельными неподвижными стенками.

Систематическое исследование вопроса о начальном участке течения в трубах и в диффузорах было выполнено в работе С. М. Тарга ²⁾ с помощью приближённых уравнений.

Пусть две прямолинейные и параллельные стенки простираются до бесконечности лишь в одну сторону (рис. 90). Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Начало оси x выберем в середине расстояния между концами стенок. Для определения движения на начальном участке применим уравнения, формально совпадающие с приближёнными уравнениями

(5.1) главы VIII:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

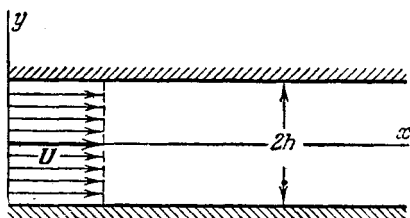


Рис. 90.

В этих уравнениях квадратичные члены инерции учтены лишь частично в первом уравнении, а слагаемые от вязкости учитываются так же, как в теориях смазочного и пограничного слоя. Множитель U представляет собой среднюю по сечению скорость.

Сформулируем теперь граничные условия. На стенках должно выполняться условие прилипания жидкости к стенкам, т. е.

$$\text{при } y = \pm h, \quad x > 0, \quad u = 0, \quad v = 0. \quad (1.2)$$

Расход жидкости через каждое сечение рассматриваемой плоской трубы должен оставаться одним и тем же, т. е.

$$\int_{-h}^h u \, dy = 2hU. \quad (1.3)$$

К граничным условиям (1.2) и (1.3) необходимо присоединить условие у входа в трубу. Рассмотрим тот простейший случай, при котором основная компонента скорости u по начальному сечению трубы распределяется равномерно, т. е.

$$\text{при } x = 0 \quad u = U. \quad (1.4)$$

¹⁾ Лейбензон Л. С., Руководство по нефтепромысловой механике, ч. 1. Гидравлика, ГОНТИ, 1931, стр. 33.

²⁾ Тарг С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостехиздат, 1951.

Из последнего уравнения (1.1) для поперечной компоненты скорости v получим:

$$v = - \int_{-h}^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^y u dy. \quad (1.5)$$

Используя равенство (1.3), легко видеть из (1.5), что условия обращения скорости v в нуль на стенках будут выполнены.

Проводя интегрирование левой и правой частей первого уравнения (1.1) по переменному y , получим:

$$U \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^h u dy = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-h}^h dy + \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-h} \right].$$

Отсюда, учитывая (1.3), получим следующее выражение для перепада давления:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{2h} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-h} \right]. \quad (1.6)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится только к определению основной скорости u из следующего дифференциального уравнения параболического типа:

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{2h} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-h} \right]. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) и равенства (1.5) и (1.6) будут иметь место при любом распределении основной скорости u входа в трубу.

В рассматриваемом нами частном случае (1.4) начального распределения скоростей можно полагать, что распределение скоростей в произвольном сечении плоской трубы будет симметричным по отношению к средней линии. В таком случае будут иметь место следующие равенства:

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-h} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h. \quad (1.9)$$

Обозначая

$$\frac{\nu}{U} = k, \quad (1.10)$$

получим из (1.7) следующее дифференциальное уравнение для определения основной скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \quad u = U, \\ \text{при } y = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \text{при } y = h \quad u = 0. \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

Сопоставляя данную задачу решения уравнения (1.11) при граничных условиях (1.12) с задачей неустановившегося прямолинейно-параллельного движения между параллельными стенками, простейший случай которой был рассмотрен в § 4 главы IX, мы видим много общего. Это обстоятельство указывает на возможность использования при решении данной задачи того же метода операционного исчисления, который использовался при решении задач в главе IX.

Вводя преобразование Лапласа по независимому переменному x от искомой функции u

$$\int_0^{\infty} e^{-px} u(x, y) dx = \frac{u^*(p, y)}{p} \quad (1.13)$$

и используя первое граничное условие (1.12), будем иметь:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\partial u}{\partial x} dx = -(u)_{x=0} + u^* = -U + u^*. \quad (1.14)$$

Если уравнение (1.11) и второе и третье граничные условия (1.12) подвергнуть преобразованию Лапласа, то данная задача по определению скорости $u(x, y)$ будет сведена к следующей задаче определения изображения этой скорости:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 u^*}{dy^2} - \frac{p}{k} u^* = -\frac{p}{k} U + \frac{1}{h} \left(\frac{du^*}{dy} \right)_h; \\ \text{при } y = 0 \quad \frac{du^*}{dy} = 0, \\ \text{при } y = h \quad u^* = 0. \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

Решение дифференциального уравнения (1.15) для изображения будет представляться в виде

$$u^* = Ae^{\sqrt{\frac{p}{k}} y} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{k}} y} + U - \frac{k}{ph} \left(\frac{du^*}{dy} \right)_h. \quad (1.16)$$

Дифференцируя обе части (1.16), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du^*}{dy} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left(Ae^{\sqrt{\frac{p}{k}} y} - Be^{-\sqrt{\frac{p}{k}} y} \right), \\ \left(\frac{du^*}{dy} \right)_h = \sqrt{\frac{p}{k}} \left(Ae^{\sqrt{\frac{p}{k}} h} - Be^{-\sqrt{\frac{p}{k}} h} \right). \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

Используя граничные условия (1.15) и равенство (1.17), получим для определения постоянных следующие уравнения:

$$A - B = 0,$$

$$Ae^{\sqrt{\frac{p}{k}}h} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{k}}h} + U - \frac{k}{ph}\sqrt{\frac{p}{k}}(Ae^{\sqrt{\frac{p}{k}}h} - Be^{-\sqrt{\frac{p}{k}}h}) = 0.$$

Решая эти уравнения, будем иметь:

$$A = B = -\frac{U}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}h - \frac{1}{h}\sqrt{\frac{k}{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{k}}h}.$$

Подставляя значения постоянных в (1.17) и (1.16), найдём:

$$\left(\frac{du^*}{dy}\right)_h = \frac{hU\sqrt{\frac{p}{k}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{k}}h}{\sqrt{\frac{k}{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{k}}h - h\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}h}, \quad (1.18)$$

$$u^* = Uh \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}y - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}h}{\sqrt{\frac{k}{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{k}}h - h\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}h}. \quad (1.19)$$

С помощью обращения преобразования Лапласа (1.19) получим следующее выражение для оригинала основной скорости течения:

$$u(x, y) = \frac{Uh}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}y - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}h}{\sqrt{\frac{k}{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{k}}h - h\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{k}}h} \frac{dp}{p}. \quad (1.20)$$

Чтобы определить характер течения вязкой жидкости в плоской трубе для весьма далёких расстояний от входа, достаточно найти выражение изображения основной скорости при малых значениях параметра преобразования. Раскладывая каждое слагаемое в числителе и знаменателе (1.19) и ограничиваясь слагаемыми не выше второй степени от аргумента, найдём:

$$(u^*)_{p \rightarrow 0} = Uh \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{py^2}{k} - 1 - \frac{ph^2}{2k}}{\sqrt{\frac{k}{p}} \left(\sqrt{\frac{p}{k}}h + \frac{1}{6} \frac{p}{k} \sqrt{\frac{p}{k}}h^3 \right) - h - \frac{ph^3}{2k}} = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right).$$

Таким образом, на бесконечно большом удалении от входа в плоскую трубу профиль распределения основной скорости по сечению будет параболическим

$$[u(x, y)]_{x \rightarrow \infty} = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (1.21)$$

Особенности подинтегрального выражения (1.20) совпадают с корнями уравнения

$$\operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{k}} h = h \sqrt{\frac{p}{k}}. \quad (1.22)$$

Если обозначить корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = x \quad (1.23)$$

через γ_m , то корни уравнения (1.22) будут представляться в виде

$$p_m = -k \frac{\gamma_m^2}{h^2}. \quad (1.24)$$

Полагая $u=0$ и раскладывая для этого случая подинтегральное выражение (1.20) на простые дроби, получим:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} h}{p \left[\sqrt{\frac{k}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} h - h \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} h \right]} = \frac{c_0}{p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{p - p_m}, \quad (1.25)$$

где коэффициенты c_0 и c_m определяются с помощью следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \left[\frac{1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} h}{\sqrt{\frac{k}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} h - h \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} h} \right]_{p \rightarrow 0} = \frac{3}{2h}, \\ c_m &= \frac{F_1(p_m)}{F_2'(p_m)} = \frac{2}{h \gamma_m^2} \left(\frac{1}{\cos \gamma_m} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Подставляя разложение (1.25) в (1.20) и используя формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{px} \frac{dx}{p - p_m} = e^{p_m x},$$

получим следующее выражение для основной скорости частиц жидкости на средней линии плоской трубы:

$$(u)_{y=0} = \frac{3}{2} U + 2U \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2} \left(\frac{1}{\cos \gamma_m} - 1 \right) e^{-k \frac{\gamma_m^2}{h^2} x}. \quad (1.27)$$

Составляя отношение разности предельной скорости частиц жидкости на средней линии на бесконечном удалении от входа и скорости

частиц на конечном удалении L от входа к предельной скорости, найдём:

$$\frac{\frac{3}{2} U - (u)_{y=0}}{\frac{3}{2} U} \Big|_{x=L} = \frac{4}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\cos \gamma_m} \right) e^{-k \frac{\gamma_m^2 L}{h^2}} \frac{\gamma_m^2}{\gamma_m^2}. \quad (1.28)$$

Задавая значение левой части (1.28) и решая полученное уравнение относительно длины L , можно получить приближённое значение длины начального участка плоской трубы, на протяжении которого максимальное значение скорости частиц будет отличаться от своего предельного значения на заданную величину. Полагая, например, значение левой части (1.28) равным

$$\frac{\frac{3}{2} U - (u)_{y=0}}{\frac{3}{2} U} \Big|_{x=L} = 0,01 \quad (1.29)$$

и сохраняя в правой части (1.28) лишь первое слагаемое, получим следующее выражение для длины начального участка плоской трубы:

$$L = hR \frac{1}{\gamma_1^2} \ln \frac{\cos \gamma_1 - 1}{0,0075 \gamma_1^2 \cos \gamma_1}, \quad (1.30)$$

где R представляет собой число Рейнольдса, определяемое для плоской трубы равенством

$$R = \frac{hU}{\nu}, \quad (1.31)$$

а γ_1 — наименьший, отличный от нуля корень уравнения (1.23), равный¹⁾

$$\gamma_1 = 4,493.$$

Подставляя числовое значение корня γ_1 в (1.30), получим следующую приближённую формулу для длины начального участка плоской трубы:

$$L = 0,18hR. \quad (1.32)$$

Таким образом, длина начального участка пропорциональна числу Рейнольдса и расстоянию между стенками.

1) Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций, Гостехиздат, 1948, стр. 47.

§ 2. Развитие ламинарного движения в круглой цилиндрической трубе

Пусть круглая цилиндрическая труба радиуса a простирается до бесконечности только в одну сторону — в сторону положительного направления оси x (рис. 91). Начало оси x выберем в центре начального сечения трубы.

Для определения движения жидкости на начальном участке трубы применим систему приближённых уравнений, аналогичных уравнениям (1.1):

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Множитель U и здесь представляет собой среднюю скорость по сечению трубы. Условия прилипания жидкости к стенкам и условие постоянства расхода через каждое сечение трубы будет представляться равенствами

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \text{ и } x > 0, \\ u = 0, \quad v_r = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$2 \int_0^a u r \, dr = a^2 U. \quad (2.3)$$

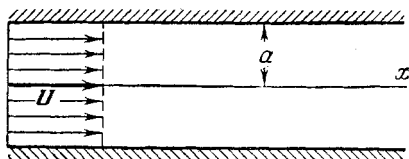


Рис. 91.

Будем предполагать, что основная скорость u по начальному сечению распределена равномерно, т. е.

$$\text{при } x = 0 \quad u = U. \quad (2.4)$$

Таким образом, задача определения движения вязкой жидкости на начальном участке круглой трубы сводится к решению системы уравнений при граничных условиях (2.2), (2.3) и (2.4).

Первое и третье уравнения (2.1) умножим на $r \, dr$ и проинтегрируем по переменному r в пределах от 0 до a и от 0 до r . Учитывая при этом второе равенство (2.1), получим:

$$U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^a u r \, dr = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^a r \, dr + \nu a \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_a, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^r u r \, dr = r v_r. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) может служить для определения значения поперечной скорости v_r , после того как будет определена основная скорость u . В силу условия (2.3) поперечная скорость на стенке действительно будет обращаться в нуль. Из равенства (2.5) при учёте (2.3) получим следующее выражение для перепада давления:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2\mu}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_a. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в первое уравнение (2.1) и обозначая

$$\frac{\nu}{U} = k, \quad (2.8)$$

получим дифференциальное уравнение для основной скорости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2k}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_a. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) при граничных условиях (2.2) и (2.4) будем решать также методом преобразования Лапласа. Полагая

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-px} u(r, x) dx &= \frac{u^*}{p}, \\ \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\partial u}{\partial x} dx &= -U + u^* \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

и подвергая преобразованию Лапласа уравнение (2.9) и граничное условие (2.2), получим следующую задачу для изображения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} - \frac{p}{k} u^* &= -\frac{p}{k} U + \frac{2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_a, \\ \text{при } r=a \quad u^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.11) через функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента будет представляться в виде

$$u^* = AI_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{k}} \right) + BK_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{k}} \right) + U - \frac{2k}{pa} \left(\frac{du^*}{dr} \right)_a. \quad (2.12)$$

Так как функция K_0 при $r=0$ обращается в бесконечность, а скорость на оси трубы должна быть конечной, то постоянное B необходимо приравнять нулю. Из (2.12) будем иметь:

$$\frac{du^*}{dr} = A \sqrt{\frac{p}{k}} I_0' \left(r \sqrt{\frac{p}{k}} \right). \quad (2.13)$$

Используя равенство (2.13) и граничное условие (2.11), получим следующее выражение для постоянного A :

$$A = \frac{U}{\frac{2}{a} \sqrt{\frac{k}{p}} I_0' \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right) - I_0 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right)}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.12), получим:

$$u^* = U \frac{I_0 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{k}} \right)}{I_0 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right) - \frac{2}{a} \sqrt{\frac{k}{p}} I_0' \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right)}.$$

Если использовать рекуррентные формулы

$$I_0' = I_1, \quad \frac{2}{a \sqrt{\frac{p}{k}}} I_1 = I_0 - I_2,$$

то для изображения основной скорости частиц вязкой жидкости найдём:

$$u^* = U \frac{I_0 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{k}} \right)}{I_2 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right)}. \quad (2.15)$$

Обращая преобразование Лапласа, получим следующую интегральную формулу для основной скорости:

$$u(r, x) = \frac{U}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px} \frac{I_0 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{k}} \right)}{I_2 \left(a \sqrt{\frac{p}{k}} \right)} \frac{dp}{p}. \quad (2.16)$$

Пользуясь известным разложением

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

и уменьшая параметр преобразования до нуля, получим из (2.15):

$$(u^*)_{p \rightarrow 0} = 2U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Таким образом, на бесконечном удалении от входа в трубу будет устанавливаться параболический профиль распределения скоростей по сечению, т. е.

$$(u)_{x \rightarrow \infty} = 2U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (2.17)$$

Раскладывая подинтегральное выражение (2.16) на простые дроби, получим:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{I_0\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right) - I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}{pI_2\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)} = \frac{c_0}{p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{p-p_m}, \quad (2.18)$$

где p_m — корни уравнения

$$I_2\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right) = 0,$$

связанные с корнями функции Бесселя второго порядка

$$J_2(\gamma) = 0 \quad (2.19)$$

следующим равенством:

$$a\sqrt{\frac{p_m}{k}} = i\gamma_m. \quad (2.20)$$

Коэффициенты разложения (2.18) равны

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \left[\frac{pF_1(p)}{F_2(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = 2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \\ c_m &= \frac{F_1(p_m)}{F_2'(p_m)} = \frac{2}{\gamma_m} \frac{J_0\left(\frac{r\gamma_m}{a}\right) - J_0(\gamma_m)}{J_2'(\gamma_m)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Используя разложение (2.18), получим из (2.16) для основной скорости следующее выражение:

$$u(x, r) = 2U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 2U \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r\gamma_m}{a}\right) - J_0(\gamma_m)}{\gamma_m J_2'(\gamma_m)} e^{-\frac{\gamma_m^2}{Ua^2} x}. \quad (2.22)$$

Подставляя найденное выражение (2.22) в (2.7), получим окончательное выражение для перепада давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{8\mu U}{a^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0'(\gamma_m)}{J_2'(\gamma_m)} e^{-\frac{\gamma_m^2}{Ua^2} x}\right). \quad (2.23)$$

Если воспользоваться рекуррентными формулами

$$J_2'(x) = J_1(x) - \frac{2}{x} J_2(x),$$

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x}$$

и учесть уравнение (2.19), то формулы для скорости и перепада давления можно также представить в виде

$$\frac{u(x, r)}{U} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2} \left[1 - \frac{J_0\left(r \frac{\gamma_m}{a}\right)}{J_0(\gamma_m)}\right] e^{-\frac{\gamma_m^2}{U a^2} x}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{8\mu U}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_m^2}{U a^2} x}\right). \quad (2.25)$$

В цитированной выше работе С. М. Тарга были вычислены профили распределения скоростей для ряда сечений, представленные на

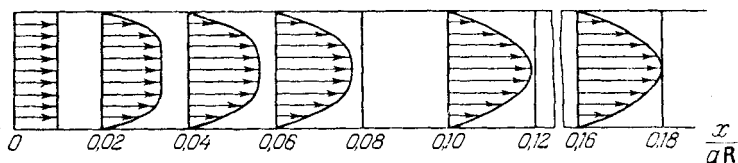


Рис. 92.

рис. 92. Картина развития течения на начальном участке круглой трубы, показанная на рис. 92, качественно согласуется с картиной,

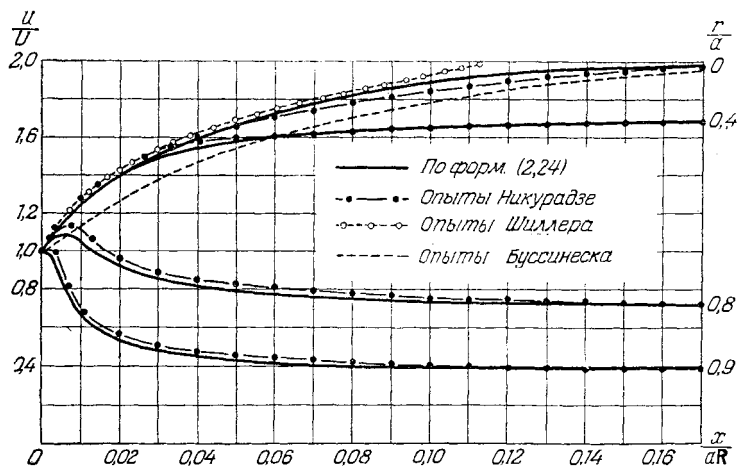


Рис. 93.

полученной из опытов Никурадзе. Сопоставление результатов расчёта по формуле (2.24) с результатами экспериментов и результатами расчётов по другим формулам показано на рис. 93, заимствованном

нами из той же книги С. М. Тарга. Из этого рисунка видно, что картина распределения скоростей, получаемая с помощью формулы (2.24) на всём участке, количественно удовлетворительно согласуется с результатами опытов.

Полагая в (2.24) $r = 0$ и сохраняя только первое слагаемое под знаком суммы, получим следующее приближённое выражение для скорости частиц жидкости на оси трубы:

$$u(x, 0) = 2U \left[1 - \frac{2[J_0(\gamma_1) - 1]}{\gamma_1^2 J_0(\gamma_1)} e^{-\frac{\gamma_1^2 x}{Ua^2}} \right], \quad (2.26)$$

где γ_1 — наименьший корень уравнений (2.19), равный

$$\gamma_1 = 5,136.$$

Если за длину начального участка принять то расстояние L от входа в трубу, при котором второе слагаемое в фигурной скобке (2.26) будет равно 0,01, то из (2.26) получим:

$$L = \frac{Ra}{\gamma_1^2} \ln \frac{J_0(\gamma_1) - 1}{0,005 \gamma_1^2 J_0(\gamma_1)}, \quad (2.27)$$

где R — число Рейнольдса для круглой трубы, т. е.

$$R = \frac{Ua}{\nu}. \quad (2.28)$$

Подставляя числовое значение γ_1 и значение $J_0(\gamma_1)$ из таблиц¹⁾

$$J_0(\gamma_1) \approx -0,133,$$

будем иметь из (2.27):

$$L = 0,16aR. \quad (2.29)$$

Таким образом, *длина начального участка круглой цилиндрической трубы пропорциональна числу Рейнольдса и значению радиуса трубы*. Значение коэффициента пропорциональности в (2.29) достаточно хорошо совпадает со значением, определяемым из ряда опытов.

§ 3. Развитие ламинарного течения жидкости в плоском диффузоре

В § 10 главы IV было рассмотрено радиальное установившееся течение вязкой жидкости в плоском диффузоре с помощью полных уравнений. Но при этом не учитывалось возможное влияние распределения скоростей во входном сечении, через которое жидкость реально может поступать в диффузор из какого-либо отдельного резервуара. По этой причине рассмотренное в § 10 течение в пло-

¹⁾ Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 217.

ском диффузоре носило характер течения от источника, помещённого в вершине диффузора.

Рассмотрим теперь задачу о развитии плоско-параллельного движения в плоском диффузоре с учётом распределения скоростей во входном сечении, но не на основании точных нелинейных дифференциальных уравнений, а с помощью приближённых линейных уравнений, аналогичных уравнениям (2.1).

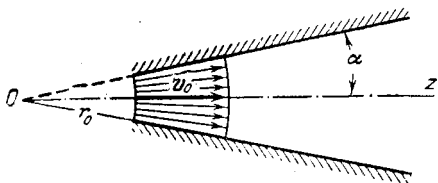


Рис. 94.

Пусть две прямолинейные стенки, простирающиеся в направлении оси z до бесконечности, наклонены друг к другу под углом 2α (рис. 94). Предполагая жидкость несжимаемой, а её движение — установившимся и плоско-параллельным, будем иметь из (6.6) и (6.7) главы II следующие дифференциальные уравнения в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

В уравнениях (3.1) как слагаемые от вязкости, так и слагаемые от квадратичных членов инерции учтены полностью. Упростим эти уравнения с помощью лишь частичного учёта слагаемых от вязкости и от ускорения, подобно тому как это делалось в теориях смазочного и пограничного слоя. Во-первых, будем полагать, что производные от v_r по r , входящие в правую часть первого уравнения (3.1) в комбинации

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(-v_r - r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r^2}, \quad (3.2)$$

в своей совокупности малы по сравнению со второй производной от этой скорости по углу φ . Во-вторых, компоненту скорости v_φ будем считать малой по сравнению с v_r и поэтому будем пренебрегать всеми слагаемыми, содержащими эту компоненту скорости

в качестве множителя или под знаком производной по r . В-третьих, радиальную скорость, входящую в качестве множителя в первое слагаемое в левой части первого уравнения (3.1), заменим её средним значением, определяемым из выражения расхода источника на плоскости для идеальной жидкости

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad (3.3)$$

где Q — полный расход жидкости через сечение диффузора. При этих трёх допущениях получим из (3.1) следующие приближённые уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{2\pi r} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Из второго уравнения (3.4) после интегрирования по углу φ получим:

$$p = \frac{2\nu v_r}{r} + f(r), \quad (3.5)$$

где $f(r)$ — неизвестная функция от r . Продифференцируем (3.5) по r :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -2\nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) - \frac{df}{dr}. \quad (3.6)$$

Если подставить выражение (3.6) в правую часть первого уравнения (3.4), то первые слагаемые (3.6) согласно указанным выше допущениям должны считаться малыми по сравнению с $\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}$ и мы их можем (но только после подстановки в (3.4)) отбросить. В таком случае из (3.4) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{2\pi r} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\rho} \frac{df}{dr}, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Задачу о развитии движения жидкости в плоском диффузоре будем решать с помощью приближённых уравнений (3.7).

Сформулируем теперь граничные условия. Условия прилипания жидкости к стенкам будут представляться в виде:

$$\text{при } \varphi = \pm \alpha \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad (3.8)$$

Условие постоянства расхода жидкости через каждое сечение будет давать следующее равенство:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} v_r r d\varphi = Q. \quad (3.9)$$

Примем, что по входному дуговому сечению диффузора радиальная скорость распределена равномерно, т. е.

$$\text{при } r = r_0 \quad v_r = v_0 = \frac{Q}{2\alpha r_0}. \quad (3.10)$$

Проводя интегрирование второго уравнения (3.7) по углу φ , получим следующее выражение для поперечной скорости:

$$v_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\alpha}^{\varphi} r v_r d\varphi. \quad (3.11)$$

В силу постоянства правой части (3.9) условия обращения поперечной скорости в нуль на стенках будут выполнены.

При интегрировании первого уравнения (3.7) по углу φ получим:

$$\frac{Q}{2\alpha r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\alpha}^{\alpha} v_r d\varphi = \frac{\nu}{r^2} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_\alpha - \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_{-\alpha} \right] - \frac{2\alpha}{r} \frac{df}{dr}. \quad (3.12)$$

На основании (3.9) интеграл в левой части данного равенства можно заменить отношением расхода к полярному радиусу

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} v_r d\varphi = \frac{Q}{r}.$$

Определяя из равенства (3.12) $\frac{df}{dr}$ и подставляя в первое уравнение (3.7), получим для радиальной скорости следующее уравнение:

$$\frac{Q}{2\alpha} \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{Q^2}{4\alpha^2 r^2} - \frac{\nu}{2\alpha r} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_\alpha - \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_{-\alpha} \right]. \quad (3.13)$$

В силу симметричного распределения скоростей по входному сечению можно полагать, что и в каждом другом сечении радиальная скорость будет распределяться симметрично относительно средней линии $\varphi = 0$. При этом предположении будем иметь следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \varphi = 0 \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} &= 0, \\ \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_{-\alpha} &= - \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Вводя обозначения

$$\frac{2\nu\alpha}{Q} = k, \quad \ln \frac{r}{r_0} = \xi \quad (3.15)$$

и используя равенства (3.14), получим из (3.13) для радиальной скорости дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi} = k \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - v_0 e^{-\xi} - \frac{k}{\alpha} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_\alpha. \quad (3.16)$$

Данное уравнение (3.16) необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \varphi = 0 \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \\ \text{при } \varphi = \alpha \quad v_r = 0, \\ \text{при } \xi = 0 \quad v_r = v_0. \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Если ввести преобразование Лапласа по переменному ξ от радиальной скорости

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi} v_r d\xi = \frac{v_r^*}{p}, \quad (3.18)$$

то будем иметь:

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi} \frac{\partial v_r}{\partial \xi} d\xi = (-v_r)_{\xi=0} + v_r^* = -v_0 + v_r^*, \quad (3.19)$$

и задача решения уравнения (3.16) при граничных условиях (3.17) сведётся к следующей задаче для изображения:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 v_r^*}{d\varphi^2} - \frac{p}{k} v_r^* = -\frac{v_0}{k} \frac{p^2}{p+1} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dv_r^*}{d\varphi} \right)_{\alpha}; \\ \text{при } \varphi = 0 \quad \frac{dv_r^*}{d\varphi} = 0, \\ \text{при } \varphi = \alpha \quad v_r^* = 0. \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Общее решение уравнения (3.20) будет представляться в виде

$$\left. \begin{array}{l} v_r^* = A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi + \frac{v_0 p}{p+1} - \frac{k}{\alpha p} \left(\frac{dv_r^*}{d\varphi} \right)_{\alpha}, \\ \frac{dv_r^*}{d\varphi} = \sqrt{\frac{p}{k}} \left(A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi + B \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi \right). \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

Чтобы удовлетворить первому граничному условию (3.20), необходимо постоянную B приравнять нулю. Определяя вторую постоянную из второго граничного условия (3.20), получим:

$$A = \frac{v_0 \alpha p}{(p+1) \left[\sqrt{\frac{k}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha \right]}.$$

Таким образом, решение задачи для изображения будет иметь вид

$$v_r^* = \frac{v_0 \alpha p}{p+1} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha}{\sqrt{\frac{k}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha}. \quad (3.22)$$

Обращая преобразование Лапласа, получим для самой радиальной скорости следующее интегральное выражение:

$$v_r(\xi, \varphi) = \frac{v_0 \alpha}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\xi} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha}{\sqrt{\frac{k}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha} \frac{dp}{p+1}. \quad (3.23)$$

Раскладывая подинтегральное выражение (3.23) на простые дроби, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} &= \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \varphi - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha}{\sqrt{\frac{k}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{k}} \alpha} \frac{1}{p+1} = \\ &= \frac{c}{p+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{p-p_m}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где p_m связаны с корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma \quad (3.25)$$

соотношением

$$\alpha \sqrt{\frac{p_m}{k}} = i\gamma_m. \quad (3.26)$$

Коэффициенты c и c_m будут представляться в виде следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} c &= \left[\frac{(p+1) F_1(p)}{F_2(p)} \right]_{p=1} = \frac{\cos \frac{\varphi}{\sqrt{k}} - \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \alpha \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}, \\ c_m &= \frac{F_1(p_m)}{F_2'(p_m)} = - \frac{2k}{\alpha^3 \left(1 - \frac{k\gamma_m^2}{\alpha^2} \right)} \left(\frac{\cos \frac{\varphi}{\alpha} \gamma_m}{\cos \gamma_m} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Подставляя разложение (3.24) и равенства (3.27) в (3.23) и вычисляя простейшие интегралы, получим для радиальной скорости выражение

$$\frac{v_r}{v_0} = \frac{\alpha \left(\cos \frac{\varphi}{\sqrt{k}} - \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \right)}{\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \alpha \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}} e^{-\xi} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - \gamma_m^2} \left(1 - \frac{\cos \frac{\varphi}{\alpha} \gamma_m}{\cos \gamma_m} \right) e^{-\frac{k \gamma_m^2}{\alpha^2} \xi}. \quad (3.28)$$

Если от переменного ξ перейти к переменному r , то радиальная скорость из (3.28) будет представляться в виде

$$\frac{v_r}{v_0} = \frac{\alpha \left(\cos \frac{\varphi}{\sqrt{k}} - \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \right)}{\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \alpha \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}} \frac{r_0}{r} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\cos \gamma_m \frac{\varphi}{\alpha}}{\cos \gamma_m}}{\frac{\alpha^2}{k} - \gamma_m^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^k \frac{\gamma_m^2}{\alpha^2}. \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.12), получим:

$$\frac{df}{dr} = \frac{\rho Q^2}{4\alpha^2 r^3} + \frac{\mu}{\alpha r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_{\alpha} = \frac{\rho Q^2}{4\alpha^2 r^3} - \frac{\mu v_0 r_0}{\sqrt{k} r^3} \frac{\sin \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \alpha \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}} + 2 \frac{\mu v_0}{\alpha^2 r^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\alpha^2 - \gamma_m^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^k \frac{\gamma_m^2}{\alpha^2}. \quad (3.30)$$

Выполняя интегрирование в (3.30) и подставляя в (3.5), будем иметь для давления:

$$p = p_{\infty} + \frac{2\mu v_r}{r} + \frac{\rho Q^2}{8\alpha r^2} \frac{\cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \alpha \cos \frac{\alpha}{\sqrt{k}}} - \frac{2\mu v_0}{kr} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\alpha^4 - \gamma_m^4} \left(\frac{r_0}{r} \right)^k \frac{\gamma_m^2}{\alpha^2}, \quad (3.31)$$

где p_{∞} — постоянная интегрирования правой части (3.30).

Из вида правой части (3.29) заключаем, что радиальная скорость на бесконечном удалении от входа в диффузор обращается в нуль, как и должно быть в силу конечной величины расхода. Вследствие этого постоянная интегрирования p_∞ должна представлять собой давление на бесконечности в диффузоре.

Полагая в (3.31) $r = r_0$, получим следующее выражение для давления на входном сечении рассматриваемого диффузора:

$$p_0 = p_\infty + \frac{2\mu v_0}{r_0} + \frac{\rho Q^2}{8\alpha r_0^2} \frac{1}{\sqrt{k} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \alpha} + \frac{2\mu v_0}{kr_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\gamma_m^2 - \frac{\alpha^2}{k^2}}. \quad (3.32)$$

Найдём конечное выражение суммы (3.32).

Раскладывая функцию

$$F(x) = \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{x^2}{1 - x \operatorname{ctg} x}$$

на простые дроби ¹⁾, будем иметь:

$$F(x) = 3 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{F_1(\gamma_m)}{F_2'(\gamma_m)} \left(\frac{1}{x - \gamma_m} + \frac{1}{\gamma_m} \right) + \frac{F_1(-\gamma_m)}{F_2'(-\gamma_m)} \left(\frac{1}{x + \gamma_m} - \frac{1}{\gamma_m} \right) \right],$$

где γ_m — корни уравнения (3.25). Выполняя вычисления, получим:

$$\frac{x^2}{1 - x \operatorname{ctg} x} = 3 + 2x^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \gamma_m^2},$$

или

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2}{k} - \gamma_m^2} = -\frac{3k}{\alpha^2} + 1 + \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}. \quad (3.33)$$

Заменяя α через $i\alpha$, будем иметь:

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2}{k} + \gamma_m^2} = -\frac{3k}{\alpha^2} - 1 - \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\operatorname{th} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}. \quad (3.34)$$

¹⁾ Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1939, стр. 443.

Составляя разность левых и правых частей (3.33) и (3.34), получим:

$$4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\alpha^4 - \gamma_m^4} = 2 + \frac{2 \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}.$$

Таким образом, разность давления на входном сечении диффузора и на бесконечности будет представляться в виде

$$\frac{p_0 - p_{\infty}}{\rho v_0^2} = -1 + \frac{\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \operatorname{th} \frac{\alpha}{\sqrt{k}}} + \frac{2\nu}{r_0 v_0}. \quad (3.35)$$

При исследовании функции

$$y = 1 - \frac{\operatorname{th} x}{x}$$

можно обнаружить, что её значение меньше 0,5 при $x < 1,92$ и больше 0,5 при $x > 1,92$. Следовательно, при выполнении неравенства

$$\frac{\alpha}{\sqrt{k}} < 1,92 \quad (3.36)$$

давление в начальном сечении будет превышать то давление, которое имеет место на бесконечном удалении от входа в диффузор.

Если ввести число Рейнольдса так же, как оно вводилось при рассмотрении движения в плоском диффузоре в § 10 главы IV, т. е. в виде отношения полного расхода к кинематическому коэффициенту вязкости

$$R = \frac{Q}{\nu}, \quad (3.37)$$

то на основании обозначений (3.15) будем иметь:

$$k = \frac{2\alpha}{R}. \quad (3.38)$$

Подставляя (3.38) в (3.36), получим следующее неравенство для числа Рейнольдса:

$$R < \frac{7,38}{\alpha}. \quad (3.39)$$

Таким образом, при сравнительно небольших значениях чисел Рейнольдса, не превышающих значение правой части неравенства (3.39), давление у входа будет больше давления на бесконечности, и поэтому течение жидкости будет происходить в сторону падения давления.

При использовании равенства (3.38) выражение (3.35) для перепада давлений можно представить в виде

$$\frac{p_\infty - p_0}{\rho v_0^2} = 1 - \frac{0,5 \sqrt{\frac{\alpha R}{2}}}{\sqrt{\frac{\alpha R}{2} - \text{th} \sqrt{\frac{\alpha R}{2}}}} - \frac{4\alpha}{R}. \quad (3.40)$$

Если рассматривать случай малых углов раствора диффузора, то последним слагаемым можно пренебречь. В этом случае при выполнении неравенства

$$R > \frac{7,38}{\alpha} \quad (3.41)$$

течение жидкости будет происходить в сторону возрастания давления.

Обратимся теперь к вычислению силы вязкости. Согласно равенствам (6.5) главы II будем иметь следующее общее выражение для касательной компоненты напряжения:

$$p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right).$$

Слагаемые, содержащие поперечную компоненту скорости, на основании принятых выше допущений должны считаться малыми по сравнению с производной от v_r по углу φ . Следовательно, силу вязкости на стенке диффузора $\varphi = \alpha$ можно подсчитывать по приближённой формуле

$$\tau = \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right). \quad (3.42)$$

Подставляя выражение для радиальной скорости (3.29) в (3.42), получим выражение для силы вязкости на стенке диффузора

$$\tau = -\frac{\mu v_0}{r\alpha} \left[\frac{\frac{\alpha^2}{k} \text{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\text{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \frac{\alpha}{\sqrt{k}}} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\gamma_m^2 - \frac{\alpha^2}{k}} \left(\frac{r_0}{r} \right)^k \frac{\gamma_m^2}{\alpha^2} \right]. \quad (3.43)$$

В § 1 главы VIII при рассмотрении вопроса об отрыве пограничного слоя от стенки указывалось, что условие отрыва слоя от стенки представляет собой условие обращения силы вязкости на стенке в нуль. Распространим это условие отрыва пограничного слоя на отрыв всего потока вязкой жидкости от стенок диффузора, т. е. место отрыва потока от стенок диффузора будем определять из условия

$$(\tau)_\alpha = 0. \quad (3.44)$$

Полагая левую часть (3.43) равной нулю и обозначая отношение радиуса начального сечения к радиусу сечения места отрыва через s , т. е.

$$\frac{r_0}{r_s} = s, \quad (3.45)$$

получим уравнение для определения s

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\gamma_m^2 - \frac{\alpha^2}{k}} s^k \frac{\gamma_m^2}{\alpha^2} = \frac{s}{2} \frac{\frac{\alpha^2}{k} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}{\frac{\alpha}{\sqrt{k}} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\sqrt{k}}}. \quad (3.46)$$

Проведём небольшое исследование уравнения (3.46). Наименьший корень уравнения (3.25) имеет значение

$$\gamma_1 = 4,49.$$

Следовательно, при выполнении неравенства

$$0 < \frac{\alpha}{\sqrt{k}} < \pi < 4,49 \quad (3.47)$$

левая часть уравнения (3.46) при положительных значениях u будет всегда положительной. С другой стороны, известно, что при

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

будет иметь место неравенство

$$\operatorname{tg} x > x,$$

а в интервале

$$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$$

значение тангенса будет отрицательным:

$$\operatorname{tg} x < 0.$$

Таким образом, при выполнении неравенства (3.47) правая часть уравнения (3.46) будет всегда отрицательной. А это значит, что при выполнении неравенства (3.47) уравнение (3.46) не может иметь действительного и положительного решения, т. е. отрыва потока от стенок диффузора произойти не может. Подставляя значение k из (3.39), получим из (3.47) следующее неравенство для числа Рейнольдса:

$$R \leq \frac{2\pi^2}{\alpha}. \quad (3.48)$$

Таким образом, при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса, не превышающих значение правой части неравенства (3.48), отрыва потока вязкой жидкости от стенок диффузора произойти не может.

В § 10 главы IV показано, что чисто радиальное ($v_\varphi \equiv 0$) течение в плоском диффузоре возможно лишь при выполнении неравенства

$$R < \left(\frac{3\pi^2}{\alpha} - 12\alpha \right). \quad (3.49)$$

Сопоставляя правые части неравенств (3.48) и (3.49), мы можем прийти к выводу, что при малых углах раствора диффузора правые части этих неравенств не будут резко отличаться друг от друга. Это обстоятельство в известной мере оправдывает принятые выше допущения, благодаря которым точные нелинейные дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в плоском диффузоре

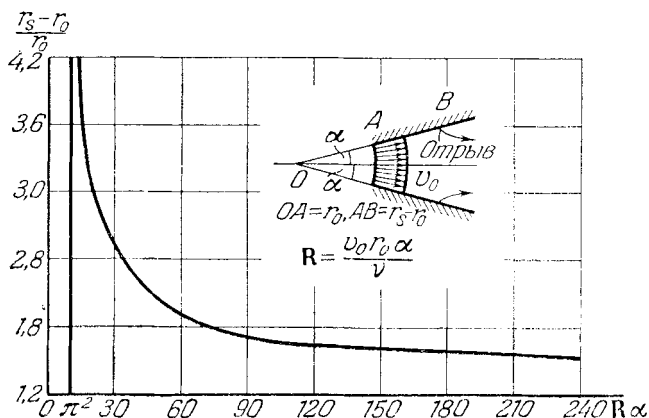


Рис. 95.

были заменены приближёнными линейными уравнениями (3.7). Некоторое различие правых частей неравенств (3.48) и (3.49) следует объяснить качественным различием самих требований, выполнение которых приводило к этим неравенствам. В одном случае (3.49) неравенство получено в результате требования возможности чисто радиального расходящегося течения в плоском диффузоре, а в другом случае (3.48) неравенство получено в результате требования безотрывности течения жидкости в том же диффузоре.

Уравнение (3.46) будет допускать действительное и положительное значение для s только тогда, когда неравенство (3.48) будет заменено обратным, т. е.

$$R > \frac{2\pi^2}{\alpha}. \quad (3.50)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (3.50) будет происходить отрыв жидкости от стенок диффузора. При этом, как это

следует из вида левой части (3.46), с возрастанием числа Рейнольдса (с возрастанием \sqrt{k}) точка отрыва жидкости от стенок будет приближаться к входному сечению (величина s будет уменьшаться). Выполнение неравенства (3.50) влечёт за собой и выполнение неравенства (3.41). А это значит, что при наличии отрыва потока жидкости от стенок течение жидкости будет происходить в сторону возрастания давления.

В цитированной выше работе С. М. Тарга проведено более подробное исследование развития течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. В частности, в этой работе приведены и результаты численных расчётов зависимости положения точки отрыва потока от стенок от значений числа Рейнольдса, и эта зависимость представлена графиком, который мы здесь воспроизводим без изменения (рис. 95).

§ 4. Развитие ламинарного движения жидкости в коническом диффузоре

Пусть мы имеем конический диффузор с углом раствора $2\theta_0$ (рис. 96). Предполагая движение вязкой несжимаемой жидкости установившимся и осесимметричным ($v_\varphi \equiv 0$, $\frac{\partial v_R}{\partial \varphi} \equiv 0$, $\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \equiv 0$), будем иметь из (6.10) и (6.11) главы II следующие дифференциальные уравнения в сферических координатах:

$$\left. \begin{aligned} v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \left[\frac{\partial^2 v_R}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v_R}{\partial R} + \right. \\ &+ \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right) - \frac{2v_R}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) \Big], \\ v_R \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_R v_\theta}{R} &= \\ &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{2v_R}{R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) &= 0. \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Как и в предшествующих параграфах, упростим нелинейные дифференциальные уравнения (4.1) с помощью частичного учёта слагаемых от вязкости и от квадратичных членов инерции. Во-первых, предположим, что из всех слагаемых в квадратной скобке в правой части первого уравнения (4.1) наибольший порядок величины будут иметь слагаемые, содержащие производные от радиальной скорости по углу θ . Во-вторых, поперечную скорость v_θ будем считать малой по сравнению с радиальной скоростью и на этом основании будем пре-

небрегать в первых двух уравнениях (4.1) всеми слагаемыми, содержащими поперечную скорость. В третьих, множитель v_R в первом квадратичном члене инерции первого уравнения (4.1) заменим той скоростью U , которая является характерной для каждого сечения диффузора. При этих трёх допущениях из уравнений (4.1) получим следующие приближённые линейные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial v_R}{\partial R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\nu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 v_R) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Проводя интегрирование по углу θ во втором уравнении (4.2), получим давление

$$p = \frac{2\mu v_R}{R} + f(R), \quad (4.3)$$

где f — произвольная функция от одного переменного R . При подстановке (4.3) в первое уравнение (4.2) мы можем пренебречь согласно нашему первому допущению теми слагаемыми, которые будут получаться от дифференцирования первого слагаемого (4.3).

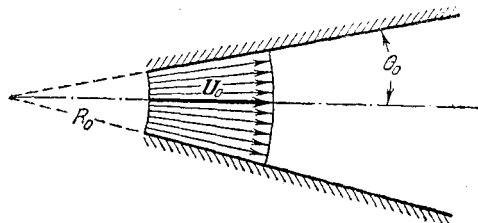


Рис. 96.

Приближённые уравнения (4.2) аналогичны приближённым уравнениям (1.1), (2.1) и (3.4), которые были использованы в предшествующих параграфах. Во всех этих уравнениях сохранялся лишь один квадратичный член инерции в первом уравнении, но не в полном своём виде, а в виде произведения некоторой скорости, характерной для данного сечения трубы или диффузора, на соответствующую производную от истинной основной компоненты вектора скорости. Легко усмотреть, что в предшествующих параграфах характерная скорость выбиралась таким образом, чтобы вводимое число Рейнольдса по характерным величинам сечения оставалось одним и тем же для всех сечений трубы или диффузора. Этим же соображением будем руководствоваться и в данном случае конического диффузора. Выбирая за характерный размер сечения $R\theta_0$, определим число Рейнольдса для сечения в виде

$$R = \frac{UR\theta_0}{\nu}. \quad (4.4)$$

Тогда требование сохранения числа Рейнольдса для всех радиальных сечений будет выполнено, если характерная скорость будет переменной величиной, изменяющейся обратно пропорционально расстоянию от вершины диффузора. Полагая, что по входному сечению радиальная скорость распределена равномерно, т. е.

$$\text{при} \quad R = R_0 \quad v_R = U_0, \quad (4.5)$$

получим из требования постоянства числа Рейнольдса следующее выражение для характерной скорости:

$$U = \frac{U_0 R_0}{R}. \quad (4.6)$$

К граничному условию (4.5) необходимо присоединить условия прилипания частиц жидкости к стенкам диффузора:

$$\text{при} \quad \theta = \theta_0 \quad v_R = 0, \quad v_\theta = 0. \quad (4.7)$$

Так как элемент поверхности сферы с центром в вершине диффузора равен

$$ds = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

то условие постоянства расхода через радиальное сечение диффузора будет представляться в виде

$$2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} v_R \sin \theta \, d\theta = Q. \quad (4.8)$$

Таким образом, задача изучения развития движения вязкой несжимаемости в коническом диффузоре сводится к решению дифференциальных уравнений (4.2) при граничных условиях (4.5), (4.7) и (4.8).

Проводя интегрирование по углу θ в третьем уравнении (4.2), получим выражение для поперечной скорости

$$v_\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \int_0^\theta v_R \sin \theta \, d\theta \right]. \quad (4.9)$$

В силу условия (4.8) левая часть выражения (4.9) будет обращаться в нуль на стенках диффузора, т. е. условия (4.7) для поперечной скорости будут выполнены.

При использовании (4.3) и (4.6) первое уравнение (4.2) может быть представлено в виде

$$\frac{U_0 R_0}{R} \frac{\partial v_R}{\partial R} = -\frac{1}{\rho} \frac{df}{dR} + \frac{\nu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right). \quad (4.10)$$

Умножая левую и правую части этого уравнения на $R^2 \sin \theta d\theta$ и проводя интегрирование по углу θ в пределах от 0 до θ_0 , получим:

$$U_0 R_0 R \frac{\partial}{\partial R} \left[\int_0^{\theta_0} v_R \sin \theta d\theta \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{df}{dR} R^2 (-\cos \theta_0 + 1) + \nu \sin \theta_0 \left(\frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)_0.$$

Используя условие (4.8), найдём:

$$\frac{df}{dR} = \frac{\rho Q U_0 R_0}{\pi R^4 (1 - \cos \theta_0)} + \frac{\mu \sin \theta_0}{R^2 (1 - \cos \theta_0)} \left(\frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)_0. \quad (4.11)$$

Если равенство (4.8) применить к начальному сечению, то для расхода будем иметь следующее выражение:

$$Q = 2\pi U_0 R_0^3 (1 - \cos \theta_0). \quad (4.12)$$

Подставляя (4.11) в уравнение (4.10), используя (4.12) и вводя обозначения

$$\frac{\nu}{U_0 R_0} = k, \quad \ln \frac{R}{R_0} = \xi, \quad (4.13)$$

получим уравнение для радиальной скорости

$$\frac{\partial v_R}{\partial \xi} = \frac{k}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right) - 2U_0 e^{-2\xi} - k \frac{\sin \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \left(\frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)_0, \quad (4.14)$$

которое необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \xi = 0 \quad v_R = U_0, \\ \text{при } \theta = \theta_0 \quad v_R = 0. \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

К решению уравнения (4.14) применяем метод преобразования Лапласа. Полагая

$$\int_0^\infty e^{-p\xi} v_R d\xi = \frac{v^*}{p}, \quad (4.16)$$

будем иметь:

$$\int_0^\infty e^{-p\xi} \frac{\partial v_R}{\partial \xi} d\xi = -U_0 + v^*,$$

$$\int_0^\infty e^{-p\xi - 2\xi} d\xi = \frac{1}{p + 2}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (4.14) и к первому граничному условию (4.15), получим следующую задачу для изображения радиальной скорости:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dv^*}{d\theta} \right) - \frac{p}{k} v^* = -U_0 \left(1 - \frac{2}{p+2} \right) \frac{p}{k} + \frac{\sin \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \left(\frac{dv^*}{d\theta} \right)_0; \\ \text{при } \theta = \theta_0 \quad v^* = 0. \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

Из двух независимых решений однородного уравнения (4.17) выбираем именно то решение, которое будет ограниченным на оси диффузора, т. е. при $\theta = 0$. Обозначая это решение через $AJ(\theta)$ и присоединяя к нему частное решение неоднородного уравнения (4.17), получим:

$$v^* = AJ(\theta) + \frac{U_0 p}{p+2} - \frac{k}{p} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \left(\frac{dv^*}{d\theta} \right)_0. \quad (4.18)$$

Отсюда будем иметь:

$$\frac{dv^*}{d\theta} = A \frac{dJ}{d\theta}.$$

Удовлетворяя граничному условию прилипания, получим следующее выражение для постоянной:

$$A = - \frac{U_0 p}{p+2} \frac{1}{J(\theta_0) - \frac{k}{p} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} J'(\theta_0)}.$$

Таким образом, решение задачи (4.17) для изображения радиальной скорости будет представляться в виде

$$v^* = \frac{U_0 p}{p+2} \frac{J(\theta_0) - J(\theta)}{J(\theta_0) - \frac{k}{p} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} J'(\theta_0)}. \quad (4.19)$$

До сих пор мы никаких ограничений на угол раствора диффузора не накладывали. А теперь допустим, что угол раствора диффузора настолько мал, что можно приближённо положить:

$$\operatorname{ctg} \theta \approx \frac{1}{\theta}. \quad (4.20)$$

При такой замене дифференциальное уравнение (4.17) без правой части будет представляться в виде

$$\frac{d^2 v^*}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{dv^*}{d\theta} - \frac{p}{k} v^* = 0,$$

и поэтому ограниченное решение этого уравнения будет представлять собой функцию Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента, т. е.

$$J(\theta) = I_0 \left(\theta \sqrt{\frac{p}{k}} \right). \quad (4.21)$$

Если к тому же воспользоваться рекуррентной формулой

$$\frac{2}{x} I_0'(x) = I_0(x) - I_2(x),$$

то решение задачи для изображения (4.19) при малых углах рас-

твора конического диффузора будет представляться в виде

$$v^* = \frac{U_0 p}{p+2} \frac{I_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{p}{k}}\right) - I_0\left(\theta \sqrt{\frac{p}{k}}\right)}{I_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{p}{k}}\right)}. \quad (4.22)$$

Сопоставляя равенство (4.22) с решением (2.15) для изображения осевой скорости частиц жидкости в круглой цилиндрической трубе, мы замечаем, что различие состоит в наличии дополнительного множителя

$$\frac{p}{p+2}$$

и в том, что под знаком аргумента функции Бесселя вместо множителей a и r находятся множители θ_0 и θ .

Раскладывая правую часть на простые дроби, будем иметь:

$$\frac{v^*}{p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = U_0 \left[\frac{D}{p+2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{p-p_m} \right], \quad (4.23)$$

где p_m связаны с корнями уравнения

$$J_2(\gamma) = 0 \quad (4.24)$$

соотношением

$$\theta_0 \sqrt{\frac{p_m}{k}} = i\gamma_m, \quad (4.25)$$

а коэффициенты разложения (4.23) будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} D &= - \frac{J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right) - J_0\left(\theta \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}, \\ c_m &= \frac{2k\gamma_m}{\theta_0^2 \left(2 - \frac{\gamma_m^2 k}{\theta_0^2}\right)} \frac{\left[J_0(\gamma_m) - J_0\left(\frac{\theta}{\theta_0} \gamma_m\right) \right]}{J_2'(\gamma_m)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Используя разложение (4.23) и выражения (4.26), получим выражение для оригинала радиальной скорости

$$\begin{aligned} \frac{v_R}{U_0} &= \frac{J_0\left(\theta \sqrt{\frac{2}{k}}\right) - J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} e^{-2\xi} + \\ &+ 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\theta_0^2 \frac{k}{\theta_0^2} - \gamma_m^2} \left[1 - \frac{J_0\left(\frac{\theta}{\theta_0} \gamma_m\right)}{J_0(\gamma_m)} \right] e^{-k \frac{\gamma_m^2}{\theta_0^2} \xi}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

При замене ξ через R на основании (4.13) радиальная скорость v_R будет представляться в виде

$$\frac{v_R}{U_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{J_0\left(\theta \sqrt{\frac{2}{k}}\right) - J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} +$$

$$+ 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\theta_0^2 \frac{2}{k} - \gamma_m^2} \left[1 - \frac{J_0\left(\frac{\theta}{\theta_0} \gamma_m\right)}{J_0(\gamma_m)} \right] \left(\frac{R_0}{R}\right)^k \frac{\gamma_m^2}{\theta_0^2}. \quad (4.28)$$

Подставляя (4.12) и (4.28) в (4.11) и проводя интегрирование по переменному R , будем иметь:

$$\frac{df}{dR} = \frac{2\rho U_0^2 R_0^3}{R^4} + \frac{2\mu R_0^2}{\theta_0 R^4} \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{J_0'\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} -$$

$$- \frac{8\mu U_0}{\theta_0 R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m J_0'(\gamma_m)}{J_0(\gamma_m) \left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^k \frac{\gamma_m^2}{\theta_0^2},$$

$$f = p_{\infty} - \frac{2}{3} \rho U_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \left[1 + \frac{\sqrt{2k}}{\theta_0} \frac{J_0'\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} -$$

$$- 12 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m J_0'(\gamma_m)}{J_0(\gamma_m) \left(\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2\right) \left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^k \frac{\gamma_m^2}{\theta_0^2} \right]. \quad (4.29)$$

На основании рекуррентных формул для бesselевых функций

$$J_0'(x) = -J_1(x) = -\frac{x}{2} [J_0(x) + J_2(x)]$$

мы можем в правой части (4.29) произвести следующие замены:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{2k}}{\theta_0} \frac{J_0'\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} &= -1 - \frac{J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}, \\ \frac{J_0'(\gamma_m)}{J_0(\gamma_m)} &= -\frac{\gamma_m}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Используя (4.29) и (4.30), получим из (4.3) следующее выражение для давления:

$$p = \frac{2\mu v_R}{R} + p_\infty + \frac{2}{3} \rho U_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \left[\frac{J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} - 6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\left(\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2\right)\left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{k \frac{\gamma_m^2}{\theta_0^2} - 2} \right]. \quad (4.31)$$

Так как при возрастании R до бесконечности скорость v_R на основании (4.28) будет стремиться к нулю, то p_∞ будет представлять собой давление на бесконечности.

Полагая в (4.31) $R = R_0$ и $p = p_0$, будем иметь для разности давлений в начальном сечении диффузора и на бесконечности следующее равенство:

$$\frac{p_0 - p_\infty}{\rho U_0^2} = 2k + \frac{2}{3} \left[\frac{J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} - 6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\left(\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2\right)\left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} \right]. \quad (4.32)$$

Найдём конечное выражение для суммы, входящей в правую часть (4.32). Так как

$$\frac{\gamma_m^2}{\left(\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2\right)\left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} = \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2},$$

то сумма (4.32) равна

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\left(\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2\right)\left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} = \frac{2}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2} - \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2}. \quad (4.33)$$

На основании разложения¹⁾ на простые дроби производной от логарифма функции

$$\varphi(x) = 2^2 x^{-2} J_2(x)$$

и использования рекуррентных формул будем иметь:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \gamma_m^2} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x} + \frac{x J_0(x)}{2 J_2(x)}. \quad (4.34)$$

¹⁾ Кузьмин Р. О., Бессёлевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 111.

Подставляя в (4.34) последовательно

$$x = \theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}};$$

$$x = i \frac{\theta_0}{\sqrt{k}},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\theta_0^2 \frac{k}{\gamma_m^2} - \gamma_m^2} &= \frac{1}{4} - \frac{k}{\theta_0^2} + \frac{1}{4} \frac{J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2} &= -\frac{1}{4} - \frac{2k}{\theta_0^2} + \frac{1}{4} \frac{I_0\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{k}}\right)}{I_2\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{k}}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Следовательно, сумма (4.38) будет иметь следующее значение:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\left(\frac{\theta_0^2}{k} + \gamma_m^2\right) \left(\frac{2\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2\right)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \frac{J_0\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}{J_2\left(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} - \frac{1}{12} \frac{I_0\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{k}}\right)}{I_2\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{k}}\right)}. \quad (4.36)$$

Таким образом, для разности давлений из (4.32) и (4.36) будем иметь:

$$\frac{p_0 - p_{\infty}}{\rho U_0^2} = 2k - 1 + \frac{1}{3} \frac{I_0\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{k}}\right)}{I_2\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{k}}\right)}. \quad (4.37)$$

При исследовании функции

$$F(x) = 3I_2(x) - I_0(x)$$

можно обнаружить, что действительным корнем этой функции будет:

$$x_1 = 2,175,$$

и до достижения аргументом x значения x_1 функция будет отрицательной, а затем положительной. На этом основании будем иметь $p_{\infty} < p$ при выполнении неравенства

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{k}} < 2,175. \quad (4.38)$$

В этом случае течение в диффузоре будет происходить в сторону падения давления. Если же считать параметр k малым и пренебрегать поэтому первым слагаемым в правой части (4.37), то при вы-

полнении неравенства

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{k}} > 2,175 \tag{4.39}$$

давление в начальном сечении будет меньше давления на бесконечности и течение жидкости будет происходить в сторону возрастания давления.

Для касательного напряжения $p_{R\theta}$ из (6.9) главы II найдём:

$$p_{R\theta} = \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} \right).$$

В силу принятых в этом параграфе допущений можно двумя вторыми слагаемыми в скобке пренебречь по сравнению с первым. Следовательно, сила вязкости на стенках диффузора равна

$$\tau = \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)_{\theta_0}. \tag{4.40}$$

Подставляя в (4.40) значение v_R из (4.28) и используя приведённую выше рекуррентную формулу, получим для силы вязкости на стенках диффузора следующее выражение:

$$\tau = -\frac{\mu U_0}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left[\sqrt{\frac{2}{k}} \frac{J_1(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}})}{J_2(\theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}})} - \frac{2}{\theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{2 \frac{\theta_0^2}{k} - \gamma_m^2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^k \frac{\gamma_m^2}{\theta_0^2} \right]. \tag{4.41}$$

Как и раньше, будем считать, что отрыв потока от стенок будет происходить в том месте, в котором сила вязкости обращается в нуль. Тогда из (4.41) получим уравнение для определения точки отрыва

$$\frac{\lambda}{2} \frac{J_1(\lambda)}{J_2(\lambda)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{\lambda^2 - \gamma_m^2} y_s^{2 \left(\frac{\gamma_m^2}{\lambda^2} - 1 \right)}, \tag{4.42}$$

где

$$y_s = \frac{R_0}{R_s}, \quad \lambda = \theta_0 \sqrt{\frac{2}{k}}. \tag{4.43}$$

Наименьший, отличный от нуля корень функции Бесселя первого порядка $J_1(\lambda)$ имеет значение

$$\lambda_1 = 3,832.$$

Все корни функции Бесселя второго порядка будут больше наименьшего корня функции $J_1(\lambda)$, т. е.

$$\gamma_m > \lambda_1.$$

Так как при выполнении неравенства

$$\lambda < \lambda_1 \quad (4.44)$$

будем иметь:

$$J_1(\lambda) > 0, \quad J_2(\lambda) > 0,$$

то знаки левой и правой части (4.42) будут различны. Следовательно, при выполнении неравенства (4.44) отрыва жидкости от сте-

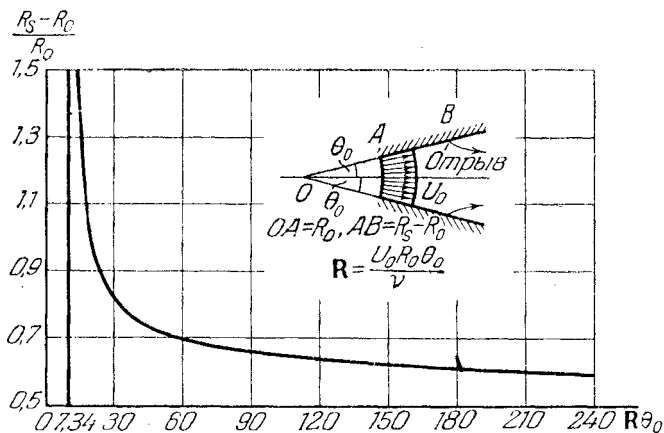


Рис. 97.

нок происходить не будет. Подставляя в (4.44) значения λ и k , получим неравенство для числа Рейнольдса

$$R \leq \frac{7,34}{\theta_0}. \quad (4.45)$$

Таким образом, при малых числах Рейнольдса, не превышающих правой части неравенства (4.45), течение вязкой жидкости в коническом диффузоре будет безотрывным.

Если число Рейнольдса будет превышать правую часть (4.45), т. е.

$$R > \frac{7,34}{\theta_0}, \quad (4.46)$$

то поток жидкости будет отрываться от стенок диффузора, а так как при этом будет выполняться и неравенство (4.39), то течение жидкости будет происходить в сторону возрастания давления. При этом с возрастанием числа Рейнольдса место отрыва потока от стенок будет приближаться к входному сечению. В цитированной выше работе С. М. Тарга приведён график зависимости места отрыва от значения числа Рейнольдса, который мы и воспроизводим здесь (рис. 97).

ГЛАВА XI

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

§ 1. Общая постановка вопроса об устойчивости

В механике, как известно, решения уравнений равновесия или дифференциальных уравнений движения тел или сред определяют класс *возможных* состояний равновесия и движения, из которых лишь только часть будет представлять собой *реально осуществимые* состояния. Отбор из всего класса возможных состояний равновесия и движения отдельной группы реально осуществимых состояний производится в механике с помощью исследования устойчивости соответственных решений уравнений. Реально осуществимыми из всего класса возможных состояний будут только те состояния равновесия и движения, которые будут удовлетворять *условиям устойчивости*. Эти условия устойчивости устанавливаются с помощью ряда методов, из которых наиболее общим и строго обоснованным является метод Ляпунова.

В главе IV были рассмотрены простейшие решения точных дифференциальных уравнений установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. На основании сказанного выше эти решения определяют класс пока только *возможных простейших установившихся движений вязкой несжимаемой жидкости*, которые получили название *ламинарных течений*. Вопрос же о реальной осуществимости этих возможных простейших движений должен решаться отдельно либо с помощью непосредственной экспериментальной проверки основных особенностей ламинарных течений, либо с помощью теоретических исследований условий устойчивости этих течений. Экспериментальная проверка основных особенностей ламинарного течения, например, в круглой цилиндрической трубе показала, что для осуществимости ламинарного движения необходимо выполнение двух условий. Первое из этих условий заключается в том, что число Рейнольдса не должно превышать своего *критического* значения, т. е.

$$R < R_{кр}. \quad (1.1)$$

При этом иногда различают два критических числа Рейнольдса, одно из которых называют *верхним*, а второе — *нижним*. Под *верхним*

критическим числом Рейнольдса подразумевается то его значение, при котором можно ещё наблюдать прямолинейность траекторий всех частиц жидкости при наиболее благоприятных для этого условиях входа в рассматриваемую трубу. *Нижнее критическое число Рейнольдса* представляет собой то значение числа Рейнольдса, за пределами которого при произвольных условиях входа жидкости в трубу график коэффициента сопротивления трубы на логарифмической диаграмме не будет представляться отрезком прямой, одинаково наклонённой к осям координат. На основании многочисленных опытов обнаружено, что, чем плавнее осуществляется вход жидкости в трубу, тем выше значение верхнего критического числа Рейнольдса. Но при этом оказывается, что при малейшем возмущении потока характер траекторий частиц резко изменяется. Если же число Рейнольдса не превышает значения нижнего критического числа Рейнольдса, то изменение условий входа жидкости в трубу, т. е. наложение возмущений на поток, не вызывает существенных изменений вида графика коэффициента сопротивления трубы на логарифмической диаграмме. Отсюда мы заключаем, что *ламинарное течение жидкости будет реально осуществимым, т. е. устойчивым, если число Рейнольдса не превышает своего нижнего критического значения.*

Второе условие реальности осуществимости ламинарного течения связано с *длиной начального участка* трубы. Длина начального участка трубы должна быть достаточной для того, чтобы на протяжении этого участка всякого рода возмущения, неизбежно возникающие при входе в трубу, должны почти полностью исчезнуть, а основные признаки ламинарного течения почти полностью развиться. Как уже указывалось в главе X, длина начального участка трубы по результатам ряда экспериментов находится в прямой зависимости от числа Рейнольдса и от радиуса трубы, т. е.

$$L > \alpha Ra, \quad (1.2)$$

где α — числовой множитель.

Таким образом, экспериментальная проверка возможности осуществления ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе привела к необходимости рассматривать этот вопрос с двух несколько различных точек зрения. С одной стороны, вопрос об осуществимости ламинарного течения в трубе непосредственно связывался с условиями устойчивости такого рода течения. С другой же стороны, этот вопрос тесно увязывался с условиями возможности развития основных признаков ламинарного течения в трубе. Благодаря этому обстоятельству теоретические исследования вопроса об осуществимости ламинарных течений также велись в двух различных направлениях. Основная часть теоретических исследований была направлена в сторону выяснения необходимых и достаточных условий устойчивости различных ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости. А вторая часть теоретиче-

ских исследований была направлена в сторону выявления основных особенностей развития ламинарного течения на начальном участке труб и диффузоров. О теоретических исследованиях, посвящённых развитию ламинарного течения на начальном участке, была речь в главе X. В данной же главе будут вкратце рассмотрены теоретические исследования по вопросу об устойчивости ламинарного течения в нескольких простейших случаях.

Теоретические исследования по вопросу об устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости и об условиях перехода этого течения в *турбулентное* были начаты ещё Рейнольдсом¹⁾, Рэлеем²⁾, Кельвином³⁾, Лоренцем⁴⁾ и были продолжены многими исследователями. Подробный перечень статей по этому вопросу приводится в конце первой статьи Лина⁵⁾. Из работ, опубликованных за последние годы по этому вопросу, можно назвать статью В. Беляковой⁶⁾.

Многочисленные теоретические исследования по вопросу об устойчивости ламинарных течений, опубликованные в различных журналах и книгах по гидродинамике, можно распределить на две группы. К первой группе относятся те исследования, в которых преимущественно использовался метод малых колебаний и решение вопроса об устойчивости ламинарных течений сводилось к исследованию корней характеристического трансцендентного уравнения, явный вид которого для большинства случаев можно было установить лишь приближённо. Существо метода малых колебаний заключается в том, что на исследуемое ламинарное течение накладывается нестационарное поле малых скоростей, удовлетворяющих линейаризованным дифференциальным уравнениям. Последние уравнения получаются из полных уравнений движения вязкой жидкости после замены проекций скорости и давления через суммы проекций двух векторов скоростей и давлений исследуемого течения и наложенного поля возмущений и последующего отбрасывания из уравнений слагаемых, содержащих произведения производных по координатам от проекций вектора скорости поля возмущений. Затем рассматривается частный вид поля малых возмущений, отвечающий тому частному решению линейаризованных уравнений, в котором в качестве множителя входит показательная функция

$$e^{i(st-ax)}, \quad (1.3)$$

1) Reynolds O., Phil. Trans of the Royal Soc. A, CLXXVI, 1894. Перевод имеется в книге «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

2) Rayleigh D., Proc. Lond. Math. Soc., X (1879); XI (1880); XIX (1887); XXVI (1895); Phil Mag (5), XXXIV (1892); (6), XXVI (1913); XXVIII (1914); XXX (1915). Scient. Papers I, III, IV, VI.

3) Kelvin L., Phil. Mag. (5), XXIV (1887); Papers, VI.

4) Lorentz H. A., Abh. ü. theor. Physik, I (1907).

5) Lin C. C. Quarterly of Applied Mathematics, т. III, 1945.

6) Белякова В. К., Прикл. матем. и мех., т. XIV, вып. 1 (1950).

содержащая в показателе время t и основную координату оси, параллельной скорости течения. При этом предполагается, что неизвестный множитель α может принимать только действительные значения, а для множителя β допустимы и комплексные значения. На частное решение линеаризованных уравнений поля возмущений сомножителем (1.3) в большинстве случаев накладывались граничные условия прилипания частиц жидкости к стенкам. Дальнейшая задача сводилась к решению обыкновенного дифференциального уравнения, к удовлетворению граничных условий и исследованию полученного с помощью последних характеристического уравнения, связывающего множители β и α с числом Рейнольдса. Вопрос об устойчивости или неустойчивости ламинарного течения решался затем по знаку мнимой части множителя β . Если мнимая часть этого множителя оказывалась отрицательной, то исследуемое течение считалось неустойчивым по отношению к возмущению этого рода, так как после своего возникновения амплитуда этих возмущений будет расти со временем. Если же эта мнимая часть оказывалась положительной при всех значениях множителя α и числа Рейнольдса, то делалось заключение о том, что исследуемое течение устойчиво по отношению к возмущениям частного вида (1.3).

Ко второй группе теоретических исследований по вопросу об устойчивости ламинарных течений относятся исследования, в которых использовался преимущественно *энергетический метод*. При использовании этого метода на ламинарное течение накладывалось также поле возмущений, но оно выбиралось не из частных решений линеаризованных уравнений, а из условия минимума некоторого выражения, содержащего интегралы от кинетической энергии и квадрата вихря. В частности, это выражение представляло собой отношение того количества энергии, которое переходит из основного поля скоростей в поле скоростей возмущений, к тому количеству кинетической энергии, которое рассеивается благодаря вязкости. При некотором видоизменении постановки вопроса об определении распределения скоростей в поле возмущений задача приводится к задачам вариационного исчисления. Этот метод был использован в работах Рейнольдса, Лоренца, Орра ¹⁾, Кармана ²⁾, Сайнджа ³⁾ и др.

§ 2. Общие уравнения для возмущённого движения

Прежде чем переходить к исследованию устойчивости отдельных ламинарных течений, установим общие уравнения для возмущённого движения вязкой несжимаемой жидкости и некоторые интегральные соотношения для этого движения.

1) Orr, Proc. Roy Irish. Acad., XXVII, 1906—1907.

2) Kármán, Abhandl. Aerod. Inst., Aachen, № 5, 1925.

3) Synge, Journ. of Math. and Physik, т. XV, 1936.

Если действием массовых сил пренебрегать, то дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Частные решения системы уравнений (2.1), отвечающие определённому *основному* течению жидкости, обозначим через

$$u_1, v_1, w_1, p_1. \quad (2.2)$$

Для этих частных решений (2.2) дифференциальные уравнения (2.1) удовлетворяются либо точно, либо приближённо. Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \Delta u_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \nu \Delta v_1, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \Delta w_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Составим разность соответственных уравнений (2.1) и (2.3) и введём обозначения

$$\left. \begin{aligned} u - u_1 &= u', \\ v - v_1 &= v', \\ w - w_1 &= w', \\ p - p_1 &= p'. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Если величины u , v , w и p будем рассматривать как проекции вектора скорости и давление *результатирующего возмущённого* движения жидкости, то u' , v' , w' и p' будут представлять собой проекции вектора скорости и давление *дополнительного* движения жидкости, которое в дальнейшем будем именовать *полем возмущений*. Для изучения изменений характеристик поля возмущений получим из (2.1) и

(2.3) следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial u'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + u' \frac{\partial u_1}{\partial x} + v' \frac{\partial u_1}{\partial y} + w' \frac{\partial u_1}{\partial z} + \\
 & \quad + 2(\omega'_y w' - \omega'_z v') + \frac{1}{2} \frac{\partial V'^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\
 & \frac{\partial v'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v'}{\partial z} + u' \frac{\partial v_1}{\partial x} + v' \frac{\partial v_1}{\partial y} + w' \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\
 & \quad + 2(\omega'_z u' - \omega'_x w') + \frac{1}{2} \frac{\partial V'^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\
 & \frac{\partial w'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w'}{\partial z} + u' \frac{\partial w_1}{\partial x} + v' \frac{\partial w_1}{\partial y} + w' \frac{\partial w_1}{\partial z} + \\
 & \quad + 2(\omega'_x v' - \omega'_y u') + \frac{1}{2} \frac{\partial V'^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w', \\
 & \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

В этих уравнениях u_1 , v_1 , w_1 и p_1 представляют собой известные функции координат и времени для *основного течения*, V' — модуль вектора скорости поля возмущений, а ω'_x , ω'_y и ω'_z — проекции вектора вихря поля возмущений, т. е.

$$\begin{aligned}
 2\omega'_x &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \\
 2\omega'_y &= \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \\
 2\omega'_z &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Если считать проекции вектора скорости поля возмущений малыми и пренебрегать квадратичными членами инерции этого поля, то получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial u'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + \\
 & \quad + u' \frac{\partial u_1}{\partial x} + v' \frac{\partial u_1}{\partial y} + w' \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\
 & \frac{\partial v'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v'}{\partial z} + \\
 & \quad + u' \frac{\partial v_1}{\partial x} + v' \frac{\partial v_1}{\partial y} + w' \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\
 & \frac{\partial w'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w'}{\partial z} + \\
 & \quad + u' \frac{\partial w_1}{\partial x} + v' \frac{\partial w_1}{\partial y} + w' \frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w', \\
 & \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Умножая первые три уравнения соответственно на единичные векторы осей координат и складывая, получим приближённое дифференциальное уравнение поля возмущений в векторной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial z} + u' \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial x} + \\ + v' \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial y} + w' \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p' + \nu \Delta \mathbf{V}'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если основное течение считать прямолинейно-параллельным, т. е.

$$v_1 \equiv 0, \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \equiv 0,$$

то дифференциальные уравнения (2.6) поля возмущений будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u_1}{\partial y} + w' \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Для случая плоско-параллельного поля возмущений будем иметь:

$$\begin{aligned} w' \equiv 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} \equiv 0, \\ u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad w' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \Delta \psi'. \end{aligned}$$

Исключая из первых двух уравнений (2.8) давление, получим следующее приближённое уравнение для функции тока поля возмущений:

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \nu \Delta \Delta \psi'. \quad (2.9)$$

Хотя дифференциальное уравнение (2.9) установлено для случая плоского прямолинейно-параллельного основного течения, всё же его можно с некоторой степенью приближения использовать и в случае, когда основное течение и не будет в точности прямолинейно-параллельным и вектор скорости течения будет иметь две проекции, но тогда одна проекция должна быть малой по сравнению с другой, а основная проекция должна мало изменяться вдоль течения. Иначе говоря, уравнение (2.9) можно использовать и для плоского пограничного слоя.

Чтобы получить приближённые дифференциальные уравнения поля возмущений в цилиндрических координатах, проще всего поступить

следующим образом. Взять уравнения (6.6) и (6.7) главы II без учёта массовых сил, подставить в них

$$v_r = v_{1r} + v'_r,$$

$$v_\varphi = v_{1\varphi} + v'_\varphi,$$

$$v_z = v_{1z} + v'_z,$$

$$p = p_1 + p',$$

учесть уравнения для проекций вектора скорости основного течения v_{1r} , $v_{1\varphi}$ и v_{1z} и пренебречь произведениями производных от проекций вектора скорости поля возмущений. В результате получим следующие дифференциальные уравнения поля возмущений:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial v'_r}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} + \\ & + v_{1z} \frac{\partial v'_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{v'_\varphi}{r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi} + v'_z \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} - \frac{2v_{1\varphi} v'_\varphi}{r} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + v \left(\Delta v'_r - \frac{v'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ & \frac{\partial v'_\varphi}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} + \\ & + v_{1z} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r} + \frac{v'_\varphi}{r} \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi} + v'_z \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z} + \frac{v'_r v_{1\varphi} + v'_\varphi v_{1r}}{r} = \\ & = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} + v \left(\Delta v'_\varphi - \frac{v'_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \right), \\ & \frac{\partial v'_z}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial v'_z}{\partial r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \frac{\partial v'_z}{\partial \varphi} + \\ & + v_{1z} \frac{\partial v'_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} + \frac{v'_\varphi}{r} \frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi} + v'_z \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + v \Delta v'_z, \\ & \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{v'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Для случая прямолинейно-параллельного основного течения в круглой цилиндрической трубе будем иметь:

$$v_{1r} \equiv 0, \quad v_{1\varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi} \equiv 0,$$

и поэтому дифференциальные уравнения поля возмущений будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v'_r}{\partial t} + v_{1z} \frac{\partial v'_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\Delta v'_r - \frac{v'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v'_\varphi}{\partial t} + v_{1z} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v'_\varphi - \frac{v'_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} + v_{1z} \frac{\partial v'_z}{\partial z} + v'_r \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta v'_z, \\ \frac{\partial (rv'_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rv'_z)}{\partial z} + \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Если полагать поле возмущений осесимметричным, т. е.

$$v'_\varphi \equiv 0, \quad \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'_z}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial \varphi} = 0,$$

то на основании последнего уравнения (2.11) можно ввести функцию тока

$$rv'_r = \frac{\partial \psi'}{\partial z}, \quad rv'_z = -\frac{\partial \psi'}{\partial r}. \quad (2.12)$$

Первые два уравнения (2.11) представятся тогда в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial z} + v_{1z} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial D \psi'}{\partial z}, \\ -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial r} + v_{1z} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial D \psi'}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где D — оператор Стокса:

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Исключая из уравнений (2.13) давление, получим следующее дифференциальное уравнение для функции тока симметричного поля возмущений, наложенного на прямолинейно-параллельное течение в круглой цилиндрической трубе:

$$\frac{\partial D \psi'}{\partial t} + v_{1z} \frac{\partial D \psi'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial r \partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} - \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial r^2} = \nu D D \psi'. \quad (2.14)$$

Для случая основного кругового течения вязкой несжимаемой жидкости в уравнениях (2.10) необходимо положить:

$$v_{1r} \equiv 0, \quad v_{1z} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z} \equiv 0.$$

При этих предположениях дифференциальные уравнения поля возмущений представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v'_r}{\partial t} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} - \frac{2v_{1\varphi} v'_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left(\Delta v'_r - \frac{v'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v'_\varphi}{\partial t} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} + v'_r \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r} + \frac{v'_r v_{1\varphi}}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v'_\varphi - \frac{v'_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \frac{\partial v'_z}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta v'_z, \\ \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{v'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Если в рассматриваемом случае дополнительно предположить, что проекции вектора скорости поля возмущений и давление не будут зависеть от полярного угла φ

$$\frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'_z}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial \varphi} \equiv 0,$$

то из (2.15) получим следующие дифференциальные уравнения симметричного поля возмущений, наложенного на основное круговое движение вязкой несжимаемой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v'_r}{\partial t} - \frac{2v_{1\varphi} v'_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left(\Delta_1 v'_r - \frac{v'_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v'_\varphi}{\partial t} + v'_r \left(\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} \right) &= \nu \left(\Delta_1 v'_\varphi - \frac{v'_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta_1 v'_z, \\ \frac{\partial (rv'_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rv'_z)}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Приближённые дифференциальные уравнения (2.9), (2.14) и (2.16) соответственных полей возмущений использовались отдельными авторами для исследования устойчивости основных ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Теперь перейдём к установлению некоторых энергетических соотношений для поля возмущений.

Обратимся к полным уравнениям поля возмущений (2.5). Умножая первые три уравнения на u' , v' и w' соответственно и складывая,

получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V'^2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial V'^2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial V'^2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial V'^2}{\partial z} + u'^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v'^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w'^2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \\ & + u'v' \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + u'w' \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + w'v' \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) = \\ & = u' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{V'^2}{2} \right) + v' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{V'^2}{2} \right) + w' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{V'^2}{2} \right) + \\ & + v(u' \Delta u' + v' \Delta v' + w' \Delta w'). \quad (2.17) \end{aligned}$$

Используя уравнение несжимаемости и выражения компонент вектора вихря, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta u' &= 2 \left(\frac{\partial \omega'_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial y} \right), \quad \Delta v' = 2 \left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} \right), \quad \Delta w' = 2 \left(\frac{\partial \omega'_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} \right), \\ u' \Delta u' + v' \Delta v' + w' \Delta w' &= \\ &= 2 \left[u' \left(\frac{\partial \omega'_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial y} \right) + v' \left(\frac{\partial \omega'_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} \right) + w' \left(\frac{\partial \omega'_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} \right) \right] = \\ &= 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (v' \omega'_z - w' \omega'_y) + \frac{\partial}{\partial y} (w' \omega'_x - u' \omega'_z) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (u' \omega'_y - v' \omega'_x) \right] - 4\omega'^2, \\ \omega'^2 &= \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2, \\ u' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{V'^2}{2} \right) + v' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{V'^2}{2} \right) + w' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{V'^2}{2} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[u' \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{1}{2} V'^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v' \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{1}{2} V'^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[w' \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{1}{2} V'^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Первые четыре слагаемых в левой части (2.17) в своей совокупности представляют собой индивидуальную производную по времени от кинетической энергии единицы массы в поле возмущений при условии, что переход частиц из одного положения в другое происходит со скоростью основного движения. Для этой производной введём отдельное обозначение

$$\frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} + w_1 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Для всех последующих слагаемых левой части (2.17) также введём отдельное обозначение

$$\begin{aligned} M &= - \left\{ u'^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v'^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w'^2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + u'v' \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \right. \\ & \quad \left. + u'w' \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + w'v' \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right\}. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Используя обозначения (2.18) и (2.19) и предшествующие формулы преобразования, получим из (2.17) следующее энергетическое соотношение для единицы объёма частиц жидкости в поле возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{dt} \left(\frac{\rho V'^2}{2} \right) = & \rho M - 4\mu\omega'^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[u' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) + 2\mu (v' \omega'_z - \omega' \omega'_y) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[v' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) + 2\mu (\omega' \omega'_x - u' \omega'_z) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\omega' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) + 2\mu (u' \omega'_y - v' \omega'_x) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для случая плоского поля возмущений будем иметь:

$$\omega' \equiv 0, \quad \omega'_x \equiv 0, \quad \omega'_y = 0, \quad \omega'_z = \omega'$$

и, следовательно, энергетическое соотношение (2.20) будет представляться в виде

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{dt} \left(\frac{\rho V'^2}{2} \right) = & \rho M - 4\mu\omega'^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[u' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) + 2\mu v' \omega' \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[v' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) - 2\mu u' \omega' \right]; \end{aligned} \quad (2.21)$$

при этом из (2.19) получим:

$$M = - \left\{ u'^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v'^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u' v' \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right\}. \quad (2.22)$$

Если же основное течение будет плоским прямолинейно-параллельным, т. е.

$$v_1 \equiv 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \equiv 0, \quad u_1 = u_1(y),$$

то выражение для M примет вид

$$M = - u' v' \frac{du_1}{dy}. \quad (2.23)$$

Допустим, что можно выбрать такой конечный прямоугольник с площадью S , на границах которого $y = c$, $y = d$ проекции вектора скорости поля возмущений обращаются в нуль, а на других границах $x = a$, $x = b$ распределение скоростей, давлений и вихрей будет одинаковым. При этих условиях при интегрировании по площади рассматриваемого прямоугольника будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_S \int \frac{\partial}{\partial x} \left[u' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) + 2\mu v' \omega' \right] dx dy = \\ = \int_{y=c}^{y=d} \left[u' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) + 2\mu v' \omega' \right]_{x=a}^{x=b} dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S \int \frac{\partial}{\partial y} \left[v' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) - 2\mu u' \omega' \right] dx dy = \\ = \int_{x=a}^{x=b} \left[v' \left(p' + \frac{1}{2} \rho V'^2 \right) - 2\mu u' \omega' \right]_{y=c}^{y=d} dx = 0, \\ \frac{d_1}{dt} \int_S \int \frac{1}{2} \rho V'^2 dx dy = \rho \int_S \int M dx dy - 4\mu \int_S \int \omega'^2 dx dy. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Полученное интегральное соотношение (2.24) представляет собой энергетическое соотношение для частиц жидкости внутри указанного прямоугольника в поле возмущений. Это соотношение показывает, что возрастание кинетической энергии поля возмущений может происходить только тогда, когда величина M будет заведомо положительной и при этом такой, чтобы значение первого интеграла в правой части (2.24) превосходило значение второго интеграла. Для случая плоского прямолинейного течения, для которого

$$\frac{du_1}{dy} > 0,$$

величина M из (2.23) может быть положительной, если проекции вектора скорости поля возмущений будут иметь разные знаки, т. е.

$$u'v' < 0. \quad (2.25)$$

В указанных в предшествующем параграфе статьях, в которых исследование устойчивости ламинарных течений проводилось с помощью энергетического метода, в качестве допущения принималось, что возрастание со временем кинетической энергии поля возмущений может служить вполне достаточным признаком возникновения неустойчивости исследуемого ламинарного течения. Если принять это допущение, то дальнейшая задача исследования устойчивости прямолинейно-параллельного течения между параллельными стенками будет сводиться к подбору соответственного поля возмущений, удовлетворяющего неравенству (2.25), при котором правая часть равенства (2.24) обращалась бы в нуль и при этом число Рейнольдса исследуемого ламинарного течения принимало бы наименьшее значение. Приравнивая правую часть (2.24) к нулю и подставляя значение M из (2.23) и значение угловой скорости вихря, получим:

$$\int_S \int u'v' \frac{du_1}{dy} dx dy + \nu \int_S \int \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 dx dy = 0. \quad (2.26)$$

Если теперь перейти в равенстве (2.26) к безразмерным величинам, полагая

$$x = \frac{\xi}{h}, \quad y = \frac{\eta}{h}, \quad u_1 = Uf(\tau), \quad u' = U\varphi(\xi, \eta), \quad v' = U\psi(\xi, \eta), \quad R = \frac{Uh}{\nu},$$

то для числа Рейнольдса получим следующее равенство:

$$R = \frac{\int_S \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 d\xi d\eta}{\int_S \int f'(\eta) \varphi(\xi, \eta) \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (2.27)$$

Таким образом, задача определения минимального значения числа Рейнольдса будет сводиться к определению минимума отношения (2.27) двух двойных интегралов.

§ 3. Исследование устойчивости ламинарного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей

Пусть мы имеем две параллельные стенки на расстоянии h друг от друга. Если нижняя стенка будет неподвижной, а верхняя будет перемещаться параллельно самой себе со скоростью U и если перепада давлений в направлении течения не будет, то для основного поля ламинарного течения между параллельными стенками будем иметь прямолинейный профиль распределения скоростей по сечению, т. е.

$$u_1 = \frac{U}{h} y, \quad v_1 = 0. \quad (3.1)$$

Для исследования устойчивости данного ламинарного течения по методу малых колебаний мы должны обратиться к приближенному дифференциальному уравнению (2.9) для функции тока поля возмущений. Подставляя в это уравнение выражение (3.1) для продольной скорости, получим следующее дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка:

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \frac{U}{h} y \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} = \nu \Delta \Delta \psi'. \quad (3.2)$$

Вводя безразмерные независимые величины

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{U}{h} t, \quad R = \frac{Uh}{\nu}, \quad (3.3)$$

представим дифференциальное уравнение (3.2) в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi'. \quad (3.4)$$

Далее, как уже указано в § 1, функцию тока представим в виде

$$\psi' = U h e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)} f(\eta). \quad (3.5)$$

Тогда

$$\Delta \psi' = U h e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)} \left(-\alpha^2 f + \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = U h e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)} \varphi(\eta), \quad (3.6)$$

и дифференциальное уравнение (3.4) запишется:

$$\frac{d^2\varphi}{d\gamma^2} + \varphi [Ri(\alpha\eta - \beta) - \alpha^2] = 0. \quad (3.7)$$

Таким образом, задача свелась к решению однородного дифференциального уравнения с обыкновенными производными второго порядка (3.7) и последующего решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2f}{d\gamma^2} - \alpha^2 f = \varphi. \quad (3.8)$$

Если ввести новое независимое комплексное переменное

$$z = \frac{\alpha^2 + iR(\beta - \alpha\eta)}{(\alpha R)^{2/3}}, \quad (3.9)$$

то дифференциальное уравнение (3.7) преобразуется:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + z\varphi = 0. \quad (3.10)$$

Независимыми решениями этого уравнения будут ¹⁾ цилиндрические функции с индексом $1/3$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= z^{1/2} Z_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right), \\ \varphi_2 &= z^{1/2} Z_{1/3}^{(2)} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (3.8) можно решить методом вариации произвольного постоянного. Получим два независимых решения:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{\varphi}{\alpha^2} \int_{z_0}^z \varphi_1(z') \sin \kappa(z' - z) dz', \\ f_2 &= \frac{\varphi}{\alpha^2} \int_{z_0}^z \varphi_2(z') \sin \kappa(z' - z) dz', \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где

$$\kappa^3 = \frac{\alpha^2}{R}, \quad (3.13)$$

а нижний предел z_0 представляет собой пока неопределённую комплексную постоянную. Умножая (3.12) на произвольную постоянную и складывая с общим решением однородного уравнения (3.8),

¹⁾ Рыжик, Градштейн, Таблицы интегралов, Гостехиздат, 1951, стр. 363.

получим общее решение полного уравнения для f :

$$f(\eta) = Af_1 + Bf_2 + Ce^{\alpha\eta} + De^{-\alpha\eta}. \quad (3.14)$$

На основании (3.5) проекции вектора скорости поля возмущений будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi'}{\partial y} = Ue^{i(\beta\tau - \alpha z)} f'(\eta), \\ v' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial x} = i\alpha Ue^{i(\beta\tau - \alpha z)} f(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Граничные условия прилипания частиц жидкости к стенкам в поле возмущений будут тогда иметь вид

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 0. \quad (3.16)$$

В качестве z_0 в (3.12) возьмём значение z из (3.9), отвечающее нижней стенке ($\eta = 0$), т. е.

$$z_0 = \frac{\alpha^2 + iR\beta}{(\alpha R)^{2/3}} \quad (3.17)$$

Тогда при значении $z = z_0$ функции f_1 и f_2 из (3.12), а также и их первые производные будут обращаться в нуль. Поэтому первые два условия (3.16) при подстановке выражения (3.14) дадут:

$$C + D = 0,$$

$$\alpha(C - D) = 0.$$

Отсюда

$$C = 0, \quad D = 0.$$

Обозначим через z_1 значение z , отвечающее верхней стенке, т. е.

$$z_1 = \frac{\alpha^2 + iR(\beta - \alpha)}{(\alpha R)^{2/3}}. \quad (3.18)$$

Удовлетворяя условиям прилипания к верхней стенке, получим из (3.14) следующие уравнения:

$$Af_1(z_1) + Bf_2(z_1) = 0,$$

$$Af_1'(z_1) + Bf_2'(z_1) = 0.$$

Так как постоянные A и B не могут обращаться в нуль, то мы должны приравнять нулю определитель системы, т. е.

$$f_1(z_1)f_2'(z_1) - f_2(z_1)f_1'(z_1) = 0. \quad (3.19)$$

Полученное уравнение (3.19) является трансцендентным *характеристическим уравнением* поля возмущений, наложенного на поле скоростей основного потока вязкой несжимаемой жидкости. Это

уравнение связывает значение числа R основного потока с кинематическими характеристиками α и β поля возмущений. При этом значения R и α считаются действительными и заранее заданными, а для величины β допускаются комплексные и подлежащие определению из уравнения (3.19) значения. Как уже было указано в § 1, для исследования вопроса об устойчивости рассматриваемого основного течения достаточно только установить знак мнимой части множителя β из уравнения (3.19). Но и эта ограниченная задача исследования знака мнимой части β по характеристическому уравнению (3.19) представляет весьма сложную по своим вычислениям задачу.

Мы ограничимся случаем, когда произведение αR считается малым и когда представляется возможным цилиндрические функции в (3.11) заменить их асимптотическими выражениями в своей простейшей форме.

На основании (3.17) и (3.18) будем иметь:

$$z_0 - z_1 = l(\alpha R)^{1/3}. \quad (3.20)$$

Следовательно, интегралы в (3.12) могут быть взяты по прямой, параллельной мнимой оси. Но концы отрезка этой прямой z_0 и z_1 могут располагаться на плоскости комплексного переменного z в различных местах. От того, в каких четвертях плоскости z будут располагаться точки z_0 и z_1 , будет зависеть вид асимптотических выражений цилиндрических функций.

Возьмём в качестве цилиндрических функций (3.11) функции Ханкеля, для которых имеют место следующие асимптотические выражения:

$$\left. \begin{aligned} H_{1/3}^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{5}{12}\pi)}, \\ H_{1/3}^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{5}{12}\pi)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Если положить:

$$x = r e^{i\varphi},$$

то асимптотические представления (3.21) будут справедливы только для значений аргумента φ в пределах

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

В рассматриваемом нами случае (3.11) мы имеем:

$$x = \frac{2}{3} z^{3/2}.$$

Следовательно, на плоскости комплексного переменного $z = r_1 e^{i\varphi}$ асимптотические формулы (3.21) могут быть использованы для

начений аргумента в пределах

$$-\frac{\pi}{3} < \gamma < \frac{\pi}{3}. \quad (3.22)$$

Будем теперь предполагать, что точки z_0 и z_1 выбраны в области указанных значений аргумента. Подставляя (3.21) в (3.11), а затем и в (3.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} f_1(z_1) &= \frac{\kappa}{\alpha^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{5}{12} \pi i} \int_{z_0}^{z_1} z^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} \sin \kappa(z - z_1) dz, \\ f_2(z_1) &= \frac{\kappa}{\alpha^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{12} \pi i} \int_{z_0}^{z_1} z^{-1/4} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}} \sin \kappa(z - z_1) dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

В силу детерминантного характера уравнения (3.19) постоянные множители в (3.23) будут сокращаться, поэтому в дальнейшем мы эти постоянные выписывать не будем.

Положим

$$z = z_0 - \zeta$$

и, считая ζ малым, примем:

$$z^{-1/4} \approx z_0^{-1/4},$$

$$z^{3/2} \approx z_0^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\zeta}{z_0}\right).$$

При этих предположениях будем иметь из (3.23):

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= z_0^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \int_0^{z_0 - z_1} e^{-i z_0^{1/2} \zeta} \sin \kappa(z_0 - z_1 - \zeta) d\zeta = \\ &= z_0^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \frac{\kappa}{z_0 - \kappa^2} \left[-e^{-i(z_0 - z_1) z_0^{1/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_0^{1/2}}{\kappa} i \sin \kappa(z_0 - z_1) + \cos \kappa(z_0 - z_1) \right], \\ f_2 &= z_0^{-1/4} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \int_0^{z_0 - z_1} e^{i z_0^{1/2} \zeta} \sin \kappa(z_0 - z_1 - \zeta) d\zeta = \\ &= z_0^{-1/4} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \frac{\kappa}{z_0 - \kappa^2} \left[-e^{i(z_0 - z_1) z_0^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z_0^{1/2}}{\kappa} i \sin \kappa(z_0 - z_1) + \cos \kappa(z_0 - z_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

После дифференцирования (3.24) получим:

$$\left. \begin{aligned} f_1' &= \frac{df_1}{dz_1} = z_0^{-1/2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \frac{\kappa}{z_0 - \kappa^2} \left[-i z_0^{1/2} e^{-i(z_0 - z_1) z_0^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + z_0^{1/2} i \cos \kappa (z_0 - z_1) + \kappa \sin \kappa (z_0 - z_1) \right], \\ f_2' &= \frac{df_2}{dz_1} = z_0^{-1/2} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \frac{\kappa}{z_0 - \kappa^2} \left[i z_0^{1/2} e^{i(z_0 - z_1) z_0^{1/2}} - \right. \\ &\quad \left. - z_0^{1/2} i \cos \kappa (z_0 - z_1) + \kappa \sin \kappa (z_0 - z_1) \right]. \end{aligned} \right\} (3.25)$$

Согласно (3.13) и (3.20) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sin \kappa (z_0 - z_1) &= \sin i \kappa (\alpha \mathbf{R})^{1/3} = i \operatorname{sh} \alpha, \\ \cos \kappa (z_0 - z_1) &= \operatorname{ch} \alpha. \end{aligned} \right\} (3.26)$$

Подставляя (3.24), (3.25) и (3.26) в левую часть (3.19), получим характеристическое уравнение в виде

$$\frac{-\kappa e^{(\alpha \mathbf{R})^{1/2} z_0^{1/2}} + z_0^{1/2} \operatorname{sh} \alpha + \kappa \operatorname{ch} \alpha}{-z_0^{1/2} e^{(\alpha \mathbf{R})^{1/2} z_0^{1/2}} + z_0^{1/2} \operatorname{ch} \alpha + \kappa \operatorname{sh} \alpha} = \frac{-\kappa e^{-(\alpha \mathbf{R})^{1/2} z_0^{1/2}} - z_0^{1/2} \operatorname{sh} \alpha + \kappa \operatorname{ch} \alpha}{z_0^{1/2} e^{-(\alpha \mathbf{R})^{1/2} z_0^{1/2}} - z_0^{1/2} \operatorname{ch} \alpha + \kappa \operatorname{sh} \alpha}.$$

После приведения к общему знаменателю характеристическое уравнение примет вид

$$2 - 2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} z_0^{1/2} (\alpha \mathbf{R})^{1/3} + \left(\frac{\kappa}{z_0^{1/2}} + \frac{z_0^{1/2}}{\kappa} \right) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} z_0^{1/2} (\alpha \mathbf{R})^{1/3} = 0. \quad (3.27)$$

Введём новое переменное, полагая

$$i z_0^{1/2} (\alpha \mathbf{R})^{1/3} = x, \quad (3.28)$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z_0^{1/2} (\alpha \mathbf{R})^{1/3} \operatorname{sh} \alpha &= -4i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}, \\ 2 - 2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} z_0^{1/2} (\alpha \mathbf{R})^{1/3} &= 4 \left(\sin^2 \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

и характеристическое уравнение представится в виде

$$\cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \left[\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{x}{\alpha} \right) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \right] = 0. \quad (3.29)$$

Таким образом, для случая малых значений $\alpha \mathbf{R}$ и при использовании асимптотических выражений (3.21) решение вопроса об устойчивости прямолинейно-параллельного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей сводится к исследованию корней характеристического уравнения (3.29).

Первый множитель в левой части уравнения (3.29) нельзя приравнять нулю, так как при значении $x = \pi$ квадратная скобка будет обращаться в бесконечность. Выражение в квадратной скобке (3.29) в свою очередь состоит из двух отдельных множителей; приравнявая нулю эти множители, получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} &= 0, \\ \frac{2}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{2}{\alpha} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Оба уравнения (3.30) имеют один общий корень

$$x = i\alpha, \quad (3.31)$$

для которого

$$z_0^{1/2} = x, \quad \beta = 0.$$

Таким образом, корню $x = i\alpha$ будет отвечать стационарное поле возмущений, амплитуды волн которого со временем не будут изменяться, и, следовательно, вопрос об устойчивости основного течения не может быть решен.

Известным графическим методом можно убедиться в том, что оба уравнения (3.30) для каждого фиксированного значения α будут иметь бесчисленное множество действительных корней. Так как из (3.17) и (3.28) будем иметь:

$$iR\beta = (\alpha R)^{3/2} z_0 - \alpha^2 = -x^2 - \alpha^2, \quad (3.32)$$

то каждому действительному корню x будет отвечать чисто мнимое значение β с положительным коэффициентом при i . Следовательно, амплитуда волн поля возмущений, отвечающих действительным корням уравнений (3.30), будет со временем уменьшаться, а поэтому основное поле ламинарного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей будет устойчивым по отношению к возмущениям вида (3.5). Таким образом, *методом малых колебаний не удастся обнаружить неустойчивость ламинарного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей.*

Выше было проведено исследование характеристического уравнения (3.19) для случая малых значений αR при использовании (3.21). В работе Хопфа¹⁾ проведено исследование этого уравнения при произвольных значениях αR и при использовании асимптотических формул для других расположений точек z_0 и z_1 . Результат этих исследований сводится к тому же заключению о невозможности обнаружения неустойчивости рассматриваемого течения методом малых колебаний.

¹⁾ Hopf L., Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit, Annalen der Physik, т. 44, 1914.

Обратимся теперь к применению энергетического метода к исследованию устойчивости ламинарного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей.

Как уже было указано в § 2, при применении энергетического метода исследования устойчивости ламинарного течения вопрос сводится к исследованию интегрального соотношения

$$\iint_S [M - 4v\omega'^2] dS = 0, \quad (3.33)$$

где для случая плоско-параллельного течения

$$\left. \begin{aligned} M &= - \left[u'^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v'^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u'v' \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right], \\ \omega' &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Интегрирование в (3.33) проводится по площади, на границе которой проекции вектора скорости поля возмущений обращаются в нуль.

Для случая прямолинейного профиля распределения скоростей имеем

$$u_1 = \frac{Uy}{h}, \quad v_1 = 0 \quad (3.35)$$

и для критического значения числа Рейнольдса получим из (3.33) следующее выражение:

$$R_{кр} = \frac{Uh}{\nu} = - \frac{h^2 \iint_S \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 dS}{\iint_S u'v' dS}. \quad (3.36)$$

Так как левая часть (3.36) и числитель в правой части всегда положительны, то знаменатель должен иметь отрицательное значение, а это значит, что проекции u' и v' должны в большинстве точек внутри площади S иметь противоположные знаки. Такой именно случай будем иметь, например, тогда, когда траектории частиц в поле возмущений будут представлять собой подобные эллипсы, малые оси которых наклонены к положительному направлению оси x под некоторым углом (рис. 98).

Итак, будем предполагать, что поле возмущений обусловлено наличием эллиптического вихря с центром на средней линии между параллельными стенками, малая ось которого составляет с направлением

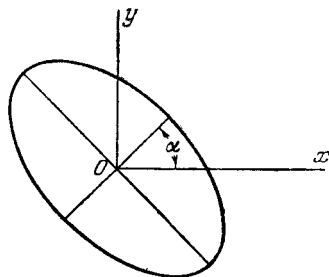


Рис. 98.

скорости основного течения угол α . Введём новые оси координат, совпадающие с осями эллиптического вихря. В этих новых осях X и Y проекции вектора скорости основного течения на основании (3.35) и формул преобразования координат будут равны

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{U}{h} \cos \alpha \left(X \sin \alpha + Y \cos \alpha + \frac{h}{2} \right), \\ v_1 &= -\frac{U}{h} \sin \alpha \left(X \sin \alpha + Y \cos \alpha + \frac{h}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Используя выражения (3.37), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial X} &= \frac{U}{2h} \sin 2\alpha, & \frac{\partial v_1}{\partial Y} &= -\frac{U}{2h} \sin 2\alpha, \\ \frac{\partial u_1}{\partial Y} + \frac{\partial v_1}{\partial X} &= \frac{U}{h} \cos 2\alpha, \\ M &= -\frac{U}{2h} [(u'^2 - v'^2) \sin 2\alpha + 2u'v' \cos 2\alpha], \end{aligned} \quad (3.38)$$

где u' и v' обозначают проекции вектора скорости поля возмущения на новые оси координат.

Очевидно, что рассматриваемый эллиптический вихрь можно образовать из кругового с помощью равномерного сжатия в направлении оси X . Пусть этот круговой вихрь находится на некоторой вспомогательной плоскости с осями координат x_0 и y_0 , совпадающими с выбранными осями X и Y . На этой вспомогательной плоскости проекции вектора скорости от вихря будут представляться в виде

$$u_0 = -\omega y_0, \quad v_0 = \omega x_0, \quad (3.39)$$

где ω считается непрерывной функцией расстояния r_0 от начала координат. При этом на границе кругового вихря $r_0 = b$ угловая скорость ω обращается в нуль, а в центре вихря ω и $\frac{d\omega}{dr_0}$ остаются конечными.

Точке с координатами x_0 и y_0 на вспомогательной плоскости будет отвечать точка на основной плоскости с координатами

$$X = \varepsilon x_0, \quad Y = y_0, \quad (3.40)$$

где ε представляет собой положительную постоянную величину. Будем теперь принимать, что в рассматриваемой точке на основной плоскости проекции вектора скорости поля возмущений равны

$$u' = \varepsilon u_0 = -\varepsilon \omega y_0, \quad v' = v_0 = \omega x_0. \quad (3.41)$$

При таком предположении (3.41) уравнение неразрывности будет удовлетворяться, а движение частиц в поле возмущений будет происходить по эллиптическим траекториям.

Подставляя значения u' и v' из (3.41) в выражение (3.38) для M , получим:

$$M = \frac{U}{2h} \omega^2 (x_0^2 - \varepsilon^2 y_0^2) \sin 2\alpha + \frac{U}{h} \varepsilon \omega^2 x_0 y_0 \cos 2\alpha. \quad (3.42)$$

Для вихря поля возмущений будем иметь:

$$\begin{aligned} 2\omega' &= \frac{\partial v'}{\partial X} - \frac{\partial u'}{\partial Y} = \frac{\partial v'}{\varepsilon \partial x_0} - \frac{\partial u'}{\partial y_0} = \omega \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) + \left(\frac{x_0^2}{\varepsilon} + \varepsilon y_0^2 \right) \frac{1}{r_0} \frac{d\omega}{dr_0}, \\ 4\omega'^2 &= \omega^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right)^2 + 2\omega \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \left(\frac{x_0^2}{\varepsilon} + \varepsilon y_0^2 \right) \frac{1}{r_0} \frac{d\omega}{dr_0} + \\ &\quad + \left(\frac{x_0^2}{\varepsilon} + \varepsilon y_0^2 \right)^2 \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{d\omega}{dr_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Элемент площади dS на основной плоскости будет связан с элементом площади dS_0 на вспомогательной плоскости соотношением

$$dS = \varepsilon dS_0. \quad (3.44)$$

При интегрировании по полярному углу φ найдём:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} x_0^2 d\varphi &= \int_0^{2\pi} r_0^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \pi r_0^2, & \int_0^{2\pi} y_0^2 d\varphi &= \int_0^{2\pi} r_0^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \pi r_0^2, \\ \int_0^{2\pi} x_0 y_0 d\varphi &= r_0^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0, \\ \int_0^{2\pi} x_0^4 d\varphi &= \frac{3}{4} \pi r_0^4, & \int_0^{2\pi} y_0^4 d\varphi &= \frac{3}{4} \pi r_0^4, & \int_0^{2\pi} x_0^2 y_0^2 d\varphi &= \frac{\pi r_0^4}{4}. \end{aligned} \right\} (3.45)$$

Используя (3.42), (3.43), (3.44) и (3.45), получим:

$$\int_S \int M dS = \varepsilon \int \int M r_0 d\varphi dr_0 = \frac{U \pi \varepsilon \omega^2}{2h} (1 - \varepsilon^2) \sin 2\alpha \int_0^b \omega^2 r_0^3 dr_0, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \int_S \int 4\omega'^2 dS &= 4\varepsilon \int \int \omega'^2 r_0 d\varphi dr_0 = 2\pi \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right)^2 \int_0^b \left(\omega^2 r_0 + \omega r_0^2 \frac{d\omega}{dr_0} \right) dr_0 + \\ &\quad + \frac{\pi}{4\varepsilon} (3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) \int_0^b r_0^3 \left(\frac{d\omega}{dr_0} \right)^2 dr_0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Так как на границе кругового вихря ω обращается в нуль, а в центре ω остаётся конечной, то

$$\omega^2 r_0 + r_0^2 \omega \frac{d\omega}{dr_0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr_0} (\omega^2 r_0^2),$$

$$\int_0^b \left(\omega^2 r_0 + r_0^2 \omega \frac{d\omega}{dr_0} \right) dr_0 = \frac{1}{2} \omega^2 r_0^2 \Big|_0^b = 0.$$

Следовательно, равенство (3.47) примет вид

$$\int_S \int 4\omega'^2 dS = \frac{\pi}{4\varepsilon} (3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) \int_0^b \left(\frac{d\omega}{dr_0} \right)^2 r_0^3 dr_0. \quad (3.48)$$

Вводя безразмерную независимую переменную

$$\frac{r_0}{b} = s,$$

получим:

$$\int_S \int M dS = \frac{\pi}{2} b^4 \frac{U}{h} \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \sin 2\alpha \int_0^1 \omega^2 s^3 ds, \quad (3.49)$$

$$\int_S \int 4\omega'^2 dS = \frac{\pi}{4\varepsilon} (3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) b^2 \int_0^1 \left(\frac{d\omega}{ds} \right)^2 s^3 ds. \quad (3.50)$$

На основании (3.49) можно заключить, что указанное выше требование о положительности интеграла от M будет выполнено, если коэффициент преобразования ε будет меньше единицы.

Обозначая отношение интегралов через k , т. е.

$$\frac{\int_0^1 s^3 \left(\frac{d\omega}{ds} \right)^2 ds}{\int_0^1 \omega^2 s^3 ds} = k \quad (3.51)$$

и используя интегральное соотношение (3.33), получим следующее равенство для критического числа Рейнольдса:

$$\mathbf{R}_{\text{кр}} = \frac{Uh}{\nu} = \frac{kh^2}{2b^2} \frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) \sin 2\alpha}. \quad (3.52)$$

Таким образом, значение $\mathbf{R}_{\text{кр}}$ поставлено в зависимость от размеров вихря b , от вида вихря ε , от положения большой оси α и от распределения величины угловой скорости вихря по радиусу $\omega(s)$.

Исследуемое ламинарное течение с прямолинейным распределением скоростей будет заведомо устойчивым, если $\mathbf{R}_{\text{кр}}$, определяемое

равенством (3.52), будет иметь наименьшее значение. Следовательно, теперь необходимо установить те значения параметров вихря b , ϵ , α и $\omega(s)$, для которых правая часть равенства (3.52) приобретает наименьшее значение.

Как видно из (3.52), с увеличением радиуса вихря b $R_{\text{вп}}$ будет уменьшаться. Однако размеры вихря не могут быть произвольно большими, они должны быть ограничены тем условием, что эллипс с полуосями ϵb и b должен касаться стенок ($y = h$ и $y = 0$) и при

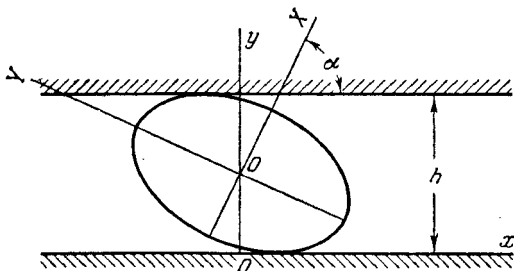


Рис. 99.

этом малая ось должна быть наклонена к стенкам под углом α (рис. 99). Используя уравнение верхней стенки

$$Y = -\operatorname{tg} \alpha X + \frac{h}{2 \cos \alpha}$$

и уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{\epsilon^2 b^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

можно получить следующее равенство для квадрата наибольшего значения радиуса вихря на вспомогательной плоскости:

$$b^2 = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{\cos^2 \alpha + \epsilon^2 \sin^2 \alpha}. \quad (3.53)$$

Подставляя (3.53) в правую часть (3.52), получим:

$$R_{\text{вп}} = \frac{\cos^2 \alpha + \epsilon^2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \cdot 2k \frac{3 + 2\epsilon^2 + 3\epsilon^4}{\epsilon^2 (1 - \epsilon^2)}. \quad (3.54)$$

Заметим, что при фиксированном значении ϵ первый множитель в правой части (3.54) принимает наименьшее значение при

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.55)$$

Таким образом, положение малой оси вихря ставится в зависимость от значения коэффициента ϵ сжатия кругового вихря. Подставляя

значение угла α из (3.55) в (3.54), получим:

$$R_{кр} = 2k \frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)}. \quad (3.56)$$

Наименьшее значение коэффициента в выражении для $R_{кр}$, равное $4\sqrt{6}$, достигается при

$$\varepsilon_k = \frac{1}{3}(\sqrt{15} - \sqrt{6}) = 0,475. \quad (3.57)$$

Таким образом, критическое число Рейнольдса будет теперь представляться в виде

$$R_{кр} = 8\sqrt{6} k. \quad (3.58)$$

Для определения наименьшего значения правой части (3.58) будем варьировать зависимость угловой скорости вихря ω от расстояния s таким образом, чтобы вариация от множителя k обращалась в нуль:

$$\delta k = \delta \left[\frac{\int_0^1 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 s^3 ds}{\int_0^1 \omega^2 s^3 ds} \right] = 0. \quad (3.59)$$

Выполняя варьирование под знаками интегралов, будем иметь:

$$\delta \left[\int_0^1 \omega^2 s^3 ds \right] = 2 \int_0^1 \omega \delta \omega s^3 ds, \quad (3.60)$$

$$\delta \left[\int_0^1 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 s^3 ds \right] = 2 \int_0^1 \frac{d\omega}{ds} \frac{d\delta\omega}{ds} s^3 ds. \quad (3.61)$$

Принимая, что на границе вихря ($s = 1$) вариация вихря обращается в нуль, после интегрирования по частям получим:

$$\int_0^1 \frac{d\omega}{ds} s^3 \frac{d\delta\omega}{ds} ds = \frac{d\omega}{ds} s^3 \delta\omega \Big|_0^1 - \int_0^1 \delta\omega \frac{d}{ds} \left(s^3 \frac{d\omega}{ds} \right) ds = - \int_0^1 \delta\omega \frac{d}{ds} \left(s^3 \frac{d\omega}{ds} \right) ds.$$

Если выполнить варьирование дроби в (3.59) и использовать предшествующие равенства, то найдем:

$$\int_0^1 \delta\omega \left[\frac{d}{ds} \left(s^3 \frac{d\omega}{ds} \right) + ks^3\omega \right] ds = 0.$$

Приравняв нулю коэффициент при вариации угловой скорости ω под знаком интеграла, получим дифференциальное уравнение для

искомой угловой скорости

$$\frac{d}{ds} \left(s^3 \frac{d\omega}{ds} \right) + k\omega s^3 = 0. \quad (3.62)$$

При подстановке

$$\omega = \frac{y}{s}, \quad s' = s \sqrt{k}$$

уравнение (3.62) приводится к известному дифференциальному уравнению для цилиндрических функций

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{s'} \frac{dy}{ds'} + \left(1 - \frac{1}{s'^2} \right) y = 0.$$

Из двух решений этого уравнения берём именно то, которое остаётся конечным при $s' = 0$, т. е.

$$y = C J_1(s') = C J_1(s \sqrt{k}).$$

Таким образом, зависимость угловой скорости вихря от расстояния представляется через функцию Бесселя первого рода в виде

$$\omega(s) = \frac{C}{s} J_1(s \sqrt{k}). \quad (3.63)$$

Чтобы удовлетворить условию обращения в нуль угловой скорости вихря на границе кругового вихря на вспомогательной плоскости, необходимо положить:

$$J_1(\sqrt{k}) = 0. \quad (3.64)$$

Уравнением (3.64) предопределяется выбор значения множителя k . Обозначая наименьший корень функции J_1 через λ_1 , будем иметь:

$$k = \lambda_1^2.$$

Так как из таблиц имеем:

$$\lambda_1 = 3,832, \quad \lambda_1^2 = 14,68,$$

то наименьшее значение критического числа Рейнольдса из (3.58) будет равно

$$(R_{\text{кр}})_{\text{min}} = 288. \quad (3.65)$$

Таким образом, при использовании энергетического метода исследования устойчивости можно прийти к выводу, что *ламинарное плоско-параллельное течение с прямолинейным профилем распределения скоростей будет заведомо устойчивым, если число R не будет превышать значения 288*. Следует, однако, заметить, что полученное с помощью энергетического метода значение критического числа R намного меньше того значения, которое получается косвенным путём на основании некоторых опытов. Это значит, что энергетический метод исследования устойчивости ламинарных течений

позволяет определять критическое значение числа Рейнольдса с большим запасом.

Различие результатов исследований устойчивости ламинарного течения с прямолинейным профилем распределения скоростей, проведённых по методу малых колебаний и с помощью энергетического метода, следует, повидимому, объяснить прежде всего тем, что в первом методе дифференциальные уравнения поля возмущений линеаризируются, тогда как при энергетическом методе нелинейные слагаемые в уравнениях учитываются.

§ 4. Об устойчивости ламинарных течений между параллельными стенками и в пограничном слое

В § 2 было указано, что исследование устойчивости ламинарного плоско-параллельного течения между параллельными стенками и в пограничном слое по методу малых колебаний сводится к решению дифференциального уравнения (2.9) для функции тока ψ' поля возмущения. Обозначая характерную скорость течения через U , характерный размер через l , вводя число Рейнольдса

$$R = \frac{Ul}{\nu} \quad (4.1)$$

и полагая

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, \quad y = l\bar{y}, \quad t = \frac{l}{U}\bar{t}, \\ u_1 &= U\omega(\bar{y}), \quad \psi' = Ul\varphi(\bar{y})e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

получим из (2.9) следующее дифференциальное уравнение четвёртого порядка для неизвестной функции $\varphi(\bar{y})$ поля возмущений:

$$[\omega(\bar{y}) - c](\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \omega''\varphi = -\frac{l}{\alpha R}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi). \quad (4.3)$$

Составляющие вектора скорости поля возмущений будут при этом равны:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{\partial\psi'}{\partial y} = Ue^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})}\varphi', \\ v' &= -\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -U\alpha e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})}\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Для исследования устойчивости ламинарного течения между двумя неподвижными стенками ($y=0$, $y=2h$) решение уравнения (4.3) необходимо подчинить граничным условиям прилипания частиц жидкости к стенкам. В этом случае за характерную скорость течения U можно взять максимальное значение скорости ($y=h$). Тогда распределение скоростей по сечению в безразмерных параметрах будет

представляться в виде

$$\omega(\bar{y}) = \frac{4}{y_1} (\bar{y}_1 \bar{y} - \bar{y}^2), \quad (4.5)$$

где

$$\bar{y}_1 = 2 \frac{h}{l}. \quad (4.6)$$

Учитывая равенства (4.4) и (4.6), можно записать условия прилипания частиц жидкости к стенкам в поле возмущений в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \\ \varphi(\bar{y}_1) = 0, \quad \varphi'(\bar{y}_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Для исследования устойчивости течения в пограничном слое решение уравнения (4.3) должно проводиться при выполнении условия прилипания к одной стенке

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0 \quad (4.8)$$

и при выполнении дополнительного условия на границе слоя, отражающего собой непрерывный переход решения уравнения (4.3) для вязкой жидкости в решение соответственного уравнения для идеальной жидкости. Уравнение поля возмущений для идеальной жидкости мы получим из (4.3), полагая

$$\text{при } R \rightarrow \infty \quad \omega''(\bar{y}) \rightarrow 0.$$

При этом предельном переходе мы получим из (4.3) уравнение

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi = 0, \quad (4.9)$$

общее решение которого представляется в виде

$$\varphi = C_1 e^{\alpha \bar{y}} + C_2 e^{-\alpha \bar{y}}.$$

Чтобы иметь ограниченное решение уравнения (4.9), необходимо постоянно C_1 приравнять нулю. Тогда требование непрерывности перехода решения уравнения (4.3) в решение уравнения (4.9) на границе слоя ($\bar{y} = \bar{y}_1$) может быть представлено в виде равенств

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{y}_1) &= C_2 e^{-\alpha \bar{y}_1}, \\ \varphi'(\bar{y}_1) &= -C_2 \alpha e^{-\alpha \bar{y}_1}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получим следующее дополнительное условие, которому необходимо подчинить решение уравнения (4.3) для случая исследования устойчивости течения в пограничном слое:

$$\alpha \varphi(\bar{y}_1) + \varphi'(\bar{y}_1) = 0. \quad (4.10)$$

К условиям (4.8) и (4.10) присоединяется условие ограниченности решения при неограниченном возрастании переменного y , т. е.

$$\varphi(\infty) \ll \infty. \quad (4.11)$$

Так как $\psi(\bar{y})$ представляет собой аналитическую функцию от \bar{y} , то четыре независимых решения уравнения (4.3) будут аналитическими функциями от переменного y и целыми функциями от трёх входящих в уравнение параметров α , αR и c . Параметр α представляет собой длину волны возмущения, а параметр R — число Рейнольдса; оба параметра должны быть действительными. Параметр же c , связанный со скоростью распространения волны возмущения и со степенью изменения со временем высоты гребня волны возмущения, может быть и комплексным, т. е.

$$c = c_r + ic_i.$$

Основная идея исследования устойчивости ламинарного течения сводится к тому, чтобы найти зависимость между этими тремя параметрами α , R и c :

$$F(\alpha, R, c) = 0. \quad (4.12)$$

Если эта зависимость будет разрешена относительно параметра c , то после отделения действительной и мнимой части будут получены равенства

$$\left. \begin{aligned} c_r &= c_r(\alpha, R), \\ c_i &= c_i(\alpha, R). \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Из равенств (4.4) следует, что исследуемое течение будет устойчивым для положительных значений c_i и неустойчивым для отрицательных значений c_i . Следовательно, кривая

$$c_i(\alpha, R) = 0 \quad (4.14)$$

на плоскости параметров α и R будет разграничивать области устойчивых и неустойчивых течений. К построению такой разграничительной кривой и должна сводиться рассматриваемая задача об устойчивости ламинарных течений.

Такая зависимость между параметрами должна быть установлена с помощью четырёх независимых решений уравнения (4.3) и соответственных однородных граничных условий. Если независимые решения обозначить через φ_1 , φ_2 , φ_3 и φ_4 , то общее решение уравнения (4.3) представится в виде

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + C_4\varphi_4. \quad (4.15)$$

Используя однородные граничные условия (4.7), мы получим однородную систему четырёх уравнений относительно постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Условие разрешимости этой системы уравнений даст нам

характеристическое или вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) & \varphi_4(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \varphi_3'(0) & \varphi_4'(0) \\ \varphi_1(\bar{y}_1) & \varphi_2(\bar{y}_1) & \varphi_3(\bar{y}_1) & \varphi_4(\bar{y}_1) \\ \varphi_1'(\bar{y}_1) & \varphi_2'(\bar{y}_1) & \varphi_3'(\bar{y}_1) & \varphi_4'(\bar{y}_1) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.16)$$

Это уравнение как раз и будет представлять собой зависимость (4.12) между параметрами α , R и c для случая ламинарного течения между параллельными неподвижными стенками.

Для течения в пограничном слое мы должны одно из независимых, например φ_4 , отбросить как не удовлетворяющее условию ограниченности решения (4.11). Следовательно, общее решение уравнения (4.3) в этом случае должно представляться в виде

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3. \quad (4.17)$$

Это общее решение должно удовлетворять граничным условиям (4.8) и (4.10). Но так как при приближении к границе слоя уравнение (4.3) должно вырождаться в уравнение (4.9), то на этой границе третье независимое решение φ_3 должно оказаться несущественным и его можно отбросить при удовлетворении условию (4.10). В таком случае вековое уравнение для случая течения в пограничном слое будет:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \varphi_3'(0) \\ \alpha\varphi_1(\bar{y}_1) + \varphi_1'(\bar{y}_1) & \alpha\varphi_2(\bar{y}_1) + \varphi_2'(\bar{y}_1) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

Чтобы из вековых уравнений (4.16) и (4.18) получить уравнение разграничительной кривой (4.14) в конкретном виде, необходимо в явном виде построить четыре независимых решения уравнения (4.3); в этом-то и заключается основная математическая трудность рассматриваемой задачи об устойчивости ламинарных течений. Наиболее распространённым методом решения обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами является метод представления решения по степеням соответственно выбранного малого параметра. Так как ламинарное течение теряет устойчивость при сравнительно больших значениях числа Рейнольдса, то в рассматриваемом случае в качестве малого параметра можно было бы выбрать отношение $\frac{1}{\alpha R}$. Но в уравнении (4.3) этот малый параметр входит множителем при старшей производной. Это обстоятельство создаёт дополнительные трудности в применении метода разложения решения по степеням малого параметра $\frac{1}{\alpha R}$. Эти трудности возникают,

во-первых, оттого, что в нулевом приближении мы получим дифференциальное уравнение второго порядка, а не четвёртого. Следовательно, в этом приближении можно построить только два независимых решения, а не четыре. Во-вторых, для дифференциального уравнения второго порядка точка $\bar{y} = y_c$, для которой будет выполняться равенство

$$\omega(y_c) = c, \quad (4.19)$$

будет особой точкой, тогда как для полного уравнения (4.3) эта точка не будет особой. На это обстоятельство раньше не обращалось внимание исследователей; именно по этой причине и не удавалось обнаружить неустойчивость ламинарного течения между параллельными стенками. Наличие особой точки $\bar{y} = y_c$ вынуждает по-особому выбирать путь соответственного интегрирования в плоскости комплексного переменного \bar{y} при аналитическом продолжении дифференциального уравнения (4.3) на эту плоскость. Подробное исследование всех этих вопросов дано в цитированной выше работе Лина. Для проведения числовых вычислений в этой работе используется метод построения асимптотических решений уравнения (4.3), заключающийся в следующем.

Первые два независимых решения строятся путём непосредственного разложения решения по степеням параметра $\frac{1}{\alpha R}$. Полагая

$$\varphi(\bar{y}) = \varphi_0(\bar{y}) + (\alpha R)^{-1} \varphi_1(\bar{y}) + (\alpha R)^{-2} \varphi_2(\bar{y}) + \dots, \quad (4.20)$$

подставляя это разложение в уравнение (4.3) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим следующую последовательность дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(\omega - c)(\varphi_0'' - \alpha^2 \varphi_0) - \omega'' \varphi_0 = 0, \quad (4.21)$$

.....

$$(\omega - c)(\varphi_k'' - \alpha^2 \varphi_k) - \omega'' \varphi_k = -i(\varphi_{k-1}^{IV} - 2\alpha^2 \varphi_{k-1}'' + \alpha'' \varphi_{k-1}) \quad (k \geq 1). \quad (4.22)$$

Дифференциальное уравнение (4.21) нулевого приближения, отвечающее полю возмущений без учёта сил вязкости, можно решить с помощью разложений по степеням параметра α^2 . Этим путём можно получить два независимых решения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^{(1)} &= (\omega - c)[h_0(\bar{y}) + \alpha^2 h_2(\bar{y}) + \alpha^4 h_4(\bar{y}) + \dots], \\ \varphi_0^{(2)} &= (\omega - c)[k_1(\bar{y}) + \alpha^2 k_3(\bar{y}) + \alpha^4 k_5(\bar{y}) + \dots], \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 h_0(\bar{y}) &= 1, \\
 \dots \dots \dots \\
 h_{2n+2}(\bar{y}) &= \int_0^{\bar{y}} d\bar{y} (\omega - c)^{-2} \int_0^{\bar{y}} (\omega - c)^2 h_{2n}(\bar{y}) d\bar{y}, \\
 k_1(\bar{y}) &= \int_0^{\bar{y}} \frac{d\bar{y}}{(\omega - c)^2}, \\
 \dots \dots \dots \\
 k_{2n+3}(\bar{y}) &= \int_0^{\bar{y}} (\omega - c)^2 \left[\int_0^{\bar{y}} \frac{k_{2n+1}(\bar{y})}{(\omega - c)^2} d\bar{y} \right] d\bar{y}.
 \end{aligned} \right\} (4.24)$$

Последующие приближения могут быть найдены из уравнений (4.22) с помощью метода вариации произвольной постоянной через решения (4.23). Но при вычислениях, оказывается, можно обойтись и без последующих приближений.

Для построения других независимых решений уравнений (4.3) в асимптотической форме положим:

$$\varphi = e^{\int g d\bar{y}}. \quad (4.25)$$

Подставляя (4.25) в уравнение (4.3), получим для g нелинейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
 (\omega - c)(g^2 + g' - \alpha^2) - \omega'' &= \\
 = -\frac{i}{\alpha R} [g^4 + 6g^2g' + 3g'^2 + 4gg'' + g''' - 2\alpha^2(g^2 + g') + \alpha^4]. & (4.26)
 \end{aligned}$$

Будем решать это уравнение с помощью следующего ряда:

$$g(\bar{y}) = \sqrt{\alpha R} g_0(\bar{y}) + g_1(\bar{y}) + \frac{1}{\sqrt{\alpha R}} g_2(\bar{y}) + \frac{1}{\alpha R} g_3(\bar{y}) + \dots \quad (4.27)$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях параметра αR , получим последовательность уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 (\omega - c)g_0^2 &= -ig_0^4, \\
 (\omega - c)(g_0' + 2g_0g_1) &= -i(4g_0^3g_1 + 6g_0^2g_0'), \\
 (\omega - c)(g_1' + g_1^2 + 2g_0g_2 - \alpha^2) - \omega'' &= \\
 &= -i(4g_0^3g_2 + 6g_1^2 + 3g_0g_1g_0' + 3g_0'^2 - 2\alpha^2g_0^3). \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (4.28)$$

Решения этих уравнений строятся без всяких квадратур. Первые два решения представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \pm \sqrt{i(\omega - c)}, \\ g_1 &= -\frac{5}{2} \frac{g_0'}{g_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Для определённости положим:

$$\arg i = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(\omega - c) > 0 \quad \text{для} \quad \omega - c > 0.$$

Для отрицательных значений разности $\omega - c$ будем полагать $\arg(\omega - c) = +\pi$ или $\arg(\omega - c) = -\pi$ в зависимости от обстоятельств.

Обратим внимание на то, что если для уравнения (4.21) точка $y = y_c$ в асимптотическом решении (4.23) была логарифмической, то для решения (4.29) она будет алгебраической точкой ветвления. Если ограничиться первыми двумя членами в разложении (4.27), то для второй пары независимых решений уравнений (4.3) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{(\bar{y})}^{(3)} &= (\omega - c) e^{-\int_{y_c}^{\bar{y}} \sqrt{i\alpha R(\omega - c)} d\bar{y}}, \\ \varphi_{(\bar{y})}^{(4)} &= (\omega - c) e^{+\int_{y_c}^{\bar{y}} \sqrt{i\alpha R(\omega - c)} d\bar{y}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Таким образом, четыре независимых решения уравнения (4.3) в первом приближении будут представляться в виде (4.23) и (4.30). Однако эти решения не могут быть непосредственно использованы, так как не выяснено поведение этих решений в окрестности точки $y = y_c$ и в зависимости от этого не установлен путь интегрирования в равенствах (4.24) и (4.30). Для выяснения этих вопросов в работе Лина вводится новое независимое переменное и новый малый параметр в виде

$$\bar{y} - y_c = \varepsilon \eta, \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1/3}. \quad (4.31)$$

Представляя решение уравнения (4.3) в виде ряда по степеням нового параметра

$$\varphi(\bar{y}) = \chi(\eta) = \chi_0(\eta) + \varepsilon \chi_1(\eta) + \varepsilon^2 \chi_2(\eta) + \dots \quad (4.32)$$

и полагаем

$$\left. \begin{aligned} \omega - c &= \omega_c' \varepsilon \eta + \omega_c'' \frac{(\varepsilon \eta)^2}{2} + \dots, \\ \omega'' &= \omega_c'' + \omega_c''' \varepsilon \eta + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

можно получить следующие четыре независимых решения уравнения (4.3) в нулевом приближении:

$$\left. \begin{aligned} \chi_0^{(1)} &= \eta, & \chi_0^{(2)} &= 1, \\ \chi_0^{(3)} &= \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} V \sqrt{\eta} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\gamma_0 \eta)^{3/2} \right] d\eta, \\ \chi_0^{(4)} &= \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} V \sqrt{\eta} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{3/2} \right] d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

где

$$\alpha_0 = V \sqrt{\omega_c^2}, \quad (4.35)$$

а $H_{1/3}^{(1)}$ и $H_{1/3}^{(2)}$ — функции Ханкеля.

Если воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Ханкеля, то можно показать, что для весьма больших значений параметра αR решения (4.34) будут совпадать с решениями (4.23) и (4.30). При этом выбор асимптотических разложений для функций Ханкеля, подчинённый требованию совпадения решений (4.34) с (4.23) и (4.30), предопределяет путь интегрирования в равенствах (4.24) и (4.30). Для этого пути интегрирования должно выполняться неравенство

$$-\frac{7\pi}{6} < \arg(\alpha_0 \eta) < \frac{\pi}{6}. \quad (4.36)$$

Далее в работе Лина исследуются различные случаи расположения точки $y = y_c$ на плоскости комплексного переменного y и в связи с этим выясняются асимптотические представления решений (4.30) и параллельно рассматриваются случаи, когда можно ограничиться решениями (4.23), не учитывая действия сил вязкости. В частности, показывается, что при расположении точки $y = y_c$ ниже действительной оси ($c_i < 0$) эффектом вязкости пренебрегать нельзя, как бы ни были велики числа Рейнольдса. Попутно доказывается ошибочность утверждения, что если $\varphi(y)$ есть решение уравнения (4.21) с собственным значением c , то сопряжённая функция $\bar{\varphi}(y)$ будет представлять второе решение, удовлетворяющее тем же действительным условиям на действительной оси и имеющее в качестве собственного значения \bar{c} , сопряжённое с первым c .

Чтобы получить какие-либо конкретные заключения о поведении разграничительной кривой (4.14), необходимо провести ряд упрощений вековых уравнений (4.16) и (4.18) для больших значений параметра αR . Проводя эти упрощения, Лин показывает, что разграничительная кривая (4.14) имеет две асимптоты при $R \rightarrow \infty$. Эти две асимптоты сливаются в одну ($\alpha = 0$), если профиль скоростей основного

потока не имеет точки перегиба. В результате своих подробных исследований Лин формулирует правила приближённого подсчёта наименьших значений критического числа Рейнольдса, за пределами которого может наступить неустойчивость ламинарного течения в указанном выше смысле. Прежде всего по заданному профилю распределения скоростей в потоке

$$u_1 = U w(\bar{y})$$

надо составить следующее уравнение:

$$\pi w'(0) \left\{ 3 - 2 \frac{w'(0) y_c}{w(y_c)} \right\} \frac{w(y_c) w''(y_c)}{w'^3(y_c)} = -0,58 \quad (4.37)$$

и решить его графически относительно y_c . Затем необходимо из уравнения

$$w(y_c) = c$$

найти соответствующее значение c . После этого определяется наименьшее значение критического числа Рейнольдса: для случая движения между параллельными стенками по формуле

$$R_{\min} \approx \frac{30 w'(0)}{c^3} \sqrt{\frac{w'(0) \int_0^{y_1} w^2(\bar{y}) dy}{c}}, \quad (4.38)$$

а для случая течения в пограничном слое — по формуле

$$R_{\min} \approx \frac{25 w'(0)}{c^4}. \quad (4.39)$$

Для случая ламинарного течения между параллельными стенками разграничительная кривая (4.14), отделяющая область неустойчивости (внутри) от области устойчивости, представлена на рис. 100. Минимальное значение критического числа Рейнольдса для этого случая равно

$$R_{\min} = \frac{Uh}{\nu} \approx 5314.$$

Для случая течения в пограничном слое разграничительная кривая представлена на рис. 101, а наименьшее значение критического числа Рейнольдса для пограничного слоя на пластинке равно

$$R_{\min} = \frac{Ux}{\nu} \approx \frac{520}{\delta_1} \approx 1800.$$

В работе Скэрмстед и Шубауэра¹⁾ приведены результаты измерений пульсации в пограничном слое и на основании этих из-

¹⁾ Skramstad and Schubauer, J. Aeronautical Sc., т. 14, № 2, 1947.

мерений были вычислены значения R и α , отвечающие началу потери устойчивости. Точки вычисленных значений R и α располагались достаточно близко к разграничительной кривой на рис. 101.

В заключение следует отметить, что применению метода теории колебаний к исследованию устойчивости ламинарного течения было

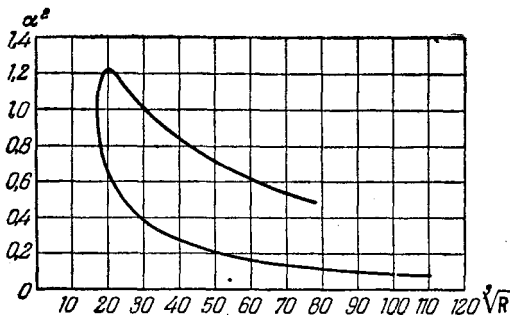


Рис. 100.

посвящено большое количество печатных статей в различных журналах. Однако только в последних статьях Лина ценой весьма сложных вычислений удалось методом малых колебаний обнаружить потерю устойчивости ламинарных течений между неподвижными

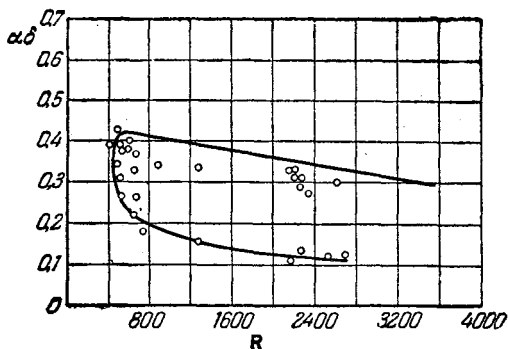


Рис. 101.

параллельными стенками и в пограничном слое при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Но потерю устойчивости ламинарных течений между параллельными стенками с прямолинейным профилем распределения скоростей и в цилиндрической трубе этим методом ещё не удалось обнаружить. Выполненные до сих пор

теоретические исследования устойчивости ламинарного течения в цилиндрической трубе сводятся пока только к одному заключению, что это течение устойчиво по отношению к достаточно малым возмущениям.

§ 5. Об устойчивости кругового движения между двумя бесконечными цилиндрами

В § 7 главы IV было рассмотрено установившееся круговое движение частиц вязкой несжимаемой жидкости. Для единственной компоненты скорости $v_{1\varphi}$ была получена формула

$$v_{1\varphi} = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (5.1)$$

Если рассматривать круговое движение между двумя вращающимися цилиндрами ($r=b$ и $r=a$), то на основании условий прилипания частиц жидкости к стенкам получим:

$$C_1 = \frac{a^2 \omega_2 - b^2 \omega_1}{a^2 - b^2}, \quad C_2 = \frac{b^2 \omega_1 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (5.2)$$

Будем теперь исследовать устойчивость кругового движения (5.1) с помощью метода малых колебаний. При этом будем предполагать, что поле возмущений является пространственным, но обладающим осевой симметрией. При этих предположениях для поля возмущений будут иметь место дифференциальные уравнения (2.16). Если в эти уравнения подставить выражение (5.1), то получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + 2 \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) v'_\varphi + \nu \left[\frac{\partial^2 v'_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v'_r}{\partial r} \right) - \frac{v'_r}{r^2} \right] &= \frac{\partial v'_r}{\partial t}, \\ -2C_1 v'_r + \nu \left[\frac{\partial^2 v'_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v'_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{v'_\varphi}{r^2} \right] &= \frac{\partial v'_\varphi}{\partial t}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) \right] &= \frac{\partial v'_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial (r v'_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r v'_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Потребуем, чтобы компоненты вектора скорости поля возмущений удовлетворяли условиям прилипания, т. е.

$$\text{при } r=b \text{ и } r=a \quad v'_r = 0, \quad v'_\varphi = 0, \quad v'_z = 0. \quad (5.4)$$

Таким образом, задача исследования устойчивости кругового движения сводится к решению системы уравнений (5.3) при граничных условиях (5.4).

Следуя методу малых колебаний, примем, что поле возмущений является периодическим по отношению к координате z и положим:

$$\left. \begin{aligned} v_r' &= u_1 \cos \lambda z e^{\beta t}, \\ v_\varphi' &= u_2 \cos \lambda z e^{\beta t}, \\ v_z' &= u_3 \sin \lambda z e^{\beta t}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где множители u_1 , u_2 и u_3 зависят только от одного переменного r . Подставляя (5.5) в уравнения (5.3) и исключая из них давление поля возмущений p' , получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_2}{dr} \right) - \frac{u_2}{r^2} - \lambda'^2 u_2 \right] &= 2C_1 u_1, \\ \frac{\nu}{\lambda} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_3}{dr} \right) - \lambda'^2 u_3 \right] &= -2 \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) u_2 - \\ &\quad - \nu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_1}{dr} \right) - \frac{u_1}{r^2} - \lambda'^2 \right], \\ \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r} + \lambda u_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где

$$\lambda'^2 = \lambda^2 + \frac{\beta^2}{\nu}. \quad (5.7)$$

При этом граничные условия (5.4) принимают вид:

$$\text{при } r=b \text{ и } r=a \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0. \quad (5.8)$$

Искомую функцию $u_1(r)$ представим в виде ряда Фурье — Бесселя

$$u_1(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z_1(k_m r), \quad (5.9)$$

где

$$Z_1(k_m r) = A_1 J_1(k_m r) + A_2 N_1(k_m r) \quad (5.10)$$

представляет собой цилиндрическую функцию общего вида. Постоянные A_1 и A_2 подобраны так, чтобы были выполнены граничные условия для u_1 , т. е.

$$\begin{aligned} A_1 J_1(k_m b) + A_2 N_1(k_m b) &= 0, \\ A_1 J_1(k_m a) + A_2 N_1(k_m a) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, множители k_m суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} J_1(k_m b) & N_1(k_m b) \\ J_1(k_m a) & N_1(k_m a) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

На основании теории рядов Фурье — Бесселя коэффициенты a_m будут представляться в виде

$$a_m = \frac{1}{H_m} \int_b^a r u_1(r) Z_1(k_m r) dr, \quad (5.12)$$

где

$$H_m = \int_b^a r Z_1^2(k_m r) dr.$$

Подставляя (5.9) в первое уравнение (5.6), получим:

$$\nu \left[\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + \lambda'^2 \right) u_2 \right] = 2C_1 \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z_1(k_m r). \quad (5.13)$$

Решение уравнения (5.13) без правой части представляет собой цилиндрическую функцию

$$Z_1(i\lambda' r) = A_3 J_1(i\lambda' r) + A_4 N_1(i\lambda' r),$$

где A_3 и A_4 — произвольные постоянные. Решение уравнения (5.13) с правой частью можно представить в виде ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m Z_1(k_m r),$$

коэффициенты которого могут быть определены после подстановки этого ряда в уравнение (5.12) в виде

$$b_m = - \frac{2C_1 a_m}{\nu(k_m^2 + \lambda'^2)}. \quad (5.14)$$

Таким образом, для функции u_2 мы получим:

$$u_2(r) = A_3 J_1(i\lambda' r) + A_4 N_1(i\lambda' r) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m Z_1(k_m r). \quad (5.15)$$

Так как функция (5.10) обращается в нуль на границах, то для удовлетворения граничных условий (5.8) для u_2 постоянные A_3 и A_4 необходимо положить равными нулю.

Обратимся теперь к уравнению (5.6) для u_3 . На основании рекуррентных формул имеем:

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dr} Z_0(kr) = - Z_1(kr).$$

Уравнению для u_3 без правой части

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_3}{dr} - \lambda'^2 u_3 \right] = 0$$

можно удовлетворить, полагая

$$u_3 = A_5 + A_6 J_0(\lambda' r) + A_7 N_0(\lambda' r).$$

Следовательно, общее решение второго уравнения (5.6) можно искать в виде

$$u_3(r) = A_5 + A_6 J_0(\lambda' r) + A_7 N_0(\lambda' r) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m Z_0(k_m r). \quad (5.16)$$

Подставляя (5.16), (5.15) и (5.9) во второе уравнение (5.6), получим следующее уравнение для определения постоянных d_m :

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m \frac{\nu k_m}{\lambda} (\lambda'^2 + k_m^2) Z_1(k_m r) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu (\lambda'^2 + k_m^2) a_m Z_1(k_m r) + 2 \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2C_1 a_m}{\nu (k_m^2 + \lambda'^2)} Z_1(k_m r). \quad (5.17)$$

Подставляя (5.16) и (5.9) в третье уравнение (5.6) и учитывая рекуррентное соотношение

$$Z_1'(x) = Z_0(x) - \frac{Z_1(x)}{x},$$

получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (k_m a_m + \lambda d_m) Z_0(k_m r) + \lambda \{ A_5 + A_6 J_0(\lambda' r) + A_7 N_0(\lambda' r) \} = 0. \quad (5.18)$$

К уравнениям (5.17) и (5.18) необходимо присоединить два уравнения, которые мы можем получить, удовлетворяя выражением (5.16) граничным условиям (5.8) для $u_3(r)$.

Дальнейшие вычисления, проведенные в работе Тэйлора¹⁾, приводят к бесконечной однородной системе уравнений для постоянных A_6 , A_7 и a_m . Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, получим характеристическое или вековое уравнение, связывающее величины β и $\lambda' = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\beta}{\nu}}$ с заданными параметрами задачи ω_1 , ω_2 , b и a . Подробный анализ этого уравнения проводится в цитированной работе Тэйлора в предположении, что разность радиусов цилиндров $a - b$ мала по сравнению с полусуммой $\frac{a+b}{2}$.

На основании этого анализа получается, что если цилиндры вращаются в одну сторону, то круговое движение жидкости будет всегда устойчивым при выполнении следующего неравенства:

$$\omega_1 b^2 < \omega_2 a^2. \quad (5.19)$$

¹⁾ Taylor G., Proc. Roy. Soc. (A), т. 223, 1923.

В работе Сайнджа ¹⁾ показано, что критерий устойчивости (5.19) можно доказать и не прибегая к предположению о малости разности радиусов цилиндров по сравнению с их полусуммой.

Если же неравенство (5.19) не выполняется, т. е. если

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} > \frac{a^2}{b^2} \quad (5.20)$$

или если концентрические цилиндры вращаются в разные стороны, то круговое движение частиц вязкой жидкости теряет свою устойчивость, как только число Рейнольдса (относящееся, например, к внешнему цилиндру, т. е. $R = \frac{a^2 \omega_2}{\nu}$) превысит своё критическое значение, достаточно близкое к значению, установленному из экспериментов.

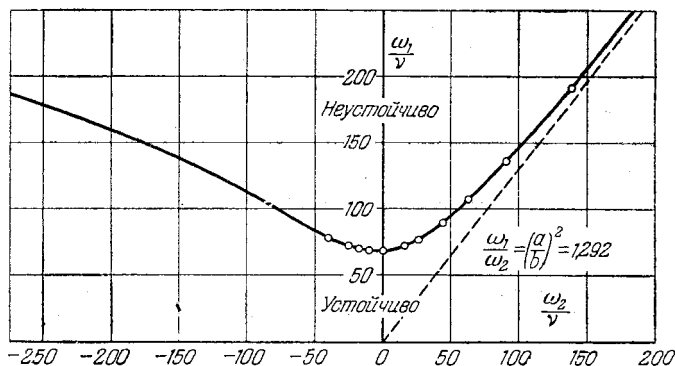


Рис. 102.

На рис. 102 представлена кривая, отделяющая область устойчивости кругового движения от области неустойчивости, подсчитанная в работе Тэйлора для случая, когда $b = 3,55$ см и $a = 4,035$ см, так что $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1,292$. По горизонтальной оси отложены значения $\frac{\omega_2}{\nu}$, а по вертикальной — $\frac{\omega_1}{\nu}$.

Если внешний цилиндр находится в покое, а внутренний вращается или оба цилиндра вращаются в одну сторону, то появление неустойчивости характеризуется образованием ряда вихрей в плоскости меридионального сечения, заполняющих всё пространство между поверхностями цилиндров, при этом направления вращений этих вихрей чередуются. Такое образование вихрей хорошо подтверждается экспериментально. Окрашенная жидкость, первоначально распределённая

¹⁾ S y n g e J., Proc. Roy. Soc. (A), London, т. 167, 1938.

в виде тонкого слоя по поверхности внутреннего цилиндра, впоследствии свёртывается в виде чередующихся колец, охватывающих центры вихрей.

Если цилиндры вращаются в разные стороны, то неустойчивость кругового движения жидкости проявляется в образовании двух рядов вихрей, из которых один, имеющий большую интенсивность, располагается вблизи внутреннего цилиндра, а второй — с меньшей интенсивностью — вблизи внешнего. В опытах окрашенная жидкость собиралась только вокруг вихрей с большей интенсивностью, а в области, примыкающей к внешнему цилиндру, вода оставалась прозрачной.

Места расположения центров вихрей, установленные на основании вычислений, очень хорошо подтверждены опытами; отклонения вычисленных значений критического числа Рейнольдса от соответственных опытных значений не превышают 2%.

§ 6. Об устойчивости движения взвешенной частицы в ламинарном потоке

Первые экспериментальные исследования Людвига и Гагена, послужившие основанием для постановки вопроса об устойчивости и неустойчивости ламинарного движения в цилиндрической трубке, были проведены с помощью наблюдений над движением примешанных к воде видимых частиц. Такими частицами в опытах Гагена были опилки тёмного янтара. В экспериментальных исследованиях Рейнольдса наблюдения проводились за поведением тонкой окрашенной струйки, вводимой в поток прозрачной жидкости.

Таким образом, при экспериментальных исследованиях производились лишь местные возмущения исследуемого ламинарного течения, а при теоретических исследованиях, рассмотренных в предыдущих параграфах, возмущения накладывались на всё течение в целом. В этом и заключаются расхождения между подходами в теории и в экспериментах. Поэтому всякая попытка приблизить подход в теории по вопросу об устойчивости ламинарного течения жидкости к тому подходу, который использовался в ряде экспериментов, может представлять известный интерес.

Рассмотрим движение частицы, введённой каким-либо образом в поток вязкой жидкости. Чтобы составить дифференциальные уравнения движения такой частицы, необходимо учесть, по возможности, все основные силы воздействия на частицу со стороны окружающей жидкости, находящейся в движении. Будем эти силы относить к единице объёма рассматриваемой частицы. К основным силам следует отнести, во-первых, силу веса за вычетом статической силы Архимеда

$$P = -g(\rho_1 - \rho)j, \quad (6.1)$$

где ρ_1 — плотность частицы, а j — единичный вектор вертикальной оси y . Во-вторых, силу сопротивления, пропорциональную в первом

приближении разности скоростей частицы и местной скорости потока

$$P_1 = -k_1(V - U), \quad (6.2)$$

где V — вектор скорости частицы, U — вектор местной скорости потока и k_1 — коэффициент сопротивления, который для шаровой частицы радиуса a будет равен

$$k_1 = \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2}. \quad (6.3)$$

Помимо этих двух сил, необходимо учесть и боковую силу. Дело в том, что благодаря непрерывному распределению вихрей в ламинарном потоке относительное обтекание потоком частицы будет всегда циркуляционным и, следовательно, всегда будет возникать боковая сила, пропорциональная по теореме Н. Е. Жуковского относительной скорости набегающего потока и циркуляции. При обтекании плоско-параллельным потоком круглого цилиндра длины l полная подъемная сила представляется в виде

$$\rho \Gamma V l,$$

а подъемная сила, приходящаяся на единицу объема цилиндра, будет равна

$$\rho V \frac{\Gamma}{S},$$

где Γ — циркуляция, V — скорость потока на достаточном удалении и S — площадь сечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующей. При применении этой теоремы Жуковского к обтеканию частицы мы принимаем за скорость набегающего потока разность скоростей $U - V$, за вектор присоединенного вихря — вектор вихря рассматриваемого потока $\text{rot } U$, за ΔS — сечение частицы той плоскостью, которая перпендикулярна к плоскости векторов $U - V$ и $\text{rot } U$, и, наконец, за величину циркуляции по контуру сечения ΔS мы можем принять согласно теореме Стокса поток вектора вихря через ΔS , т. е.

$$\Gamma = |\text{rot } U| \sin \widehat{(U - V), \text{rot } U} \Delta S.$$

Таким образом, боковую силу, приходящуюся на единицу объема частицы, можно представить в виде

$$P_2 = k_2 \rho (U - V) \times \text{rot } U, \quad (6.4)$$

где k_2 — безразмерный коэффициент, с помощью которого можно приближенно учесть необходимые поправки на те допущения, которые связаны с распространением теоремы Жуковского, применимой к плоско-параллельному обтеканию бесконечного цилиндра, на рассматриваемый случай пространственного обтекания частицы произвольной формы. Если к тому же учесть, что формула Жуковского о подъемной силе оправдывается экспериментально при малых углах

атаки обтекания продолговатых тел, а во всех других случаях эта подъёмная сила фактически оказывается меньше, чем по формуле Жуковского, то введённый коэффициент k_2 будет всегда меньше единицы.

Введённые силы (6.2) и (6.3) зависят от разностей скоростей частицы и потока в том месте, где частица находится, и они обращаются в нуль, если относительная скорость обращается в нуль. Однако нельзя думать, что в этом последнем случае рассматриваемая частица будет лишена всякого воздействия со стороны прилегающих частиц жидкости основного потока. Во всяком случае, воздействие окружающих частиц с помощью давления, представляющего собой результат молекулярных движений, должно сохраниться и при отсутствии относительной скорости движения частицы. Это воздействие на единицу объёма частиц со стороны поля давлений основного потока будет представляться в виде

$$P_3 = -\text{grad } p \quad (6.5)$$

и оно будет зависеть только от положения частицы в потоке, а не от разности скоростей частицы и потока. В силу последнего обстоятельства можно полагать, что это воздействие поля давлений на частицу должно учитываться и при относительном движении частицы, в особенности в тех случаях, когда это воздействие поля давлений не отражено в воздействиях сил (6.2) и (6.4).

Таким образом, векторное уравнение движения посторонней частицы в потоке жидкости будет представляться в виде

$$\rho_1 \frac{dV}{dt} = P + P_1 + P_2 + P_3. \quad (6.6)$$

Рассмотрим случай ламинарного течения между параллельными стенками с прямолинейным распределением скоростей по сечению, для которого

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{U_y}{h} i, \\ \text{rot } U &= -\frac{U}{k} k. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

В этом случае давление в основном потоке постоянно, т. е. $\text{grad } p = 0$. Проектируя уравнение (6.6) на оси координат и используя равенства (6.1), (6.2), (6.4) и (6.7), получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \frac{dV_x}{dt} &= k_1 \left(U \frac{y}{h} - V_x \right) + k_2 \rho \frac{U}{h} V_y, \\ \rho_1 \frac{dV_y}{dt} &= -g(\rho_1 - \rho) - k_1 V_y + k_2 \rho \frac{U}{h} \left(\frac{Uy}{h} - V_x \right), \\ \rho_1 \frac{dV_z}{dt} &= -k_1 V_z, \\ \frac{dy}{dt} &= V_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Если частица будет иметь плотность, одинаковую с плотностью жидкости, т. е. $\rho_1 = \rho$, то одно из возможных движений такой взвешенной частицы будет представляться равенствами

$$V_x = U \frac{y_0}{h}, \quad y = y_0, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0. \quad (6.9)$$

Для исследования устойчивости возможного движения (6.9) частицы введём новые переменные

$$x_1 = \frac{V_x}{U} - \frac{y_0}{h}, \quad x_2 = \frac{y}{h} - \frac{y_0}{h}, \quad x_3 = \frac{V_y}{U}, \quad \tau = \frac{Ut}{h}. \quad (6.10)$$

Тогда из (6.2) получим уравнения возмущённого движения частицы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= b(x_2 - x_1) + k_2 x_3, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -b x_3 + k_2(x_2 - x_1), \\ b &= \frac{k_1 h}{\rho U}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Характеристическое уравнение системы (6.11) будет иметь вид

$$\lambda(\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 + k_2^2 - k_2) = 0. \quad (6.12)$$

Так как при выполнении соотношения

$$b < \sqrt{k_2(1 - k_2)} \quad (6.13)$$

один из корней уравнения (6.12) может стать положительным, то возможное движение (6.9) взвешенной частицы может стать неустойчивым. Если ввести число Рейнольдса основного потока

$$R = \frac{Uh}{\nu} \quad (6.14)$$

и предполагать частицу в виде шара, т. е. использовать (6.3), то из соотношения (6.13) получим следующее неравенство для числа Рейнольдса:

$$R > \frac{9}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{k_2(1 - k_2)}}. \quad (6.15)$$

При выполнении неравенства (6.15) движение взвешенной шаровой частицы в потоке (6.7) будет заведомо неустойчивым.

Рассмотрим ламинарное течение между параллельными стенками с параболическим распределением скоростей по сечению, при котором

$$U = U_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) i, \quad \text{rot } U = 2U_m \frac{y}{h^2} k. \quad (6.16)$$

В этом случае основные уравнения движения взвешенной частицы будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dV_x}{dt} &= k_1 \left[U_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - V_x \right] - 2k_2 \rho \frac{y}{h^2} U_{\max} V_y, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} &= -k_1 V_y - 2k_2 \rho \frac{y}{h^2} \left[U_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - V_x \right] U_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Решения этой системы уравнений, отвечающие невозмущённому движению взвешенной частицы, будут иметь вид

$$V_x = U_{\max} \left(1 - \frac{y_0^2}{h^2} \right), \quad V_0 = 0, \quad y = y_0. \quad (6.18)$$

Составляя дифференциальные уравнения возмущённого движения частицы и ограничиваясь в них слагаемыми с неизвестными величинами в первой степени, получим характеристическое уравнение

$$\lambda \left[- \left(\lambda + \frac{k_1 h}{\rho U_{\max}} \right)^2 + 4 \frac{y_0^2}{h^2} k_2 (1 - k_2) \right] = 0. \quad (6.19)$$

Один из корней уравнений (6.19) будет положительным, если будет иметь место неравенство

$$2 \frac{|y_0|}{h} \sqrt{k_2 (1 - k_2)} > \frac{k_1 h}{\rho U_{\max}}. \quad (6.20)$$

Вводя число Рейнольдса

$$R = \frac{U_{\max} h}{\nu} \quad (6.21)$$

и предполагая частицу сферической, получим следующее неравенство для числа Рейнольдса:

$$R > \frac{9}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{h}{|y_0|} \frac{1}{\sqrt{k_2 (1 - k_2)}}. \quad (6.22)$$

При выполнении неравенства (6.22) движение шаровой взвешенной частицы в ламинарном потоке (6.16) будет заведомо неустойчивым.

Чтобы сделать заключения об условиях устойчивости движения взвешенной частицы, необходимо по методу А. М. Ляпунова провести дополнительные исследования в отношении нулевого корня уравнения (6.19) с учётом нелинейных слагаемых в уравнениях возмущённого движения частицы. При проведении этих исследований можно убедиться в том, что для обеспечения устойчивости движения шаровой частицы в ламинарном потоке можно знаки неравенств (6.15) и (6.22) изменить на обратные. Таким образом, движение взвешенной шаровой частицы в потоке (6.16) будет устойчивым, если для числа

Рейнольдса будет выполняться следующее неравенство:

$$R < \frac{9}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{h}{|y_0|} \frac{1}{\sqrt{k_2(1-k_2)}}. \quad (6.23)$$

Рассмотренные примеры показывают, что движение взвешенной частицы в ламинарном потоке может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от значения числа Рейнольдса потока. Следовательно, по исследованию устойчивости движения одной взвешенной частицы можно в какой-то мере судить об устойчивости всего потока в целом, как это и делалось в некоторых опытах. На основании неравенства (6.23) предельное значение числа Рейнольдса основного потока, при превышении которого должна наступить неустойчивость движения взвешенной частицы в потоке, будет определяться: 1) квадратом отношения характерного размера основного потока к характерному размеру частиц, 2) отношением характерного размера потока к расстоянию частицы от стенки в момент её ввода в поток и 3) внешней формой поверхности взвешенной частицы, влияние которой должно отражаться значениями коэффициентов сопротивления k_1 и подъёмной силы k_2 . Из этой формулы, в частности, следует, что для частиц большего размера неустойчивость наступает раньше, чем для частиц с меньшими размерами; для частиц, вводимых в поток ближе к стенке, неустойчивость наступает раньше, чем для частиц, вводимых ближе к средней линии ($y_0 = 0$).

ГЛАВА XII

ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 1. Два режима течения вязкой жидкости

В предшествующих главах изучались упорядоченные течения вязкой несжимаемой жидкости, которые получили название *ламинарных течений*. Общая особенность течений такого рода заключалась в том, что траектории всех частиц жидкости представляли собой плавные кривые, а поле скоростей и давлений было *непрерывным* как в отношении пространственных координат, так и в отношении времени. Для этих течений принималось, что внутреннее трение частиц жидкости подчиняется гипотезе Ньютона и что закономерности этих течений полностью могут быть изучены на основании полных дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости или приближённых уравнений, но полученных из полных с помощью отбрасывания отдельных слагаемых.

Ламинарное движение в трубке осуществляется при небольших перепадах давления, и по мере увеличения перепада давления характер течения жидкости может измениться. При движении жидкости при больших перепадах давления в трубке осуществляется особый режим течения, получивший позднее название *турбулентного*. Основная особенность турбулентного режима течения вязкой жидкости заключается в беспорядочном характере траекторий частиц жидкости и в наличии *бесперывных относительных перемещений частиц*, позднее названных *пульсациями*.

Турбулентный режим течения осуществляется не только за счёт больших перепадов давлений, но и за счёт больших размеров поперечных сечений труб или каналов. Закономерность для силы внутреннего трения при турбулентном режиме резко отличается от соответственной закономерности при ламинарном режиме. По вопросу о сопротивлении трения в работе Н. П. Петрова¹⁾ сказано: «Сен-Венан и Дарси заметили даже, что сопротивление трения (происходящего от увеличения путей, проходимых точками приложения

¹⁾ Петров Н. П., Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости, сборник «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, 1934.

сил трения) возрастает вместе с увеличением поперечного сечения канала. Буссинек, принимая это обстоятельство в соображение, вводит даже некоторый особый коэффициент трения, относящийся к некоторому несуществующему прямолинейному движению, заменяющему истинное движение воды в трубе или в канале. Этот коэффициент должен быть, конечно, больше действительного коэффициента трения, который следовало бы вводить, если бы умели принять в расчёт истинное движение струй воды. Оказывается, что и в самом деле он превосходил истинный коэффициент трения иногда во сто и более раз, смотря по поперечным измерениям струи, в которой развиваются различные пертурбации».

Упоминаемый в этом абзаце метод замены истинного беспорядочного движения частиц прямолинейным фиктивным движением основан на использовании особого математического приёма *осреднения*, который теперь получил широкое распространение при изучении турбулентного движения.

Более полное выяснение различия признаков ламинарного и турбулентного режимов течения жидкости и условий перехода течения из одного режима в другой было проведено в работе О. Рейнольдса¹⁾.

На основании результатов своих опытов с окрашенными струйками Рейнольдс показал, что ламинарный режим течения вязкой жидкости в цилиндрической трубе осуществляется только до тех пор, пока безразмерный параметр течения, названный позднее числом Рейнольдса, не будет превышать своего критического значения. Если же этот параметр превысит своё критическое значение, то течение вязкой жидкости из ламинарного режима внезапно, скачком переходит в турбулентный режим; при этом скачком меняется и зависимость коэффициента сопротивления от значений числа Рейнольдса.

Как уже указывалось в § 5 главы IV, различие ламинарного установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости и турбулентного установившегося (осреднённого) течения той же жидкости в цилиндрической трубе проводится обычно в отношении следующих необходимых признаков: 1) характера траекторий частиц, 2) профиля распределения скоростей по сечению, 3) соотношения между значениями средней и максимальной скоростей течения и 4) вида графика коэффициента сопротивления на логарифмической диаграмме. К необходимым признакам ламинарного режима течения в круглой цилиндрической трубе относятся: 1) прямолинейность траекторий отдельных частиц, 2) параболический профиль распределения скоростей по поперечному сечению, 3) превышение максимальной скорости над средней вдвое и 4) прямолинейный график зависимости логарифма коэффициента сопротивления

¹⁾ Reynolds O., Phil. Trans. of the Roy. Soc., 1883.

трубы $\left(\lambda = \frac{a \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|}{\rho u_{cp}^2}\right)$ от логарифма числа Рейнольдса $\left(R = \frac{au_{cp}}{\nu}\right)$.

Для турбулентного режима течения вязкой жидкости в цилиндрической трубе соответственными необходимыми признаками будут: 1) извилистый и неупорядоченный характер траекторий отдельных частиц, 2) почти равномерное распределение осреднённых скоростей по поперечному сечению, но с резким уменьшением их до нуля в тонком слое вблизи стенки, 3) превышение максимальной скорости над средней имеет порядок 10—20% и 4) график зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса представляется кривой с медленно убывающим наклоном. Как показано на рис. 31, при переходе через критическое значение числа Рейнольдса коэффициент сопротивления трубы увеличивается скачком, а затем медленно уменьшается с увеличением числа Рейнольдса.

Как уже отмечалось раньше, необходимые признаки ламинарного течения в круглой трубе установлены не только на основании результатов опытов, но и на основании результатов решения дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с удовлетворением граничным условиям прилипания частиц жидкости к стенкам. Что же касается перечисленных необходимых признаков турбулентного движения в трубе, то они пока установлены только на основании экспериментальных наблюдений и измерений. Среди исследователей, занимающихся вопросами течений жидкости, широко распространено мнение, что указанные признаки турбулентного режима течения в трубе нельзя получить в результате решения краевой задачи на базе общих дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, в основе которых лежит гипотеза Ньютона о силе вязкости и гипотеза о сплошности среды и непрерывности изменений скоростей частиц. Извилистый и неупорядоченный характер траекторий отдельных частиц побудил ряд исследователей отказаться от непосредственного использования дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости для изучения турбулентных течений и стать на путь видоизменения этих уравнений с помощью математического метода осреднения ряда величин и введения в связи с этим методом новых неизвестных величин.

Из всего сказанного выше следует, что существование двух принципиально различных режимов течения вязкой жидкости экспериментально было обнаружено первоначально для труб и каналов. Но затем вследствие того, что вычисленные на основании теории ламинарного пограничного слоя значения силы сопротивления трения не совпадали с экспериментальными данными, пришлось сделать предположение о том, что и в пограничном слое могут осуществляться два режима течения. Это предположение было впоследствии полностью оправдано совпадением результатов многих вычислений с результатами экспериментов. Кроме того,

введение в рассмотрение турбулентного пограничного слоя позволило объяснить обнаруженный Эйфелем факт внезапного падения сопротивления шара при переходе скорости обтекания через определённое значение. Объяснение этого явления было дано в 1914 г. Прандтлем. Он показал, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному в пограничном слое раньше всего может произойти вблизи точки отрыва, и с момента перехода ламинарного течения в турбулентное точка отрыва слоя от поверхности тела отодвигается назад, что и приводит к резкому уменьшению ширины вихревой области позади тела. Таким образом, явление «кризиса сопротивления» объясняется сдвигом точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Если число Рейнольдса R не превышает значения $1,5 \cdot 10^5$, то переход ламинарного слоя в турбулентный происходит только после отрыва этого слоя от поверхности тела. По мере приближения значения числа Рейнольдса к критическому точка перехода ламинарного слоя в турбулентный приближается к поверхности тела, и как только эта точка окажется на самой поверхности тела, точка отрыва пограничного слоя внезапно смещается к точке перехода ламинарного режима в турбулентный, и в результате обтекание тела внешним потоком улучшается. Критическое значение числа Рейнольдса $R = \frac{Ul}{\nu}$ (где U — скорость потока на большом удалении от тела, а l — длина пограничного слоя) зависит от степени возмущений основного потока. Для весьма спокойного потока критическое значение числа Рейнольдса имеет порядок $3 \cdot 10^5$, но по мере роста возмущений в основном потоке значения критического числа R уменьшаются. Таким образом, нельзя непосредственно сравнивать значения критических чисел Рейнольдса для трубы и для внешнего потока. Однако если число Рейнольдса определять не по длине пограничного слоя, а по толщине слоя или по толщине вытеснения, то по своему порядку величин критическое значение числа Рейнольдса для внешнего потока и для пограничного слоя близко к критическому значению R для трубы.

Турбулентное движение жидкости является наиболее распространённым движением в природе и технике. Движение воды в реках и в трубах, движение газа в трубах, движение воздуха в атмосфере и многие другие движения жидкости и газа преимущественно являются турбулентными. Турбулентное движение жидкости сопровождается интенсивным перемешиванием частиц и интенсивным обменом между частицами теми качествами, которыми наделены эти частицы (концентрация раствора, тепло и количество движения). Следовательно, там, где выравнивание концентрации раствора или тепла или количества движения необходимо произвести в более короткие сроки, там, очевидно, турбулентность потока будет представлять собой положительный фактор. Что же

касается сопротивления жидкости движению тела, то в одних случаях наличие турбулентности в потоке или в пограничном слое может привести к увеличению сопротивления, а в других — к уменьшению. Как уже было выше указано, особенно резко проявляется влияние турбулентности на величину сопротивления в первые моменты образования турбулентности, причём в момент перехода ламинарного течения в турбулентное в трубе коэффициент сопротивления резко увеличивается, а в момент перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое при внешнем обтекании тела коэффициент сопротивления резко уменьшается.

Основным методом изучения закономерностей турбулентного движения ещё и до сих пор служит экспериментальный метод; различные теории турбулентности играют пока лишь вспомогательную роль. В предшествующих главах было показано, что отдельные случаи ламинарных течений могут быть изучены с помощью решения соответственных краевых задач либо на основе точных уравнений движения вязкой жидкости, либо на основе приближённых уравнений, полученных из точных с помощью отбрасывания групп отдельных слагаемых. При этом решения задач включали в себе коэффициент вязкости жидкости и параметры самой задачи и не содержали в себе какие-либо произвольные постоянные, за определением которых необходимо было обращаться к отдельным опытам, воспроизводящим рассматриваемую задачу. Существующие же теории турбулентности ещё не позволяют отдельные случаи турбулентных движений изучать с помощью решения краевых задач на основе каких-либо дифференциальных уравнений.

В теоретических изысканиях по вопросу о турбулентном движении жидкости можно обнаружить три направления. В работах первого направления исследование ограничивается только составлением общих дифференциальных уравнений турбулентного движения и общим указанием возможности уравнивать число уравнений и соотношений с числом неизвестных. В работах второго направления изучается внутренняя структура турбулентных течений. Наиболее многочисленны и плодотворны по своим результатам работы третьего направления, в которых сами теоретические изыскания элементарны и ограничены весьма частными предположениями, но доведены до конкретных результатов, согласующихся с результатами измерений при соответственном выборе значений некоторых постоянных. Благодаря теории подобия введённые постоянные могут носить в известных рамках универсальный характер, т. е. результаты решений одной группы задач могут быть перенесены с теми же значениями постоянных на другие группы при условии выполнения критерия подобия течений. Работы третьего направления составляют так называемые полуэмпирические теории турбулентности.

§ 2. Метод осреднения

Для изучения турбулентного движения жидкости широко используется метод осреднения не только отдельных кинематических и динамических характеристик движения, но и ряда уравнений. Напомним некоторые положения теоретической механики, которые до некоторой степени могут служить исходными механическими основаниями для использования метода осреднения.

Рассмотрим некоторую систему дискретно расположенных материальных точек. Положение точки этой системы с массой m_k относительно некоторой инерциальной системы будет определяться радиусом-вектором \mathbf{r}_k . Радиус-вектор центра масс C этой системы точек будет представляться в виде

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k}, \quad (2.1)$$

где n — число точек. Движение системы точек можно рассматривать как составное, состоящее из переносного поступательного движения, совпадающего с движением какой-либо точки, выбранной за полюс O , и совокупности относительных движений всех отдельных точек системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с полюсом, т. е.

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}'_k, \quad (2.2)$$

где \mathbf{V}_k — вектор скорости точки с массой m_k по отношению к инерциальной системе, \mathbf{V}_O — вектор скорости полюса O по отношению к той же системе координат и \mathbf{V}'_k — вектор скорости относительного движения рассматриваемой точки по отношению к системе, движущейся поступательно вместе с полюсом. Главный вектор количеств движения системы и кинетическая энергия системы при этом будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_O \sum_{k=1}^{k=n} m_k + \sum_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{V}'_k, \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} m_k V_k^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[V_O^2 \sum_{k=1}^{k=n} m_k + 2V_O \sum_{k=1}^{k=n} m_k V'_k \cos(\widehat{V'_k V_O}) + \sum_{k=1}^{k=n} m_k V'^2_k \right]. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

Таким образом, кинетическую энергию движения системы относительно инерциальной системы отсчёта нельзя составлять как сумму кинетических энергий отдельных движений системы при произвольном выборе полюса. Но если за полюс выбрать центр масс системы материальных точек и положить:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_k, \quad (2.4)$$

где \mathbf{r}'_k — радиус-вектор точки с массой m_k , с началом его в центре масс, то при подстановке (2.4) в (2.1) получим:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{r}'_k = 0, \quad (2.5)$$

а после дифференцирования по времени (2.5) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{V}'_k = 0. \quad (2.6)$$

Полученное равенство (2.6) означает, что главный вектор количеств относительных движений всех точек рассматриваемой системы по отношению к её центру масс равен нулю. Учитывая (2.6), получим из (2.3):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_C &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{V}_k}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k}, \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \left[V_C^2 \sum_{k=1}^{k=n} m_k + \sum_{k=1}^{k=n} m_k V_k'^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Таким образом, при выборе за полюс центра масс системы кинетическую энергию общего движения системы можно представлять как сумму кинетических энергий отдельных составляющих движений этой системы.

Приведённые выше положения из теоретической механики можно истолковать несколько иначе. Операции суммирования в (2.6) и (2.7) можно рассматривать как операции *осреднения по массам* точек рассматриваемой системы. Тогда поступательное переносное движение системы точек со скоростью \mathbf{V}_C можно рассматривать как *осреднённое движение* системы точек, а совокупность относительных движений точек системы по отношению к системе координат, перемещающейся вместе с центром масс поступательно, как совокупность *пульсационных движений* отдельных точек системы по отношению к осреднённому движению системы. При таком толковании

отдельных движений вектор V_C будет представлять собой вектор скорости *осреднённого движения* системы, а вектор V'_k — вектор скорости *пульсационного движения* рассматриваемой точки с массой m_k . При этом осреднённое значение вектора скорости пульсационного движения на основании (2.6) равно нулю. Если операцию осреднения в указанном выше смысле обозначать чертой сверху, то первое равенство (2.7) и равенство (2.6) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_k &= V_C, \\ \bar{V}'_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Выделим теперь из системы точек подсистему из n_1 точек ($n_1 \ll n$). Положение центра масс этой подсистемы точек по отношению к центру масс всей системы будет определяться равенством

$$r'_{C_1} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n_1} m_k r'_k}{\sum_{k=1} m_k}.$$

Полагая

$$r'_k = r'_{C_1} + r''_k, \quad (2.9)$$

где r''_k — радиус-вектор точки подсистемы с началом в центре масс этой же подсистемы, получим:

$$\sum_{k=1}^{k=n_1} m_k r''_k = 0. \quad (2.10)$$

Вектор скорости пульсационного движения точки подсистемы можно представить как сумму вектора скорости движения центра масс подсистемы и вектора скорости вторичного пульсационного движения рассматриваемой точки по отношению к первичному осреднённому пульсационному движению подсистемы, т. е.

$$V'_k = V'_{C_1} + V''_k. \quad (2.11)$$

Для осреднённого значения скорости вторичного пульсационного движения получим из (2.10) после дифференцирования:

$$\sum_{k=1}^{k=n_1} m_k V''_k = 0. \quad (2.12)$$

Проводя осреднение равенства (2.11) по массам точек подсистемы, получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}'_k &= V'_{C_1}, \\ \bar{V}''_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

При сопоставлении равенств (2.8) и (2.13) мы приходим к заключению, что результат осреднения существенно зависит от того, проводится это осреднение по всей системе точек или по отдельной подсистеме точек.

Разумеется, операцию разбиения системы на подразделения, содержащие всё меньшее и меньшее количество материальных точек, можно продолжать и далее. Следовательно, наряду с первичным пульсационным движением точек системы можно вводить в рассмотрение вторичные пульсационные движения точек отдельных подсистем всей системы, третичные пульсационные движения точек дальнейших подразделений подсистем и т. д.

От дискретной системы материальных точек перейдем теперь к сплошной среде. При этом переходе мы должны ввести в рассмотрение плотность среды ρ , элементарный объем $d\tau = dx' dy' dz'$, где x' , y' , z' — координаты элементарного объема по отношению к системе координат с началом в центре фиксированного объема τ , координаты центра объема τ по отношению к инерциальной системе отсчета x , y и z и операцию суммирования заменить операцией интегрирования. Выбор объема τ предопределяет выбор координат его центра x , y , z , но ещё не предопределяет выбора текущих координат x' , y' , z' , поэтому обе группы координат можно рассматривать как две группы независимых переменных. Для точек, находящихся внутри объема τ , вектор истинной скорости необходимо рассматривать как функцию от всех шести указанных координат, т. е.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z; x', y', z', t).$$

Вектор же скорости осреднённого движения частиц в объеме τ будет функцией от координат центра объема и времени, т. е.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z, t).$$

Операции *осреднения* при этом определяются следующим образом:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) \equiv$$

$$\equiv \bar{\mathbf{V}}(x, y, z, t) = \frac{\iiint_{\tau} \rho \mathbf{V}(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz'}{\iiint_{\tau} \rho dx' dy' dz'}. \quad (2.14)$$

Поле скоростей в объеме τ будет состояться из поля равных скоростей *осреднённого* движения и дополнительного поля переменных скоростей, называемого полем *пульсаций*. При этом вектор скорости поля *пульсаций* определяется как разность вектора истинной скорости и вектора скорости осреднённого движения, т. е.

$$\mathbf{V}'(x, y, z; x', y', z', t) = \mathbf{V}(x, y, z; x', y', z', t) - \mathbf{U}(x, y, z, t). \quad (2.15)$$

Если провести операцию осреднения над обеими частями равенства (2.15) и использовать (2.14), то получим:

$$\overline{\mathbf{V}'} = 0, \quad (2.16)$$

т. е. *осреднённое значение вектора скорости поля пульсаций в фиксированном объёме τ равно нулю.*

Операция осреднения (2.14) имеет тот же механический смысл, что и операция выделения из движения системы материальных точек переносного движения вместе с центром масс системы, и равенство (2.16) при этом выполняется строго.

Будем теперь плотность среды считать постоянной в пределах рассматриваемого объёма τ , т. е.

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \quad (2.17)$$

Тогда из операции осреднения (2.14), имеющей определённый механический смысл, мы получим чисто математическую операцию *осреднения по объёму*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, y, z, t) &\equiv \overline{\mathbf{V}}(x, y, z, t) = \\ &= \frac{1}{\tau} \int \int \int_{\tau} \mathbf{V}(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Такого рода математическую операцию осреднения по объёму можно теперь проводить по всем величинам, связанным с каждой точкой объёма осреднения, и даже по тем соотношениям и уравнениям, которые должны выполняться для каждой точки в объёме τ . Следовательно, наряду с вектором *скорости осреднённого движения* \mathbf{U} можно ввести *осреднённое давление* \overline{p} , *тензор осреднённых напряжений* $\overline{\mathbf{p}}_x, \overline{\mathbf{p}}_y, \overline{\mathbf{p}}_z$, *осреднённую температуру* \overline{T} с помощью следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \overline{p}(x, y, z, t) &= \frac{1}{\tau} \int \int \int_{\tau} p(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz', \\ \overline{\mathbf{p}}_x(x, y, z, t) &= \frac{1}{\tau} \int \int \int_{\tau} \mathbf{p}_x(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz', \\ \overline{\mathbf{p}}_y(x, y, z, t) &= \frac{1}{\tau} \int \int \int_{\tau} \mathbf{p}_y(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz', \\ \overline{\mathbf{p}}_z(x, y, z, t) &= \frac{1}{\tau} \int \int \int_{\tau} \mathbf{p}_z(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz', \\ \overline{T}(x, y, z, t) &= \frac{1}{\tau} \int \int \int_{\tau} T(x, y, z; x', y', z', t) dx' dy' dz'. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

В таком случае под *пульсациями давления, тензора напряжений и температуры* следует понимать величины, представляемые в виде следующих разностей:

$$\left. \begin{aligned} p'(x, y, z; x', y', z', t) &= p(x, y, z; x', y', z', t) - \bar{p}(x, y, z, t), \\ p'_x(x, y, z; x', y', z', t) &= p_x(x, y, z; x', y', z', t) - \bar{p}_x(x, y, z, t), \\ p'_y(x, y, z; x', y', z', t) &= p_y(x, y, z; x', y', z', t) - \bar{p}_y(x, y, z, t), \\ p'_z(x, y, z; x', y', z', t) &= p_z(x, y, z; x', y', z', t) - \bar{p}_z(x, y, z, t), \\ T'(x, y, z; x', y', z', t) &= T(x, y, z; x', y', z', t) - \bar{T}(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} (2.20)$$

Проводя осреднение по объёму всех равенств (2.20) и используя (2.19), получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}' &= 0, \\ \bar{p}'_x &= 0, \quad \bar{p}'_y = 0, \quad \bar{p}'_z = 0, \\ \bar{T}' &= 0. \end{aligned} \right\} (2.21)$$

Наряду с математической операцией осреднения по объёму можно ввести также формально математическую операцию *осреднения по времени*. Обозначим величину фиксированного интервала времени осреднения через Δt , и пусть центр этого интервала времени совпадает с фиксированным произвольным моментом времени t . Тогда под *осреднёнными значениями вектора скорости и, например, давления* в центре объёма с координатами x , y и z необходимо понимать величины, представленные в виде следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}(x, y, z, t) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} V(x, y, z, t; t') dt', \\ \bar{p}(x, y, z, t) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} p(x, y, z, t; t') dt'. \end{aligned} \right\} (2.22)$$

Пульсации вектора скорости и давления по отношению ко времени в фиксированной точке с координатами x , y и z будут представляться в виде разностей

$$\left. \begin{aligned} V'(x, y, z, t; t') &= V(x, y, z, t; t') - \bar{V}(x, y, z, t), \\ p'(x, y, z, t; t') &= p(x, y, z, t; t') - \bar{p}(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} (2.23)$$

Если провести осреднение по времени равенств (2.23) и учесть (2.22), то получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}' &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} V'(x, y, z, t; t') dt' = 0, \\ \bar{p}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Таким образом, осреднённые по времени значения пульсаций всех кинематических и динамических характеристик движения среды равны нулю.

Наконец, формально математические операции осреднения по объёму и по времени можно объединить и под вектором скорости осреднённого движения частиц в фиксированном объёме τ и в фиксированном интервале времени Δt понимать вектор, представляемый в виде

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &\equiv \bar{V}(x, y, z, t) = \\ &= \frac{1}{\tau \Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt' \int_{\tau} \int \int V(x, y, z; x', y', z', t; t') dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Вектор скорости поля пульсаций в какой-либо точке внутри объёма τ и в какой-либо момент времени внутри интервала времени Δt будет представляться в виде разности

$$\begin{aligned} V'(x, y, z; x', y', z', t; t') &= \\ &= V(x, y, z; x', y', z', t; t') - U(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Проводя осреднение (2.26) и по объёму и по времени в смысле (2.25), снова получим, что осреднённое значение вектора скорости поля пульсаций равно нулю:

$$\begin{aligned} \bar{V}'(x, y, z; x', y', z', t; t') &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{\tau \Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt' \int_{\tau} \int \int V'(x, y, z; x', y', z', t; t') dx' dy' dz' = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

До сих пор мы проводили осреднение самих величин или разностей величин, отнесённых к одной и той же точке внутри фиксированного объёма и к одному и тому же моменту времени внутри фиксированного интервала времени. Покажем теперь, как должно проводиться осреднение произведений двух величин, отнесённых к одной

точке и к одному моменту времени. В качестве примера возьмём произведение проекции вектора скорости на ось x на сам вектор скорости

$$u(x, y, z; x', y', z', t; t') V(x, y, z; x', y', z', t; t').$$

Заменяя каждый множитель через сумму его осреднённого значения и пульсационного значения, получим:

$$uV = [U_x(x, y, z, t) + u'(x, y, z; x', y', z', t; t')] \times \\ \times [U(x, y, z, t) + V'(x, y, z; x', y', z', t; t')]. \quad (2.28)$$

Если провести осреднение левой и правой частей равенства (2.28) по объёму и по времени в смысле (2.25) и при этом учесть (2.27), то для осреднённого значения произведения uV , отнесённого к центру объёма τ и к середине интервала времени Δt , получим следующее выражение:

$$\overline{uV} = U_x U + \overline{u'V'}. \quad (2.29)$$

Обратим внимание на то, что все *осреднённые значения должны относиться к центру фиксированного объёма и к середине фиксированного интервала времени.*

Теперь мы должны уточнить вопрос о выборе фиксированного объёма τ и фиксированного интервала времени Δt . Можно, например, фиксированный объём τ выбрать с помощью мысленного разбиения конечного объёма, занятого средой, на меньшие и не накладывающиеся друг на друга объёмы τ . Точно так же фиксированный интервал времени Δt можно выбрать с помощью деления конечного промежутка времени на меньшие и не перекрывающиеся друг друга интервалы Δt . При таком выборе фиксированного объёма и фиксированного интервала времени операция осреднения будет означать переход от непрерывного отсчёта геометрических координат к дискретному отсчёту координат точек, совпадающих с центрами фиксированных объёмов, и переход от непрерывного отсчёта времени к счёту его через интервал времени Δt . При таком выборе объёма τ и интервала времени Δt осреднённые значения кинематических и динамических характеристик движения среды будут неизбежно претерпевать разрыв при переходе от одного центра объёма к другому и от одного центра интервала времени к другому. Порядок величин разрыва осреднённых значений будет находиться в прямой пропорциональности от порядка величин фиксированного объёма τ и фиксированного интервала времени Δt . Следовательно, из восьми независимых аргументов, указанных, например, в равенстве (2.28), только четыре: x', y', z' и t' , во всех случаях *можно изменять непрерывно* в тех пределах, которые предопределяются выбором фиксированного объёма τ и фиксированного интервала времени Δt . Только по отношению этих аргументов можно ставить вопрос о непрерывности и дифференцируемости отдельных слагаемых в равенстве (2.26) и аналогичных равенствах для других кинематических и динамических характеристик движения среды. Что же касается аргументов x, y, z и t , то вопрос о том, можно ли этим переменным придавать непрерывные значения или необходимо придавать только разрывные значения, решается в зависимости от того, как осуществляется переход от одного фиксированного объёма к прилежащему другому объёму и от одного фиксированного интервала

к другому прилежащему или близкому интервалу времени. Если этот переход по каким-либо основаниям должен происходить без какого-либо *пересечения* нового объема со старым и без какого-либо *перекрывтия* нового интервала времени со старым, то этим переменным придется придавать только *разрывные значения*. В этом случае нельзя говорить о непрерывности и дифференцируемости отдельных слагаемых в равенстве (2.26) по отношению к переменным x , y , z и t . По отношению к этим переменным можно составлять только конечные разности кинематических и динамических характеристик движения среды и интегрирование заменять суммированием в смысле теории конечных разностей. Естественно поставить вопрос, можно ли привести пример, когда переход от одного фиксированного объема к другому обязательно должен производиться без пересечения. Во всех тех случаях, в которых возникает необходимость вводить в рассмотрение макроскопические частицы среды, объемы которых не могут уменьшаться беспредельно до нуля, переход от объема одной фиксированной частицы к объему соседней частицы, разумеется, не может происходить так, чтобы объем соседней частицы налагался на объем рассматриваемой частицы. Чтобы вести речь о макроскопической частице, сохраняющей в себе основные качества среды и своей индивидуальности хотя бы в течение короткого интервала времени Δt , конечно, необходимо за соседние частицы принимать только частицы, объемы которых не перекрывают объем рассматриваемой частицы. Таким образом, для определения кинематических характеристик движения частицы (вихрь и тензор скоростей деформаций) дифференцирование проекций вектора скорости должно производиться только по относительным координатам x' , y' и z' .

Но, как известно, для изучения ряда вопросов кинематики движения среды, за исключением вопроса об ускорении частицы, можно не переходить на точку зрения метода Лагранжа и оставаться постоянно на точке зрения метода Эйлера, позволяющего изучать поле скоростей. При изучении поля скоростей движения среды по методу Эйлера математическая операция осреднения, например в смысле (2.25), вводится для того, чтобы произвести *сглаживание* вводимых кинематических и динамических характеристик движения среды. При турбулентном движении жидкости скорость и давление в каждой точке пространства претерпевают скачкообразные изменения от одного момента времени к другому и при переходе от одной точки поля к другой. Сама по себе операция осреднения (2.25) позволяет только по скачкообразным значениям вектора скорости в пределах фиксированного объема τ и фиксированного интервала времени Δt получить некоторое значение вектора скорости, которое мы относим к центру объема и к центру интервала времени. Эффект же сглаживания мы можем получить лишь тогда, когда эта операция осреднения будет осуществляться при непрерывном сдвиге центров фиксированного объема τ и фиксированного интервала времени Δt . В этом случае каждый следующий фиксированный объем будет обязательно налагаться на предшествующий в своей большей части и каждый следующий интервал времени будет перекрывать не полностью предшествующий интервал времени. Таким образом, математическая операция осреднения в данном случае позволяет перейти от полей векторных и скалярных величин, скачкообразно меняющихся во времени и в пространстве, к полям тех же величин, но изменяющихся достаточно плавно во времени и в пространстве. Однако этот переход должен компенсироваться введением в рассмотрение дополнительных местных полей (с размерами фиксированного объема осреднения) пульсирующих соответственных величин, причём эти пульсации изменяются скачкообразно во времени и в пространстве. С помощью операции осреднения поле, например, вектора скорости истинного движения жидкости в некотором конечном объеме, намного превышающем объем осреднения τ , заменяется двойным полем, составленным из поля вектора осреднённой скорости, занимающего весь конечный объем, и из накладывающихся частично друг

на друга полей пульсаций вектора скорости в окрестности каждой геометрической точки.

Ещё раз обратим внимание на то, что операция осреднения (2.25) может быть проведена над теми величинами и соотношениями, которые могут быть отнесены к каждой точке внутри объёма осреднения и к каждому моменту времени внутри интервала времени осреднения.

Рассмотрим теперь разность двух векторов скоростей. Возможны два подхода к определению этой разности. При первом подходе рассматриваются два вектора скорости в двух точках фиксированного объёма осреднения и в два момента времени внутри фиксированного интервала времени осреднения, но при этом центр фиксированного объёма осреднения остаётся одним и тем же (координаты x , y и z — одни и те же для двух векторов скоростей) и центр фиксированного интервала времени осреднения остаётся тем же самым (момент t берётся одним и тем же). Если в качестве первой точки четырёхмерного пространства мы возьмём центр фиксированного четырёхмерного объёма осреднения, а вторую точку в этом же фиксированном объёме возьмём с относительными четырёхмерными координатами x' , y' , z' и t' , то разность векторов скоростей представится в виде

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(x, y, z, t; x', y', z', t') - \mathbf{V}(x, y, z, t; 0, 0, 0, 0). \quad (2.30)$$

Заменяя каждый из векторов (2.30) суммой вектора скорости $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ осреднённого движения и соответственного вектора скорости пульсационного движения, получим:

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}'(x, y, z, t; x', y', z', t') - \mathbf{V}'(x, y, z, t; 0, 0, 0, 0), \quad (2.31)$$

т. е. разность скоростей истинного движения в двух точках четырёхмерного пространства равна разности скоростей общего пульсационного движения в фиксированном четырёхмерном объёме осреднения. Поскольку разность (2.31) может относиться к каждой точке четырёхмерного объёма осреднения, постольку можно провести осреднение этой разности в смысле (2.25). Выполнив фактически осреднение над каждым отдельным слагаемым в левой и правой части (2.31) только в смысле (2.25) и используя при этом (2.26) и (2.27), получим:

$$\overline{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1} = -\mathbf{V}'(x, y, z, t; 0, 0, 0, 0). \quad (2.32)$$

Таким образом, осреднённое строго в смысле (2.25) значение разности скоростей в двух точках фиксированного четырёхмерного объёма осреднения представляет собой с обратным знаком вектор скорости пульсаций в центре объёма осреднения.

Обратимся ко второму способу определения разности двух векторов скоростей. Вводим два фиксированных четырёхмерных объёма, центры которых совпадают как раз с теми точками четырёхмерного пространства, к которым относятся два рассматриваемых вектора скорости движения среды, и вводим две системы координат с началами в этих центрах. Тогда разность (2.30) представится в виде

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(x + x', y + y', z + z', t + t'; 0, 0, 0, 0) - \mathbf{V}(x, y, z, t; 0, 0, 0, 0). \quad (2.33)$$

Если заменить каждый из векторов в правой части (2.33) через сумму соответственных векторов скоростей осреднённого и пульсационного движений, то получим:

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{U}(x + x', y + y', z + z', t + t') - \mathbf{U}(x, y, z, t) + \mathbf{V}'(x + x', y + y', z + z', t + t'; 0, 0, 0, 0) - \mathbf{V}'(x, y, z, t; 0, 0, 0, 0). \quad (2.34)$$

Таким образом, в этом случае разность скоростей истинного движения в двух рассматриваемых точках четырёхмерного пространства не будет равна разности скоростей пульсационных движений в окрестности этих точек. Умножая обе части равенства (2.34) на элементарный объём четырёхмерного пространства $dt' dx' dy' dz'$ и проводя интегрирование по четырёхмерному объёму с центром в точке x, y, z и t , получим:

$$\begin{aligned} \overline{V_2 - V_1} = & \frac{1}{\tau \Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt' \int_{\tau} \int \int U(x + x', y + y', z + z', t + t') + \\ & + V'(x + x', y + y', z + z', t + t'; 0, 0, 0, 0) dx' dy' dz' - \\ & - U(x, y, z, t) - V'(x, y, z, t; 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Интеграл от скорости пульсаций в текущей точке формально не совпадает с тем интегралом, который по определению осреднения обращается в нуль:

$$\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt'' \int_{\tau} \int \int V'(x + x', y + y', z + z', t + t'; x'', y'', z'') dx'' dy'' dz'' = 0. \quad (2.36)$$

Поскольку левые части и последние слагаемые в правых частях равенств (2.31) и (2.34) равны между собой, то получаем следующее соотношение между векторами скоростей пульсаций в одной и той же точке четырёхмерного пространства, но введённых двумя различными способами:

$$\begin{aligned} V'(x, y, z, t; x', y', z', t') = & U(x + x', y + y', z + z', t + t') + \\ & + V'(x + x', y + y', z + z', t + t'; 0, 0, 0, 0) - U(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

После проведения операции осреднения с помощью перекрывающихся объёмов осреднения вектор скорости осреднённого движения можно полагать дифференцируемым по всем переменным и поэтому

$$\begin{aligned} U(x + x', y + y', z + z', t + t') - U(x, y, z, t) = \\ = x' \frac{\partial U}{\partial x} + y' \frac{\partial U}{\partial y} + z' \frac{\partial U}{\partial z} + t' \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{x'^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для центра объёма осреднения должны выполняться равенства

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau} \int \int x' dx' dy' dz' = 0, & \quad \int_{\tau} \int \int y' dx' dy' dz' = 0, \\ \int_{\tau} \int \int z' dx' dy' dz' = 0, & \quad \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} t' dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Если провести осредненные равенства (2.37) в смысле (2.25) и учесть (2.27), (2.38), (2.39), то получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta t \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \int \int \int x'^2 dx' dy' dz' + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \int y'^2 d\tau + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \int z'^2 d\tau \right] + \\ & \quad + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} t'^2 dt' \frac{\tau}{2} + \dots + \\ & + \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt' \int \int \int V'(x + x', y + y', z + z', t + t'; 0, 0, 0, 0) dx' dy' dz' = 0. \quad (2.40) \end{aligned}$$

На основании равенства (2.40) приходим к заключению, что осреднённое по первому объёму осреднения значение вектора скорости пульсаций во второй точке может считаться равным нулю тогда, когда все производные от вектора скорости осреднённого движения, начиная со вторых, равны нулю. На это обстоятельство и было обращено внимание ещё в основной работе О. Рейнольдса¹⁾, где перечислены те случаи осреднённых движений, в которых осреднённое значение вектора скорости пульсаций во второй точке внутри первого объёма осреднения строго равно нулю.

Допустим, что в отношении, например, координаты x векторы скорости истинного движения и пульсационного движения являются дифференцируемыми функциями. В этом случае можно обе части равенств (2.31) и (2.34) разделить на приращение x' и перейти к пределу. Тогда получим два выражения для первой производной от вектора скорости истинного движения в центре первого фиксированного объёма осреднения:

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial x'}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial x}. \quad (2.42)$$

Левые части равенств (2.41) и (2.42) представляют одну и ту же величину. Различие же правых частей снова указывает на различие величин скоростей пульсаций в зависимости от того, считается ли осреднённое движение в пределах фиксированного объёма осреднения одним и тем же или оно выбирается для каждой точки этого объёма особо. Только при использовании скользящего объёма осреднения производная по какой-либо координате или времени от той или иной характеристики потока может быть представлена в виде суммы производных от осреднённого и пульсационного значения этой характеристики. Иначе говоря, в этом случае можно производить разложение той или иной величины на осреднённую и пульсационную под знаком производной. Вопрос о возможности перестановок операций осреднения и дифференцирования может ставиться только тогда, когда предполагается, что не только сами величины, но и их производные также непрерывны.

¹⁾ Reynolds O., Phil. Trans. of the Roy. Soc., 1895; русский перевод в сборнике «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

При этих дополнительных предположениях можно выполнять дифференцирование по параметрам под знаками интегралов в равенствах (2.25), (2.27) и (2.36). Только в этих случаях осреднённое значение производной от динамической или кинематической характеристики потока равно нулю строго для центра объёма осреднения и приближённо для другой точки в этом объёме, т. е.

$$\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt' \int_{\tau} \int \int \frac{\partial \bar{V}'(x, y, z, t; x', y', z', t')}{\partial x} dx' dy' dz' = 0, \quad (2.43)$$

$$\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt' \int_{\tau} \int \int \frac{\partial \bar{V}'(x + x', y + y', z + z', t + t'; 0, 0, 0)}{\partial x} dx' dy' dz' \approx 0. \quad (2.44)$$

Таким образом, результаты осреднения существенно зависят от того, как производится переход от одного фиксированного четырёхмерного объёма осреднения к соседнему. При втором описанном выше переходе центры фиксированных объёмов осреднения могут быть взяты как угодно близко друг от друга, но зато каждый новый объём будет обязательно налагаться на предшествующий. Первое обстоятельство обеспечивает сглаживание функций, т. е. получение непрерывных полей осреднённых величин. Второе же обстоятельство может создавать помехи к применению тех законов механики, которые относятся к взаимодействию фиксированных частиц среды.

Наконец, следует сделать замечание ещё и относительно самих размеров фиксированных объёмов осреднения. Если не налагать никаких дополнительных требований, то размеры четырёхмерных объёмов осреднения могут быть как угодно большими и как угодно малыми. Если не исключать случаев конечных разрывов скоростей истинного движения среды в ряде точек фиксированного четырёхмерного объёма осреднения, то с помощью уменьшения размеров объёма осреднения значение отношения модуля скорости пульсации в точке разрыва скоростей к модулю скорости осреднённого движения можно несколько уменьшить, но при этом возрастает отношение модулей пульсаций к модулям скоростей осреднённого движения в точках по соседству с точками разрыва скоростей истинного движения среды. Таким образом, малость размеров объёма осреднения ещё не предопределяет собой малость относительных величин пульсаций, если под последними подразумевать только разность истинного значения соответственной характеристики потока и её осреднённого значения в рассматриваемой точке внутри фиксированного объёма осреднения. Если четырёхмерные объёмы осреднения выбирать не налагающимися друг на друга, то с помощью уменьшения размеров этого объёма можно уменьшать отношение модуля разности значений осреднённых величин в центрах двух примыкающих друг к другу объёмов осреднения к модулю одной из них. Благодаря этому обстоятельству, например, дискретное поле скоростей можно считать достаточно близким к непрерывному полю скоростей. Если же объёмы осреднения будут налагаться друг на друга, то непрерывность поля осреднённых скоростей будет обеспечиваться независимо от размеров объёма осреднения непрерывным сдвигом центра объёма, но при этом с увеличением размеров объёма осреднения могут, вообще говоря, увеличиваться модули максимальных скоростей пульсаций и будут увеличиваться размеры тех областей по-

тока, примыкающих к его границам, в которых осреднение с помощью этого объёма проводить нельзя.

Во всех случаях по мере приближения к границам потока объёмы осреднения должны уменьшаться для того, чтобы получать осреднённые величины для точек вблизи границы.

Обратимся теперь к вопросу об осреднении с точки зрения возможностей эксперимента. Во-первых, как бы малы ни были размеры приёмной части прибора, с помощью которого определяется скорость или давление, всё равно прибор регистрирует осреднённое значение этой величины, причём осреднение этим прибором производится одновременно и по объёму и по времени. Во-вторых, каждому данному прибору присущ свой фиксированный объём осреднения, и его варьировать нельзя. Что же касается интервала времени осреднения, то его можно варьировать в сторону больших интервалов времени, превышающих время срабатывания одного измерения. Таким образом, здесь представляется возможность определять пульсацию измеряемой величины в виде разности показания одного измерения и вычисленного осреднённого за некоторый интервал времени значения. Следовательно, в этом случае имеют место два осреднения: одно из них проводится самим прибором по объёму и времени, а второе проводится экспериментатором по времени по отношению к показаниям прибора. При наличии двух приборов или двух приспособлений, позволяющих без особых помех измерять скорость в двух точках, достаточно близких друг от друга, можно составлять разности показаний приборов, отнесённых к одному и тому же моменту времени. Эти разности можно осреднять только по времени. Если обозначить мгновенные показания прибора через V_1 и V_2 , осреднённые значения этих показаний — через U_1 и U_2 , а пульсации — через V'_1 и V'_2 , то будем иметь:

$$U_1(x, y, z, t) = \bar{V}_1 = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} V_1(x, y, z, t+t') dt',$$

$$V_1(x, y, z, t+t') = U_1 + V'_1(x, y, z, t+t'),$$

$$\bar{V}'_1 = 0,$$

$$U_2(x+x', y+y', z+z', t) = \bar{V}_2;$$

$$\begin{aligned} V_2(x+x', y+y', z+z', t+t') &= \\ &= U_2 + V'_2(x+x', y+y', z+z', t+t'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= U_2(x+x', y+y', z+z', t) - U_1(x, y, z, t) + \\ &+ V'_2(x+x', y+y', z+z', t+t') - V'_1(x, y, z, t+t'). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Если выполнить осреднение по времени обеих частей выражения (2.45) для разности мгновенных показаний и учесть предшествующие равенства, то получим:

$$\overline{V_2 - V_1} = U_2(x + x', y + y', z + z', t) - U_1(x, y, z, t). \quad (2.46)$$

Таким образом, *среднее значение разности измеренных скоростей в двух близких точках области течения равно разности осреднённых по времени измеренных скоростей в этих же точках.*

На основании того, что сказано выше, можно придти к заключению, что определение пульсаций скорости или давления *во времени* и проведение осреднения измеряемых величин *по времени* сравнительно просто могут быть осуществлены при экспериментировании, например, с помощью термоанемометра с некоторыми приспособлениями. Что же касается пульсаций скорости или давления в *пространстве*, то для их определения надо измерить скорость или давление *одновременно* почти во всех точках внутри некоторого объёма, что осуществить без искажения самого течения пока не представляется возможным. В этом случае приходится довольствоваться *одновременными* измерениями в небольшом числе точек, на основании которых можно найти лишь приближённое значение *осреднённой по объёму* измеренной величины. Составляя разность измеренной величины в какой-либо геометрической точке и вычисленного осреднённого по объёму значения этой величины, можно получить *пульсацию рассматриваемой величины в пространстве.*

То обстоятельство, что экспериментально проще проводить осреднение измеряемых величин по времени, служит некоторым основанием к тому, чтобы и в вычислениях ограничиваться только осреднением по времени. Во всех последующих параграфах осреднение будет проводиться только по времени.

§ 3. Дифференциальные уравнения осреднённого движения жидкости

Как уже было указано в § 1, турбулентное движение жидкости характеризуется неупорядоченностью траекторий отдельных частиц, наличием пульсаций скоростей и давлений во времени и интенсивным обменом всеми качествами между соседними областями течения. Всё это создаёт весьма большие трудности для теоретического изучения закономерностей турбулентного движения жидкости. Первая попытка теоретического подхода к изучению турбулентного движения жидкости была предпринята О. Рейнольдсом в цитированной выше работе. Им были установлены дифференциальные уравнения осреднённого движения жидкости и введён в рассмотрение тензор пульсационных напряжений.

В качестве исходной гипотезы принимаем, что и *при турбулентном характере движения среды дифференциальные уравнения переноса массы ((1.9) гл. II) и количества движения ((2.13) гл. II) остаются справедливыми*. Если к тому же жидкость считать несжимаемой, то при этой гипотезе дифференциальные уравнения *полного турбулентного движения* представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} &= \rho F + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_x - \rho u V) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_y - \rho v V) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_z - \rho w V), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Вводим теперь операцию осреднения *по времени*, полагая, например,

$$U(x, y, z, t) = \bar{V}(x, y, z, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} V(x, y, z, t+t') dt'. \quad (3.2)$$

Выполняем затем операцию разложения всех входящих в уравнения (3.1) величин, кроме массовых сил, на осреднённые по времени значения и пульсации

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, z, t+t') &= U(x, y, z, t) + V'(x, y, z, t+t'), \\ \rho_x(x, y, z, t+t') &= \bar{\rho}_x(x, y, z, t) + \rho'_x(x, y, z, t+t'). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

На основании определения осреднения (3.2) осреднённые значения как самих пульсаций величин, так и их произведений на осреднённые значения других величин будут обращаться в нуль, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}' &= 0, \quad \bar{u}' = 0, \quad \bar{\rho}'_x = 0, \\ \overline{U_x V'} &= U_x \bar{V}' = 0, \quad \overline{u' U} = \bar{u}' U = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Самый факт использования уравнений (3.1) означает, что все величины предполагаются непрерывными и дифференцируемыми по всем переменным, а поэтому можно операции дифференцирования по параметрам в (3.2) выполнять под знаком интеграла. Иначе говоря, операции дифференцирования по геометрическим координатам и операция осреднения по времени могут переставляться. В силу этого будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u V)} &= \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho u V}), \\ \overline{\frac{\partial \rho_x}{\partial x}} &= \frac{\partial \bar{\rho}_x}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Обе группы полученных уравнений (3.8) и (3.9) в явной форме указывают на то, что между осреднённым и пульсационным движением несжимаемой жидкости имеет место сложное взаимодействие. Сопоставляя правую часть первого уравнения (3.8) с правой частью первого уравнения (3.1), мы видим, что воздействие пульсационного движения на осреднённое движение жидкости эквивалентно воздействию дополнительного тензора напряжений, который получил название *тензора пульсационных напряжений*. Тензор пульсационных напряжений состоит из трёх векторов:

$$-\overline{\rho u' V'}, \quad -\overline{\rho v' V'}, \quad -\overline{\rho w' V'}, \quad (3.10)$$

представляющих собой *осреднённые по времени векторы потоков количеств движения* (отнесённых к единице площади и к единице времени) *от пульсационного движения жидкости через три взаимно перпендикулярные площадки*, проведённые в произвольной точке внутри объёма с жидкостью. Если спроектировать векторы (3.10) на оси координат, то тензор пульсационных напряжений можно представить в виде следующей таблицы девяти компонент:

$$(P) \equiv \begin{Bmatrix} -\overline{\rho u' u'} & -\overline{\rho u' v'} & -\overline{\rho u' w'} \\ -\overline{\rho v' u'} & -\overline{\rho v' v'} & -\overline{\rho v' w'} \\ -\overline{\rho w' u'} & -\overline{\rho w' v'} & -\overline{\rho w' w'} \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

В дифференциальные уравнения (3.8) входят три вектора осреднённого по времени тензора напряжений $\overline{p_x}$, $\overline{p_y}$ и $\overline{p_z}$. Для установления связи этого тензора напряжения с вектором скорости осреднённого движения используется вторая гипотеза, согласно которой *линейное соотношение между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций остаётся справедливым и при турбулентном движении*, т. е. для полного турбулентного движения имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), & p_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Если провести разложение всех величин в (3.12) на осреднённые и пульсационные значения, а затем провести осреднение (3.12) по времени, то получим соотношения для осреднённых компонент

напряжения

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{xx} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial U_x}{\partial x}, & \bar{p}_{yy} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial U_y}{\partial y}, \\ \bar{p}_{zz} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\ \bar{p}_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right), & \bar{p}_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right), \\ \bar{p}_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Составляя разности соответственных равенств (3.12) и (3.13), получим выражения для компонент пульсаций напряжения

$$\left. \begin{aligned} p'_{xx} &= -p' + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x}, & p'_{yy} &= -p' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y}, \\ p'_{zz} &= -p' + 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ p'_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right), & p'_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right), \\ p'_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Если спроектировать левую и правую части первого уравнения (3.8) на оси координат, а затем подставить значения компонент осреднённого напряжения из (3.13), то получим следующие *дифференциальные уравнения осреднённого движения несжимаемой жидкости*:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) &= \\ &= \rho F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta U_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) &= \\ &= \rho F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta U_y + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) &= \\ &= \rho F_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta U_z + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

где P_{xx} , P_{xy} и т. д. — компоненты пульсационных напряжений, представленные в явной форме в таблице (3.11).

Дифференциальные уравнения осреднённого движения (3.15) содержат десять неизвестных функций, к которым, помимо трёх компонент вектора скорости и давления, относятся и шесть компонент тензора пульсационных напряжений. Чтобы систему уравнений (3.15) сделать замкнутой, необходимо присоединить дополнительные соотношения, связывающие неизвестные функции. Такие дополнительные соотношения можно, конечно, составить только с помощью тех или иных гипотез, правильность которых в ограниченных пределах может быть установлена только косвенным путём, например с помощью сравнения результатов расчёта для частных задач с результатами соответственных измерений. Последним обстоятельством и следует объяснить тот факт, что первые попытки введения дополнительных соотношений между неизвестными функциями в уравнениях (3.16) относятся как раз к наиболее простейшему случаю осреднённого движения, каковым является прямолинейное движение между неподвижными параллельными стенками. Закономерности установившегося турбулентного движения в цилиндрической трубе, как уже было указано выше, хорошо были изучены экспериментально. Имеется много косвенных оснований к тому, чтобы считать закономерности установившегося турбулентного движения между неподвижными стенками достаточно близкими к закономерностям турбулентного движения в трубе. А раз это так, то естественно было вначале ввести дополнительные соотношения между неизвестными величинами для прямолинейного осреднённого движения между параллельными стенками, провести соответственные расчёты и затем сравнить результаты этих расчётов с результатами измерений. По этому пути и развивались некоторые теории, которые получили название *полуэмпирических теорий турбулентности*.

Компоненты тензора пульсационных напряжений (3.11) составлены из проекций вектора скорости пульсации в одной точке потока. Если ввести в рассмотрение проекции двух векторов скоростей пульсации в двух точках потока, то можно образовать из них группу парных произведений и затем их осреднить по времени. Таким путём мы получим новый тензор, который получил название *тензора моментов связи второго порядка*

$$\Phi_{ij} = \overline{v'_i v''_j},$$

где v'_1, v'_2 и v'_3 — проекции вектора скорости пульсации в одной точке, а v''_1, v''_2 и v''_3 — проекции вектора скорости пульсации во второй точке. Аналогичным путём можно составить группу моментов связи между пульсационными скоростями третьего порядка

$$\Pi_{ijk} = \overline{v'_i v'_j v''_k}.$$

Дифференциальные уравнения турбулентного движения с использованием моментов связи различных порядков были предложены

впервые А. А. Фридманом и Л. В. Келлером ¹⁾). С введением моментов связи увеличивается количество неизвестных функций, и количество соответственных уравнений и выравнивание числа уравнений с числом неизвестных функций могут быть произведены с помощью отбрасывания моментов высших порядков, как это, например, сделано в работе М. Д. Миллионщикова ²⁾).

Наконец, имеются отдельные статьи, в которых для теории турбулентных движений используются статистические методы. Наиболее успешно в этом направлении развита теория турбулентности в работах А. Н. Колмогорова ³⁾, А. М. Обухова ⁴⁾, Л. Г. Лойцянского ⁵⁾ и др.

В статьях В. Г. Невзглядова ⁶⁾ была сделана попытка ввести дополнительные соотношения по аналогии с (3.13) между тензором пульсационных напряжений и тензором скоростей деформаций от осреднённого движения с той лишь разницей, что вместо постоянного коэффициента вязкости вводится *переменный коэффициент турбулентного объёма*, зависящий в общем случае от инвариантов тензора скоростей деформации.

§ 4. Теоремы о рассеянии энергии для турбулентного движения

Внутри области, занятой жидкостью в турбулентном движении, возьмём конечный объём τ с ограничивающей поверхностью S . Для кинетических энергий полного движения, осреднённого движения и пульсационного движения жидкости в конечном объёме τ будем иметь выражения

$$2T = \rho \int \int \int_{\tau} V^2 d\tau, \quad (4.1)$$

$$2T_{cp} = \rho \int \int \int_{\tau} U^2 d\tau, \quad (4.2)$$

$$2T_{п} = \rho \int \int \int_{\tau} V'^2 d\tau. \quad (4.3)$$

Подставляя в правую часть (4.1) выражение квадрата скорости в виде

$$V^2 = (U_x + u')^2 + (U_y + v')^2 + (U_z + w')^2$$

¹⁾ Келлер Л. и Фридман А., Proc. I. Intern. Congr. Applied Mech., Delft, 1924.

²⁾ Миллионщиков М. Д., Известия АН СССР, сер. геогр. и геол., № 4—5, 1941.

³⁾ Колмогоров А. Н., ДАН СССР, т. XXXII, № 1, 1941; т. XXXI, № 6, 1941; т. XXX, № 4, 1941; т. 52, № 8, 1946 и др.

⁴⁾ Обухов А. М., Прикл. матем. и мех., т. VI, вып. 2—3, 1942; Механика в СССР за тридцать лет, Гостехиздат, 1950. Там же приведена библиография советских работ по турбулентности.

⁵⁾ Лойцянский Л. Г., Труды ЦАГИ, вып. 440, 1939.

⁶⁾ Невзглядов В. Г., ДАН СССР, т. 57, № 3, 1945.

и проводя затем осреднение по времени, получим:

$$\bar{T} = T_{\text{cp}} + \bar{T}_n, \quad (4.4)$$

т. е. осреднённое значение кинетической энергии полного движения жидкости в конечном объёме равно сумме кинетической энергии осреднённого движения жидкости и осреднённого значения кинетической энергии пульсационного движения жидкости в том же объёме.

Элементарная работа массовых сил на перемещениях полного и осреднённого движения жидкости будет представляться соответственно в виде

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= \rho \int \int \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\tau dt, \\ (dA_1)_{\text{cp}} &= \rho \int \int \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} d\tau dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Для элементарных работ векторов напряжений, распределённых по поверхности S , получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} dA_2 &= \int \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{V} dS dt, \\ (dA_2)_{\text{cp}} &= \int \int_S \bar{\mathbf{p}}_n \cdot \mathbf{U} dS dt, \\ dA_3 &= \int \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{U} dS dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

В § 2 главы III была доказана теорема о рассеянии энергии

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{dt} \left[dA_1 + dA_2 - \int \int \int_{\tau} E d\tau dt \right], \quad (4.7)$$

где E — энергия, которая рассеивается в единице объёма в единицу времени и выражается через напряжения в виде

$$E = \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}. \quad (4.8)$$

Разлагая векторы напряжений и скорости в (4.8) на осреднённые и пульсационные значения и вводя обозначения

$$E_{\text{cp}} = \bar{\mathbf{p}}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \bar{\mathbf{p}}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \bar{\mathbf{p}}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}, \quad (4.9)$$

$$E_n = \mathbf{p}'_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial x} + \mathbf{p}'_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial y} + \mathbf{p}'_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial z}, \quad (4.10)$$

после осреднения по времени (4.8) получим:

$$\bar{E} = E_{\text{op}} + \bar{E}_{\text{п}}, \quad (4.11)$$

т. е. осреднённое значение энергии, рассеиваемой от напряжений в полном движении жидкости, составляется из энергии, рассеиваемой от осреднённых напряжений в осреднённом движении, и осреднённого значения энергии, рассеиваемой от пульсаций напряжений в пульсационном движении.

Докажем теперь теорему о рассеянии энергии для осреднённого движения жидкости. Для этого первое дифференциальное уравнение (3.8) представим в виде

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho F + \frac{\partial(\bar{p}_x + P_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{p}_y + P_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{p}_z + P_z)}{\partial z}, \quad (4.12)$$

где производная по времени в левой части равна

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U_x \frac{\partial U}{\partial x} + U_y \frac{\partial U}{\partial y} + U_z \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.13)$$

Обе части равенства (4.12) умножим скалярно на $U d\tau dt$ и проведём интегрирование по объёму

$$\begin{aligned} \rho \int \int \int U \cdot dU d\tau = \rho \int \int \int F \cdot U d\tau dt + \\ + \int \int \int U \cdot \left[\frac{\partial(\bar{p}_x + P_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{p}_y + P_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{p}_z + P_z)}{\partial z} \right] d\tau dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если считать, что объём τ будет перемещаться вместе с частицами жидкости, то в левой части (4.14) знак дифференцирования можно вынести за знак интеграла и воспользоваться обозначением (4.2). Представляя векторы напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} в виде

$$\begin{aligned} \bar{p}_n &= \bar{p}_x l + \bar{p}_y m + \bar{p}_z n, \\ P_n &= P_x l + P_y m + P_z n \end{aligned}$$

и используя формулу преобразования поверхностного интеграла в объёмный, получим из (4.6) выражения для элементарных работ

$$(dA_2)_{\text{op}} = dt \int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_x \cdot U) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_y \cdot U) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_z \cdot U) \right] d\tau,$$

$$dA_3 = dt \int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (P_x \cdot U) + \frac{\partial}{\partial y} (P_y \cdot U) + \frac{\partial}{\partial z} (P_z \cdot U) \right] d\tau.$$

Сопоставляя эти выражения с правой частью (4.14) и используя обозначения (4.5), (4.9), получим:

$$\frac{dT_{\text{cp}}}{dt} = \frac{1}{dt} \left[(dA_1)_{\text{cp}} + (dA_2)_{\text{cp}} + (dA_3)_{\text{cp}} - \int \int \int E_{\text{cp}} d\tau dt - \int \int \int \left(P_x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + P_y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + P_z \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau dt \right]. \quad (4.15)$$

Равенство (4.15) выражает собой *теорему об изменении кинетической энергии осреднённого движения жидкости*, содержащейся в конечном объёме. На основании этого равенства мы приходим к заключению, что не вся работа напряжений, распределённых на поверхности S , идёт на изменение кинетической энергии осреднённого движения жидкости внутри этой поверхности; часть этой работы переходит в энергию пульсационного движения и в теплоту. Выражение под знаком интеграла в последнем слагаемом в правой части (4.15) представляет собой энергию, рассеянную от пульсационных напряжений в единицу времени в единице объёма в осреднённом движении жидкости. Для этой энергии рассеяния введём отдельное обозначение

$$\psi = P_x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + P_y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + P_z \cdot \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.16)$$

Введём в рассмотрение элементарную работу пульсаций напряжений на перемещениях в пульсационном движении жидкости, т. е.

$$\begin{aligned} dA_4 &= dt \int \int_S \mathbf{p}'_n \cdot \mathbf{V}' dS = \\ &= dt \int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}'_x \cdot \mathbf{V}') + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}'_y \cdot \mathbf{V}') + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}'_z \cdot \mathbf{V}') \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если в правой части первого равенства (4.6) провести разложение вектора напряжения и вектора скорости на осреднённые и пульсационные значения и затем провести осреднение по времени, то получим:

$$\overline{dA_2} = (dA_2)_{\text{cp}} + \overline{dA_4}. \quad (4.18)$$

Проведём теперь осреднение обеих частей равенства (4.7) и при этом учтём (4.4), (4.18), (4.11) и то, что

$$\overline{dA_1} = (dA_1)_{\text{cp}}.$$

В результате получим следующее равенство:

$$d(T_{\text{cp}} + \overline{T_n}) = (dA_1)_{\text{cp}} + (dA_2)_{\text{cp}} + \overline{dA_4} - \int \int \int (E_{\text{cp}} + \overline{E_n}) d\tau dt. \quad (4.19)$$

Это равенство выражает собой *теорему об изменении осреднённого значения кинетической энергии полного движения жидкости в конечном объёме*.

Составляя разность соответственных частей равенств (4.19) и (4.15), получим равенство

$$d\bar{T}_\pi = dA_3 - d\bar{A}_4 + \int \int \int (\psi - \bar{E}_\pi) d\tau dt, \quad (4.20)$$

выражающее собой *теорему об изменении осреднённого значения кинетической энергии пульсационного движения жидкости в конечном объёме*.

Рассмотрим теперь случай движения жидкости внутри неподвижной поверхности S_π . В этом случае элементарные работы dA_3 и $d\bar{A}_4$ будут обращаться в нули, и поэтому теорема об изменении осреднённой кинетической энергии пульсационного движения жидкости представится равенством

$$(d\bar{T}_\pi)_{S_\pi} = - \int \int \int (\bar{E}_\pi - \psi) d\tau dt. \quad (4.21)$$

Подставляя в правую часть равенства (4.10) значения пульсаций напряжений из (3.14), получим следующее выражение для осреднённого значения энергии рассеяния в пульсационном движении жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\pi = \rho \left[2 \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2} + \right. \\ \left. + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2} \right]. \quad (4.22) \end{aligned}$$

Если развернуть правую часть равенства (4.16), то будем иметь выражение для энергии рассеяния от пульсационных напряжений

$$\begin{aligned} \psi = -\rho \left[\overline{u'u'} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \overline{v'v'} \frac{\partial U_y}{\partial y} + \overline{w'w'} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \overline{u'v'} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \overline{v'w'} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \overline{w'u'} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \right]. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Сопоставляя выражения (4.22) и (4.23), мы видим, что энергия рассеяния от вязких напряжений в пульсационном движении всегда положительна, тогда как энергия рассеяния от пульсационных напряжений может быть как положительной, так и отрицательной.

Это возможное различие знаков энергий рассеяния E_π и ψ позволяет сделать некоторые качественные заключения об изменении осреднённой кинетической энергии пульсационного движения жидкости внутри неподвижной поверхности на основании равенства (4.21). Во-первых,

если полная энергия рассеяния от пульсационных напряжений во всём объёме будет отрицательной, т. е.

$$\iiint_{\tau} \psi d\tau < 0,$$

то осреднённая кинетическая энергия пульсационного движения в рассматриваемом объёме будет со временем убывать. Следовательно, для возрастания осреднённой кинетической энергии пульсационного движения необходимо, но ещё недостаточно, чтобы вся энергия рассеяния от пульсационных напряжений во всём объёме оказалась положительной, т. е.

$$\iiint_{\tau} \psi d\tau > 0. \quad (4.24)$$

При выполнении необходимого условия (4.24) возрастание осреднённой кинетической энергии пульсационного движения внутри неподвижной поверхности может быть тогда и только тогда, когда отношение полной энергии рассеяния от пульсационных напряжений к полной энергии рассеяния от вязких напряжений будет больше единицы, т. е.

$$\lambda = \frac{|\iiint_{\tau} \psi d\tau|}{\iiint_{\tau} E_{\Pi} d\tau} > 1. \quad (4.25)$$

Если обратить внимание на правые части равенств (4.22) и (4.23), то можно заметить, что 1) изменение знака вектора скорости пульсаций на обратный, т. е. замена u' , v' и w' на $-u'$, $-v'$ и $-w'$, не изменяет величины отношения энергий рассеяния (4.25) и 2) умножение вектора скорости пульсаций во всех точках на постоянный множитель также не изменяет отношения (4.25). Это значит, что знак λ нельзя изменить ни изменением знака вектора скорости пульсаций во всех точках внутри объёма, ни умножением вектора скорости пульсаций во всех точках внутри объёма на одно и то же число, и если при данном распределении вектора скорости пульсаций в рассматриваемом объёме осреднённая кинетическая энергия пульсационного движения убывала, то увеличением величины вектора скорости пульсаций во всех точках в одно и то же число раз нельзя получить вместо убывания возрастание осреднённой кинетической энергии пульсационного движения жидкости. Совершенно иным образом сказывается на изменении отношения λ равномерное изменение вектора скорости осреднённого движения жидкости в конечном объёме с неподвижной поверхностью. Если при данном распределении вектора скорости пульсации и вектора скорости осреднённого движения в объёме будет происходить уменьшение осреднённой энергии пульсационного движения жидкости, то

с помощью увеличения вектора скорости осреднённого движения во всех точках на одно и то же число можно добиться выполнения неравенства (4.25) и, следовательно, вместо убывания получить возрастание осреднённой энергии пульсационного движения жидкости в рассматриваемом объёме. Последнее обстоятельство и служит доказательством того положения, что существует критическое значение скорости осреднённого движения жидкости в конечном объёме с неподвижной поверхностью в том смысле, что возрастание осреднённой кинетической энергии пульсационного движения в этом объёме может происходить только тогда, когда вектор скорости осреднённого движения будет превышать указанное критическое значение.

Однако существование критического значения только для скорости осреднённого движения жидкости ещё не означает, что пульсационное движение совершенно не сказывается на самой возможности перехода от убывания осреднённой кинетической энергии пульсационного движения к её возрастанию. Дело в том, что если распределение вектора скорости осреднённого движения жидкости в объёме с неподвижной поверхностью оставить неизменным, а распределение вектора скорости пульсаций в том же объёме изменять, то на основании вида правой части (4.23) можно заключить, что для одной группы распределений вектора скорости пульсаций неравенство (4.24) может быть выполнено, а для другой — оно не может быть выполнено. Таким образом, существование критической скорости осреднённого движения жидкости в указанном выше смысле возможно только при тех распределениях вектора скорости пульсаций, для которых будет выполнено неравенство (4.24).

Если ввести характерную скорость U_0 и характерный размер L , то размерности энергий рассеяния \bar{E}_n и ψ из (4.22) и (4.23) будут:

$$\left. \begin{aligned} [E_n] &= \left[\mu \frac{U_0^2}{L^2} \right], \\ [\psi] &= \left[\rho \frac{U_0^3}{L} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

На основании сказанного выше при выполнении неравенства (4.24) критическая скорость осреднённого движения жидкости должна определяться из следующего равенства:

$$\frac{\int \int \int_{\tau} \psi \, d\tau}{\int \int \int_{\tau} \bar{E}_n \, d\tau} = 1, \quad (4.27)$$

Вводя в рассмотрение безразмерные энергии рассеяния \bar{E}_n^0 и ψ^0 ,

число Рейнольдса

$$R = \frac{U_0 L}{\nu}$$

и используя (4.26), получим равенство, определяющее *критическое значение числа Рейнольдса*:

$$R_{кр} = \frac{\int \int \int E_{\Pi}^0 d\tau}{\int \int \int \psi^0 d\tau}. \quad (4.28)$$

Полученное равенство (4.28) было использовано в цитированной выше работе Рейнольдса для исследования устойчивости ламинарного течения между параллельными стенками с параболическим распределением скоростей по сечению. Предполагая проекции вектора скорости пульсаций периодическими функциями от координаты, ось которой параллельна скорости осреднённого течения, и принимая некоторые дополнительные допущения при отыскании минимума правой части (4.28), Рейнольдс установил неравенство

$$R_{кр} > 258. \quad (4.29)$$

За характерный размер в рассматриваемом случае была взята половина расстояния между стенками. Рейнольдс указывает на то, что гидравлический радиус плоской трубы вдвое больше радиуса круглой трубы, и поэтому критическое значение рассматриваемого параметра должно быть вдвое меньше для случая между параллельными стенками, т. е. иметь порядок

$$(R_{кр})_{эк} \sim 425. \quad (4.30)$$

Таким образом, найденное расчётным путём значение критического числа Рейнольдса для ламинарного движения между неподвижными параллельными стенками лишь на 40% меньше предполагаемого экспериментального значения.

Заметим, что выражение (4.23) отличается от выражения (2.19) главы XI только множителем ρ и наличием знака осреднения над произведениями проекций вектора скорости пульсаций. Следовательно, поле возмущений, введённое нами в главе XI при исследовании устойчивости ламинарных течений, совпадает в некотором отношении с полем пульсации, которое вводится при изучении турбулентного движения жидкости.

§ 5. Полуэмпирические теории турбулентности

Система дифференциальных уравнений осреднённого движения несжимаемой жидкости (3.15) является незамкнутой. Отдельные попытки замкнуть эту систему уравнений в общем случае ещё не дали таких результатов, которые бы позволяли решать отдельные краевые

задачи и сравнивать результаты расчёта с результатами измерений. Поэтому развитие изучения турбулентного движения жидкости шло не по линии использования уравнений движения, а по линии использования лишь самих *характеристик турбулентности* и по линии установления связи этих характеристик турбулентности со скоростью осреднённого течения. Именно по этому пути и развивались так называемые *полуэмпирические теории турбулентности*.

Получившие распространение полуэмпирические теории турбулентности были развиты вначале лишь для случая, когда осреднённое движение несжимаемой жидкости является: 1) прямолинейно-параллельным, т. е.

$$U_x = U, \quad U_y \equiv 0, \quad U_z \equiv 0, \quad (5.1)$$

2) плоским, т. е.

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} \equiv 0, \quad (5.2)$$

и 3) установившимся, т. е.

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = 0, \quad U_x = U(y), \quad (5.3)$$

причём поле пульсаций при этом предполагается плоско-параллельным, т. е.

$$\omega' \equiv 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} \equiv 0. \quad (5.4)$$

Тензор пульсационных напряжений будет иметь в этом случае три компоненты:

$$P_{xx} = -\rho \overline{u'u'}, \quad P_{xy} = -\rho \overline{u'v'}, \quad P_{yy} = -\rho \overline{v'v'}. \quad (5.5)$$

Если пренебречь действием массовых сил, то дифференциальные уравнения осреднённого движения (3.15) при перечисленных выше предположениях принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Основными характеристиками турбулентности в рассматриваемом нами случае принято считать: 1) две проекции вектора скорости пульсации u' и v' , 2) касательное пульсационное напряжение $P_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$ и 3) пульсацию вектора вихря $\omega' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)$. Для установления связи этих характеристик турбулентности со скоростью осреднённого движения U были предложены: 1) *теория*

Прандтля, или теория пути перемешивания, 2) теория Тэйлора и 3) теория Кармана, или теория подобия полей пульсаций.

В основе теории Прандтля ¹⁾ лежит следующий ход рассуждений, аналогичный ходу рассуждений о свободной длине пробега молекул в кинетической теории газов. При турбулентном движении каждая элементарная масса жидкости сохраняет все свои качества, в том числе и вектор количества движения, только до тех пор, пока она не сместится в направлении, поперечном к скорости осреднённого течения, на предельное расстояние l . Если же смещение в поперечном направлении этой массы превзойдёт это предельное расстояние l , то произойдёт перемешивание данной массы с окружающей массой в новом положении, в результате которого изменится и вектор количества движения этой массы. Масса жидкости, переносимая в единицу времени и через единицу площади пульсационным движением в поперечном направлении к скорости осреднённого течения, будет представляться в виде произведения плотности ρ на модуль проекции вектора скорости пульсации $|v'|$. Эта масса $\rho |v'|$ переходит из положения, в котором скорость осреднённого течения представляется в виде $U(y)$, в новое положение, для которого скорость осреднённого потока будет равна

$$U(y + l') = U(y) + l' \frac{dU}{dy},$$

где l' — частное значение пути перемешивания. Первая гипотеза в теории Прандтля заключается в том, что составляющая вектора скорости пульсации в направлении скорости основного потока u' считается пропорциональной разности скоростей осреднённого течения в точке $U(y + l)$ и в той точке, из которой рассматриваемая масса была смещена пульсационным движением $U(y)$, т. е.

$$u' \sim -l' \frac{dU}{dy}. \quad (5.7)$$

При этой гипотезе количество движения, перенесённое пульсационным движением в поперечном направлении к скорости основного потока, будет представляться в виде

$$P_{xy} = \beta \rho |v'| l' \frac{dU}{dy}, \quad (5.8)$$

где β — числовой коэффициент. Равенство (5.8) представляет собой простейшее выражение закона турбулентного переноса количества движения. Аналогичными рассуждениями можно получить выражение для турбулентного переноса теплоты

$$q = -\beta \rho |v'| l' \frac{d\theta}{dy}, \quad (5.9)$$

1) Prandtl L., Z. f. angew. Math. u. Mech., m. 5, 1925.

где θ — температура, и для турбулентного переноса количества взвешенных в жидкости частиц получим:

$$N = -\beta\rho |v'| l' \frac{dn}{dy}, \quad (5.10)$$

где n — концентрация взвешенных частиц. Во всех этих выражениях множители β , v' и l' могут меняться от точки к точке.

Чтобы равенство (5.8) сделать более определённым, принимается вторая гипотеза, согласно которой вторая составляющая вектора скорости пульсации v' считается пропорциональной первой составляющей, т. е.

$$v' \sim u'. \quad (5.11)$$

При использовании двух гипотез (5.7) и (5.11) и при введении в рассмотрение осреднённого значения пути перемешивания l , включающего в себе и числовой множитель β , касательное пульсационное напряжение по теории Прандтля будет представляться в виде

$$P_{xy} = \rho l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy}. \quad (5.12)$$

Тот факт, что в (5.12) одна производная берётся по модулю, а вторая — по алгебраической величине, объясняется тем, что при возрастании скорости осреднённого течения с увеличением расстояния y компонента турбулентного трения будет положительной, а при убывании скорости — отрицательной.

Таким образом, в теории Прандтля устанавливается нелинейная связь между турбулентным трением и градиентом скорости основного потока в поперечном направлении с переменным коэффициентом, представляющим собой квадрат пути перемешивания. Чтобы получить какие-либо конкретные результаты из (5.12), приходится прибегать к дополнительным предположениям, правильность которых в ограниченных пределах может подтверждаться только после сравнения результатов расчёта с результатом измерений при соответственном выборе значений безразмерных постоянных. Так, например, если принять: 1) путь перемешивания линейно зависящим от расстояния от стенки, т. е.

$$l = \chi y, \quad (5.13)$$

и 2) турбулентное трение постоянным, т. е.

$$P_{xy} = \tau_0, \quad (5.14)$$

то будем иметь из (5.12):

$$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{\chi y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (5.15)$$

Проводя интегрирование, получим формулу так называемого логарифмического профиля распределения скоростей в турбулентном

потоке

$$U = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (\ln y + \text{const}). \quad (5.16)$$

Эта формула хорошо подтверждается экспериментом, если для постоянного множителя в (5.13) взять значение

$$\alpha = 0,4. \quad (5.17)$$

Отношение касательного напряжения к плотности имеет размерность квадрата скорости, поэтому множитель $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ называется «*скоростью касательного напряжения*» или *динамической скоростью*

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (5.18)$$

Формула (5.16) не может применяться к частицам, находящимся на бесконечно близких расстояниях от стенки. Неопределённая постоянная в (5.16) может быть определена из условия на средней линии, на которой осреднённая скорость принимает максимальное значение, т. е.

$$y = h, \quad U = U_{\max}.$$

При выполнении этого условия и при использовании обозначения (5.18) формула (5.16) для логарифмического профиля распределения скоростей представится в виде

$$\frac{U_{\max} - U}{v^*} = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{y}{h}. \quad (5.19)$$

Заметим, что если в первом уравнении (5.6) пренебречь слагаемым с коэффициентом вязкости, учесть, что при гипотезе (5.7) в рассматриваемом случае компонента пульсационного напряжения P_{xx} может считаться не зависящей от x , и учесть (5.8) с заменой $|\overline{v'}| l'$ через $-\overline{v'} l$, то первое уравнение, выражающее собой условие равновесия сил давления и турбулентного трения, представится в виде

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \overline{v'} \frac{dU}{dy} \right]. \quad (5.20)$$

Перейдём теперь к краткому изложению теории Тэйлора¹⁾. Прежде всего автор обращает внимание на то, что в теории Прандтля принимается, что масса, перемещаемая в поперечном направлении к скорости основного потока пульсационным движением, сохраняет до перемешивания своё количество движения, которое всё же может изменяться благодаря местным пульсациям давления.

¹⁾ Taylor I., Proc. of the Royal Soc. S. A., m. 135, 1932, перев. в сборнике «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

По этой причине им было обращено основное внимание не на перенос количества движения, а на перенос завихрённости, на изменении которой не сказываются местные перепады давления, так как при неучёте влияния вязкости завихрённость неотделима от частицы, т. е. каждая частица сохраняет свою завихрённость при движении. Дальнейшие рассуждения в теории Тэйлора сходны с рассуждениями в теории Прандтля.

Масса жидкости, переходя из одного горизонтального слоя (y) в другой ($y+l$) благодаря пульсационному движению переносит с собой вихрь. Перемешивание завихрённости может произойти тогда, когда величина поперечного смещения будет превышать длину пути перемешивания l . При этом принимается, что пульсация напряжения вихря пропорциональна разности завихрённости осреднённого течения в рассматриваемых слоях, т. е.

$$\omega' \sim l \frac{d\bar{\omega}}{dy}. \quad (5.21)$$

Для прямолинейного осреднённого течения вихрь будет представляться в виде

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dy}.$$

Следовательно, пульсация напряжения вихря в рассматриваемом случае будет:

$$\omega' = -\frac{l}{2} \frac{d^2U}{dy^2}. \quad (5.22)$$

Возьмём теперь уравнение плоского движения в проекции на ось x без учёта вязкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right].$$

Полагая в этом уравнении

$$u = U + u',$$

$$v = v',$$

$$\omega = \bar{\omega} + \omega',$$

проведём осреднение и примем скорость осреднённого течения не зависящей от времени, а среднее значение квадрата скорости не зависящим от x . При этих предположениях получим:

$$-\overline{2\omega'v'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}.$$

Подставляя значение пульсации вихря из (5.22) и сохраняя знак осреднения над произведением lv' , получим следующее окончательное урав-

нение в теории турбулентности Тэйлора:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\rho \overline{lv'} \frac{d^2 U}{dy^2}. \quad (5.23)$$

Сравнивая уравнения (5.20) и (5.23), мы видим, что эти уравнения различны в своих правых частях. Правые части этих уравнений будут совпадать только тогда, когда среднее значение произведения пути перемешивания на поперечную составляющую вектора скорости пульсации не будет зависеть от расстояния y . В своей статье Тэйлор указывает на то, что различие указанных теорий должно обнаруживаться при сравнении распределения скоростей осреднённого течения и температуры позади нагретого цилиндрического тела. По теории Прандтля распределение скоростей и температур должно быть одинаковым, а по теории Тэйлора распределение скоростей не должно совпадать с распределением температур. Приведённые в работе экспериментальные данные подтверждают это различие распределения скоростей и температур в потоке позади нагретого тела. Однако при обтекании плоской нагретой пластинки распределение температур совпадает с распределением скоростей.

В заключение Тэйлор указывает на то, что теория турбулентности на основе переноса вихрей согласуется с теорией турбулентности на основе переноса количества движения для того случая, когда поле скоростей пульсаций является плоским и перпендикулярным к вектору скорости осреднённого течения (составляющая, параллельная скорости основного потока, отсутствует). Такой именно случай будет иметь место для течения вблизи неподвижных стенок. Если же осреднённое течение и пульсационное движение будут происходить в одной и той же плоскости, то обе теории будут приводить к разным результатам.

Общим в рассмотренных двух теориях турбулентности является то, что в исходных рассуждениях прослеживается движение фиксированной частицы до её перемешивания с другими, т. е. используется подход к движению жидкости с точки зрения Лагранжа. В теории турбулентности, предложенной Карманом¹⁾, с начала до конца используется подход к изучению движения жидкости с точки зрения Эйлера, т. е. с точки зрения рассмотрения полей скоростей и давления.

Область, занятая жидкостью в турбулентном движении, рассматривается, с одной стороны, как единое поле скоростей осреднённого движения жидкости, а, с другой стороны, как множество полей пульсационного движения жидкости в окрестности каждой геометрической точки. Затем принимаются следующие две гипотезы: 1) структура полей пульсаций и его масштабы не зависят от вязкости, за

1) Th. Von Kármán, Nachrichten d. Ges. d. Wissen. zu Göttingen, 1930, русский перев. в сборнике «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

исключением тех полей, которые относятся к точкам, расположенным вблизи стенок; 2) по своей структуре все поля пульсаций подобны между собой и отличаются только масштабами времени и расстояний.

С качественной стороны указанные гипотезы имеют общий характер, однако количественное претворение эти гипотезы пока получили лишь для частного случая прямолинейного осреднённого течения при выполнении предпосылок (5.1), (5.2), (5.3) и (5.4), т. е. для того случая, когда все поля пульсаций являются плоско-параллельными. Кроме того, при выполнении вычислительных операций делается предположение, что масштабы времени и расстояний в каждом поле пульсаций могут быть поставлены в зависимость только от первых двух производных скорости осреднённого течения по координате y , т. е.

$$\frac{dU}{dy}, \frac{d^2U}{dy^2}.$$

Поскольку размерность первой производной есть

$$\left[\frac{dU}{dy} \right] = \frac{1}{t},$$

то в качестве масштаба времени для поля пульсаций можно выбрать величину, пропорциональную обратному значению первой производной по y от средней скорости, т. е.

$$T \sim \frac{1}{\frac{dU}{dy}}. \quad (5.24)$$

В таком случае на основании размерностей скоростей пульсаций u' и v' и высказанной выше гипотезы подобия полей пульсаций можно положить:

$$\left. \begin{aligned} u' &\sim \frac{l}{T} \sim l \frac{dU}{dy}, \\ v' &\sim \frac{l}{T} \sim l \frac{dU}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Таким образом, выбором масштаба времени в виде (5.24) гипотеза о подобии полей пульсаций приводит к тем же результатам, к которым приводит теория Прандтля о пути перемешивания. В то же время гипотеза о подобии позволяет получить и совершенно новый результат, непосредственно не получающийся из теории пути перемешивания. Дело в том, что предположение о зависимости поля пульсаций только от первых двух производных позволяет вполне определённым образом выбрать масштаб расстояний для поля пульсаций. Отношение первой производной ко второй имеет размерность длины, а поэтому в качестве масштаба линейных размеров пульсаций может

быть выбрана величина, пропорциональная отношению первой производной ко второй производной от скорости осреднённого течения по координате y , т. е.

$$l = \kappa \frac{\frac{dU}{dy}}{\frac{d^2U}{dy^2}}, \quad (5.26)$$

где κ — числовой коэффициент, определяемый из условия согласования результатов расчёта с результатами опытов. Таким образом, теория Кармана позволяет определять длину пути перемешивания, входящую в теорию Прандтля, через дифференциальные характеристики осреднённого течения, а не задавать его в виде функции от расстояния от стенки.

Основные результаты (5.25) и (5.26) теории турбулентности Кармана были получены выше только с помощью анализа размерностей и гипотезы о подобии полей пульсаций. Самим же Карманом эти результаты были получены с помощью уравнений движения жидкости без учёта вязкости, представленных через функцию тока:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = 0. \quad (5.27)$$

Систему координат x и y выберем подвижной с началом в какой-либо точке, переносимой со скоростью осреднённого течения $U(0)$ в данной точке. Относительная скорость осреднённого течения в окрестности подвижного начала координат может быть тогда представлена в виде ряда Тэйлора

$$U - U(0) = U'_0 y + \frac{1}{2} U''_0 y^2 + \dots \quad (5.28)$$

Тогда функция тока результирующего движения жидкости в окрестности начала равна

$$\Psi = \frac{1}{2} U'_0 y^2 + \frac{1}{6} U''_0 y^3 + \dots + \psi(x, y), \quad (5.29)$$

где $\psi(x, y)$ — функция тока поля пульсаций в окрестности начала подвижной системы координат. Подставляя выражение (5.29) в уравнение (5.27) и ограничиваясь только множителями, содержащими координату y в первой степени, получим уравнение для функции тока поля пульсаций

$$\left(U'_0 y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} U''_0 - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0. \quad (5.30)$$

Перейдём теперь к безразмерным величинам, полагая

$$\left. \begin{aligned} x &= l\xi, \\ y &= l\eta, \\ \psi &= Af(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

В безразмерных величинах уравнение (5.30) представится в виде

$$U'_0 \frac{A}{l^2} \eta \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - U''_0 \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{A^2}{l^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (5.32)$$

Требование подобия полей пульсаций будет теперь сводиться к тому, чтобы уравнение (5.32) для функции тока выполнялось бы в каждой точке, выбор которой предопределяет собой выбор величин U'_0 , U''_0 , A и l . Это требование подобия полей пульсаций будет выполнено с той степенью приближения, с которой будет справедливым само уравнение (5.32), если размерные коэффициенты этого уравнения будут пропорциональны друг другу, т. е.

$$U'_0 \frac{A}{l^2} \sim \frac{A^2}{l^4},$$

$$U''_0 \frac{A}{l} \sim \frac{A^2}{l^4}.$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} l &\sim \frac{U'_0}{U''_0}, \\ A &\sim l^2 U'_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Так как проекции вектора скорости пульсаций представляются в виде

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \eta}, \\ v' &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

то эти проекции должны быть пропорциональны первой производной и величине характерного линейного масштаба пульсаций, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u' &\sim l U'_0, \\ v' &\sim l U'_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Приведённые соотношения пропорциональности позволяют считать касательное пульсационное напряжение пропорциональным произведению квадрата линейного масштаба поля пульсаций на квадрат первой производной от скорости осреднённого течения, т. е.

$$P_{xy} = -\rho \overline{u'v'} = \rho \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \sim \rho l^2 U_0'^2. \quad (5.35)$$

Таким образом, мы снова приходим к основным соотношениям теории подобия полей пульсаций (5.25) и (5.26).

Л. Г. Лойцянский¹⁾ показал, что соотношения (5.35) и (5.26) могут быть получены, если требование подобия полей пульсации заменить требованием подобия распределения разностей скоростей осреднённого течения в слоях с шириной l .

§ 6. Установившееся турбулентное движение жидкости в плоской и круглой цилиндрической трубе

Как уже указывалось выше, наиболее полно экспериментально изучено установившееся турбулентное движение несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Именно для этого случая было получено большое количество экспериментальных данных о распределении скоростей по сечению трубы и о зависимости коэффициента сопротивления трубы от числа Рейнольдса. Многочисленные экспериментальные данные, разнообразные по своему характеру, удалось рационально обработать и привести в определённую связь с помощью привлечения теории подобия и рассмотренных выше полуэмпирических теорий турбулентности. В этом отношении полуэмпирические теории турбулентности сыграли и продолжают играть большую роль. Но при этом оказалось, что для рациональной обработки экспериментальных данных и для получения чисто расчётным путём каких-либо новых данных достаточно было использовать формулу Прандтля (5.12) для турбулентного трения и формулу Кармана (5.26) для линейного масштаба полей пульсаций; рассмотрение самих скоростей пульсаций в этом случае не понадобилось. Результаты такой обработки экспериментальных данных о турбулентном движении жидкости в трубах полнее всего представлены в статье И. Никурадзе²⁾, из которой мы заимствуем приведённые ниже графики.

Прежде всего были обработаны экспериментальные данные о распределении скоростей вблизи неподвижной стенки трубы. При этой обработке была использована гипотеза Прандтля о том, что скорость вблизи стенки зависит прежде всего от значений физических постоянных, к которым относятся, помимо коэффициента вязкости μ , плотности ρ , ещё касательное напряжение на самой стенке τ_0 . Из последних двух величин можно составить выражение для динамической скорости

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (6.1)$$

Вводим теперь в рассмотрение безразмерную скорость в виде отношения скорости осреднённого движения U к динамической скорости, т. е.

$$\frac{U}{v^*} = \varphi. \quad (6.2)$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Прикл. матем. и мех., т. II, вып. 2, 1935.

²⁾ Nikuradse I., Forschungsheft 356 (Beilage zu «Forsch. a. d. Geb. des Ingen. Wesens»), 1932 г., русский перев. в сборнике «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

Отношение кинематического коэффициента вязкости к динамической скорости будет иметь размерность длины, поэтому можно ввести безразмерное расстояние от стенки в виде

$$\eta = \frac{\nu^* y}{\nu}. \quad (6.3)$$

Зависимость безразмерной скорости (6.2) от безразмерного расстояния (6.3)

$$\varphi = \varphi(\eta) \quad (6.4)$$

будет представлять собой так называемое *универсальное распределение скоростей* по сечению трубы в том смысле, что эта зависи-

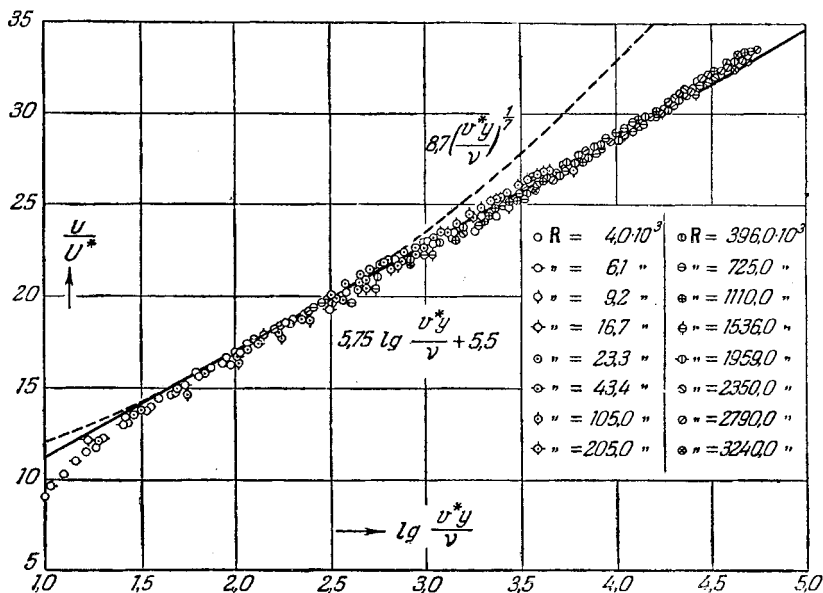


Рис. 103.

мость должна оставаться одной и той же для разных несжимаемых жидкостей, имеющих разные коэффициенты вязкости и плотности.

Если по оси абсцисс откладывать десятичные логарифмы от безразмерного расстояния, а по оси ординат — безразмерные скорости, то данные различных опытов будут располагаться вблизи прямой, уравнение которой (рис. 103) представляется в виде

$$\varphi = 5,5 + 5,75 \lg \eta. \quad (6.5)$$

На этом графике пунктирная кривая отвечает закону Блазиуса, согласно которому скорость пропорциональна расстоянию от стенки

в степени $\frac{1}{7}$. Следует заметить, что сама гипотеза Прандтля принималась по отношению к распределению скоростей вблизи стенки, тем не менее, опытные данные о величинах скоростей вблизи оси трубы дают точки, мало отклоняющиеся от прямой (6.5).

Для области ламинарного режима зависимость (6.4) будет иметь вид

$$\varphi = \eta. \quad (6.6)$$

Зависимость (6.6) оправдывается экспериментальными данными только до значений

$$\eta = 10.$$

При рассмотрении установившегося турбулентного движения несжимаемой жидкости в плоской трубе в предшествующем параграфе логарифмический профиль распределения скоростей был установлен в предположении, что касательное напряжение всюду постоянно и что путь перемешивания зависит линейно от расстояния от стенки. Однако тот же профиль распределения скоростей можно получить и не прибегая к указанным специфическим предположениям, а воспользовавшись основными соотношениями для турбулентного трения и для линейного масштаба полей пульсаций. В самом деле, составляя уравнение равновесия сил осреднённого давления и турбулентного трения на элементарный объём жидкости, можно получить уравнение

$$\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (6.7)$$

Если считать, что перепад осреднённого давления не зависит от расстояния y от стенки, то после интегрирования уравнения (6.7) получим линейный профиль распределения турбулентного трения по сечению трубы

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad (6.8)$$

где h — расстояние от стенки средней линии, на которой трение считается равным нулю, а τ_0 — значение трения на самой стенке. Используя теперь выражение (5.12) для турбулентного трения и равенство (5.26) для линейного масштаба полей пульсаций, получим:

$$\begin{aligned} \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 &= \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \\ l &= -\kappa \frac{U'}{U''}. \end{aligned}$$

Отсюда будем иметь дифференциальное уравнение для определения распределения скоростей по сечению плоской трубы

$$\frac{U''}{U'^2} = -\frac{\kappa}{v^*} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y}{h}}}. \quad (6.9)$$

Знак минус в формулах для l и (6.9) взят из того условия, что при $U' > 0$ $U'' < 0$. Выполняя интегрирование в (6.9), получим:

$$-\frac{1}{U'} = \frac{2x}{v^*} h \sqrt{1 - \frac{y}{h}} + C.$$

Постоянную интегрирования определим при помощи следующих рассуждений. Для достаточно больших значений числа Рейнольдса производная U' вблизи стенки ($y = 0$) имеет достаточно большое значение, мало отличающееся от значения, отвечающего ламинарному трению $\frac{\tau_0}{\mu}$, при условии, что коэффициент вязкости μ имеет весьма малое значение. На этом основании можно считать, конечно с некоторой погрешностью, что на стенке производная U' обращается в бесконечность. При таком предположении постоянная C будет равна

$$C = -\frac{2xh}{v^*},$$

и для производной U' получим:

$$U' = \frac{v^*}{2xh} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{y}{h}}}. \quad (6.10)$$

Проводя интегрирование (6.10) и определяя постоянную интегрирования из условия задания максимального значения скорости на средней линии, получим следующую формулу для профиля распределения скоростей осреднённого течения в плоской трубе:

$$\frac{U_{\max} - U}{v^*} = -\frac{1}{x} \left[\ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \right]. \quad (6.11)$$

На рис. 104 представлена кривая распределения скоростей (6.11) при $x = 0,40$ и отмечены те точки, которые получены на основании экспериментов Никурадзе в круглой цилиндрической трубе. Как видно из рисунка, опытные точки располагаются достаточно близко к кривой распределения скоростей в плоской трубе для широкого интервала значений чисел Рейнольдса от $4 \cdot 10^3$ до $3240 \cdot 10^3$.

Если перейти к непосредственному рассмотрению установившегося осреднённого турбулентного течения в круглой цилиндрической трубе, то вместо уравнения равновесия (6.7) мы должны использовать уравнение равновесия сил давления и турбулентного трения, приложенных к кольцевому цилиндру с внутренним радиусом r , внешним $r + \Delta r$ и длиной Δx , т. е. уравнение

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau). \quad (6.12)$$

Если и в этом случае предположить, что перепад осреднённого давления не зависит от расстояния r от оси трубы, то уравнение (6.12) можно проинтегрировать по переменному r ; получим:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{C}{r}.$$

Так как на оси трубы турбулентное трение должно обращаться в нуль, то постоянную C необходимо положить равной нулю. Если радиус трубы обозначить через a , то сила трения вблизи стенки будет равна

$$\tau_0 = -\frac{a}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (6.13)$$

Вводя расстояние от стенки y , полагая

$$r = a - y$$

и используя выражение (6.13), получим, как и в случае плоской трубы, формулу линейного распределения турбулентного трения по сечению

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right). \quad (6.14)$$

Следовательно, если пользоваться равенством (5.12) для турбулентного трения и равенством (5.26) для характерной длины l , то последующие вычисления будут совпадать с вычислениями, проведёнными выше для случая плоской трубы, и для распределения скоростей можно получить формулу (6.11) с заменой h через радиус трубы a . Если же не пользоваться формулой (5.26), а предполагать, что путь перемешивания l удовлетворяет соотношению

$$\frac{l}{a} = \kappa \frac{y}{a} f\left(\frac{y}{a}\right), \quad (6.15)$$

где функция $f\left(\frac{y}{a}\right)$ для малых значений аргумента близка к единице, то при использовании (5.12) и (6.14) получим:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right).$$

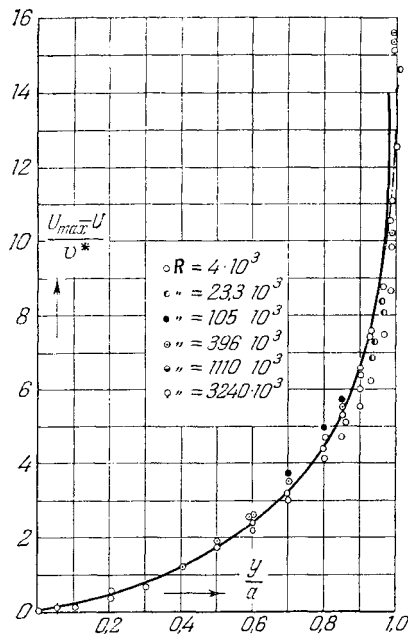


Рис. 104.

Подставляя (6.15), будем иметь:

$$\chi y f\left(\frac{y}{r}\right) \frac{dU}{dy} = v^* \sqrt{1 - \frac{y}{a}}. \quad (6.16)$$

После интегрирования получим следующую формулу для распределения скоростей по сечению круглой трубы:

$$\frac{U_{\max} - U}{v^*} = \int_y^a \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{a}} dy}{\chi y f\left(\frac{y}{a}\right)} = g\left(\frac{y}{a}\right), \quad (6.17)$$

где функция $g\left(\frac{y}{a}\right)$ будет одной и той же для всех гладких труб.

Отдельные значения этой функции по данным экспериментов Никурадзе при различных значениях числа Рейнольдса представлены на рис. 104 кружочками и через них проведена пунктирная кривая. Как видно из рисунка, пунктирная кривая отходит от сплошной кривой, отвечающей логарифмическому распределению скоростей (6.11) при $\chi = 0,36$, лишь вблизи самой стенки.

Теперь перейдём к вопросу о сопротивлении трубы при турбулентном движении жидкости. Для этого необходимо несколько подробнее рассмотреть вопрос о трении вблизи стенки с учётом того, что вблизи самой стенки проявляется влияние вязкости, тогда как в расчётах по распределению скоростей влияние вязкости не учитывалось.

Если учесть влияние вязкости, то всё распределение скоростей по сечению трубы следует разбить на две области: 1) *ядро течения*, в котором поток является чисто турбулентным с распределением скоростей (6.11), и 2) *ламинарный подслой*, в котором влияние вязкости является преобладающим. Следовательно, путь перемещения, или характерный масштаб l , можно использовать только для ядра течения, и поэтому, например, формулу линейной зависимости этого масштаба от расстояния от стенки можно применять только к области ядра течения, т. е. начиная с расстояния, равного толщине подслоя δ . Таким образом, наименьшее значение характерного масштаба будет представляться в виде

$\chi \delta$.

Если предположить, что толщина подслоя δ зависит только от физических величин τ_0 , ρ и μ , то, используя метод размерностей, можно положить:

$$\delta = \alpha \frac{\nu}{v^*}, \quad (6.18)$$

где α — безразмерная постоянная, не зависящая от числа Рейнольдса. Так как внутри подслоя сила трения определяется по ги-

потезе Ньютона в виде

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}$$

и при этом её можно считать постоянной, то на границе под-
слоя скорость будет представляться в виде

$$U_1 = \frac{\tau_0}{\mu} \delta = \alpha v^*. \quad (6.19)$$

Если в равенстве (6.16) провести интегрирование в пределах от δ
до y и учесть, что при $y = \delta$ скорость U равна U_1 , то получим:

$$U = U_1 + \int_{\delta}^y v^* \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{a}}}{\alpha y f\left(\frac{y}{a}\right)} dy. \quad (6.20)$$

Так как возрастание скорости в ядре течения происходит преимущ-
ественно на сравнительно малых расстояниях от стенки, то под
знаком интеграла (6.20) можно положить:

$$f\left(\frac{y}{a}\right) \approx 1, \quad \sqrt{1 - \frac{y}{a}} \approx 1.$$

Тогда после интегрирования получим уточнённую формулу логариф-
мического распределения скоростей с учётом влияния вязкости в виде

$$U = \frac{v^*}{\alpha} \left[\ln \frac{y v^*}{\nu} + \alpha x - \ln \alpha \right]. \quad (6.21)$$

Формула (6.21) совпадает с формулой (6.5), полученной на основа-
нии обработки экспериментальных данных. Следовательно, постоян-
ные, входящие в (6.21), будут иметь следующие значения:

$$\frac{1}{\alpha \lg e} = 5,75, \quad \alpha - \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 5,5.$$

Отсюда получим:

$$\alpha = 0,40, \quad \alpha = 11,5. \quad (6.22)$$

Полагая в (6.21) $y = a$ и переходя к десятичным логарифмам, по-
лучим следующее выражение для максимальной скорости турбулент-
ного течения в круглой цилиндрической трубе:

$$U_{\max} = \left(5,75 \lg \frac{v^* a}{\nu} + 5,5 \right) v^*. \quad (6.23)$$

В § 5 главы IV коэффициент сопротивления цилиндрической
трубы определялся в виде отношения

$$\lambda = \frac{\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|_a}{\rho u_{cp}^3}. \quad (6.24)$$

Подставляя в правую часть (6.24) значение перепада давления из (6.13) и заменяя турбулентное трение через динамическую скорость, получим коэффициент сопротивления трубы через отношение квадрата динамической скорости к квадрату средней скорости в виде

$$\lambda = 2 \frac{v^{*2}}{u_{cp}^2}. \quad (6.25)$$

Если ввести коэффициент сопротивления, трубы через максимальную скорость, т. е. положить

$$\psi = 2 \frac{v^{*2}}{U_{max}^2} \quad (6.26)$$

и подставить отношение

$$\frac{v^*}{U_{max}} = \sqrt{\frac{\psi}{2}}$$

в (6.23), то получим зависимость коэффициента сопротивления трубы от числа Рейнольдса

$$R_{max} = \frac{U_{max} a}{\nu} \quad (6.27)$$

в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = B' + A' \lg R_{max} \sqrt{\psi}. \quad (6.28)$$

График этой линейной зависимости $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ от $\lg(R_{max} \sqrt{\psi})$ представлен

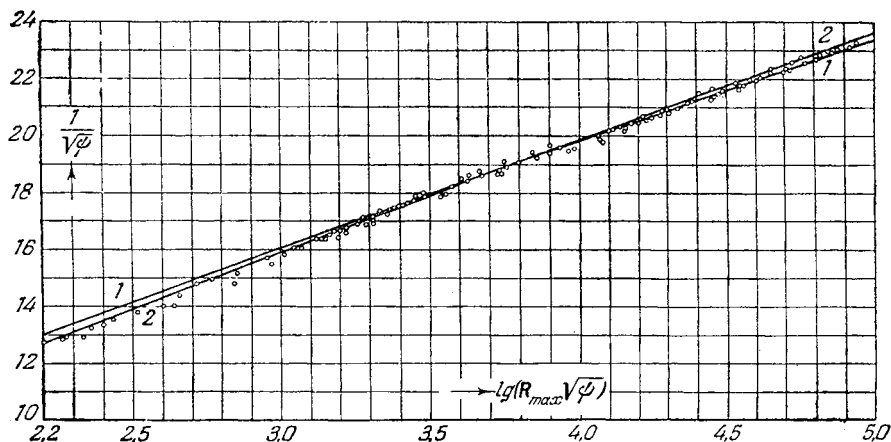


Рис. 105.

на рис. 105. Данные экспериментальных измерений при различных значениях числа Рейнольдса (6.27) располагаются вблизи двух пря-

мых линий 1 и 2. Для первой прямой постоянные множители в (6.28) имеют значения: $B' = 4,75$, $A' = 3,77$, а для второй: $B' = 4,16$, $A' = 3,90$, причём первая прямая проведена через те опытные точки, которые отвечают течениям с наименьшим влиянием вязкости, и поэтому эту прямую можно экстраполировать и на весьма большие значения числа Рейнольдса. Вторая прямая проведена с учётом опытных точек, относящихся к области средних значений числа Рейнольдса.

В работе Никурадзе указывается на то, что при весьма больших значениях числа Рейнольдса ($R = \frac{2au_{cp}}{\nu}$) можно пользоваться сле-

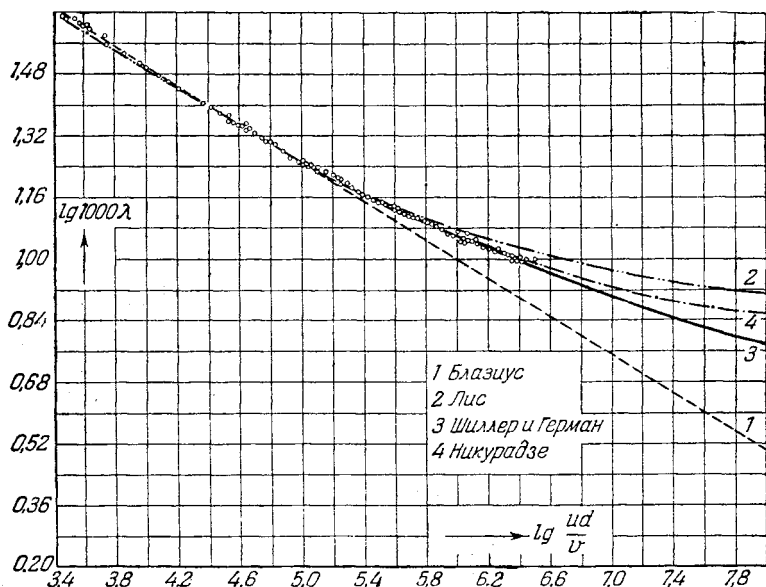


Рис. 106.

дующей зависимостью коэффициента сопротивления трубы λ от числа R :

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{R^{0,237}}. \quad (6.29)$$

График этой зависимости представлен на рис. 106, на котором пунктиром нанесена и кривая, отвечающая применяемой в гидравлике формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{R^{0,25}}. \quad (6.30)$$

Всё то, что говорилось выше о движении жидкости в трубах, справедливо без учёта влияния шероховатости. Влиянию шероховатости на зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса было посвящено большое количество экспериментальных работ. На рис. 107 приведены графики зависимости $\lg(100\lambda)$ от $\lg R$ с учётом различных значений отношения *относительной шероховатости* к числу Рейнольдса. Под относительной шерохова-

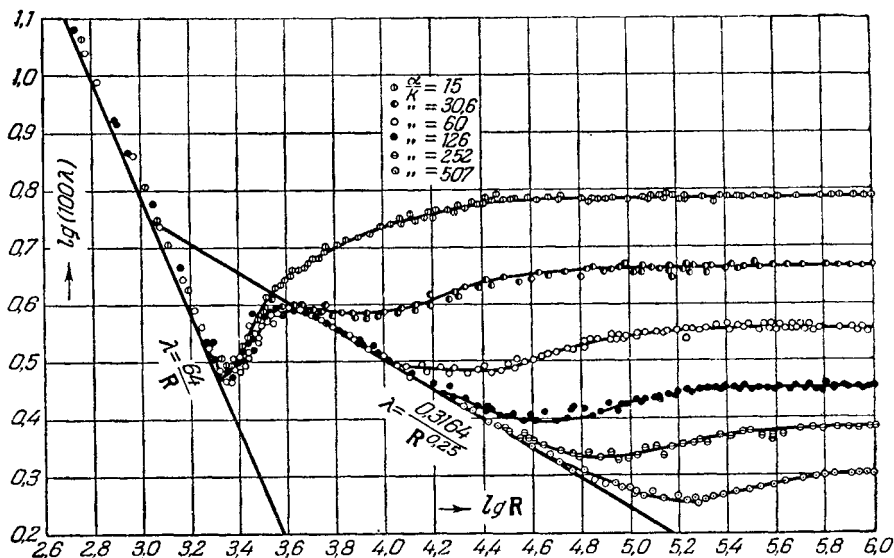


Рис. 107.

тостью поверхности трубы понимается отношение высоты бугра шероховатости к радиусу трубы в предположении, что все бугры шероховатости имеют примерно одинаковые высоты и одинаковые очертания. Проведённые оценки влияния шероховатости¹⁾ показывают, что этим влиянием можно пренебречь, если отношение высоты бугра шероховатости k к толщине ламинарного подслоя $\delta_{\text{л}}$ меньше 0,25.

§ 7. Турбулентный пограничный слой

В § 1 главы VIII было введено понятие пограничного слоя, прилегающего к поверхности твёрдой стенки, в котором влияние вязкости жидкости на распределение скоростей частиц должно учитываться в первую очередь наряду с инерционным воздействием внеш-

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Труды ЦАГИ, вып. 250, 1936.

него потока. Для случая установившегося плоско-параллельного течения в пограничном слое были установлены дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

При этом давление p считается известной функцией от криволинейной координаты x , отсчитываемой от передней критической точки вдоль поверхности тела; на основании интеграла Бернулли

$$p = C - \frac{1}{2} \rho V^2. \quad (7.2)$$

При использовании граничных условий из уравнений (7.1) было получено в § 3 главы VIII интегральное соотношение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - V \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0. \quad (7.3)$$

При рассмотрении частных примеров в этой главе было показано, что толщина пограничного слоя δ растёт с ростом координаты x . Следовательно, если ввести местное число Рейнольдса, связанное с толщиной слоя

$$R_{\delta} = \frac{V\delta}{\nu}, \quad (7.4)$$

то это число R_{δ} будет увеличиваться вдоль пограничного слоя и может превзойти так называемое критическое значение, после которого режим течения в пограничном слое должен измениться. Такого рода предварительное заключение, сделанное пока лишь по аналогии с течением в трубах постоянного сечения, было подтверждено многочисленными экспериментальными исследованиями не только с качественной стороны, но и с количественной. Иначе говоря, найденные из опыта места перехода ламинарного режима течения в пограничном слое в турбулентный с явным проявлением пульсаций скоростей отвечали тем значениям толщины пограничного слоя, для которых значения числа Рейнольдса (7.4) были достаточно близки к значению критического числа Рейнольдса для трубы. В § 4 главы XI при проведении исследования устойчивости ламинарного течения в пограничном слое было указано на то, что найденные теоретическим путём критические значения числа Рейнольдса, при которых ламинарное течение в пограничном слое теряет свою устойчивость, по своему порядку величин близки к опытным значениям для трубы.

Таким образом, при рассмотрении течения жидкости в пограничном слое в общем случае необходимо разбить этот слой в продольном направлении на три участка: 1) участок ламинарного слоя, 2) участок переходного слоя, который в расчётах обычно принимается за точку перехода, и 3) участок турбулентного слоя. Протяжённость участка ламинарного слоя будет тем меньше, чем больше число Рейнольдса внешнего потока на достаточном удалении от рассматриваемого тела.

При выводе дифференциальных уравнений осреднённого турбулентного течения несжимаемой жидкости в § 3 было указано на то, что при изучении осреднённого течения необходимо наряду с тензором вязких напряжений вводить в рассмотрение и тензор пульсационных напряжений; именно в этом и проявляется формальное отличие дифференциальных уравнений (3.15) от общих уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости. Раз это так, то дифференциальные уравнения осреднённого течения несжимаемой жидкости в пограничном слое могут быть формально получены из уравнений (7.1) простой заменой компонент скоростей u и v через проекции вектора скорости осреднённого движения U_x и U_y и заменой силы вязкости $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ через сумму осреднённой силы вязкости и турбулентного трения, т. е.

$$\tau = \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} - \overline{\rho u'v'}. \quad (7.5)$$

Если при этом мы учтём зависимость давления в слое от скорости внешнего потока на границе слоя (7.2), то вместо уравнений (7.1) для пограничного турбулентного слоя будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} &= V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Между прочим, заметим, что при выводе уравнений (7.1) в главе VIII коэффициент вязкости предполагался малым, порядка δ^2 , а поперечный градиент скорости $\frac{\partial u}{\partial y}$ предполагался большим, порядка $\frac{1}{\delta}$, и в первом уравнении (7.1) были сохранены члены порядка единицы. Если эти оценки порядка величин сохранить и для турбулентного пограничного слоя, то турбулентное трение, представляемое вторым слагаемым (7.5), должно иметь порядок δ , а следовательно, составляющие вектора скорости пульсации не могут считаться малыми порядка δ , а иметь порядок $\delta^{1/2}$. А это значит, что поперечная составляющая скорости поля пульсаций, благодаря которой происходит турбулентный обмен различными качествами и количествами

между пограничным слоем и внешним потоком, по своему порядку величин должна приближаться к порядку скорости осреднённого течения в самом пограничном слое. На этом основании можно утверждать, что толщина пограничного турбулентного слоя будет расти вдоль поверхности тела быстрее, чем толщина ламинарного слоя.

Интегральное соотношение (7.3) для турбулентного пограничного слоя примет следующий вид:

$$V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} U_x dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} U_x^2 dy = -V \frac{dV}{dx} + \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (7.7)$$

Укажем теперь на то существенное различие, которое имеет место в подходах к изучению закономерностей ламинарного и пограничного слоёв для отдельных случаев. Как мы видели в главе VIII, для изучения ламинарного пограничного слоя было достаточно: 1) задать распределение давления по передней части контура (или из опыта, или из решения соответственной задачи о потенциальном обтекании контура) и 2) задать поперечное распределение основной скорости в самом пограничном слое. При этих заданиях интегральное соотношение (7.3) превращалось в разрешимое в квадратурах дифференциальное уравнение для толщины пограничного слоя. После этого можно было определить распределение силы вязкости вдоль контура и вычислить результирующее сопротивление трения рассматриваемого контура.

Если теперь мы обратимся к использованию интегрального соотношения (7.7) для турбулентного пограничного слоя, то увидим, что указанных двух заданий: 1) распределения давления в продольном направлении и 2) распределения основной скорости в поперечном направлении в слое, становится недостаточным. Необходимо ещё 3) задать зависимость турбулентного трения от основной скорости осреднённого течения в пограничном слое. Кроме того, различие проявляется и в задании поперечного распределения основной скорости. Для ламинарного пограничного слоя поперечное распределение основной скорости представлялось в виде различных простейших функций от отношения $\frac{y}{\delta}$, удовлетворяющих различным граничным условиям на границе слоя и условиям прилипания к стенкам. При этом получалось, что задание различных по характеру функций не изменяло зависимостей толщины слоя δ , вязкого напряжения τ_t и результирующего сопротивления F от размерных величин: скорости V , вязкости μ , плотности ρ и координаты x , а сказывалось только на значениях числовых множителей и в незначительной степени. При изучении турбулентного пограничного слоя поступают несколько иначе, а именно поперечное распределение основной скорости в слое задается обычно в том виде, в каком оно уже использовалось при изучении турбулентного движения в трубах, т. е. либо в одночленной форме

с дробной степенью (чаще со степенью $\frac{1}{7}$), либо в форме логарифмической зависимости. При этом иногда производится сопряжение турбулентного распределения скоростей с распределением скоростей в ламинарном подслое, примыкающем непосредственно к самой стенке, и сопряжение толщины ламинарного слоя на переднем участке с толщиной турбулентного слоя на последующем участке пограничного слоя. Что же касается задания турбулентного трения τ_0 на самой стенке в пограничном слое, то и здесь обычно используется связь этого трения с динамической скоростью v^* и те соотношения, которые были установлены для турбулентного движения в трубе.

В качестве примера рассмотрим турбулентный пограничный слой на пластинке, обтекаемой безграничным потоком то скоростью V_∞ в продольном направлении. Для этого случая первое слагаемое в правой части (7.7) обратится в нуль и для местного результирующего трения на самой пластинке будем иметь выражение

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} U_x (V_\infty - U_x) dy \right]. \quad (7.8)$$

Умножая обе части (7.8) на $b dx$, где b — ширина пластинки, интегрируя по x от 0 до L (длина пластинки), получим формулу для результирующего сопротивления трения одной стороны пластинки в виде

$$F = b \int_0^L \tau_0 dx = \rho b \int_0^{\delta(L)} U_x (V_\infty - U_x) dy. \quad (7.9)$$

Если результирующее сопротивление трения поделить на площадь и скоростной напор, то получим следующую интегральную общую формулу для коэффициента сопротивления трения пластинки:

$$C_f = \frac{2F}{bL\rho V_\infty^2} = \frac{2}{LV_\infty^2} \int_0^{\delta(L)} U_x (V_\infty - U_x) dy. \quad (7.10)$$

Примем теперь, что пограничный турбулентный слой начинается с самого края пластинки и что для распределения скоростей справедлив закон $\frac{1}{7}$, т. е.

$$U_x = V_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} = 8,7 v^* \left(\frac{y v^*}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (7.11)$$

Этому распределению скоростей отвечает эмпирическая формула для трения на стенке трубы

$$\tau_0 = \rho v^{*2} = 0,0225 \left(U_{\max} \frac{a}{\nu} \right)^{-1/4} \rho U_{\max}^2,$$

пригодная для тех случаев, когда число Рейнольдса не превышает 10^5 , Заменяя радиус трубы a через толщину слоя δ и максимальную скорость в трубе через скорость потока на бесконечности, получим формулу для местного турбулентного трения на пластинке

$$\tau_0 = \rho v^{*2} = 0,0225 \rho V_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty \delta} \right)^{1/4}. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.11) в (7.8) и (7.10), будем иметь:

$$\tau_0 = \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}, \quad (7.13)$$

$$C_f = \frac{7}{36} \frac{\delta(L)}{L}. \quad (7.14)$$

Приравнявая (7.13) и (7.12), получим дифференциальное уравнение для толщины пограничного слоя

$$\delta^{1/4} \frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7} 0,0225 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{1/4}. \quad (7.15)$$

Если провести интегрирование этого уравнения при выполнении граничного условия, что при $x = 0$ толщина слоя $\delta = 0$, то получим:

$$\delta = 0,37 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{1/5} x^{1/5}. \quad (7.16)$$

Сопоставляя полученную формулу (7.16) с формулой (2.19) главы VIII, мы видим, что толщина турбулентного пограничного слоя на пластинке растёт быстрее, чем толщина ламинарного слоя.

Подставляя выражение (7.16) в (7.12) и в (7.14), получим формулы для местного турбулентного трения на пластинке и для коэффициента сопротивления

$$\tau_0 = 0,0289 \rho V_\infty^2 \left(\frac{v}{x V_\infty} \right)^{1/5}, \quad (7.17)$$

$$C_f = 0,072 \left(\frac{v}{L V_\infty} \right)^{1/5} = 0,072 R^{-1/5}. \quad (7.18)$$

Сравнивая формулу (7.18) с формулой (2.18) главы VIII, мы видим, что коэффициент сопротивления трений пластинки при турбулентном режиме пограничного слоя с возрастанием числа Рейнольдса убывает значительно медленнее, чем при ламинарном режиме. Формула (7.18) находится в хорошем согласии с опытными измерениями именно в тех случаях, когда практически обеспечивается турбулентный режим в пограничном слое, начиная с передней кромки пластинки. Лучшее согласие с опытными данными до значения числа Рейнольдса $3 \cdot 10^6$

можно получить, если числовой множитель в (7.18) заменить через 0,074.

Если имеется участок ламинарного пограничного слоя, то опытные данные лучше отвечают следующей формуле для коэффициента сопротивления трения:

$$C_f = 0,074 R^{-1/2} - 1700 R^{-1}. \quad (7.19)$$

Выше были проведены расчёты при частном задании распределения скоростей в турбулентном пограничном слое на пластинке. Но эти расчёты можно провести и при общем задании распределения скоростей в безразмерных величинах φ и η , введённых в начале § 6. Полагая

$$U_x = \varphi v^*, \\ \eta = \frac{y v^{*2}}{\nu},$$

примем, что при частном значении $\eta = \eta_1 = \frac{\delta v^*}{\nu}$ известны $\varphi = \varphi_1$ и $U_x = U_1$; тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v^* &= \frac{U_1}{\varphi_1}, & U_x &= \frac{U_1}{\varphi_1} \varphi, & v^{*2} &= \frac{\tau_0}{\rho}, \\ y &= \frac{\nu \varphi_1}{U_1} \eta, & dy &= \frac{\nu \varphi_1}{U_1} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

При этих обозначениях формула (7.8) имеет вид

$$U_1^2 = \nu \varphi_1^2 U_1 \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\eta_1} \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta \right].$$

Величины δ и v^* , а следовательно, и η_1 являются неизвестными функциями от координаты x , а поэтому дифференцирование по переменному x можно заменить дифференцированием по η_1 , и тогда будем иметь:

$$\frac{U_1}{\nu} \frac{dx}{d\eta_1} = \varphi_1^2 \frac{d}{d\eta_1} \left[\int_0^{\eta_1} \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta \right].$$

Если выполнить дифференцирование в правой части по верхнему пределу и учесть, что при $\eta = \eta_1$ $\varphi = \varphi_1$, то получим нуль. При выполнении же дифференцирования под знаком интеграла мы должны учесть, что функция φ от параметра η_1 не зависит, от этого параметра зависит только φ_1 . Таким образом, будем иметь:

$$\frac{U_1}{\nu} \frac{dx}{d\eta_1} = \frac{d\varphi_1}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \varphi^2 d\eta. \quad (7.21)$$

Введём обозначение

$$f(\eta_1) = \frac{d\varphi_1}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \varphi^2 d\eta, \quad (7.22)$$

тогда из (7.21) получим:

$$x = \frac{\nu}{U_1} \int_0^{\eta_2} f(\eta_1) d\eta_1 = \frac{\nu}{U_1} \Phi(\eta_2), \quad (7.23)$$

где через η_2 мы обозначили частное значение параметра η_1 , отвечающее частному значению координаты x . Таким образом, число Рейнольдса, соответствующее длине пластинки L , равно

$$R_L = \frac{U_1 L}{\nu} = \Phi(\eta_2). \quad (7.24)$$

Подставляя в формулу для результирующего сопротивления пластинки

$$F = b \int_0^L \tau_0 dx$$

значение $\tau_0 = \rho \nu^{*2} = \rho \frac{U_1^2}{\varphi_1^2}$ и значение $dx = \frac{\nu}{U_1} f(\eta_1) d\eta_1$, получим:

$$F = \rho \nu U_1 b \int_0^{\eta_2} \frac{f(\eta_1)}{\varphi_1^2} d\eta_1 = b \rho \nu U_1 \psi(\eta_2). \quad (7.25)$$

Отсюда для коэффициента сопротивления трения пластинки будем иметь:

$$C_f = \frac{2\nu}{U_1 L} \psi(\eta_2) = \frac{2\psi(\eta_2)}{\Phi(\eta_2)}. \quad (7.26)$$

Таким образом, для вычисления коэффициента сопротивления трения пластинки при заданном распределении скоростей в общем виде необходимо выполнить три квадратуры (7.22), (7.23) и (7.25) и исключить параметр η_2 из соотношений (7.24) и (7.26). Указанные квадратуры можно выполнить не только для рассмотренного выше степенного закона распределения скоростей, но и для логарифмического закона распределения скоростей в виде

$$\varphi = a \ln(1 + b\eta), \quad (7.27)$$

где постоянные, подобранные из условия лучшего согласования с опытными данными, имеют значения

$$a = 2,495, \quad b = 8,93.$$

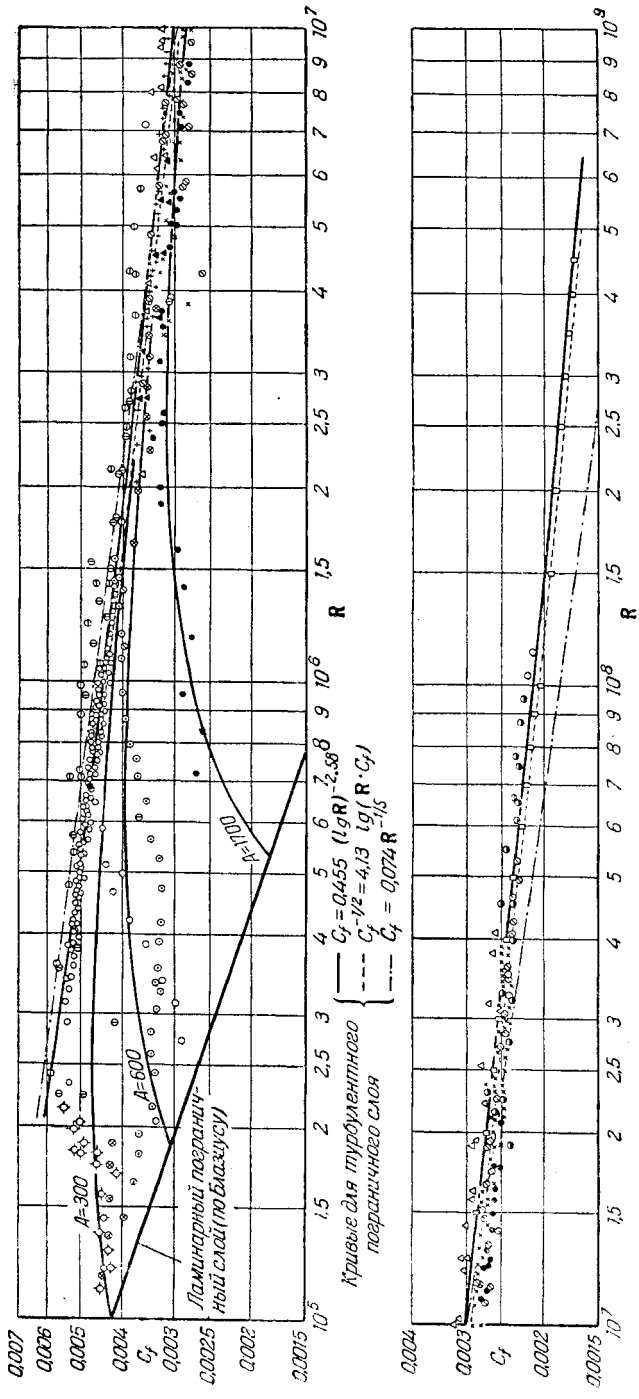


Рис. 108.

Так как при задании (7.27) получается сложная формула для коэффициента сопротивления трения пластинки, то на основании проведённых вычислений была предложена интерполяционная формула в виде

$$C_f = \frac{0,472}{(\ln R_L)^{2,58}}. \quad (7.28)$$

Опытным данным чисто турбулентного пограничного слоя на пластинке без участка ламинарного слоя в носовой части хорошо отвечает также и степенная зависимость в виде

$$C_f = 0,0307 R_L^{-1/7}. \quad (7.29)$$

На рис. 108 приведены графики зависимости коэффициента сопротивления трения пластинки от числа Рейнольдса, отвечающие формулам (7.19) (числитель второго слагаемого в этой формуле обозначен через A), (7.28) и формуле, аналогичной формуле (6.28). На этом рисунке различными значками отмечены данные экспериментальных измерений, проведённых многими исследователями.

В ряде работ интегральное соотношение (7.7) было использовано и для приближённого определения закономерностей турбулентного пограничного слоя на крыле с учётом перепада давления¹⁾.

§ 8. Свободные турбулентные движения

В предшествующих параграфах рассматривались те случаи установившихся турбулентных движений вязкой несжимаемой жидкости, которые имеют место при наличии твёрдых стенок. Однако в природе и технике встречаются случаи установившихся турбулентных движений жидкостей и газов без ограничивающего влияния твёрдых границ и без наличия продольных перепадов движения. Характерными примерами таких движений могут служить: 1) движение частиц жидкости в струе, вытекающей из какого-либо резервуара в пространство, занятое той же самой жидкостью, но находящейся в покое на достаточном удалении от отверстия, 2) движение жидкости позади выпуклого тела на достаточном от него удалении при обтекании этого тела безграничным потоком, т. е. движение в так называемом следе за обтекаемым телом. Эти два случая *свободных турбулентных движений* имеют общие черты, заключающиеся в том, что внешняя граница, отделяющая область турбулентного движения жидкости от остальной части жидкости, постепенно расширяется по мере удаления в случае струи от отверстия, а в случае следа — от обтекаемого тела, и в том, что распределение основных скоростей по сечениям, перпендикулярным к основному направлению течения в струе

1) Лойцянский Л. Г., Прикл. матем. и мех., т. IX, 1945.

и следе, в обоих случаях представляется подобными друг другу кривыми. Различие же их заключается лишь в том, что в случае струи окружающая её жидкость тормозит движение частиц в струе, и поэтому максимальное значение основной скорости будет иметь место на средней линии, или оси струи, а в случае следа будет происходить наоборот: окружающая след жидкость своим движением будет поддерживать движение примыкающих слоёв следа, и поэтому на средней линии, или оси следа, основная скорость будет иметь наименьшее значение.

К этим двум случаям свободного турбулентного движения были применены полуэмпирические теории турбулентности и результаты расчётов очень хорошо оправдывались результатами измерений в соответствующих опытах. Как уже было указано в § 6, лучшее подтверждение в рассматриваемых случаях свободной турбулентности получила теория Тэйлора, основанная на гипотезе переноса завихрённости. Согласно этой теории в правой части уравнения осреднённого прямолинейного течения за счёт влияния переноса завихрённости появляется дополнительное слагаемое в виде

$$A \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \overline{\rho v' l} \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \quad (8.1)$$

где A — коэффициент турбулентного обмена, v' — поперечная составляющая вектора скорости пульсации и l — длина пути перемешивания завихрённости. Во всех полуэмпирических теориях турбулентности принимается гипотеза

$$v' \sim l \frac{\partial U_x}{\partial y}. \quad (8.2)$$

Таким образом, для изучения турбулентного движения жидкости в струе или в следе за обтекаемым телом могут быть использованы уравнения, аналогичные уравнениям (7.6) турбулентного пограничного слоя с той лишь разницей, что в большинстве случаев давление в струе или в следе можно считать постоянным, т. е. можно полагать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

и что дополнительное слагаемое, обусловленное влиянием поля пульсаций на осреднённое течение, должно браться в виде

$$\rho l^2 \frac{\partial U_x}{\partial y} \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}.$$

Если при этом перейти к обычным обозначениям проекций вектора скорости осреднённого течения, то задача изучения движения жидкости в плоской струе или плоском следе будет сводиться к решению

следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

где l — длина пути перемешивания или характерный линейный масштаб полей пульсаций является неопределённой функцией от координат.

Заметим, что при использовании теории Прандтля, основанной на гипотезе переноса количества движения, правая часть первого уравнения (8.3) имела бы вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[l_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (8.4)$$

где l_1 — путь перемешивания количества движения по Прандтлю. Правая часть (8.4) будет совпадать с правой частью первого уравнения (8.3), если допустим, что 1) путь перемешивания l_1 количества движения не зависит от координаты y , т. е. для каждого сечения струи или следа за обтекаемым телом характерный линейный масштаб полей пульсаций остаётся одним и тем же, но может изменяться при переходе от одного сечения к другому, и 2) путь перемешивания завихрённости связан с путём перемешивания количества движения равенством

$$l = \sqrt{2} l_1. \quad (8.5)$$

Расчёты, проведённые при использовании предположения о постоянстве пути перемешивания в каждом сечении струи и следа, привели к результатам, хорошо согласующимся с результатами опытов в ряде случаев, поэтому это предположение стало исходным в теории свободных турбулентных движений жидкости.

Вторым исходным положением при изучении движения жидкости в свободной струе и в следе за обтекаемым телом явилось предположение о наличии подобия в распределении по сечениям струи или следа отношения основной скорости в произвольной точке сечения к основной скорости, например, на средней линии струи или следа. Если через $b(x)$ обозначить половину условной ширины струи или следа, через u_m — значение основной скорости на средней линии и через η — отношение расстояния y рассматриваемой точки в данном сечении до средней линии к половине ширины струи, то указанная выше гипотеза о подобии в распределении отношения скоростей в соответственных точках различных сечений струи или следа будет представляться в виде

$$\frac{u}{u_m} = f\left(\frac{y}{b}\right) = f(\eta). \quad (8.6)$$

Наконец, в теории свободной турбулентной струи используется предположение о постоянстве полного потока вектора количества

движения основных скоростей по каждому сечению струи. Для случая плоской струи это предположение будет представляться в виде

$$\int_{-b}^b \rho u^2 dy = J_0 = \text{const}, \quad (8.7)$$

где J_0 может быть названа *импульсом струи*.

Расчёты, проведённые с помощью перечисленных выше трёх гипотез, привели к результатам, хорошо согласующимся с результатами опытов, но именно для той области струи, которая достаточно удалена от отверстия резервуара и не содержала в себе так называемого ядра постоянных скоростей. Теория турбулентной свободной струи с учётом образования начального участка подробно развита в работах Г. Н. Абрамовича¹⁾.

Подставляя выражение (8.6) для основной скорости в (8.7), получим:

$$J_0 = 2\rho u_m^2 b \int_0^1 f^2(\eta) d\eta.$$

Таким образом, ширина плоской турбулентной струи связана со скоростью частиц жидкости на средней линии следующим соотношением:

$$b u_m^2 = \text{const}. \quad (8.8)$$

Для пространственной турбулентной струи кругового сечения связь радиуса сечения струи со скоростью частиц на средней линии будет представляться в виде

$$b^2 u_m^3 = \text{const}. \quad (8.9)$$

На основании теории размерностей и гипотезы подобия было сделано предположение о том, что ширина струи возрастает пропорционально расстоянию x от отверстия или от особой точки, названной *полюсом струи*, и это предположение нашло хорошее подтверждение в большинстве случаев.

Таким образом, можно положить:

$$b = cx, \quad (8.10)$$

где c представляет собой безразмерную постоянную, характеризующую степень турбулентности рассматриваемой плоской или пространственной струи и определяемую только из опыта.

На основании (8.8), (8.9), (8.10) можно заключить, что скорость движения частиц по средней линии плоской струи будет убывать

¹⁾ Абрамович Г. Н., Турбулентные свободные струи жидкостей и газов, Госэнергоиздат, 1948.

обратно пропорционально корню квадратному из расстояния x , т. е.

$$u_m = \frac{\beta}{\sqrt{x}}, \quad (8.11)$$

а скорость движения частиц по оси пространственной струи кругового сечения будет убывать обратно пропорционально первой степени этого расстояния, т. е.

$$u_m = \frac{\alpha}{x}. \quad (8.12)$$

Таким образом, основные характеристики плоской и пространственной турбулентной струи определяются с точностью до постоянных равенствами (8.10), (8.11) и (8.12). Следовательно, к дифференциальным уравнениям (8.3) для плоской струи необходимо обращаться только для определения распределения проекций скоростей по сечению струи с учётом граничных условий.

Расчёты в отдельных случаях показали, что правая часть первого уравнения (8.3) без большой ошибки может быть заменена линейным слагаемым, содержащим лишь вторую производную от искомой функции. Для этого достаточно предположить, что коэффициент турбулентного объёма A в (8.1) остаётся почти постоянным при переходе от одной точки к другой в том же сечении струи, и заменить производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ в (8.2) через среднее значение, равное отношению разности скорости на средней линии струи и скорости на границе ($u_0 = 0$) к ширине струи, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_m}{b}. \quad (8.13)$$

Путь перемешивания l можно считать пропорциональным ширине струи, т. е.

$$l \sim b. \quad (8.14)$$

При этих двух дополнительных предположениях коэффициент турбулентного обмена будет представляться в виде

$$A = \overline{rv}l = k\rho u_m, \quad (8.15)$$

а уравнения (8.3) примут вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= k u_m(x) b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Если ввести функцию тока, полагая

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то при использовании (8.6), (8.10) и (8.11) будем иметь:

$$\psi = \int_0^y u \, dy = bu_m \int_0^\eta f(\eta) \, d\eta = bu_m F(\eta) = \beta c x^{1/2} F(\eta). \quad (8.17)$$

При этом значение функции тока на средней линии положено равным нулю. Выполняя дифференцирование по координатам x и y , получим:

$$\left. \begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\beta c \left[\frac{1}{2} x^{-1/2} F(\eta) + x^{1/2} F'(\eta) \frac{d\eta}{dx} \right] = \\ &= -\beta c x^{-1/2} \left[\frac{1}{2} F(\eta) - \eta F'(\eta) \right], \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \beta x^{-1/2} F'(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\beta x^{-3/2} \left[\frac{1}{2} F'(\eta) + \eta F''(\eta) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\beta}{c} x^{-3/2} F''(\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\beta}{c^2} x^{-5/2} F'''(\eta), \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\beta^2 x^{-2} F'(\eta) \left[\frac{1}{2} F'(\eta) + \eta F''(\eta) \right], \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\beta^2 x^{-2} F''(\eta) \left[\frac{1}{2} F'(\eta) - \eta F'(\eta) \right]. \end{aligned} \right\} (8.18)$$

Таким образом, первое уравнение (8.16) будет иметь вид

$$F''F + F'^2 = -\frac{2k}{c} F'''. \quad (8.19)$$

Так как

$$(F^2)'' = 2F''F + 2F'^2,$$

то после двукратного интегрирования уравнения (8.19) получим:

$$F' = -\frac{c}{4k} F^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (8.20)$$

Постоянные интегрирования получим из граничных условий: 1) функция тока ψ на средней линии обращается в нуль:

$$\text{при } \eta = 0 \quad F(\eta) = 0,$$

2) продольная составляющая скорости u принимает экстремальное значение на средней линии струи:

$$\text{при } \eta = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad F''(\eta) = 0,$$

и 3) значение продольной составляющей на средней линии струи обозначается через u_m , т. е.:

$$\text{при } \eta = 0 \quad u = u_m, \quad F'(\eta) = 1.$$

При выполнении перечисленных условий уравнение (8.20) примет вид

$$F' = 1 - \frac{c}{4k} F^2.$$

Если провести интегрирование и учесть условия 1) и 3), то получим:

$$\frac{2\sqrt{\frac{k}{c}} + F}{2\sqrt{\frac{k}{c}} - F} = e^{\eta} \sqrt{\frac{c}{k}},$$

или

$$F = 2\sqrt{\frac{k}{c}} \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{k}}\eta\right). \quad (8.21)$$

Используя (8.18) и (8.21), получим следующие выражения для продольной и поперечной составляющей вектора скорости осреднённого течения в рассматриваемой плоской струе:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_m F'(\eta) = u_m \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{k}}\eta\right), \\ v &= -cu_m \left[\frac{1}{2}F(\eta) - \eta F'(\eta)\right] = \\ &= cu_m \left[\eta \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{k}}\eta\right) - \sqrt{\frac{k}{c}} \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{k}}\eta\right)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Чтобы исключить из рассмотрения постоянные k и c , будем относить расстояния произвольной точки в сечении струи от средней линии к расстоянию той точки от оси, в которой продольная составляющая равна половине скорости на самой средней линии, т. е.

$$y = Y, \quad u = \frac{1}{2}u_m = u_m \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{k}}\frac{Y}{cx}\right).$$

При таком предположении будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\frac{Y}{2x\sqrt{kc}}\right) &= \sqrt{2}, \\ \frac{Y}{2x\sqrt{kc}} &\approx 0,88, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{k}}\eta &\approx 0,88\frac{y}{Y}, \end{aligned}$$

и распределение продольной составляющей скорости по сечению плоской струи будет представляться в виде

$$u = u_m \operatorname{ch}^{-2}\left(0,88\frac{y}{Y}\right). \quad (8.23)$$

На рис. 109 график зависимости (8.23) представлен пунктирной кривой, а сплошной линией представлена та зависимость, которая была получена Толлмином¹⁾ с помощью численного интегрирования

¹⁾ Tollmien W., Zeitsch. f. Ang. Math. u. Mech., т. IV, 1926. Это решение дано в книге: Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, 1941.

уравнений без использования предположения о постоянстве в сечениях струи коэффициента турбулентного объёма A . Данные экспериментов, представленные на рис. 109 кружочками, располагаются тесно вблизи двух расчётных кривых.

Чтобы подсчитать полный расход через сечение рассматриваемой плоской струи, примем, что формула распределения продольных скоростей по сечению струи (8.22) остаётся справедливой и для того случая, когда ширина струи асимптотически стремится к бесконеч.

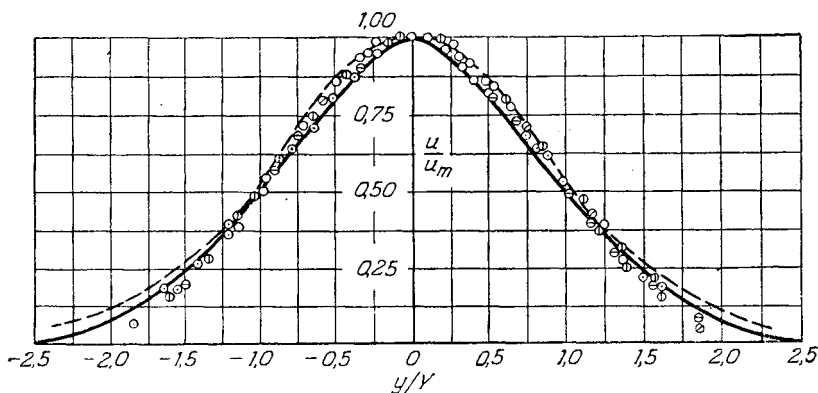


Рис. 109.

ности, т. е. первая формула (8.22) остаётся справедливой для всех значений η от $-\infty$ до $+\infty$. При таком предположении расход массы будет представляться в виде

$$Q = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u \, dy = \rho b u_m \int_{-\infty}^{+\infty} F'(\eta) \, d\eta = 4 \sqrt{\frac{k}{c}} \rho b u_m.$$

Учитывая при этом (8.8) и (8.10), получим:

$$Q = 4\beta \sqrt{kc} \rho \sqrt{x}. \quad (8.24)$$

Таким образом, расход массы в плоской струе в начале струи обращается в нуль, затем растёт неограниченно. Иначе говоря, вся струя состоит из той жидкости, которая увлекается действием струи из окружающего струю пространства.

§ 9. Структура турбулентного изотропного потока

В предшествующих параграфах были рассмотрены те простейшие случаи турбулентных установившихся осреднённых течений жидкости, для изучения которых было достаточно использовать понятие о турбулентном трении и некоторые предположения о подобии распреде-

ления осреднённых скоростей и совершенно не потребовалось рассмотрение внутренней структуры полей пульсации.

Качественные соображения о возможной структуре пульсационных движений жидкости были подробно развиты А. Н. Колмогоровым ¹⁾. Согласно этим соображениям на осреднённый поток жидкости при больших значениях числа Рейнольдса накладываются поля «пульсаций первого порядка», состоящие в беспорядочном перемещении друг относительно друга объёмов жидкости с диаметром порядка длины характерного масштаба l_1 , учитываемого в полуэмпирических теориях турбулентности. Поля пульсаций первого порядка при очень больших значениях R теряют свою устойчивость и на них накладываются поля «пульсаций второго порядка» с линейным масштабом $l_2 < l_1$ и относительными скоростями $v_2 < v_1$. Такой процесс последовательного измельчения полей турбулентных пульсаций будет происходить до тех пор, пока для пульсаций порядка n число Рейнольдса

$$R = \frac{l_n v_n}{\nu}$$

не окажется настолько малым, что дальнейшее дробление пульсаций парализуется существенным влиянием вязкости. Такая каскадная структура пульсационного движения жидкости с энергетической точки зрения становится возможной, если предположить, что пульсации первого порядка зарождаются и поддерживаются благодаря переносу энергии от самого осреднённого течения и в свою очередь передают часть энергии пульсациям второго порядка, а от этих пульсаций происходит передача энергии пульсациям третьего порядка и т. д.; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается благодаря вязкости в теплоту. Такое представление о переносе энергии от пульсаций с большими масштабами к пульсациям меньших масштабов позволяет предполагать, что масштабы полей пульсаций и величины скоростей пульсаций в известной мере будут предопределяться плотностью потока энергии, вносимой в данное поле пульсаций со стороны поля пульсаций предшествующего порядка. Исключение может представить только поле «пульсаций наибольшего порядка», масштабы которого естественно поставить в связь с удельной энергией, рассеиваемой благодаря вязкости в единицу времени и на единицу массы. Если учесть размерности удельной энергии и кинематического коэффициента вязкости

$$[\varepsilon] = L^2 T^{-3}, \quad [\nu] = L^2 T^{-1},$$

то легко установить, что единственной комбинацией этих величин, имеющей размерность длины, будет:

$$\tau_1 = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}. \quad (9.1)$$

¹⁾ Колмогоров А. Н., ДАН СССР, т. XXX, № 4, 1941.

Величина η , представляемая в виде (9.1), была введена в цитированной выше работе А. Н. Колмогорова в качестве масштаба поля «пульсаций наибольшего порядка», постепенно затухающих благодаря вязкости, и названа впоследствии *внутренним масштабом турбулентности*. Характерный масштаб полей пульсаций первого порядка назван *внешним масштабом турбулентности*. Знание величины внутреннего масштаба турбулентности полезно и практически в том отношении, что для измерения истинного градиента скорости в турбулентном потоке необходимо измеряющие приборы устанавливать на расстоянии, меньшем, чем η . По имеющимся данным величина этого масштаба для турбулентности в атмосфере равна примерно одному сантиметру, а в условиях аэродинамических труб имеет порядок долей миллиметра.

Рассуждения, проведённые выше при определении внутреннего масштаба турбулентности, не могут быть непосредственно перенесены на определение *внешнего и промежуточных масштабов турбулентности* на том основании, что по мере понижения «порядка пульсации», т. е. по мере повышения масштаба турбулентности, должна уменьшаться зависимость его от вязкости жидкости. Таким образом, при оценке промежуточных масштабов турбулентности мы должны коэффициент вязкости из рассмотрения исключить и сохранить лишь удельную энергию ε_k , под которой теперь следует понимать не энергию, рассеиваемую в теплоту, а энергию, передаваемую от поля пульсаций данного порядка к полю пульсаций порядка k на единицу выше. Рассматривая удельную энергию ε_k и сам линейный масштаб l_k поля пульсаций порядка k с точки зрения размерностей, мы видим, что из них можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность скорости, в виде

$$v_k = (\varepsilon_k l_k)^{1/3} \quad (1 \leq k \leq n-1). \quad (9.2)$$

Таким образом, если под v_k понимать величину скорости пульсации «порядка k », т. е. разность действительных скоростей движения жидкости в двух точках, находящихся на расстоянии l_k друг от друга, то равенство (9.2) представляет собой полученный впервые А. Н. Колмооровым *закон пропорциональности разности скоростей турбулентного движения в двух точках расстоянию между этими точками в степени одной трети*.

Приведённые выше соображения о внутреннем строении полей пульсаций носят преимущественно качественный характер.

Прежде чем переходить к количественной стороне вопроса, необходимо обратить внимание на следующее. Пульсационное движение жидкости является неупорядоченным движением и оно сходно во многих отношениях с движениями отдельных молекул газа. Поэтому изучать это движение с количественной стороны методами классической механики на основе дифференциальных уравнений дви-

жения с учётом начальных условий не представляется возможным. В силу необходимости приходится кинематические и динамические характеристики движения рассматривать как *случайные функции*, принимающие определённые значения из ряда возможных лишь с некоторой степенью *вероятности*, и вместо самих истинных характеристик движения приходится в расчётах вводить их *математические ожидания* в виде интегралов по времени от произведений вероятности на возможные значения рассматриваемых характеристик, отнесённых к промежутку интегрирования. При выполнении некоторых условий эти математические ожидания будут совпадать с осреднёнными значениями рассматриваемых характеристик по времени в том же смысле, в котором было введено осреднение в § 2. До сих пор без особых оговорок принималось, что для изучаемых турбулентных движений жидкости условия, позволяющие отождествлять математические ожидания характеристик с их осреднёнными значениями в обычном смысле, с достаточной степенью приближения выполняются. Все эти соображения и побудили отдельных исследователей пойти на комбинирование методов классической механики с методами статистической механики и наряду с понятиями, имеющими место в классической гидродинамике, ввести понятия из теории вероятностей в качестве *статистических характеристик кинематики турбулентного движения*. Как уже было указано выше, *статистическая теория турбулентности* впервые была выдвинута в работах Л. В. Келлера и А. А. Фридмана¹⁾, а в последние 15 лет наиболее успешно разрабатывалась А. Н. Колмогоровым²⁾ и его учениками. За границей статистическая теория турбулентности разрабатывалась Бюргерсом³⁾, Тэйлором⁴⁾, Карманом⁵⁾ и др.

Развитие статистической теории турбулентности идёт по двум различным направлениям: 1) в направлении использования моментов связи проекций скоростей различных порядков или коэффициентов корреляций и связанных с этими понятиями *структурных функций* или корреляционных функций, определяющих в известной мере масштабы элементов турбулентности в предположении *однородности и изотропности потока*, и 2) в направлении использования спектральных функций или спектрального тензора, связанных с пульсациями кинетической энергии и статистическим распределением этой энергии по волновым числам. В частных случаях спектральные функции и корреляционные функции связаны обычным преобразованием Фурье.

1) См. ссылку на стр. 458.

2) См. библиографию в книге «Механика в СССР за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.

3) См. перевод в книге «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

4) См. библиографию к гл. XIX книги «Проблемы космической аэродинамики», ИЛ, 1953.

5) См. там же.

Мы дадим весьма краткое изложение тех основных понятий, которые используются в работах первого направления, и при этом будем держаться той трактовки этих понятий, которая нашла своё отражение в работах А. Н. Колмогорова и его последователей.

Обозначим характерный линейный масштаб всего потока в целом через L , а характерную скорость через U и будем предполагать число Рейнольдса

$$R = \frac{UL}{\nu} \quad (9.3)$$

всего потока в целом настолько большим, что представление о каскадном строении полей пульсаций становится вполне возможным. *Пульсации различных порядков* будем далее именовать *вихрями различных масштабов*. Под достаточно малой областью будем разуметь область, линейные размеры которой малы по сравнению с масштабом всего потока L .

В достаточно малой области, зафиксированной внутри области всего потока, возьмём две точки O и M , из которых первую будем считать фиксированной, а вторую текущей, т. е. вторая точка может быть совмещена с любой точкой внутри фиксированной малой области. Вводим в рассмотрение разность векторов скоростей в двух указанных точках в виде

$$V_{OM} = W = V(M) - V(O). \quad (9.4)$$

Эта разность векторов скоростей (9.4) как раз и принимается в статистической теории турбулентности А. Н. Колмогорова в качестве исходной кинематической характеристики так называемой *локальной структуры* турбулентного потока. Из этой разности векторов скоростей составляются затем с помощью операции осреднения по времени *статистические характеристики локальной турбулентности*, аналогичные моментам связей проекции векторов скоростей пульсаций в двух точках, введённым впервые в цитированной выше работе Л. В. Келлера и А. А. Фридмана и широко используемым в работах Л. Г. Лойцянского ¹⁾, Л. И. Седова ²⁾ и др. При выводе общих уравнений турбулентности Рейнольдса в § 3 и в последующих параграфах в качестве исходной кинематической характеристики турбулентности был принят вектор пульсации в виде разности истинного вектора скорости и вектора скорости осреднённого течения в одной и той же точке, т. е.

$$V' = V(M) - \bar{V}(M). \quad (9.5)$$

При сопоставлении смысла двух исходных кинематических характеристик турбулентности (9.4) и (9.5) можно придти к выводу, что

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Труды ЦАГИ, № 440, 1939.

²⁾ Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, 1951.

характеристика (9.4) полнее и более правильно может отражать основные свойства турбулентности, чем (9.5), и к тому же эта характеристика непосредственно может определяться в опытах с помощью соответствующих приборов для каждого момента времени, тогда как для определения характеристики (9.5) необходима целая серия экспериментальных измерений и соответственных расчётов. Последнее обстоятельство служит решающим аргументом в пользу исходной характеристики (9.4). Кроме того, следует учесть то, что в правой части (9.4) находится разность векторов скоростей *действительного* движения в двух точках, тогда как в правой части (9.5) находится разность одного вектора скорости действительного движения и второго искусственно введённого вектора скорости осреднённого течения. Следовательно, разность (9.4) характеризует *действительное относительное движение одного элементарного объёма жидкости по отношению ко второму*. В частности, проекция этой разности на направление отрезка, соединяющего две рассматриваемые точки O и M , будет представлять собой относительную скорость сближения или удаления друг от друга элементарных объёмов жидкости, а проекции разности (9.4) на направления, перпендикулярные к указанному отрезку, будут представлять линейные относительные скорости от вращения и сдвига одного элемента относительно другого. И, наконец, последнее преимущество исходной характеристики турбулентности движения (9.4) перед характеристикой (9.5) заключается в том, что она учитывает влияние лишь тех вихрей, линейный масштаб которых меньше характерного масштаба фиксированной малой области, поэтому она и служит характеристикой локальной турбулентности. Вихри, масштабы которых больше масштаба фиксированной области, будут вызывать лишь поступательное движение всей малой области, т. е. индуцировать примерно одинаковые скорости в точках O и M , и по этой причине эти скорости будут выпадать при определении разности (9.4).

В качестве первых статистических характеристик локальной турбулентности принимаются осреднённые по времени значения произведений проекций разности (9.4) на оси координат инерциальной системы отсчёта (x_1, x_2, x_3). Совокупность таких статистических характеристик составляет *структурный тензор второго ранга локальной турбулентности* со следующими составляющими:

$$D_{ij} = \overline{\omega_i \omega_j} = \overline{[v_i(M) - v_i(O)] [v_j(M) - v_j(O)]}, \quad (9.6)$$

где $v_i(M)$ и $v_j(O)$ представляют собой проекции векторов $V(M)$ и $V(O)$ на указанные оси координат. В качестве вторых статистических характеристик локальной турбулентности принимаются величины

$$D_{ijk} = \overline{[v_i(M) - v_i(O)] [v_j(M) - v_j(O)] [v_k(M) - v_k(O)]}, \quad (9.7)$$

представляющие собой осреднение по времени значения произведений трёх проекций разности (9.4) на указанные оси координат.

Если предположить, что вектор скорости действительного движения представляет собой непрерывную функцию от пространственных координат, то в малой окрестности фиксированной точки O вектор относительной скорости (9.4) будет представляться в виде

$$\begin{aligned} V(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3, t) - V(x_1, x_2, x_3, t) = \\ = \sum_{k=1}^{k=3} \xi_k \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \right)_O + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{m=1}^{m=3} \xi_k \xi_m \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \right)_O + \dots, \quad (9.8) \end{aligned}$$

т. е. исходная характеристика движения жидкости будет зависеть только от времени и относительных координат, и в этом смысле движение может считаться *кинематически однородным*. При этом предположении (9.8) все статистические характеристики (9.6), (9.7) и др. также будут зависеть только от времени и относительных координат точки M по отношению к O , и поэтому в этом смысле движение может считаться и *статистически однородным* в той малой окрестности, которая целиком расположена внутри фиксированной малой области. В частности, для составляющих структурного тензора второго ранга (9.6) будем иметь выражение

$$\begin{aligned} D_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{m=1}^{m=3} \xi_k \xi_m \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{m=1}^{m=3} \sum_{l=1}^{l=3} \xi_k \xi_m \xi_l \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \right)_O + \dots \quad (9.9) \end{aligned}$$

Определение локально однородной турбулентности можно дать и независимо от требования непрерывности вектора скорости действительного движения и независимо от требования малости окрестности точки O . А именно турбулентное движение называется *локально однородным*, если все статистические характеристики движения будут функциями только от времени и разностей абсолютных координат двух точек, причём эти функции и их коэффициенты не будут зависеть от расположения фиксированной точки внутри указанной выше малой области. При таком определении составляющие структурного тензора второго ранга должны рассматриваться прежде всего как функции относительных координат точки M по отношению к точке O . Что же касается зависимости статистических характеристик турбулентности от времени, то такая зависимость, вообще говоря, может допускаться при скользящем интервале времени осреднения.

Из множества локально однородных турбулентных движений можно выделить класс наиболее простейших турбулентных движе-

ний, удовлетворяющих требованию *изотропности*. Предварительно сошлёмся на некоторые опытные данные. Измерения составляющих вектора скорости ветра в природных условиях показывают, что величины осреднённых по времени квадратов горизонтальной и вертикальной составляющих скоростей различны, но это различие уменьшается по мере удаления от поверхности земли. Таким образом, происходит выравнивание осреднённых по времени квадратов проекций вектора скорости пульсаций. Такое же выравнивание квадратов проекций вектора скорости пульсаций было обнаружено с помощью ультрамикроскопа в круглой трубе по мере приближения к оси трубы. Наконец, в аэродинамической трубе, где турбулентность регулируется решёткой, устанавливается такое турбулентное движение, при котором осреднённые по времени величины квадратов трёх проекций вектора скорости пульсации равны между собой. Это свойство рассматриваемых видов турбулентных движений и названо *изотропностью*. Таким образом, *турбулентное движение жидкости считается изотропным, если значение осреднённого по времени квадрата проекции вектора скорости пульсации не зависит от того направления, на которое проектируется вектор скорости пульсаций*. Возьмём в данной точке произвольное направление с направляющими косинусами

$$\cos(\widehat{\Delta, x_1}), \quad \cos(\widehat{\Delta, x_2}), \quad \cos(\widehat{\Delta, x_3}).$$

Тогда проекция вектора скорости пульсации на это направление будет равна

$$v'_\Delta = v'_1 \cos(\widehat{\Delta, x_1}) + v'_2 \cos(\widehat{\Delta, x_2}) + v'_3 \cos(\widehat{\Delta, x_3}). \quad (9.10)$$

На основании данного выше определения изотропности турбулентного движения мы должны иметь:

$$\overline{(v'_\Delta)^2} = \overline{(v'_1)^2} = \overline{(v'_2)^2} = \overline{(v'_3)^2}. \quad (9.11)$$

Если обе части (9.10) возвести в квадрат и провести осреднение по времени, то для выполнения условия изотропности (9.11) необходимо, чтобы осреднённые по времени значения произведений проекций вектора скорости пульсаций на две различные оси были бы равны нулю, т. е.

$$\overline{v'_i v'_j} = 0 \quad (i \neq j). \quad (9.12)$$

Условия (9.12) означают, во-первых, то, что в изотропном турбулентном движении жидкости нет статистической связи (корреляции) между проекциями вектора скорости пульсаций на различные оси и, во-вторых, то, что тензор турбулентных напряжений для изотропного движения жидкости будет состоять только из одного нормального напряжения, величина которого к тому же не зависит от

ориентации площадки, на которой определяется турбулентное напряжение.

Данное выше определение изотропной турбулентности движения касалось только величин квадратов самих проекций вектора скорости пульсации. Более развёрнутое определение изотропности турбулентного движения включает в себя и требования, накладываемые на производные от проекции вектора пульсаций, а именно: *турбулентное движение жидкости называется изотропным, если осреднённые значения квадратов проекций вектора скорости пульсаций и их первых производных по координатам выбранных осей остаются неизменными при повороте этих осей и при изменении их ориентации.* На основании этого требования к производным от проекций вектора скорости пульсации осреднённые значения квадратов первых производных от проекций вектора скорости пульсаций, удовлетворяющих круговой замене осей координат, будут равны между собой, т. е. будут иметь место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x_1}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_2}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v'_3}{\partial x_3}\right)^2} = a_1, \\ \overline{\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x_2}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_3}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v'_3}{\partial x_1}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x_3}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_1}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v'_3}{\partial x_2}\right)^2} = a_2. \end{aligned} \right\} (9.13)$$

Осреднённые значения произведений производных, удовлетворяющих также условию круговой замены осей координат, будут равны между собой, а если произведения не удовлетворяют условию круговой замены осей и меняют знак при замене, например x_1 через $-x_1$, то их осреднённые по времени значения должны равняться нулю. На основании этих требований будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\frac{\partial v'_1}{\partial x_2} \frac{\partial v'_2}{\partial x_1}} &= \overline{\frac{\partial v'_2}{\partial x_3} \frac{\partial v'_3}{\partial x_2}} = \overline{\frac{\partial v'_3}{\partial x_1} \frac{\partial v'_1}{\partial x_3}} = a_3, \\ \overline{\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \frac{\partial v'_2}{\partial x_2}} &= \overline{\frac{\partial v'_2}{\partial x_2} \frac{\partial v'_3}{\partial x_3}} = \overline{\frac{\partial v'_3}{\partial x_3} \frac{\partial v'_1}{\partial x_1}} = a_4, \\ \overline{\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \frac{\partial v'_2}{\partial x_1}} &= 0, \quad \overline{\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \frac{\partial v'_2}{\partial x_1}} = 0, \quad \overline{\frac{\partial v'_2}{\partial x_2} \frac{\partial v'_1}{\partial x_2}} = 0, \dots \end{aligned} \right\} (9.14)$$

Связь между введёнными величинами a_1 , a_2 , a_3 и a_4 можно установить, если, во-первых, использовать уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v'_3}{\partial x_3} = 0.$$

Если возвести в квадрат левую часть этого уравнения, произвести осреднение по времени и учесть приведённые ниже равенства, то

получим:

$$a_1 + 2a_4 = 0. \quad (9.15)$$

Второе соотношение между этими величинами мы получим, если обратимся к преобразованиям поворота осей координат на угол в 45° . Например, при повороте осей координат вокруг оси z на 45° будем иметь формулы преобразования в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x'_1 &= x_1 + x_2, & \sqrt{2}u'_1 &= v'_1 + v'_2, \\ \sqrt{2}x'_2 &= -x_1 + x_2, & \sqrt{2}u'_2 &= -v'_1 + v'_2. \end{aligned}$$

Первая производная $\frac{\partial v'_1}{\partial x_1}$ при этом преобразовании представится в виде

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} \right)$$

и поэтому

$$a_1 = \left(\overline{\frac{\partial v'_1}{\partial x_1}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left(\overline{\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1}} \right)^2 + \left(\overline{\frac{\partial u'_2}{\partial x'_1}} \right)^2 + \dots - 2 \overline{\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1}} - \dots - 2 \overline{\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2}} \right\}.$$

Объединяя в этом равенстве члены, равные по условиям изотропии, получим:

$$a_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4),$$

или

$$a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0. \quad (9.16)$$

Третье соотношение между величинами a_1 , a_2 , a_3 и a_4 можно получить для случая отсутствия осреднённого течения жидкости и в предположении, что для чисто пульсационного движения вязкой жидкости сохраняют свою силу полные уравнения движения вязкой жидкости, из которых при отсутствии массовых сил можно получить следующее выражение для оператора Лапласа от давления:

$$-\frac{\Delta p}{\rho} = \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_3}{\partial x_3} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_1} \frac{\partial v'_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v'_3}{\partial x_2} \frac{\partial v'_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v'_1}{\partial x_3} \frac{\partial v'_3}{\partial x_1} \right). \quad (9.17)$$

Если провести осреднение по времени равенства (9.17) и учесть равенства (9.13) и (9.14), то получим:

$$-\overline{\frac{\Delta p}{\rho}} = 3a_1 + 6a_3. \quad (9.18)$$

Обычно в качестве гипотезы принимается, что в однородном поле

пульсаций осреднённое значение оператора Лапласа от давления равно нулю, т. е.

$$\overline{\Delta p} = 0. \quad (9.19)$$

При этой гипотезе мы получим третье соотношение

$$a_1 + 2a_3 = 0. \quad (9.20)$$

На основании трёх соотношений (9.15), (9.16) и (9.20) получим соотношение между осреднёнными значениями квадратов производных от проекций скоростей и отличных от нуля произведений этих производных

$$a_1 = \frac{1}{2} a_2 = -2a_3 = -2a_4. \quad (9.21)$$

Используя это соотношение, можно найти осреднённое значение энергии рассеивания в единицу времени и в единице объёма при чисто пульсационном изотропном движении

$$\bar{E}_\pi = \frac{1}{2} \mu \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{k=1}^{k=3} \left(\overline{\frac{\partial v'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} \right)^2 = 6\mu (a_1 + a_2 + a_3) = 15\mu a_1. \quad (9.22)$$

Изложенное выше определение изотропности турбулентного движения несжимаемой жидкости дано по отношению лишь к тем осреднённым характеристикам движения, которые могут иметь место для каждой точки в отдельности внутри области течения. Определение изотропности турбулентного движения жидкости по отношению к статистическим характеристикам движения, относящимся, например, к двум точкам внутри области течения, должно быть соответственным образом видоизменено.

По отношению к статистическим характеристикам локальной структуры турбулентности (9.6) и (9.7) движение жидкости только тогда и считается *локально изотропным* в фиксированной малой области, когда, помимо условия однородности, выполняются и условия инвариантности структурных тензоров по отношению к вращению исходной системы координат и по отношению к их зеркальным отображениям. При выполнении этих условий составляющие структурного тензора второго ранга будут представляться в виде

$$D_{ij}(O, M) = A(r) \xi_i \xi_j + B(r) \delta_{ij}, \quad (9.23)$$

где ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 — относительные координаты точки M по отношению к O , r — расстояние точки M от точки O , т. е.

$$r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

$A(r)$ и $B(r)$ — неизвестные функции от расстояния r , а δ_{ij} представляет символ, принимающий значения

$$\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Обозначим проекции векторов скоростей в точках M и O на направление самого отрезка, соединяющего эти две точки, через $v_l(M)$ и $v_l(O)$ и на некоторое направление, перпендикулярное к этому отрезку, через $v_n(M)$ и $v_n(O)$. Тогда продольная структурная функция

$$D_{ll}(r) = \overline{[v_l(M) - v_l(O)]^2} \quad (9.24)$$

будет представлять собой осреднённое по времени значение квадрата относительной скорости сближения или удаления элементарных объёмов жидкости, расположенных в точках M и O . А поперечная структурная функция

$$D_{nn}(r) = \overline{[v_n(M) - v_n(O)]^2} \quad (9.25)$$

будет представлять собой осреднённое значение квадрата относительной скорости от вращения и сдвига одного элементарного объёма по отношению к другому.

Полагая в (9.23) вначале $i = j = l$, а затем $i = j = n$, получим:

$$D_{ll} = A(r)r^2 + B(r), \quad D_{nn} = B(r).$$

Определяя из этих равенств функции $A(r)$ и $B(r)$ и подставляя их значения в (9.23), получим:

$$D_{ij}(O, M) = \frac{D_{ll}(r) - D_{nn}(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + D_{nn}(r) \delta_{ij}. \quad (9.26)$$

Введённые структурные функции (9.24) и (9.25) являются основными в теории локальной турбулентности, развиваемой в цитированных выше работах А. Н. Колмогорова, А. М. Обухова и др.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрамович Г. Н. 496
Архимед 11

Бассе 170
Бачинский А. И. 34
Белякова В. К. 387
Бернулли Д. 13, 253
Бингам 68
Блазиус 261, 476
Боссю 14
Бочер 67, 68
Бриджмен П. В. 66
Буссинеск 350, 434
Бэрстоу 170
Бюргерс 503

Воларович 68

Гаген 20, 427
Гамель 146
Гатчек Э. 181
Гельмгольц 38, 232
Голубев В. В. 264, 266
Гольдштейн 24, 248
Громека И. С. 322
Гук 14

Даламбер 13, 26
Дарси 433
Дюбуа 14
Дюгамель 304, 312
Дюрэнд 322

Жирар 14, 16
Жуковский Н. Е. 23, 208, 253

Ильюшин А. А. 68

Карман 147, 264, 266, 388, 471, 503
Келлер Л. В. 458, 503, 504
Кельвин 69, 387
Кибель И. А. 119, 264
Клеро 12

Колмогоров А. Н. 458, 501, 502, 503,
504, 511

Коровчинский М. В. 170
Космодемьянский А. А. 267
Кочин Н. Е. 119, 264, 272
Коши 14, 18, 19, 33, 67, 101, 310
Кулон 14
Купле 14

Лагранж 26
Ламб Г. 170, 238
Ландау Л. 153
Лаплас 74, 307
Лежандр 242
Лейбензон Л. С. 120, 197, 264, 266, 351
Леонардо да Винчи 11
Леонтович М. А. 66
Лин 387, 416, 418, 419, 421
Лифшиц Е. 153
Лойцянский Л. Г. 267, 272, 279, 458,
484, 493, 499, 504
Ломоносов М. В. 12
Лоренц 387, 388
Ляме 47

Максвелл 34, 69, 77
Мандельштам Л. И. 66
Менделеев Д. И. 23, 253
Мещерский И. В. 218
Микель Анджело 11
Миллионщиков М. Д. 458
Михлин С. Г. 165
Мухелишвили Н. И. 158, 165

Навьё 14, 15, 16, 253, 322
Невзглядов В. Г. 458
Никурадзе И. 361, 475, 478, 483
Ньютон И. 11, 12, 64, 135

Обухов А. М. 458, 511
Одквист 165
Озеэн 24, 146, 170, 225, 226, 227,
262
Орр 388

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Панченков Г. М. 35
Петров Н. П. 21, 22, 135, 190, 433
Польгаузен 267
Прандтль Л. 23, 24, 253, 436, 467, 475
Прони 13
Пуазейль 20, 127
Пуассон 14, 17, 117, 253
- Рейнольдс О. 21, 22, 23, 107, 124, 387, 388, 434, 449, 452, 465
Розе Н. В. 119, 264
Розенблатт 146
Рэлей 387
- Сайндж 388
Седов Л. И. 153, 504
Сен-Венан 14, 19, 20, 33, 120, 433
Скремстед 420
Скэн 272
Слэзкин Н. А. 150, 189, 197, 293
Степанов Е. И. 297
Стокс 12, 14, 20, 21, 33, 135, 150, 155, 156, 164, 181, 253
Струхаль 107
- Тарг С. М. 218, 280, 351, 361, 384
Тёпфер 262
Томотика 238
Тэйлор 425, 469, 471, 503
- Уилтон 165
Умов Н. А. 87
- Факсен 238
Фогт 69
Фокнер 272
Фридман А. А. 458, 503, 504
Фруд 107
- Хансен 264
Хартри 272, 275
Хопф 404
- Чаплыгин С. А. 23, 208
- Шези 14
Шиллер Л. 350
Шиманский П. 322
Шубауэр 420
- Эйлер 12, 26, 107
Эйфель 436
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналогия задачи о прямолинейно-параллельном движении вязкой жидкости с задачами вращения идеальной жидкости и с задачей кручения призматического бруса 118
— прокатки гидродинамическая 218
Аэромеханика 10
- Бачинского формула 35
Блазиуса формула 483
Бугор шероховатости 484
- Вектор вихря частицы 37
— напряжения 51
— плотности потока массы 74
— — — переноса полной энергии 87
— потока количества движения от пульсации движения жидкости, осреднённый по времени 455
— — тепла 34
— скорости осреднённого движения частиц в фиксированном объёме и в фиксированном интервале времени 444
— — поля пульсаций 444
Вероятность 503
Взаимность касательных напряжений 57
Вискозиметр 181
Вихри различных масштабов 504
Вихрь частицы 37
— эллиптический 405
Вращение безграничной плоскости 146
— круглого цилиндра в неограниченной жидкости 330
— сферы, наполненной жидкостью 337
— шара в вязкой жидкости 184
Вязкость 30, 31, 33
— исчезающая 252
- Газ 27
Гельмгольца теорема 38
Гельмгольца уравнение 232
Гидродинамика 9
— жидкости несжимаемой вязкой 10
— — — идеальной 10, 11, 12
Гидростатика 11, 12
Гипотеза Ньютона о вязкости жидкости 12, 21, 31
— — обобщённая 64, 65
— о сплошности жидкой среды 15, 26
Голубева интегральное соотношение 266
Громеки задача 322
Гука закон 14
- Давление 10
— динамическое 116
— осреднённое 442
— статическое 116
Движение взвешенной частицы в ламинарном потоке 427
— жидкости в коническом диффузоре 186
— — в круглой кольцевой трубе 130
— — в плоском диффузоре 134, 174, 362 и д.
— — в цилиндрической трубе 126, 322, 357, 475
— — вихревое 101
— — круговое между двумя вращающимися цилиндрами 134
— — — неустановившееся 326
— — — установившееся 132
— — — ламинарное 123, 129, 385 и д., 433
— — — в пограничном слое, устойчивость 412
— — — между параллельными стенками 121, 319, 350, 412
— — — с прямолинейным профилем распределения скоростей 398
— — — устойчивое 386
— — — макроскопическое 28

- Движение жидкости между двумя со-
 осными конусами 189
 — — между искривлёнными стен-
 ками 137
 — — плоско-параллельное устано-
 вившееся 157
 — — при наличии свободной гра-
 ницы 124
 — — прямолинейно-параллельное 115
 и д.
 — — радиальное 139
 — — — чисто расходящееся 144
 — — — чисто сходящееся 145
 — — турбулентное 129, 433 и д.
 — — — изотропное 507, 508
 — — — кинематически однород-
 ное 506
 — — — локально изотропное 510
 — — — — однородное 506
 — — — свободное 493 и д.
 — — — статистически однородное
 506
 — — неограниченной плоскости в
 жидкости 306
 — осреднённые системы точек 439
 — пульсационное 439
 — цилиндра в жидкости 161, 234
 — шара в жидкости 177, 341
 Девиатор напряжений 58, 65
 — скоростей деформации 45, 65
 Деформация 27
 Дивергенция вектора скорости 73
 — — — в криволинейных координа-
 тах 74
 Динамика газовая 10
 Диффузия 33
 — вихревого слоя 315, 318
 — вихревой нити 333
 Диффузор конический 186, 299, 374
 и д.
 — плоский 134, 143, 174, 362 и д.
 Длина начального участка 356, 362, 386
 — пути перемешивания 473
 — свободного пробега молекул 34
 Дюгамеля формула 304
- Жидкость** 27
 — вязкая 66, 98
 — идеальная 66, 98
 — изотропная 60
 — капельная 27
 Жуковского теория смазки 208
- Задача Громеки о движении жидкости
 в цилиндрической трубе** 322
 — общая гидродинамики вязкой
 жидкости 97
- Закон Гука 14
 — Ломоносова о сохранении массы 13
 Затухание вращения тела в потоке 293
- Изменение конвективное вектора ско-
 рости частицы с постоянной мас-
 сой** 78
 Изображение функции по Лапласу 307
 Изотропность турбулентного по-
 тока 507
 Импульс силы 9
 — струи 283, 496
 Инварианты тензора напряжений 56
 — — скоростей деформации 45
 Интеграл Лагранжа-Коши 101
 Интенсивность касательных напря-
 жений 58
 — скоростей деформации сдвига ча-
 стицы 46
 Источник импульсный 150
- Кармана интегральное соотноше-
 ние** 266
 — теория подобия полей пульсаций
 467, 471
 Качение цилиндра по плоскости, по-
 крытой слоем вязкого вещества 214
 Компоненты тензора скоростей де-
 формации 38, 47
 Конфузор 145
 Координаты сферические 81, 92
 — цилиндрические 80, 81, 91
 Коши теорема о взаимности напря-
 жений 57
 Коэффициент вязкости 16, 18, 34,
 65, 127
 — — кинематический 32
 — — объёмной (второй коэффициент
 вязкости) 18, 60
 — подобия геометрического 108
 — — кинематического 108
 — сопротивления 123, 128, 434, 482
 — трения внешнего 16, 94
 — — качения 218
 — турбулентного обмена 458
 Кризис сопротивления 436
 Критерий Рейнольдса 109
 — Фруда 109
- Лагранжа-Коши интеграл** 101
 Лапласа функциональное преобразо-
 вание 307
 Лейбензона интегральное соотноше-
 ние 266
 Ломоносова закон 13
 Ляме дифференциальный параметр
 47

- Масштаб турбулентности** внешний 502
 — — внутренний 502
 — — промежуточный 502
Метод Озеена 225 и д.
 — осреднения 28, 435, 438 и д.
 — приближённый решения уравнений пограничного слоя 272
 — функционального преобразования Лапласа 307
 — энергетический 388, 405
Момент связи 457
 — силы 9
Мощность источника вихревого слоя 318

Напор скоростной 109
Напряжение 9, 10, 30, 51
Напряжение касательное 18, 30, 33, 52
 — — главное 58
 — — максимальное 58
 — — нормальное 18, 30, 52
 — — главное 55, 61
 — — среднее 56, 60, 67
 — осреднённое 442
 — предельное сдвига 67, 68
 — пульсационное 455
Невозможность безвихревого движения вязкой жидкости 100
Непрерывность деформирования 15, 28
 — продвижения частиц 27
Нить вихревая, её диффузия 333
Ньютона гипотеза о вязкости 12, 21, 31, 64, 65

Область вихревая 436
Обращение преобразования Лапласа 309
Обтекание выпуклого контура 268
 — неограниченной плоскости 306
 — цилиндра 161, 170, 234
 — шара 177, 341
Ожидание математическое 503
Озеена метод 225 и д.
Оператор Лапласа в криволинейных координатах 74
 — Стокса 150, 177
Операция осреднения 441 и д., 446
Опережение при прокатке 220
Определение коэффициента вязкости капельных жидкостей 127
 — — — сильно вязких жидкостей 181
Оригинал 307
Осреднение 28, 434, 441, 446
 — по времени 443
 — по массе 439
 — по объёму 442
 — произведений двух величин 444

Ось главная деформаций 43
 — — напряжений 55
 — — сходимости интеграла Лапласа 309

Панченкова формула 35
Парадокс Стокса 165
Параметр Ляме дифференциальный 47
 — преобразования Лапласа 307
Период релаксации напряжения 70
Плавление 25
Плотность потока количества движения 34, 77
 — — массы 74
 — — переноса полной энергии 87
Поверхность деформаций 43
 — напряжений 55
Подобие течений 106
 — — геометрическое 107
 — — динамическое 107
 — — кинематическое 107
 — — механическое 107
Подслой ламинарный 480
Поле возмущений 389
 — пульсации 441
Полюс струи 496
Потенциал скоростей 74
Поток импульсов 77
 — тепла 34
Прандтля теория пути перемешивания 467
Преобразование Лапласа функциональное 307
Прилипание частиц вязкой жидкости к твёрдой стенке 95
Принцип наследственности 306
Производная индивидуальная от вектора скорости фиксированной частицы с постоянной массой 78
Прокатка 218
Проникание пластинки в вязкую среду 232
Профиль логарифмический распределения скоростей в турбулентном потоке 469
Процессы выравнивания 33
Пуазейля формула 16, 20, 21, 127
Пуассона уравнение 117
Пульсация 433, 441
 — давления по отношению ко времени 443
 — скорости по отношению ко времени 443
 — температуры 443
 — тензора напряжений 443
Путь перемешивания 467

- Разрыв непрерывности скоростей и плотностей 28
 Рассеяние энергии 102, 458
 Распределение скоростей в частице 35
 — — универсальное 476
 Расход 122
 Рейнольдса критерий 109
 — уравнения для смазочного слоя 197, 222
 — число 24, 107, 350, 434
 — — критическое 124, 129, 385, 408, 411, 436, 465
 — — — верхнее 386
 — — — нижнее 386
 — — малое 225 и д.
- Сдавливание слоя параллельными плоскостями 200
 Сила вязкости (сила внутреннего трения) 30
 — поверхностная 51
 Скорость 9
 — абсолютная удлинения элементарного отрезка 41
 — деформации 10, 27
 — — объёмной 41, 61
 — динамическая (скорость касательного напряжения) 469
 — осреднённого движения системы 440
 — — — частиц в фиксированном объёме и в фиксированном интервале времени 444
 — перемещения 10
 — поля пульсаций 444
 — пульсационного движения точки 440
 — сдвига 33, 40
 — — главная 47
 — смещений частиц 27
 — удлинений главная 44
 — частицы 29
 След за обтекаемым телом 493
 Слой вихревой, диффузия его 315
 — вытеснения 263
 — пограничный 23, 253 и д., 412, 435
 — — асимптотический на пластинке 259
 — — ламинарный 436
 — — на теле вращения 295
 — — при обтекании выпуклого контура 268
 — — турбулентный 436, 484
 — —, устойчивость ламинарного течения в нём 412
 — — смазочный 22, 190 и д.
- Слой смазочный между наклонными пластинками 203
 — — постоянной толщины 200
 — — тонкий 196
 Смазка 22, 190 и д.
 Соотношение интегральное Голубева 266
 — — Кармана 266
 — — Лейбензона 266
 Сопротивление среды 11
 Сопряжённость касательных напряжений 57
 Состояния агрегатные 25
 Сплошность жидкой среды 15
 Среда вязкая 68
 — деформируемая 9
 — пластически вязкая 68
 — с последствием 68
 — с релаксацией напряжений 69
 — сплошная 26
 — упругая 68
 — упруго-пластическая 68
 — чисто вязкая 67
 Стокса оператор 150, 177
 — парадокс 165
 — уравнения обобщённые 226
 — формула для сопротивления шара 181
 Структура турбулентного потока локальная 504
 Струоля число 107
 Струя ламинарная тонкая 282
- Температура 25
 — осреднённая 442
 Тензор единичный 64
 — моментов связи второго порядка 457
 — напряжений 53, 64
 — — осреднённых 442
 — — пульсационных 455
 — плотности потока импульсов 77
 — — — количества движений 34, 77
 — скорости деформации 42
 — структурный локальной турбулентности второго ранга 505
 Теорема Гельмгольца о разложении движения частицы жидкости 38
 — Коши о взаимности напряжений 57
 — об изменении кинетической энергии осреднённого движения жидкости 461
 — — — осреднённого значения кинетической энергии полного движения жидкости в конечном объёме 462

- Теорема Гельмгольца о разложении осредненного значения кинетической энергии пульсационного движения жидкости в конечном объеме 462
- о рассеянии энергии 101
 - — — для турбулентного движения 458 и д.
- Теории турбулентности полуэмпирические 437, 457, 465 и д.
- Теория исчезающей вязкости 252
- пограничного слоя 253 и д.
 - подобия полей пульсации (теория Кармана) 467, 471
 - подобия течений жидкости 23
 - пути перемешивания (теория Прандтля) 467
 - смазки гидродинамическая 190 и д.
 - — — Жуковского 208
 - — — Чаплыгина 208
 - турбулентности статистическая 503
 - Тэйлора 469
 - упругости 14
- Теплопроводность 33
- Течение — см. Движение жидкости
- Толщина вытеснения 263
- пограничного слоя 263
- Трение внешнее 11, 31, 94
- внутреннее 10, 30, 31
 - жидкое 22, 32
 - сухое 22, 32
- Турбулентность — см. Движение жидкости турбулентное
- Тэйлора теория 469
- Уравнение Гельмгольца** 232
- давления в смазочном слое 200
 - изменения внутренней энергии фиксированной частицы 89, 90
 - изменения количества движения 77
 - неразрывности 18, 73
 - несжимаемости 73
 - осредненного движения несжимаемой жидкости 456
 - переноса количеств движения 77
 - — — полной энергии 87
 - притока внутренней энергии за единицу времени в фиксированной частице 90
 - — — тепла для совершенного вязкого газа 90
 - Пуассона 117
 - Стокса векторное обобщенное 226
 - теплопроводности 18
 - характеристическое поля возмущения 400
- Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости 90
- — — в напряжениях 78
 - — — осредненного 454
 - — — пульсационного 454
 - Рейнольдса для смазочного слоя 197, 222
 - Стокса обобщенные 226
 - — — приближенные 156
 - теории пограничного слоя приближенные 278
 - физического состояния 18
- Условие граничное 93 и д.
- — — для пограничного слоя 257
 - начальное 93 и д.
 - прилипания частиц вязкой жидкости к твердой стенке 95
- Устойчивость движения взвешенной частицы в ламинарном потоке 427
- — — кругового между двумя бесконечными цилиндрами 422
 - ламинарных течений 385 и д.
 - — — между параллельными стенками и в пограничном слое 412
 - — — с прямолинейным профилем распределения скоростей 398
- Участок начальный 129, 350, 386
- Формула Бачинского** 35
- Блазуса 483
 - Дюгамеля 304
 - обращения преобразования Лапласа 309
 - Панченкова 35
 - Пуазейля 16, 20, 21, 127
 - Стокса для сопротивления шара при его движении в неограниченной вязкой жидкости 181
- Формулы интегральные для результирующего воздействия жидкости на поступательно движущееся в ней тело 111
- Фруда критерий 109
- число 107
- Функция бигармоническая 158
- источника вихревого слоя 317
 - случайная 503
 - структурная (корреляционная) 503
 - тока 158
- Характеристики статистические локальной турбулентности 504
- Центр частицы 35
- Чаплыгина теория смазки 208
- Частица макроскопическая 28

- Число Рейнольдса 24, 107, 350, 434
— — критическое 124, 129, 385, 408,
411, 436, 465
— — — верхнее 386
— — — нижнее 386
— — малое 225 и д.
— Струхала 107
— Фруда 107
— Эйлера 107
- Члены инерции квадратичные 98
- Шероховатость относительная 484
- Эйлера число 107
Энергия внутренняя 83
— внутренняя удельная 83
— рассеяния 102
— — в пульсационном движении
жидкости 462
— — от пульсационных напряже-
ний 462
Эффект клиновидный 22
- Ядро постоянных скоростей 496
— течения 480
-

Слѣзкин Николай Алексеевич.
Динамика несжимаемой жидкости.
Редактор *Е. И. Оброскова.*
Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*
Корректор *А. Н. Нарезная.*

Сдано в набор 29/IV 1955 г.
Подписано к печати 1/VIII 1955 г.
Бумага 60×92^{1/2}. Физ. печ. л. 32,5. Условн. печ. л. 32,5.
Уч.-изд. л. 31,35. Тираж 5000 экз. Т-04399.
Цена книги 10 р. 90 к. Заказ № 360.

Государственное издательство технико-теоретической
литературы.
Москва, В-71. Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление
полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.